Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Інститут математики НАН України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова
Волинський національний університет імені Лесі Українки

ДЕВ'ЯТНАДЦЯТА МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМЕНІ АКАДЕМІКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

Тези доповідей

Київ – 2023

National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
Taras Shevchenko National University of Kyiv
National Pedagogical Dragomanov University
Lesya Ukrainka Volyn National University

XIX INTERNATIONAL SCIENTIFIC MYKHAILO KRAVCHUK CONFERENCE

Abstracts

Kyiv – 2023

XIX Міжнародна наукова конференція імені академіка Михайла Кравчука, присвячена 125-річчю КПІ ім. Ігоря Сікорського

`https://matan.kpi.ua/uk/kravchuk-conf-2023/`

Почесний програмний комітет

Програмний комітет

Організаційний комітет

Секції

Секція 1. Диференціальні та інтегральні рівняння, їх застосування
Секція 2. Алгебра, геометрія, математичний аналіз
Секція 3. Теорія ймовірностей та математична статистика
Секція 4. Інформаційні системи та технології в освіті
Секція 5. Історія і методика викладання математики та інформатики
Секція 6. Математична фізика та теоретична фізика

Матеріали Дев'ятнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 11–12 жовтня 2023 року, Київ, КПІ ім. Ігоря Сікорського.

XIX International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference,
dedicated to the 125th anniversary of Igor Sikorsky
Kyiv Polytechnic Institute
https://matan.kpi.ua/en/kravchuk-conf-2023/

Sections

Section 1. Differential and integral equations, their applications
Section 2. Algebra, geometry, calculus
Section 3. Probability theory and mathematical statistics
Section 4. Information systems and technologies in education
Section 5. History and methodology of teaching mathematics and informatics
Section 6. Mathematical physics and theoretical physics

—–

Proceedings of Nineteenth International Scientific Mykhailo Kravchuk Conference, October 11–12, 2023, Kyiv, Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute.

I

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS, THEIR APPLICATIONS

GENERALIZED OPTIMAL CONTROL OF PSEUDOPARABOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL SYSTEMS IN THE CLASS OF GENERALIZED FUNCTIONS

A. ANIKUSHYN, A. ANDARAL

Let Ω be a bounded domain in $\mathbb{R}^n$ with a smooth boundary $\partial\Omega$. Consider the cylindrical region $Q = \Omega \times (0,T)$ and the linear equation with a Volterra-type integro-differential operator:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}u := a(x)u_t - \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{tx_j})_{x_i} + b(x)u - \sum_{i,j=1}^{n}(b_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + \\ \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \left(K_i(x,t,\tau)u_{x_i}\right)_{x_i} \, d\tau = f(x,t),\end{gathered} \tag{1}$$

with the initial-boundary conditions of the Dirichlet type:

$$u|_{x\in\partial\Omega} = 0, \;\; u|_{t=0} = 0. \tag{2}$$

Here, $u(x,t)$ describes the system's state within the region Q.

Equations of this type are encountered when solving various problems in applied mathematics: the study of fluid and gas filtration in porous media and media with "cracks", heat conduction in heterogeneous media, ion migration in soil, wave propagation in dispersive media, and thin elastic glass, etc [1].

Many results regarding well-posedness, optimal control, and controllability of processes described by pseudo-parabolic equations have been obtained by S.I. Lyashko using the methodology of a priori inequalities in negative norms (see, e.g., [2], [3], and the cited references). As it turns out, this approach can be successfully applied to Dirichlet problems for integro-differential equations with Volterra-type integral components. For instance, in the work [4], a problem for elliptic equations was studied, and in the works [5], problems of parabolic type were investigated.

In our study, we establish a priori inequalities for the problem (1)-(2), thus extending the class of equations to which the aforementioned method can be applied. Based on these inequalities, we justify the well-posedness of the initial-boundary value problem. Finally, we present a theorem on the existence of optimal control, where the control is realized through various types of operators via the right-hand side of equation (1). It is worth noting that the mentioned control operators act in the spaces of generalized functions, which can model an impulse-pointwise action on the system.

We assume that $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\{b_{ij}\}_{i,j=1}^n \subset C^1(\overline{\Omega})$, $a, b \in C(\overline{\Omega})$ such that, for all $x \in \Omega$, the following property hold: $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\;b_{ij}(x) = b_{ji}(x)$, $\;a(x) \geqslant 0$, $\;b(x) \geqslant 0$, and the coefficients $a_{ij}(x)$ and $b_{ij}(x)$ satisfy the conditions for any

$\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$, and $x \in \overline{\Omega}$: $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0$, where α is some positive constant. Additionally, we assume that the kernels $K_i(x,t,\tau)$ are continuously differentiable. In particular, for some constant M, we have $|K_i(x,t,\tau)| < M$ for all $x \in \Omega$ and $t, \tau \in [0,T]$.

Remark 1. We note that the conditions for the smoothness of the coefficients in the differential part are the classical conditions from [1].

Let us consider the problem of optimal control for a system whose evolution is described by the equation

$$\mathcal{L}u = f + \mathcal{A}h. \tag{3}$$

Here, $h = \{(t_k, \varphi_k(x))\}_{k=1}^{d}$ represents the control belonging to a certain set of admissible controls $\mathcal{U}$ in the control space $\mathcal{H} = \left([0,T] \times L_2(\Omega)\right)^d$. The control operator is defined as

$$\mathcal{A}h = \sum_{k=1}^{d} \delta(t - t_k) \otimes \varphi_k(x), \quad t, t_k \in [0,T], \varphi_k(x) \in L_2(\Omega).$$

The functional $J(h) = \Phi(u(h))$ is defined on the solutions of equation (3), which needs to be minimized subject to $h \in \mathcal{U}$.

It can be proven [1] that the operator $\mathcal{A}$ can be considered as a mapping from the control space $\mathcal{H}$ to $W^-_{BR^+}$ and is weakly continuous. The proven a priori inequalities allow us to state (see [1]) the following theorem:

Theorem 1. *Let the state of the system be described by the solution of problem (3) with the given $\mathcal{A}$ and $\mathcal{H}$. Suppose that the set of admissible controls $\mathcal{U}$ is closed, convex, and bounded in $\mathcal{H}$, and the performance criterion $\Phi(\cdot) : H^+_{BR} \to \mathbb{R}$ is weakly lower semi-continuous with respect to the state of the system $u(t,x,h)$ and is bounded from below. Then, an optimal control for system (3) exists.*

References

[1] Lyashko S.I. (2002). *Generalized Optimal Control of Linear Systems with Distributed Parameters.* Kluwer Academic Publishers.

[2] Lyashko S.I., Semenov V.V. (2001). Controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions. *Cyber. and Syst. Anal.*, vol. 37, pp. 13–32.

[3] Sergienko I.V., Khimich O.M., Klyushin D.A., Lyashko V.I., Lyashko S.I., Semenov V.V. (2023). Formation and Development of the Scientific School of the Mathematical Theory of Filtration *Cyber. and Syst. Anal.*, vol. 59, pp. 61–70.

[4] Anikushyn A.V. (2010). Generalized Solvability of Linear Elliptic Type Integro-Differential Equations *Visn. Kyiv. Univer.*, no. 3, pp. 163–168 (in Ukrainian).

[5] Hulianytskyi A.L., Anikushyn A.V. (2014). Generalized solvability of parabolic integro-differential equations *Diff. Eq.*, vol. 50, no. 1, pp. 98–109.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
Email address: anik_andrii@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
Email address: aandaral3@gmail.com

APPROXIMATION OF SOLUTIONS TO GENERIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS IN SOBOLEV SPACES

O. M. ATLASIUK

We study linear systems of ordinary differential equations of an arbitrary order on a finite interval with the most general (generic) inhomogeneous boundary conditions in Sobolev spaces. We obtain the results about continuity in a parameter of solutions to the systems with the most general inhomogeneous boundary conditions [1, 2]. We also show some applications of these results to the solutions of multipoint boundary-value problems [3]. The theorem on the approximation of solutions to inhomogeneous generic boundary-value problem by solutions of the multipoint boundary-value problems is presented.

Let a finite interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ and the next parameters be given

$$\{m,\, n+1,\, r,\, l\} \subset \mathbb{N},\; 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

By $W_p^{n+r} = W_p^{n+r}\big([a,b];\mathbb{C}\big) := \big\{y \in C^{n+r-1}[a,b] \colon y^{(n+r-1)} \in AC[a,b],\, y^{(n+r)} \in L_p[a,b]\big\}$ we denote a complex Sobolev space and set $W_p^0 := L_p$. This space is a Banach one with respect to the norm

$$\|y\|_{n+r,p} = \sum_{k=0}^{n+r-1} \|y^{(k)}\|_p + \|y^{(n+r)}\|_p,$$

where $\|\cdot\|_p$ is the norm in $L_p\big([a,b];\mathbb{C}\big)$. Similarly, by $(W_p^{n+r})^m := W_p^{n+r}\big([a,b];\mathbb{C}^m\big)$ and $(W_p^{n+r})^{m\times m} := W_p^{n+r}\big([a,b];\mathbb{C}^{m\times m}\big)$ we denote Sobolev spaces of vector-valued functions and matrix-valued functions, respectively, whose elements belong to the function space W_p^{n+r}.

Let us consider a linear boundary-value problem, with $1 \leqslant p < \infty$,

$$(Ly)(t) := y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \quad By = c, \qquad (1)$$

where, matrix-valued functions $A_{r-j}(\cdot) \in (W_p^n)^{m\times m}$, a vector-valued function $f(\cdot) \in (W_p^n)^m$, a vector $c \in \mathbb{C}^{rm}$, B is a linear continuous operator $B\colon (W_p^{n+r})^m \to \mathbb{C}^{rm}$, and an unknown vector-valued function $y(\cdot) \in (W_p^{n+r})^m$.

The boundary-value problem (1) is a Fredholm one with index zero.

Let us also consider a sequence of multipoint boundary-value problems

$$(L_k y_k)(t) := y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y_k^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in (a,b), \qquad (2)$$

$$B_k y_k := \sum_{j=0}^{N} \sum_{l=0}^{n+r-1} \beta_k^{(l,j)} y^{(l)}(t_{k,j}) = c, \qquad (3)$$

where $k, N \in \mathbb{N}$, $\beta_k \in \mathbb{C}^{rm\times m}$, $t_{j,k} \in (a, b)$.

Theorem 1. *For the problem* (1) *there is the sequence of the multipoint problems* (2), (3) *such that they are well-posedness for sufficiently large k and an asymptotic property is fulfilled*

$$y_k \to y \quad \textit{in} \quad (W_p^{n+r})^m \quad \textit{for} \quad k \to \infty.$$

The sequence can be chosen independently of f and c, and constructed explicitly.

This is joint result with professor Mikhailets.

References

[1] Mikhailets V.A, Atlasiuk O.M. (2023). On differential systems in Sobolev spaces with generic inhomogeneous boundary conditions. *arXiv:2305.00495*, 8 pp.

[2] Mikhailets V.A, Atlasiuk O.M. (2020). Continuity in a parameter of solutions to boundary-value problems in Sobolev spaces. *arXiv:2005.03494*, 10 pp.

[3] Atlasiuk O.M. (2021). Limit theorems for solutions of multipoint boundary-value problems with a parameter in Sobolev spaces. *Ukrain. Math. J.*, vol. 72, no. 8, pp. 1175–1184.

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute and Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine; Institute of Mathematics of the CAS, Prague, Czech Republic

Email address: hatlasiuk@gmail.com

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR NONHOMOGENEOUS SYSTEM OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THERD ORDER

G. KUDUK

Let $H(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ be a class of certain function, $K_{L,M}$ be a class of quasi-polynomials of the form

$$f(t,x) = \sum_{i=1}^{n} Q_i(t,x) e^{\alpha_i x + \beta_j t}, \tag{1}$$

where $Q_{ij}(t,x)$ are given polynomials, $M \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_i \in M$, $\alpha_k \neq \alpha_l$, for $k \neq l$, $\beta_j \in M$, $\beta_k \neq \beta_l$, for $k \neq l$. Each quasi-polynomial (1) defines a differential operator $f\left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)$ of finite order on the class of certain function, in the form $\sum_{i=1}^{n} Q_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \exp\left[\alpha_i \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta_j \frac{\partial}{\partial \nu}\right]\Bigg|_{\lambda=\nu=0}$.

Let be $T_{kjp}(t,\lambda) = \widetilde{l}\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right) W(t,\lambda)$, $j = 1,...,n$, $p = 1,...,n$, $k = 1,2$, satisfies of system of equations

$\sum_{j=1}^{n} l_{ij}\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right) T_j(t,\lambda) = 0, \quad i = 1,...,n$, where $\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right) = \delta_{ij} \frac{d^3}{dt^3} - a_{ij} \frac{d^2}{dt^2} - b_{ij} \frac{d}{dt}$, $\delta_{ij} - c_{i,j}$ - symbol Kroneckera. Let $L(\lambda,\nu) = \|L(\nu,\lambda)\|_{ij=1,...,n}$, $\psi(\nu,\lambda) = \det L(\nu,\lambda)$, $\widetilde{l}\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right)$ - algebraic component element $\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right)$ is matrix $L(\lambda,\nu)$. $W(t,\lambda)$ is a solution of the problem $\psi\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right) W(t,\lambda) = 0$, satisfies conditions $W^j(0,\lambda) = \delta_{j,2n-1}$, $j = 2n-1$, let be $\eta(\lambda)$ ba a certain function.

Denote be

$$P = \{\lambda \in \mathbb{C} : \eta(\lambda) = 0\} \tag{2}$$

In the strip $\Omega = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in (0,T), x \in \mathbb{R}^n\}$ we consider problem

$$\frac{\partial^3 U_i}{\partial t^3} + \sum_{j=1}^{n} \left\{ a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial t} + c_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} U_j(t,x) = f_i(t,x), \tag{3}$$

$$\int_{T_1}^{T_2} t^k U_i(t,x) dt + \int_{T_3}^{T_4} t^k U_i(t,x) dt = 0, \quad k = 0,1,2, \quad i = 1,...,n, \tag{4}$$

where $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, are differential expressions with entirel functions $a_{ij}(\lambda) \neq 0, b_{ij}(\lambda) \neq 0$

Theorem 1. *Let $f_i(t,x) \in K_{L,M}$, $i = 1,...,n$, $k = 1,2$, then the class $K_{M\setminus P}$ exist and unique solution of the problem (3), (4), where P is set (2). Solution of the problem (3), (4) can be represented in the form*

$$U_j(t,x) = \sum_{k=0}^{1}\sum_{p=1}^{n} f_{kp}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\left\{\frac{1}{\eta(\lambda)}T_{kjp}(t,\lambda)\exp[\lambda x]\right\}\Bigg|_{\lambda=\nu=0}.$$

Solution of the problem (3), (4) according to the differential-symbol [1, 2] method exists and uniquess in the class of quasi-polynomials.

References

[1] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M. (2002). *Generalized Scheme of Separation of Variables. Differential-Symbol Method.* Publishing House of Lviv Polytechnic Natyonaly University, 292 p. (in Ukrainian).

[2] Kalenyuk P.I., Nytrebych Z.M., Kohut I.V., Kuduk G. (2015). Problem for nonhomogeneous evolution equation of second order with homogeneous integral conditions. *Math. Methods and Phys.- Mech. Polia*, vol. 58, no. 2, pp. 7–19.

Faculty of Mathematics and Natural Sciences University of Rzeszow, Graduate of University, Rzeszow, Poland

Email address: `gkuduk@onet.eu`

PERTURBED MOTIONS OF A THE LAGRANGE TOP CLOSE TO PSEUDOREGULAR PRECESSION

D. D. LESHCHENKO, T. O. KOZACHENKO

We present a new approach for the investigation of perturbed motions of the fast Lagrange top for perturbations which assumes averaging with respect to the phase of the rotation angle. Asymptotic approach permits to obtain some qualitative results and to describe evolution of rigid body motion using simplified averaged equations.

We make the following initial assumptions which main that the direction of the angular velocity of the body is close to the axis of dynamic symmetry; the angular velocity is large, so that the kinetic energy of the rigid body is much greater that the potential energy. The motion of a rigid body in this case will correspond to a pseudoregular precession [1].

Close approach for solving of the similar problem was presented in [2]. In the paper [3], the perturbed fast rotations of a rigid body, close to regular procession, are considered.

As an example of the technique, we consider perturbed Lagrange motion with allowance for the torques acting on the rigid body from the surrounding medium and in the second case under the action of a torque that is constant in the attached axes and is applied along the axis of symmetry.

References

[1] Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. (2017). *Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass.* Cham: Springer.

[2] Leshchenko D.D., Ershkov S., Kozachenko T. (2022). Rotations of a Rigid Body Close to the Lagrange Case under the Action of Nonstationary Perturbation Torque. *J.Appl. Comput.Mech.*, vol. 8, no. 3, pp. 1023–1031.

[3] Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Chernousko F.L. (1986). Perturbed motions of a rigid body that are close to regular precession. *Izv. AN SSSR. Mekh. Tver. Tela.*, vol. 21, no. 5, pp. 3–10.

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine
Email address: leshchenkodmytro@gmail.com

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa, Ukraine
Email address: kushpil.t.a@gmail.com

ON GENERALIZATION OF THE KIGURADZE THEOREM

V. A. MIKHAILETS, O. B. PELEKHATA, N. V. REVA

We investigate the limiting behavior of solutions of inhomogeneous boundary-value problems for the systems of linear ordinary differential equations on a finite interval. A generalization of the Kiguradze theorem (1987) on the passage to the limit is obtained.

On a finite interval $(a, b) \subset \mathbb{R}$ we consider a system of $m \in \mathbb{N}$ first-order linear differential equations

$$y'(t, 0) + A(t, 0)y(t, 0) = f(t, 0) \tag{1}$$

with inhomogeneous boundary conditions

$$B(0)y(\cdot, 0) = c(0), \tag{2}$$

and linear continuous operator

$$B(0) : C\left([a, b]; \mathbb{C}^m\right) \to \mathbb{C}^m.$$

We suppose that the matrix function $A(\cdot, 0) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^{m\times m})$, vector function $f(\cdot, 0) \in L_1([a, b]; \mathbb{C}^m)$ and vector $c(0) \in \mathbb{C}^m$.

The solution of the system differential equations (1) is a vector function $y(\cdot) \in W_1^1([a, b]; \mathbb{C}^m)$ absolutely continuous on the segment $[a, b]$ satisfying the vector equation (1) almost everywhere. It was shown the boundary-value problem (1), (2) is a Fredholm problem with index zero. For the unique solvability of this problem everywhere, it is necessary and sufficient to guarantee that the corresponding homogeneous boundary-value problem have solely the trivial solution.

Assume that, parallel with problem (1), (2), there is a sequence of inhomogeneous boundary-value problems for systems of first-order differential equations

$$y'(t, n) + A(t, n)y(t, n) = f(t, n) \tag{3}$$

with boundary condition

$$B(n)y(n) = c(n), \tag{4}$$

where the matrix-functions $A(\cdot, n)$, the operators $B(n)$, the functions $f(\cdot, n)$ and the vectors $c(n)$ satisfy the conditions presented above for problem (1), (2).

Assume that the solution of problem (1), (2) and the solutions of problems (3), (4) are uniquely defined.

Let find conditions on the left-hand right-hand sides of problems (3), (4) such that their solutions $y(\cdot, n)$ exist and are unique for sufficiently large $n \in \mathbb{N}$ and fulfilled limit equality

$$\|y(\cdot,n) - y(\cdot,0)\|_\infty \to 0, \quad n \to \infty, \tag{5}$$

where $\|\cdot\|_\infty$ – sup-norm on the finite interval $[a,b]$.

For the first time, these problems were investigated by [1] in the case of real-value functions. He obtained conditions of boundless for the left-hand parts of systems. Later Mikhailets, Kodliuk and Reva [2] generalized this result in the case of complex-value function with strongly conditions for the right-hand parts of systems.

Denote by $\mathcal{M}^m := \mathcal{M}(a,b;m), m \in \mathbb{N}$ class of sequences of the matrix functions $R(\cdot,n) : \mathbb{N} \to L_1([a,b];\mathbb{C}^{m\times m})$, such that solution $Z(\cdot,n)$ of Cauchy problem

$$Z'(\cdot,n) + R(\cdot,n)Z(\cdot,n) = O, \quad Z(a,n) = I_m$$

satisfy the limit equality

$$\|Z(\cdot,n) - I_m\|_\infty \to 0,$$

where I_m – identity $(m\times m)$-matrix.

Assume that

$$A_F(\cdot,n) := \begin{pmatrix} A(\cdot,n) & F(\cdot,n) \\ O_m & O_m \end{pmatrix} \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{2m\times 2m}),$$

$$R_{A_F}(\cdot,n) := A_F(\cdot,n) - A_F(\cdot,0) \in L_1([a,b];\mathbb{C}^{2m\times 2m}),$$

where O_m – zero $(m\times m)$-matrix.

Theorem 1 ([3]). *Let the problems* (1),(2), (3),(4) *satisfy conditions:*

(1) $R_A(\cdot,n) \in \mathcal{M}^m$,
(2) $R_{A_F}(\cdot,n) \in \mathcal{M}^{2m}$,
(3) $B(n)y \to B(0)y, \quad y(\cdot) \in C([a,b];\mathbb{C}^m)$,
(4) $c(n) \to c(0)$,
(5) $\|R_F^\vee(\cdot,n)\|_\infty \to 0$.

Then the unique solutions of problems (1), (2) *and* (3), (4) *satisfy the limit equality* (5).

References

[1] Kiguradze I.T. (1988). Boundary-value problems for systems of ordinary differential equations. *J. Soviet Math.*, no. 2. pp. 2259–2339.

[2] Kodliuk T.I., Mikhailets V.A, Reva N.V. (2013). Limit theorems for one-dimensional boundary-value problems. *Ukr. Math. J.*, vol. 65, no. 1, pp. 77–90.

[3] Mikhailets V.A, Pelekhata O.B., Reva N.V. (2017). On the Kiguradze theorem for linear boundary-value problems. *Dopov. Nats. Acad. Nauk Ukr.*, no. 12, pp. 8–13.

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Politechnic Institute", Kyiv, Ukraine

Email address: pelehataob2015@gmail.com

POVZNER–WIENHOLTZ–TYPE THEOREMS FOR QUASI-DIFFERENTIAL STURM–LIOUVILLE OPERATORS

V. MOLYBOGA

The problem of symmetric operators being self-adjoint is one of the main problem in the theory of differential operators and serves as the basis for the analysis of their spectral properties and scattering problems. Investigation of this problem for the Sturm–Liouville and Schrödinger operators in the space $L^2(\mathbb{R}^n)$ is inspired by the problems of mathematical physics and has numerous applications. The results that were obtained for this problem in the case of regular coefficients are rather complete. Hartman [1] and Rellich [2] were the first to show that boundedness from below of the operator, generated by the Sturm–Liouville differential expression

$$\mathrm{l}(u) := -(py')' + qy$$

in the Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$ together with the integral condition on the function $p > 0$:

$$\int_0^\infty p^{-1/2}(t)dt = \int_{-\infty}^0 p^{-1/2}(t)dt = \infty, \qquad \text{(which is obviously satisfied if } p \equiv 1),$$

are sufficient for the minimal operator to be self-adjoint.

Independently Povzner [3] and later Wienholtz [4] established that operator

$$L_0 = -\Delta u + qu, \qquad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

being semi-bounded implies it being essentially self-adjoint in the space $L^2(\mathbb{R}^n)$, if function q is real-valued and continuous. Later conditions on the potential q were significantly weakened

In the talk we discuss symmetric operators L_0 associated in the complex Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$ with a formal differential expression

$$\mathrm{l}[u] := -(pu')' + qu + i((ru)' + ru') \tag{1}$$

under minimal conditions on the regularity of the coefficients. They are assumed to satisfy conditions

$$q = Q' + s; \quad \frac{1}{\sqrt{|p|}}, \frac{Q}{\sqrt{|p|}}, \frac{r}{\sqrt{|p|}} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \quad s \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{p} \neq 0 \ \text{ a.e.}, \tag{2}$$

where the derivative of the function Q is understood in the sense of distributions, and all the coefficients p, Q, s, r are real-valued functions. The main result of the talk are constuctive sufficient conditions on the coefficient p which provide that the operator L_0 being semi-bounded implies it being self-adjoint.

The main object of the talk are the following two theorems.

Theorem 1 ([5]). *Let the coefficients of the formal differential expression* (1) *satisfy the assumptions* (2) *and also*

$$\text{(i)}\ \ p \in W^1_{2,loc}(\mathbb{R}),\ \ p > 0,$$

$$\text{(ii)}\ \ \int_{-\infty}^{0} p^{-1/2}(t)dt = \int_{0}^{\infty} p^{-1/2}(t)dt = \infty.$$

Then, if operator L_{00} *is bounded from below, then it is self-adjoint and* $\mathrm{L}_{00}^* = \mathrm{L} = \mathrm{L}^*$.

For the case $p \equiv 1$, $r \equiv 0$ Theorem 1 was previously established in [6].

In the second theorem, additional conditions on the coefficient p are imposed not on the entire axis, but only on a sequence of finite intervals. Outside of these intervals the function p may vanish and be discontinuous.

Theorem 2 ([5]). *Suppose the assumptions* (2) *are satisfied and the operator* L_{00} *is bounded from below. Suppose the sequence of intervals* $\Delta_n := [a_n, b_n]$ *exists such that*

$$-\infty < a_n < b_n < \infty, \quad b_n \to -\infty,\ n \to -\infty, \quad a_n \to \infty,\ n \to \infty,$$

where the coefficients p satisfy the additional conditions

(i) $p_n := p|_{\Delta_n} \in W^1_2(\Delta_n)$, $p_n > 0$;

(ii) $\exists C > 0 :\ p_n(x) \leqslant C|\Delta_n|^2$, $n \in \mathbb{Z}$, *where* $|\Delta_n|$ *is the length of interval* Δ_n.

Then operator L_{00} *is essentially self-adjoint and* $\mathrm{L}_{00}^* = \mathrm{L} = \mathrm{L}^*$.

For the case $p \equiv 1$, $r \equiv 0$ necessary and sufficient conditions for the semi-boundedness of operator L_{00} were obtained in [7].

The results obtained jointly with Prof. A. Goriunov and Prof. V. Mikhailets.

References

[1] Hartman P. (1948). Differential equations with non-oscillatory eigenfunctions. *Duke Math. J.*, vol. 15, pp. 697–709.

[2] Rellich F. (1951). Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. *Math. Ann.*, vol. 122, pp. 343–368.

[3] Povzner A.Ya. (1967). The expansion of arbtrary functions in eigenfunctions of the operator $-\Delta u + cu$. *Am. Math. Soc. Transl.*, vol. 60, no. 2, pp. 1–49.

[4] Wienholtz E. (1958). Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Math. Ann.*, vol. 135, pp. 50–80.

[5] Goriunov A., Mikhailets V., Molyboga V. (2022). Povzner–Weinholtz-type theorems for Sturm–Liouville operators with singular coefficients. *Complex Anal. Oper. Theory*, vol. 16, no. 8, Paper No. 113, 13 pp.

[6] Mikhailets V., Molyboga V. (2013). Remarks on Schrödinger operators with singular matrix potential. *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 19, no. 2, pp. 161–167.

[7] Mikhailets V., Murach A., Novikov V. (2017). Localization principles for Schrödinger operator with a singular matrix potential. *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 23, pp. 367–377.

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Email address: molyboga@imath.kiev.ua, vm.imath@gmail.com

ON BLACK–SCHOLES EQUATION

E. SENA GALERA, F. MARTÍNEZ JIMÉNEZ, A. PERIS MANGUILLOT

The Black-Scholes equation is a well-known mathematical formula that revolutionized the way we understand the pricing of financial options. Developed by Fisher Black and Myron Scholes [2], the Black-Scholes equation provides a theoretical framework for calculating the fair price of a European, American or Asian call option, which gives the holder the right but not the obligation to buy a stock at a predetermined price on a specific date.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\sigma^2 x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rx\dfrac{\partial u}{\partial x} - ru & \text{on } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+; \\ u(0,t) = 0 & \text{for } t \in \mathbb{R}^+; \\ u(x,0) = f(x) & \text{for } x \in \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{BS}$$

For European call options, Arendt and De Pagter on [1] and Cruz-Báez and González-Rodríguez on [3] showed that (BS) is governed by a C_0-semigroup on the correct Banach Spaces. Emamirad, G. Goldstein and J. Goldstein proved on [4] [5] the chaotic behaviour of the semigroup generated by $\mathcal{B}$ on the space $Y^{s,\tau}$ for $s > 1$. But in this space there is problems with the initial conditions. We can define a more suitable space, which is a dense subspace. Given $s \geqslant 0$, now we consider

$$Y_s := \left\{ f \in C^\infty(0,+\infty) : \lim_{x\downarrow 0}((xD)^k f)(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{((xD)^k f)(x)}{x^s} = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}_0, \right.$$
$$\left. \text{and } \|f\|_s := \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k} \sup_{x>0} \frac{\left|((xD)^k f)(x)\right|}{1+x^s} < +\infty \right\}.$$

In this new space, the generator of the Black-Scholes semigroup $\mathcal{B}$ is a bounded operator, hence generates a uniformly continuous semigroup which is a solution semigroup of the Black-Scholes equation.

The first author is supported by Project PROMETEU/2021/070.

Theorem 1. *The Black-Scholes semigroup generated by $\mathcal{B}$ is Devaney chaotic on Y_s for all $s > 1$.*

References

[1] W. Arendt, B. De Pagter, *Spectrum and asymptotics of the black–scholes partial differential equation in ($\mathcal{L}^1$, $\mathcal{L}^\infty$)-interpolation spaces*, Pacific journal of mathematics, 202 (2002), pp. 1–36.

[2] F. Black, M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of political economy, 81 (1973), pp. 637–654.

[3] D. Cruz-Báez, J. González-Rodríguez, *Semigroup theory applied to options*, Journal of Applied Mathematics, 2 (2002), pp. 131–139.

[4] H. Emamirad, G. Goldstein, J. Goldstein, *Chaotic solution for the black-scholes equation*, Proceedings of the American Mathematical Society, 140 (2012), pp. 2043–2052.

[5] H. Emamirad, G. Goldstein, J. Goldstein, *Corrigendum and improvement to "chaotic solution for the black-scholes equation"*, Proceedings of the American Mathematical Society, 142 (2014), pp. 4385–4386.

Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universitat Politècnica de Valéncia, Valéncia, Spain

Email address: edsega@posgrado.upv.es

Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universitat Politècnica de València, Valéncia, Spain

Email address: fmartinez@mat.upv.es

Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universitat Politècnica de València, Valéncia, Spain

Email address: aperis@mat.upv.es

CHAOS IN NUMERICAL SCHEMES OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

A. VARGAS-MORENO

The theory of chaos has been extensively studied in finite-dimensional dynamical systems, which include discrete maps and ordinary differential equations. This field has resulted in significant applications in physics, chemistry, biology, and engineering. The analysis of chaos for partial differential equations (PDEs) is much more complicated. However, it is now well-established that solutions to these equations can be represented in terms of C_0-semigroups [11]. The study of chaotic dynamics of C_0-semigroups solution of PDEs was initiated by Desch, Schappacher and Web [10]. Herzog [13] analyzed chaos for C_0-semigroups on certain spaces of analytic functions with controlled growth. Since then, the dynamics on this kind of phase spaces has been intensively investigated [4, 6, 7, 8, 9, 14].

Finite difference methods are among the most significant numerical methods for solving differential equations and there exist a wide range of finite divided differences methods. One of the most popular correspond to the standard finite differences approximations for the first and second derivatives, namely, the forward, backward and centered discretizations. When applying these approximations in an ordinary or partial differential equation, in many cases, this leads to a finite difference equation that can be described as a linear dynamical system.

In this conference, we will consider finite difference schemes for a class of second-order partial differential equations. The chaotic dynamics of the C_0-semigroup solution of this model has been characterized in [8, 9]. In our work we provide sufficient conditions that ensure chaos for these numerical discretizations, and we compare them with the ones obtained in [8, 9]. We also relate the chaotic behaviour of these operators with the classical notion of stability for numerical methods. Finally, we present the chaotic behaviour of the numerical solutions of the heat equation, the telegraph equation and the wave equation as particular cases of the studied class of PDEs. This is a joint work with Marina Murillo-Arcila and Alfred Peris.

References

[1] X. Barrachina, J.A. Conejero. Devaney chaos and distributional chaos in the solution of certain partial differential equations. *Abstr. Appl. Anal.*, pages Art. ID 457019, 11, 2012.

[2] S. Bartoll, F. Martínez-Giménez, A. Peris, F. Ródenas. Chaos for numerical schemes of differential operators. Preprint, 2022.

[3] S. Chapra, R. Canale. Numerical methods for engineers. 8th ed., Mc-Graw-Hill,New York, 2021.

[4] J.A. Conejero, C. Lizama, M. Murillo-Arcila. On the existence of chaos for the Viscous Van Wjingaarden Equation. *Chaos, Solitons and Fractals.* 89 (2016), 100–104.

[5] J.A. Conejero, C. Lizama, M. Murillo-Arcila, A. Peris. Linear dynamics of semigroups generated by differential operators. *Open Math.* 15 (2017), 745–767.

[6] J.A. Conejero, C. Lizama, F.Ródenas. Chaotic behaviour of the solutions of the Moore-Gibson-Thompson equation. *Appl. Math. Inf. Sci.*, 9 (5) (2015), 2233–2238.

[7] J.A. Conejero, F. Martínez-Giménez, A. Peris, F. Ródenas. Chaotic asymptotic behaviour of the solutions of the Lighthill-Whitham-Richards equation. *Nonlinear Dynam.*, 84 (1) (2016), 127–133.

[8] J.A. Conejero, A. Peris, M. Trujillo. Chaotic asymptotic behavior of the hyperbolic heat transfer equation solutions. *Internat. J. Bifur. Chaos*, 20(9) (2010), 2943–2947.

[9] J.A. Conejero, C. Lizama, M. Murillo-Arcila. Chaotic semigroups from second order partial differential equations. *J. Math. Anal. Appl.* 456 (2017), 402–411.

[10] W. Desch, W. Schappacher, G.F. Webb. Hypercyclic and chaotic semigroups of linear operators. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(4) (1997), 793–819.

[11] K.J. Engel, R. Nagel. One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[12] K.G. Grosse-Erdmann, A. Peris. Linear Chaos. Universitext. Springer, London, 2011.

[13] G. Herzog. On a universality of the heat equation. *Math. Nachr.*, 188 (1997), 169–171.

[14] C. Lizama, M. Murillo-Arcila. On the dynamics of the Damped Extensible Beam 1D-equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 522 (2023), 126954.

[15] C. Lizama, M. Murillo-Arcila, A. Peris. Nonlocal operators are chaotic. *Chaos* 30 (2020), no. 10, 103126, 8.

[16] R.E. Mickens. Nonstandard finite difference models of differential equations. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, New-York, 1994.

[17] M. Murillo-Arcila, A. Peris, A. Vargas. Chaotic finite difference operators. *Chaos* 33(9) (2023).

Institut Universitari de Matemática Pura i Aplicada, Universitat Politècnica de València, 46022 València, Spain

Email address: `alvarmo1@etsii.upv.es`

АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ АЛГЕБРАЇЧНО–НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТУ

К. В. БОЖОНОК

Доповідь присвячена питанням подальшого розвитку та застосування апроксимаційного методу В. К. Дзядика [1] до задачі Коші для диференціального рівняння із запізненням аргументу [2], [3]:

$$y'(x) = f(x, y(x), y(x-\tau)), \tag{1}$$

де постійне запізнення $\tau > 0$,

$$y(x) = \varphi_0(x) \text{ при } x_0 - \tau \leqslant x \leqslant x_0.$$

Тут

$$f(x, y(x), y(x-\tau)) = a_0(x) + a_1(x)y(x-\tau) + a_2(x)y^2(x-\tau) + a_3(x)y^3(x-\tau)$$

(у випадку $a_3 \neq 0$ маємо рівняння Абеля, коли ж $a_3 = 0$, то (1) є рівнянням Ріккаті), $a_j(x)$, $j = \overline{0,3}$ — алгебраїчні многочлени однієї змінної.

Ідея алгоритму полягає в реалізації наступних кроків:

(1) Зведемо аналогічно [4] задачу (1) (у випадку $f(x, y)$ з алгебраїчною нелінійністю відносно розв'язку) до еквівалентного інтегрального рівняння типу Вольтерра третього роду.

(2) Наближений розв'язок інтегрального рівняння шукаємо у вигляді поліномів

$$y_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \omega_i(x), \tag{2}$$

де $\{\omega_i(\cdot)\}_{i=0}^{\infty}$ — класичні ортогональні многочлени (Лежандра, Чебишева–Ерміта, Чебишева–Лагерра та узагальнені многочлени Якобі).

(3) Отриманому інтегральному рівнянню поставимо у відповідність наближене інтегро-функціональне рівняння.

На основі результатів [5], [6] має місце наступний результат про відхилення наближеного кусково-поліноміального розв'язку $y_n(x)$ від точного розв'язку $y(x)$ рівняння (1):

Теорема 1. *Нехай числа $H > 0$ і $n = 1, 2, \ldots$ такі, що існує єдиний розв'язок $y(x)$ рівняння (1) в кулі $\sigma(\rho) = \left\{\psi \in C[0, H] : \|\psi\|_{C[0,H]} \leqslant \rho\right\}$ і єдиний розв'язок*

$y_n(x)$ наближеного інтегро-функціонального рівняння такий, що $\|y_n(x)\|_X \leqslant \rho$. Тоді виконуються нерівності

$$\|y(x) - y_n(x)\|_X \leqslant (M/a_*)\, E_n(y)_X, \tag{3}$$

де $\min\limits_{x\in[0,H]} A(x) \geqslant a_* > 0$, величина M — деяка константа, що не залежить від n. Простір $X\,[\cdot]$ є простором $C\,[\cdot]$ неперервних функцій або $L_p^2\,[\cdot]$ сумовних з квадратом при чебишевській вазі (див. [6]*) функцій; $E_n(y)_{X[\cdot]}$ — величина найкращого наближення многочленами функції $y(x)$ в $X\,[\cdot]$.*

Таким чином, із нерівностей (3) можна зробити висновок, що апроксимаційний метод буде достатньо ефективним для задач виду (1). Запропонований алгоритм добре доповнює існуючі алгоритми [7]–[10] розв'язання початкових задач із запізненням аргументу такими властивостями, як висока точність порядку найкращих наближень, а значить, і ненасичуваність алгоритмів (див. [11]).

Література

[1] Дзядык В.К. (1988). *Аппроксимационные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* Киев: Наукова думка.

[2] Мышкис А.Д. (1972)*Линейные диференциальные уравнений с запаздывающимся аргументом.* М.: Наука.

[3] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. (1971) *Введение в теорию диференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.* М.: Наука.

[4] Божонок К.В. (2023). Алгоритм поліноміальної апроксимації розв'язків нелінійного диференціального рівняння Абеля. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, vol. 41, no. 1, pp. 26–34.

[5] Bilenko V.I., Bozhonok K.V., Dzyadyk S.Yu., Stelya O.B. (2018). Piecewise Polynomial Algorithms for the Analysis of Processes in Inhomogeneous Media. *Cybernetics and Systems Analysis*, vol. 54, no. 4, pp. 636–642.

[6] Bilenko V.I., Bozhonok K.V., Dzyadyk S.Yu. (2019). Piecewise-Polynomial Approximations for the Solutions of Impulsive Differential Equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 71, no. 2, pp. 190–201.

[7] Bellen A., Zennaro M. (2003). *Numerical Methods for Delay Differential Equations.* Oxford: Clarendon Press.

[8] Rebenda J., Smarda Z. (2019) Numerical algorithm for nonlinear delayed differential systems of n-th order. *Advances in Difference Equations*, vol. 26, pp. 1–16.

[9] Печук В.Д., Бондаренко Н.В. (2021) Явні гібридні методи п'ятого порядку збіжності для динамічних систем із запізнюванням. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, no. 101, pp. 168–180.

[10] Бондаренко Н.В., Соколова Л.В., Отрашевська В.В. (2023) Геометричний підхід до дослідження стійкості динамічних систем із запізнюванням у часі. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*, no. 104, pp. 16–29.

[11] Гаврилюк И.П., Макаров В.Л. (2004) *Сильно позитивные операторы и численные алгоритмы без насыщения точности.* Киев: Ин-т математики НАН Украины.

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна
Email address: bozhonok.kv@knuba.edu.ua, katboz2014@gmail.com

ЗАДАЧА КІНЦЕВОГО ЗНАЧЕННЯ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРОБОВОГО ПОРЯДКУ

О. А. БОЙЧУК, В. А. ФЕРУК

Розглядається лінійна задача кінцевого значення для системи дробових диференціальних рівнянь у просторі $C[a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$

$$\left({}^{C}D^{\alpha}_{a+}x\right)(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad x(b) = x^*, \tag{1}$$

на розв'язки якої накладено додаткові умови

$$lx(\cdot) = q, \tag{2}$$

де $0 < \alpha < 1$, ${}^{C}D^{\alpha}_{a+}$ — лівостороння похідна Капуто, $A(t)$ — $(n \times n)$-вимірна матриця і $f(t)$ — n-вимірний вектор, компоненти яких належать простору $C[a,b]$, $l = \operatorname{col}\left(l_1, \ \ l_2, \ \ \dots, \ \ l_p\right) : C[a,b] \to \mathbb{R}^p$ — обмежений лінійний векторний функціонал, $l_\nu : C[a,b] \to \mathbb{R}$, $\nu = \overline{1,p}$, $x^* = \operatorname{col}\left(x_1^*, \ \ x_2^*, \ \ \dots, \ \ x_p^*\right) \in \mathbb{R}^p$, $q = \operatorname{col}\left(q_1, \ \ q_2, \ \ \dots, \ \ q_p\right) \in \mathbb{R}^p$.

Показано, що крайова задача (1), (2) еквівалентна нетеровій крайовій задачі для системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Використовуючи методи теорії нормально розв'язних крайових задач [1] та результати отримані у роботі [2], встановлено необхідні та достатні умови розв'язності та знайдено загальний вигляд розв'язку крайової задачі (1), (2) у критичному випадку. У одновимірному випадку ($n = 1$), отримано аналогічний критерій розв'язності для багатоточкової крайової задачі.

Література

[1] Boichuk A.A., Samoilenko A.M. (2016). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.* Berlin: De Gruyter, second ed.

[2] Boichuk O.A., Feruk V.A. (2020). Linear boundary-value problems for weakly singular integral equations. *J. Math. Sci.*, vol. 247, pp. 248–257.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: boichuk.aa@gmail.com

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: feruk.viktor@gmail.com

Роботу частково підтримано проєктом "Крайові задачі та імпульсні збурення нелінійних еволюційних рівнянь у нескінченновимірних просторах" ДО "ВЦП КНУ ім. Т. Шевченка при НАН України", державний реєстраційний номер 0122U002463.

МЕТОД ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ ДЛЯ ПОБУДОВИ ТОЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ УЗАГАЛЬНЕНИХ РІВНЯНЬ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРІЗА ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

О. О. ВАНЄЄВА, О. В. БРАГІНЕЦЬ, О. Ю. ЖАЛІЙ, О. В. МАГДА

Багато модельних рівнянь для різноманітних хвильових процесів можуть бути зведені до класичного рівняння Кортевега–де Фріза (рівняння КдФ), модифікованого рівняння КдФ (рівняння мКдФ) або їхніх узагальнень. Це пояснює великий інтерес дослідників до пошуку нових і застосуванню вже відомих методів побудови точних розв'язків таких рівнянь. На жаль, більшість запропонованих методів призводять до еквівалентних форм вже відомих розв'язків. Це пояснюється тим, що еквівалентність моделей і відповідних розв'язків не досліджуються систематично. Головним інструментом для дослідження трансформаційних властивостей в класах диференціальних рівнянь є групоїди еквівалентності, строгу теорію яких розроблено в роботі [1].

У роботі [2] об'єктами дослідження є два класи узагальнених рівнянь КдФ та мКдФ з коефіцієнтами, що залежать від часової змінної, для побудови точних розв'язків яких застосовано метод еквівалентності. Перший клас містить узагальнені рівняння мКдФ зі змінними коефіцієнтами

$$u_t + f(t)u^2u_x + g(t)u_{xxx} + h(t)u + p(t)u_x + k(t)uu_x + l(t) = 0, \qquad (1)$$

де f, g, h, p, k, l — довільні гладкі функції змінної t з умовою $fg \neq 0$. Точні розв'язки деяких рівнянь з такого класу нещодавно було побудовано в роботі [3], використовуючи такі методи, як прямий метод редукції Кларксона–Крускала та "анзац"-метод, що базується на сумісності з рівнянням Ріккаті.

Другий клас складається з рівнянь типу КдФ

$$u_t - 3Mg(t)uu_x + g(t)u_{xxx} + 2q(t)u + (p(t) + q(t)x)u_x = 0, \qquad (2)$$

де g, p, q — довільні гладкі функції змінної t з умовою $g \neq 0$, а M — ненульова стала. У роботі [4] були побудовані деякі точні розв'язки для рівнянь (2) за допомогою "вдосконаленого методу загального відображувального перетворення".

У роботі [2] досліджено трансформаційні властивості класів узагальнених рівнянь КдФ та мКдФ зі змінними коефіцієнтами (1) та (2), а також продемонстровано ефективність методу еквівалентності для побудови точних розв'язків

Перший автор дякує Верховній Раді України за підтримку наукового проєкту 0122U201960 в рамках іменної стипендії Верховної Ради України для молодих учених - докторів наук.

таких рівнянь. Зокрема, було знайдено групоїди еквівалентності обох класів рівнянь, що дозволило сформулювати критерії звідності рівнянь з класів (1) та (2) зі змінними коефіцієнтами до класичних рівнянь КдФ та мКдФ. Виявилось, що кожне рівняння з класу (2) подібне до класичного рівняння КдФ відносно точкового перетворення. Для таких рівнянь підхід, заснований на еквівалентності, працює набагато краще, ніж інші існуючі методи, оскільки дозволяє використовувати різноманітні відомі розв'язки класичного рівняння КдФ [5]. Крім того показано, що "вдосконалений метод загального відображувального перетворення", запропонований у роботі [4] не дає дійсно нових розв'язків, а лише еквівалентні відомим.

У випадку класу (1) повної подібності немає, рівняння зводяться до класичного рівняння мКДФ тоді й лише тоді, коли їхні коефіцієнти задовольняють певним умовам. У такому випадку метод еквівалентності може бути застосований для відповідного підкласу класу (1), виокремленому вказаними умовами. При цьому застосування методу еквівалентності дозволяє побудувати для цього підкласу ширші сім'ї точних розв'язків, ніж знайдені в роботі [3].

