

УДК 517.925

СХЕМИ АПРОКСИМАЦІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Світлана Іліка, Олександр Матвій, Лариса Піддубна, Ігор Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

s.ilika@chnu.edu.ua, o.matvij@chnu.edu.ua,
l.piddubna@chnu.edu.ua, i.cherevko@chnu.edu.ua

Математичними моделями багатьох фізичних і технічних процесів є диференціально-різницеві та диференціально-функціональні рівняння [1 – 2]. Отримати точний розв'язок таких рівнянь вдасться тільки у найпростіших випадках, тому побудова їх наближених розв'язків має важливе значення. У цій роботі розглядаються схеми апроксимації диференціально-функціональних рівнянь спеціальними системами звичайних диференціальних рівнянь, які виявилися ефективними для прикладних застосувань [3 – 4].

Розглянемо початкову задачу для рівняння із запізненням

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t), x(t - \tau)), \quad x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (1)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $F(t, u, v)$ – неперервна функція.

Згідно з методикою [3 – 4] початковій задачі (1) поставимо у відповідність апроксимуючу систему звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dt_0}{dt} &= F(t, z_0, z_m), \quad \frac{dz_j}{dt} = \frac{m}{\tau} (t_{j-1}(t) - z_j(t)), j = \overline{1, m}, \\ z_j(t_0) &= \varphi\left(t_0 - \frac{j\tau}{m}\right), j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Теорема [3 – 5]. *Якщо розв'язок задачі (1) задовольняє умову Ліпшиця на $[t_0 - \tau, T]$, тоді $\left| x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_j(t) \right| \leq \frac{K\tau}{\sqrt{m}}$, $t_0 \in [t_0, T]$, $K > 0$. Якщо розв'язок $x(t)$ задачі (1) є неперервним на відрізку $[t_0 - \tau, T]$, тоді $\left| x\left(t - \frac{j\tau}{m}\right) - z_j(t) \right| \leq \beta\left(\omega\left(x, \frac{\tau}{m}\right)\right)$, $j = \overline{0, m}$, $t \in [t_0, T]$, де $\beta(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, $\omega(x, \tau/m)$ – модуль неперервності функції $x(t)$ на $[t_0 - \tau, T]$.*

Подальше вивчення схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь в просторах неперервних функцій здійснено у працях [5 – 7].

Побудова та обґрунтування схем апроксимації лінійних та квазілінійних диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь досліджено в роботі І.М. Черевка та С.А. Іліки [8]. Вивчення зв'язків між диференціально-різницевиими рівняннями і відповідними апроксимуючими системами звичайних диференціальних рівнянь дозволили запропонувати алгоритми розв'язання низки прикладних задач. У роботах [5 – 7] запропоновано схеми апроксимації неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь, а методика дослідження стійкості розв'язків таких рівнянь наведена в роботах [5, 9]. Конструктивні алгоритми побудови областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями одержані в [10].

1. *Schiesser W.E.* Time delay ODE/PDE models. Applications in biomedical science and engineering. – Boca Rona, 2019. – 250 p.
2. *Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M.* Functional differential equations: advances and applications. – John Wiley & Sons, 2016. – 368 p.
3. *Repin Y.M.* About approximation replacement system with delay by ordinary differential equations // APM. – 1965. – **29**, No. 2. – P. 226–245.
4. *Halanay A.* Approximations of delays by ordinary differential equations // Recent advances in differential equations. – New York : Academic Press, 1981. – P. 155–197.
5. *Cherevko I.M., Pidubna L.A.* Approximations of differential-difference equations and calculations of nonasymptotic roots of quasipolynomials // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations. – 1999. – **28**, No. 1. – P. 15–21.
6. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, No. 1. – С. 42–50.
7. *Матвії О.В., Черевко І.М.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, № 2. – С. 208–216.
8. *Іліка С.А., Черевко І.М.* Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55**, № 1. – С. 39–48.
9. *Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A.* Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability // 11th Int. Conf. on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021, Deggendorf, Germany, 15–17 September 2021. – P. 49–52.
10. *Tuzyk I., Cherevko I.* Algorithms for studying the stability of linear systems with delay // 12th Int. Conf. on Advanced Computer Information Technologies (ACIT'2022, 26–28 September 2022, Slovakia). – P. 164–167.

SCHEMES OF APPROXIMATION OF DIFFERENTIAL FUNCTIONAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATION

The schemes of approximation of differential-difference equations by systems of ordinary differential equations are considered and the connections between their solutions are investigated. Numerical algorithms for studying the stability of linear systems with delay are constructed and their coefficient regions of stability are modeled.