М. В. Працьовитий,
Український державний університет
імені Михайла Драгоманова
Київ, Україна,
prats4444@gmail.com
Н. С. Правіцка
Український державний університет
імені Михайла Драгоманова
Київ, Україна,
n.s.pravitska@npu.edu.ua

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ – ОДИН З ОСНОВНИХ МЕТОДІВ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

У шкільному курсі геометрії, в якому вивчаються елементи декількох геометричних теорій, використовуються різні прийоми та методи задання і дослідження об'єктів, а також розв'язування задач. Це синтетичний метод, алгебраїчний метод, метод координат, векторний метод, їх комбінація, а також метод геометричних перетворень. Геометричні перетворення школярі вивчають на різних рівнях (профільний підхід), за різними програмами. Вчитель має бути здатним і готовим навчати учнів за різними програмами та різними підручниками, має володіти ґрунтовними знаннями з предметної області і навиками та вміннями розв'язувати задачі, а також в доступній формі пояснювати навчальний матеріал на належному науковому рівні та вчити учнів розв'язувати задачі, зокрема з використанням геометричних перетворень площини та простору. Як свідчить практика, опанування методу геометричних перетворень випускниками шкіл має низький рівень.

Майбутні вчителі математики в університетських курсах вивчають кілька груп геометричних перетворень. У курсі аналітичної геометрії – навчальній дисципліні, найближчій до шкільного курсу геометрії (ШКГ), вивчаються рухи, перетворення подібності, афінні перетворення, інверсія і розглядаються їх застосування до різних типів суто геометричних та прикладних задач.

На жаль, навчальний матеріал з теорії геометричних перетворень, викладений у шкільних підручниках, вимагає вдосконалення. Місцями він суперечить загально прийнятим у науці означенням, а в інших місцях є туманим і незрозумілим. Термінологічна грамотність – одна зі складових математичної культури вчителя і учня. Ця педагогічна проблема вимагає вирішення. З цією метою ми здійснили аналіз наявних недоречностей в шкільних підручниках і пропонуємо деякі шляхи часткового вдосконалення. Тут ми акцентуємо увагу на двох моментах.

1. **Перетворення і відображення – не є тотожними (рівнозначними) поняттями! Ототожнювати перетворення і відображення – груба методологічна помилка. А шкільний курс математики не має спотворювати наукові істини**.

Кожна непорожня підмножина L прямого (декартового) добутку множин A і B, тобто

$$L \subset A \times B = \{(a, b): a \in A, b \in B\},$$

називається відповідністю між цими множинами (синонімічний термін: бінарне відношення). Відображенням множини A в множину B називається відповідність між цими множинами, при якій кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B. Якщо множина B числова, то відображення називають функцією.

Перетворенням множини (простору) називають взаємнооднозначне, тобто бієктивне, відображення цієї множини (простору) на себе. Добре відомо, що множина всіх перетворень заданої множини (простору) відносно операції композиція (суперпозиція) утворює групу. Існує альтернативне еквівалентне означення перетворення: «Геометричним перетворенням площини називається оборотне відображення площини самої на себе» [2, стор. 79]. На наш погляд, саме воно є одним з альтернативних варіантів для шкільного курсу геометрії поряд з наявним у підручнику [], оскільки є строго науковим і доступним для розуміння!

Добре відомо, що множина всіх перетворень заданої непорожньої множини (простору) відносно операції композиція (послідовне виконання двох перетворень) утворює групу, нейтральним елементом якої є тотожне перетворення, а симетричним елементом – обернене перетворення.

З групової точки зору, яку в 1872 р у своїй Ерлангенській програмі запропонував Фелікс Клейн, *Евклідова геометрія* є теорією інваріантів групи перетворень подібності простору (площини, прямої), яка включає групу рухів. Основними інваріантами цієї групи є збереження величин кутів, перпендикулярності прямих, форм геометричних фігур. Взагалі кажучи, *Елементарна геометрія* є складовою Евклідової геометрії, а шкільна геометрія є складовою елементарної геометрії.

Афінна геометрія вивчає властивості фігур і відношень простору, які є незмінними при будь-якому афінному перетворенні, тобто є теорією інваріантів групи афінних перетворень, яка включає групу перетворень подібності. Нагадаємо, що перетворення простору називається афінним, якщо воно кожні три точки однієї прямої переводить в три точки однієї прямої. Просте відношення трьох точок однієї прямої – основний інваріант групи афінних перетворень. Нагадаємо, що коли точки M_1, M_2, M – колінеарні, тобто належать одній прямій, причому $M \neq M_2$, то існує єдине число λ таке, що $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$. Це символічно записується $\lambda = (M_1M_2, M)$ і називається простим відношенням точок M_1, M_2, M. При цьому кажуть, що точка М здійснює поділ напрямленого відрізка $\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}$ у відношенні λ. Важливим інваріантом групи афінних перетворень є збереження відношень площ многокутників. Зауважимо, що це метричний інваріант цієї групи. Прикладами афінних перетворень площини є коса симетрія, стиск до прямої, косий стиск, еліптичний та гіперболічний повороти тощо.