Література

[1] Vaneeva O.O., Bihlo A., Popovych R.O. (2020). Generalization of the algebraic method of group classification with application to nonlinear wave and elliptic equations. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, vol. 91, 105419.

[2] Ванєєва О.О., Брагінець О.В., Жалій О.Ю., Магда О.В. (2023). Точні розв'язки узагальнених рівнянь Кортевега–де Фріза зі змінними коефіцієнтами. *Доповіді НАН України*, подано до друку.

[3] El-Shiekha R.M., Gaballah M. (2022). New analytical solitary and periodic wave solutions for generalized variable-coefficients modified KdV equation with external-force term presenting atmospheric blocking in oceans. *J. Ocean Eng. Sci.*, vol. 7, pp. 372–376.

[4] Hong B., Lu D. (2012). New Jacobi elliptic function-like solutions for the general KdV equation with variable coefficients. *Math. Comput. Model.*, vol. 55, pp. 1594–1600.

[5] Popovych R.O., Vaneeva O.O. (2010). More common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations: Part I. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, vol. 15, pp. 3887–3899.

Інститут математики НАН України & КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: `vaneeva@imath.kiev.ua`

Чорноморський національний університет ім. Петра Могили, Миколаїв, Україна
Email address: `oksana.brahinets@gmail.com`

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: `zhaliy@imath.kiev.ua`

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: `olena.magda@gmail.com`

ПРО НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ

В. М. ГОРБАЧУК

Нехай B — слабо позитивний оператор у банаховому просторі $\mathfrak{B}$ з нормою $\|\cdot\|$, тобто $B \in \ E(\mathfrak{B}),\ \rho(B) \supset (-\infty, 0)$ та існує стала $M > 0$ така, що

$$\forall \lambda > 0 : \|R(-\lambda, B)\| \leqslant \frac{M}{\lambda}, \tag{1}$$

де $E(\mathfrak{B})$ — множина всіх щільно заданих в $\mathfrak{B}$ замкнених лінійних операторів, $\rho(\cdot)$ — резольвентна множина оператора, $R(\cdot, B)$ – його резольвента. Оператор $B \in \ E(\mathfrak{B})$ має тип $(\omega, M(\theta))$, якщо $\rho(-B)$ містить сектор $\Sigma_{\pi-\omega} = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| \leqslant \pi - \omega\}$ і оцінка (1) з константою $M = M(\theta)$ виконується на кожному промені $z = re^{i\theta},\ 0 < r < \infty,\ |\theta| < \pi - \omega$. Для слабо позитивного B визначені степені $B^\alpha,\ 0 \leqslant \alpha < 1$. Більше того, оператор $A = -B^{1/2}$ генерує обмежену аналітичну C_0-півгрупу з кутом аналітичності $\frac{\pi-\omega}{2}$ (див.[1]). У подальшому півгрупу з генератором A позначатимемо $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geqslant 0}$.

Розглянемо задачу Діріхле

$$\left\{\begin{array}{ccl} y & \in & C^2((0,\infty), \mathcal{D}(A)), \\ y''(t) & = & By(t), \quad t \in (0,\infty), \\ \lim\limits_{t\to+0} y'(t) & = & f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A), \end{array}\right. \tag{2}$$

Тут $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$ — проєктивна границя просторів $\mathfrak{B}_{-t}(A)$, де $\mathfrak{B}_{-t}(A)$ — поповнення $\mathfrak{B}$ по нормі

$$\|x\|_{-t} = \left\|e^{tA}x\right\|,\ t > 0.$$

Лінійна множина $\mathfrak{B}_{-}(A)$ утворює повний зліченно-нормований простір.

В [2] показано, що якщо задача (2) однозначно розв'язна, то для знаходження її наближених розв'язків можна застосувати метод степеневих рядів. У цьому випадку розв'язок $y(t)$ цієї задачі допускає зображення

$$y(t) = e^{t\hat{A}}f, \quad f = y(0) \in \mathfrak{B}_{(-)}(A),$$

де $\left\{e^{t\hat{A}}\right\}_{t\geqslant 0}$ — розширення півгрупи $\left\{e^{tA}\right\}_{t\geqslant 0}$ до C_0-півгрупи в просторі $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$, визначений і неперервний на всьому просторі генератор $\hat{A}$ якої є замиканням A в $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$ (див.[3]).

Припустимо спочатку, що f належить до класу Жевре типу Бьорлінга

$$\mathfrak{G}_{(\beta)}(A) = \left\{x \in C^\infty(A) \middle| \forall\alpha > 0, \exists c = c(x,\alpha) > 0 : \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \left\|A^k x\right\| \leqslant c\alpha^k k^{k\beta}\right\}$$

з $\frac{\omega}{\pi} < \beta < 1$. У цьому випадку $y(t)$ можна подати (див.[2]) у вигляді

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k f, \ t \in [0, \infty).$$

За наближений розв'язок розглядуваної задачі візьмемо

$$y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k f, \ t \in [0, \infty).$$

Тоді для довільного фіксованого $b > 0$ має місце оцінка.

$$\sup_{t \in [0,b]} \|y_n(t) - y(t)\| \leqslant c(n+1)!^{\beta-1}$$

з як завгодно малою константою $c = c(b, \alpha)$. Крім того, $y_n(0) = f$. Отже, якщо $f \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A),\ 0 \leqslant \beta < 1$, то $y_n(t)$ - конструктивна апроксимація розв'язку задачі (2), і чим менше β, тим менша похибка наближення.

Нехай тепер f - довільний елемент з $\mathfrak{B}$. Як показано в [2], при $\beta > \frac{\omega}{\pi}$, $\overline{\mathfrak{G}_{(\beta)}(A)} = \mathfrak{B}$. Тому існує послідовність $f_m \in \mathfrak{G}_{(\beta)}(A)$ така, що $f_m \to f$ в $\mathfrak{B}$ при $m \to \infty$. Послідовність $y_m(t) = e^{tA} f_m$ збігається рівномірно на $[0, \infty)$ до $e^{tA} f$. У свою чергу, $y_m(t)$ можна наблизити поліномами вигляду $\sum\limits_{k=0}^{n_m} \frac{t^k}{k!} A^k f_m$. Порядок цієї апроксимації $n_m^{\beta-1}$. Тоді зазначені поліноми наближають роз'язок $y(t)$ у метриці простору $\mathfrak{B}$ на $[0, b]$. Якщо ж $f \in \mathfrak{B}_{(-)}(A)$, то ці поліноми здійснюють наближення $y(t)$ в топології простору $\mathfrak{B}_{(-)}(A)$ на довільному компакті з $[0, \infty)$ і по нормі простору $\mathfrak{B}$ на будь-якому компакті з $(0, \infty)$.

Література

[1] Krein S.G. (1971).*Linear differential equations*. Providence: Amer. Math. Soc.
[2] Горбачук В.М., Горбачук М.Л. (2006). Про коректну розв'язність задачі Діріхле для диференціально-операторних рівнянь у банаховому просторі. *Укр. мат. журн.*, vol. 58, no. 11, pp. 1462–1476.
[3] Gorbachuk M.L., Corbachuk V.I. (2012). The Dirichlet problem for differential equations in a Banach space. *Methods Funct.Anal.Topology*, vol. 18, no. 2, pp. 140–151.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: v.m.horbach@gmail.com

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Г. В. ДАНИЛІНА, М. О. РАШЕВСЬКИЙ

Розглядається система лінійних сингулярно збурених інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon) + \rho\int_0^L K(t,s,\varepsilon)x(s,\varepsilon)ds,$$

для якої будується асимптотичний розв'язок задачі Коші $x(0,\varepsilon) = x_0$ при умові нестабільного спектру матриці $A(t,\varepsilon)$, зокрема при наявності простої точки повороту [1, 2]. Тут $x(t,\varepsilon)$ — невідомий n-вимірний вектор; $\varepsilon > 0$ — дійсний малий параметр.

Розв'язок записаної системи рівнянь будується у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = U(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon) + \rho\int_0^L P(t,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds,$$

де матриці $U(t,\varepsilon)$ та $P(r,s,\varepsilon)$ записуються рядами за степенями малого параметра.

При побудові невідомих матриць виникає необхідність у дослідженні такої системи інтегральних рівнянь:

$$A(t,\varepsilon)P(t,s,\varepsilon) + \rho\int_0^L K(t,s_1,\varepsilon)P(s_1,s,\varepsilon)z(s,\varepsilon)ds_1 = 0.$$

Нестабільність спектру матриці $A(t,\varepsilon)$ призводить до її виродженості у точках нестабільності, що створює певні труднощі при побудові розв'язку системи інтегральних рівнянь методами, розробленими для випадку стабільного спектру.

У доповіді пропонується алгоритм побудови асимптотичного розв'язку системи інтегральних рівнянь методом примежових функцій, дається оцінка похибки.

Література

[1] Самойленко А.М., Самусенко П.Ф. (2020). Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь із точками повороту I. *Укр. мат. журн.*, vol. 72, no. 12, pp. 1669–1681.

[2] Самойленко А.М., Самусенко П.Ф. (2021). Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних рівнянь із точками повороту II. *Укр. мат. журн.*, vol. 73, no. 6, pp. 849–864.

Криворізький фаховий колледж НАУ, Кривий Ріг, Україна
Email address: danilina@ukr.net, rashevskyi@g-suit.kk.nau.edu.ua

ПРО НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Т. О. ЄРЬОМІНА, О. А. ПОВАРОВА (СІВАК)

Розглядаються системи лінійних різницево-функціональних рівнянь вигляду

$$y\,(qt) = \Lambda y\,(t) + By\,(t+1)\,, \tag{1}$$

де $t \in \Re^+ = [0, +\infty)$, Λ та B – дійсні $(n \times n)$-матриці, q – деяка дійсна стала. А саме, випадки, коли серед власних чисел λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матриці Λ є однакові. Не обмежуючи загальності припускається, що $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$, $m \leqslant n$, Λ_i – $(k_i \times k_i)$-матриці вигляду

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \; \sum_{i=1}^{m} k_i = n,$$

ε – достатньо мала додатна стала. Доведена наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

(1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, m$, $q > 1$;

(2) $\Delta = \frac{b}{1-(\lambda^*+\delta)} < 1$, *де* $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\delta = \delta\,(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\delta \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\lambda^* + \delta < 1$, $b = |B| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$.

Тоді система рівнянь (1) *має сім'ю неперервних обмежених при* $t \geqslant T > 0$ *(T – деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), ..., \omega_n(\tau))$.

Розглянуто також систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y\,(qt) = \Lambda y\,(t) + By\,(t+1) + F\,(t)\,, \tag{2}$$

де матриці Λ, B задовольняють умови теореми 1, а $F\,(t) : \Re \to \Re^n$. Доведено, що якщо виконуються умови 1–2 теореми 1, всі елементи вектор-функції $F\,(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \Re$ функціями і $\sup\limits_t |F\,(t)| = \tilde{M} < +\infty$. То система рівнянь (2) матиме неперервний обмежений при $t \in \Re$ розв'язок $\bar{y}(t)$ у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t),$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...,$ – деякі неперервні обмежені при $t \in \Re$ вектор-функції. **Зауваження.** Виконуючи в (2) заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t),$$

отримаємо систему рівнянь (1) відносно вектор-функції $z(t)$, для якої справедлива теорема 1.

Для випадку, коли $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, m$, $0 < q < 1$, $t \geqslant T > 0$ має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*

(1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, m$, $0 < q < 1$*;*

(2) $\tilde{\Delta} = \frac{b}{\left(\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta}\right)^{-1} - 1} < 1$, *де* $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$, $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon) > 0$ *таке, що* $\tilde{\delta} \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *і* $\lambda_*^{-1} + \tilde{\delta} < 1$, $b = |B| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|$.

Тоді система рівнянь (1) *має сім'ю неперервних обмежених при* $t \geqslant T > 0$ *розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежить від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$.

Для неоднорідної системи рівнянь вигляду (2) для якої виконуються умови 1–2 теореми 3, де всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \Re$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$ можна довести, що система рівнянь (2) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ розв'язок $\bar{y}(t)$, який можна представити у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t),$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, ...,$ – деякі неперервні обмежені при $t \in \Re$ вектор-функції.

Література

[1] Пелюх Г.П., Сивак О.А. (2010). Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом. *Нелінійні коливання*, vol. 13, no. 1, pp. 75–95.

[2] Єрьоміна Т.О. (2014). Неперервні розв'язки систем лінійних різницево-функціональних рівнянь. *Нелінійні коливання*, vol. 17, no. 4, pp. 48–52.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: ierominat@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: olena_sivak@ukr.net

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КАЛЬЦІЙ-ІНДУКОВАНОГО ВИКИДУ КАЛЬЦІЮ З САРКОПЛАЗМАТИЧНОГО РЕТИКУЛУМУ

П. Ф. ЖУК, С. О. КАРАХІМ

Внутрішньоклітинний кальцій ($[Ca^{2+}]_c$) є найважливішою ланкою у механізмі скорочення-розслаблення м'язів. Кальцій надходить в міоцит з позаклітинного простору (ПП) та з саркоплазматичного ретикулуму (SR) і величина $[Ca^{2+}]_c$ визначає ступінь скорочення м'язів. Концентрації кальцію в ПП ($[Ca^{2+}]_o$) і в SR ($[Ca^{2+}]_r$) на 3-4 порядки вищі, ніж в цитозолі міоцита.

Під дією агоніста A (сигнальної речовини) відкриваються кальцієві канали R на плазматичній мембрані (PM) і через них Ca^{2+} надходить в цитозоль з ПП. Цитозольний Ca^{2+} відкриває кальцієві канали RR на мембрані SR, через які відбувається швидкий викид Ca^{2+} з SR в цитозоль. Цей процес називається кальцій-індукованим викидом кальцію (CICR). В подальшому Ca^{2+} викачується з цитозолю кальцієвими помпами PM (в ПП) і SR (в SR). Агоніст в умовах in vivo розкладається під дією ензима F.

Механізми пасивного й активного транспорту дають можливість кальцію розподілятись між цитозолем, SR та ПП, що сприяє встановленню динамічної рівноваги в клітинній системі (т. зв. базальний стан). Базуючись на цих уявленнях була розроблена й досліджена математична модель кальцій-індукованого викиду кальцію, що імітує поведінку гладеньком'язової клітини (ГК) в умовах її стимуляції агоністом. Математичною моделлю є система диференційних рівнянь:

$$\frac{d[R]}{dt} = k_{-1}[RCa] - k_1[R][Ca^{2+}]_c + k_{-2}[AR] - k_2[A][R],$$

$$\frac{d[RCa]}{dt} = k_1[R][Ca^{2+}]_c - k_{-1}[RCa] + k_{-2}[ARCa] - k_2[A][RCa],$$

$$\frac{d[AR]}{dt} = k_2[A][R] - k_{-2}[AR],$$

$$\frac{d[ARCa]}{dt} = k_2[A][RCa] - k_{-2}[ARCa],$$

$$\frac{d[A]}{dt} = \frac{S_{PM}}{V_o}\{k_{-2}([AR] + [ARCa]) - k_2[A]([R] + [RCa])\} + k_{-3}[AF] - k_3[A][F],$$

$$\frac{d[AF]}{dt} = k_3[A][F] - (k_{-3} + k_4)[AF],$$

$$\frac{d[F]}{dt} = (k_{-3} + k_4)[AF] - k_3[A][F],$$
$$\frac{d[P]}{dt} = k_4[AF],$$
$$\frac{d[RR]}{dt} = k_{-5}[RRCa] - k_5[RR][Ca^{2+}]_c,$$
$$\frac{d[RRCa]}{dt} = k_5[RR][Ca^{2+}]_c - k_{-5}[RRCa],$$
$$\frac{d[Ca^{2+}]_o}{dt} = \frac{V_c P - S_{PM} D_{PM} U}{V_o},$$
$$\frac{d[Ca^{2+}]_r}{dt} = \frac{V_c Q - S_r D_{SR} W}{V_r},$$
$$\frac{d[Ca^{2+}]_c}{dt} = \frac{S_{PM}}{V_c}\{D_{PM}U + k_{-1}[RCa] - k_1[R][Ca^{2+}]_c\} +$$
$$+\frac{nS_r}{V_c}\{D_{SR}W + k_{-5}[RRCa] - k_5[RR][Ca^{2+}]_c\} - P - nQ,$$

де $U = \{[R]_{all} + (\mu_{PM} - 1)[AR]\}([Ca^{2+}]_o - [Ca^{2+}]_c)$,
$W = \{[RR]_{all} + (\mu_{SR} - 1)[RRCa]\}([Ca^{2+}]_r - [Ca^{2+}]_c)$, а робота кальцієвих помп PM і SR описується рівняннями Міхаеліса-Ментен:

$$P = \frac{V_{mPM}[Ca^{2+}]_c}{K_{mPM} + [Ca^{2+}]_c},\ Q = \frac{V_{mSR}[Ca^{2+}]_c}{K_{mSR} + [Ca^{2+}]_c}.$$

В базальному стані відбувається узгодження параметрів активного й пасивного транспорту Ca^{2+} як через PM, так і через мембрану SR. Розроблена модель якісно відтворює експериментальні дані. Дослідження моделі показало, що в залежності від параметрів моделі клітинна система може демонструвати два види змін концентрації Ca^{2+} в цитозолі: режим одиночного транзієнта і режим періодичних коливань (РПК). Після завершення стимуляції клітинна система повертається до базального стану (в умовах *in vivo*) або виходить на новий стаціонарний рівень (в умовах *in vitro*), крім випадків, коли вона знаходиться в РПК. Показано, що в результаті кальцій-індукованого викиду кальцію SR не спустошується повністю, а зберігає досить значну кількість Ca^{2+}. Можливість перерозподілу Ca^{2+} між трьома компартментами (цитозолем, ПП і SR) дозволяє клітинній системі переходити в РПК. Дослідження моделі дозволило також знайти відповіді на ряд питань щодо зупинки процесу CICR, перезаповнення SR кальцієм, участі депо-залежних каналів та ролі повільного базального потоку в даному процесі.

Національний авіаційний університет, Київ, Україна
Email address: petro.zhuk@npp.nau.edu.ua

Інститут біохімії НАН України, Київ, Україна
Email address: karakhim@nas.gov.ua

ПОТОЧКОВІ ОЦІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ВАГОВОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ P-ЛАПЛАСА З ВИКОРИСТАННЯМ ПОТЕНЦІАЛІВ ВОЛЬФА

Є. С. ЗОЗУЛЯ

Узагальнюється представлення Пуассона на випадок квазілінійного параболічного рівняння дивергентного типу

$$v\,(x)\,u_t - \mathrm{div}(w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f\ ,\ p > 2 \tag{1}$$

у області $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, з ваговими функціями $v(x)$, $w(x)$, що належать класу Маккенхаупта та правою частиною $f \in L^1(\Omega_T)$. Вважаємо, що $\Omega-$ обмежена область у $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2,\ 0 < T < +\infty$.

Припускаємо далі, що w належить до класу Маккенхаупта A_p , $1 < p < \infty$, тобто

$$sup\frac{w(B)}{|B|}\left(\frac{1}{|B|}\int\limits_B w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\ dx\right)^{p-1} = K_{p,w} < +\infty\ ,\ w(B) = \int\limits_B w dx\ ,$$

де супремум береться за всіма кулями $B \subset \mathbb{R}^n$. Тут ми говоримо, що $v(x) \in A_\infty$, якщо існує $p_0 > 1$ таке, що $v(x) \in A_{p_0}$.

У випадку, якщо f не залежить від часу, для кожної кулі з центром у x_0, виконується $P^f_{v,w}(x_0, t_0, \rho) = W^f_{w,p}(x_0, \rho)$ (детальніше [9]), де $W^f_{w,p}(x_0, \rho)$ - зважений потенціал Вольфа (детальніше [4]).

Перш ніж формулювати наш основний результат, введемо означення слабкого розв'язку (1).

Скажемо, що u - це узагальнений розв'язок рівняння (1) у Ω_T якщо $u \in C([T_1, T_2]; L^2(\Omega)) \cap L^p([T_1, T_2]; W^{1,p}(\Omega))$ та для будь-якого інтервалу $[t_1, t_2] \subset [T_1, T_2]$ і невід'ємної тестової функції $\varphi \in W^{1,2}([t_1, t_2]; L^2(\Omega)) \cap L^p([t_1, t_2]; W^{1,p}_0(\Omega))$ виконується інтегральна тотожність

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega v(x)u\varphi dx\Big|_{t_1}^{t_2} + \iint\limits_{\Omega\times[t_1,t_2]} w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi dxdt = \\ = \iint\limits_{\Omega\times[t_1,t_2]} f\varphi dxdt + \iint\limits_{\Omega\times[t_1,t_2]} v(x)u\varphi_t dxdt\end{gathered} \tag{2}$$

Наш основний результат формулюється наступним чином

Теорема. *Нехай u слабкий розв'язок рівняння* (1) *і* $p > 2$. *Тоді для кожного* $\lambda \in \left(0, min\left\{\frac{1}{p-1}, \frac{1}{N}\right\}\right)$ *існує* $\gamma > 0$, *що залежить тільки від даних* p, N, c_0, c_1 *і* λ, *таке, що для кожної точки Лебега* $(y, s) \in \Omega_T$ *для* $u_\pm$ *та* $\rho, \theta > 0$ *такі, що* $Q_{\rho,\theta} := \{x : |x - y| \leqslant \rho\} \times [s - \theta, s + \theta] \subset \Omega_T$, *виконується*

$$u_\pm(y,s) \leqslant \gamma\Bigg[\left(\frac{\psi_y(R)}{\theta}\right)^{\frac{1}{p-2}} + \left[\frac{1}{\psi_y(\rho)v(B_\rho)}\iint\limits_{Q_\rho,\theta} v u_+^{(1+\lambda)(p-1)}dxdt\right]^{\frac{1}{1+\lambda(p-1)}} + \\ + \left[\frac{1}{\psi_y(\rho)w(B_\rho)}\iint\limits_{Q_\rho,\theta} w u_+^{(1+\lambda)(p-1)}dxdt\right]^{\frac{1}{1+\lambda(p-1)}} + P^f_{v,w}(y,s,\rho)\Bigg] \tag{3}$$

Доведення Теореми (приведене у [9]) ґрунтується на відповідних модифікаціях ітераційної техніки Де Джорджі [2], метода внутрішнього масштабування (intrinsic scaling) Ді Бенедетто [3], після адаптації техніки Кілпелайнен - Мали [5], [4] до параболічних рівнянь сумісно з ідеями [7], [8].

Література

[1] Adams A., Fournier J.J., Sobolev Spaces, Academic Press, 2003.

[2] De Giorgi E., Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolary. Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1957, 3, P. 25-43.

[3] Di Benedetto E., Gianazza U., Vespri V., Harnack inequality for degenerate and singular parabolic equations. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2012.

[4] Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O., Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, in: Oxford Matematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.

[5] Kilpeläinen T., Malý J., The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations, Acta Math., 1992, 172, P. 137-161.

[6] Ladyzhenskaya O.A, Solonnikov V.A., Uraltceva N.N., Linear and quasilinear equations of parabolic type. Amer. Math. Soc., 1968.

[7] Liskevich V., Skrypnik I.I., Harnack's inequality and continuity of solutions to quasi-linear degenerate parabolic equations with coefficients fron Kato-type classes, J. Differential Equations, 2009, (10) 247, P. 2740-2777.

[8] Liskevich V., Skrypnik I., Sobol Z., Potential estimates for quasi-linear parabolic equations. Advanced Nonlinear Studies, 2011, 11 (4), 905-915.

[9] Zozulia Y., Pointwise estimates of solutions to weighted parabolic p-Laplacian equation via Wolff potential, Праці ІПММ НАН України, 2023, Т. 36, № 2, С. 72-90.

Донбаська Державна Машинобудівна Академія, Краматорськ-Тернопіль, Україна

Email address: `albelgen27@gmail.com`

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА

Г. П. ІВАСЮК, Н. П. ПРОЦАХ, Т. М. ФРАТАВЧАН

Нехай $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^k$ і $\mathcal{D}_y \subset \mathbb{R}^l$ – обмежені області з межами $\partial\mathcal{D}_x$, $\partial\mathcal{D}_y$. Позначимо: $\Omega = \mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y$, $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau)$, де $\tau \in (0,T]$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, $x \in \mathcal{D}_x$, $y \in \mathcal{D}_y$, $z = (x,y) \in \Omega$, $n = k + l$, ν – зовнішня нормаль до $\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y \times (0,T)$.

В області Q_T розглядаємо обернену задачу для слабко нелінійного рівняння типу Ейдельмана з невідомою функцією $q(t)$ у його правій частині:

$$u_t + \sum_{i,j=1}^{k} (a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j})_{x_ix_j} - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(z,t)u_{z_i})_{z_j} +$$

$$+c(z,t)u + g(z,t,u) = f_1(z,t)q(t) + f_0(z,t), \tag{1}$$

$$u(z,0) = u_0(z), \quad z \in \Omega, \tag{2}$$

$$u\big|_{S_T} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y \times (0,T)} = 0, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega} K(z)u(z,t)\,dz = E(t), \qquad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Розв'язком задачі (1)–(4) назвемо таку пару функцій $(u(z,t), q(t))$, що $u \in L^2(0,T;V_1(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(Q_T)$, $q \in C([0,T])$, задовольняє рівність

$$\int\limits_{Q_\tau} \Big(u_t v + \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(z,t)u_{x_ix_j}v_{x_ix_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)u_{z_i}v_{z_j} +$$

$$+c(z,t)uv + g(z,t,u)v\Big)\,dz\,dt = \int\limits_{Q_\tau} (f_1(z,t)q(t) + f_0(z,t))v\,dz\,dt$$

для всіх $\tau \in (0,T]$, та $v \in L^2(0,T;V_1(\Omega))$, та виконуються початкові умови (2) і умови перевизначення (4). Тут $V_1(\Omega) = \big\{u : u \in H_0^1(\Omega), u_{x_ix_j} \in L^2(\Omega), i,j \in \{1,\ldots,k\},\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\mathcal{D}_x \times \mathcal{D}_y} = 0\big\}$.

Нехай коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови :

1): $a_{ij} \in C([0,T];L^\infty(\Omega))$, $a_{ij,t} \in L^\infty(Q_T)$,
$a_{ij}(z,t) \geqslant a_0 > 0$ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$, $i,j \in \{1,\ldots,k\}$;

2): $b_{ij} \in C([0,T]; L^\infty(\Omega))$, $b_{ij,t} \in L^\infty(Q_T)$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$;

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(z,t)\xi_i\xi_j \geqslant b_0|\xi|^2 \text{ для всіх } \xi \in \mathbb{R}^n \text{і для всіх } (z,t) \in Q_T,\ b_0 > 0;$$

3): $c \in C([0,T]; L^\infty(\Omega)),\ c(z,t) \geqslant c_0$ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$, де c_0 – стала;

4): $g(z,t,\xi)$ вимірна за (z,t) в Q_T для всіх $\xi\in\mathbb{R}^1$ і неперервна за ξ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$, існує таке $g_0 > 0$, що $|g(z,t,\xi) - g(z,t,\eta)| \leqslant g_0|\xi - \eta|$ для майже всіх $(z,t) \in Q_T$ для всіх ξ, $\eta \in \mathbb{R}^1$;

5): $f_0,\ f_1 \in C([0,T]; L^2(\Omega))$;

6): $u_0 \in V_1(\Omega);\ K \in V_1(\Omega);\ E \in H^1(0,T),\ E(0) = \int\limits_\Omega K(z)u_0(z)\,dz.$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1)-6) та* $\int\limits_\Omega K(z)f_1(z,t)dz \neq 0$ *для всіх* $t \in [0,T]$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1) – (4) в області* Q_T.

Для розв'язку задачі (1) – (4) встановлено оцінку

$$\int\limits_{Q_T} \left((u)^2 + \sum_{i,j=1}^{k} (u_{x_i x_j})^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_{z_i})^2 + (u_t)^2 \right) dz\,dt \leqslant M \Bigg(\int\limits_\Omega \Bigg((u_0(z))^2 + \sum_{i,j=1}^{k} (u_{0,x_i x_j})^2 + \sum_{i=1}^{n} (u_{0,z_i})^2 \Bigg) dz + \int\limits_{Q_T} \left((f_1(z,t))^2 (q(t))^2 + (f_0(z,t))^2 \right) dz\,dt \Bigg),$$

де стала M залежить від коефіцієнтів рівняння (1).

Також показано, що якщо $\lim\limits_{t\to\infty} |E'(t)| = 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \|u(\cdot,t); L^2(\Omega)\| = 0$ та $\lim\limits_{t\to\infty} |q(t)| = 0$.

ЧНУ ім. Ю.Федьковича, Чернівці, Україна
Email address: h.ivasjuk@chnu.edu.ua

НЛТУ України, НУ "ЛП", Львів, Україна
Email address: protsakh@ukr.net

ЧНУ ім. Ю.Федьковича, Чернівці, Україна
Email address: t.fratavchan@chnu.edu.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ВІД ВХОДУ ДО СТАНУ ДЛЯ АТРАКТОРІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ СИСТЕМ БЕЗ ЄДИНОСТІ

О. В. КАПУСТЯН, Т. В. ЮСИПІВ

Еволюційні системи без єдиності розв'язку відіграють важливу роль в загальній теорії нескінченновимірних динамічних систем [1]. Основним об'єктом якісної теорії для таких систем виступає глобальний атрактор – компактна інваріантна рівномірно притягуюча множина [2]. Поняття стійкості від входу до стану (Input-to-State Stability) дозволяє визначити відхилення траєкторії збуреної системи диференціальних рівнянь від глобального атрактора [3]. При переході до дисипативних нескінченновимірних систем цікавим є дослідження поведінки збуреної системи в околі стійкої рівномірно-притягуючої множини – глобального атрактора [4]. В даній роботі одержано результати щодо робастної стійкості атракторів для еволюційних систем за умов, що не забезпечують єдиність розв'язку початкової задачі.

Розглядається задача

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + F(y(t)), \tag{1}$$

де $y(t) \in X,\ (X, \|\cdot\|_X)$ – нескінченновимірний фазовий простір, $A : D(A) \mapsto X$ – диференціальний оператор, $F : X \mapsto X$ – нелінійне відображення. Вважаємо, що умови на A і F забезпечують глобальну розв'язність (1) в X і відповідна (можливо, многозначна) напівгрупа $S_0 : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$, породжена розв'язками (1), має глобальний атрактор Θ, тобто існує компактна множина $\Theta \subset X$ така, що $\Theta = S_0(t, \Theta)\ \forall t \geqslant 0$ і для будь-якої обмеженої $B \subset X$

$$\|S_0(t, B)\|_\Theta := dist_X(S_0(t, B), \Theta) \to 0,\ t \to \infty.$$

Нехай (1) зазнає неавтономних збурень $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. В роботі досліджується питання оцінок відхилення траєкторій такої системи від множини Θ. Нехай $S_d : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$ – напівпроцес, породжений збуреною задачею.

Робастність атрактора Θ незбуреної задачі (1) по відношенню до збурень визначається наступною властивістю (ISS):

існують $\beta \in \mathcal{KL}$ *і* $\gamma \in \mathcal{K}$ *такі, що* $\forall y_0 \in X,\ \forall d,\ \forall t \geqslant 0$

$$\|S_d(t, y_0)\|_\Theta \leqslant \beta(\|y_0\|_\Theta, t) + \gamma(\|d\|_\infty), \tag{2}$$

де $\mathcal{K} := \{\gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ |\ \gamma$ є строго зростаючою, $\gamma(0) = 0\}$, $\mathcal{KL} := \{\beta : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+ |\ \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}, \forall t \geqslant 0, \beta(r, \cdot)$ є неперервною, спадною і $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(r, t) = 0\ \forall r > 0\}$.

Доведено, що принаймні локально, властивість (2), а також властивість AG:

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \|S_d(t,y_0)\|_\Theta \leqslant \gamma(\|d\|_\infty) \tag{3}$$

справедливі для широких класів параболічних та гіперболічних рівнянь [5].

Література

[1] Temam J. (1997). Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. *Springer, 2nd edition.*

[2] Kapustyan O.V., Sobchuk V.V., Yusypiv T.V., Pankov A.V. (2022). Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness. *Journal of optimization, differential equation and their applications (JODEA)*, vol. 30, no. 2, pp. 49–61.

[3] Sontag E.D., Wang Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems and Control Letters*, vol. 24, no. 5, pp. 351–359.

[4] Dashkovskiy S., Kapustyan O. (2022). Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equations. *Evolution Equations and Control Theory*, vol. 11, no. 5, pp. 1565–1577.

[5] Kapustyan O.V., Sobchuk V.V., Yusypiv T.V., Pankov A.V. (2022). Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness. *Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA)*, vol. 30, no. 52, pp. 49–61.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Email address: `alexkap@univ.kiev.ua`

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Email address: `yusypivt7@gmail.com`

ФУНКЦІЇ ЛЯПУНОВА ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ

В. Л. КУЛИК, Г. М. КУЛИК, Н. В. СТЕПАНЕНКО

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x, \tag{1}$$

де $a(\varphi) = \{a_1(\varphi), \ldots, a_m(\varphi)\} \in C_{Lip}(T_m)$, $x \in R^n$, $A(\varphi) \in C^0(T_m)$. Важливим питанням для таких систем є питання їх регулярності, а ефективним методом дослідження цього питання є метод функцій Ляпунова. В запропонованій доповіді будемо розглядати питання збурення системи (1) при фіксованій функції Ляпунова.

Нехай похідна вздовж розв'язків системи (1) квадратичної форми $V = \langle S(\varphi)x, x\rangle$ є додатно визначеною і при цьому симетрична матриця коефіцієнтів $S(\varphi) \in C^1(T_m)$ невироджена, тоді відомо [1], що система (1) матиме єдину функцію Гріна $G_0(\tau,\ \varphi)$, тобто буде регулярною. При цьому виникає питання: як можна змінити систему (1), щоб похідна тієї ж квадратичної форми в силу зміненої системи також була б додатно визначеною? Виявилось, що для цього вектор-функцію $a(\varphi)$ можна замінити будь-якою іншою, наприклад, $b(\varphi) \in C_{Lip}(T_m)$ і при цьому підібрати матрицю $A(\varphi)$ наступним чином

$$A(\varphi) = S^{-1}(\varphi) \cdot B(\varphi) - \frac{1}{2}S^{-1}(\varphi)\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi}b(\varphi),$$

де $B(\varphi)$ — довільна неперервна матриця, яка задовольняє нерівність $\langle B(\varphi)x, x\rangle \geqslant \beta\|x\|^2$, $\beta = const > 0$. Якщо розглянути змінну симетричну матрицю $S(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$, то для неї виконуються тотожності $S^2(\varphi) \equiv \operatorname{diag}\{1,1\}$ і $S^{-1}(\varphi)\frac{dS(\varphi)}{d\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Отже виникає задача: знайти змінні, невироджені симетричні матриці $S(\varphi)$ розмірів 3×3 і 4×4, для яких би виконувались умови $S^2(\varphi) \equiv L_0$, L_0 — деяка невироджена постійна матриця і $S^{-1}(\varphi)\frac{dS(\varphi)}{d\varphi} \equiv L_1$ — постійна матриця. Отримано такі результати. Нехай

$$S(\varphi) = \begin{bmatrix} (1+\sqrt{2}\cos\varphi) & 2\sin\varphi & (1-\sqrt{2}\cos\varphi) \\ 2\sin\varphi & -2\sqrt{2}\cos\varphi & -2\sin\varphi \\ (1-\sqrt{2}\cos\varphi) & -2\sin\varphi & (1+\sqrt{2}\cos\varphi) \end{bmatrix}.$$

Тоді $S^2(\varphi) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $S^{-1}(\varphi) \cdot \frac{dS(\varphi)}{d\varphi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Змінну матрицю $S(\varphi)$ розмірності 4×4 пропонуємо вибирати у вигляді суми двох матриць $S(\varphi_1, \varphi_2) = S_1(\varphi_1) + S_2(\varphi_2)$, де

$$S_1(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & p\sin\varphi_1 & p\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ p\sin\varphi_1 & -p^2\cos\varphi_1 & p^2\sin\varphi_1 & -p\cos\varphi_1 \\ p\cos\varphi_1 & p^2\sin\varphi_1 & p^2\cos\varphi_1 & p\sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & -p\cos\varphi_1 & p\sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \end{bmatrix},$$

$$S_2(\varphi_2) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & p^{-1}\sin\varphi_2 & -p^{-1}\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ p^{-1}\sin\varphi_2 & -p^{-2}\cos\varphi_2 & -p^{-2}\sin\varphi_2 & p^{-1}\cos\varphi_2 \\ -p^{-1}\cos\varphi_2 & -p^{-2}\sin\varphi_2 & p^{-2}\cos\varphi_2 & p^{-1}\sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & p^{-1}\cos\varphi_2 & p^{-1}\sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 \end{bmatrix},$$

p — довільний дійсний параметр, $p \neq 0$. Мають місце тотожності: $S_1(\varphi_1) \cdot S_2(\varphi_2) \equiv S_2(\varphi_2) \cdot S_1(\varphi_1) \equiv 0$, з яких випливає: $S^2(\varphi_1, \varphi_2) = [S_1(\varphi_1) + S_2(\varphi_2)]^2 = S_1^2(\varphi_1) + S_2^2(\varphi_2) = \begin{bmatrix} m & 0 & k & 0 \\ 0 & n & 0 & k \\ k & 0 & n & 0 \\ 0 & k & 0 & m \end{bmatrix} = L_0$, $\det L_0 = \left(mn - k^2\right)^2 = m^4$, де позначено $m = 2 + p^2 + p^{-2}$, $n = p^2 + p^{-2} + p^4 + p^{-4}$, $k = p - p^{-1} + p^3 - p^{-3}$. Можна довести що матриця L_0 не вироджена.

Аналогічно можна показати, що для вибраної матриці $S(\varphi_1, \varphi_2)$ виконується і друга умова, тобто $S(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \frac{\partial S(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1}$ та $S(\varphi_1, \varphi_2) \cdot \frac{\partial S(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2}$ — постійні матриці.

Література

[1] Yu.A. Mitropolsky, A.M. Samoilenko, V.L. Kulyk (2003). *Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems*. Francis Inc, London 2003.

[2] Кулик В.Л., Кулик Г.М., Степаненко Н.В. (2023). Про деякі конструкції регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі. *Нелінійні коливання*, т. 26. № 1, с. 77–94.

Сілезський Технічний Університет, Глівіце, Польща
Email address: viktor.kulyk@polsl.pl

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: ganna_1953@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: nataliya.stepanenko@lll.kpi.ua

ПРОЕКЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ І ПАРАМЕТРАМИ

В. В. ЛИСТОПАДОВА

Нехай необхідно знайти функцію $y(x) \in W_2^2(a;b)$ і параметри $\lambda \in R^l$, які задовольняють рівняння:

$$y^{(m)}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} g_\tau(x) y^{m-\tau}(x) + \sum_{\tau=1}^{m} d_\tau(x) y^{m-\tau}(x)(x-\Delta) = f(x) + c(x)\lambda + \\ + \varepsilon q(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(m-1)}(x), y(x-\Delta), y'(x-\Delta), \ldots, y^{(m-1)}(x-\Delta), \lambda), \\ x \in (a;b), \tag{1}$$

і додаткові умови

$$y(x_s) = \alpha_s, \alpha_s \in R, s = \overline{1,p}, a = x_1 < x_2 < \ldots < x_s < \ldots < x_p = b, \tag{2}$$

$$y(x-\Delta) = y'(x-\Delta) = \ldots = y^{(m-1)}(x-\Delta) = 0, x \in (a;c), c = a + \Delta, \tag{3}$$

де Δ — постійне запізнення, $\Delta > 0$, $c(x)\lambda$ — скалярний добуток вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ і неперервної на $(a;b)$ вектор функції $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \ldots, c_l(x))$, $l = p - m$, ε — малий параметр. Припустимо, що коефіцієнти $g_\tau(x), d - \tau(x), \tau = \overline{1,m}, c(x)$ — визначені й неперервні на $[a,b]$, $f \in L_2(a,b)$.

В повідомленні досліджується існування та єдиність розв'язку задачі (1)–(3) за допомогою зведення її до рівносильного інтегрального рівняння з малою нелінійністю. Обґрунтовано застосування до даної задачі проекційного методу, доведено зведення проекційного методу для задачі (1)–(3) до методу Бубнова–Гальоркіна розв'язання інтегрального рівняння з малою нелінійністю, та одержано достатні умови збіжності методу.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: listopadovavv@gmail.com

СТІЙКІСТЬ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА ОДНОГО КЛАСУ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ

К. Ю. МАМСА, М. М. ПЕРЕСТЮК, Ю. М. ПЕРЕСТЮК

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \qquad \varphi \in \ T_m, \qquad x \in R^n, \tag{1}$$

$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x|_{\varphi \in \Gamma},$$

в якій векторна функція $a(\varphi)$ та матричні функції $P(\varphi)$ і $B(\varphi)$ визначені для всіх $\varphi \in T_m$ неперервні і 2π-періодичні по кожній змінній φ_ν. Щодо $B(\varphi)$, то достатньо, щоб вона була визначена на множині Γ.

Щодо множини Γ вважаємо, що вона є підмножиною тора T_m і задається рівнянням

$$\Phi(\varphi) = 0, \tag{2}$$

де $\Phi(\varphi)$ - скалярна, неперервно диференційовна 2π-періодична по кожній змінній φ_ν, $\quad \nu = \overline{1, m}$, функція. Вважатимемо також, що кожна з траєкторій системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ перетинає множину Γ трансверсально. Для цього достатньо виконання умови $\langle grad\Phi(\varphi), \quad a(\varphi)\rangle \neq 0$, $\varphi \in \Gamma$. Позначимо через $G \subseteq T_m$ множину точок всіх траєкторій, що починаються в Γ:

$$G = \{\varphi \in T_m : \varphi = \varphi_t(\varphi_0), \ \varphi_0 \in \Gamma, \ t \in R\}, \tag{3}$$

де R - дійсна числова вісь.

Позначимо через $t = t_i(\varphi)$ розв'язки рівняння (2) для яких рівномірно по $t \in R : \varphi \in T_m$ існує

$$\lim_{T \to \infty} \frac{i(t, \, t+T)}{T} = p, \tag{4}$$

де $i(t, \ t+T)$ - кількість розв'язків рівняння (3) $t = \tau_i(\varphi)$, що знаходяться між t і $t + T$.

Така границя існує, коли послідовність $\{\tau_{i+1}(\varphi) - \tau_i(\varphi)\}, \quad i \in Z, \quad \varphi \in T_m$ є періодичною або майже періодичною.

Умова існування границі (4) рівносильна такій: можна вказати такі числа додатне l і натуральне q, що будь-який проміжок довжини l $[t,\, t+l]$ містить не більше, ніж q членів послідовності $\{t_i(\varphi)\}$.

Теорема 1. *Нехай в системі рівнянь (1) матриці $P(\varphi)$ і $B(\varphi)$ такі, що для деяких $\gamma(\varphi), \alpha(\varphi)$ і $x \in R^n$*

$$\begin{aligned} &\langle P(\varphi)x,\, x\rangle \leqslant \gamma(\varphi)\,\langle x,\, x\rangle\,, \qquad \varphi \in T_m, \\ &\left\langle (E + B^T(\varphi))(E + B(\varphi))x,\, x\right\rangle \leqslant \alpha^2(\varphi)\,\langle x,\ x\rangle\,, \qquad \varphi \in \Gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

Якщо

$$\gamma_0 + \vartheta \ln \alpha_0 < 0, \tag{6}$$

де $\gamma_0 = \max\limits_{\varphi \in T_m} \gamma(\varphi),\ \alpha_0 = \max\limits_{\varphi \in G} \alpha(\varphi)$, то тривіальний тор системи рівнянь (1) асимптотично стійкий.

Література

[1] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. *Impulsive Differential equations* – Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.

[2] Капустян О.В., Перестюк Ю.М. *Якісна поведінка траєкторій розривних динамічних систем* – монографія – К. ВПЦ "Київський університет"2021. – 182 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Email address: `Ekaterinamamsa@gmail.com, perestyuk@gmail.com`

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ЗМІШАНОГО ТИПУ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ АНІЗОТРОПНОГО МАСИВУ

Р. І. МАНУЙЛЕНКО

Останнім часом доля нафти і газу серед енергоресурсів знижується. Шантаж монополістів і війна Росії в Україні змусили світ шукати інші джерела енергії. Поряд з дослідженням і розробкою альтернативних джерел енергії багато країн повернулися до видобування твердих корисних копалин.

У Німеччині наразі розконсервовуються вугільні шахти, Китай свою вугільну галузь розвивав завжди [1]. Так само багато уваги приділяються іншим твердим копалинам, таким, як торф, сланці тощо.

Останнім часом популярним джерелом електроенергії стає сланцевий газ і шахтовий метан та етан. Лідерами з розробки цих ресурсів є США та Канада [1]. В Україні цей напрям розвиватися став наприкінці минулого століття, але потім цей напрямок було згорнуто [2, 3].

При розробці корисних копалин відбувається перерозподіл напружень і деформацій у масиві. Для дослідження стану корисної копалини і навколишніх порід використовуються методи теорії пружності, пластичності та повзучості.

Рівняння стану корисної копалини мають гіперболічний тип, а диференційні рівняння для навколишніх порід мають еліптичний тип.

Для встановлення механічного стану корисної копалини система рівнянь теорії пластичності зводиться до рівнянь рівноваги, зв'язку між напруженнями та зміщеннями та рівняння нестисливості. При умові пластичності Мізеса [3] система рівнянь має гіперболічний тип в усій зоні пластичних деформацій. Було розроблено як аналітичні методи розв'язання задач, так і чисельні методи характеристик, які дозволяють визначити напруження та зміщення в пласті і на підставі цього розв'язку уточнити крайові умови для навколишніх порід. Метод дозволяє встановити лінії поширення деформацій і стан порід для різних коефіцієнтів пластичної анізотропії.

При визначенні напружень, деформацій та зміщень у породах використовуються рівняння теорії пружності анізотропного тіла. Для двовимірного випадку система рівнянь пружності і повзучості має еліптичний тип, завдяки чому при розв'язанні використовуються методи теорії функцій комплексної змінної. Напруження та зміщення вираховуються через функції узагальнених комплексних координат [3, 4]. Узагальнені комплексні області перетворюються з заданої області афінним перетворенням, при розв'язанні можна скористатися тим, що півплощина при подібному перетворенні залишається півплощиною. Розв'язання системи рівнянь еліптичного типу відбувається на основі інтегральних методів Сіньоріні—Келдиша—Сєдова [5].

