Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

В.І. Мироник

ЛЕКЦІЇ З РІМАНОВОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Частина І

Чернівці
«Місто»
2023

Зміст

Розділ 1. Тензорний аналіз

1.1. Перетворення координат

Сукупність n незалежних змінних x^i, де i набуває значень від 1 до n, можна розглядати як систему координат в n-вимірному просторі V_n в тому сенсі, що кожна система значень цих змінних визначає точку в просторі V_n. Будемо вважати координати дійсними.

Нехай задано систему n незалежних дійсних функцій φ^i змінних $x^1, x^2, ..., x^n$. Для того щоб ці функції були незалежними, необхідно і досить, щоб якобіан, складений для цих функцій, не дорівнював тотожно нулеві.

Отже,

$$\left|\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^1} & ... & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^1} \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial\varphi^1}{\partial x^n} & ... & \frac{\partial\varphi^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.1}$$

Якщо вважати,що

$$x'^i = \varphi(x^1, ..., x^n), \;\; i = 1, ..., n \tag{1.2}$$

то сукупність змінних x'^i є іншою системою координат у просторі; якщо в праві частини рівностей (1.2) підставити координати x^i будь-якої точки P, то ці рівності визначатимуть координати x'^i тієї ж точки P в новій системі координат. Отже, рівності (1.2) визначають перетворення координат у просторі V_n. Виходячи із умов (1.1), змінні x^i можна виразити через x'^i

$$x^i = \psi^i(x'^1, ..., x'^n), \; i = 1, ..., n. \tag{1.3}$$

Оскільки всі x є функціями від x', то

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}.$$

Але, оскільки всі x незалежні, то ліва частина дорівнює нулю, якщо $k \neq j$, і дорівнює одиниці, якщо $k = j$. Запишемо це у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \delta_j^k, \tag{1.4}$$

де δ_j^k – символ Кронекера.

Аналогічно до (1.4),

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \delta_j^k. \tag{1.5}$$

Якщо в (1.4) фіксувати значення k, а індексу j надавати значення від 1 до n, то одержимо n лінійних рівнянь відносно $\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$.

В точці P простору деякий напрямок визначається диференціалами dx^i; цей самий напрямок визначається в іншій системі координат x'^i диференціалами dx'^i:

$$dx'^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j. \tag{1.6}$$

Надалі, якщо однаковий індекс входить двічі в деякий член: один раз як верхній індекс, а інший – як нижній, то будемо вважати, що це індекс підсумовування. Тобто рівність (1.6) можна записати ще так:

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j, \ (i, j = 1, ..., n). \tag{1.7}$$

Індекс, по якому відбувається сумування, називатимемо фіктивним або німим індексом, оскільки вибір букви, що позначає даний індекс, неістотний. Проте буква, що позначає нефіктивний індекс, не може бути обраною у вигляді позначення фіктивного індексу. Зазначимо, що (1.7) визначає n рівностей.

Використовуючи введене позначення суми, рівності (1.4) та (1.5) можна записати так:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} = \delta^k_j; \quad \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \delta^k_j. \tag{1.8}$$

1.2. Контраваріантні вектори. Конгруенції кривих

Нехай задано систему n функцій λ^j від змінних x і нехай n функцій λ'^i визначаються рівностями

$$\lambda'^i = \lambda^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}, \quad (i, j = 1, ..., n) \tag{1.9}$$

(ми припускаємо, що у функції λ^j, а також у функції $\frac{\partial x'^j}{\partial x^j} = \frac{\partial \varphi^j(x^1,...,x^n)}{\partial x^j}$ підставлені замість незалежних змінних x^i функції $\psi(x'^1, ..., x'^n)$, що входять в (1.3)). Такий вигляд мають, наприклад, рівності (1.7). Якщо рівності (1.9) помножити на $\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}$ і виконати підсумовування за індексом i від 1 до n, то, використовуючи (1.8), одержимо:

$$\frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\lambda'^i = \lambda^j \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial x'^i} = \lambda^j \delta^k_j.$$

Отже, матимемо

$$\lambda^k = \lambda'^i \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}. \tag{1.10}$$

Припустимо, що задано систему функцій λ''^i в системі координат x''^i. Дана система функцій визначається рівностями вигляду (1.9)

$$\lambda''^i = \lambda^k \frac{\partial x''^i}{\partial x^k}.$$

Тоді із (1.10) одержимо

$$\lambda''^i = \lambda'^l \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} \frac{\partial x''^i}{\partial x^k} = \lambda'^l \frac{\partial x''^i}{\partial x'^l}.$$

Зазначимо, що ми замінили в рівності (1.10) фіктивний індекс i на l. Одержана рівність і рівність (1.10) аналогічні до рівності (1.9); це дає змогу говорити, що співвідношення (1.9) володіють груповою властивістю.

Якщо дві системи функцій λ^i і λ'^i пов'язані співвідношеннями вигляду (1.9), то казатимемо, що λ^i є компонентами контраваріантного вектора в системі x^i, а λ'^i – компонентами того ж вектора в системі x'^i. Із цього означення випливає, що будь-які n функцій від x можуть бути прийняті в даній системі координат за компоненти деякого контраваріантного вектора, координати якого в іншій системі координат визначаються рівностями (1.9). Із (1.7) бачимо, що перші диференціали координат у будь-якій системі координат є компонентами контраваріантного вектора, компонентами якого в іншій системі координат є перші диференціали координат в цій другій системі. Визначений у вказаний спосіб контраваріантний вектор задає напрямок у кожній точці простору. Тому використовуватимемо рівноправно терміни "вектор" і "векторне поле".

Якщо λ^i – компоненти контраваріантного вектора, то в кожній точці простору перенесення в напрямку цього вектора задовольняє рівності:

$$\frac{dx^1}{\lambda^1} = \frac{dx^2}{\lambda^2} = ... = \frac{dx^n}{\lambda^n}.$$

Згідно з теорією диференціальних рівнянь такого вигляду, ці рівняння мають $n-1$ незалежний розв'язок

$$\varphi(x^1, x^2, ..., x^n) = c^j, \ (j = 1, ..., n-1), \tag{1.11}$$

де числа c – довільні сталі і матриця $(\frac{\partial\varphi^j}{\partial x^i})$ має ранг $n-1$. Функції φ^j є розв'язками рівняння з частинними похідними

$$\lambda^i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = 0.$$

Якщо виконати перетворення координат (1.2), у якому замість φ^j, де $j = 1, ..., n-1$, візьмемо вказані вище розв'язки, а за φ^n – яку-небудь функцію, вибравши її так, щоб виконувалась умова (1.1), тоді, внаслідок (1.9), одержимо

$$\lambda'^j = 0, \ (j = 1, ..., n-1), \ \lambda'^n \neq 0.$$

Таким чином, якщо задано контраваріантний вектор, то можна так вибрати систему координат, що в ній всі компоненти цього вектора, крім однієї, дорівнюватимуть нулю.

Якщо в (1.11) підставити координати деякої точки P, то визначимо значення сталих c^j, і $n-1$ рівняння (1.11) визначає при даних значеннях c^j криву, що проходить через точку P. Отже, рівняння (1.11) визначають конгруенцію кривих так, що через кожну точку простору V_n проходить одна із цих кривих. Будемо казати, що ця конгруенція визначається векторним полем λ^i і що вектор λ^i в кожній точці є дотичним вектором до кривої конгруенції, що проходить через цю точку. Отже, ми ототожнюватимемо диференціали для кривої з компонентами дотичного вектора.