Не зважаючи на те, що афінна геометрія є більш загальною теорією по відношенню до евклідової геометрії, значна частина задач елементарної геометрії мають не метричний характер, а афінний. Прийнято вважати, що афінними є ті поняття і властивості плоских фігур, які зберігаються при паралельному проєктуванні на площину. До них відносять колінеарність точок і векторів, а отже, і паралельність прямих, відношення площ квадровних фігур та ін. Прикладом афінного поняття є поняття медіани трикутника, а поняття висоти трикутника не є афінним. Але властивість висот трикутника перетинатись в одній точці є афінною. Аналогічна властивість бісектрис трикутника теж є афінною.

У стереометрії до афінних властивостей відносять паралельність прямих і площин, відношення довжин колінеарних відрізків, відношення об'ємів многогранників тощо.

2. **У шкільному підручнику відсутнє означення форми фігури, хоча це слово використовується без пояснення змісту**. Наприклад, «Які властивості перетворення фігури гарантують збереження її розміру та форми?» [4]. Але що таке розмір фігури чи форма?

Форма геометричної фігури – це спільна властивість всіх подібних між собою геометричних фігур (тих, що переводяться одна в іншу під дією перетворення подібності), тобто це клас еквівалентності фактор-множини всіх фігур простору за бінарним відношенням еквівалентності «бути подібними». Таким чином, форма фігури – це інваріант групи перетворень подібності.

Геометричні перетворення ефективно використовуються при розв'язанні позиційних задач (на побудову та доведення), а також оптимізаційних задач. Ми наведемо приклади ефективного використання геометричних перетворень до розв'язання метричних задач та задач на дослідження.

Задача 1. *Вивести формулу для обчислення площі плоскої фігури, обмеженої еліпсом:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Розв'язання. Розглянемо круг, заданий у прямокутній декартовій системі координат нерівністю $x^2 + y^2 \leq a$ і перетворення площини, яке задається формулами $\varphi\colon \begin{cases} x' = x, \\ y' = \frac{b}{a}y. \end{cases}$

Легко бачити, що фігура F, площу якої вимагається виразити є образом круга, оскільки коло $x^2 + y^2 = a^2$ перетворення φ переходить в заданий еліпс. Тому $S_F = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} \end{vmatrix} S_{\text{кр}} = \pi ab$.

Задача 2. *Відрізок AB – хорда заданого еліпса, C – довільна точка цього еліпса. Якою фігурою є геометричне місце центрів мас системи точок A, B, C?*

Центром мас системи точок A, B, C називається точка O така, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Якщо A, B, C – вершини трикутника, то центром мас цієї системи точок є точка перетину медіан трикутника ABC.

Зауваження. Дана задача є модифікацією задачі 24.62 . Відрізок $AB -$ хорда даного кола, точка $C -$ довільна точка цього кола. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутників ABC (підручник [4]).

Шукане геометричне місце точок є колом з двома вилученими точками, оскільки шукана фігура гомотетична заданому колу при гомотетії, центром якої є середина хорди AB, а коефіцієнт $\frac{1}{3}$ (без образів точок A і B, оскільки за умови C=A і C=B трикутник вироджується).

Література

1. *Аргунов Б.И., Балк М.Б.* Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1966. – 366 с.
2. *Бевз Г.П., Конфорович А.Г., Резніченко З.О., Ченакал Є.О.* Математика: Посібник для факультативних занять у 7 кл. – К.: Рад. школа, 1982.—152 с.
3. *Готман Э.Г., Скопец З.А*. Задача одна – решения разные. – К.: Рад. школа, 1988. – 173с.
4. *Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С.* Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – Х.: Гімназія, 2017. – 304 с.
5. *Колмогоров А.М., Семенович О.Ф., Нагібін Ф.Ф., Черкасов Р.С.* Геометрія 6 клас.—Київ: Радянська школа, 1972. – 126 с.
6. *Погорєлов О.*В. Геометрія: Підруч. для 7-11кл. серед. шк. – К.: Освіта, 1993. – 351 с.
7. *Працьовитий М.*В. Геометричні перетворення. Теоретико-груповий погляд на геометрію. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. — 18с.
8. *Працьовитий М.*В. Геометричні перетворення. Афінні перетворення площини. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. — 40с.
9. *Працьовитий М.*В. Геометричні перетворення. Рухи площини. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. — 44с.
10. *Працьовитий М.*В. Геометричні перетворення. Перетворення подібності площини. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. — 39с.
11. *Працьовитий М.*В. Геометричні перетворення. Інверсія. — К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007.

Працьовитий М.В., Правіцка Н.С. Метод геометричних перетворень – один з основних методів елементарної геометрії.

Анотація. У доповіді обговорюються логічні та методологічні прогалини шкільного курсу геометрії, пов’язані з вивченням геометричних перетворень площини та простору, наводяться приклади задач, які ефектно розв’язуються методом геометричних перетворень площини (метрична задача та задача на дослідження).

Ключові слова: геометричне перетворення, перетворення подібності, метод геометричних перетворень, шкільний курс геометрії, форма геометричної фігури.

Pratsiovytyi M.V., Pravitska N.S. The method of geometric transformations is one of the main methods of elementary geometry.

Abstract. The report discusses logical and methodological gaps in the school geometry course related to the study of geometric transformations of the plane and space, examples of problems that are effectively solved by the method of geometric transformations of the plane (metric problem and research problem) are given.

Keywords: geometric transformation, similarity transformation, method of geometric transformations, school geometry course, shape of a geometric figure.