При розробці корисної копалини відбувається перехід з копалини до порід і фільтрація газу [3, 5]. Система рівнянь фільтрації має еліптичний тип і розв'язується методом теорії функцій комплексної змінної. Одним з методів розробки газу є створення в породах покрівлі поблизу розроблюваного пласта іншої виробки [5], яка має назву газового горизонту. При наближенні вибою до газового горизонту збільшується надходження метану, а на більших глибинах — і етану, далі газ закачується на поверхню і очищується від домішок.

Література

[1] Bhatt G. (2022). Energy Security and the Path to Green. *Finance & Development*, 2022, no. 4, p. 3.

[2] Токар А.В., Вакуленко А.В. (2023). Квантово-хімічні дослідження особливостей електронного стану атомів карбону у системі «метан-вугілля» в умовах ефективної сорбційної взаємодії. *ТАСХ-2023: Матеріали II Міжнародної наукової конференції. Теоретичні та експериментальні аспекти сучасної хімії та матеріалів, м. Дніпро*, с. 143–146.

[3] Мануйленко Р.І., Гранченко Є.О. (2021). Задача фільтрації газу в тріщину при випадковому характері проникливості середовища. *Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2021», 26–28 травня 2021 р., м. Львів.*

[4] Мельник Т.А. (2015). *Комплексний аналіз.* Київ: ВПЦ «Київський університет», 192 с.

[5] Мануйленко Р.І. (2019). Моделювання та дослідження напружень, зміщень і фільтрації метану у масиві з розроблюваним вугільним пластом і допоміжною виробкою. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. Збірник наукових праць*, випуск 5, с. 64.

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Слов'янськ, Україна
Email address: ronma2016@gmail.com

УМОВИ ВИНИКНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СЛАБОЗБУРЕНИХ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

З. П. ОРДИНСЬКА, Р. Ф. ОВЧАР

Отримані ефективні коефіцієнтні умови виникнення розв'язків лінійних неоднорідних імпульсних крайових задач з малим збуренням у випадку, коли породжуюча крайова задача з імпульсною дією не має розв'язків при довільних правих частинах.

Розглянемо слабозбурену лінійну неоднорідну крайову задачу з імпульсною дією вигляду [4]:

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + \varepsilon A_1(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta z_{|t=\tau_i} - S_i z = a_i + \varepsilon A_{1i} z(\tau_i - 0), \\ lz = \alpha + \varepsilon l_1 z. \end{cases} \tag{1}$$

Припустимо, що у породжуючої крайової задачі з імпульсною дією, яка отримується із (1), при $\varepsilon = 0$ не існує розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a,b]\backslash\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, тобто критерій її розв'язності [1] не виконується. Виникає питання, чи можливо за допомогою лінійних збурень зробити цю задачу розв'язною, і якщо можливо, то якими повинні бути збурені доданки $\varepsilon A_1(t)$, εA_{1i}, та εl_1, щоб крайова задача (1) мала розв'язки при будь-яких неоднорідностях $f(t)$, a_i і α. Аналогічно [2], відповісти на це питання можна за допомогою $d \times r$ - вимірної матриці:

$$B_0 = P_{Q_d^*}\left[l_1 X_r(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot,\tau) A_1(\tau) dr - l \sum_{i=1}^{p} \overline{K}(\cdot,\tau_i) A_{1i} X_r(\tau_i - 0) \right], \tag{2}$$

побудованої по коефіцієнтам вихідної диференціальної крайової задачі.

Застосування метода Вішіка–Люстерніка [2, 3] дозволяє знайти ефективні коефіцієнтні умови виникнення розв'язків крайової задачі (1) у вигляді рядів Лорана за степенями малого параметра ε зі скінченним числом доданків, які містять від'ємні степені ε. Доведена теорема, яка дозволяє розв'язати поставлену задачу. Перш ніж її сформулювати, введемо наступні позначення: $Q = lX(\cdot) - (m \times n)$ - вимірна матриця; $Q^* = Q^T$; $P_{Q^*} - (m \times m)$ - вимірна матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^m \to N(Q^*)$; $P_{Q_d^*} - (d \times m)$ - вимірна матриця, рядки якої є повна система d–лінійно-незалежних рядків матриці $P_{Q^*} (d = m - n_1, n_1 = \text{rank } Q)$;

P_{B_0} – $(r \times r)$ - вимірна матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^r \to N(B_0)$; $P_{B_0^*}$ – $(d \times d)$ - вимірна матриця-ортопроектор: $\mathbb{R}^d \to N(B_0^*)$; $B_0^* = B_0^T$.

Теорема 1. *Нехай крайова задача* (1) *задовольняє вказаним вище умовам так, що має місце критичний випадок* ($\operatorname{rank} Q = n_1 < n$) *і породжуюча крайова задача* ($\varepsilon = 0$) *при довільних неоднорідностях* $f(t) \in C([a,b]\backslash\{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ *не має розв'язків. Тоді, якщо виконуються умови*

$$P_{B_0} = 0, \quad P_{B_0^*} P_{Q_d^*} = 0, \tag{3}$$

то для крайової задачі (1) *існує при довільних*

$$f(t) \in C([a,b]\backslash\{\tau_i\}_I), \quad q_i \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m$$

єдиний розв'язок у вигляді збіжного при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ *ряду*

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t). \tag{4}$$

Можна показати, що якщо умови (3) теореми не виконуються, то для отримання достатніх умов виникнення розв'язків крайової задачі (1) необхідно залучити $d \times r$ - вимірну матрицю B_1 [2]. Розв'язок $z(t,\varepsilon)$ крайової задачі відшуковується при цьому у вигляді збіжного при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$ ряду з $k \geqslant -2$.

Література

[1] Самойленко А.М., Перестюк Н.А. Линейные нетеровы краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. – 1992. – №4. – С. 567-570.

[2] Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач. – Киев: Наук. думка. 1990. – 96 с.

[3] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамомопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. – 15, вып. 3. – С. 3-80.

[4] Ordynska Z.P., Ovchar R.F. Boundary-value problems for differential systems with pulsed action // Journal of Mathematical Sciences – 2023. – 272, P. 278–283.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

Email address: zoya.o2501@gmail.com

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

Email address: rfovchar@gmail.com

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ СИНГУЛЯРНОЇ ГРАНИЧНОЇ В'ЯЗКИ МАТРИЦЬ

О. В. ПАФИК

Розглянуто двоточкову крайову задачу

$$\varepsilon^h B(t;\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t;\varepsilon)x + f(t;\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right), \tag{1}$$

$$Mx(0;\varepsilon) + Nx(T;\varepsilon) = p(\varepsilon), \tag{2}$$

в який $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $A(t;\varepsilon), B(t;\varepsilon)$ — квадратні матриці n-го порядку, коефіцієнти яких є дійсні або комплекснозначні функції; M, N — квадратні матриці n-го порядку зі сталими коефіцієнтами; $f(t;\varepsilon)$ - задана n-вимірна вектор-функція, коефіцієнти якої є дійсні або комплекснозначні функції; $\alpha(t)$ — скалярна функція; $p(\varepsilon)$ заданий n-вимірний вектор; $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $\varepsilon_0 << 1$, $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Крайову задачу (1), (2) було розглянуто при виконанні наступних умов:

1°. Матриці $A(t;\varepsilon), B(t;\varepsilon)$ та вектор $f(t;\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A(t;\varepsilon) \sim \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k A_k(t), B(t;\varepsilon) \sim \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k B_k(t), f(t;\varepsilon) \sim \sum_{k\geqslant 0}\varepsilon^k f_k(t).$$

2°. Коефіцієнти матриць $A_k(t) = \left\|a_{ij}^{(k)}(t)\right\|_1^n, B_k(t) = \left\|b_{ij}^{(k)}(t)\right\|_1^n, k = 0, 1, \ldots,$ та векторів $f_k(t) = \left(f_1^{(k)}(t); f_2^{(k)}(t); \ldots; f_n^{(k)}(t)\right)^T, k = 0, 1, \ldots,$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0;T]$:

$$a_{ij}^{(k)}(t) \in C^\infty[0;T]; b_{ij}^{(k)}(t) \in C^\infty[0;T], f_i^{(k)}(t) \in C^\infty[0;T], i, j = \overline{1, n}, k = 0, 1 \ldots.$$

3°. Гранична в'язка матриць

$$L(t,\lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t)$$

є сингулярною $\forall t \in [0;T]$ і зберігає сталу кронекерову структуру на відрізку $[0;T]$, причому в'язка матриць $L(t,\lambda)$ має по одному мінімальному індексу для стовпців та рядків: $p \geqslant 0$ для стовпців та $q = n - p - 1$ для рядків.

4°. Вектор $p(\varepsilon)$ зображається у вигляді асимптотичного ряду:

$$p(\varepsilon) \sim \sum_{k \geqslant 0} \varepsilon^k p_k.$$

5°. $\Big(B_1(t)\tilde{\varphi}(t); \tilde{\psi}(t)\Big) \neq 0$, $\forall t \in [0;T]$, де $\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)$ елеметри нуль-простору матриць $B_0(t)$ і $B_0^*(t)$ відповідно.

При виконанні умов $1° - 5°$ та деяких інших додаткових умов, використовуючи результати робіт [1-4], побудовано асимптотичний розв'язок двоточкової крайової задачі (1), (2) у випадку, коли гранична в'язка матриць $L(t, \lambda)$ є сингулярною та має по одному мінімальному індексу для стовпців та рядків:

1. Побудовано формальний розв'язок задачі (1), (2).

2. Доведено, що побудований формальний розв'язок задачі (1), (2), є асимптотичним розвиненням точного розв'язку цієї задачі при $\varepsilon \longrightarrow 0$, наведено відповідні асимптотичні оцінки.

Література

[1] Vira M.B., Yakovets' V.P. (2010). On the construction of asymptotic solutions of two-point boundary-value problems for degenerate singularly perturbed systems of differential equations *Nonlinear Oscillations*, vol. 13, no. 2, pp. 295–309.

[2] Samusenko P.F., Vira M.B. (2022). Asymptotic solutions of boundary value problem for singularly perturbed system of differential-algebraic equations. *Carpathian Mathematical Publications*, vol. 14, no. 1, pp. 49–60.

[3] Pafyk S.P., Yakovets' V.P. (2016). Asymptotic analysis of the general solution of a linear singularly perturbed system of higher-order differential equations with degenerations. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 215, no. 3, pp. 350–375.

[4] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. (2000). Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями *Київ: Вища школа*, 294 с.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: o.v.pafyk@npu.edu.ua

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ ЗАГАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ВИРОДЖЕННЯМИ У БАГАТОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

С. П. ПАФИК

Досліджена система диференціальних рівнянь вигляду

$$\sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{kh} A_k(t,\varepsilon) \frac{d^k x}{dt^k} = 0, \tag{1}$$

в якій $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, — $(n\times n)$-матриці, коефіцієнти яких є дійсні або комплекснозначні функції, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий дійсний параметр, $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Систему (1) було розглянуто при виконанні наступних умов:

1°. Матриці $A_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{0,m}$, допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A_i(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geqslant 0} \varepsilon^k A_i^{(k)}(t), i=\overline{0,m}.$$

2°. Коефіцієнти матриць $A_i^{(k)}(t), i=\overline{0,m}, k=0,1,\ldots,$ — нескінченно диференційовані на відрізку $[0;T]$.

3°. $\det A_m^{(0)}(t)=0, \forall t\epsilon[0;T]$.

4°. Гранична в'язка матриць

$$P(t,\lambda)=\sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i^{(0)}(t)$$

системи (1) регулярна при всіх $t \in [0;T]$ і має $r>1$ скінченних елементарних дільників $(\lambda-\lambda_0(t))^p$ кратністю $p>1$ кожний і $s>1$ нескінченних — кратності q кожний, причому $pr+qs=mn$.

При виконанні умов $1^\circ - 4^\circ$, використовуючи метод діаграм Ньютона, здійснено асимптотичний аналіз структури загального розв'язку системи (1) у багатовимірному випадку, коли гранична в'язка матриць $P(t,\lambda)$ має кілька скінченних та нескінченних елементарних дільників однакової кратності:

1. Виведено рівняння розгалуження для розв'язків першої та другої груп, що відповідають скінченним та нескінченним елементарним дільникам в'язки матриць $P(t,\lambda)$ відповідно.

2. Здійснено аналіз отриманих рівнянь розгалуження.

3. Розроблено алгоритм побудови розв'язків першої та другої груп системи (1) із рівнянь розгалуження.

Література

[1] Pafyk S.P., Yakovets' V.P. (2016). Asymptotic analysis of the general solution of a linear singularly perturbed system of higher-order differential equations with degenerations. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 215, no.3, pp. 350–375.

[2] Samusenko P.F. (2015). Asymptotic integration of singularly perturbed linear system of differential-algebraic equations. *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 17, no.2, pp. 1033–1047.

[3] Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. (2000). Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями *Київ: Вища школа*, 294 с.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Email address: `s.p.pafyk@npu.edu.ua`

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ БІОЛОГІЧНОГО ОЧИЩЕННЯ СТІЧНИХ ВОД

В. К. РЕПЕТА, Л. І. ПАВЛЮХ, С. Й. ШАМАНСЬКИЙ

Проблема очищення стічних вод від шкідливих домішок у наш час набуває все більшої актуальності. В останні десятиліття все частіше для цього використовують біологічний ресурс, зокрема мікроводорості. У цій роботі запропоновано математичну модель замкненої водної системи типу «споживач–ресурс», у якій ресурсом є шкідливі фосфорні та азотні домішки, а споживачем — мікроводорості *Euglena gracilis*.

Уведемо позначення: C_m, C_{i1}, C_{i2} — концентрації (у мг/дм^3) мікроводоростей, домішок фосфору та домішок азоту відповідно. У початковий момент часу концентрації мікроводоростей та домішок фосфору й азоту дорівнюють відповідно

$$C_m(0) = C_{m0}, \quad C_{i1}(0) = C_{i10}, \quad C_{i2}(0) = C_{i20}.$$

Динаміку зміни зазначених концентрацій описано за допомогою системи нелінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} \frac{dC_m}{dt} = q \cdot \frac{C_m}{C_{m0}} \cdot (\alpha_1 \cdot T_1 (C_{i1}, C_m) + \alpha_2 \cdot T_3 (C_{i2}, C_m)) - \gamma C_m \\ \frac{dC_{i1}}{dt} = -\beta_1 \cdot q \cdot C_m \cdot T_2 (C_{i1}, C_m) \\ \frac{dC_{i2}}{dt} = -\beta_2 \cdot q \cdot C_m \cdot T_4 (C_{i2}, C_m) \end{cases} \tag{1}$$

де трофічні функції мають вигляд

$$T_{2k-1} (C_{ik}, C_m) = \frac{1 - \left(1 - \frac{C_{ik}}{C_{ik0}}\right)^n}{\left(1 + \delta_{4k-3} \cdot \left(\frac{C_{ik}}{C_{ik0}}\right)^{n_{4k-3}}\right) \left(1 + \delta_{4k-2} \cdot \left(\frac{C_m}{C_{m0}}\right)^{n_{4k-2}}\right)},$$

$$T_{2k} (C_{ik}, C_m) = \frac{\frac{C_{ik}}{C_{ik0}} \cdot \frac{1}{C_{m0}}}{\left(1 + \delta_{4k-1} \cdot \left(\frac{C_{ik}}{C_{ik0}}\right)^{n_{4k-1}}\right) \left(1 + \delta_{4k} \cdot \left(\frac{C_m}{C_{m0}}\right)^{n_{4k}}\right)}, \quad k = 1; 2.$$

У системі (1) параметри α_1 та α_2 характеризують процес збільшення концентрації мікроводоростей за рахунок поглинання домішок фосфору та азоту відповідно; параметр γ характеризує швидкість зменшення концентрації водоростей за рахунок природних процесів (уважаємо, що γ набуває певного близького до нуля значення, візьмемо $\gamma = 0,02$); параметри β_1 та β_2 характеризують швидкість зменшення концентрацій домішок фосфору та азоту відповідно у водному середовищі внаслідок взаємодії з водоростями.

Система (1) є природним узагальненням системи, що описує взаємодію мікроводоростей з домішками фосфору [1].

На значення параметрів накладено певні вимоги, зокрема $q = 4$, $n = 30$, $(1+\delta_{2k-1})(1+\delta_{2k}) = q$ для $k = 1; 2; 3; 4$.

У початковий момент часу $t = 0$ справджуються рівності

$$\frac{dC_m(0)}{dt} = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma C_{m0}, \quad \frac{dC_{i1}(0)}{dt} = -\beta_1, \quad \frac{dC_{i2}(0)}{dt} = -\beta_2.$$

Значення параметрів α_1, α_2, β_1, β_2, $\delta_1 - \delta_8$, $n_1 - n_8$ добиралися так, щоб математична модель адекватно відображала експериментальні дані, інтегральні криві мали строго виражену S-подібну форму, при цьому значення α_1, α_2, β_1, β_2 добиралися з урахуванням умов $C_m(1) \approx (C_m(1))^*$, $C_{i1}(1) \approx (C_{i1}(1))^*$, $C_{i2}(1) \approx (C_{i2}(1))^*$, де $(C_m(1))^*$, $(C_{i1}(1))^*$, $(C_{i2}(1))^*$ — розрахункові концентрації мікроводоростей та домішок фосфору й азоту.

Приклад 1. Наведемо у графічній формі (див. рис. 1) розв'язки системи (1) за початкових умов $C_m(0) = 120$, $C_{i1}(0) = 7$, $C_{i2}(0) = 50$.

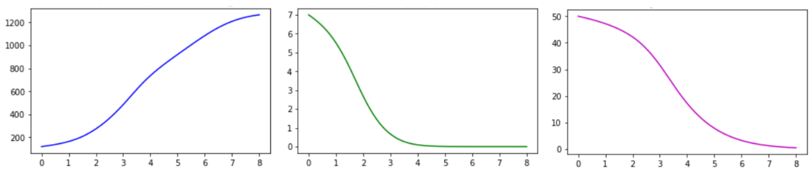


Рис. 1. Динаміка зміни концентрації біомаси мікроводоростей, фосфору та азоту відповідно у стічних водах

Література

[1] Viktor Repeta, Lesia Pavliukh, Sergii Shamanskyi. (2023). Mathematical Model of Biogenic Elements and Microalgae Interaction in Wastewater/ XVI міжнародна науково-технічна конференція «АВІА-2023», 18–20 квітня 2023 року. Київ: НАУ. С. 15.27–15.31.

Національний авіаційний університет, Київ, Україна
Email address: repetavk@gmail.com

Національний авіаційний університет, Київ, Україна
Email address: lenyo@ukr.net

Національний авіаційний університет, Київ, Україна
Email address: shamanskiy_s_i@ukr.net

АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-АЛГЕБРАЇЧНИХ СИСТЕМ

П. Ф. САМУСЕНКО

Математичні моделі багатьох прикладних задач теорії електричних кіл, механіки, хімічної кінетики, гідродинаміки, теплотехніки та радіоелектроніки описуються диференціально-алгебраїчними системами (ДАС) рівнянь. Розв'язки таких систем рівнянь мають специфічні властивості, які суттєвим чином відрізняються від аналогічних властивостей розв'язків систем диференціальних рівнянь, записаних в нормальній формі. Так, відсутня неперервна залежність від вхідних даних, простір розв'язків лінійної ДАС може бути нескінченно вимірним, початкова задача для лінійної ДАС може мати нескінченну кількість розв'язків, тощо. У зв'язку з цим дослідження властивостей розв'язків різноманітних задач для ДАС викликає суттєвий інтерес і є нетривіальним.

У роботі розглядається двоточкова крайова задача

$$\varepsilon^2 A(t,\varepsilon)\frac{d^2x}{dt^2} = f(x,t,\varepsilon),\ t \in [0;T], \tag{1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x_0,\ x(T,\varepsilon) = x_T, \tag{2}$$

де $x(t,\varepsilon)$ – шуканий n-вимірний вектор, $A(t,\varepsilon)$ – квадратна матриця n-го порядку, $f(x,t,\varepsilon)$, x_0, x_T – n-вимірні вектори, компонентами яких є дійсні або комплекснозначні функції, ε – малий параметр.

Формальний розв'язок задачі (1), (2) шукається у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = \overline{x}(t,\varepsilon) + \Pi x(\tau,\varepsilon) + Qx(\xi,\varepsilon), \tag{3}$$

де $\overline{x}(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \overline{x}_s(t)$ – регулярна частина асимптотики, $\Pi x(\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \Pi_s x(\tau)$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, та $Qx(\xi,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q_s x(\xi)$, $\xi = \frac{t-T}{\varepsilon}$, – сингулярна частина асимптотики.

Члени регулярної частини асимптотики визначаються з алгебраїчних систем, а члени сингулярної частини – з відповідних автономних диференціально-алгебраїчних систем зі сталою матрицею при похідних.

Доведено асимптотичний характер формального розв'язку (3) крайової задачі (1), (2).

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: psamusenko@ukr.net

ДИНАМІКА КОНФЛІКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ В ТЕРМІНАХ МАКСИМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ

О. Р. САТУР

Припустимо двом протидіючим сторонам (гравцями) A та B в момент часу $t = 0$ співставлено незалежні дискретні випадкові розподіли на їхньому спільному просторі існування $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n \geqslant 2$:

$$A \sim \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad B \sim \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n).$$

Зрозуміло, що вектори $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ є стохастичними:

$$0 \leqslant p_i, r_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} r_i = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Далі припускаємо, що вони є різними і неортогональними, тобто в $\mathbb{R}^n_+$ їх скалярний добуток задовольняє умову $0 < (\mathbf{p}, \mathbf{r}) < 1$. Координати p_i, r_i можна інтерпретувати як незалежні ймовірності присутності A і B в ω_i. Іншими словами, величини p_i, r_i характеризують випадкові події відвідування позиції ω_i сторонами A, B в початковий момент часу $t = 0$. Отже, $p_i = \mathbf{P}(A$ перебуває в позиції $\omega_i)$, де $\mathbf{P}(\cdot)$ означає ймовірність. Аналогічно для r_i.

Припустимо, що в наступні моменти дискретного часу $t = 1, 2, \dots$ сторони A та B вступають один з одним у взаємодію, яку позначаємо $\circledast$. Це приводить до зміни відповідних їм розподілів:

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \equiv \{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\} \xrightarrow{\circledast} \{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\} \xrightarrow{\circledast} \cdots \xrightarrow{\circledast} \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{\circledast} \cdots. \tag{1}$$

Покладаємо, що закон зміни координат стохастичних векторів задається ітераційно такими формулами:

$$p_i^t = p_{\max}^t = \max_{j=1,\dots,n} p_j^t, \qquad r_i^t = r_{\max}^t = \max_{j=1,\dots,n} r_j^t, \tag{2}$$

$$p_i^{t+1} = \frac{1}{z_p^t} \alpha \cdot p_{\max}^t (1 - r_{\max}^t), \qquad r_i^{t+1} = \frac{1}{z_r^t} \beta \cdot r_{\max}^t (1 - p_{\max}^t), \tag{3}$$

$$p_j^{t+1} = \frac{p_j}{z_p^t}, \quad r_j^{t+1} = \frac{r_j}{z_r^t}, \qquad i \neq j, \qquad \alpha, \beta > 0, \tag{4}$$

$$t = 0, 1, \dots, \quad p_j^0 = p_j, \quad r_j^0 = r_j, \quad p_{\max}^0 = p_{\max}, \quad r_{\max}^0 = r_{\max},$$

де нормувальні знаменники z_p^t і z_r^t вводяться для забезпечення стохастичності векторів $\mathbf{p}^{t+1}$, $\mathbf{r}^{t+1}$

$$z_p^t = \alpha \cdot p_{\max}^t(1 - r_{\max}^t) + \sum_{j \neq \max} p_j^t,$$

$$z_r^t = \alpha \cdot r_{\max}^t(1 - p_{\max}^t) + \sum_{j \neq \max} r_j^t.$$

Передбачається, що на кожному кроці ітерації кожна з сторін докладає максимальних зусиль обираючи для конфліктної взаємодії позицію з найбільшою "вагою". Тобто конфлікт ведеться тільки на позиціях з максимальними ймовірнісними значеннями на просторі снування для кожної зі сторін. Випадкові події перебування гравців A і B на позиціях ω_i перерозподіляються на кожному кроці часу t. Параметри α та β можна інтерпретувати як деякий додатковий ресурс, яким володіє кожна зі сторін. Зауважимо, що в такій постановці задачі α та β – це незалежні додатні величини, значення яких жодним чином не залежить від кожної зі сторін. Задача полягає у дослідженні поведінки траєкторій динамічної системи (1) в залежності від значення числових параметрів α, β та розмірності векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^n$. Досліджено поведінку такої динамічної системи для гравців лише з двома позиціями ($\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^2$).

В циклах робіт, що описані в [1]–[6] досліджувались різні задачі, повязані з динамічними системами конфлікту у дискретному часі в термінах стохастичних векторів заданих траєкторіями:

$$\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

де координати векторів $\mathbf{p}^{t+1}$, $\mathbf{r}^{t+1}$ визначалися системою різницевих рівнянь.

Дослідження виконувалися в рамках проєкту Нацонального фонду досліджень України, 2020.02/0089.

Література

[1] Кошманенко В. Д. (2016). *Спектральна теорія динамічних систем конфлікту.* Київ: Наукова думка, 287 с.

[2] Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M., Kulakowski K. (2019). Mean field model of a game for power. *Physica A.*, vol. 525, pp. 535–547.

[3] Satur O.R. (2021). Dependence of the behavior of the trajectories of dynamic conflict systems on the interaction vector. *Nonlinear Oscillations*, vol. 25, no. 1, pp. 72–88.

[4] Satur O.R., Kharchenko N.V. (2020). The model of dynamical system for the attainment of consensus. *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 71, no. 9, pp. 1456–1469.

[5] Koshmanenko V., Kharchenko N. (2017). Fixed points of complex system with attarachtive interaction. *Methods of Functional Analysis and Topology*, vol. 23, no. 2, pp. 164–176.

[6] Koshmanenko V. (2004). Theorem of conflicts for a pair of probability measures. *Math. Methods of Operations Research*, vol. 59, no. 2, pp. 303–313.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: `oksana@satur.in.ua`

ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЗА ПАРАМЕТРОМ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОВИМІРНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Т. Б. СКОРОБОГАЧ

Позначимо простір Соболєва-Слободецького через W_p^s та нагадаємо його означення.

$W_p^s := W_p^s\left((a,b),\mathbb{C}\right)$, $\left(W_p^s\right)^m := W_p^s\left((a,b),\mathbb{C}^m\right)$ і $\left(W_p^s\right)^{m\times m} := W_p^s\left((a,b),\mathbb{C}^{m\times m}\right)$, $p \geqslant 1$, $\ s\in(1,\infty)\setminus\mathbb{N}$, які складаються відповідно із скалярних функцій, вектор-функцій і квадратних матриць-функцій, заданих на інтервалі (a,b). Лінійний простір W_p^s складається з усіх функцій $f\in W_p^{[s]}$, які задовольняють умову

$$l_{s,p}(f) := \int\limits_a^b \int\limits_a^b \frac{|f^{([s])}(x)-f^{([s])}(y)|^p}{|x-y|^{1+\{s\}p}}dxdy < +\infty.$$

Простір W_p^s наділений нормою

$$\|f\|_{s,p} := \|f\|_p + (l_{s,p}(f))^{1/p}$$

та є повним (тобто банаховим) відносно неї. Цей простір є банаховою алгеброю щодо операції множення функцій тоді і тільки тоді, коли $s > 1/p$. З означення простору Соболєва–Слободецького і норми у ньому випливає, що

$$\|f\|_{s+1,p} \leqslant \|f\|_p + \|f'\|_{s,p} \leqslant 2\|f\|_{s+1,p}.$$

Зафіксуємо число $\varepsilon_0 > 0$.

Лінійна крайова задача, залежна від параметра $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0)$

$$L(\varepsilon)y(t,\varepsilon) := y'(t,\varepsilon) + A(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon) = f(t,\varepsilon), \quad t\in(a,b), \tag{1}$$

$$B(\varepsilon)y(\cdot,\varepsilon) = c(\varepsilon), \tag{2}$$

Тут довільно задано матрицю-функцію $A(\cdot)\in(W_p^{s-1})^{m\times m}$, вектор-функцію $f(\cdot)\in(W_p^{s-1})^m$, вектор $c\in\mathbb{C}^m$ і лінійний неперервний оператор

$$B(\varepsilon)\colon\ (W_p^s)^m \to \mathbb{C}^m. \tag{3}$$

Означення 1. Розв'язок крайової задачі (1), (2) неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$, якщо виконуються умови:

(∗) існує таке додатне число $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, що для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1)$, довільних правих частин $f(\cdot;\varepsilon)\in(W_p^{s-1})^m$ і $c(\varepsilon)\in\mathbb{C}^m$ ця задача має єдиний розв'язок $y(\cdot;\varepsilon)$, який належить простору $(W_p^s)^m$;

(**) зі збіжності правих частин $f(\cdot;\varepsilon) \to f(\cdot;0)$ в $(W_p^{s-1})^m$ і $c(\varepsilon) \to c(0)$ в $\mathbb{C}^m$ випливає збіжність розв'язків $y(\cdot;\varepsilon) \to y(\cdot;0)$ у $(W_p^s)^m$ при $\varepsilon \to 0+$.

Введемо такі умови:

(0) гранична однорідна крайова задача

$$L(0)y(t,0) = 0, \quad t \in (a,b), \quad B(0)y(\cdot,0) = 0 \tag{4}$$

має лише тривіальний розв'язок;

(I) $A(\cdot,\varepsilon) \to A(\cdot,0)$ в $(W_p^s)^{m\times m}$;

(II) $B(\varepsilon)y \to B(0)y$ в $\mathbb{C}^m$ для кожного значення $y \in (W_p^{s+1})^m$.

Умова (0) означає, що крайова задача (1), (2) при $\varepsilon = 0$ має єдиний розв'язок. Границі в умовах (I), (II) розглядаємо при $\varepsilon \to 0+$.

Теорема 1. *Розв'язок крайової задачі* (1), (2) *неперервно залежить від параметра ε при $\varepsilon = 0$ тоді і тільки тоді, коли вона задовольняє умову* (0) *та граничні умови* (I), (II).

Розглянемо такі величини:

$$\big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s,p}, \tag{5}$$

$$\widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon) := \big\|L(\varepsilon)y(\cdot;0) - f(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s-1,p} + \big\|B(\varepsilon)y(\cdot;0) - c(\varepsilon)\big\|_{\mathbb{C}^m}, \tag{6}$$

де (5) є похибкою, а (6) — нев'язкою розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2), якщо $y(\cdot;\varepsilon)$ розглядати як її точний розв'язок, а $y(\cdot;0)$ — як наближений.

Теорема 2. *Нехай крайова задача* (1), (2) *задовольняє умови* (0), (I) *і* (II). *Тоді існують такі додатні числа $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ і γ_1, γ_2, що для кожного $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2)$ має місце двобічна оцінка*

$$\gamma_1\, \widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon) \leqslant \big\|y(\cdot;0) - y(\cdot;\varepsilon)\big\|_{s,p} \leqslant \gamma_2\, \widetilde{d}_{s-1,p}(\varepsilon), \tag{7}$$

де числа ε_2, γ_1 і γ_2 не залежать від $y(\cdot;\varepsilon)$ і $y(\cdot;0)$.

Згідно з цією теоремою похибка і нев'язка розв'язку $y(\cdot;\varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) мають однаковий порядок малості.

Результати доповіді більш детально викладені в [1].

Література

[1] Михайлець В.А., Скоробогач Т.Б. Фредгольмові крайові задачі з параметром в просторах Соболєва- Слободецького // Доповіді національної академії наук України — 2021, № 4. — С. 3 – 8. DOI: 10.15407/dopovidi2021.03.03.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: tetianaskorobohach@gmail.com

II

АЛГЕБРА, ГЕОМЕТРІЯ, МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

ALGEBRA, GEOMETRY, CALCULUS

ON FIBONACCI AND LUCAS BINOMIAL SUMS MODULO 5

K. ADEGOKE, R. FRONTCZAK, T. GOY

Let F_n and L_n denote the n-th Fibonacci and Lucas numbers, both satisfying the recurrence $w_n = w_{n-1} + w_{n-2}$ for $n \geqslant 2$, but with the initial conditions $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. Also, $F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n$ and $L_{-n} = (-1)^n L_n$.

Theorem 1. *If n is a non-negative integer and t is any integer, then*

$$n \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{k-1} \binom{n-k-1}{k-1} \frac{L_{n-2k+t}}{k} = \begin{cases} L_{n+t} - (-1)^n 2L_t, & n \equiv 0 \pmod 5; \\ L_{n+t} + (-1)^n L_{t+1}, & n \equiv 1, n \equiv 4 \pmod 5; \\ L_{n+t} - (-1)^n L_{t-1}, & n \equiv 2, n \equiv 3 \pmod 5; \end{cases}$$

$$n \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{k-1} \binom{n-k-1}{k-1} \frac{F_{n-2k+t}}{k} = \begin{cases} F_{n+t} - (-1)^n 2F_t, & n \equiv 0 \pmod 5; \\ F_{n+t} + (-1)^n F_{t+1}, & n \equiv 1, n \equiv 4 \pmod 5; \\ F_{n+t} - (-1)^n F_{t-1}, & n \equiv 2, n \equiv 3 \pmod 5. \end{cases}$$

Theorem 2. *If n is a non-negative integer and t is any integer, then*

$$\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} L_{n-2k+t} = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod 5; \\ (-1)^{\lfloor n/5 \rfloor} L_{t+1}, & n \equiv 1,\ n \equiv 4 \pmod 5; \\ (-1)^{\lfloor n/5 \rfloor} L_{t+2}, & n \equiv 2,\ n \equiv 3 \pmod 5; \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n-k-1}{k} F_{n-2k+t} = \begin{cases} 0, & n \equiv 0 \pmod 5; \\ (-1)^{\lfloor n/5 \rfloor} F_{t+1}, & n \equiv 1,\ n \equiv 4 \pmod 5; \\ (-1)^{\lfloor n/5 \rfloor} F_{t+2}, & n \equiv 2,\ n \equiv 3 \pmod 5. \end{cases}$$

Theorem 3. *If n is a non-negative integer and t is any integer, then*

$$n \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil} \binom{n+2k+1}{n-2k+1} \frac{5^k F_{2k+t-1}}{n+2k-1} - n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+2k}{n-2k} \frac{5^k L_{2k+t}}{n+2k}$$
$$= \begin{cases} -L_t, & n \equiv 0 \pmod 5; \\ \frac{1}{2} L_{t+1}, & n \equiv 1,\ n \equiv 4 \pmod 5; \\ -\frac{1}{2} L_{t-1}, & n \equiv 2,\ n \equiv 3 \pmod 5; \end{cases}$$

$$n\sum_{k=1}^{\lceil n/2\rceil}\binom{n+2k+1}{n-2k+1}\frac{5^k L_{2k+t-1}}{n+2k-1}-n\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+2k}{n-2k}\frac{5^{k+1}F_{2k+t}}{n+2k}$$
$$=\begin{cases}-5F_t, & n\equiv 0 \pmod 5;\\ \frac{5}{2}F_{t+1}, & n\equiv 1,\, n\equiv 4 \pmod 5;\\ -\frac{5}{2}F_{t-1}, & n\equiv 2,\, n\equiv 3 \pmod 5).\end{cases}$$

Theorem 4. *If n is a positive integer and t is any integer, then*

$$n\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n+k}{n-k}\frac{L_{2k+t}}{n+k}=\begin{cases}L_t, & n=0 \pmod 5;\\ \frac{1}{2}L_{t-1}, & n=1,\, n=4 \pmod 5;\\ -\frac{1}{2}L_{t+1}, & n=2,\, n=3 \pmod 5;\end{cases}$$

$$n\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n+k}{n-k}\frac{F_{2k+t}}{n+k}=\begin{cases}F_t, & n=0 \pmod 5;\\ \frac{1}{2}F_{t-1}, & n=1,\, n=4 \pmod 5;\\ -\frac{1}{2}F_{t+1}, & n=2,\, n=3 \pmod 5).\end{cases}$$

Theorem 5. *If n is a non-negative integer and n is any integer, then*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2k}{n+k}\binom{n+k}{n-k}L_{2k+t}=\begin{cases}0, & n\equiv 0 \pmod 5;\\ (-1)^{\lfloor n/5\rfloor}L_{t+2}, & n\equiv 1,\, n\equiv 4 \pmod 5;\\ (-1)^{\lfloor n/5\rfloor+1}L_{t+1}, & n\equiv 2,\, n\equiv 3 \pmod 5;\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{2k}{n+k}\binom{n+k}{n-k}F_{2k+t}=\begin{cases}0, & n\equiv 0 \pmod 5;\\ (-1)^{\lfloor n/5\rfloor}F_{t+2}, & n\equiv 1,\, n\equiv 4 \pmod 5;\\ (-1)^{\lfloor n/5\rfloor+1}F_{t+1}, & n\equiv 2,\, n\equiv 3 \pmod 5).\end{cases}$$

For some of our findings on binomial sums involving Fibonacci and Lucas numbers we refer to the papers [1–3].

References

[1] Adegoke K., Frontczak R., Goy T. (2023). Binomial Fibonacci sums from Chebyshev polynomials. *arXiv*, arXiv:2308.04567v1 [math.CO].

[2] Adegoke K., Frontczak R., Goy T. (2023). Binomial sum relations involving Fibonacci and Lucas numbers. *AppliedMath.*, to be submitted.

[3] Adegoke K., Frontczak R., Goy T. (2023). New binomial Fibonacci sums. *Palestine J. Math.*, vol. 12, no. 3, in press.

Obafemi Awolowo University, Ile-Ife, Nigeria
Email address: adegoke00@gmail.com

Independent Researcher, Reutlingen, Germany
Email address: robert.frontczak@web.de

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine
Email address: taras.goy@pnu.edu.ua

CHARACTERISTIC SUBALGEBRAS OF THE LIE ALGEBRA ASSOCIATED WITH THE WREATH PRODUCTS OF ELEMENTARY ABELIAN GROUPS

N. V. BONDARENKO, V. V. OTRASHEVSKA

Let p be a prime number and m, n are fixed integer, $m, n > 2$. We consider Lie algebra associated with the lower central series of the wreath product $P_{m,n} = \underbrace{(C_p)^n \wr \ldots \wr (C_p)^n}_{m}$ of m copies of elementary abelian p-groups of degree n. It is shown that this Lie algebra has special «tableau» representation $L_{m,n}$ and it is proved that the Lie algebra $L_{m,n}$ is isomorphic to the wreath product of m copies of the abelian Lie algebras A_n of dimension n over the field $\mathbb{F}_p$ [1].

$$L(P_{m,n}) \simeq L_{m,n} \simeq \underbrace{A_n \wr A_n \wr \ldots A_n}_{m}.$$

The elements of $L_{m,n}$ can be identified with the tableaux of the form:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12}(x_{11}, \ldots, x_{1n}) & \ldots & c_{1m}(x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m-1,1}, \ldots, x_{m-1,n}) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2}(x_{11}, \ldots, x_{1n}) & \ldots & c_{nm}(x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m-1,1}, \ldots, x_{m-1,n}) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

where $c_{i1} \in \mathbb{F}_p$ and $c_{ik}(x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{k-1,1}, \ldots, x_{k-1,n})$ is a polynomial over $\mathbb{F}_p$ reduced by modulo of ideal $\langle x_{11}^p, \ldots, x_{1n}^p, \ldots, x_{k-1,1}^p, \ldots, x_{k-1,n}^p \rangle$ $(i = 1, \ldots, n;$ $k = 2, \ldots, m)$.

The operations of the addition, the multiplication on the elements of the field $\mathbb{F}_p$ of such tableaux (1) are determined coordinately, and the Lie bracket $(\, , \,)$ for tableaux $u, v \in L_{m,n}$ is determined by the following equalities $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant m)$:

$$\{(u,v)\}_{ik} = \sum_{s=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \{v\}_{ik}}{\partial x_{sj}} \cdot \{u\}_{js} - \frac{\partial \{u\}_{ik}}{\partial x_{sj}} \cdot \{v\}_{js} \right),$$

where $\{u\}_{ik}$, $\{v\}_{ik}$ and $\{u\}_{js}$, $\{v\}_{js}$ are the (i,k)-th and the (j,s)-th coordinates of the tableaux $u, v \in L_{m,n}$ respectively.

In [4] L.A. Kaloujnine constructed a special tableau representation of the Sylow p-subgroup P_m of the symmetric group of degree p^m and used this representation to study the structure of the group. In particular, he described all characteristic subgroups in terms of parallelotopic subgroups. In [3] we proved the analog of the Kaloujnine's result for the Lie algebra L_m associated with the Sylow p-subgroup P_m

of the symmetric group of degree p^m. We now generalize this result with respect to characteristic subalgebras for Lie algebras $L_{m,n}$.

The height of a monomial $x_{11}^{i_{11}} \dots x_{1n}^{i_{1n}} \dots x_{k1}^{i_{k1}} \dots x_{kn}^{i_{kn}}$ is defined as the positive integer number

$$h = \sum_{l=1}^{k} d^{l-1} \sum_{j=1}^{n} i_{lj} + 1,$$

where $d = n(p-1)+1$. The height of zero monomial is equal to zero. The height of a reduced polynomial is defined as the largest height of its monomials.

The matrix $\|h(\{u\}_{ik})\|$ is called the characteristic of the tableau u and is denoted by $h(u)$. Introduce the partial order of coordinate-wise comparison on the set of all characteristics of tableaux: $h(u) < h(v)$ if and only if $h(\{u\}_{ik}) \leqslant h(\{v\}_{ik})$ for all $i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, m$.

A subalgebra $A \subset L_{m,n}$ is called parallelotopic if for every $u \in A$ and $v \in L_{m,n}$ the inequality $h(v) \leqslant h(u)$ implies $v \in A$. Such a subalgebra is completely determined by the matrix with elements

$$A_{ij} = \max_{u \in U} \{h(\{u\}_{ij})\}, \quad i = 1, \dots, n; \; j = 1, \dots, m.$$

This matrix is called the characteristic of the parallelotopic subalgebra A and is denoted by $h(A)$.

The characteristic subalgebra A of $L_{m,n}$ is a subalgebra which is invariant under the action of every automorphism of $L_{m,n}$, i.e., $\varphi(A) \in A$ for all $\varphi \in Aut(L_{m,n})$.

In the following statement we prove the analog of Kaloujnin's result for the characteristics subalgebras of $L_{m,n}$.

Theorem 1. *A subalgebra of $L_{m,n}$ is characteristic if and only if it is a parallelotopic ideal.*

References

[1] Bondarenko N.V. (2006). Lie algebras associated with wreath products of elementary abelian groups *Mathematical studies*, vol. 26, pp. 3–16.

[2] Bondarenko N.V., Gupta C.K., Sushchansky V.I. (2010). Lie algebra associated with the group of finitary automorphisms of p-adic tree *Journal of algebra*, vol. 324, pp. 2198–2218.

[3] Bondarenko N.V. (2012). Characteristic subalgebras of Lie algebra associated with the Sylow p-subgroup of symmetric group *Bulletin of Kyiv University. Series: physical and mathematical sciences.*, vol. 4, pp. 7–12.

[4] Kaloujnine L.A. (1948). La structure des p-groupes de Sylow des groupes symetriques finis *Ann. Sci de l'Ecole Norm. Super.*, vol. 65, no. 3, pp. 239–276.

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine
Email address: natvbond@gmail.com

Kyiv National University of Construction and Architecture, Kyiv, Ukraine
Email address: otrashevska_vv@ukr.net

JACKSON TYPE INEQUALITIES IN THE BESICOVITCH-MUSIELAK-ORLICZ SPACES

S. O. CHAICHENKO, A. L. SHIDLICH

Let f be an arbitrary almost periodic complex-valued Besicovitch function of the class B (B-a.p. function), whose Fourier exponents $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ have a single limit point at infinity. Let us write its Fourier series in the symmetric form $\sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda_k x}$,where $A_k(f)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda_k x}\mathrm{d}x$, $k\in\mathbb{Z}$, $\lambda_0:=0$, $\lambda_{k+1}>\lambda_k>0$, $\lambda_{-k}=-\lambda_k$, $|A_k(f)|+|A_{-k}(f)|>0$, $k>0$.

Let $\mathbf{M}=\{M_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, $t\geqslant 0$, be a sequence of nondecreasing convex functions, $M_k(0)=0$, $M_k(t)\to\infty$ as $t\to\infty$. The modular space (or Besicovitch-Museilak-Orlicz space) $B\mathcal{S}_{\mathbf{M}}$ is the space of $f\in B$-a.p. functions such that

$$\|f\|_{\mathbf{M}} := \sup\Big\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\gamma_k|A_k(f)|:\quad \gamma_k\geqslant 0,\ \sum_{k\in\mathbb{Z}}M_k(\gamma_k)\leqslant 1\Big\}<\infty.$$

Classical modulus of smoothness of $f\in B\mathcal{S}_{\mathbf{M}}$ of the order $m\in\mathbb{N}$ is defined by

$$\omega_m(f,\delta)_{\mathbf{M}} := \sup_{|h|\leqslant\delta}\|\Delta_h^m(f)\|_{\mathbf{M}} = \sup_{|h|\leqslant\delta}\Big\|\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}f(\cdot-jh)\Big\|_{\mathbf{M}}.$$

By G_{λ_n} we denote the set of all B-a.p. functions whose Fourier exponents belong to the interval $(-\lambda_n,\lambda_n)$ and $E_{\lambda_n}(f)_{\mathbf{M}} := \inf\limits_{g\in G_{\lambda_n}}\|f-g\|_{\mathbf{M}}$.

Theorem 1. *For arbitrary numbers $n,m\in\mathbb{N}$ and for any $f\in B\mathcal{S}_{\mathbf{M}}$*

$$E_{\lambda_n}(f)_{\mathbf{M}} \leqslant \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}I_n(\frac{m}{2})}\int_0^{\pi}\omega_m\Big(f,\frac{u}{\lambda_n}\Big)_{\mathbf{M}}\sin u\,\mathrm{d}u, \qquad (1)$$

where $I_n(\frac{m}{2})=\inf_{k\in\mathbb{N},k\geqslant n}\int_0^{\pi}(1-\cos\frac{\lambda_k u}{\lambda_n})^{\frac{m}{2}}\sin u\,\mathrm{d}u$. If, in addition $\frac{m}{2}\in\mathbb{N}$, then $I_n(\frac{m}{2})=\frac{2^{\frac{m}{2}+1}}{\frac{m}{2}+1}$, and the inequality (1) cannot be improved for any $n\in\mathbb{N}$.

