Існування розв'язку задачі Коші для стохастичного рівняння з частинними похідними та вінеровими збуреннями

Перун Галина[1], *Ясинський Володимир*[2]

g.perun@chnu.edu.ua, vkyasynskyy@ukr.net

[1] *Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

[2] *Канада*

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P)$ задано потік неспадних σ - алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $F_t \subset F$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ при $t_1 < t_2$. Випадкова функція $u(t, x, \omega), (t, x) \in \Pi$, $\Pi \equiv R^1 \times R^1$, $\omega \in \Omega$ вимірна стосовно σ - алгебри F_t із імовірністю 1 є розв'язком задачі Коші для лінійного диференціального рівняння спеціальної конструкції

$$\frac{\partial}{\partial t}[Q(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})u(t, x, \omega)] + [Q(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})u(t, x, \omega)] =$$

$$= [Q(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})u(t, x, \omega)]dw(t, \omega), \tag{1}$$

$$[Q(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})u(t, x, \omega)] \mid_{t=0} = [Qu]_0. \tag{2}$$

Тут $w(t, \omega)$ – стандартний скалярний вінерів процес. Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо функцію $u(t, x, \omega)$, яка з імовірністю 1 при кожному (t, x) задовольняє рівняння

$$Q(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})u(t, x, \omega) = [Qu]_0 + \int_0^t Q(B, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x})u(s, x, \omega)ds +$$

$$+ \int_0^t Q(C, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x})u(s, x, \omega)dw(s, \omega) \tag{3}$$

Питання існування розв'язку задачі (1), (2) вивчатимемо у просторі m_T функцій зі скінченною нормою

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx\right)^2 dt \equiv \int_0^T \|u\|^2_{L_2, E} dt. \tag{4}$$

де E - операція математичного сподівання.

Задачу розв'язуватимемо методом інтегрального перетворення Фур'є. При цьому скористаємось

Лема. Перетворення Фур'є за змінною x для функції $u(t, x, \omega)$

$$v(t, \sigma, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \tag{5}$$

не виводить її за межі простору m_T при довільному скінченному T.

На основі цього сформулюємо теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

а) корені многочлена $P(\lambda, i\sigma) = \lambda Q(A, \lambda, i\sigma) + Q(B, \lambda, i\sigma)$ *при всіх* $\sigma \neq 0$ *задовольняють нерівність*

$$Re\lambda \leq \varphi(\sigma) < 0, \ \varphi(0) = 0;$$

б) задача Коші для рівняння (1) *за умови, що* $C = 0$ *має розв'язки при кожному* $t \in [0, T]$ *в* $L_{2,E}$.

Тоді існує з імовірністю 1 розв'язок задачі (1), (2) *в просторі* m_T.

Доведення твердження грунтується на припущенні про існування фундаментального розв'язку [1]

$$H(t, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{P(\lambda, i\sigma)} \tag{6}$$

відповідного детермінованого рівняння, яке отримане в образах Фур'є для рівняння (1) та теоремі Планшерея. Тут Γ – контур, що охоплює нулі многочлена $P(\lambda, i\sigma)$.

1. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир. 1992. – 301 с.