Олег Бадло
Науковий керівник – доц. Сікора В.С.

Відкриті проблеми математики на факультативних заняттях в ЗЗСО. Піфагорова кімната

Основною метою наших досліджень є донесення до школярів ідеї, що математика може і повинна бути простою. Для цього нами запропоновано власний варіант конспектів двох занять для учнів 8-9 класів за темою «Піфагорова кімната» у рамках циклу факультативних занять «Історія математики» авторства Бевз В.Г. [3]. Для проведення таких занять учні повинні знати теорему Піфагора, а запропоновані нами завдання для виконання певних переборів допоможуть їм у закріпленні вмінь роботи з натуральними числами та знаходження довжин сторін прямокутних трикутників.

Заняття розпочинається з постановки задачі про *піфагорову кімнату* – прямокутний паралелепіпед, довжини всіх сторін, всіх діагоналей граней та четвертої (внутрішньої) діагоналі якого є цілими числами [1, 2]. Далі нами запропоновано розглянути історичну інформацію щодо виникнення такої задачі, як розширення задачі про піфагорову трійку. А саме, прямокутник зі сторонами a, b (у класичному визначенні – прямокутний трикутник з катетами a, b) називається *піфагоровим*, якщо виконуються умови: $a, b \in \mathbb{N}$; $d = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{N}$. У такому випадку кажуть, що числа a, b, d утворюють *піфагорову трійку*.

Отже, прямокутний паралелепіпед з ребрами a, b, c, які виходять з однієї вершини, називається *піфагоровою кімнатою*, якщо: (1) $a, b, c \in \mathbb{N}$; (2) $\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + c^2}, \sqrt{b^2 + c^2} \in \mathbb{N}$;

$$(3)\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \in \mathbb{N}.$$

Числа $a, b,$ c називають *сторонами піфагорової кімнати*.

Для актуалізації опорних знань, нагадуємо властивість добування кореня квадратного з натурального числа: *якщо деяке ціле число є повним квадратом натурального числа, то його остання цифра дорівнює 0, 1, 4, 5, 6 або 9. В усіх інших випадках число не є повним квадратом*.

Досі не знайдено жодної трійки чисел, які задовольняли би всі умови (1)-(3) одночасно. Проте немає доведення неможливості такої побудови – наразі відомо про проведений перебір всіх можливих чисел до 10^{12}, але позитивних результатів немає.

Наведена інформація пробуджує цікавість учнів до задачі про Піфагорову кімнату, посилює їх бажання взяти участь в спрощенні перебору всеможливих розмірностей піфагорової кімнати. Тому на факультативних заняттях ми розглядаємо запропонований нами алгоритм такої перевірки.

Теорема. *Піфагорова кімната зі сторонами a, b, c існуватиме лише тоді, коли остання цифра кожного з чисел*

$$a^2 + b^2,\ a^2 + c^2,\ b^2 + c^2,\ a^2 + b^2 + c^2 \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}.$$

Для отримання перших результатів від перебору можливих закінчень потрібно перебрати всі числа $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, що дорівнює 10^3 варіантів. Очевидно, що це забагато навіть якщо розділити цю кількість між учнями великого класу. Тому трійки, які відрізняються лише порядком запису елементів, вражатимемо однією трійкою – для наших міркувань вони абсолютно однакові. З урахуванням цього залишиться $C_{10}^3 = 220$ можливих трійок. Проте й цю кількість можна ще трохи зменшити. Для цього враховуємо, що можливі виміри піфагорової кімнати перебираються послідовно, тому варто розглядати лише такі трійки a, b, c, що НСД $(a, b, c) = 1$. Отже, знаючи лише останню цифру деякого числа, можна перевірити її подільність на 2 та на 5. З урахуванням вищесказаного залишається 182 трійки. Нами розроблено роздатковий матеріал та реалізація даного перебору на Python чи Scratch, яку демонструємо учням та пропонуємо проаналізувати отримані результати і зробити наступний крок для знаходження розмірів Піфагорової кімнати.

Список літератури

1. Walter Steurer, Sofia Deloudi. Crystallography of Quasicrystals: Concepts, Methods and Structures. Springer, 2009. Т. 126. С.91–92.

2. David Wells. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry. New York : Penguin Books, 1991. С. 260–261.

3. Прокопенко Н. С., Вашуленко О. П., Єргіна О. В. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. І. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором . Х.: Ранок, 2011. 320 с.