Donbas State Pedagogical University, Sloviansk, Ukraine
Email address: s.chaichenko@gmail.com

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine; National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine,, Kyiv, Ukraine
Email address: shidlich@gmail.com

ALGEBRAIC DEMONSTRATION OF FAST MATRIX MULTIPLICATION THEORY

S. CHATTERJEE, S. DAS, S. HAZRA

Multiplication between two square matrices is one of the fundamental computational approach in the domain of mathematics and computer science where it is fully recognized as a fore most technique for several interdisciplinary domain and sub domains like linear algebra, graph theory, multidimensional graphics, cryptographic computation, convolution neural network, deep learning, digital signal processing, medical image processing, steganography, relativity theory, quantum computing and many others. In a high-performance computing environment computational complexity analysis of matrix multiplication algorithm ensures a powerful paradox that takes a massive data processing approach to the world where problem solution feasibility comes down in respect of operation and time. In our paper we have analyze different methods to multiply two square matrices (like 2*2 matrices) and their arithmetic complexity analysis in a asymptotic flavor along with operation collapsing issues through serial processing technique. We have analytically and experimentally explained and shown using MATLAB 9.3 simulator that fast matrix multiplication approach like Strassen and Winograd perform much better than conventional matrix multiplication algorithm especially for large amount of data.

Square matrix multiplication concepts always stands up with fundamental operation from our childhood days to solve a problem in mathematics and now it is more essential in various fields of computational computing with respect of both practical and theoretical aspects. The proof can be determine in different fields of theoretical computer science research, applied mathematics, statistics, physics, bioinformatics, electronics and many other interdisciplinary areas where we have to frequently deal with large amount of data/information. Any type of computational applications in real world always need faster algorithm that can be solved within an optimum time. Thats why computational speed for solving those applications mainly rely on the execution time of algorithm aside from other instantaneous requirement. So, when we are going to do something in a high-performance computing domain then maximum time apart from memory space, time requirement is one and only valuable resource for any algorithm by which we can get faster result along with effective performance. In this scenario, design, analysis and deep exploration for getting faster square matrix multiplication algorithm is profoundly required and that has already become the main purpose in computational computing research. This paper discusses about different types of matrix multiplication approach, its operation collapsing issues and asymptotic time complexity analysis result using a serial processing system. Traditional matrix multiplication computation is represented as follows

$$T(n) = 8T(n/2) + vn^2 \tag{1}$$

Strassen and Winograd matrix multiplication is represented as follows

$$T(n) = 7T(n/2) + vn^2 \tag{2}$$

References

[1] Bodrato M. A Strassen (2010). - like Matrix Multiplication Suited for Squaring and Higher Power Computation. In: Proc. of the Intern. Conf. 35th International Symposium on Symbolic and Algebric Computation (ISSAC), Munich, Germany, July 25 – 28.
[2] Cohn H., Kleinberg R., Szegedy B., Umans C. Group (2005) Theoretic Algorithms for Matrix Multiplication. In: Proc. of the Intern. Conf. (FOCS), Volume, (46), Page 379 – Page 388.
[3] Junjie L., Sanjay R., Sartaj S. Strassens (2011) Matrix Multiplication on GPUs. In: Proc. of the Intern. Conf. IEEE 17th International Conference on Parallel and Di- stributed Systems, Taiwan, Page 157 – Page 164.

Department of Computer Science and Engineering, NSHM Knowledge Campus, Durgapur, West Bengal - 713212, India
Email address: siddhartha.chatterjee31@gmail.com

Department of Computer Science and Engineering, Bengal College of Engineering and Technology, Durgapur, West Bengal-713212, India
Email address: simadascse@gmail.com

Department of Computer Science and Engineering, NSHM Knowledge Campus, Durgapur, West Bengal - 713212, India
Email address: sudiptahazra.nitdgp@gmail.com

ESTIMATES OF FUNCTIONAL ON THE CLASSES OF FUNCTIONS WITHOUT COMMON VALUES

I. V. DENEGA

Let $\mathbb{N}$ be the set of natural numbers, $\mathbb{C}$ be the complex plane, and let $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ be its one-point compactification. Let function f, meromorphic in disk $|z| < 1$, maps univalently disk $|z| < 1$ onto the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ such that $f(0) = a$, where $a \in B$. Then, the value $|f'(0)|$ is called conformal radius of the domain B relative to a point $a \in B$.

Consider the class $T = \{f_k\}_{k=0}^{n}$ of univalent functions that map the unit disk $|z| < 1$ onto mutually non-overlapping simply connected domains $\{B_k\}_{k=0}^{n}$ such that $f_0(0) = 0$, $f_k(0) = a_k$. The goal of the present work is to get the upper bounds for functional

$$I_n(\gamma) = |f_0'(0)|^{\gamma} \prod_{k=1}^{n} |f_k'(0)|\,,$$

$n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, for all values of the parameter $\gamma \in (0, n]$. The following propositions hold.

Theorem 1. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$. Then, for any system of functions $\{f_k\}_{k=0}^{n} \in T$ the following inequality holds*

$$I_n(\gamma) \leqslant n^{-\frac{\gamma}{2}} \left(I_n(0)\right)^{1-\frac{\gamma}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2\gamma}{n}}.$$

Theorem 2. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\gamma \in (0, n]$, $\tau \in (0, \gamma)$. Then, for any system of functions $\{f_k\}_{k=0}^{n} \in T$ the following inequality holds*

$$I_n(\gamma) \leqslant n^{-\frac{\gamma-\tau}{2}} I_n(\tau) \left(I_n(0)\right)^{-\frac{\gamma-\tau}{n}} \left(\prod_{k=1}^{n} |a_k|\right)^{\frac{2(\gamma-\tau)}{n}}.$$

References

[1] Bakhtin A.K., Denega I.V. (2022). Generalized M.A. Lavrentiev's inequality. *J. Math. Sci.*, vol. 262, no. 2, pp. 138–153.

[2] Denega I.V. (2022). Extremal decomposition of a multidimensional complex space with poles on the boundary of a polydisk. *Current Trends in Analysis, its Applications and Computation (Eds. P. Cerejeiras et al.), Trends in Mathematics. Birkhäuser, Cham*, pp. 143–151.

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Email address: `iradenega@gmail.com`

COMBINING INTEGRAL CALCULUS WITH PYTHON AND MAPLE: UNRAVELING MATHEMATICAL MYSTERIES

D. E. DOROSHENKO

Mathematics is a language that reveals the secrets of nature and the universe to us. Integral calculus is one of the strongest driving forces in this discovery. Today we will deepen our understanding of integral calculus by looking at how the Python and Maple software packages can help us immerse ourselves in the world of computation and analysis.

Integral Calculus: Basics and Applications. Integral calculus is the study of plane and three-dimensional geometry by means of the calculation of integrals. This branch of mathematics is used in many sciences and engineering, where real problems require the calculation of areas, volumes, masses and many other parameters.

Python: A Central Role in Numerical Computing. Python is recognized as a leader in the field of scientific computing thanks to its powerful libraries. For the numerical calculation of integrals, we use the SciPy library, which offers a variety of numerical methods, including trapezoidal, Simpson, and other methods. These methods make it possible to approximately solve integral problems with high accuracy.

Maple: Farewell to Analytical Tasks. Maple is a symbolic math package that allows you to perform symbolic analyses. With the help of Maple, we can find analytical solutions of complex integral expressions. This opens up opportunities for precise calculations that would be impossible with numerical methods.

Application example: Calculation of the Center of Mass. Consider an example of calculating the center of mass of a plane figure limited by functions $y = x^2$ and $y = 2x$, from $x = 2$. Our goal is to find x-coordinate of the center of mass.

Python Code:

```
from scipy import integrate
def f(x): return x**2
def g(x): return 2*x
def integrand(x): return x * (f(x) - g(x))
numerator, _ = integrate.quad(integrand, 0, 2)
denominator, _ = integrate.quad(lambda x: f(x) - g(x), 0, 2)
center_of_mass_x = numerator / denominator
print("Center of mass, x-coordinate:", center_of_mass_x)
```

Maple Code:

```
f := x^2;
g := 2*x;
numerator := int(x * (f - g), x = 0 .. 2);
denominator := int(f - g, x = 0 .. 2);
center_of_mass_x := numerator / denominator;
center_of_mass_x;
```

In this example, we calculate x-coordinate of the center of mass of a planar figure using numerical and analytical methods. Both approaches give us an accurate result, but using Maple allows us to find an analytical expression for the center of mass, which provides more insight.

Conclusion. Combining integral calculus with Python and Maple packages is an important step towards unlocking mathematical mysteries. Python gives us tools for numerical analysis with high accuracy, while Maple gives us the ability to perform symbolic analysis and find analytical solutions. Both tools complement each other, allowing us to learn and solve a variety of math problems with new depth and confidence.

References

[1] Briggs W.L., Cochran L., Gillett B. (2018). *Calculus: Early Transcendentals*. Pearson (Chapter on Applications of Integration)

[2] Courant R., John F. (2015). *Introduction to Calculus and Analysis*. Springer Science and Business Media. (Chapter on Integral Calculus)

[3] Zill D.G., Wright W.S. (2016). *Advanced Engineering Mathematics*. Jones and Bartlett Learning. (Chapter on Numerical Integration)

Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro, Ukraine
Email address: doroshenkode@mmf.dnu.edu.ua

NON-SYMMETRICALLY SINGULARLY PERTURBED FINITE RANK SELF-ADJOINT OPERATORS

M. E. DUDKIN, T. I. VDOVENKO, O. YU. DYUZHENKOVA

We discus some generalization of [1] contained in [2].

Let A be unbounded self-adjoint operator in the separable Hilbert space $\mathcal{H}$. For linearly independent vectors $\{\omega_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{H}_{-1}$ and $\{\delta_j\}_{j=1}^n \subset \mathcal{H}_{-1}$, $n < \infty$, such that $\Omega \cap \mathcal{H} = \{0\}$, $\Delta \cap \mathcal{H} = \{0\}$, where $\Omega := \mathrm{span}\{\omega_i\}_{i=1}^n$, $\Delta := \mathrm{span}\{\delta_j\}_{j=1}^n$, the operator $\tilde{A}$ is called singularly perturbed of $\mathcal{H}_{-1}$-class with respect to A, if for some fixed $z \in \rho(A)$ its domain is of the form

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \{\vartheta = \phi - \sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}(z)\langle \phi, \omega_i\rangle (A-z)^{-1}\delta_j \mid \phi \in \mathfrak{D}(A)\},$$

where $b_{i,j}(z)$ are elements of matrix $B_1(z) = \aleph G_1(z)^{-1}$, $G_1(z) = (I + \Phi_1(z)\aleph)$, under the condition $\det G_1(z) \neq 0$, $\aleph = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1}^n$, $\Phi_1(z) = \big((\delta_i, (A-\bar{z})^{-1}\omega_j)\big)_{i,j=1}^n$, I stands for an identity operator; and the domain has a form

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} \dot{+} \mathrm{span}\{(A-z)^{-1}\delta_j\}_{j=1}^n,$$
$$\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} = \left\{\phi \in \mathfrak{D}(A) \mid ((A-z)\phi, (A-\bar{z})^{-1}\omega_j) = 0,\ j = 1, 2, ..., n\right\},$$

under the condition $\det G_1(z) = 0$; and the action on vectors $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ is given by the rule $(\tilde{A} - z)\vartheta = (A - z)\phi$. Such operator is denoted as $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^n(A)$.

The spectral properties of $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{-1}^n(A)$ are now investigating.

References

[1] Dudkin M., Vdovenko T. (2018). On extensions of linear functionals with applications to non-symmetrically singular perturbations. *Methods of Functional Analysis and Topology*, vol. 24, no. 3, pp. 193–206.

[2] Dudkin M.E., Dyuzhenkova O.Yu. (2023). Singular Finite-Rank Nonsymmetric Perturbations of a Self-Adjoint Operator. *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 270, pp. 250-262.

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
Email address: dudkin@imath.kiev.ua

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
Email address: tanyavdovenko@meta.ua

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
Email address: oduzen@ukr.net

GEOMETRY VIA SPRAY ON FRÉCHET MANIFOLDS

K. EFTEKHARINASAB

For a Fréchet manifold by employing sprays we will construct connection maps, linear symmetric connections on tangent and second-order tangent bundles. We characterize linear symmetric connections on tangent bundles by using the bilinear symmetric mappings associated with a given spray on a manifold. Moreover, we give another characterization of linear symmetric connections on tangent bundles using tangent structures. We show that there is a bijective correspondence between linear symmetric connections on tangent bundles and connection maps induced by sprays on a manifold. Let M be a Fréchet manifold and $\mathbf{S}$ a given spray on M. We denote by TM, T^2M and $T(TM)$ its tangent bundle, second-order tangent bundle, and the tangent bundle over TM, receptively.

Theorem 1. [1] *Let ∇ be the covariant derivative associated with $\mathbf{S}$. Then there exists a unique vector bundle morphism (called a connection map) $K : T(TM) \to TM$ such that $\nabla = K \circ T$, and for all C^{k-1}-vector fields X, Y on M the following diagram is commutative:*

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "TX"] & T(TM) \arrow[d, "K"] \\ M \arrow[u, "Y"] & TM \arrow[l, "\nabla_Y X"] \end{tikzcd}$$

Theorem 2. [1] *There exists a unique linear symmetric connection on TM which is fully characterized by the associated symmetric bilinear mappings of $\mathbf{S}$. Conversely, if C is a linear symmetric connection on TM, then there exists a unique spray on M whose associated connection map is determined by C.*

Theorem 3. [1] *Any linear symmetric connection on TM induces a linear symmetric connection on T^2M, and vice versa. Moreover, any linear symmetric connection on the tangent bundle determines a connection map and vice versa.*

References

[1] Eftekharinasab K. (2023). Geometry via spray on Fréchet manifolds. *https://arxiv.org/abs/2307.15955.*

Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Email address: `kaveh@imath.kiev.ua`

ON GENERALIZATION OF NAGUMO–BREZIS THEOREM

K. EFTEKHARINASAB, R. HORIDKO

The Nagumo-Brezis theorem gives the criterion of verifying the invariance of a set with respect to the flow generated by a vector field. For the category of MC^k-Fréchet manifolds, the existence and uniqueness of the integral curve of an MC^k-vector field was proved in [1]. Moreover, the existence of the MC^k-flow generated by an MC^k-vector field was proved in [2]. We extend the Nagumo and Brezis theorem to the category of MC^k-Fréchet manifolds. We give a criterion for a closed subset of an MC^k-Fréchet nuclear manifold to be invariant under the flow defined by an MC^k-vector field on these manifolds. Then, we will apply this result to locate critical points of real-valued mappings. Let M be a nuclear MC^k-Fréchet manifold, and D the derivative of functions.

Theorem 1. [3] *Let $\mathsf{X} : M \to TM$ be an MC^1-vector field and let $A \subset M$ be closed. Then, A is flow-invariant with respect to X if and only if for each $x \in M$ there is a chart $(x \in U, \phi)$ such that $\lim_{s\to 0} t^{-1}\rho\big(\phi(x) + s\,\mathrm{D}\,\phi(x)\mathsf{X}(x), \phi(U \cap A)\big) = 0$.*

Theorem 2. [3] *Let $\varphi : M \to \mathbb{R}$ be an MC^1-mapping, $A \subset M$ a closed subset, and $\varphi\mid_A$ bounded from below. Let $\mathsf{X} : M \to TM$ be an MC^1-vector field such that for each $x \in M$ there is a chart $(x \in U, \phi)$ such that $\lim_{s\to 0} t^{-1}\varrho\big(\phi(x) + s\,\mathrm{D}\,\phi(x)\mathsf{X}(x), \phi(U \cap A)\big) = 0$. Suppose that $c = \inf_A \varphi(a)$ and we have the following conditions: if $(x_n) \subset M$ is a sequence such that $\varphi(x_n) \to c$ and $\mathrm{D}\,\varphi(x_n)(\mathsf{X}(x_n)) \to 0$, then (x_n) has a convergent subsequence. Also, There is ϵ_0 such that for $x \in \varphi_{c+\epsilon_0}$ ($\varphi_c = \{x \in M : \varphi(x) \leqslant c\}$), $\mathbf{F}(x,t)$ (the flow generated by X) is defined, and $\varphi(\mathbf{F}(x,t))$ is non-increasing for $t \in [0,1]$. Then, c is a critical value of φ.*

References

[1] Eftekharinasab K. (2016). Geometry of bounded Fréchet manifolds. *Rocky Mountain J. Math.*, vol. 46, no. 43, pp. 895–913.

[2] Eftekharinasab K., Petrusenko V. (2020). Finslerian geodesics on Fréchet manifolds *Bulletin of the Transilvania University of Brasov, Series III: Mathematics, Informatics, Physics*. vol. 13, no. 1, pp. 129–152.

[3] Eftekharinasab K., Horidko R. (2023). On Generalization of Nagumo-Brezis Theorem *submitted to Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica.*

Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Email address: kaveh@imath.kiev.ua

Higher Mathematics Dep., National Aviation University, Kyiv, Ukraine
Email address: ruslana.horidko@npp.nau.edu.ua

ON THE ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE NONLINEAR BELTRAMI EQUATION

B. A. KLISHCHUK, R. R. SALIMOV, M. V. STEFANCHUK

Let G be a domain in the complex plane $\mathbb{C}$ and $\mu\colon G \to \mathbb{C}$ be a measurable function with $|\mu(z)| < 1$ a.e. (almost everywhere) in G. Recall that the *Beltrami equation* has a form

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) f_z\,, \tag{1}$$

where $f_{\overline{z}} = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, and f_x and f_y are the partial derivatives of f by x and y, respectively.

Let $\sigma\colon G \to \mathbb{C}$ be a measurable function and $m \geqslant 0$. We consider the following equation written in the polar coordinates (r, θ) :

$$f_r = \sigma(re^{i\theta})\, |f_\theta|^m\, f_\theta, \tag{2}$$

where f_r and f_θ are the partial derivatives of f by r and θ, respectively. Applying the relations between these derivatives and the formal derivatives $r f_r = z f_z + \overline{z} f_{\overline{z}}$, and $f_\theta = i(z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}})$, one can rewrite the equation (2) in the form:

$$f_{\overline{z}} = \frac{z}{\overline{z}}\, \frac{\sigma(z)\,|z||z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m + i}{\sigma(z)\,|z||z f_z - \overline{z} f_{\overline{z}}|^m - i}\, f_z. \tag{3}$$

Under $m = 0$ equation (3) reduces to the standard linear Beltrami equation (1). Picking $m = 0$ and $\sigma = -i/|z|$ in (3), we arrive at the classical Cauchy-Riemann system. Later on we assume that $m > 0$.

A mapping $f\colon G \to \mathbb{C}$ is called *regular at a point* $z_0 \in G$, if f has the total differential at this point and its Jacobian $J_f = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2$ does not vanish. A homeomorphism f of Sobolev class $W^{1,1}_{\rm loc}$ is called *regular*, if $J_f > 0$ a.e. By a *regular solution* of equation (3) we call a regular homeomorphism $f\colon G \to \mathbb{C}$, which satisfies (3) a.e. in G.

Further we use the following notations

$$\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}\,, \ \ \gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}.$$

Theorem 1. *Let $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ be a regular homeomorphic solution to nonlinear equation (3) of Sobolev class $W^{1,2}_{\rm loc}$ satisfying $f(0) = 0$.*

a) If for some $\varepsilon_0 \in (0,1)$, $\alpha > 0$ and $C > 0$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)} \sim C\,\varepsilon^{-\alpha} \quad as \quad \varepsilon \to 0\,,$$

where $I_{m,\sigma}(t) = \left(\int_{\gamma_t} \frac{ds}{|z|(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma}(z))^{1/(m+1)}}\right)^{m+1}$*, then the following estimate*

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\alpha/m}} \leqslant c_0\, C^{-1/m} < \infty$$

holds, where c_0 *is a positive constant depending only on* m.

b) If for some $\varepsilon_0 \in (0,1)$ *and* $\alpha > 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\alpha} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)} = \infty\,,$$

then

$$\liminf_{z\to 0} \frac{|f(z)|}{|z|^{\alpha/m}} = 0\,.$$

Theorem 2. *Let* $f\colon \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ *be a regular homeomorphic solution to nonlinear equation (3) of Sobolev class* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *satisfying* $f(0) = 0$.

a) If for some $\varepsilon_0 \in (0,1)$, $\alpha > 0$ *and* $C > 0$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)} \sim C\,\varepsilon^{-\alpha} \quad as \quad \varepsilon \to 0\,,$$

where $I_{m,\sigma}(t) = \left(\int_{\gamma_t} \frac{ds}{|z|(\mathrm{Im}\,\overline{\sigma}(z))^{1/(m+1)}}\right)^{m+1}$*, then for* f^{-1} *the following estimate*

$$\limsup_{w\to 0} \frac{|f^{-1}(w)|}{|w|^{m/\alpha}} \geqslant \left(C\,c_0^{-m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

holds, where c_0 *is a positive constant depending only on* m.

b) If for some $\varepsilon_0 \in (0,1)$, $\alpha > 0$ *and* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\alpha} \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{I_{m,\sigma}(t)} = \infty$*, then*

$$\limsup_{w\to 0} \frac{|f^{-1}(w)|}{|w|^{m/\alpha}} = \infty\,.$$

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Email address: kban1988@gmail.com

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Email address: ruslan.salimov1@gmail.com

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Email address: stefanmv43@gmail.com

CORRESPONDING FRACTIONS IN MANY VARIABLES

KH. YO. KUCHMINSKA

In the analytic theory of continued fractions there are two approaches to represent holomorphic functions by rational ones. We use one of them, namely correspondence between a formal power series and continued fractions [1].

Let consider one of the corresponding fractions, namely an N-dimensional continued regular C-fraction correspondent to a N-multiple power series and denote it C_N-fraction:

$$1 + F_0(z) + \underset{i=1}{\overset{\infty}{D}} \frac{a_{\underbrace{i, i, \ldots, i}_{N}} \prod_{k=1}^{N} z_k}{1 + F_i(z)}, \tag{1}$$

where $F_n(z)$ is the sum of all subfractions in the $(n{+}1)$th denominator, $a_{i_1,i_2,\ldots,i_s}(i_s = 0, 1, \ldots; s = 1, 2, \ldots, N) \in \mathbb{C}$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_N) \in \mathbb{C}^N$.

Theorem 1. *Let the C_N-fraction* (1) *converges uniformly on every compact subset of a certain bounded domain $D \subset \mathbb{C}$ (which contains the origin) to a holomorphic function $f(z), z \in D$.*
Then the formal N-multiple power series correspondent to the C_N-fraction (1)

$$P(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k, \;\; z = (z_1, ..., z_N) \in \mathbb{C}^N, \;\; k = (k_1, ..., k_N) \in \mathbb{Z}^N_{\geqslant 0}$$

$$|k| = k_1 + ... + k_N, \;\; , z^k = z_1^{k_1} ... z_N^{k_N},$$

also converges in the domain D to the function $f(z)$.

References

[1] Kuchmins'ka Kh.Yo. (2010). *Two-dimensional continued fractions.* Lviv: Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine.

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, of the NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine

Email address: khkuchminska@gmail.com

CONTRACTIONS AND REALIZATIONS OF LIE ALGEBRAS

M. NESTERENKO, S. POŠTA

Realizations of Lie algebras (representations of Lie algebras by vector fields on manifolds) are widely applicable in modern group analysis of differential equations, in classification of gravity fields, in geometric control theory, in difference schemes for numerical solutions of differential equations, etc.

To study limit processes between different theories, models or equations it is useful to parameterize respective realization so that as the parameter tends to zero, the realization converges to the realization of another (nonisomorphic) Lie algebra. This problem originates from the contractions of abstract Lie algebras that were introduced in 1951 by I. Segal and later in 1953 in the work by E. Inönü and E. Wigner it was shown that different physical theories are connected by the contractions of their underlying symmetry algebras.

Unfortunately, the direct application of the known contraction to a realization or representation of a Lie algebra gives several zero operators, what makes it impossible for further application.

We propose the practical method for the construction of the realization contraction, which uses the algebraic approach [1] to the construction of left-invariant vector fields. To formulate the algorithm, we need to introduce key definitions.

Let $\mathcal{L}_n(V)$ be the variety of n-dimensional Lie algebras on a vector space V over a field $\mathbb{F}$, then each n-dimensional Lie algebra $\mathfrak{g} = (V, [.,.])$ corresponds to a multiplication rule $\mu \in \mathcal{L}_n$: $\forall\ x, y \in V \quad [x, y] = \mu(x, y)$. General linear group $\mathrm{GL}(V)$ acts on the variety of Lie brackets as follows:

$$\forall A \in \mathrm{GL}(V),\ \forall \mu \in \mathcal{L}_n \quad (A\mu)(x, y) = A^{-1}(\mu(Ax, Ay)) \quad \forall x, y \in V.$$

To define contractions of abstract Lie algebras [2] we consider $\mathrm{GL}(V)$-orbits of $\mu \in \mathcal{L}_n$ and their closures in Zariski or Euclidean topology. In this way Lie algebra $\mathfrak{g} = (V, \mu_0)$ is a *contraction* of $\mathfrak{g} = (V, \mu)$ if μ_0 belongs to the orbit closure of μ. In the case of real and complex fields we reformulate the notion of contraction in terms of a contraction matrix (a continuous function $U(\varepsilon) = U\colon (0, 1] \to \mathrm{GL}(V)$) and structure constants conjugations.

The study of the contractions of abstract Lie algebras is usually provided in frames of two problems: description of all possible contractions of a fixed Lie algebra or description of all contractions of Lie algebras of a fixed dimension. Both these problems of are rather complicated. To apply contractions of abstract Lie algebras to some physical theories, models or equations we have to introduce a contraction to some representation or realization of the Lie algebra. We mainly focus on the realisations of Lie algebras by Lie vector fields.

Let $M \subset \mathbb{R}^m$ be an open domain and denote the Lie algebra of smooth vector fields on M by $\mathrm{Vect}(M)$. A *realization* R of a Lie algebra $\mathfrak{g}$ in vector fields on M is a homomorphism $R\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{Vect}(M)$ [3].

Direct application of contractions to realizations lead to unfaithful realizations in all cases. Such a result is predictable and it was already indicated in the first paper by Inönü and Wigner. In the case of representations the problem of zero matrices can be overcome by tricky additional ε-dependent similarity transformations of the matrices. Generalizing these approaches we have to act on the realizations by the ε-dependent automorphism transformations and ε-dependent diffeomorphisms of the manifold M, what leads to cumbersome and unsolvable calculations. Yet another approach to contractions of realizations is the use of parameter-dependent group transformation. The disadvantage of this method is that the contraction result should be previously known.

To overcome the above problems, we combine the realization construction and the contraction process and perform them simultaneously. Roughly speaking, the main idea proposed here is to construct realization from the structure constants parameterized respectively to the contraction of the abstract Lie algebra.

The limiting process between realizations of two different Lie algebras can be constructed using the algorithm:

(1) To construct parameterized structure constants using the contraction matrix U, that do realize the desired contraction $C^{k'}_{\varepsilon,i'j'} := (U_\varepsilon)^i_{i'}(U_\varepsilon)^j_{j'}(U_\varepsilon{}^{-1})^{k'}_k C^k_{ij}$, where C^k_{ij} are structure constants of the initial Lie algebra.
(2) To calculate ε-dependent adjoint actions (using $C^{k'}_{\varepsilon,i'j'}$), the matrix exponents and respective differential 1-forms: $\mathrm{ad}^\varepsilon e_i$, $\exp(-x_i \mathrm{ad}^\varepsilon e_i)$ and $\omega^\varepsilon(x)$.
(3) To find the inverse transformation to obtain the vector fields $\xi^\varepsilon(x) = (\omega^\varepsilon(x))^{-1}$, that are the parameterized realization that do contracts to the realization of the contracted Lie algebra.

The algorithm was successfully tested on several examples and it allows to construct parameterized differential invariants and differential equations.

References

[1] Magazev A.A., Mikheyev V.V., Shirokov I.V. (2015). *SIGMA*, vol. 11, 066, 17 pages.
[2] Nesterenko M., Popovych R. (2006). *J. Math. Phys.*, vol. 47, 123515, 45 pages.
[3] Popovych R.O., Boyko V.M., Nesterenko M.O., Lutfullin M.W. (2003). *J. Phys. A*, vol. 36, pp. 7337–7360.

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine; Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
Email address: maryna@imath.kiev.ua

Czech Technical University in Prague, Prague, Czech Republic
Email address: severin.posta@fjfi.cvut.cz

COMPARATIVE STUDY OF FAILURE DETECTION IN INDUCTION MOTORS USING TIME-FREQUENCY TRANSFORMS

A. PERIS, N. RAMEZANZADEH, F. RODENAS

Induction motors are widely utilized across an array of industrial and commercial sectors due to their high reliability, cost-effectiveness, and self-starting capabilities. Therefore, it is vital to detect any potential faults. In the talk we present the benefits of different time-frequency methods based on the wavelet transform to diagnose rotor bar failures in induction machines. These methods consist of Discrete Wavelet Transform (DWT) and wavelet packet transform (WP) and are based on the examination of stature current at start-up, using both quantitative and qualitative techniques. We have developed reliable and robust criteria for identifying broken bars in induction motors by applying these methods. They offer a localized and multi-resolution analysis of signals, enabling the extraction of low and high-frequency components with differing levels of precision. Careful selection of the wavelet family is paramount to the success of indicator, with the 'dmeyer' wavelet producing consistently favourable outcomes. The study demonstrates efficacy of wavelet and wavelet packet-based analysis in precisely identifying motor failures, thus offering valuable insights for better condition monitoring approaches in industrial contexts.

References

[1] Antonino-Daviu, J., Riera-Guasp, M., Roger-Folch, J., Martínez-Giménez, F. Peris, A. (2006). *Application and Optimization of the Discrete Wavelet Transform for the Detection of Broken Rotor Bars in Induction Machines.*, Applied and Computational Harmonic Analysis 21 (2): 268–79. https://doi.org/10.1016/j.acha.2005.12.003.

[2] Bouzida, Ahcne, Omar Touhami, Rachid Ibtiouen, Adel Belouchrani, Maurice Fadel, A. Rezzoug. (2011). *Fault Diagnosis in Industrial Induction Machines through Discrete Wavelet Transform.*, IEEE Transactions on Industrial Electronics 58 (9): 4385–95. https://doi.org/10.1109/TIE.2010.2095391.

[3] Corral-Hernández, Jesús A., Jose A. Antonino-Daviu. (2016). *Influence of the Start-up System in the Diagnosis of Faults in the Rotor of Induction Motors Using the Discrete Wavelet Transform.*, Procedia Computer Science 83 (Seit): 807–15. https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.04.170.

[4] Faiz, Jawad, B.M. Ebrahimi, B. Akin, B. Asaie. (2009). *Criterion Function for Broken-Bar Fault Diagnosis in Induction Motor under Load Variation Using Wavelet Transform.*, Electromagnetics 29 (3): 220–34. https://doi.org/10.1080/02726340902718450.

[5] Hernandez, Jesus Corral, Jose Antonino-Daviu, F. Martinez-Gimenez, A. Peris. (2015). *Comparison of Different Wavelet Families for Broken Bar Detection in Induction Motors.*, Proceedings of the IEEE International Conference on Industrial Technology 2015-June (June): 3220–25. https://doi.org/10.1109/ICIT.2015.7125574.

[6] Sbaa. S, Bessous. N, Pusca. R, Romary. R. (2020). *A comparative study dedicated to rotor failure detection in induction motors using MCSA, DWT, and EMD techniques.*, International Conference on Electrical Engineering, ICEE 2020. https://doi.org/10.1109/ICEE49691.2020.9249774

[7] Ye, Zhongming, Bin Wu, Alireza Sadeghian. (2003). *Current Signature Analysis of Induction Motor Mechanical Faults by Wavelet Packet Decomposition.*, IEEE Transactions on Industrial Electronics 50 (6): 1217–28. https://doi.org/10.1109/TIE.2003.819682.

Institut Universitari de Matemàtica Pura i Aplicada, Universitat Politècnica de València, 46022 València, Spain
Email address: aperis@upv.es

Institut Universitari de Matemàtica Pura i Aplicada, Universitat Politècnica de València, 46022 València, Spain
Email address: nrameza@posgrado.upv.es (N.R.)

Institut Universitari de Matemàtica Pura i Aplicada, Universitat Politècnica de València, 46022 València, Spain
Email address: frodenas@mat.upv.es (F.R.)

OPTIMAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS FROM THE SOBOLEV CLASSES FROM SAMPLES

K. V. POZHARSKA

We study the recovery of functions f, belonging to the unit balls of the mixed order Sobolev spaces $\mathbf{W}^r_p$, based on n function evaluations.

Let $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$ be a torus where the endpoints of the interval are identified. By $\mathbb{T}^d$ we denote a d-dimensional torus and equip it with the normalized Lebesgue measure $(2\pi)^{-d}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$. For functions $f \in L_1 := L_1(\mathbb{T}^d)$ we define the Fourier coefficients $f_{\boldsymbol{k}} = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{T}^d} f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d$, w.r.t. the trigonometric system $\left\{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \colon \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d\right\}$ which forms a 1-bounded orthonormal basis of L_2, i.e., for $f \in L_2$ we have $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^d} f_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ in the sense of convergence in L_2.

For $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_d)$ with $s_j \in \mathbb{N}_0$, $j = 1, \ldots, d$, we define the set

$$\rho(\boldsymbol{s}) := \left\{(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \colon\ \lfloor 2^{s_j - 1}\rfloor \leqslant |k_j| < 2^{s_j},\ j = 1, \ldots, d\right\},$$

and the so-called step hyperbolic cross $\Omega_\ell := \bigcup_{|\boldsymbol{s}|_1 \leqslant \ell} \rho(\boldsymbol{s})$. The cardinality $|\Omega_\ell|$ is of order $2^\ell \ell^{d-1}$. By Q_ℓ we denote the set of trigonometric polynomials with frequencies from the step hyperbolic cross, i.e., we put $Q_\ell := \mathrm{span}\{e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \colon\ \boldsymbol{k} \in \Omega_\ell\}$.

For $f \in L_1$ and $\boldsymbol{x} \in \mathbb{T}^d$ we set

$$\delta_{\boldsymbol{s}}(f)(\boldsymbol{x}) := \sum_{\boldsymbol{k}\in\rho(\boldsymbol{s})} f_{\boldsymbol{k}}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}.$$

We now define, for $1 < p < \infty$ and $r > 0$, the class

$$\mathbf{W}^r_p := \left\{ f \in L_1 \colon\ \Big\| \Big(\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{N}_0^d} 2^{2r|\boldsymbol{s}|_1} |\delta_{\boldsymbol{s}}(f)|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p \leqslant 1 \right\}$$

of functions with bounded mixed derivative. The definition of this class that includes the limit cases $p = 1$ and $p = \infty$ can be found in [1, Chapter 3].

Theorem 1 ([2]). *Let $1 < p < \infty$ and $r > \max\{1/2, 1/p\}$. For all $\ell \in \mathbb{N}$, there are linear sampling algorithms $A_m \colon \mathbf{W}^r_p \to Q_\ell$ that use at most $m \asymp \dim Q_\ell \asymp 2^\ell \ell^{d-1}$ points and satisfy for all $1 \leqslant q < \infty$ that*

$$\sup_{f\in\mathbf{W}^r_p} \|f - A_m f\|_q \lesssim m^{-(r-t)}(\log m)^{(d-1)(r-t)},$$

where $t = (1/p - 1/2)_+ + (1/2 - 1/q)_+$. The bound is sharp and both sides of the inequality are asymptotically equivalent to the approximation numbers (linear width) $a_m(\mathbf{W}^r_p, L_q)$ if

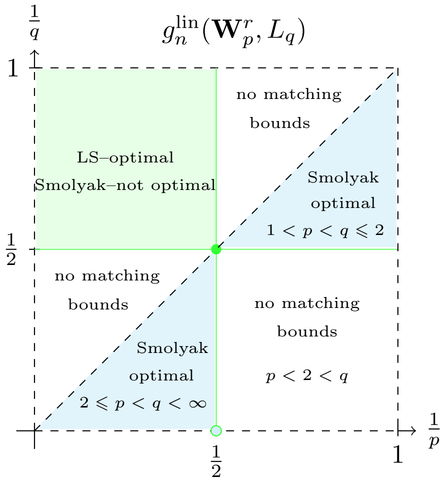


FIGURE 1. Parameter region with sharp orders

- $1 < p < \infty$ *and* $q = 2$, *or*
- $1 \leqslant q \leqslant 2 \leqslant p < \infty$, *or*
- $p = 2 \leqslant q < \infty$.

For uniform approximation, we have $t = \max\{1/2, 1/p\}$ *and*

$$\sup_{f \in \mathbf{W}_p^r} \|f - A_m f\|_\infty \lesssim m^{-(r-t)} (\log m)^{(d-1)(r-t+1/2)}.$$

Figure 1 gives an overview of our findings for this class, where by $g_n^{\mathrm{lin}}(\mathbf{W}_p^r, L_q)$ we denote the n-th linear sampling number in L_q, i.e., the *minimal worst case error* that can be achieved with linear algorithms based on at most n function values, if the error is measured in L_q.

REFERENCES

[1] Dũng D., Temlyakov V.N., Ullrich T. (2018). *Hyperbolic Cross Approximation.* Advanced Courses in Mathematics - CRM Barcelona: Springer International Publishing.

[2] Krieg D., Pozharska K., Ullrich M., Ullrich T. (2023). Sampling recovery in the uniform norm. *arXiv:* 2305.07539v2.

Acknowledgements. This is a joint work with David Krieg, Mario Ullrich and Tino Ullrich. KP would like to acknowledge support by the Philipp Schwartz Fellowship of the Alexander von Humboldt Foundation.

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF NAS OF UKRAINE, KYIV, UKRAINE; FACULTY OF MATHEMATICS, CHEMNITZ UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, CHEMNITZ, GERMANY

Email address: `pozharska.k@gmail.com`

GROUPS OF THE NILPOTENCY CLASS 3 OF ORDER p^4 AS ADDITIVE GROUPS OF LOCAL NEARRINGS

I. RAIEVSKA, M. RAIEVSKA

Nearrings are a generalization of rings in the sense that the addition needs not to be commutative and only one distributive law is assumed. A nearing with identity is called local if the set of all non-invertible elements forms a subgroup of its additive group. We consider groups of the nilpotency class 3 of order p^4 which are the additive groups of local nearrings [1]. It is shown that, for $p > 3$, there exist a local nearring on one of such 4 groups.

Theorem 1 ([2], [3]). *There are 4 non-isomorphic groups of the nilpotency class 3 of order p^4 with $p > 3$, which are:*

- $H_1 = \langle a, b \colon a^p = b^p = c^p = [a, c]^p = [b, c] = e, [a, [a, c]] = [b, [a, c]] = e\rangle$, *where* $c = [a, b]$;
- $H_2 = \langle a, b \colon a^{p^2} = b^p = [a, b]^p = [b, [a, b]] = e, [a, [a, b]] = a^p\rangle$;.
- $H_3 = \langle a, b \colon a^{p^2} = b^p = [a, b]^p = [a, [a, b]] = e, [b, [a, b]] = a^p\rangle$;
- $H_4 = \langle a, b \colon a^{p^2} = b^p = [a, b]^p = [a, [a, b]] = e, [b, [a, b]] = a^{2p}\rangle$.

Let R be a local nearring whose additive group of R^+ is isomorphic to H_1. Then $R^+ = \langle a\rangle + \langle b\rangle + \langle c\rangle + \langle d\rangle$ for some elements a, b, c and d of R satisfying the relations $ap = bp = cp = dp = 0$, $b + c = c + b$, $a + d = d + a$, $b + d = d + b$, where $c = -a - b + a + b$ and $d = -a - c + a + c$. In particular, each element $x \in R$ is uniquely written in the form $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ with coefficients $0 \leqslant x_1 < p$, $0 \leqslant x_2 < p$, $0 \leqslant x_3 < p$ and $0 \leqslant x_4 < p$. Since order of the element a is equal to the exponent of group G, i.e. p, it follows that we can assume that a is an identity of R, i. e. $ax = xa = x$ for each $x \in R$. Furthermore, for each $x \in R$ there exist coefficients $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\gamma(x)$, $\phi(x)$ such that $xb = a\alpha(x) + b\beta(x) + c\gamma(x) + d\phi(x)$. It is clear that they are uniquely defined modulo p, so that some mappings $\alpha \colon R \to \mathbb{Z}_p$, $\beta \colon R \to \mathbb{Z}_p$, $\gamma \colon R \to \mathbb{Z}_p$, $\phi \colon R \to \mathbb{Z}_p$ are determined.

L will denote the subgroup of all non-invertible elements of R.

Theorem 2. *If a coincides with identity element of R, $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$, $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 \in R$ and $|R : L| = p$, then*

$$xy = a(x_1y_1) + b(x_2y_1 + \beta(x)y_2) + c(x_3y_1 - x_1x_2\tbinom{y_1}{2} + x_1\beta(x)y_3 + \gamma(x)y_2) + d(x_4y_1 + x_2\tbinom{x_1}{2}\tbinom{y_1}{2} - x_1x_3\tbinom{y_1}{2} + {x_1}^2x_2\tbinom{y_1}{y_1-3} + \phi(x)y_2 + x_1\gamma(x)y_3 - \beta(x)\tbinom{x_1}{2}y_3 + {x_1}^2\beta(x)y_4).$$

Moreover, for the mappings $\beta\colon R \to \mathbb{Z}_p$, $\gamma\colon R \to \mathbb{Z}_p$, $\phi\colon R \to \mathbb{Z}_p$ *the following statements hold*:

(0) $\beta(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\gamma(0) \equiv 0 \pmod{p}$, $\phi(0) \equiv 0 \pmod{p}$ *if and only if the nearring* R *is zero-symmetric;*
(1) $\beta(xy) \equiv \beta(x)\beta(y) \pmod{p}$;
(2) $\gamma(xy) \equiv x_1\beta(x)\gamma(y) \pmod{p}$;
(3) $\phi(xy) \equiv \phi(x)\beta(y) + x_1\gamma(x)\gamma(y) - \beta(x)\binom{x_1}{2}\gamma(y) + x_1^2\beta(x)\phi(y) \pmod{p}$.

Theorem 3. *Let* R *be a local nearring whose additive group of* R^+ *is isomorphic to* H_1 *and* $|R : L| = p$. *If* $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$, $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4 \in R$, *then the mappings* $\beta\colon R \to \mathbb{Z}_p$, $\gamma\colon R \to \mathbb{Z}_p$ *and* $\phi\colon R \to \mathbb{Z}_p$ *from Theorem 2 can be* $\beta(x) \equiv {x_1}^2 \pmod{p}$, $\phi(x) = \begin{cases} {x_2}^2, & if\ x_1 \equiv 0 \pmod{p} \\ 0, & if\ x_1 \not\equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$ *and* $\gamma(x) \equiv 0 \pmod{p}$.

A computer program verified that for $p = 5$ the nearring obtained in Theorem 3 is indeed a local nearring, is deposited on GitHub:

`https://github.com/raemarina/Examples/blob/main/LNR_625-7.txt`

From the package LocalNR [4] and [5] we have the following number of all non-isomorphic zero-symmetric local nearrings on H_1 of order 625.

$IdGroup(R^+)$	$IdGroup(R^*)$	$StructureDescription(R^*)$	$n(R^*)$
$[625, 7]$	$[500, 21]$	$((C_5 \times C_5) \rtimes C_5) \rtimes C_4$	45
103	$[500, 42]$	$C_5 \times ((C_5 \times C_5) \rtimes C_4)$	34
	$[500, 44]$	$C_5 \times ((C_5 \times C_5) \rtimes C_4)$	6
	$[500, 46]$	$(C_5 \times C_5 \times C_5) \rtimes C_4$	18

Acknowledgement. The authors are grateful IIE-SRF for the support of their fellowship at the University of Warsaw.

References

[1] Raievska I., Raievska M. (2023). Groups of the nilpotency class 3 of order p^4 as additive groups of local nearrings. `https://arxiv.org/abs/2309.14342`

[2] Burnside W. (1897). *Theory of groups of finite order.* Cambridge: At the University press, 430 p.

[3] Al-Hasanat B.N., Almazaydeh A. (2022). On classification of groups of order p^4, where p is an odd prime. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 17, no. 4, pp. 1569–1593.

[4] Raievska I., Raievska M., Sysak Y. (2021). LocalNR, Package of local nearrings, Version 1.0.3 (GAP package), `https://gap-packages.github.io/LocalNR`

[5] Raievska I., Raievska M., Sysak Ya. (2023). DatabaseEndom625: (v0.2) [Data set]. Zenodo, `https://zenodo.org/record/7613145#.ZChqJXZBy39`

University of Warsaw, Warsaw, Poland; Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Email address: `raeirina@imath.kiev.ua`

University of Warsaw, Warsaw, Poland; Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

Email address: `raemarina@imath.kiev.ua`

EXACT CONSTANT IN ESTIMATES OF APPROXIMATION OF LIPSCHITZ CLASSES BY CESARO MEANS

O. ROVENSKA

Let $f \in C_{2\pi}$, $\|f\|_C = \max|f(\cdot)|$. Cesáro means $\sigma_n^{(\alpha)}(f)$ of f are defined as follows

$$\sigma_n^{(\alpha)}(f;x) = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{\nu=0}^{n} A_{n-\nu}^{\alpha-1} S_\nu(f;x), \quad A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!}, \quad \alpha > -1, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

where

$$S_\nu(f;x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\nu}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad \nu \in \mathbb{Z}_+$$

is the partial sum of the Fourier series of the function f.

We set the exact constant in the Jackson-type inequality on Lipschitz class H^1 2π-periodic functions

$$H^1 = \{f \in C_{2\pi} : \quad |f(x) - f(x_1)| \leqslant |x - x_1|, \quad x,\ x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

Theorem 1. *Let $f \in H^1$, $n \in \mathbb{N}$. Then*

$$\left\| f - \sigma_n^{(4)}[f] \right\|_C \leqslant \frac{5\pi^2 - 8}{5\pi \ln 2} \frac{\ln(n_i + 1)}{(n_i + 1)}.$$

The constant $\dfrac{5\pi^2 - 8}{5\pi \ln 2}$ *is exact.*

Donbas state engineering academy, Ternopil, Ukraine
Email address: rovenskaya.olga.math@gmail.com

MODULUS GROWTH BOUNDS FOR FUNCTIONS IN HARDY SPACE

M. V. SAVCHUK, V. V. SAVCHUK

Let $1 \leqslant p \leqslant \infty$. The Hardy space consist of those functions f, holomorphic in the unit disk $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, for which $\|f\|_\infty := \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty$ if $p = \infty$, and $\|f\|_p := \sup_{0\leqslant\rho<1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\rho t)|^p \mathrm{d}m(t)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ if $1 \leqslant p < \infty$, where $\mathbb{T} := \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ and $\mathrm{d}m$ is normalized Lebesgue measure on $\mathbb{T}$.

We let by UH^p denote the unit ball in Hardy space H^p.

Let $z \in \mathbb{D}$ be fixed. It is well-known that solution of the extremal problem $|f(z)| \to \max$ when f runs UH^p and satisfy $f(0) = 0$ is given by

$$\max\{|f(z)| : f \in UH^p, f(0) = 0\} = \frac{|z|}{(1 - |z|^2)^{\frac{1}{p}}},$$

where maximum is attained for the functions $f(t) = ct\left((1 - |z|^2)(1 - \overline{z}t)^{-2}\right)^{\frac{1}{p}}$, where $c \in \mathbb{T}$ is constant.

We consider the analogous extremal problem in H^p space for the modulus $|f(z) - f(0)|$ without restriction that $f(0) = 0$.

Our main result is the following

Theorem 1. *Let $z \in \mathbb{D}$ and $2 \leqslant p \leqslant \infty$. Then*

$$\max\{|f(z) - f(0)| : f \in UH^p\} = |z|\left(1 + \frac{(1 - a_{z,p})^2|z|^2}{1 - |z|^2}\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

If $z \neq 0$ the maximum is attained only for the functions

$$f(t) = c\frac{t - a_{z,p}z}{1 - a_{z,p}\overline{z}t}\left(\frac{1 - a_{z,p}\overline{z}t}{1 - \overline{z}t}\right)^{\frac{2}{p}},$$

where c is any constant with $|c| = \left(1 + \frac{(1-a_{z,p})^2|z|^2}{1-|z|^2}\right)^{-\frac{1}{p}}$ and

$$a_{z,p} := \frac{1}{|z|^2}\left(1 - (1 - |z|^2)^{\frac{p-2}{2(p-1)}}\right).$$

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
Email address: ma.savchuk@kpi.ua

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Email address: savchuk@imath.kiev.ua

APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY THE GAUSS-WEIERSTRASS SINGULAR OPERATORS

O. L. SHVAI

In the talk, the obtained in [3] direct approximation theorems will be discussed.

Namely, we will show the upper bounds for approximation of continuous in the neighbourhood of some point x, $-\infty < x < \infty$, functions $f(x)$ by their Gauss-Weierstrass singular operators (see, e.g., [1, 2])

$$W_\rho(f;x) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^{k^2}\cos kt\right\}dt, \quad 0 \leqslant \rho < 1, \tag{1}$$

in terms of a majorant function ω for the modules of continuity of the first and second orders of the respective functions.

One can show, that putting $\delta := (\ln\frac{1}{\rho})^{-1}$, the quantity (1) can be written as follows

$$W_\delta(f;x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\delta}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)e^{-\frac{t^2}{4}\delta}dt. \tag{2}$$

We got the rate of deviation of the operator (2) as $\delta \to \infty$ from the function f, on which it is, actually, constructed, in the norm of the space $L_p := L_p(-\infty;\infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, of, respectively, summable with pth power on $(-\infty;\infty)$ functions, and of measurable and essentially bounded on $(-\infty;\infty)$ functions. Note, that for continuous functions, it holds $\|f\|_{L_\infty} \equiv \|f\|_C$, where $C := C(-\infty;\infty)$ denotes the space of continuous on $(-\infty;\infty)$ functions with a usual norm.

References

[1] Baskakov V.A. (1975). Some properties of operators of Abel-Poisson type. *Math. Notes of the Academy of Sciences of the USSR.*, vol. 17, no. 2, pp. 101–107.

[2] Falaleev L.P. (2001). On approximation of functions by generalized Abel-Poisson operators. *Sib. Math. J.*, vol. 42, no. 4, pp. 926–936.

[3] Shvai O., Pozharska K. (2022). On some approximation properties of Gauss-Weierstrass singular operators. *J. Math. Sci.*, vol. 260, no. 5, pp. 693–699.

Lesya Ukrainka Volyn National University, Lutsk, Ukraine

Email address: shvai.olga@gmail.com

ІНТЕГРАЛ ЕЙЛЕРА ПЕРШОГО РОДУ: БЕТА-ІНТЕГРАЛ

В. І. БАЛАБУХА

Так називаємо (за Лежандром) інтеграл виду

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \tag{1}$$

де $a,b>0$. Він являє собою функцію від двох параметрів a і b – так звану функцію $B(a,b)$ [1].

Якщо $a\leqslant 0$ або $b\leqslant 0$, то інтеграл (1) розбіжний. Щоб показати це, наведемо наступну теорему

Теорема 1 (Критерій Коші)**.** *Нехай для значень x, досить близьких до b, функція f(x) має вигляд*

$$f(x)=\frac{g(x)}{(b-x)^{\lambda}}, \lambda>0$$

Тоді:

1) Якщо $\lambda<1$ і $g(x)\leqslant c<\infty$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається.

2) Якщо $\lambda\geqslant 1$ і $g(x)\geqslant c>\infty$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ розбігається (розбіжний).

Представимо інтеграл (1) у вигляді суми двох інтегралів

$$B(a,b)=\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx.$$

Спочатку розглянемо інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx=(-1)^{a-1}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(1-x)^{b-1}}{(0-x)^{1-a}}dx.$$

З теореми 1, припускаючи, що

$$g(x)=(1-x)^{b-1}\geqslant 1,\ x\in\left(0,\frac{1}{2}\right],$$

$$\beta=0,$$

$$\lambda=1-a,$$

робимо висновок, що якщо $1-a\geqslant 1$, тобто $a\leqslant 0$, то інтеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ розбіжний, а отже, розбіжний і інтеграл (1).

Тепер для інтеграла $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, припустимо:

$$g(x) = x^{a-1},$$
$$\beta = 1,$$
$$\lambda = 1 - b,$$

маємо, що для $\lambda = 1-b \geqslant 1$, тобто $b \leqslant 0$, інтеграл $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ розбіжний, а отже, розбіжний і інтеграл (1).

Якщо $a \leqslant 0$ або $b \leqslant 0$, то інтеграл (1) розбіжний. Зауважимо також, що для $a > 0$ інтеграл $\int_{0}^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ збіжний, тоді як для $b > 0$ інтеграл $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ збіжний. Отже, умовою збіжності інтеграла (1) є $a > 0$ і $b > 0$ [1].

Ми встановили, що цей інтеграл збігається при додатних значеннях a та b (навіть менших за одиницю), а отже, його можна вважати означенням функції $B(a, b)$.

Література

[1] Fichtenholz G.M. (2004). *Rachunek różniczkowy i całkowy, tom II.* Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: vitia1488.vb@gmail.com

ПРО ПЕРЕТВОРЕННЯ І ФУНКЦІЇ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ ХВОСТИ E-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ

О. М. БАРАНОВСЬКИЙ, М. В. ПРАЦЬОВИТИЙ

У доповіді розглядається нескінченна сім'я функцій, які зберігають хвости так званого E-зображення чисел з $(0,1]$. Вивчаються властивості деяких представників цієї сім'ї. За допомогою цих функцій побудовано перетворення півінтервалу $(0,1]$, які зберігають хвости E-зображення чисел.

Як відомо [1], для будь-якого числа $x \in (0,1]$ існує єдина послідовність (q_n) натуральних чисел, $q_{n+1} \geqslant q_n$, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(q_1+1)(q_2+1)\ldots(q_n+1)} \equiv \Delta_{q_1 q_2 \ldots q_n \ldots}. \quad (1)$$

Ряд (1) називається *рядом Енгеля* і однозначно визначається неспадною послідовністю натуральних чисел (q_n). Його можна записати в іншому вигляді:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+g_1)(2+g_1+g_2)\ldots(2+g_1+g_2+\ldots+g_n)} \equiv \Delta^E_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots}, \quad (2)$$

де $q_1 - 1 = g_1$, $q_{n+1} - q_n = g_{n+1} \in \mathbb{Z}_0 \equiv \{0,1,2,\ldots\}$.

Ряд (2) називається *E-представленням* числа x, а скорочений символічний запис $\Delta^E_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots}$ — його *E-зображенням*, при цьому $g_n = g_n(x)$ — n-ою цифрою (символом) цього зображення.

Означення 1. Кажемо, що функція f, яка визначена на $(0,1]$ і набуває значень з $(0,1]$, *зберігає хвости* E-зображень чисел, якщо для будь-якого $x \in (0,1]$ існують натуральні числа $k = k(x)$ і $m = m(x)$ такі, що

$$g_{k+n}(x) = g_{m+n}(f(x)) \quad \text{для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

Тривіальним прикладом такої функції є тотожна функція. Найпростішими нетривіальними прикладами є такі:

(1) функція «збільшення першої цифри»

$$d_i(x) = \Delta^E_{[i+g_1(x)]g_2(x)g_3(x)\ldots g_n(x)\ldots},$$

де i — фіксоване ціле невід'ємне число,

(2) функція зсуву цифр

$$\omega(x) = \Delta^E_{g_2(x)g_3(x)\ldots g_n(x)\ldots}.$$

Вони використовуються для побудови перетворень (тобто бієктивних відображень на себе) півінтервалу $(0,1]$, які зберігають хвости E-зображення чисел.

Теорема 1. *Нехай i — фіксований натуральний параметр. Перетворення* $(0,1]$, *означене рівністю*

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} d_i(x), & \text{якщо } 0 < x \leqslant x_1 \equiv \Delta^E_{0(i)}, \\ \omega(x), & \text{якщо } x_1 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

зберігає хвости E-зображення чисел.

Хвостові множини (тобто множини чисел, елементи яких мають однакові хвости зображень) відіграють важливу роль у вивченні розподілів випадкових величин, породжених дискретними розподілами цифр їхнього зображення. У випадку дискретності розподілу його точковий спектр (множина атомів) є хвостовою множиною. Зокрема, це має місце для випадкових величин з незалежними цифрами їхнього s-кового зображення, Q-зображення, зображень, що ґрунтуються на розкладах чисел в елементарні ланцюгові дроби, додатні ряди Енгеля, Сильвестера, Люрота, а також знакопочережні ряди Остроградського 1-го і 2-го виду, Люрота тощо (див. монографії [2, 3] і посилання там).

Тому природно виникає інтерес до неперервних функцій і перетворень $(0,1]$, які зберігають хвости зображення чисел.

Ідею конструкції перетворення, яке зберігає хвости так званого Q_s-зображення чисел, запропоновано в статті [4]. Аналогічні побудови, пов'язані з різноманітними системами зображення чисел (як зі скінченним, так і з нескінченним алфавітом), вивчалися в роботах [5, 6].

Література

[1] Engel F. (1914). Entwicklung der Zahlen nach Stammbrüchen. *Verh. d. 52. Versamml. dtsch. Philologen u. Schulmänner Marburg 1913*, Leipzig: Teubner, pp. 190–191.

[2] Працьовитий М.В. (1998). *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова.

[3] Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М. (2013). *Ряди Остроградського–Серпінського–Пірса та їхні застосування.* Київ: Наук. думка.

[4] Осауленко Р.Ю. (2016). Група неперервних перетворень відрізка $[0;1]$, які зберігають частоти цифр Q_s-зображення числа. *Мат. проблеми механіки та обчислюв. математики: Зб. пр. Ін-ту математики НАН України*, vol. 13, no. 3, pp. 191–204.

[5] Isaieva T.M., Pratsiovytyi M.V. (2016). Transformations of $(0,1]$ preserving tails of Δ^μ-representation of numbers. *Algebra Discrete Math.*, vol. 22, no. 1, pp. 102–115.

[6] Працьовитий М.В. (2022). *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування.* Київ: Наук. думка.

Інститут математики НАН України; Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Email address: baranovskyi@imath.kiev.ua

Український державний університет імені Михайла Драгоманова; Інститут математики НАН України, Київ, Україна

РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЇ $(1+z_1+z_2+z_1z_2)^\alpha$ У ДВОВИМІРНИЙ ГІЛЛЯСТИЙ ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

І. БІЛАНИК, Р. МІЗЬОЛИК

Двовимірні гіллясті ланцюгові дроби (ГЛД) з нерівнозначними змінними

$$b_0(\mathbf{z}) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}(\mathbf{z})}{b_{i(k)}(\mathbf{z})}$$

де $b_0(\mathbf{z}),\ b_{i(k)}(\mathbf{z}),\ a_{i(k)}(\mathbf{z})$ функції від $\mathbf{z},\ \mathbf{z}=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2,\ i(k)\in\mathcal{I}$,

$$\mathcal{I} = \{i(k)=(i_1,i_2,\ldots,i_k) : 1\leqslant i_k \leqslant i_{k-1}\leqslant ... \leqslant i_0;\ k\geqslant 1;\ i_0=2\},$$

є двовимірним узагальненням функціональних неперервних дробів. Ці дроби є ефективним апаратом для наближення функцій двох комплексних змінних. У порівнянні із подвійними степеневими рядами вони часто мають ширшу область збіжності, а їх підхідні дроби дають кращі наближення. Числові експерименти підтверджують ефективність наявних алгоритмів розвинення, зокрема у [1].

Побудовано наступне розвинення функції $f(\mathbf{z})=(1+z_1+z_2+z_1z_2)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ у двовимірний ГЛД з нерівнозначними змінними

$$f(\mathbf{z}) = F(z_1) + \frac{d_1z_2}{\widehat{F}(z_1)} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_2z_2}{2F(z_1)} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_3z_2}{3\widehat{F}(z_1)} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots+} \frac{d_{2n}z_2}{2F(z_1)} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_{2n+1}z_2}{(2n+1)\widehat{F}(z_1)} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\ldots},$$

де

$$F(z_1) = 1 + \frac{d_1z_1}{1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_2z_1}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_3z_1}{3} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_4z_1}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_5z_1}{5} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots+} \frac{d_{2n}z_1}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_{2n+1}z_1}{2n+1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\ldots},$$

$$\widehat{F}(z_1) = 1 + \frac{-d_1z_1}{1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_3z_1}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_2z_1}{3} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_5z_1}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_4z_1}{5} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\cdots+} \frac{d_{2n+1}z_1}{2} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+} \frac{d_{2n}z_1}{2n+1} \genfrac{}{}{0pt}{}{}{+\ldots},$$

$$d_1=-\alpha,\ d_{2n}=n+\alpha,\ d_{2n+1}=n-\alpha,\ n\geqslant 1,\ \alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}.$$

Література

[1] Dmytryshyn R., Sharyn S. (2023). Approximation of Functions of Several Variables by Multidimensional A- and J-fractions with Independent Variables. https://arxiv.org/abs/2303.13136

ТНПУ ім. Володимира Гнатюка, Тернопіль, Україна
Email address: i.bilanyk@ukr.net

ТНПУ ім. Володимира Гнатюка, Тернопіль, Україна
Email address: mizolykroman22@gmail.com

ПРО ОЦІНКИ ПОХІДНОЇ ВІД СУМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО РЯДУ З КВАЗІВИПУКЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В. В. БОВСУНОВСЬКА, С. Б. ГЕМБАРСЬКА, П. В. ЗАДЕРЕЙ, Р. В. ТОВКАЧ

Розглядаються тригонометричні ряди

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}, \quad c_k \in C,$$

коефіцієнти яких $c_k = a_k - ib_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$ задовольняють умови

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0, \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left|\Delta^2 c_{k-1}\right| < \infty, \quad \Delta^2 c_{k-1} := c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1}. \tag{2}$$

Ясно, що при виконанні умов (1) і (2), $a_k \to 0, b_k \to 0$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left|\Delta^2 a_{k-1}\right| < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k\left|\Delta^2 b_{k-1}\right| < \infty$. Відомо, що суми рядів

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kt + a_k \sin kt),$$

які позначимо відповідно через $f(t)$ і $\tilde{f}(t)$, є неперервно диференційовними на $(0, \pi]$ (див. [1], п. 5.7.6, [2], розділ V, стор. 365).

Покладемо $\alpha_k := ka_k, \ \beta_k := kb_k, \quad k = 1, 2, \dots$.

Теляковський С.А в [3] довів наступну теорему.

Теорема 1. *Якщо $\Delta a_k \to 0$ і $\Delta b_k = b_k - b_{k+1} \to 0$ при $k \to \infty$, то еквівалентні такі умови*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\Delta^2 a_{k-1}\right| < \infty \quad i \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|\Delta^2 \alpha_k\right| < \infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\Delta^2 b_{k-1}\right| < \infty \quad i \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|\Delta^2 \beta_k\right| < \infty.$$

Нами встановлено таке твердження.

Теорема 2. *Нехай коефіцієнти ряду*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

задовольняють умови $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$ *і*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\left|\Delta^2 c_{k-1}\right| < \infty.$$

Тоді справедлива оцінка

$$\int\limits_{\frac{\pi}{m+1}}^{\pi} \left|f'(t) + i\tilde{f}'(t)\right| dt =$$

$$= O\left(\sum_{k=1}^{m}(|a_k| + |b_k|)ku_k + \sum_{k=1}^{\infty}\min(k,m)(|\Delta^2\alpha_k| + |\Delta^2\beta_k|)\right),$$

де $u_k = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{k+1}}^{\frac{\pi}{k}} \operatorname{ctg}\frac{t}{2}dt,\ m \in N$, *з абсолютними сталими при доданках, що знаходяться у правій частині останньої рівності.*

Література

[1] Зигмунд А. (1939). *Тригонометрические ряды* М.: ГОНТИ.

[2] Зигмунд А. (1965). *Тригонометрические ряды. Т. 1.* М.: Мир.

[3] Теляковский С.А. (1995). Оценки интеграла от производной суммы тригонометрического ряда с квазивыпуклыми коэффициентами. *Матем. сб.*, vol. 186, no. 11, pp. 111–122.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: valeri0202@ukr.net

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: gembarskaya72@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: pvzaderey@gmail.ua

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: tovkach.roman@vnu.edu.ua

ЗБІЖНІСТЬ В СЕРЕДНЬОМУ РЯДІВ ТЕЙЛОРА ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ З КЛАСУ ГАРДІ

В. В. БОВСУНОВСЬКА, П. В. ЗАДЕРЕЙ, Н. М. ЗАДЕРЕЙ, Г. Д. НЕФЬОДОВА

Якщо функція $f(z)$ аналітична в одиничному крузі D і

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi}|f(re^{it})|dt<\infty,$$

то кажуть, що $f(z)$ належить класу Гарді H_1.

Нехай ряд Тейлора функції $f(\cdot)\in H_1$ має вигляд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k, z\in D, c_k\in C, \tag{1}$$

і цей ряд збігається в середньому, тобто в метриці L_1, а саме виконується умова

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|\sum_{k=n+1}^{\infty}c_k e^{ikt}|dt=0. \tag{2}$$

Приклад функції $f(\cdot)\in H_1$, ряд Тейлора якої не збігається в середньому, тобто не виконується умова (2), побудував Ф. Рісс [1]. Цей приклад Ф. Рісса детально розібраний в [2, с. 598–601].

В роботі встановлені умови збіжності в середньому рядів Тейлора функцій з класу H_1, що задовольняють умови Сідона–Теляковського.

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти c_k ряду (1) задовольняють наступні умови: $\lim\limits_{n\to\infty} c_k=0$; існують такі числа A_k, що $|\triangle c_k|=|c_k-c_{k+1}|\leqslant A_k,\ k=0,1,2,\ldots,$*

$$A_k\downarrow 0;\quad \sum_{k=0}^{\infty}A_k<\infty;\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{|c_k|}{k}<\infty,$$

то ряд (1) збігається в середньому, тобто має місце рівність (2), тоді і тільки тоді, коли $|c_k|\ln k\to 0$ при $k\to\infty$.

Література

[1] Zigmund A. (1932). A Remark on Conjugate Series. *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 34, pp. 392–400.

[2] Бари Н.К. (1961). *Тригонометрические ряды.* М.: Физматгиз, с. 936.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: valeri02021984@gmail.com, pvzaderey@gmail.com, zadereynm@gmail.com, g.nefyodova@gmail.com

Φ-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ У ТЕОРІЇ НЕПЕРЕРВНИХ НІДЕ НЕ МОНОТОННИХ ФУНКЦІЙ З АВТОМОДЕЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

Н. М. ВАСИЛЕНКО, М. В. ПРАЦЬОВИТИЙ, О. І. БОНДАРЕНКО

Нехай $A = \{0, \pm1, \pm2, ...\}$ — алфавіт (набір цифр), $L = A \times A \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту; $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ — золоте відношення, а саме — додатний корінь рівняння $x^2 + x - 1 = 0$, а отже,

$$\tau = 1 - \tau^2 > 0, \quad \tau^2 = 1 - \tau, \quad \tau + 1 = \tfrac{1}{\tau}, \quad \tau = \tfrac{1}{\tau} - 1.$$

Для будь-якого числа $x \in (0;1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{m} (b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i}) \equiv \Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\emptyset)}, \tag{1}$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i}) \equiv \Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \tag{2}$$

де $\Theta_n = \Theta_{-n} = \tau^{3+|n|}$, $b_n = \sum\limits_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i = \begin{cases} \tau^{2-n}, & \text{якщо } n \leqslant 0, \\ 1 - \tau^{n+1}, & \text{якщо } n \geqslant 0. \end{cases}$

Зауважимо, що $\tau^{2k+1} = u_{2k+1}\tau - u_{2k}$, $\tau^{2k} = u_{2k-1} - u_{2k}\tau$, $k \in N$, де u_n — n-й член класичної послідовності Фібоначчі: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Розклад числа в суму (1) або (2) називається його Φ-*представленням*, а символічний запис $\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_m(\emptyset)}$ або $\Delta^{\Phi}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}$ — його Φ-*зображенням* (скінченним або нескінченним). При цьому α_n називається *n-ою цифрою* цього Φ-зображення і коректно означеною функцією $\alpha_n = \alpha_n(x)$ Φ-зображення числа x.

Означення 1. Множина $\Delta^{\Phi}_{c_1...c_m}$ всіх чисел $x \in (0;1)$, що мають скінченне або нескінченне Φ-зображення з першими m-цифрами $c_1, c_2, ..., c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta^{\Phi}_{c_1...c_m} = \{x : x = \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m\alpha_{m+1}...\alpha_n(\emptyset)}, x = \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m\beta_1\beta_2...}, (\beta_n) \in L\}$$

називається Φ-*циліндром рангу m з основою $c_1c_2...c_m$*.

Безпосередньо з означення випливають властивості циліндрів:

1) $\Delta^{\Phi}_{c_1...c_m} = \bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} \Delta^{\Phi}_{c_1...c_m i}$;

2) $\sup \Delta^{\Phi}_{c_1...c_{m-1}c_m} = \min \Delta^{\Phi}_{c_1...c_{m-1}[c_m+1]}$;

3) Циліндр $\Delta^{\Phi}_{c_1 \ldots c_m}$ є півврідізком $[\Delta^{\Phi}_{c_1 \ldots c_m(\emptyset)}; \Delta^{\Phi}_{c_1 \ldots c_{m-1}[c_m+1](\emptyset)})$;

4) Довжина циліндра: $|\Delta^{\Phi}_{c_1 \ldots c_m}| = \prod\limits_{i=1}^{m} \Theta_{c_i}; \Delta^{\Phi}_{c_1 \ldots c_m i} = \Theta_i |\Delta^{\Phi}_{c_1 \ldots c_m}|$.

Нехай $||p_{ik}||$ — нескінченна матриця ($i \in Z, k \in N$), елементами якої є дійсні числа і при цьому виконуються умови

1) $|p_{ik}| < 1 \; \forall i \in Z, \forall k \in N; \quad \sum\limits_{i \in Z} p_{ik} = 1 \; \forall k \in N$;

2) $0 < \sum\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} < \infty \;\; \forall (i_j) \in L; \;\; 0 < \sigma_{ik} \equiv \sum\limits_{j=-\infty}^{i-1} p_{jk} < 1 \; \forall i \in Z, \forall k \in N.$

Зауважимо, що з даних умов випливають твердження:

$$p_{ik} \to \infty \; (i \to \pm\infty); \sigma_{ik} = \sum_{j=-\infty}^{i-1} p_{jk} \to 0 \; (i \to -\infty), \sigma_{ik} \to 1 (i \to \infty).$$

Розглядається функція f, означена на множині $(0;1)$ рівностями

$$\begin{cases} f(x = \Delta^{\Phi}_{i_1 \ldots i_k \ldots}) = \sigma_{i_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \sigma_{i_k k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta_{i_1 \ldots i_k \ldots}, \\ f(x = \Delta^{\Phi}_{i_1 \ldots i_m(\emptyset)}) = \sigma_{i_1 1} + \sum\limits_{k=2}^{m} \sigma_{i_k k} \prod\limits_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta_{i_1 \ldots i_m(\emptyset)}. \end{cases} \tag{3}$$

Коректність означення функції рівностями (3) є наслідком єдиності Ф-зображення чисел і умов 1) – 4), що гарантують збіжність ряду (3).

Теорема 1. *Функція f неперервна в кожній точці області визначення і є ніде не монотонною тоді і лише тоді, коли серед елементів матриці $||p_{ik}||$ немає нулів і нескінченна кількість її стовпців містять від'ємні елементи.*

У доповіді пропонуються результати дослідження неперервних функцій, означених в термінах нескінченно-символьного Ф-зображення чисел, їх фрактальні (автомодельні), варіаційні, диференціальні властивості.

Література

[1] Pratsovytyi, M.V., Baranovskyi, O.M., Bondarenko, O., Ratushniak, S. (2023). One class of continuous locally complicated functions related to infinite-symbol Φ-representation of numbers. *Matematychni Studii*, 59(2), 123–131.

[2] Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Василенко Н.М., Лисенко І.М. (2023). Нескінченносимвольне B-зображення дійсних чисел і деякі його застосування. *Буковинський матем. журнал*, 2023, 11, с. 94–105.

[3] Працьовитий М., Бондаренко О., Лисенко І., Ратушняк С. (2023). Неперервні функції з локально скданими та фрактальними властивостями, пов'язані з нескінченносимвольним B-зображенням чисел. *Нелінійні коливання*, 2023, т. 26. № 3.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: vasylenkonm@gmail.com, o.i.bondarenko@udu.edu.ua

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна; Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: prats4444@gmail.com

ЦИКЛІЧНІ ПІДНАПІВГРУПИ СКІНЧЕННИХ ЦИКЛІЧНИХ НАПІВГРУП

Т. В. ВОЛОШИНА

Циклічні напівгрупи мають найпростішу будову, оскільки породжуються єдиним твірним елементом і, по суті, є аналогом циклічних груп. У роботі наведено опис усіх циклічних піднапівгруп у скінченних циклічних напівгрупах, встановлено зв'язок індексу та періоду циклічної піднапівгрупи з аналогічними характеристиками циклічної напівгрупи. Зауважимо, що не всі піднапівгрупи циклічних напівгруп є циклічними. Питання існування найменшої системи твірних для піднапівгруп скінченної циклічної напівгрупи розглядаються в роботі [1].

Для елемента a напівгрупи S піднапівгрупа $\langle a\rangle = \left\{a, a^2, a^3, \ldots, a^k, \ldots\right\}$, породжена елементом a, складається зі всіх натуральних степенів цього елемента. Якщо при цьому виконується рівність $S = \langle a\rangle$, то напівгрупу S називають циклічною. Порядком елемента a називають порядок породженої ним циклічної напівгрупи $\langle a\rangle$. Можливі два випадки [2]:

(1) усі натуральні степені елемента a — різні (кажуть, що a має нескінченний порядок);

(2) існують такі натуральні числа r і s $(r < s)$, для яких виконується рівність

$$a^r = a^s.$$

Зауважимо, що перший випадок можливий лише у нескінченній напівгрупі S. Ми у цій роботі будемо розглядати скінченну циклічну напівгрупу $S = \langle a\rangle$, породжену елементом a. Позначимо $m = s - r$, і будемо називати це число періодом елемента a. Число r називають індексом елемента a та породженої ним циклічної напівгрупи $S = \langle a\rangle$. Як зазначено у монографії [2], визначальне співвідношення між елементами циклічної напівгрупи $S = \langle a\rangle$ із врахуванням позначень r, m набуває вигляду

$$a^r = a^{r+m};$$

порядок циклічної напівгрупи $S = \langle a\rangle$ індексу r з періодом m дорівнює

$$|S| = r + m - 1.$$

Лема. *У циклічній напівгрупі $S = \langle a\rangle$ індексу r з періодом m існує єдиний ідемпотент, що має вигляд $\varepsilon = a^{m\cdot t}$, де $t = \left[\frac{r-1}{m}\right] + 1$. Він є одиницею циклічної підгрупи $C_m(a) = \left\{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{r+m-1}\right\}$ напівгрупи $S = \langle a\rangle$.*

Очевидно, що у випадку індексу $r = 1$, циклічна напівгрупа є фактично циклічною групою, і навпаки, кожну циклічну групу $G = \langle a \rangle$ скінченного порядку m можна розглядати як циклічну напівгрупу, породжену елементом a з періодом m та індексом $r = 1$. Спробуємо описати усі циклічні піднапівгрупи циклічної напівгрупи $S = \langle a \rangle$ індексу r з періодом m. По-перше, усі підгрупи групи $C_m(a)$ будуть піднапівгрупами у напівгрупі $S = \langle a \rangle$. Усі такі підгрупи циклічні. Інших циклічних підгруп у напівгрупі $S = \langle a \rangle$ немає. Пошукаємо тепер циклічні піднапівгрупи у скінченній циклічній напівгрупі $S = \langle a \rangle$ індексу r з періодом m, які не є підгрупами, тобто такі, для яких індекс відмінний від 1. Для цього розглянемо елементи $a^k \in S$, де $1 \leqslant k \leqslant r-1$, і будемо породжувати ними циклічні піднапівгрупи $\left\langle a^k \right\rangle$ у напівгрупі S.

Теорема 1. *Елемент a^k циклічної напівгрупи $S = \langle a \rangle$ індексу r з періодом m породжує в ній циклічну піднапівгрупу $T = \left\langle a^k \right\rangle$ індексу r' з періодом m':*

$$r' = \left[\frac{r-1}{k}\right] + 1, \quad m' = \frac{m}{\text{НСД}(k,m)}.$$

Зауважимо, що підгрупи циклічної напівгрупи $S = \langle a \rangle$ у цій теоремі також враховані. Щоб їх отримати, потрібно вибирати $k \geqslant r$. Тоді індекс породженої елементом a^k циклічної піднапівгрупи $r' = 1$. Перебираючи елементи a^k у циклічній напівгрупі $S = \langle a \rangle$ породжуємо ними усі її циклічні піднапівгрупи.

Ще у 1902 році E.H. Moor [3] довів, що деякий натуральний степінь кожного елемента скінченної напівгрупи є ідемпотентом. З'ясуємо, як для елемента a^k знайти таке найменше натуральне число n, для якого виконується рівність $\left(a^k\right)^n = \varepsilon$, де через $\varepsilon = a^{m\cdot t}$ позначено єдиний ідемпотент циклічної напівгрупи $S = \langle a \rangle$ індексу r з періодом m (див. лему).

Теорема 2. *Нехай a^k — елемент циклічної напівгрупи $S = \langle a \rangle$ індексу r з періодом m. Найменше натуральне число n, для якого $\left(a^k\right)^n$ є ідемпотентом циклічної напівгрупи, дорівнює*

$$n = \frac{\text{НСК}(k,m)}{k} \cdot \left[\frac{t \cdot \text{НСД}(k,m)}{k}\right],$$

де $t = \left[\frac{r-1}{m}\right] + 1$, а $[x]$ позначає найменше ціле число, яке не менше за x.

Література

[1] Dobbs D.B., Latham B.K. (2014). On the Subsemigroups of a Finite Cyclic Semigroup. *Kyungpook Math. Journal*, vol. 54, no. 4, pp. 607–617.

[2] Clifford A. H., Preston G. B. (1964). *The Algebraic Theory of Semigroups.* Vol. 1. Math. Surveys, no. 7. Providence: Amer. Math. Soc.

[3] Moor E.H. (1902). A Definition of Abstract Groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 3, pp. 485–492.

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: tetianavoloshyna@gmail.com

НАЙКРАЩІ ОРТОГОНАЛЬНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ ІЗОТРОПНИХ КЛАСІВ ТИПУ НІКОЛЬСЬКОГО–БЄСОВА ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

С. Б. ГЕМБАРСЬКА

Досліджуються ізотропні класи $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, де ω – задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, що задовольняє умови (S^{α}) і (S_l), які називаються умовами Барі–Стєчкіна [1].

Зазначимо, що при $\omega(t) = t^r, 0 < r < l$, класи $B^{\omega}_{p,\theta}$ співпадають з відомими класами Нікольського H^r_p та Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [2, 3].

Означимо апроксимаційну характеристику, яку будемо досліджувати.

Нехай X – деякий нормований простір з нормою $\|\cdot\|_X$ і Θ_m – довільний набір із m d-вимірних векторів $k^j = (k^j_1, \ldots, k^j_d)$, $j = \overline{1,m}$, з цілочисельними координатами.

Для функції $f \in X$ позначимо

$$S_{\Theta_m}(f) = \sum_{j=1}^{m} \widehat{f}(k^j) e^{i(k^j,x)},$$

де

$$\widehat{f}(k^j) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(t) e^{-i(k^j,t)} dt$$

– коефіцієнти Фур'є функції f, які відповідають набору векторів із Θ_m, і $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$.

Будемо розглядати апроксимаційну характеристику

$$e^{\perp}_m(f)_X := \inf_{\Theta_m} \|f - S_{\Theta_m}(f)\|_X$$

і для фунціонального класу $F \subset X$ покладемо

$$e^{\perp}_m(F)_X := \sup_{f \in F} e^{\perp}_m(f)_X.$$

Величину $e^{\perp}_m(F)_X$ називають найкращим ортогональним тригонометричним наближенням класу F у просторі X.

Одержано точні за порядком оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень ізотропних класів типу Нікольського–Бєсова $B^{\omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторах $B_{q,1}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, [4].

Особливістю цих просторів, як лінійних підпросторів L_q є те, що норма в них "сильніша", ніж L_q-норма.

При $1 \leqslant q \leqslant \infty$ виконуються співвідношення:

$$\|\cdot\|_q \ll \|\cdot\|_{B_{q,1}};$$
$$\|\cdot\|_{B_{1,1}} \leqslant \|\cdot\|_{B_{q,1}} \leqslant \|\cdot\|_{B_{\infty,1}}.$$

Теорема 1. *Нехай* $1 \leqslant p, q, \theta \leqslant \infty$, $(p,q) \overline{\in} \{(1,1),(\infty,\infty)\}$ *і* $\omega(t)$ *задовольняє умову* (S^{α}) *з деяким* $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $m \in \mathbb{N}$ *справедлива оцінка*

$$e^{\perp}_m(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp \omega(m^{-\frac{1}{d}}) m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})_+},$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Зауваження 1. Оцінки величин $e^{\perp}_m(B^{\omega}_{p,\theta})_q$ встановлені в [5], і при цьому виконується співвідношення

$$e^{\perp}_m(B^{\omega}_{p,\theta})_{B_{q,1}} \asymp e^{\perp}_m(B^{\omega}_{p,\theta})_q,$$

якщо $1 \leqslant p, q, \theta \leqslant \infty$, $(p,q) \overline{\in} \{(1,1),(\infty,\infty)\}$, $\alpha > d\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)_+$.

Зауваження 2. Оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень ізотропних класів типу Нікольського–Бєсова $B^{\omega}_{p,\theta}$, які одержані в теоремі 1, реалізуються за наближення функцій із цих класів тригонометричними поліномами зі спектром у кубічних областях.

Література

[1] Бари Н.К., Стечкин С.Б. (1956). Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Тр. Моск. мат. о-ва*, vol. 5, pp. 483–522.

[2] Бесов О.В. (1961). Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. *Тр. мат. ин-та АН СССР*, vol. 60, pp. 42–61.

[3] Никольский С.М. (1951). Неравенства для целых функций конечной степени и их приложение в теории дифференцируемых функций многих переменных. *Тр. Мат. ин-та АН СССР*, vol. 38, pp. 244–278.

[4] Hembars'ka S.B., Romaniuk I.A., Fedunyk-Yaremchuk O.V. (2023). Characteristics of linear and nonlinear approximation of the Nikol'skii-Besov-type classes of periodic functions of several variables. *J. Math. Sci. (N.Y.)*, vol. 274, no. 3, pp. 307–326.

[5] Войтенко С.П. (2009). Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних. *Укр. мат. журн.*, vol. 61, no. 11, pp. 1473–1484.

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: gembarskaya72@gmail.com

ПРО ФУНКЦІЇ КЛАСУ ГАРДІ, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬСЯ УМОВАМИ СІДОНА – ТЕЛЯКОВСЬКОГО

С. Б. ГЕМБАРСЬКА, П. В. ЗАДЕРЕЙ, Н. М. ЗАДЕРЕЙ, Г. Д. НЕФЬОДОВА

Функція $f(z)$, регулярна в одиничному крузі $D = \{z \in C : |z| < 1\}$, належить класу Гарді $H_p, p > 0$, якщо

$$\sup_{r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p \, \mathrm{d}t < \infty. \tag{1}$$

Перевірка умови (1) при $0 < p < 2$ є досить складною. При $p \geqslant 2$ справедливе наступне твердження:

Теорема Юнга – Хаусдорфа [1].

Якщо ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^{\frac{p}{p-1}}$ збігається при $p \geqslant 2$, то функція, задана своїм рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \ z^k, \quad z \in D, \quad c_k \in C \tag{2}$$

належить класу Гарді $H_p, p \geqslant 2$.

В роботі [2] встановлені достатні умови для коефіцієнтів c_k, при виконанні яких ряд (2) є рядом Тейлора функції з класу H_1, а саме:

$$\lim_{k\to\infty} c_k = 0; \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k| \triangle^2 c_{k-1}| < \infty, \tag{4}$$

де

$$\triangle^2 c_{k-1} = c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1};$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty. \tag{5}$$

В даній роботі умови (4) будуть послаблені.

Нехай існують такі числа A_k, що

$$| \triangle c_k| = |c_k - c_k + 1| \leqslant A_k, \quad k = 0, 1, 2... \tag{6}$$

та справджуються умови

$$A_k \downarrow 0; \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty. \tag{7}$$

Якщо виконуються умови (3), (5), (6), (7), то кажуть, що послідовність $\{c_k\}$, $k = 0, 1, 2...$ задовольняє умови Сідона–Теляковського. Перевірка умов (6) і (7), на нашу думку, не складніша, ніж перевірка умови (4).

В якості чисел A_k можуть бути, наприклад, числа

$$A_k = \max_{\nu \geqslant k} |c_\nu|.$$

Теорема.

Якщо для послідовності чисел $\{c_k\}, k = 0, 1, 2...$ виконуються наступні умови: $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$; існують числа A_k такі, що

$$| \triangle c_k| = |c_k - c_{k+1}| \leqslant A_k, \quad k = 0, 1, 2...,$$

$$A_k \downarrow 0; \quad \sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty,$$

то ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \ z^k, \quad z \in D, \quad c_k \in C$$

буде рядом Тейлора функції з класу Гарді H_1 тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|}{k} < \infty.$$

Література

[1] Привалов И.И. (1950). Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: Гостехтеориздат. с. 336.

[2] Бовсуновська В.В., Задерей. П.В. (2022). Про тейлорівські коефіцієнти функцій класів H_1. Український математичний журнал. – М.: Физматгиз. вип. 74, вип. 5. с. 725–728.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: gembarskaya@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: pvzaderey@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: zadereynm@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: g.nefyodova@gmail.com

МУЛЬТИКАРКАСИ ГРАФІВ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

О. Д. ГЛУХОВ

Нехай G - зв'язний граф, $U \subseteq G^1$ - деяка множина його ребер, $G[U]$ мінімальний підграф графа G з множиною ребер $(G[U])^1 = U$ [1].

Означення 1. Мультикаркасом графа G будемо називати сімейство множин $\{E_j\}_j^s$, яке задовольняє наступним умовам:

(1) $\forall j\ E_j \subseteq G^1$,
(2) Якщо множина W ребер графа G задовольняє, $\forall j\ W \cap E_j \neq \emptyset$, то граф $G[W]$ буде зв'язним факторграфом графа G (зв'язним підграфом, який містить усі вершини даного графа).

Лемма 1. *Сімейство множин $M = \{E_j\}_j^s$ буде мультикаркасом графа G тоді і тільки тоді, коли для будь-якого реберного розріза U знайдеться таке E_k, що $E_j \subseteq U$.*

Означення 2. Нехай $M = \{E_j\}_j^s$ деякий мультикаркас графа G,

$$\xi_k(M) = |\{E \in M : |E| = k\}|.$$

C-поліномом або зв'язністним поліномом мультикаркаса графа G назвемо поліном:

$$C(G, M, x) = \sum_k \xi_k x^k.$$

Означення 3. [2] Нехай $G = G_n$- зв'язний граф на n вершинах з множиною вершин G^0 і множиною ребер G_n^1, $|G^0| = n$ $|G^1| = m$, квазівипадковим графом на основі графа G називається граф $G(p)$ з множиною $G^0(p) = G^0$ вершин і з випадковою множиною $U = G^1(p)$ ребер для якої виконуються умови: $Prob(u \in U) = p$, якщо $u \in G^1$; $Prob(u \in U) = p$, якщо $u \notin G^1$.

Теорема 1. *Якщо G зв'язний граф, M - деякий його мультикаркас, то для ймовірності P зв'язності квазівипадкового графа $G(p)$ на основі графа G має місце наступна оцінка: $P \geqslant 1 - C(G, M, q)$, де $q = 1 - p$.*

Література

[1] Diestel R (2005). *Graph Theory*. New York: Springer-Verlag.

[2] Глухов А.Д. (2016). Квазислучайные графы и структурная устойчивость сложных дискретных систем. *Электрон. моделирование*, vol. 38, no. 5, pp. 35–41.

Національний авіаційний унівкрситет, Київ, Україна
Email address: glukhov07@gmail.com

РОЗВ'ЯЗКИ СТЕПЕНЯ s МАТРИЧНОГО ПОЛІНОМІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ СИЛЬВЕСТРА

Н. С. ДЖАЛЮК

Багато задач теорії динамічних систем і теорії керування можуть бути зведені до відшукання розв'язків лінійного різностороннього матричного поліноміального рівняння

$$A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda), \tag{1}$$

яке ще називають рівнянням Сильвестра, де $A(\lambda)\in M(n,m,\mathcal{F}[\lambda])$, $B(\lambda)\in M(p,q,\mathcal{F}[\lambda])$ і $C(\lambda)\in M(n,q,\mathcal{F}[\lambda])-$ відомі матриці над кільцем поліномів $F[\lambda]$, $F-$ поле, $M(n,m,\mathcal{F}[\lambda])-$ множина $n\times m$ матриць над $\mathcal{F}[\lambda]$. Матриці $X(\lambda)\in M(m,q,\mathcal{F}[\lambda])$ і $Y(\lambda)\in M(n,p,\mathcal{F}[\lambda])-$ невідомі і їх називають розв'язком матричного рівняння (1), якщо вони задовольняють це рівняння. Умови розв'язності матричного рівняння (1), методи побудови розв'язків та опис їхньої структури наведені у праці [1].

Важливою є класифікація розв'язків таких рівнянь, зокрема за їхніми степенями. Якщо таке матричне поліноміальне рівняння розв'язне, то, очевидно, що воно має розв'язки необмежених зверху степенів. Тому однією із задач є встановлення мінімального степеня розв'язків таких рівнянь. Ця задача розв'язана лише в окремих випадках, наприклад, коли визначники матриць-коефіцієнтів $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ рівняння (1) є взаємно прості [2, 3]. У праці [4] вказані необхідні і достатні умови існування розв'язку нульового степеня для матричного поліноміального рівняння (1).

Метою цієї праці є встановлення необхідних і достатніх умов існування розв'язку степеня s матричного поліноміального рівняння (1), де s менший ніж максимальний із степенів коефіцієнтів $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$, тобто $s<\max(\deg A(\lambda),\deg B(\lambda))$.

Теорема. *Нехай* $r=\max(\deg A(\lambda),\deg B(\lambda))$, *де матриці* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *із матричного поліноміального рівняння Сильвестра* (1)*, тобто*

$$A(\lambda)=A_r\lambda^r+\ldots+A_1\lambda+A_0,\ B(\lambda)=B_r\lambda^r+\ldots+B_1\lambda+B_0$$

і $\deg C(\lambda)\leqslant r+s,\ s\geqslant 0$, *тобто* $C(\lambda)=C_{r+s}\lambda^{r+s}+\ldots+C_1\lambda+C_0$.

Матричне поліноміальне рівняння Сильвестра (1) *має розв'язок* $X(\lambda),Y(\lambda)$ *степеня* $s<r$, *де* $s=\max(\deg X(\lambda),\deg Y(\lambda))$, *тобто*

$$X(\lambda)=X_s\lambda^s+\ldots+X_1\lambda+X_0,\ Y(\lambda)=Y_s\lambda^s+\ldots+Y_1\lambda+Y_0$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{c} G \end{array}\right]=\operatorname{rank}\left[\begin{array}{cc} \mathbf{c} & G \end{array}\right],$$

де

$$G = \left[\begin{array}{cccccccccc}
\overline{A}_r & \overline{B}_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\overline{A}_r & \overline{A}_{r-1} & \overline{B}_{r-1} & \overline{B}_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\overline{A}_r & \overline{A}_{r-1} & \dots & \overline{A}_{r-s+1} & \overline{B}_{r-s+1} & \dots & \overline{B}_{r-1} & \overline{B}_r & 0 & 0 \\
\hline
\overline{A}_r & \overline{A}_{r-1} & \dots & \overline{A}_{r-s+1} & \overline{A}_{r-s} & \overline{B}_{r-s} & \overline{B}_{r-s+1} & \dots & \overline{B}_{r-1} & \overline{B}_r \\
\overline{A}_{r-1} & \overline{A}_{r-2} & \dots & \overline{A}_{r-s} & \overline{A}_{r-s-1} & \overline{B}_{r-s-1} & \overline{B}_{r-s} & \dots & \overline{B}_{r-2} & \overline{B}_{r-1} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\overline{A}_s & \overline{A}_{s-1} & \dots & \dots & \overline{A}_0 & \overline{B}_0 & \dots & \dots & \overline{B}_{s-1} & \overline{B}_s \\
\hline
\overline{A}_{s-1} & \overline{A}_{s-2} & \dots & \overline{A}_0 & \overline{B}_0 & \dots & \overline{B}_{s-2} & \overline{B}_{s-1} & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\overline{A}_1 & \overline{A}_0 & \overline{B}_0 & \overline{B}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\overline{A}_0 & \overline{B}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right],$$

$$\overline{A}_k = A_k \otimes I_q,\ \overline{B}_k = I_n \otimes B_k^{\mathsf{T}},$$

$k = 0, 1, \dots, r,$ *та*

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{r+s} & \dots & \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_0 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}},$$
$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{i1} & \mathbf{c}_{i2} & \dots & \mathbf{c}_{in} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{c}_{ij}$ *це* $j-$*ий рядок матриці* C_i, $i = 0, 1, \dots, r+s$, $j = 1, \dots, n$, I_k- $k \times k$ *одинична матриця, символ* $\otimes$ *означає прямий добуток матриць, а символо* T – *транспонування відповідної матриці.*

Література

[1] Джалюк Н.С., Петричкович В.М. (2022). Матричні лінійні різносторонні рівняння над різними областями, методи побудови розв'язків та опис їхньої структури. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*, 65, № 1–2, с. 18–41.

[2] Barnett S. (1969). Regular polynomial matrices having relatively prime determinants. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, vol. 65, no. 3, pp. 585–590.

[3] Feinstein J., Bar-Ness Y. (1980). On the uniqueness of the minimal solution to the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$. *J. Franklin Inst.*, vol. 310, no. 2., pp. 131–134.

[4] Kaczorek T. (1986). Zero-degree solutions to the bilateral polynomial matrix equations. *Bull. Polish Acad. Sci. Ser. Techn. Sci.*, vol. 34, no. 9–10, pp. 547–552.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України, Львів, Україна

Email address: nataliya.dzhalyuk@gmail.com

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБОВИХ РОЗВИНЕНЬ ВІДНОШЕНЬ ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ГОРНА H_4 ДЛЯ ДЕЯКИХ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ

Р. І. ДМИТРИШИН, І.-А. В. ЛУЦІВ

Гіпергеометрична функція Горна H_4 визначається подвійним степеневим рядом вигляду (див. [2])

$$H_4(a,b;c,d;\mathbf{z}) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{(a)_{2r+s}(b)_s}{(c)_r(d)_s} \frac{z_1^r}{r!} \frac{z_2^s}{s!}, \quad |z_1| < p,\ |z_2| < l,$$

де a, b, c, d – комплексні сталі, причому c і d не дорівнюють недодатному цілому числу; p і l – додатні числа такі, що $4p = (l-1)^2$ і $l \neq 1$; $(\cdot)_k$ – символ Похгаммера, визначений для будь-якого комплексного числа α і невід'ємного цілого n у такий спосіб $(\alpha)_0 = 1$ і $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)$; $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

У випадку коли $b = d+1$ справджується теорема (див. [1]).

Теорема 1. *Відношення*

$$\frac{H_4(a,d+1;c,d;\mathbf{z})}{H_4(a+1,d+1;c,d+1;\mathbf{z})}$$

має формальне гіллясте ланцюгове дробове розвинення вигляду

$$1 - \frac{d-a}{d} z_2 - \cfrac{s_1 z_1}{1 - z_2 - \cfrac{s_2 z_1}{1 - z_2 - \cfrac{s_3 z_1}{1 - \ddots}}}, \tag{1}$$

де

$$s_1 = \frac{2(a+1)}{c}, \quad s_k = \frac{(2c-a+k-3)(a+k)}{(c+k-2)(c+k-1)}, \quad k \geqslant 2. \tag{2}$$

Для гіллястого ланцюгового дробового розвинення (1) справджуються такі ознаки збіжності.

Теорема 2. *Нехай a, c і d – дійсні числа такі, що*

$$0 < s_k \leqslant r \quad \text{для всіх} \quad k \geqslant 1,$$

де s_k, $k \geqslant 1$, – визначені в (2), r – додатне число і $d \neq 0$. Тоді гіллястий ланцюговий дріб (1) збігається рівномірно на кожній компактній підмножині *області*

$$\Xi_r = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : \left| \arg\left(\frac{1}{4(1+r)} - z_k \right) \right| < \pi, \ k = 1, 2 \right\}$$

до функції $f(\mathbf{z})$ *голоморфної в* Ξ_r.

Теорема 3. *Нехай* a, c *і* d *– комплексні сталі такі, що*

$$|s_k| - \mathrm{Re}(s_k) \leqslant hq(1-q) \quad \text{для всіх} \quad k \geqslant 1,$$

де s_k, $k \geqslant 1$, *– визначені в* (2), h *– додатне число,* $0 < q < 1$ *і* $d \neq 0$. *Тоді гіллястий ланцюговий дріб* (1) *збігається рівномірно на кожній компактній підмножині області*

$$\Omega_{h,q} = \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^2 : \ |z_1| < \frac{1 - \cos(\arg(z_1))}{h}, \ \frac{\mathrm{Re}(z_2 e^{-(i/2)\arg(z_1)})}{q} < \frac{1 + \cos(\arg(z_1))}{2} \right\}$$

до функцій $f(\mathbf{z})$ *голоморфної в* $\Omega_{h,q}$.

Література

[1] T. Antonova, R. Dmytryshyn, I.-A. Lutsiv, S. Sharyn, *On some branched continued fraction expansions for Horn's hypergeometric function* $H_4(a, b; c, d; z_1, z_2)$ *ratios*, Axioms, 12, № 3, 299 (2023).

[2] J. Horn, *Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen*, Math. Ann., 105, 381–407 (1931).

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

Email address: dmytryshynr@hotmail.com

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

Email address: lutsiv.ilona@gmail.com

ОЦІНКА НАЙКРАЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ПРОСТОРУ L_p ЧЕРЕЗ КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є

Т. О. КОНОНОВИЧ

Нехай L_p, $1 < p < \infty$, — простір 2π-періодичних сумовних у p-му степені на $[-\pi, \pi]$ функцій $f(x)$ з нормою

$$\|f(x)\|_{L_p} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Позначимо через T_n множину тригонометричних поліномів вигляду

$$t_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

де A_k, B_k — довільні дійсні числа, $n = 0, 1, ...$, а через $E_n(f)_p$ — величину найкращого наближення функції $f \in L_p$ тригонометричними поліномами $t_n \in T_n$:

$$E_n(f)_p = \inf_{t_n \in T_n} \|f(x) - t_n(x)\|_{L_p}.$$

Символом C_p позначимо додатні сталі, які можуть бути неоднаковими в різних формулах.

Оцінку зверху величини найкращого наближення $E_n(f)_p$ функцій простору L_p, $1 < p < \infty$, заданих рядами Фур'є по синусах з монотонними коефіцієнтами, що задовольняють деякі додаткові умови, одержав А.А. Конюшков [1]: якщо $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, де $b_k \downarrow 0,\ k \to \infty$, і при деякому $p,\ 1 < p < \infty$, збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^p k^{p-2} < \infty$, то

$$E_n(g)_p \leqslant C_p \left((n+1)^{\frac{1}{p}} b_{n+1} + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^p k^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \right),$$

де $p' = \frac{p}{p-1},\ n = 0, 1, ...$; при $p \geqslant 2$ доданок $(n+1)^{\frac{1}{p'}} b_{n+1}$ у правій частині нерівності можна відкинути. Для функцій, заданих синус- або косинус-рядами з коефіцієнтами, що можуть бути немонотонними, нами встановлено оцінку, котра за умови монотонності збігається з результатом А.А. Конюшкова.

Теорема 1. *Якщо елементи послідовності $\{b_k\}$ такі, що $b_k \to 0,\ k \to \infty$, і при деякому $p,\ 1 < p < 2$, збігається ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\triangle b_i| \right)^p (k+1)^{p-2} < \infty,$$

де $\triangle b_i = b_i - b_{i+1}$, *то для функції*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

справедлива оцінка

$$E_n(g)_p \leqslant C_p \left((n+1)^{\frac{1}{p'}} \sum_{k=n+1}^{\infty} |\triangle b_k| + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} |\triangle b_i| \right)^p k^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}} \right),$$

Оцінка має місце і для функцій

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

при виконанні для коефіцієнтів a_k вказаних умов.

Оцінка справедлива також при $p \geqslant 2$, але у цьому випадку на підставі теореми Харді і Літтльвуда [2, с. 165] можна одержати точніший результат.

Теорема 2. *Якщо при деякому* $2 \leqslant p < \infty$, *виконується*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^p (k+1)^{p-2} < \infty,$$

то для функції $g \in L_p(Q)$ *з коефіцієнтами Фур'є* $\{b_k\}$ *справедлива оцінка*

$$E_n(g)_p \leqslant C_p \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|^p (k+1)^{p-2} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad n = 0, 1, ...$$

Література

[1] Конюшков А.А. (1958). Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье. *Мат. сб.*, Т. 44, № 1, С. 53–84.

[2] Зигмунд А. (1965). *Тригонометрические ряды*: В 2 т. Пер. с англ. М.: Мир, Т. 1.

Полтавський національний педагогічний університет імені В. Г. Короленка, Полтава, Україна

Email address: ptkm@ukr.net

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ КОНСТРУКЦІЇ ЧЕМПЕРНУОНА

Р. В. КРИВОШИЯ

Послідовність (x_n) називається рівномірно розподіленою, якщо для довільного інтервалу $(a;b) \subset [0;1]$ виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n\big((a;b)\big)}{n} = b - a,$$

де $N_n((a;b))$ — кількість чисел серед $\{x_1\}, \{x_2\}, \ldots, \{x_n\}$, які належать інтервалу $(a;b)$.

Нехай $(q_0; q_1; ...; q_{s-1})$ — стохастичний вектор з строго додатними координатами. Відомо [1], що для довільного дійсного числа $x \in [0;1]$ існує нескінченний вектор $(\alpha_1; \alpha_2; \ldots; \alpha_n; \ldots)$ кожна координата якого належить множині $\{0; 1; ...; s-1\}$ такий, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \ldots + \beta_{\alpha_{n+1}} q_{\alpha_n} q_{\alpha_{n-1}} \ldots q_{\alpha_1} + \ldots, \tag{1}$$

де $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0, ..., \beta_{s-1} = q_0 + ... + q_{s-2}$.

Представлення (1) називається Q_s-представленням числа x і має наступне зображення: $x = \Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}$. Розглянемо наступний оператор зсуву:

$$T(\Delta^{Q_s}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{Q_s}_{\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Позначимо

$$T_n(x) = \underbrace{T(T(...T(x))}_{n}.$$

Для випадку коли $q_k = \frac{1}{s}$ для кожного $k \in \{0; 1; ...; s-1\}$ приклад числа t такого, що послідовність $(T_n(t))$ рівномірно розподілена був побудований в роботі [2]. В даній роботі побудовано приклад числа h такого, що послідовність $(T_n(h))$ рівномірно розподілена без обмежень на стохастичний вектор $(q_0; q_1; ...; q_{s-1})$.

Література

[1] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. (1992). *Фрактальные множества, функции, распределения.* К.: Наук. думка.

[2] Champernowne D. (1933). The construction of the decimals normal in the scale of ten. *J. London Math. Soc.*, no. 8, pp. 254–260.

[3] Niven I., Zuckerman H.S. (1951). On the definition of normal numbers. *Trans.Amer.Math.Soc.*, no. 1, pp. 103–109.

Кропивницький будівельний фаховий коледж, Кропивницький, Україна
Email address: vikasvat2013@gmail.com

(Z,K)-ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ОСОБЛИВИХ МАТРИЦЬ НАД КВАДРАТИЧНИМИ ЕВКІДОВИМИ КІЛЬЦЯМИ

Н. Б. ЛАДЗОРИШИН, В. М. ПЕТРИЧКОВИЧ

Матриці з елементами із квадратичного кільця виникають і використовуються у теорії чисел та інших розділах математики [1]—[3]. Структура і властивості таких матриць над квадратичними кільцями мало вивчені. Ми досліджуємо еквівалентність матриць над такими кільцями, зокрема так звану (z,k)-еквівалентність.

У [4] було введено поняття (z,k)-еквівалентності матриць над квадратичними кільцями та встановлено спеціальну трикутну форму з інваріантними множниками на головній діагоналі для неособливих матриць відносно такої еквівалентності. Встановлені форми щодо таких перетворень застосовуються при розв'язуванні матричних лінійних рівнянь над квадратичними кільцями та опису структури їх розв'язків [4, 5].

Нехай $\mathbb{Z}$ — кільце цілих чисел і нехай $k \in \mathbb{Z}$, k відмінне від одиниці і не ділиться на квадрат простого числа. Тоді $\mathbb{K} = \mathbb{Z}[\sqrt{k}]$ — квадратичне евклідове кільце [6], що містить елементи вигляду

$$\mathbb{K} = \{a + b\sqrt{k} \mid a,\ b \in \mathbb{Z}\ \},\quad \text{якщо}\quad k \equiv 2, 3 (\operatorname{mod} 4),$$

$$\mathbb{K} = \{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\sqrt{k} \mid a,\ b \in \mathbb{Z},\ 2|(a-b)\ \},\quad \text{якщо}\quad k \equiv 1 (\operatorname{mod} 4).$$

Через $\mathcal{E}(a)$ позначимо евклідову норму елемента $a \in \mathbb{K}$. Зауважимо, що квадратичних евклідових кілець є скінченна кількість. Відомо, що кожне евклідове кільце є кільцем головних ідеалів, проте існують квадратичні кільця головних ідеалів, які не є евклідовими. Існують квадратичні кільця, які не є кільцями головних ідеалів.

Нагадаємо, що матриці A і B з елементами із квадратичного кільця $\mathbb{K}$ називаються (z,k)-еквівалентними, якщо існують такі оборотні матриця S над кільцем цілих чисел $\mathbb{Z}$ і матриця Q над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$, що $A = SBQ$.

Розглянемо (z,k)-еквівалентність прямокутних $m \times n$ матриць не максимального рангу над квадратичним евклідовим кільцем $\mathbb{K}$ і встановимо спеціальну трикутну форму для цих матриць відносно такої еквівалентності.

Відомо, що кожна матриця $A \in M(m, n, \mathbb{K})$ еквівалентна до канонічної діагональної форми D^A, тобто існують такі оборотні матриці U і V над квадратичним кільцем $\mathbb{K}$, що

$$D^A = UAV = \operatorname{diag}(\mu_1^A, \dots, \mu_r^A, 0, \dots, 0),$$

де $\mu_r^A \neq 0$ і $\mu_i^A \mid \mu_{i+1}^A$, $i = 1, ..., r-1$; μ_p^A, $p = 1, ..., r$ — інваріантні множники матриці A.

Теорема 1. *Нехай* $A \in M(m, n, \mathbb{K})$, $m \leqslant n$, $\operatorname{rang} A = r$ *і* $r < m$. *Тоді матриця* A *(z,k)-еквівалентна до матриці* T, *тобто існують такі оборотні матриця* S *над кільцем цілих чисел* $\mathbb{Z}$ *і матриця* Q *над квадратичним кільцем* $\mathbb{K}$, *що*

$$T = SAQ = \left\| \begin{array}{cccc|c} \mu_1^A & \cdots & 0 & 0 & \\ t_{21}\mu_1^A & \cdots & 0 & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ t_{r-1,1}\mu_1^A & \cdots & \mu_{r-1}^A & 0 & \mathbf{0} \\ t_{r1}\mu_1^A & \cdots & t_{r,r-1}\mu_{r-1}^A & t_{rr}\mu_r^A & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ t_{m1}\mu_1^A & \cdots & t_{m,r-1}\mu_{r-1}^A & t_{mr}\mu_r^A & \end{array} \right\|,$$

де

$$(t_{rr}, t_{r+1,r}, \ldots, t_{mr}) = 1$$

і

$$t_{ij} = 0, \quad \textit{якщо} \quad \mu_i^A = 1,$$

$$\mathcal{E}(t_{ij}) < \mathcal{E}\left(\frac{\mu_i^A}{\mu_j^A}\right), \quad \textit{якщо} \quad t_{ij} \neq 0, \quad i, j = 1, \ldots, r-1, \; j < i.$$

Література

[1] Savastru O., Varbanets S. (1995). Norm Kloosterman sums over $\mathbb{Z}[i]$. *Algebra and Discrete Math.*, vol. 80, pp. 105–137.

[2] Greaves G. (2012). Cyclotomic matrices over the Eisenstein and Gaussian integers. *J. Algebra*, vol. 372, pp. 560–583.

[3] Cossu L., Zanardo P. (2022). Idempotent factorizations of singular 2×2 matrices over quadratic integer rings. *Linear Multilinear Algebra*, vol. 70, no. 2, pp. 297–309.

[4] Ladzoryshyn N.B., Petrychkovych V.M. (2021). Standard form of matrices over quadratic rings with respect to the (z,k)-equivalence and the structure of solutions of bilateral matrix linear equations. *J. Math. Sci.*, vol. 253, no. 1, pp. 54–62.

[5] Ladzoryshyn N.B., Petrychkovych V.M. (2020). Matrix Diophantine equations over quadratic rings and their solutions. *Carpathian Math. Publ.*, vol. 12, no. 2, pp. 368–375.

[6] Hasse H. (1980). *Number theory.* Classics in Mathematics, Springer-Verlag, New York-Berlin.

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
Email address: `natalja.ladzoryshyn@gmail.com`

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
Email address: `vas_petrych@yahoo.com`

ОПТИМІЗОВАНІ ТОЧКОВІ ПОЛІНОМИ

К. Ю. ЛИСЕНКО

Нехай задана характеристична функція $p_i, i = \overline{1,n}$ точкового поліному $M(n-1)$-го степеня. Будь-яка поточна точка цього M_{n-1} точкового поліному визначається як сума добутків усіх базисних точок $A_i, i = \overline{1,n}$ на їх характеристичні функції $p_i, i = \overline{1,n}$, тобто $M_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i \cdot p_i$. Ключове слово: "усіх".

Застосовуючи усі базисні точки ми матимемо точковий поліном високого $(n-1)$-го степеня, що призводить до великих ресурсовитрат.

Отже, значення кожної характеристичної функції у точці, індекс якої збігається з індексом характеристичної функції, дорівнює одиниці. А чим далі від цієї базисної точки, графік характеристичної функції буде мати вщухаючі коливання.

Аналогічними амплітуди будуть і для решти інших характеристичних функції. А чим менше значення амплітуди, тим менший вплив цієї базисної точки.

Наприклад, поточна точка M, яка відшукується у зоні першої базисної точки має абсолютні значення кожного елементу суми, такі:

$$|A_1p_1| > |A_2p_2| > |A_3p_3| > \ldots > |A_{n-1}p_{n-1}| > |A_np_n|.$$

Значення шуканої поточної точки M обчислюється як сума:

$$M = A_1p_1 + A_2p_2 - A_3p_3 + \ldots + A_{n-1}p_{n-1} - A_np_n.$$

Як бачимо, останні доданки $A_{n-1}p_{n-1}$та A_np_n мають найменший вплив на формування значення поточної точки у зоні базисної точки A_1.

Постає питання, скільки останніх доданків даної суми можна відкинути, тобто:

$$M' = A_1p_1 + A_2p_2 - A_3p_3 + \ldots + A_{n-3}p_{n-3} - A_{n-2}p_{n-2},$$

щоб ця M' надавала похибку, що не є більшою, ніж будь-яке, наперед визначене, значення ε, тобто $|M - M'| \leqslant \varepsilon$.

Як бачимо, відкинуто тільки два доданки. А може тих членів потрібно відкинути більше?

Наведемо ще один приклад щодо визначення поточної точки M у зоні базисної точки A_n:

$$M = A_np_n + A_{n-1}p_{n-1} + \ldots + A_3p_3 - A_2p_2 - A_1p_1$$

Нехай у цій алгебраїчній сумі абсолютні значення є такими:

$$|A_np_n| > |A_{n-1}p_{n-1}| > \ldots > |A_3p_3| > |A_2p_2| > |A_1p_1|$$

А скорочена сума M' має вигляд:

$$M' = A_n p_n + A_{n-1} p_{n-1} + \ldots + A_4 p_4.$$

Тобто відкинуто три доданки.

Відкидання доданків дозволяє знизити степінь точкового поліному, що призводить до зменшення ресурсовитратності і пришвидшує створення композиційних геометричних моделей.

Отже, постає задача в необхідності визначення кількості доданків, котрі можна відкинути у точковому рівнянні, з метою зниження степеня точкового поліному.

Мелітопольський державний педагогічний університет імені Богдана Хмельницького, Запоріжжя, Україна

Email address: Lysenko_kseniya@mspu.edu.ua

ДОВЕДЕННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТІ ЧИСЕЛ π І e

Н. І. МЕЛЬНИК, І. Р. КОВАЛЬЧУК

З ірраціональними числами учні знайомі принаймні з восьмого класу. Методом від супротивного легко доводиться, що $\sqrt{2}$ не є раціональним. Складніше показати ірраціональність чисел π і e. Якщо використати інтегральне числення, то це виявиться доволі просто [1].

Для натуральних a і b розглянемо многочлен

$$P_n(x) = \frac{x^n(bx-a)^n}{n!} \tag{1}$$

При $x = 0$ і $x = a/b$, $P_n(x)$ і всі його похідні набувають цілих значень (в чому легко переконатись, розклавши P_n за формулою Маклорена).

Припустимо, що π – раціональне ($\pi = a/b$), тоді

$$I_n = \int_0^\pi P_n(x)\sin(x)\,dx \tag{2}$$

не дорівні нулю цілі числа (це легко побачити проінтегрувавши (1) частинами (2n+1) раз).

З іншого боку

$$|P_n(x)\sin(x)| \leqslant |P_n(x)| \leqslant \frac{M^n}{n!},\ x \in [0,\pi]$$

де $M = \sup\limits_{[0,\pi]}|x(bx-a)|$.

Тому

$$|I_n| \leqslant \int_0^\pi |P_n(x)\sin(x)|\,dx \leqslant \int_0^\pi \frac{M^n}{n!}\,dx = \pi\frac{M^n}{n!}$$

а отже

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

що неможливо (I_n – цілі нерівні нулю).

Отримали суперечність. Тому припустимо, що $\pi = \frac{a}{B}$ невірне.

Аналогічно, розглянувши послідовність

$$j_n = \int_0^r D_n(x)\,e^x\,dx,$$

де r – це додатнє, раціональне число, можна довести, що e^r – ірраціональне.

Література

[1] Lefort G. (1964). *Algebra et analyse.* Dunod Paris. p. 464

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: natalijamelnyk175@gmail.com, kovalchuk.ihor57@gmail.com

АЛГЕБРА ЛІ ГРУПИ $C(1,n)$ КОНФОРМНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ПРОСТОРУ МІНКОВСЬКОГО $R_{1,n}$ І ЇЇ ПІДАЛГЕБРИ

О. В. ОСТРОВСЬКА, І. І. ЮРИК

Підалгебри алгебри $AC(1,n)$ для невеликих розмірностей n вивчались в ряді робіт (див. [1]). В цих роботах класифікація підалгебр проводилась з точністю до спряженості відносно групи внутрішніх автоморфізмів. В даній роботі запропоновано принципово новий метод класифікації підалгебр алгебри $AC(1,n)$ довільної розмірності n за рангами, який не вимагає при цьому повної класифікації підалгебр алгебри $AC(1,n)$. Алгебра Лі $AC(1,n)$ групи $C(1,n)$ конформних перетворень простору $R_{1,n}$ породжується векторними полями [1]:

$$P_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_a}, \quad J_{oa} = x_o\frac{\partial}{\partial x_a} + x_a\frac{\partial}{\partial x_o}, \quad J_{ab} = x_b\frac{\partial}{\partial x_a} - x_a\frac{\partial}{\partial x_b},$$
$$D = -x_0\frac{\partial}{\partial x_0} - x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - \cdots - x_n\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad K_\alpha = 2g_\alpha^\beta x_\beta x_\upsilon\frac{\partial}{\partial x_\upsilon} g^{\beta^\upsilon} x_\beta x_\upsilon \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

де $\alpha = 0,1,\ldots,n;\ a,b = 1,\ldots,n$.

Нехай $O(2,n+1)$ — група ізометрій псевдоевклідового простору $R_{2,n+1}$ з метрикою p_{ab} $(a,b = 1,\ldots,n+3)$, де $p_{11} = p_{22} = -p_{33} = \cdots = -p_{n+3,n+3} = 1$, $p_{ab} = 0,\ a \neq b$. Позначимо через I_{ab} матрицю порядку $n+3$, яка має одиницю на перетині a-го рядка і b-го стовпця і нулі на всіх решта місцях $(a,b = 1,\ldots,n+3)$. Базис алгебри $AO(2,n+1)$ утворюють матриці:

$$\Omega_{12} = I_{12} - I_{21}, \quad \Omega_{ab} = -I_{ab} + I_{ba}, \qquad (a < b;\ a,b = 3,\ldots,n+3),$$
$$\Omega_{ia} = -I_{ia} - I_{ai}, \qquad (i = 1,2;\ a = 3,\ldots,n+3).$$

Вони зв'язані між собою такими комутаційними співвідношеннями:

$$[\Omega_{ab}, \Omega_{cd}] = p_{ad}\Omega_{bc} + p_{bc}\Omega_{ad} - p_{ac}\Omega_{bd} - p_{bd}\Omega_{ac},$$

де $a,b,c,d = 1,\ldots,n+3$. Алгебра $AO(2,n+1)$ діє в псевдоевклідовому просторі $R_{2,n+1}$, який складається з $(n+3)$-мірних стовпців, способом множення стовпця $X \in R_{2,n+1}$ на матрицю $A \in AO(2,n+1)$.

Відображення $f\colon AO(2,n+1) \to AC(1,n)$ алгебри Лі $AO(2,n+1)$ на алгебру Лі $C(1,n)$, яке задається за допомогою таких співвідношень:

$$J_{\alpha\beta} = f(\Omega_{\alpha+2,\beta+2}), \quad P_\alpha = f(\Omega_{1,\alpha+2} - \Omega_{\alpha+2,n+3}),$$
$$K_\alpha = f(\Omega_{1,\alpha+2} + \Omega_{\alpha+2,n+3}), \quad D = -f(\Omega_{1,n+3}),$$

є ізоморфізмом. Тому $AO(2,n+1)$ і $C(1,n)$ можна ототожнювати. Отже в результаті отримаємо два набори позначень для одного і того ж базису:

$$\Omega_{\alpha+2,\beta+2} = J_{\alpha\beta},\ \Omega_{1,\alpha+2} = \frac{1}{2}(P_\alpha + K_\alpha),\ \Omega_{\alpha+2,n+3} = \frac{1}{2}(K_\alpha - P_\alpha),\ \Omega_{1,n+3} = -D,$$
$$(\alpha < \beta;\ \alpha,\beta = 0,1,...,n). \tag{1}$$

Задача класифікації підалгебр $AC(1,n)$ з точністю до $C(1,n)$-спряженості рівносильна задачі класифікації підалгебр алгебри $AO(2,n+1)$ з точністю до $O(2,n+1)$-спряженості. Це означає: якщо Φ_1 — повний список $C(1,n)$-неспряжених підалгебр алгебри $AC(1,n)$, то замінивши генератори в кожній підалгебрі $L \in \Phi_1$ відповідними генераторами алгебри $AO(2,n+1)$ згідно із співвідношеннями (1), отримаємо повний список Φ_2 $O(2,n+1)$-неспряжених підалгебр алгебри $AO(2,n+1)$, і навпаки. Група $O(2,n+1)$ породжує дію алгебри $AO(2,n+1)$ на просторі $R_{2,n+1}$. Це дозволяє множину всіх підалгебр алгебри $AO(2,n+1)$ розбити на такі три класи. **1).** Перший клас складається із всіх підалгебр, які не мають в $R_{2,n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів. **2).** Другий клас складається із підалгебр, які мають в $R_{2,n+1}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності одиниця. Цей клас підалгебр, які спряжені з підалгебрами розширеної алгебри Пуанкаре $A\tilde{P}(1,n)$, що породжена генераторами P_α, $J_{\alpha\beta}$, D, де $\alpha < \beta$, $\alpha,\beta = 0,1,\ldots,n$. **3).** Третій клас складають підалгебри, які мають в $R_{2,n+1}$ інваріантний ізотропний підпростір розмірності два і не мають в $R_{2,n+1}$ інваріантних ізотропних підпросторів розмірності одиниця. Нехай $Aopt(1,n)-$підалгебра алгебри $AC(1,n)$ породжена генераторами P_a, G_a, M, T, J_{ab}, C, S, Z, $(a < b;\ a,b = 1,\ldots,n-1)$, де

$$G_a = J_{oa} - J_{an}, C = -(J_{on} + D), Z = J_{on} - D, S = \frac{1}{2}(K_o + K_n).$$

Цей клас складають ті підалгебри алгебри $Aopt(1,n)$, які не спряжені з підалгебрами алгебри $A\tilde{P}(1,n)$.

Підалгебри різних класів неспряжені відносно групи $C(1,n)$-автоморфізмів і кожен з них інваріантний при дії будь-якого автоморфізму. Тому доцільно проводити класифікацію підалгебр кожного класу окремо. При цьому виключимо з розгляду ті підалгебри алгебри $AC(1,n)$, які з точністю до спряженості містять $P_o + P_n$ або P_n.

Література

[1] В.І.Фущич, Л.Ф. Баранник, А.Ф. Баранник (1991). *Підгруповий аналіз груп Галілея, Пуанкаре і редукція нелінійних рівнянь.* Київ: Наук. думка.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: olyushka.ostrovska@gmail.com

НУХТ, Київ, Україна
Email address: i.yu@ukr.net

ЛАНЦЮГОВІ A_3-ДРОБИ І ТЕОРІЯ ЛОКАЛЬНО СКЛАДНИХ ФУНКЦІЙ З ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

М. В. ПРАЦЬОВИТИЙ, С. П. РАТУШНЯК

Нехай $A = \{c_0, c_1, c_2\}$ — множина чисел таких, що $0 < c_0 < c_1 < c_2$, яка називається алфавітом; $L_A = A \times A \times A \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту A. Нас цікавлять тополого-метричні властивості множини значень усіх нескінченних ланцюгових дробів виду $[0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, де $(a_n) \in L_A$.

Теорема 1. *Множина G_A значень усіх нескінченних ланцюгових дробів виду $[0; a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, де $(a_n) \in L_A$, є континуальною і обмеженою, причому*

$$\min G_A = [0; (c_2, c_0)] = \frac{\sqrt{c_0c_2(c_0c_2+4)} - c_0c_2}{2c_2} \equiv d_0, \tag{1}$$

$$\max G_A = [0; (c_0, c_2)] = \frac{\sqrt{c_0c_2(c_0c_2+4)} - c_0c_2}{2c_0} \equiv d_1. \tag{2}$$

Приклад. Якщо $A = \{\frac{1}{2}, 1, 8\}$, то $\min G_A = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$, $\max G_A = 4(\sqrt{2}-1)$.

Теорема 2. *Множина G_A значень всіх нескінченних ланцюгових дробів виду $[0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, де $(a_n) \in L_A$, є досконалою.*

У доповіді будуть наведені умови, при яких множина G_A є відрізком і при цьому система A-зображення чисел має нульову надлишковість.

Використовуючи традиційний для трисимвольних систем кодування дійсних чисел алфавіт $A_3 = \{0, 1, 2\}$, здійснимо перекодування чисел множини G_A:

$$x = [0; a_1, a_2, ..., a_n, ...] \equiv \Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n...}, \text{ де } \alpha_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } a_n = c_0, \\ 1, & \text{якщо } a_n = c_1, \\ 2, & \text{якщо } a_n = c_2, n \in N. \end{cases}$$

Означення 1. Нехай $(b_1, b_2, ..., b_m)$ — фіксований набір елементів алфавіту A_3. Множина $\Delta'_{b_1b_2...b_m}$ всіх ланцюгових дробів виду $[0; b_1, b_2, ..., b_m, \alpha_1, \alpha_2, ...]$, де $(\alpha_n) \in A_3$, називається *циліндром рангу m з основою $b_1b_2...b_m$*.

Циліндр є обмеженою фігурою, причому
$A = \min \Delta'_{b_1...b_m} = [0; b_1, ..., b_m, (a, b)]$, $B = \max \Delta'_{b_1...b_m} = [0; b_1, ..., b_m, (b, a)]$, де

$$a = \begin{cases} c_0, & \text{якщо } m - \text{ непарне}, \\ c_2, & \text{якщо } m - \text{ парне}, \end{cases} \quad b = \begin{cases} c_0, & \text{якщо } m - \text{ парне}, \\ c_2, & \text{якщо } m - \text{ непарне}. \end{cases}$$

Згідно з означенням циліндра має місце рівність: $\Delta^{A_3}_{b_1b_2\ldots b_m} = \bigcup\limits_{i=0}^{2} \Delta^{A_3}_{b_1b_2\ldots b_m i}$.

Означення 2. Мінімальний відрізок, що містить циліндр $\Delta'_{b_1b_2\ldots b_m}$, тобто $[A;B]$, називається *циліндричним відрізком* $\Delta_{b_1b_2\ldots b_m}$ рангу m з основою $b_1b_2...b_m$.

Довжина циліндра $|\Delta^{A_3}_{b_1b_2\ldots b_m}| = |\Delta^{A_3}_{b_1b_2\ldots b_m(c_0c_2)} - \Delta^{A_3}_{b_1b_2\ldots b_m(c_2c_0)}|$.

Теорема 3. *Якщо A_3-зображення чисел має нульову надлишковість, тобто кожне число має не більше двох зображень, то функція, означена рівністю*

$$I(x = \Delta^{A_3}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}) = \Delta^{A_3}_{[2-a_1][2-a_2]\ldots[2-a_n]\ldots} \tag{3}$$

є коректно означеною неперервною строго спадною і має нетривіальні фрактальні властивості, зокрема структурно фрактальні.

Основна увага у доповіді буде зосереджена на сингулярних, ніде не монотонних неперервних функціях, означених у термінах ланцюгового A_3-зображення. Окрема увага буде приділена класу функцій, які зберігають цифру 1, а також функції функції f, означеної рівностями $f(\Delta^{A_3}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$, де

$$\beta_1 = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{якщо } \alpha_1 \neq 0, \end{cases} \quad \beta_{n+1} = \begin{cases} 1-\beta_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} = \alpha_n, \\ \beta_n, & \text{якщо } \alpha_{n+1} \neq \alpha_n, \end{cases}$$

$\beta_i \in A_2 = \{0,1\}$, $\Delta^{A_2}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots} = [0; \frac{\beta_1+1}{2}, \frac{\beta_2+1}{2}, ..., \frac{\beta_n+1}{2}, ...]$.

Література

[1] Дмитренко С.О., Кюрчев Д.В., Працьовитий М.В. (2009). Ланцюгове A_2–зображення дійсних чисел. Український математичний журнал, том 61, № 4. с. 452–463.

[2] Працьовитий М.В. (2022). *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування.* Київ: Наукова думка, 316с.

[3] M. Pratsiovytyi, Y. Goncharenko, I. Lysenko, S. Ratushniak (2023). Finite A_2-continued fractions in the problems of rational approximations of real numbers. Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal, vol. 75, no. 6, June 2023, pp. 849–58, doi:10.37863/umzh.v75i6.7413.

[4] Ратушняк С.П. (2023). Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгового A_2-зображення чисел. Буковинський математичний журнал, Т. 11, № 1, с. 126–133.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна; Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Email address: `prats4444@gmail.com`

Інститут математики НАН України, Київ, Україна; УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Email address: `ratush404@gmail.com`

ВЛАСТИВІСТЬ ОБОРОТНОЇ МАТРИЦІ

А. М. РОМАНІВ

Нехай R – комутативна область елементарних дільників [1], $M_n(R)$ – кільце $(n \times n)$ матриць над R, $GL_n(R)$ – повна лінійна група. Для матриці $A \in M_n(R)$ існують такі оборотні $(n \times n)$ матриці P_A та Q_A, що

$$P_A A Q_A = \mathrm{E} = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, 0, \ldots, 0), \ \varepsilon_i | \varepsilon_{i+1}, \ \ i = 1, \ldots, k-1.$$

Матрицю E називають формою Сміта, елементи $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ – інваріантними множниками, а матриці P_A та Q_A – лівою та правою перетворювальними матрицями для матриці A.

Оборотні матриці відіграють важливу роль при дослідженні багатьох матричних задач. Зокрема, для того, щоб форма Сміта добутку двох матриць володіла властивістю мультиплікативності необхідно та достатньо, щоб деяку оборотну матрицю можна було розкласти у вигляді добутку співмножників із заданими властивостями [2].

Нехай $D, C \in M_n(R)$ – неособливі матриці, найбільші спільні дільники мінорів $n-1$ порядку яких є дільниками одиниці кільця R. Тоді $D \sim \Phi = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \varphi)$ та $C \sim \Psi = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \psi)$. Зауважимо, що символ $\sim$ позначає еквівалентність матриць.

Теорема 1. *Нехай R – комутативна область елементарних дільників. Нехай, далі, $\Phi = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \varphi)$ та $\Psi = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \psi)$ – неособливі матриці і $S = \|s_{ij}\|_1^n \in GL_n(R)$. Тоді*

$$\Phi S \Psi \sim \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \delta_{n-1}, \delta_n),$$

де $\delta_{n-1} | \delta_n$.

Література

[1] Kaplansky I. (1949). Elementary divisor and modules. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 66, pp. 464–491.

[2] Shchedryk V.P. (2021). *Arithmetic of matrices over rings.* Kyiv: Akademperiodyka.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

Email address: romaniv_a@ukr.net

НАБЛИЖЕННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ НА КЛАСАХ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ У СЕНСІ ВЕЙЛЯ–НАДЯ ФУНКЦІЙ З ВИСОКИМ ПОКАЗНИКОМ ГЛАДКОСТІ

А. С. СЕРДЮК, І. В. СОКОЛЕНКО

Нехай C і L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — простори 2π-періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$.

Нехай, далі, $W^r_{\beta,p}, r > 0, \beta \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — класи 2π-періодичних функцій f, що зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)B_{r,\beta}(t)dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

з ядрами Вейля–Надя $B_{r,\beta}(t)$ вигляду

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r > 0, \beta \in \mathbb{R},$$

функцій φ, що задовольняють умову $\varphi \in B^0_p = \left\{h \in L_p : \|h\|_p \leqslant 1, \int\limits_{-\pi}^{\pi} h(t)dt = 0\right\}$.

Класи $W^r_{\beta,p}$ називають класами Вейля–Надя, а функцію φ в зображенні (1) позначають через f^r_β і називають (r,β)-похідною в сенсі Вейля–Надя функції f.

При довільних $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r > 1/p$, $\beta \in \mathbb{R}$ має місце вкладення $W^r_{\beta,p} \subset C$.

Нехай $f \in C$. Через $\tilde{S}_{n-1}(f;x)$ позначатимемо тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у рівномірно розподілених вузлах $x^{(n-1)}_k = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x^{(n-1)}_k) = f(x^{(n-1)}_k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Розглядається задача про дослідження поведінки величин

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W^r_{\beta,p}; x) = \sup_{f \in W^r_{\beta,p}} \left| f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f;x) \right|,$$

для довільних $x \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r > 2$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$.

Виконано за часткової фінансової підтримки за проєктами H2020-MSCA-RISE-2019, project number 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology) та VolkswagenStiftung project “From Modeling and Analysis to Approximation”.

Мають місце такі твердження.

Теорема 1. *Нехай* $r > 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді має місце формула*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W^r_{\beta,1}; x) = \left|\sin\frac{(2n-1)x}{2}\right| n^{-r}\left(\frac{2}{\pi(1-e^{-r/n})} + \mathcal{O}(1)\delta_{r,n}\right),$$

де $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо всіх розглядуваних параметрів,*

$$\delta_{r,n} = \begin{cases} 1 + \dfrac{n}{r(r-2)}, & 2 < r \leqslant n+1, \\ \dfrac{r}{n^2}e^{-r/n}, & n+1 \leqslant r \leqslant n^2, \\ e^{-r/n} & r \geqslant n^2. \end{cases}$$

Теорема 2. *Нехай* $1 < p \leqslant \infty$, $r > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$ *і* $n \in \mathbb{N}$. *Тоді за виконання умови* $r - 1 \geqslant \sqrt{n+1}$, *має місце формула*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W^r_{\beta,p}; x) = \left|\sin\frac{(2n-1)x}{2}\right| n^{-r} \times$$

$$\times\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{p'}{2}, \frac{p'}{2}; 1; e^{-2r/n}\right) + \mathcal{O}(1)\delta^*_{r,n}\right), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

де $F(a, b; c; z)$ *— гіпергеометрична функція Гаусса:*

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\frac{z^k}{k!}, \quad (x)_k := x(x+1)(x+2)...(x+k-1),$$

$$\delta^*_{r,n} = \begin{cases} \dfrac{n}{r^2}, & \sqrt{n+1} + 1 \leqslant r \leqslant n+1, \\ \dfrac{r}{n^2}e^{-r/n}, & n+1 \leqslant r \leqslant n^2, \\ e^{-r/n} & r \geqslant n^2, \end{cases}$$

а $\mathcal{O}(1)$ *— величина, рівномірно обмежена щодо всіх розглядуваних параметрів.*

Теореми 1 і 2 є інтерполяційними аналогами теореми 1 з [1] та теорем 1 і 2 з [2] для наближення сумами Фур'є функцій з класів $W^r_{\beta,p}$ в рівномірній метриці.

Література

[1] Serdyuk A.S., Sokolenko I.V. (2019). Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness. *Methods of Functional Analysis and Topology*, vol. 25, no. 4, p. 381–387.

[2] Сердюк А.С., Соколенко І.В. (2022). Наближення сумами Фур'є на класах диференційовних у сенсі Вейля–Надя функцій із високим показником гладкості *Укр. мат. журн.*, т. 74, № 5, с. 685–700.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: serdyuk@imath.kiev.ua

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: sokol@imath.kiev.ua

ПРО ОДНУ СИНГУЛЯРНУ ФУНКЦІЮ ЗАДАНУ В ТЕРМІНАХ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РЕНЬЄ

Д. Ю. СКАКУН

Для кожного двійкового вектору $(j_1; j_2; ...; j_k)$ розглянемо сукупність W відрізків $\delta_{j_1 j_2 \dots j_k}$, які володіють наступними властивостями:

1) $\delta_0 \cup \delta_1 = [0; 1]$;

2)для кожного двійкового вектору $(j_1; j_2; ...; j_k)$: $\delta_{j_1 j_2 \dots j_k 0} \cup \delta_{j_1 j_2 \dots j_k 1} = \delta_{j_1 j_2 \dots j_k}$, $\delta_{j_1 j_2 \dots j_k 0} \cap \delta_{j_1 j_2 \dots j_k 1}$ є одноточковою множиною;

3) для довільного нескінченного двійкового вектору $(j_1; j_2; ...; j_k; ...)$:

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda(\delta_{j_1 j_2 \dots j_k}) = 0.$$

Зрозуміло, що для кожного $x \in [0; 1]$ існує нескінченний двійковий вектор $(j_1; j_2; ...; j_k; ...)$ такий, що для кожного натурального k:$x \in \delta_{j_1 j_2 \dots j_k}$. У цьому випадку можливо говорити, про деяке представлення числа x: $x = \Delta^W_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}$, яке за виключенням деякої зчисленної множиною є однозначним. Відповідне представлення є представленням Реньє [2] для деякої функції f. Нехай (η_k) послідовність випадкових величин, які набувають значень $0; 1$ з додатними ймовірностями $p_0; p_1$ відповідно. Розглянемо випадкову величину $\eta = \Delta^W_{\eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n \dots}$.

Теорема 1. *Нехай для довільного нескінченного двійкового вектору* $(j_1; j_2; ...; j_k; ...)$*:*

$$\lim_{k \to +\infty} (\lambda(\delta_{j_1 j_2 \dots j_k}))^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}.$$

Якщо $p_0 \neq \frac{1}{2}$, *то* $F_\eta(x)$ *є строго зростаючою на* $[0; 1]$ *сингулярною функцією.*

Література

[1] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. (1992). *Фрактальные множества, функции, распределения.* Киев: Наук. думка.

[2] Renyi A. (1957). Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, no. 8, pp. 477–493.

[3] Jessen B., Wintner A. Distribution function and Riemann Zeta-function. *Trans.Amer.Math.Soc.*, no. 38, pp. 48–88.

Український державний університет імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна
Email address: skakund2020@gmail.com

НАЙКРАЩІ БІЛІНІЙНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

К. В. СОЛІЧ

Досліджуються питання білінійних наближень класів $S^{\Omega}_{p,\theta}B$ функцій багатьох змінних із заданою функцією $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку $l \in \mathbb{N}$, що задовольняє, так звані, умови Барі – Стєчкіна (S) і (S_l) [1].

Нехай $L_q(\pi_{2d})$, $q = (q_1, q_2)$ — множина функцій $f(x, y)$, $x, y \in \pi_d$, зі скінченною мішаною нормою $\|f(x, y)\|_{q_1,q_2} = \| \, \|f(\cdot, y)\|_{q_1}\|_{q_2}$, де норма обчислюється спочатку в просторі $L_{q_1}(\pi_d)$ по змінній $x \in \pi_d$, а потім від результату — по змінній $y \in \pi_d$ в просторі $L_{q_2}(\pi_d)$. Для $f \in L_q(\pi_{2d})$ означимо найкраще білінійне наближення порядку M:

$$\tau_M(f)_{q_1,q_2} := \inf_{u_j(x),v_j(y)} \|f(x, y) - \sum_{j=1}^{M} u_j(x)v_j(y)\|_{q_1,q_2},$$

де $u_j \in L_{q_1}(\pi_d)$, $v_j \in L_{q_2}(\pi_d)$. Сформулюємо деякі з отриманих результатів.

Теорема 1. *Нехай* $1 \leqslant p \leqslant 2 \leqslant q_1 < \infty$, $1 \leqslant q_2, \theta \leqslant \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з* $\alpha > \frac{1}{p}$, *а також умову* (S_l), $l \geqslant [\frac{1}{p}]$. *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце порядкова рівність*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B} \tau_M(f)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Наслідок 1. *Поклавши в теоремі 1* $\theta = \infty$ *отримаємо порядкове співвідношення*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p}H)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n})2^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Теорема 2. *Нехай* $2 \leqslant p < q_1 < \infty$, $1 \leqslant q_2, \theta \leqslant \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з* $\alpha > \frac{1}{2}$, *а також умову* (S_l), $l \in \mathbb{N}$. *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$ *справедлива оцінка*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B} \tau_M(f)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n})n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Теорема 3. *Нехай* $2 \leqslant q_1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q_2, \theta \leqslant \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з* $\alpha > \max\{0; \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\}$. *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце порядкова рівність*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p,\theta}B)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in S^{\Omega}_{p,\theta}B} \tau_M(f)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Зауваження 1. У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^r$ і відповідних обмеженнях на параметр r з теорем 1–3 отримуємо результати для класів $B^r_{p,\theta}$, які встановлені в роботі [2].

Теорема 4. *Нехай* $2 \leqslant q_1 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_2, \theta \leqslant \infty$ *і* $\Omega(t) = \omega(\prod_{j=1}^{d} t_j)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > \max\left\{0, \frac{1}{\theta} - \frac{1}{2}\right\}$, *а також умову* S_l). *Тоді для будь-якої послідовності* $M = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ *натуральних чисел такої, що виконується співвідношення* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце порядкова рівність*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{\infty,\theta}B)_{q_1,q_2} := \sup_{f \in S^{\Omega}_{\infty,\theta}B} \tau_M(f)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})}.$$

Зауваження 2. У випадку $\Omega(t) = \prod_{j=1}^{d} t_j^r$ і відповідних обмеженнях на параметр r з теореми 4 отримуємо результати для класів $B^r_{\infty,\theta}$, які встановлені в роботі [3].

Наслідок 2. *Поклавши в теоремах 2–4* $\theta = \infty$ *отримаємо порядкове співвідношення*

$$\tau_M(S^{\Omega}_{p}H)_{q_1,q_2} \asymp \omega(2^{-n}) n^{\frac{d-1}{2}}.$$

Література

[1] Бари Н.К., Стечкин С.Б. (1956). Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Тр. Моск. мат. о-ва.*, 5, с. 483–522.

[2] Романюк А.С. (2006). Билиннейные и тригонометрические приближения классов Бесова $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных. *Изв. РАН. Сер. матем.*, Т. 70, № 2., с. 69–98.

[3] Романюк А.С., Романюк В.С. (2010). Асимптотические оценки наилучших тригонометрических и билинейных приближений классов функций нескольких переменных. *Укр. мат. журн.*, Т. 62, № 4., с. 536–551.

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: solichkatia@gmail.com

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ ІЗ ЗАДАНОЮ МАЖОРАНТОЮ МІШАНИХ МОДУЛІВ НЕПЕРЕРВНОСТІ

О. В. ФЕДУНИК-ЯРЕМЧУК

Нехай $L_\infty(\mathbb{T}^d)$, де $\mathbb{T}^d = \prod\limits_{j=1}^{d} [0, 2\pi)$, – простір 2π-періодичних по кожній змінній суттєво обмежених функцій $f(x) = f(x_1, ..., x_d)$ з нормою

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{T}^d)} = \|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)|.$$

Досліджуються класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, які розглянуті в [1]. Нехай Ω – задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l деякого спеціального виду:

$$\Omega(t) = \Omega(t_1, ..., t_d) = \begin{cases} \prod\limits_{j=1}^{d} \dfrac{t_j^r}{\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+^{b_j}}, & \text{якщо } t_j > 0,\ j = \overline{1, d}; \\ 0, & \text{якщо } \prod\limits_{j=1}^{d} t_j = 0, \end{cases} \tag{1}$$

де розглядаються логарифми за основою 2 і $\left(\log \frac{1}{t_j}\right)_+ = \max\left\{1, \log \frac{1}{t_j}\right\}$.

Вважаємо також, що $b_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1, d}$, і $0 < r < l$. Це означає, що для функції Ω виду (1) виконуються умови Барі-Стєчкіна [2] (позначаємо (S) і (S_l)).

При певному виборі функції Ω класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з відомими класами Нікольського H^r_p та Бєсова $B^r_{p,\theta}$ [3, 4].

Одержано точні за порядком оцінки близьких до Фур'є-поперечників апроксимаційних характеристик класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі $L_\infty(\mathbb{T}^d)$. Для функціональних класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ці величини означаються наступним чином:

$$d^B_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_\infty) = \inf_{G \in L_M(B)_\infty} \sup_{f \in F \cap D(G)} \|f - Gf\|_\infty . \tag{2}$$

Через $L_M(B)_\infty$ тут позначено множину лінійних операторів, які задовольняють умови:

а) область визначення $D(G)$ цих операторів містить всі тригонометричні поліноми, а їх область значень міститься у підпросторі розмірності M простору $L_\infty(\mathbb{T}^d)$;

б) існує число $B \geqslant 1$ таке, що для всіх векторів $k = (k_1, \ldots, k_d)$, $k_j \in \mathbb{Z}$, $j = \overline{1, d}$, виконується нерівність $\left\|Ge^{i(k,\cdot)}\right\|_2 \leqslant B$.

Зазначимо, що до $L_M(1)_2$ належать оператори ортогонального проектування на простори розмірності M.

Сформулюємо деякі з одержаних результатів. Спочатку розглянемо випадок $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_d < r$.

Теорема 1. *Нехай* $1 \leqslant \theta < \infty$, *а* $\Omega(t)$ *– функція вигляду* (1)*. Тоді при* $0 < r < l$ *справедлива оцінка*

$$d_M^B(B_{\infty,\theta}^{\Omega}, L_\infty) \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_d+(d-1)\left(r+1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Нехай тепер $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_\nu < r < b_{\nu+1} \leqslant \ldots \leqslant b_d$. У цьому випадку виконується твердження.

Теорема 2. *Нехай* $1 \leqslant \theta < \infty$, *а* $\Omega(t)$ *– функція вигляду* (1)*. Тоді при* $0 < r < l$, $b_j > r + 1$, $j = \nu + 1, \ldots, d$, *має місце співвідношення*

$$d_M^B(B_{\infty,\theta}^{\Omega}, L_\infty) \asymp M^{-r}\big(\log M\big)^{-b_1-\ldots-b_\nu+(\nu-1)\left(r+1-\frac{1}{\theta}\right)}.$$

Зауваження 1. Аналоги теорем 1 і 2 для класів H_∞^Ω встановлені М.М. Пустовойтовим. Відповідні результати для класів $B_{\infty,\theta}^r$ одержані А.С. Романюком [5].

Знайдено також точні за порядком оцінки величини (2) при деяких інших співвідношеннях між параметрами $p, r, b_1, \ldots, b_d$.

Література

[1] Yongsheng S., Heping W. (1997). Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. *Proc. Steklov Inst. Math.* Vol. 219., pp. 350–371.

[2] Бари Н.К., Стечкин С.Б. (1956). Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций. *Тр. Моск. мат. о-ва.* vol. 5, pp. 483–522.

[3] Бесов О.В. (1961). Исследование одного семейства функциональных пространств в связи с теоремами вложения и продолжения. *Тр. мат. ин-та АН СССР.* vol. 60, pp. 42–61.

[4] Никольский С.М. (1951). Неравенства для целых функций конечной степени и их приложение в теории дифференцируемых функций многих переменных. *Тр. Мат. ин-та АН СССР.* vol. 38, pp. 244–278.

[5] Романюк А.С. (2001). Оценки аппроксимативных характеристик классов $B_{p,\theta}^r$ периодических функций многих переменных в пространстве L_q. II. *Укр. мат. журн.* vol. 53, no. 10, pp. 1402–1408.

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: fedunyk.o.v@gmail.com

РАЦІОНАЛЬНІ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ КЛАСУ ГЕРГЛОТЦА

Л. І. ФІЛОЗОФ

Класом Герглотца називають множину функцій, аналітичних в одиничному крузі $|z| < 1$, дійсна частина яких невід'ємна при $|z| < 1$.

Функції цього класу вивчали Каратеодорі, Рісс Ф., Герглотц та інші. Зокрема, незалежно один від другого, Герглотц і Рісс Ф. одержали наступну характеристику таких функцій: для того, щоб функція $f(z)$ належала до класу Герглотца, необхідно і достатньо, щоб вона мала вигляд

$$f(z) = iImf(0) + \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t),\ |z| < 1,$$

де $\mu(t)$ – неспадна обмежена на відрізку $[0, 2\pi]$ функція.

Ми будемо розглядати випадок

$$f(z) = \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t),$$

де $\mu(t)$ – неспадна функція на $[\alpha, 2\pi - \alpha]$.

Введемо наступні позначення: $l = \{e^{it} : \alpha \leqslant t \leqslant 2\pi - \alpha\}$ – дуга одиничного кола $|z| = 1$, D_l – область, яка доповнює l до розширеної комплексної площини.

Нехай функція $\varphi_1(z)$ відображає область D_l на внутрішність одиничного круга так, що $\varphi_1(0) = 0$, а функція $\varphi_2(z)$ – область D_l на внутрішність одиничного круга таким чином, що $\varphi_2(\infty) = 0$.

Нехай $\{Q_n(z)\}$ – послідовність многочленів ортогональних на l відносно міри $d\mu(t)$,

$$P_n(z) = \int_\alpha^{2\pi-\alpha} (Q_n(z) - Q_n(e^{it})) \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t).$$

Функція $f(z) = \int_\alpha^{2\pi-\alpha} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} d\mu(t)$ аналітична в області D_l.

Позначимо через $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ всі ті натуральні числа, для яких $Q_{n_k}(0) \neq 0$.

Теорема 1. *Якщо $\mu'(t) > 0$ майже скрізь на $[\alpha, 2\pi-\alpha]$, то раціональні функції $R_k(z)$ рівномірно збігаються всередині області D_l до функції $f(z)$, причому*

$$\varlimsup_{k\to\infty} |f(z) - R_k(z)|^{\frac{1}{n_k}} \leqslant |\varphi_1(z)| \cdot |\varphi_2(z)|,\ z \in D_l$$

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: `filozof.leontii@vnu.edu.ua`

ПРО АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ ОДНОГО КЛАСУ РОЗПОДІЛІВ ТИПУ ДЖЕССЕНА–ВІНТНЕРА

Б. В. ХАЛЕЦЬКИЙ

Для характеристичної функції $f_\xi(t) = M(e^{it\xi})$ випадкової величини ξ розглянемо значення:

$$L_\xi = \limsup_{|t|\to+\infty} |f_\xi(t)|.$$

Якщо розподіл ξ є дискретним, то відомо [1], що $L_\xi = 1$, адже $f_\xi(t)$ є майже періодичною функцією. Якщо розподіл ξ абсолютно неперевний, то за теоремою Рімана–Лебега $L_\xi = 0$. Якщо розподіл ξ є сингулярним, то відомо [2], що L_ξ може набувати довільного наперед заданого значення з відрізку $[0; 1]$.

Нехай $s \in N, s > 1$, (η_k) — послідовність незалежних дискретно розподілених випадкових величин, які набувають значень $0 < a_k$ з ймовірностями p_{0k}, p_{1k} відповідно, де (a_n) — обмежена послідовність натуральних чисел. Розглянемо випадкову величину

$$\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\eta_k}{s^k}.$$

За теоремою Джессена–Вінтнера [3] розподіл η є чистим.

Теорема 1. *Рівність $L_\eta = 1$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова:*

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p_{0(n+k)}p_{1(n+k)}}{s^{2k}} = 0.$$

Література

[1] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. (1992). *Фрактальные множества, функции, распределения.* К.: Наук. думка.

[2] Schvartz L. (1941). Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 212, pp. 418–421.

[3] Jessen B., Wintner A. (1935). Distribution function and Riemann Zeta-function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, no. 38, pp. 48–88.

Центральноукраїнський державний університет імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна

Email address: aumykun@gmail.com

III

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS

LONG-TIME BEHAVIOR OF STOCHASTIC TWO-SPECIES MUTUALISM MODEL WITH JUMPS

O. D. BORYSENKO, O. V. BORYSENKO

Mutualism occurs when one species provides some benefit in exchange for some benefit. Population systems may suffer abrupt environmental perturbations, such as epidemics, fires, earthquakes, etc. So it is natural to introduce Poisson noises into the population model for describing such discontinuous systems. We consider the stochastic mutualism model with jumps generated by centered and non-centered Poisson measures. So, we take into account not only "small" jumps, corresponding to the centered Poisson measure, but also the "large" jumps, corresponding to the non-centered Poisson measure. This model is driven by the system of stochastic differential equations

$$\begin{aligned} &dx_i(t) = x_i(t)\left[\frac{a_{i1}(t) + a_{i2}(t)x_{3-i}(t)}{1 + x_{3-i}(t)} - c_i(t)x_i(t)\right]dt + \sigma_i(t)x_i(t)dw_i(t) \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}} \gamma_i(t,z)x_i(t^-)\tilde{\nu}_1(dt,dz) + \int\limits_{\mathbb{R}} \delta_i(t,z)x_i(t^-)\nu_2(dt,dz), \\ &x_i(0) = x_{i0} > 0,\ i = 1,2. \end{aligned} \tag{1}$$

where $x_1(t)$ and $x_2(t)$ denote population densities of each species at time t, $x_i(t^-), i = 1,2$ are the left limits of $x_i(t), i = 1,2$, $w_i(t), i = 1,2$ are independent standard one-dimensional Wiener processes, $\tilde{\nu}_1(t,A) = \nu_1(t,A) - t\Pi_1(A)$, $\nu_i(t,A), i = 1,2$ are independent Poisson measures, which are independent on $w_i(t), i = 1,2$, $E[\nu_i(t,A)] = t\Pi_i(A), i = 1,2$, $\Pi_i(A), i = 1,2$ are a finite measures on the Borel sets A in $\mathbb{R}$. We will use the notations $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$, $X_0 = (x_{10}, x_{20})$, $|X(t)| = \sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)}$, $\mathbb{R}^2_+ = \{X \in \mathbb{R}^2 :\ x_1 > 0, x_2 > 0\}$

$$\beta_i(t) = \sigma_i^2(t)/2 + \int\limits_{\mathbb{R}} [\gamma_i(t,z) - \ln(1 + \gamma_i(t,z))]\Pi_1(dz) - \int\limits_{\mathbb{R}} \ln(1 + \delta_i(t,z))]\Pi_2(dz),$$

$i = 1,2$. For the bounded, continuous functions $f_i(t), t \in [0,+\infty), i = 1,2$, let us denote $f_{i\sup} = \sup_{t\geqslant 0} f_i(t), f_{i\inf} = \inf_{t\geqslant 0} f_i(t), i = 1,2, f_{\max} = \max\{f_{1\sup}, f_{2\sup}\}$, $f_{\min} = \min\{f_{1\inf}, f_{2\inf}\}$. We need the following assumption.

Assumption 1. It is assumed, that $a_{ij}(t), i,j = 1,2$, $c_i(t), \sigma_i(t), i = 1,2$ are bounded, continuous on t functions, $a_{ij}(t) > 0, i,j = 1,2$, $c_{\min} > 0$, $\gamma_i(t,z), \delta_i(t,z), i = 1,2$ are continuous on t functions and $\ln(1 + \gamma_i(t,z)), \ln(1 + \delta_i(t,z)), i = 1,2$ are bounded, $\Pi_i(\mathbb{R}) < \infty, i = 1,2$.

In what follows we will assume that Assumption 1 holds.

Definition 1. The solution $X(t)$ to the system (1) is said to be stochastically ultimately bounded, if for any $\varepsilon \in (0,1)$, there is a positive constant $\chi = \chi(\varepsilon) > 0$, such that for any initial value $X_0 \in \mathbb{R}^2_+$, the solution to the system (1) has the property that $\limsup_{t\to\infty} \mathrm{P}\{|X(t)| > \chi\} < \varepsilon$

Theorem 1. *There exists a unique global (no explosion in a finite time) solution $X(t)$ to the system (1) for any initial value $X(0) = X_0 > 0$, $\mathrm{P}\{X(t) \in \mathbb{R}^2_+\} = 1$ and $X(t)$ is stochastically ultimately bounded.*

Definition 2. The solution $X(t)$ to the system (1) is said to be stochastically permanent if for any $\varepsilon > 0$, there are positive constants $H = H(\varepsilon)$, $h = h(\varepsilon)$ such that for $i = 1,2$ $\liminf\limits_{t\to\infty} \mathrm{P}\{x_i(t) \leqslant H\} \geqslant 1-\varepsilon$, $\liminf\limits_{t\to\infty} \mathrm{P}\{x_i(t) \geqslant h\} \geqslant 1-\varepsilon$, for any inial value $X_0 \in \mathbb{R}^2_+$.

Theorem 2. *If $\min\limits_{i=1,2} \inf\limits_{t\geqslant 0}(a_{i\min}(t) - \beta_i(t)) > 0$, where $a_{i\min}(t) = \min\limits_{j=1,2} a_{ij}(t)$, $i = 1,2$, then the solution $X(t)$ to the system (1) with initial condition $X_0 \in \mathbb{R}^2_+$ is stochastically permanent.*

Theorem 3. *If $\bar{p}_i^* = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t p_{i\max}(s)ds < 0$, where $p_{i\max}(s) = a_{i\max}(s) - \beta_i(s)$, $a_{i\max}(t) = \max_{j=1,2} a_{ij}(t)$, $i = 1,2$, then the solution $X(t)$ to the system (1) with initial condition $X_0 \in \mathbb{R}^2_+$ will be extinct: $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0$ almost surely $i = 1,2$.*

Theorem 4. *If $\bar{p}_i^* = 0, i = 1,2$, then the solution $X(t)$ to the system (1) with initial condition $X_0 \in \mathbb{R}^2_+$ will be non-persistence in the mean: $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t x_i(s)ds = 0$ a.s., $i = 1,2$.*

Theorem 5. *If $\bar{p}_{i*} = \liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t p_{i\min}(s)ds > 0$, where $p_{i\min}(s) = a_{i\min}(s) - \beta_i(s)$, $a_{i\min}(t) = \min_{j=1,2} a_{ij}(t)$, $i = 1,2$, then*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int\limits_0^t x_i(s)ds \geqslant \frac{\bar{p}_{i*}}{c_{i\sup}} > 0, \ a.s.$$

Therefore, the solution $X(t)$ to the system (1) with initial condition $X_0 \in \mathbb{R}^2_+$ will be strongly persistence in the mean.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
Email address: borysenko13101953@gmail.com

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
Email address: oborisenko1373@gmail.com

SOME MODELS OF COUNTING PROCESSES WITH RANDOM TIME-CHANGE

K. V. BUCHAK, L. M. SAKHNO

Stochastic processes with random time-change has become in recent years a well established modern branch of the theory of stochastic processes with numerous applications in financial, biological, physical, technical and other fields of research.

Rich class of models is provided by time-changed Poisson processes, of which the most intensively studied are two fractional extensions of the Poisson process, namely, the space-fractional and time-fractional Poisson processes obtained by choosing a stable subordinator or its inverse in the role of time correspondingly. In paper [1] Poisson processes time changed by the general inverse subordinators were studied and the governing equations for their marginal distributions were presented.

Recently, generalized counting processes, their time-changed versions and fractional extensions have been intensively investigated, including Poisson and Skellam processes of order k, Pólya–Aeppli process of order k, Bell–Touchard process, Poisson-logarithmic process and their fractional extensions.

We consider several particular models of generalized counting processes time-changed by a general inverse subordinator, characterize their distributions and present governing equations for them, which obtained similarly to those presented in [1]. The equations are given in terms of the generalized Caputo–Djrbashian derivatives, which called also convolutions-type derivatives with respect to Bernštein functions. These generalized derivatives were introduced in [2] and [3] and have been widely used to describe various advanced stochastic models.

References

[1] Buchak K., Sakhno L. (2019). On the governing equations for Poisson and Skellam processes time-changed by inverse subordinators. *Theor. Probab. Math. Stat.,* vol. 98, pp. 91–104.

[2] Kochubei A.N. (2011). General fractional calculus, evolution equations, and renewal processes. *Integr. Equ. Oper. Theory*, vol. 71, pp. 583–600.

[3] Toaldo B. (2015). Convolution-type derivatives, hitting-times of subordinators and time-changed C_0-semigroups. *Potential Anal.*, vol. 42, pp. 115–140.

Uzhgorod National University, Uzhgorod, Ukraine
Email address: `kristina.kobilich@gmail.com`

Taras Shevchenko National University of Kyis, Kyiv, Ukraine
Email address: `lyudmyla.sakhno@knu.ua`

FILTERING PROBLEM FOR PERIODICALLY CORRELATED SEQUENCES WITH MISSING OBSERVATIONS

I. I. GOLICHENKO, M. P. MOKLYACHUK

We consider the problem of optimal linear estimation of the functional $A\zeta = \sum_{j\in Z_s} a(j)\zeta(-j)$, which depends on the unknown values of a periodically correlated with period T stochastic sequence $\zeta(-j)$, $j \in Z_s = \{T+1, T+2, \dots\} \setminus \bigcup_{i=1}^{s} \{M_i \cdot T + 1, \dots, (M_i + N_i) \cdot T\}$. Estimation is based on observations of the sequence $\zeta(j) + \theta(j)$ at points $j \in \{\dots, -(T+2), -(T+1)\} \setminus S, S = \bigcup_{i=1}^{s} \{-(M_i + N_i) \cdot T, \dots, -M_i \cdot T - 1\}$, where $\theta(j)$ is an uncorrelated with $\zeta(j)$ periodically correlated sequence.

The filtering problem is considered under the condition of spectral certainty and under the condition of spectral uncertainty. In the case of spectral certainty the spectral density matrices $f(\lambda)$ and $g(\lambda)$ of the T-variate stationary sequences $\vec{\zeta}(n)$ and $\vec{\theta}(n)$, obtained by T-blocking of T-PC sequences $\zeta(j)$ and $\theta(j)$, [1], respectively, are suppose to be known exactly. With the help of Hilbert space projection method formulas for calculating the spectral characteristic and the mean-square error of the optimal estimate of the functional are proposed. In the case of spectral uncertainty the spectral density matrices are not exactly known while a class $D = D_f \times D_g$ of admissible spectral densities is given. Using the minimax (robust) estimation method we derived relations that determine the least favorable spectral densities and the minimax spectral characteristic of the optimal estimate of the functional $A\zeta$.

References

[1] Hurd H.L., Miamee A. (2007). *Periodically correlated random sequences.* Wiley Series in Probability and Statistics, 384 p.

[2] Moklyachuk M.P., Golichenko I.I. (2016). *Periodically correlated processes estimates.* LAP LAMBERT Academic Publishing, 308 p.

[3] Masyutka O.Yu., Moklyachuk M.P., Sidei M.I. (2019). Filtering of multidimensional stationary sequences with missing observations. *Carpathian Mathematical Publications*, vol. 11, no. 2, pp. 361–378.

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
Email address: idubovetska@gmail.com

Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, Ukraine
Email address: mmp@univ.kiev.ua

DICKMAN-TYPE ORNSTEIN–UHLENBECK PROCESSES

D. GRAHOVAC, A. KOVTUN, N. N. LEONENKO, A. PEPELYSHEV

We consider the generalised Dickman random variable D_θ, which has the Laplace transform

$$\mathbb{E}e^{-sD_\theta} = \exp\{-\theta \int_0^1 (1-e^{-su})\frac{du}{u}\},\ s>0,$$

where the parameter θ is positive. We denote the generalised Dickman distribution by $GD(\theta)$.

Theorem 1. *Let $N_\theta(t),\ t \geqslant 0$ be a homogeneous Poisson process with parameter θ, and $X(t),\ t \geqslant 0$ is the stationary solution of the stochastic differential equation*

$$dX(t) = -\lambda X(t) + dN_\theta(\lambda t),\ t \geqslant 0,$$

then $X(t),\ t \geqslant 0$ has $GD(\theta)$ marginal distribution.

We consider further an independently scattered random measure Λ defined on $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ with a cumulant function

$$\kappa_{\Lambda(A)}(z) = \log \mathbb{E}e^{iz\Lambda(A)} = m(A)\kappa_L(z) = (\pi \times \mathrm{Leb})(A)\kappa_L(z) \tag{1}$$

for $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, where π is some probability measure on $\mathbb{R}_+$, Leb is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}$, and $\kappa_L(z) = \theta(e^{iz}-1)$.

Thus we can define a process

$$X^*(t) = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi t+s}\mathbb{1}_{[0,\infty)}(\xi t - s)\Lambda(d\xi, ds). \tag{2}$$

The process $X^*(t)$ defined by (2) with $\Lambda(\cdot,\cdot)$ given by (1) has Dickman $GD(\theta)$ marginal distribution and we will further refer to it as a supDOU process.

The correlation function of $X^*(t)$ can given by

$$r(\tau) = \mathrm{Corr}(X(t), X(t+\tau)) = \int_0^\infty e^{-\tau\xi}\pi(d\xi), \quad \tau \geqslant 0.$$

Thus it follows that

$$\int_0^\infty r(\tau)d\tau = \int_0^\infty \frac{\pi(d\xi)}{\xi}, \tag{3}$$

and this integral can be both finite and infinite.

Consider first a supOU process $X^*(t)$ given by (2) which exhibits a short range dependence. Then, according to ([5, Theorem 3.4]), the following limit holds

$$\frac{1}{T^{1/2}}\int_0^{Tt}(X^*(s)-\theta)ds \xrightarrow{\text{fdd}} \tilde{\sigma}B(t),$$

where "$\xrightarrow{\text{fdd}}$" means convergence of all finite-dimensional distributions, $\{B(t), t \geqslant 0\}$ is the standard Brownian motion and $\tilde{\sigma}^2 = \theta \int_0^\infty \frac{\pi(d\xi)}{\xi} < \infty$.

Let us consider alternatively a supOU process $X^*(t)$ such that $X^*(t)$ exhibits a long-range dependence. Assume further that measure π has density p such that $p(x) \sim \alpha l(x^{-1})x^{\alpha-1},\ as\ x \to 0$ for some $\alpha \in (0,1)$, where l is a function slowly varying at infinity. It follows from [5, Theorem 3.2] that

$$\left\{\frac{1}{T^{1/(1+\alpha)}l^\sharp(T)^{1/(1+\alpha)}}\int_0^{Tt}(X^*(s)-\theta)ds\right\} \xrightarrow{\text{fdd}} \{S_{1+\alpha}(t)\}, \quad as\ T\to\infty,$$

where $l^\sharp$ is de Bruijn conjugate of $1/l(x^{1/(1+\alpha)})$ and $\{S_{1+\alpha}\}$ is the $1+\alpha$ - stable Lévy process such that

$$\kappa_{S_{1+\alpha}(1)}(z) = -|z|^{1+\alpha} \times \left(i\text{sign}(z)\frac{\theta}{1+\alpha}\Gamma(1-\alpha)e^{-i\frac{\pi\alpha}{2}\text{sign}(z)}\right).$$

References

[1] Barndorff-Nielsen, O. E. (2001). *Superposition of Ornstein–Uhlenbeck type processes.* Theory of Probability & Its Applications, 45(2), 175-194.

[2] Barndorff-Nielsen, O. E., Leonenko, N. N. (2005). *Spectral properties of superpositions of Ornstein–Uhlenbeck type processes.* Methodology and computing in applied probability, 7, 335–352.

[3] Caravenna, F., Sun, R., Zygouras, N. (2019). *The Dickman subordinator, renewal theorems, and disordered systems.* Electronic Journal of Probability

[4] Penrose, M. D., Wade, A. R. (2004). *Random minimal directed spanning trees and Dickman-type distributions.* Advances in Applied Probability, 36(3), 691–714. ISO 690

[5] Grahovac, D., Leonenko, N. N., Taqqu, M. S. (2019). *Limit theorems, scaling of moments and intermittency for integrated finite variance supOU processes.* Stochastic Processes and their Applications, 129(12), 5113–5150.

[6] Grahovac, D., Leonenko, N. N., Sikorskii, A., Taqqu, M. S. (2019). *The unusual properties of aggregated superpositions of Ornstein–Uhlenbeck type processes.*

Department of Mathematics, Josip Juraj Strossmayer University of Osijek
Email address: dgrahova@mathos.hr

School of Mathematics, Cardiff University
Email address: kovtuna@cardiff.ac.uk

School of Mathematics, Cardiff University
Email address: leonenkon@cardiff.ac.uk

School of Mathematics, Cardiff University
Email address: pepelyshevan@cardiff.ac.uk

CONSISTENCY OF LOCAL-LINEAR REGRESSION ESTIMATOR FOR OBSERVATIONS FROM MIXTURE

D. D. HORBUNOV, R. E. MAIBORODA

We consider data described by the model of mixture with varying concentrations. Each subject belongs to one of M sub-populations (components of the mixture). The distribution of the bivariate feature $\xi_j = (X_j, Y_j)$ of the j-th subject is defined by the nonparametric regression model:

$$Y_j = g^{(\kappa_j)}(X_j) + \varepsilon_j,\ j = \overline{1,n},$$

where κ_j is a number of component which j-th object belongs to, $g^{(m)}$ is the unknown regression function to the m-th component, ε_j is centered regression error with finite conditional variance $\sigma^2_{(m)}$ conditioning on m-th component, for any $m = \overline{1,M}$. The true values of κ_j are unknown, but the mixing probabilities $p^{(m)}_{j:n} = \mathbf{P}\{\kappa_j = m\}$, $j = \overline{1,n}$, $m = \overline{1,M}$, are known. The distribution of X_j is dominated by Lebesgue measure with corresponding densities $f^{(m)}$, conditioned on the m-th component, for any $m = \overline{1,M}$. These density functions are unknown. Random variables X_j, ε_j $j = \overline{1,n}$ are considered mutually independent when the sequence of κ_j is fixed.

In this presentation we consider a nonparametric weighted locally linear estimator for $g^{(k)}$, proposed in [1].

Let $\Gamma_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n p^k_{j:n} p^l_{j:n}\right)_{k,l=1}^M$ be a Gram matrix of the set of concentration vectors $p^m = (p^m_{1:n}, \dots, p^m_{n:n})$, $m = \overline{1,M}$. Suppose that $\{p^m\}_{m=1}^M$ are linearly independent, then $\det \Gamma_n \neq 0$. The weighting coefficients $a^m_{j:n}$, defined by a formula

$$a^m_{j:n} = \frac{1}{\det \Gamma_n} \sum_{m=1}^M (-1)^{m+k} \gamma_{km} p^m_{j:n},$$

where γ_{km} is k,m-th minor of Γ_n, are called the *minimax coefficients*. The main properties of minimax coefficients are given in [2].

As outlined above, in order to estimate unknown regression function $g^{(m)}$, we will use *local-linear estimator* with weighting on a corresponding mixture component:

$$\hat{g}^{(m)}(x_0) = \frac{\sum_{j=1}^n \tilde{w}^m_{j:n} Y_j}{\sum_{j=1}^n \tilde{w}^m_{j:n}}, \tag{1}$$

where

$$\tilde{w}^m_{j:n} = (\hat{s}^m_2(x_0) - \hat{s}^m_1(x_0)(X_j - x_0)) a^m_{j:n} w^{x_0}_{j:n},$$

$$\hat{s}_l^m(x_0) = \sum_{j=1}^{n} a_{j:n}^m w_{j:n}^{x_0} (X_j - x_0)^l, \; w_{j:n}^{x_0} = K((X_j - x_0)/h).$$

The estimator (1) uses minimax coefficients $a_{j:n}^m$ and kernel function $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

We will say that K is a finite bounded kernel if there exist $\delta > 0$ and $C_K > 0$, such that $|K(x)| < C_K$ for any $|x| \leqslant \delta$, and $K(x) = 0$ for $|x| > \delta$.

The consistency conditions of the weightened local-linear estimator are given in the following theorem.

Theorem 1. *Let $m = \overline{1, M}$ be a fixed number of component. Assume that*

(1) *x_0 is a continuity point of $f^{(m)}$ and $g^{(m)}$,*
(2) *$h = h_n$, such that $h_n \to 0$ and $nh_n \to +\infty$ as $n \to \infty$,*
(3) *K is a finite bounded kernel,*
(4) *Functions $g^{(k)}$, $f^{(k)}$ are bounded for all $k = \overline{1, M}$,*
(5) *$f^{(m)}(x_0) > 0$,*
(6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(z)dz \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 K(z)dz - (\int_{-\infty}^{+\infty} zK(z)dz)^2 \neq 0$,
(7) *There exists $c_0 > 0$, such that $\det \Gamma_n \geqslant c_0$ for any $n \geqslant 1$.*

Then $\hat{g}_n^{(m)}(x_0)$ is a consistent estimator of $g^{(m)}(x_0)$, i.e. the following convergence in probability holds

$$\hat{g}_n^{(m)}(x_0) \to^P g^{(m)}(x_0), \; n \to \infty.$$

References

[1] Горбунов Д.Д., Майборода Р.Є. (2023). Крос-валідація у локально-лінійній регресії для спостережень з суміші. *Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Серія фізико-математичі науки.* №1, ст. 37–43.

[2] Майборода Р.Є., Сугакова О.В. (2008). *Оцінювання та класифікація за спостереженнями із суміші.* Київ: ВПЦ «Київський університет», 213 ст.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
Email address: danielhorbunov@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
Email address: rostmaiboroda@gmail.com

BERMUDAN OPTION PRICING USING ALMOST-EXACT SCHEME UNDER HESTON-TYPE MODELS

M. KALICANIN DIMITROV, M. DIMITROV, A. MALYARENKO, Y. NI

A Bermudan option is a American-style financial option that can only be early-exercised on a set of predetermined dates prior to maturity. While using Monte-Carlo simulation method for Bermudan option pricing, it is efficient to use an exact simulation scheme so that the simulation is done only for the dates of early-exercising. Such an exact scheme exists for the classical Black-Scholes model since the corresponding stochastic differential equation has an analytical solution. For the more recent Heston model with one stochastic volatility process, there is a so-called Almost Exact Scheme (AES) which uses the non-central chi-square probability distribution for the variance process.

This paper focuses on pricing Bermudan options under Heston-type stochastic volatility models using an AES scheme for simulations. The models under consideration are the traditional Heston model with one stochastic volatility and the Double Heston model with two stochastic volatilities. We derive analytically the AES scheme for the Double Heston model and investigate numerically the advantages of using the AES scheme under both the Heston and the Double Heston model. The paper shows that the AES scheme works well when the number of simulated steps is equal to the number of exercise dates, making it efficient.

References

[1] Hull J.C. (2003). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson Education India.

[2] Oosterlee C.W., Grzelak L.A. (2019). *Mathematical Modeling and Computation in Finance: With Exercises and Python and Matlab Computer Codes*. World Scientific.

[3] Feller W. (1951). Two singular diffusion problems. *Annals of Mathematics*, pp. 173–182.

[4] Christoffersen P., Heston S., Jacobs K. (2009). The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well. *Management Science*, vol. 55, no. 12, pp. 1914–1932.

[5] Kleijnen J.P., Ridder A., Rubinstein R. (2010). Variance reduction techniques in Monte Carlo methods.

[6] Longstaff F.A., Schwartz E.S. (2001). Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, vol. 14, no. 1, pp. 113–147.

[7] Dattoli G. (2000). Generalized polynomials, operational identities and their applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 118, no. 1-2, pp. 111–123.

[8] Haentjens T., In't Hout K.J. (2015). ADI schemes for pricing American options under the Heston model. *Applied Mathematical Finance*, vol. 22, no. 3, pp. 207–237.

[9] Zvan R., Forsyth P.A., Vetzal K.R. (1998). Penalty methods for American options with stochastic volatility. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 91, no. 2, pp. 199–218.

[10] Ikonen S., Toivanen J. (2009). Operator splitting methods for pricing American options under stochastic volatility. *Numerische Mathematik*, vol. 113, pp. 299–324.
[11] Persson J., von Sydow L. (2010). Pricing American options using a space-time adaptive finite difference method. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 80, no. 9, pp. 1922–1935.
[12] Oosterlee C.W. (2003). On multigrid for linear complementarity problems with application to American-style options. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, vol. 15, no. 1, pp. 165–185.
[13] Clarke N., Parrott K. (1996). The multigrid solution of two-factor American options. Research Report 96-16. Oxford Computing Laboratory, Oxford.
[14] Vellekoop M., Nieuwenhuis H. (2009). A tree-based method to price American options in the Heston model. *The Journal of Computational Finance*, vol. 13, no. 1, pp. 1.
[15] Fang F., Oosterlee C.W. (2011). A Fourier-based valuation method for Bermudan and barrier options under Heston's model. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, vol. 2, no. 1, pp. 439–463.
[16] Zhang S.M., Feng Y. (2019). American option pricing under the double Heston model based on asymptotic expansion. *Quantitative Finance*, vol. 19, no. 2, pp. 211–226.

Division of Mathematics and Physics, Mälardalen University, Västerås, Sweden
Email address: mara.kalicanin.dimitrov@mdu.se

Division of Mathematics and Physics, Mälardalen University, Västerås, Sweden
Email address: marko.dimitrov@mdu.se

Division of Mathematics and Physics, Mälardalen University, Västerås, Sweden
Email address: anatoliy.malyarenko@mdu.se

Division of Mathematics and Physics, Mälardalen University, Västerås, Sweden
Email address: ying.ni@mdu.se

ESTIMATES OF MULTIDIMENSIONAL THRESHOLD FOR TWO-CLASS CLASSIFICATION PROBLEM

O. O. KUBAYCHUK

Object classification by its numerical characteristic is an important theoretical problem and has practical significance. We assume that the object may belong to one of two prescribed classes.

An unknown class number containing object O is denoted by $ind(O)$. A classification rule (briefly, classifier) is a function $g : R^n \to \{1, 2\}$, that assigns a value to $ind(O)$ by using characteristic ξ. In general, classification rule is defined as a general measurable function, but we reduce the consideration to classifier, described in [1]. Next, the a priori probabilities $p_i = P(ind(O) = i),\ i = 1, 2$ are assumed to be known. The characteristic ξ is assumed to be random, and its distribution depends on $ind(O)$: $P(\xi(O) < x|ind(O) = i) = H_i(x),\ i = 1, 2$. The distributions H_i are unknown, but they have continuous densities h_i. These functions can be estimated by the data $\Xi_N = (\xi_{j:N})_{j=1}^N$, which is a sample from a mixture with varying concentration, where $\xi_{j:N}$ are independent if N is fixed.

To estimate H_i, we use weighted empirical distribution function in [3]. One can apply the kernel estimators from [4] to estimate the densities h_i.

The empirical Bayesian classification (EBC) and minimization of the empirical risk (MER) are widely used methods to estimate the best threshold. To construct the empirical Bayesian estimator, one determines the set T_N of all solutions of the equation (3) in [1], and next we are building the estimate of best multidimensional threshold. The minimal empirical risk estimator is constructed in [2]. The convergence in probability of EBC and MER-estimators is proved in [1] and [2], accordingly.

References

[1] Kubaychuk O. (2020). EBC-Estimator of multidimensional Bayesian threshold in case of two classes. *Jour. of Statistical Theoty and Applications*, vol. 19, no. 3, pp. 342–351.

[2] Kubaychuk O. (2022). MER-Estimator of multidimensional Bayesian threshold in two-class classification problem. *Advances and Applications in Statistics*, vol. 81, pp. 71–84.

[3] Maiboroda R. (2003). *Statistical Analysis of Mixtures. A course of luctures.* Kyiv: Kyiv University.

[4] Sugakova O. (1999). Asymptotics of a kernel estimators and their derivatives constructed from observations of a mixture with varying concentrations. *Theor. Probability Math. Statist.*, vol. 59, pp. 161–171.

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
Email address: o.kubaichuk@kpi.ua

INHOMOGENEOUS DIOPHANTINE APPROXIMATION ON M_0-SETS WITH DENOMINATORS OF ARBITRARY GROWTH RATE

V. PAVLENKOV, E. ZORIN

Given a real number $\gamma \in [0,1]$, approximation function $\psi : \mathbb{N} \to [0,1]$ and natural number $q \in \mathbb{N}$, let

$$E(q,\gamma,\psi) := \{x \in [0,1] : \|qx - \gamma\| \leqslant \psi(q)\},$$

where $\|\alpha\| := \min\{|\alpha - m| : m \in \mathbb{Z}\}$ denotes the distance from $\alpha \in \mathbb{R}$ to the nearest integer. For any sequence $\mathcal{A} = (q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ of natural numbers, consider the counting function

$$R(x,N) = R(x,N;\gamma,\psi,\mathcal{A}) := \#\big\{1 \leqslant n \leqslant N : x \in E(q_n,\gamma,\psi)\big\}.$$

Also consider the standard set of inhomogeneous ψ-well approximable real numbers

$$W_{\mathcal{A}}(\gamma;\psi) := \{x \in [0,1] : \|q_n x - \gamma\| \leqslant \psi(q_n) \text{ for infinitely many } n \in \mathbb{N}\}.$$

We recall that the set F is called an M_0*-set* if it supports a non-atomic probability measure μ whose Fourier transform $\widehat{\mu}$ vanishes at infinity (such a measure μ is called Rajchman measure).

We will present a quantitative result on the size of counting function $R(x,N)$ for arbitrary Rajchman measure μ under some balance condition between the decay rate of it Fourier transform $\widehat{\mu}$ and the growth rate of denominators sequence $\mathcal{A}$. The statement of our main theorem uses the following definition.

Definition 1. Let $\mathcal{A} = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be an increasing sequence of natural numbers and let $\alpha \in (0,1)$ be a real number. We say that $\mathcal{A}$ is *α-separated* if there exists $m_0 \in \mathbb{N}$ such that, for all $m,n \in \mathbb{N}$, $m_0 \leqslant m < n$, the set of solutions $(s,t) \in \mathbb{N}^2$ of the following system of Diophantine inequalities

$$\begin{cases} 1 \leqslant |sq_m - tq_n| < q_m^{\alpha}, \\ s \leqslant m^5, \end{cases}$$

is empty.

V. Pavlenkov is supported by the British Academy in partnership with the Academy of Medical Sciences, the Royal Academy of Engineering, the Royal Society and Cara under the *Researchers at Risk Fellowships* Award RAR\100132.

Theorem 1. *Let μ be a non-atomic probability measure supported on a subset F of $[0,1]$. Let $\mathcal{A} = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be an α-separated increasing sequence of natural numbers for some $\alpha \in (0,1)$. Suppose there exists a real constant $\rho > 2$ so that for any $s \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$*

$$|\widehat{\mu}(sq_n^\alpha)| = O\ (n^{-\rho}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Then for all given $\gamma \in [0,1]$, $\psi : \mathbb{N} \to [0,1]$ and for any $\varepsilon > 0$ the counting function $R(x,N)$ satisfies

$$R(x,N) \ = \ 2\Psi(N) + O\Big((\Psi(N) + E(N))^{1/2} (\log(\Psi(N) + E(N) + 2)\,)^{2+\varepsilon}\Big)$$

for μ-almost all $x \in F$, where

$$\Psi(N) := \sum_{n=1}^{N} \psi(q_n)$$

and

$$E(N) \ := \sum\sum_{1\leqslant m<n\leqslant N} (q_m, q_n)\ \min\left\{\frac{\psi(q_m)}{q_m}, \frac{\psi(q_n)}{q_n}\right\},$$

here (q_m, q_n) is the gcd of natural numbers q_m and q_n.

Theorem 1 generalizes famous result from the Metric Theory of Diophantine Approximation, namely Khintchine-Szüsz Theorem (see [1, 4]) that provides the 0 and 1 law for Lebesgue measure of the sets $W_{\mathbb{N}}(\gamma;\psi)$. From that point of view Theorem 1 provides the 0 and 1 law for $\mu(W_{\mathcal{A}}(\gamma;\psi) \cap F)$ with arbitrary Rajchman measure μ, supported on F. From other point of view Theorem 1 provides a quantitative result on the size of counting function $R(x,N)$, so it is a Schmidt type (see [3]) result. Also it is worth noting that similar to Theorem 1 statements were obtained in [2], but under strictly quicker than the polynomial growth conditions of denominators sequence $\mathcal{A}$, whereas we constructed the example of sequence $\mathcal{A} = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ with polynomial growth satisfying all conditions of Theorem 1.

References

[1] A. Khintchine (1924). Einige Sätze über Kettenbrüiche mit Anwendugen auf die Theorie der diophantischen Approximationen. Math. Ann. 92, 115–125.
[2] A. Pollington, S. Velani, A. Zafeiropoulos, E. Zorin (2022). Inhomogeneous Diophantine Approximation on M_0-sets with restricted denominators. IMRN Vol. 2022, Issue 11, 8571–8643.
[3] W.M. Schmidt (1964). Metrical theorems on fractional parts of sequences. Trans. Amer. Math. Soc., 110, 493–518.
[4] P. Szüsz (1958). Über die metrische Theorie der diophantischen Approximationen. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 9, 177–193.

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine; Department of Mathematics, University of York, York, England, UK
Email address: pavlenkovvolodymyr@gmail.com

Department of Mathematics, University of York, York, England, UK
Email address: evgeniy.zorin@york.ac.uk

ASYMPTOTIC NORMALITY OF ESTIMATORS FOR ALL PARAMETERS IN THE VASICEK MODEL BY DISCRETE OBSERVATIONS

O. D. PRYKHODKO, K. V. RALCHENKO

We focus on the Vasicek interest rate model [3]. It is described by the following stochastic differential equation

$$dX_t = (\alpha - \beta X_t)\,dt + \gamma dW_t, \tag{1}$$

where $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ are constants and W is a standard Brownian motion.

The Vasicek model helps to evaluate interest rates in the future, thus this model has wide practical applications. So we should have good techniques for parameter estimation. For continuous-time observations it is known how to estimate all three parameters: γ can be evaluated almost surely with the help of realized quadratic variations; then α and β are estimated using the maximum likelihood method or the least squares method, see, e.g., [1].

We investigate estimators for all parameters of the equation (1) for discrete-time observations. In this case, we fix the step size $h > 0$ and consider the following data:

$$X_0, X_h, X_{2h}, \dots, X_{nh}.$$

We analyze properties of the next three statistics:

$$\xi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}, \qquad \eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}^2, \qquad \zeta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_{kh}X_{(k+1)h}.$$

In paper [2] the following estimators for the parameters α, β and γ were obtained:

$$\hat\beta_n = \frac{1}{h}\log^+ \frac{\eta_n - \xi_n^2}{\zeta_n - \xi_n^2}, \qquad \hat\alpha_n = \xi_n\hat\beta_n, \qquad \hat\gamma_n^2 = 2\hat\beta_n\left(\eta_n - \xi_n^2\right), \tag{2}$$

where

$$\log^+ x = \begin{cases} \log x, & x > 1, \\ 0, & x \leqslant 1. \end{cases}$$

Also in [2] strong consistency of the estimators (2) has been proven.

Theorem 1. *The following convergence holds in distribution as $n \to \infty$:*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \xi_n - \mathbf{E}\xi_n \\ \eta_n - \mathbf{E}\eta_n \\ \zeta_n - \mathbf{E}\zeta_n \end{pmatrix} \to \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma),$$

where the covariance matrix Σ *is*

$$\frac{\gamma^2}{2\beta}\cdot\frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{2\alpha}{\beta} & \frac{2\alpha}{\beta}\\ \frac{2\alpha}{\beta} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\gamma^2}{\beta}\cdot\frac{1+e^{-2\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2}+\frac{2\gamma^2}{\beta}\cdot\frac{e^{-\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2}\\ \frac{2\alpha}{\beta} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2}+\frac{2\gamma^2}{\beta}\cdot\frac{e^{-\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2} & \frac{4\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\gamma^2}{2\beta}\cdot\frac{1+4e^{-2\beta h}-e^{-4\beta h}}{(1+e^{-\beta h})^2}\end{pmatrix}$$

Theorem 2. *The following convergence holds a. s. as* $n\to\infty$*:*

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat\alpha_n-\alpha\\ \hat\beta_n-\beta\\ \hat\gamma_n^2-\gamma_n^2\end{pmatrix}\to\mathcal{N}(\mathbf{0},\Gamma)$$

i.e., $\hat\alpha_n$*,* $\hat\beta_n$*,* $\hat\gamma_n$ *are asymptotically normal estimators of the parameters* α*,* β*,* γ *respectively.*

In this case the covariance matrix has the following form

$$\Gamma=g'(\theta)\Sigma(g'(\theta))^\top=\begin{pmatrix}\Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13}\\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \Gamma_{23}\\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}\end{pmatrix},$$

where

$$\Gamma_{11}=\frac{\alpha^2}{h^2\beta^2}e^{\beta h}(e^{\beta h}-e^{-\beta h})+\frac{\beta\gamma^2}{2}\cdot\frac{1+e^{-\beta h}}{1-e^{-\beta h}},\quad \Gamma_{12}=\frac{\alpha}{h^2\beta}e^{\beta h}(e^{\beta h}-e^{-\beta h}),$$

$$\Gamma_{13}=\frac{\alpha\gamma^2}{h^2\beta^2}e^{\beta h}(e^{\beta h}-e^{-\beta h})+\frac{2\alpha\gamma^2}{h\beta},\quad \Gamma_{21}=\frac{\alpha}{h^2\beta}e^{\beta h}(e^{\beta h}-e^{-\beta h}),$$

$$\Gamma_{22}=\frac{1}{h^2}e^{\beta h}(e^{\beta h}-e^{-\beta h}),\quad \Gamma_{23}=\frac{\gamma^2}{h^2\beta}e^{\beta h}(e^{\beta h}-e^{-\beta h})+\frac{2\gamma^2}{h},$$

$$\Gamma_{31}=\frac{\alpha\gamma^2}{h^2\beta^2}e^{\beta h}(e^{\beta h}-e^{-\beta h})+\frac{2\alpha\gamma^2}{h\beta},\quad \Gamma_{32}=\frac{\gamma^2}{h^2\beta}e^{\beta h}(e^{\beta h}-e^{-\beta h})+\frac{2\gamma^2}{h},$$

$$\Gamma_{33}=\frac{\gamma^4}{h^2\beta^2}e^{\beta h}(e^{\beta h}-e^{-\beta h})+\frac{4\gamma^4}{h\beta}+2\gamma^4\cdot\frac{e^{\beta h}+e^{-\beta h}}{e^{\beta h}-e^{-\beta h}}.$$

References

[1] Kutoyants Y.A. Statistical inference for ergodic diffusion processes. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag London, 2004. 482 p.

[2] Prykhodko O., Ralchenko K. Strongly consistent estimation of all parameters in the Vasicek model by discrete observations // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics, 2022, No. 4, 26–30.

[3] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure // Journal of Financial Economics. 1977. Vol. 5, no. 2. P. 177–188.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
Email address: prykhodkood@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine
Email address: kostiantynralchenko@knu.ua

OPTIMAL CONTROL OF SOME TYPES SPDES DRIVEN BY TIME-SPACE BROWNIAN MOTION

O. A. TYMOSHENKO

Given a subset U of $\mathbb{R}$ and we denote by $\mathcal{U}$ the set of all $\mathcal{F}_{t,x}$-adapted control processes $u = \{u(t,x), t < T, x < X\}$ valued in U. We define the set of admissible control processes $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ to be the collection of all $\mathcal{F}_{t,x}$-adapted processes with values in U.

Let f and g be given functions and consider the performance functional

$$J(u) = E\Big[\int_{R_Z} f(\zeta, Y(\zeta), u(\zeta))d\zeta + g(Y(Z))\Big],$$

where $R_Z = [0,T] \times [0,X]$, with $Z = (T,X)$ for some given $T > 0, X > 0$, and the state Y of the system is described by the equation

$$Y(z) = Y(t,x) = Y(0) + \int_{R_z} \alpha(\zeta, Y(\zeta), u(\zeta))d\zeta + \int_{R_z} \beta(\zeta, Y(\zeta), u(\zeta))B(d\zeta), \quad z \leqslant Z, \tag{1}$$

where $R_z = [0,t] \times [0,x]$ when $z = (t,x)$, and u denotes a control process. Here we define a stochastic integral with respect to the two-parameter Brownian motion such as in Cairoli [1] denoted by:

$$\int \phi(z)B(dz).$$

We also will use another type of stochastic integral [2] denoted by

$$\int \psi(z,z')B(dz)B(dz').$$

We want to find $\widehat{u} \in \mathcal{A}$ such that

$$J(\widehat{u}) = \sup_{u \in \mathcal{A}} J(u). \tag{2}$$

The maximum principle approach to this problem is to introduce the following associated Hamiltonian:

$$H(z,y,u,p,q,\overline{q}) = f(z,y,u) + \alpha(z,y,u)p + \beta(z,y,u)[q + 2\overline{q}], \tag{3}$$

Work supported by the MSC4Ukraine grant (1233636).

where $\overline{q}(z) = \int_{R_z} q(\zeta)d\zeta$ and the adjoint processes $(p,q,r) = (p(t,x), q(t,x), r(t,x,t',x'))$ are given by the equation

$$\begin{cases} p(dz) &= -\frac{\partial H}{\partial y}(z, Y(z), p(z), q(z), \overline{q}(z))dz \\ & +q(z)B(dz) + M_r(dz), \quad 0 \leqslant (t,x) \leqslant (T,X), \\ p(Z) &= \frac{\partial g}{\partial y}(Y(Z)). \end{cases} \tag{4}$$

or, in integrated form,

$$\begin{aligned} p(z) = \frac{\partial g}{\partial y}(Y(Z)) - \int_{R_z} \frac{\partial H}{\partial y}(\zeta, Y(\zeta), p(\zeta), q(\zeta), \overline{q}(\zeta))d\zeta \\ + \int_{R_z} q(\zeta)B(d\zeta) + \iint\limits_{R_z \times R_z} r(\zeta,\zeta')B(d\zeta)B(d\zeta'), \quad z \leqslant Z. \end{aligned} \tag{5}$$

There are two versions of the maximum principle for this problem, namely the so-called *sufficient maximum principle* and the *necessary maximum principle.* We present them both

Theorem 1 (Sufficient maximum principle)**.** *Suppose $\widehat{u} \in \mathcal{A}$ with corresponding solutions $\widehat{Y}, (\widehat{p}, \widehat{q})$ of the equations above. Moreover, suppose that $y \longmapsto g(y)$ is concave and $y, u \longmapsto H(z,y,u,p,q,\overline{q})$ is concave for all $p, q, \overline{q}$ and that*

$$\sup_{v \in A} H(z, \widehat{Y}(z), v, \widehat{p}(z), \widehat{q}(z), \widehat{\overline{q}}(z)) = H(z, Y(z), \widehat{u}(z), \widehat{p}(z), \widehat{q}(z), \widehat{\overline{q}}(z)), \tag{6}$$

for some $\widehat{u} \in \mathcal{A}$. Then $\widehat{u}$ is an optimal control for problem (2)*.*

Theorem 2 (Necessary maximum principle)**.** *Suppose $\widehat{u} \in \mathcal{A}$ is optimal for Problem 2.5. Then*

$$\frac{\partial H}{\partial u}(\zeta, \widehat{Y}(\zeta), \widehat{u}(\zeta), \widehat{p}(\zeta), \widehat{q}(\zeta), \widehat{\overline{q}}(\zeta)) = 0 \textit{ for a.a. } \zeta.$$

This talk will be based on the joint results obtained with Agram N., Øksendal B., Proske F. in paper [3].

References

[1] Cairoli, R. (1972). Sur une équation différentielle stochastique. CRAS Série AB, 274, A1739-A1742.

[2] Wong, E., Zakai, M. (1974). Martingales and stochastic integrals for processes with a multi-dimensional parameter. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete, 29(2), 109-122.

[3] Agram N., Øksendal B., Proske F., Tymoshenko O. (2023). Optimal control of SPDEs driven by time-space Brownian motion. arXiv preprint arXiv:2308.00173

University of Oslo, Oslo, Norway; Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

Email address: `olenaty@mail.uio.no`

SUPREMUM DISTRIBUTION OF WEIGHTED SUM OF SUB-GAUSSIAN RANDOM PROCESSES WITH CONTINUOUS DEVIATION

R. E. YAMNENKO

Properties of of sum of independent random processes $\{X_i(t), t \in T\}$ weighted by some continuous functions $w_i(t)$ from classes $V(\varphi, \psi)$ defined on a compact set are studied in [1]. In particular, an estimate of probability of such a weigted sum to rise above some continuos monotonically increasing curve $\{f(t), t \in T\}$ by a positive level ϵ is of special interest. That is, the following probability is estimated

$$\mathbf{P}\left(\sup_{t\in T}\left[\sum_i w_i(t)X_i(t) - f(t)\right] > \epsilon\right).$$

The class $V(\varphi, \psi)$ contains ψ-sub-Gaussian random processes whose increments are φ-sub-Gaussian, where an Orlich N-function φ is subordinate to an Orlich N-function ψ.

The properties of sub-Gaussian and φ-sub-Gaussian random variables were discussed in books [2, 3]. The obtained estimate summarizes the results obtained in the paper [4].

As an example, the sum of the processes of the generalized sub-Gaussian fractional Brownian motion weighted by linear weighting functions is considered. In the future, the problem of estimating such a probability will be extended to other types of processes and random fields.

References

[1] Tykhonenko D., Yamnenko R. (2023). Supremum Distribution of Weighted Sum of Random Processes from Orlicz Spaces of Exponential Type with Continuous Deviation. *Austrian Journal of Statistics*, Vol.52(SI), Iss. pp. 94–106.

[2] Buldygin V., Kozachenko Yu. (2000). *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* AMS, Providence, RI.

[3] Василик О., Козаченко Ю., Ямненко Р. (2008). *φ-субгауссові випадкові процеси: монографія.* К.: ВПЦ "Київський університет".

[4] Kozachenko Yu., Yamnenko R. (2014). Application of φ-sub-Gaussian random processes in Queuing Theory. *Modern trends in Stochastics (Springer Optimization and Its Applications)*, – pp. 21–38.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
Email address: rostyslav.yamneko@knu.ua

СИСТЕМА РОЗРАХУНКУ СТРАХОВИХ ПРЕМІЙ З УРАХУВАННЯМ ПОПЕРЕДНІХ ПЕРІОДІВ

Т. В. АВДЄЄВА, Л. М. ІЛЛІЧЕВА

Договори страхування укладаються клієнтами для того, щоб позбутися фінансових втрат, пов'язаних з невизначеністю в настанні якихось випадкових подій. До підписання контракту й придбання страхового поліса клієнт наражається на деякий ризик, що може привести до збитків, величину яких важко передбачити. Після придбання страхового полісу і сплати деякої детермінованої суми — страхової премії — клієнт позбавляється ризику, але ризик приймає на себе страхова компанія.

При прийнятті рішення про розмір премії, яку повинен заплатити клієнт (страхувальник), багато страхових компаній використовують інформацію про кількість позовів, заявлених власником полісу протягом попередніх періодів. Вводиться система знижок за відсутність вимог — NCD-система (No Claims Discont System) [3]. Таку схему використовують при страхуванні автотранспорту, житла, медичному страхуванні. Коли власник поліса вирішує, чи звертатися з позовом, він має узяти до уваги вплив позовів на величину премії у наступні періоди.

Власник полісу не звернеться з позовом, якщо розмір виплати буде меншим, ніж наступне збільшення страхової премії. NCD-система зменшує кількість малих позовів до страхової компанії і загальну вартість позовів. NCD-система діє шляхом надання клієнтам знижок/дисконту у величині страхової премії. Зазвичай, розмір знижок залежить безпосередньо від часу, коли клієнт не звертається до страхової компанії задля відшкодування збитків. Таким чином, страхова компанія витісняє позови, вартість адміністрування яких є непропорційно високою. Тоді величини премій даної страхової компанії стають більш конкурентноспроможними [2].

У NCD-системі є дві частини: дисконтні категорії та правила переходу між категоріями. Категорії пов'язують із проміжками часу без позовів. Можна запропонувати наступний підхід до страхування, який пов'язаний із урахуванням попередніх період. Нехай періоди, коли власник полісу не звертається за відшкодуванням (не формує позовів до страхової компанії) представляють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j$ мають функцію розподілу F. Вводиться ще одна послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин: $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_j$ мають функцію розподілу G.

Після появи позову (через час ξ_1), на інтервалі часу $(\xi_1, \xi_1 + \xi_2)$ звертаються до другої послідовності випадкових величин: $\eta_1, \eta_2, \ldots$ На період часу η_2

виділяється пільгове страхування (обумовлений відсоток від запропонованого спочатку). Якщо за час пільгового страхування η_2 клієнт не подає позовів, тобто $\eta_2 \leqslant \xi_2$, то в момент $\xi_1 + \xi_2$, можна продовжити спостереження, зберігаючи умови договору страхування. Якщо ж $\eta_2 > \eta_2$, вважається, що клієнт недостатньо ретельно відноситься до дотримання умов договору, і вже можливе переведення клієнта до іншої дисконтної категорії.

Такий підхід дозволяє уникнути малих позовів до страхувальника, клієнт більш зацікавлений у збереженні свого майна, здоров'я, щоб продовжити період, вільний від позовів.

Цікаво оцінити математичне сподівання часу μ, коли така система страхування не потребуватиме перегляду умов договору [1].

Вводиться величина $\tau = \min\{k \geqslant 2 : \eta_k > \xi_k\}$, тоді $\mu = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_\tau$, де ξ_i — незалежні, однаково розподілені випадкові величини; $\{\tau \leqslant n\} \in \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n; \eta_2, \ldots, \eta_n)$. Тобто, τ — випадкова величина, яка не залежить від майбутнього. За тотожністю Вальда, $E\mu = E\tau \cdot E\xi_1$

Оскільки $\{\tau = k\} = \bigcap\limits_{j=2}^{k-1} \{\eta_j \leqslant \xi_j\} \bigcap \{\eta_k > \xi_k\}, k \geqslant 2,$

то $P(\tau = k) = q^{k-2}(1-q), k \leqslant 2, q = P(\eta_j \geqslant \xi_j) = \int dF(t)G(t+0).$

Тоді, $E\tau = \sum\limits_{k=2}^{\infty} k \cdot q^{k-2}(1-q) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}(1-q) = 1 + \dfrac{1}{1-q}.$

Для математичного сподівання випадкової величини μ, тобто, часу, коли договір страхування не потребуватиме перегляду, одержують формулу:

$$E\mu = E\xi_1 \cdot \frac{2-q}{1-q}$$

Оцінка середнього часу μ залежить від середнього часу від початку дії страхового договору до надходження першого позову клієнта та орієнтовної ймовірності події $(\eta_j \geqslant \xi_j) j = 2, 3, \ldots$, яку, у свою чергу, можна вирахувати, спираючись на історію договорів з цим клієнтом.

Тобто, при запропонованому підході до страхування можна оцінити середній час, протягом якого можна не переводити клієнта до іншої дисконтної категорії.

Література

[1] Боровков А.А. (1986). *Теория вероятностей.* М.: Наука.

[2] Зинченко Н.М. (2008). *Математичні методи в теорії ризику.* Навч. посібн. К.: Видавн.-полігр. центр «Київський університет».

[3] Hossack I.B., Pollard J.H. (2003). *Introductory statistics with applications in general insurance.* Cambridge University Press.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

Email address: avdeeva.tetyana@gmail.com

НАУ, Київ, Україна

Email address: m_ilicheva@ukr.net

ПРО РІВНОМІРНИЙ ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ МАРЦИНКЕВИЧА–ЗІГМУНДА

В. Ю. БОГДАНСЬКИЙ

Нехай $X, X_1, X_2, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з $E[X] = 0$ і $E|X|^p < \infty$, де $1 \leqslant p < 2$; $\mathcal{A}$ – сукупність вимірних за Лебегом підмножин $[0,1]$, для якої

$$\varphi(\delta) = \sup_{A \in \mathcal{A}} |A(\delta)| \to 0, \delta \to 0, \tag{1}$$

де $A(\delta)$ – δ-окіл границі множини A, $|\cdot|$ – міра Лебега. Позначимо $v_n^k(A) = |nA \cap [k-1,k]|$, $S^n(A) = \sum_{k=1}^n X_k v_n^k(A)$, $||S^n|| = \sup_{A \in \mathcal{A}} |S^n(A)|$. Питання: які додаткові умови потрібно накласти на X та $\mathcal{A}$, щоб виконувалось

$$\frac{||S^n||}{n^{1/p}} \to 0, n \to \infty, \text{м.н.} \tag{2}$$

В [1] показано, що для $p = 1$ додаткові умови не потрібні. Проте при $1 < p < 2$ неважко навести контрприклад, що показує, що навіть якщо посилити умову (1) наступним чином:

$$\exists\, C > 0\ \forall\, \delta < 1 \quad \varphi(\delta) \leqslant C\delta^{\alpha}, \tag{3}$$

де $\alpha < 1 - 1/p$, цього буде недостатньо для (2) (потрібно представити $\mathcal{A} = \cup_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_m$, де при зростанні m для $A \in \mathcal{A}_m$ зростає можлива кількість компонентів зв'язності, але посилюється обмеження зверху на міру). Якщо ж (3) виконується при $\alpha = 1$, (2) стає тривіальним (кількість компонентів зв'язності множин $A \in \mathcal{A}$ буде обмеженою спільною для всіх A константою).

Розглянемо твердження

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(P\left(\frac{||S^n||}{n^{1/p}} \geqslant \varepsilon \right) \right)^h < \infty. \tag{4}$$

Можна довести, що за певних додаткових умов на X та $\mathcal{A}$ з того, що для деякого $h > 0$ (4) виконується для кожного $\varepsilon > 0$, випливає (2) (тоді для того, щоб довести, що за цих умов і ще додатково деяких умов, що включають умову на $\varphi(\delta)$, виконується (2), буде достатньо перевірити (4)).

Припустимо, що:

(1) X симетрична;

(2) $\mathcal{A}$ є замкненою сукупністю множин у сенсі псевдометрики симетричної різниці;
(3) Якщо $A \in \mathcal{A}$ і $0 < k < 1$, то $kA \in \mathcal{A}$.

(тут додаткові умови (1) та (2) є у певному сенсі «тимчасовими»).

Використовуючи умову на $\varphi(\delta)$ (1), можна довести, що $\mathcal{A}$ у разі замкнутості буде компактом. Тоді простір неперервних функцій $W = C(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ буде банаховим. При $1 \leqslant m \leqslant n$ позначимо $S_m^n = \sum_{k=1}^m X_k v_n^k \in W$. Тоді в силу додаткової умови (3) виконується $||S_m^n|| \geqslant ||S^m||$. Звідси, оскільки для фіксованого n випадкові W-значні вектори $X_k v_n^k$ є симетричними і незалежними, то в силу теореми 2.3 з [2] $\forall t > 0$ маємо

$$P(\max_{1\leqslant m\leqslant n} ||S^m|| \geqslant t) \leqslant P(\max_{1\leqslant m\leqslant n} ||S_m^n|| \geqslant t) \leqslant 2P(||S^n|| \geqslant t).$$

Використовуючи цю нерівність, можна, аналогічно до випадку з випадковими величинами зі значеннями в $\mathbb{R}$, довести, що якщо (4) при $h = 1$ виконується для кожного $\varepsilon > 0$, то виконується (2) (спочатку доводячи, що $\forall \varepsilon > 0$ виконується $\sum_{m=1}^\infty P\left(\frac{||S^{2^m}||}{2^{m/p}} \geqslant \varepsilon\right) < \infty$, а потім $\frac{||S_n^{r(n)}||}{(r(n)/2)^{1/p}} \to 0, n \to \infty$, м.н., де $r(n)$ – найменша степінь двійки, яка не менша за n).

Далі, використовуючи нерівність (3.3) з [2], позначаючи $b_n^\varepsilon = P\left(\frac{||S^n||}{n^{1/p}} \geqslant \varepsilon\right)$, $c_n^\varepsilon = P\left(\frac{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |X_k|}{n^{1/p}} \geqslant \varepsilon\right)$, маємо:

$$b_n^{3\varepsilon} \leqslant 4(b_n^\varepsilon)^2 + c_n^\varepsilon.$$

Легко перевіряється, що $\forall \varepsilon > 0$ виконується $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} c_n^\varepsilon < \infty$. Далі, застосовуючи індукцію по m, можна довести, що якщо (4) виконується при $h = 2^m$ для всіх $\varepsilon > 0$, то воно також виконується при $h = 2^{m-1}$ для всіх $\varepsilon > 0$. Отже, виконання трьох вказаних додаткових умов на X та $\mathcal{A}$ достатньо, щоб з того, що для деякого $h > 0$ (4) виконується для кожного $\varepsilon > 0$, випливало (2).

Подяка. Автор висловлює подяку за підтримку Національному фонду досліджень України (проєкт 2020.02/0014 «Асимптотичні режими збурених випадкових блукань: на межі сучасної та класичної теорії ймовірностей»).

Література

[1] Bass Richard F., Pyke Ronald (1984). A Strong Law of Large Numbers for partial-sum processes iIndexed by sets. *Ann. Probab.*, vol. 12, no. 1, pp. 268–271.

[2] Hoffmann-Jørgensen Jørgen (1974). Sums of independent Banach space valued random variables. *Studia Mathematica*, vol. 52, no. 2, pp. 159–186.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна

Email address: vbogdanskii@ukr.net

ОЦІНКА НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ ДЛЯ ОДНІЄЇ МОДЕЛІ З ПРОЦЕСОМ ОРНШТЕЙНА–УЛЕНБЕКА

С. В. БОДНАРЧУК

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння виду

$$X_t = x - a \int_0^t X_s ds + W_t, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}$ є фіксованою точкою, $W \in \mathbb{R}$ є вінерівським процесом, $a > 0$ – невідомий параметр. Ми спостерігаємо набір значень

$$Y_k = X_{t_k} + \varepsilon_{t_k}, \quad k = 0, \dots, n, \tag{2}$$

де $t_k = kh, k = 0, 1, \dots, n$, $h = \frac{T}{n}$ та $\varepsilon_t, t \in [0,T]$ – процес, незалежний від X_t.

Наша мета – оцінити істинне значення a_0 невідомого параметра на основі спостережень $Y_{t_0}, Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}$. Для цього використаємо оцінку найменших квадратів (ОНК), яка мінімізує

$$\rho_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \left(Y_k - Y_{k-1} + aY_{k-1} \cdot h\right)^2.$$

ОНК має вигляд

$$\hat{a}_n = -\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (Y_k - Y_{k-1})Y_{k-1}}{h \sum\limits_{k=1}^{n} Y_{k-1}^2}. \tag{3}$$

Далі будемо вважати, що існує $\beta \in (\frac{2}{3}, 1)$ таке, що $T = \Delta n^\beta$ для деякої сталої $\Delta > 0$. Тоді очевидно, що $h \to 0$ при $n \to +\infty$.

Припустимо, що процес $\varepsilon_t,\ t \in [0,T]$ задовольняє наступні умови:

(C1) $\mathbb{E}\varepsilon_t = 0, \quad \forall t \geqslant 0.$

(C2) $\frac{n^2}{T^3} \int\limits_0^T \mathbb{E}\varepsilon_t^2 dt \to 0, \quad n, T \to +\infty.$

Теорема. *За умов* (C1)–(C2) $\hat{a}_n$ *є конзистентною оцінкою невідомого параметра* a, *тобто*

$$\hat{a}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a_0, \quad n, T \to +\infty.$$

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: sem_bodn@ukr.net

ОЦІНЮВАННЯ СТРАХОВИХ РЕЗЕРВІВ ЗА ДАНИМИ З ВИКИДАМИ

О. І. ВАСИЛИК, В. О. ШУНДЕР

Вплив викидів на оцінки резервів збитків є дуже серйозною проблемою в страховому бізнесі. Страхова компанія повинна оцінити резерв якомога точніше, щоб бути в змозі виконати свої майбутні зобов'язання, зокрема, це стосується оцінювання резервів збитків, які виникли, але не заявлені (IBNR). Це завдання часто ускладнюється тим, що у даних за минулі періоди присутні викиди. Зазвичай викиди у страхуванні це не помилки в даних, а великі страхові виплати, які є важливою складовою ціноутворення.

Методи оцінювання резервів збитків, які виникли, але не заявлені, включають детермінований метод ланцюгових сходів, стохастичний метод ланцюгових сходів, модель Мака, метод Борнхуеттера-Фергюсона та ін.

При використанні методу ланцюгових сходів дані щодо позовів зображають у формі трикутників, які називають трикутниками розвитку. У такому трикутнику рік настання збитків – це той рік, у якому відбулася страхова подія і у страховика виник ризик, а період розвитку або запізнення – це кількість років до виплати. Нехай S_{ij}, $1 \leqslant i \leqslant n$, – це сумарна виплата в j-ому році розвитку за страховими випадками, які відбулися в i-ому році настання збитків. Тоді за n років стають відомими значення S_{ij}, для яких $i + j \leqslant n + 1$. Ці значення утворюють трикутник розвитку. Величина $S_i = \sum_{j=1}^{n} S_{ij}$ є сумарним збитком i-го року настання збитків. На момент оцінювання є відомою лише частина сумарного збитку $\sum_{j=1}^{n-i+1} S_{ij}$, і завдання полягає в тому, щоб оцінити невідому частину $R_i = \sum_{j=n-i+2}^{n} S_{ij}$, де R_i – розмір необхідного резерву для i-го року настання збитків. Позначимо через $C_{ij} = \sum_{k=1}^{j} S_{ik}$ сумарні (накопичені) виплати, сплачені на кінець j-го року розвитку за страховими випадками, які відбулися в i-ому році настання збитків. Тоді $R_i = C_{in} - C_{i,n-i+1}$. Представимо сумарний збиток для i-го року у вигляді: $C_{in} = C_{i1} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} F_{ij}$, де $F_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$ – коефіцієнт зростання (фактор розвитку) сумарних виплат від j-го року до $(j+1)$, який використовується для прогнозування майбутніх виплат. Припускається незалежність математичного сподівання величини F_{ij} від року настання збитків i: $E\left(F_{ij}\right) = f_j$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, де f_j – це середній приріст збитків при переході від j-го до $(j+1)$ року. У методі ланцюгових сходів оцінки параметрів

f_j визначають так:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij} F_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{ij}}, 1 \leqslant j \leqslant n-1,$$

а оцінка для резерву має вигляд

$$\hat{R}_i = C_{i,n-i+1} \left(\hat{f}_{n-i+1} \cdot ... \cdot \hat{f}_{n-1} - 1 \right).$$

Метод ланцюгових сходів найчастіше використовується на практиці, але він дуже чутливий до викидів, і оцінки резервів можуть бути значно завищені за наявності навіть одного викиду.

Широко використовувані методи усунення або зменшення впливу викидів полягають в застосуванні робастних статистичних методів та/або в заміні факторів розвитку в методах оцінювання резервів. Зокрема, пропонуються такі підходи: робастифікація факторів розвитку; коригування викидів; робастифікація з використанням узагальнених лінійних моделей (декілька стохастичних моделей, що використовуються для оцінювання резервів збитків, є частковими випадками узагальнених лінійних моделей); робастний багатовимірний метод ланцюгових сходів: викиди замінюються покоординатною медіаною; застосування рівняння теплопровідності та ін.

Ми досліджуємо різні методи оцінювання страхових резервів за даними з викидами. Зокрема, порівнюємо результати застосування алгоритму робастифікації методу ланцюгових сходів з використанням медіан для оцінювання факторів розвитку з результатами застосування методу коригування викидів. Ці алгоритми реалізовано в Excel та проілюстровано на прикладах даних з викидами.

Література

[1] Avanzi B., Lavender M., Taylor G., Wong B. (2022). On the impact of outliers in loss reserving. *https://arxiv.org/abs/2203.00184*

[2] Barlak J., Bakon M., Rovnak M., Mokrisova M. (2022). Heat Equation as a Tool for Outliers Mitigation in Run-Off Triangles for Valuing the Technical Provisions in Non-Life Insurance Business. *Risks*, 10(9):171. https://doi.org/10.3390/risks10090171

[3] Jeng H. (2010). On Small Samples and the Use of Robust Estimators in Loss Reserving. *Casualty Actuarial Society E-Forum, Fall 2010.*

[4] Verdonck T., Wouwe M., Dhaene J. (2009). A Robustification of the Chain-Ladder Method. *North American Actuarial Journal,* 13 (2). DOI: 10.1080/10920277.2009.10597555

[5] Wouwe M., Phewchean N. (2016). Robustifying the multivariate chain-ladder method: A comparison of two methods. *Journal of Governance and Regulation*, 5 (1). DOI: 10.22495/jgr_v5_i1_p9

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: vasylyk@matan.kpi.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: 1618422a@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ДОПИСІВ ЕКСПЕРТНОЇ ГРУПИ НА КУРС КРИПТОВАЛЮТ

О. В. ГАВРИЛЕНКО, М. Ю. МЯГКИЙ

В останні роки криптовалютний ринок привертає підвищену увагу економістів, аналітиків та інвесторів, особливо у контексті неочікуваних флуктуацій курсів, ініційованих, між іншим, публікаціями експертів у соціальних мережах. Попри відзначену динаміку, існує потреба у розробці ефективних моделей для ранжування таких експертів. Дане дослідження спрямоване на вивчення впливу публікацій експертів на курс криптовалют за допомогою багатоагентної моделі, пропонуючи схематичний перелік вимог для їх відбору та ранжування.

Критерії ранжування:

- Кількість підписників - кількість підписників прямопропорційна до значення вплиув даного експерта на певну аудиторію;
- активність - частота та регулярність публікацій на тему криптовалют;
- історія прогнозів - відсоток вдалих прогнозів;
- соціальний капітал - відгуки інших експертів, співпраця з фінансовими організаціями;
- регіональний вплив - вплив в конкретному географічному регіоні;
- тематична спеціалізація - фокус на конкретних криптовалютах чи блокчейн-технологіях;
- часовий фактор - актуальність інформації та швидкість її поширення.

Аналіз впливу публікацій:

Спершу, для оцінки впливу публікацій експертів на курс криптовалюти необхідно відстежувати динаміку курсу після публікацій. Важливо визначити "вікно впливу"— період часу, протягом якого можна спостерігати зміни в курсі криптовалюти. Використовується три основних періоди: короткостроковий - динаміка курсу впродовж перших 24-72 годин; середньостроковий - протягом тижня і довгостроковий - протягом місяця і більше.

Моделі Ранжування:

(1) Модель 1: ваговий коефіцієнт. Кожен критерій отримує певний ваговий коефіцієнт на основі зібраної статистичної інформації. Сума всіх коефіцієнтів складає 100%.
(2) Модель 2: динамічне ранжування. Критерії та їх вагові коефіцієнти динамічно змінюються відповідно до актуальних трендів і подій на криптовалютному ринку.

(3) Модель 3: імовірнісне ранжування. Підхід який оцінює ймовірність того що публікація певного експерта істотно вплине на курс криптовалюти. Дозволяє порівняти вплив різних експертів та враховує характер взаємодії різних факторів що впливають на курс криптовалют. На основі даного підходу також можна визначити основного експерта (експерт дописи якого виявились найбільш впливовими на курс криптовалюти) [1].
(4) Модель 4: бустингові алгоритми. Використання алгоритмів бустингу, таких як XGBoost чи AdaBoost, для визначення важливості критеріїв в комплексному ранжуванні експертів.
(5) Модель 5: гібридна модель. Створення власних ансаблевих алгоритмів машиного навчання, що застосовується головним чином для зменшення похибки а також дисперсії в навчанні з учителем.

Висновки:
Представлені методики ранжування дозволяють визначити коефіцієнти впливу дописів експертів на курс криптовалюти в межах розроблюваної багатоагентної моделі, використовуючи сучасні методи інтелектуального аналізу даних, такі як бустингові алгоритми. Дослідження пропонує перспективи для автоматизації та оптимізації процесу ранжування експертів та може адаптуватися для специфічних потреб дослідників і аналітиків, ставлячи за основу подальше формування рекомендаційної системи купівлі та продажу криптовалюти.

Література

[1] Bidyuk P., Gavrilenko O., Myagkyi M. (2023). The algorithm for predicting the cryptocurrency rate taking into account the influence of posts of a group of famous people in social networks *System research and information technologies international scientific and technical journal*, pp. 22-34. doi: https://doi.org/10.20535/SRIT.2308-8893.2023.2.02

[2] Gavrylenko O., Miahkyi M., Zhurakovskyi Y. (2022). The task of analyzing publications to build a forecast for changes in crypto currency rates *Адаптивні системи автоматичного управління*, Том 2, No 41, pp. 90-99. doi: https://doi.org/10.20535/1560-8956.41.2022.271349

[3] Мягкий М., Гавриленко О. (2023). Інформаційна система для аналізу впливу публікацій експертів на курс криптовалютних обмінів на основі багато-агентного підходу *Матеріали IV Міжнародної науково-практичної конференції молодих вчених та студентів «Інженерія програмного забезпечення і передові інформаційні технології» (SoftTech-2023)*, pp. 67-71. Available at: https://ipi.kpi.ua/materialy-iv-mizhnarodnoyi-naukovo-praktychnoyi-konferentsiyi-molodyh-vchenyh-ta-studentiv-inzheneriya-programnogo-zabezpechennya-i-peredovi-informatsijni-tehnologiyi-softtech-2023-prysvyachenoyi-125/

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: gelena1980@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: mishamyagkiy3@gmail.com

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ КОРОТКИХ ЦИКЛІВ ВИПАДКОВИХ ПЕРЕСТАНОВОК ЮЕНСА

О. А. ГАЛГАНОВ

Нехай σ_n — випадкова перестановка, що обрана з симетричної групи S_n відповідно до розподілу Юенса:

$$\mathbb{P}(\sigma_n = \pi) = \frac{\theta^{c(\pi)}}{\theta(\theta+1)\dots(\theta+n-1)}, \quad \pi \in \mathrm{S}_n,$$

де $\theta > 0$ є заданим параметром, а $c(\pi)$ позначає кількість циклів в π.

На $\mathbb{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{X}_k$, де $\mathbb{X}_k = \left\{(x_1, \dots, x_k) \in [0,1]^k \colon \min\{x_1, \dots, x_k\} = x_1\right\}$, задамо послідовність точкових процесів

$$\Psi_n = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_k \in [n]}^{\neq} \delta_{\left(\frac{i_1}{n},\dots,\frac{i_k}{n}\right)} \mathbb{1}\{\sigma_n(i_1) = i_2, \dots, \sigma_n(i_k) = i_1\}, \tag{1}$$

яка несе всю інформацію про склад циклів σ_n. Тут $\sum^{\neq}$ означає, що сума береться за попарно різними $i_1, \dots, i_k \in [n]$, а $\delta_{\boldsymbol{x}}$ позначає міру Дірака в $\boldsymbol{x}$.

Зокрема, $\Psi_n(\mathbb{X}_k)$ є кількістю циклів довжини k в σ_n, і відомо [1], що

$$(\Psi_n(\mathbb{X}_1), \Psi_n(\mathbb{X}_2), \Psi_n(\mathbb{X}_3), \dots) \xrightarrow{d} (Y_1, Y_2, Y_3, \dots) \tag{2}$$

в $\mathbb{Z}_+^{\infty}$, де $Y_k \sim \mathsf{Pois}(\theta/k)$.

В роботі пропонується значне узагальнення (2), а саме — встановлено грубу збіжність за розподілом послідовності Ψ_n, визначеної (1), до точкового процесу Пуассона Ψ на $\mathbb{X}$ з мірою інтенсивності $\lambda(A) = \theta \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{Leb}_k\left(A \cap \mathbb{X}_k\right)$ За допомогою теореми про неперервне відображення для функціоналів на просторі точкових мір отримано граничні розподіли найменшої на найбільшої нерухомих точок, суми нерухомих точок, найменшого та найбільшого спейсингів між нерухомими точками, а також граничну теорему для точкового процесу різниць між найбільшим та найменшим елементами в циклах фіксованої довжини.

Література

[1] Arratia R., Barbour A.D., Tavaré S. (2003). *Logarithmic combinatorial structures: a probabilistic approach*, European Mathematical Society (EMS), Zürich.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: alex.galganov@gmail.com

На основі сумісної роботи з А.Б. Ільєнком.

ПОСИЛЕНА ВЛАСТИВІСТЬ КОНСИСТЕНТНОСТІ ОНК ПАРАМЕТРІВ ЧИРПОВАНОГО СИГНАЛУ

В. В. ГЛАДУН, О. В. ІВАНОВ

У доповіді ми розглядаємо неперервний у часі множинний чирпований сигнал (англ. *chirp signal*), що спостерігається на фоні адитивного сильно або слабко залежного випадкового шуму та отримуємо посилену властивість консистентності оцінки найменших квадратів (ОНК) невідомих параметрів сигналу.

Припустимо, що спостерігається випадковий процес

$$X(t) = g(t, \theta^0) + \varepsilon(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad \text{де}$$

$$g(t, \theta^0) = \sum_{j=1}^{N} \left(A_j^0 \cos\left(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2\right) + B_j^0 \sin\left(\phi_j^0 t + \psi_j^0 t^2\right)\right), \tag{1}$$

$$\theta^0 = \left(A_1^0, B_1^0, \phi_1^0, \psi_1^0, ..., A_N^0, B_N^0, \phi_N^0, \psi_N^0\right), \tag{2}$$

$\left(A_j^0\right)^2 + \left(B_j^0\right)^2 > 0$, $j = \overline{1, N}$; $\varepsilon = \{\varepsilon(t), t \in \mathbb{R}\}$ є випадковим шумом, що задовольняє наступній вимозі.

A1. ε – вибірково неперервний стаціонарний гауссівський випадковий процес з нульовим середнім та коваріаційною функцією (к.ф.) $B(t) = E\varepsilon(t)\varepsilon(0)$, $t \in \mathbb{R}$, що задовольняє одну з умов:

(i) $B(t) = L(|t|)|t|^{-\alpha}, \alpha \in (0, 1)$, де L – неспадна повільно змінна на нескінченності функція;

(ii) $B(\cdot) \in L_1(\mathbb{R})$.

У роботі [1] для оцінювання параметрів (2) ми ввели спеціальні параметричні множини, які залежать від часу спостереження T, що дозволяють асимптотично розрізняти параметри нашої статистичної моделі. Припустимо, що істинні значення амплітуд $A_j^0, B_j^0, j = \overline{1, N}$, є різними числами, а істинні значення частот $\phi_j^0, j = \overline{1, N}$, і параметрів $\psi_j^0, j = \overline{1, N}$, є різними додатними числами. Розмістимо параметри $\psi^0 = \left(\psi_1^0, ..., \psi_N^0\right)$ в порядку зростання і припустимо, що

$$\psi^0 \in \Psi(\underline{\psi}, \overline{\psi}) = \left\{\psi = (\psi_1, ..., \psi_N) : 0 \leqslant \underline{\psi} < \psi_1 < ... < \psi_N < \overline{\psi} < +\infty\right\}.$$

В свою чергу, також введемо параметричну множину

$$\phi^0 \in \Phi(\underline{\phi}, \overline{\phi}) = \left\{\phi = (\phi_1, ..., \phi_N) : 0 \leqslant \underline{\phi} < \phi_j < \overline{\phi} < +\infty, j = \overline{1, N}\right\}.$$

Розглянемо монотонно неспадну сім'ю відкритих множин $\Psi_T \subset \Psi\left(\underline{\psi}, \overline{\psi}\right)$, $T > T_0 > 0$, що містить вектор ψ^0, таку, що $\bigcup\limits_{T > T_0} \Psi_T = \widetilde{\Psi}$, $\widetilde{\Psi}^c = \Psi^c\left(\underline{\psi}, \overline{\psi}\right)$, і виконується наступна вимога.

B. $\lim\limits_{T\to\infty} \inf\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant N-1 \\ \psi\in\Psi_T}} T^2\left(\psi_{j+1} - \psi_j\right) = +\infty; \quad \lim\limits_{T\to\infty} \inf\limits_{\psi\in\Psi_T} T^2\psi_1 = +\infty.$

Означення. Будь-який випадковий вектор

$$\theta_T = (A_{1T}, B_{1T}, \phi_{1T}, \psi_{1T}, ..., A_{NT}, B_{NT}, \phi_{NT}, \psi_{NT}),$$

що мінімізує значення функціоналу $Q_T(\theta) = \int_0^T \left[X(t) - g(t,\theta)\right]^2 dt$ на параметричній множині $\Theta_T^c \subset \mathbb{R}^{4N}$, де амплітуди $A_j, B_j, j = \overline{1,N}$, приймають будь-які значення, а параметри (ϕ, ψ) приймають значення у множині $\Phi^c(\underline{\phi}, \overline{\phi}) \times \Psi_T^c, T > T_0 > 0$, називається ОНК параметра θ^0.

У роботі [1] ми отримали наступний результат.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови **A1** та **B**. Тоді ОНК θ_T є сильно консистентною оцінкою параметра θ^0 в сенсі, що $A_{jT} \to A_j^0$, $B_{jT} \to B_j^0$, $T\left(\phi_{jT} - \phi_j^0\right)$ $\to 0$, $T^2\left(\psi_{jT} - \psi_j^0\right) \to 0$ м.н., при $T \to \infty, j = \overline{1,N}$.*

У даній доповіді ми отримуємо узагальнення результату теореми 1. Для цього потрібно ввести додаткову умову **A2** для випадкового процесу ε.

A2(*i*) Процес ε, що задовольняє умову **A1(*i*)**, має спектральну щільність $f(\lambda) = \widetilde{L}\left(1/|\lambda|\right)|\lambda|^{\alpha-1}, \lambda \in \mathbb{R}$, де $\widetilde{L}$ – повільно змінна на нескінченності функція, а також f має четвертий спектральний момент.

(*ii*) Спектральна щільність процесу ε, що задовольняє умову **A1(*ii*)**, має четвертий спектральний момент.

Спираючись на результат теореми 1, а також враховуючи умови **A1**, **A2** та **B**, отримуємо наступну теорему, що є основним результатом даної роботи.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови **A1**, **A2** та **B**. Тоді для будь-якого $\delta \in (0,1)$ величини $T^{1-\delta}\left(A_{jT} - A_j^0\right)$, $T^{1-\delta}\left(B_{jT} - B_j^0\right)$, $T^{2-\delta}\left(\phi_{jT} - \phi_j^0\right)$, $T^{3-\delta}\left(\psi_{jT} - \psi_j^0\right) \xrightarrow{P} 0$ при $T \to \infty, j = \overline{1,N}$.*

Література

[1] Ivanov, A., Hladun, V. (2023). Consistency of the LSE for Chirp Signal Parameters in the Models with Strongly and Weakly Dependent Noise. *Austrian Journal of Statistics*, 52(SI), 107–126. https://doi.org/10.17713/ajs.v52iSI.1762

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: victor.gladun2000@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: alexntuu@gmail.com

ПРОГНОЗУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ МІР РИЗИКУ VAR ТА CVAR НА ОСНОВІ КВАНТИЛЬНОЇ GARCH МОДЕЛІ

В. Ф. ЗРАЖЕВСЬКА, Г. М. ЗРАЖЕВСЬКИЙ

У даній роботі пропонується новий метод оцінювання та прогнозування динамічних мір ризиків VaR і CVaR (ES). Розглядається часовий ряд u_t, $t = 1, \ldots, T$. Тоді за означенням динамічні міри ризику задаються наступним чином: $VaR_\alpha(u_t) = -Q_\alpha(u_t)$, $CVaR_\alpha(u_t) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha Q_y(u_t)\,dy$, де $Q_\alpha(\cdot)$ - квантиль рівня α. Одним із найпоширеніших є підхід, який базується на Variance Based Model і складається з двох етапів: на першому етапі здійснюється моделювання дисперсії часового ряду за допомогою моделей класу GARCH, залишки якої, на другому етапі, використовуються для знаходження статичних мір ризиків VaR і CVaR. Недоліком цього підходу є необхідність оцінювати весь розподіл часового ряду, в той час, як найбільш значущими є величини хвостової частини розподілу, які описують екстремальні події та мають найбільший вплив на оцінки мір ризиків. Для вирішення цієї проблеми пропонується метод на основі квантильної регресії [1]. У цій роботі пропонується підхід, який поєднує метод квантильної регресії із квантильним представлення GARCH моделі [2]:

$$Q_\alpha(u_t/\Phi_{t-1}) = Q_\alpha(\varepsilon_t)\sqrt{\beta_0 + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}}, \qquad (1)$$

де $\beta_0 > 0$, $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_q)^T \in R_+^q$, $\alpha \in (0,1)$, ε_t- незалежні, однаково розподілені з нульовим середнім і деякою функцією розподілу $F_\varepsilon(\cdot)$.

Оскільки при оцінюванні моделі (1) виникає ряд труднощів, пов'язаних в першу чергу із не опуклістю цільової функції при використанні методу максимальної правдоподібності [1], пропонується оцінювати наступну модель:

$$Q_\alpha(T(u_t)/\Phi_{t-1}) = T(Q_\alpha(\varepsilon_t))\sqrt{\beta_0 + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p}\beta_j\sigma_{t-j}}, \qquad (2)$$

де $T(x) = x^2 sign(x)$.

Тоді оцінювання умовного квантиля (1) зводиться до оцінювання (2) при деяких початкових значеннях $\sigma_{t-j},\ j = 1, \ldots, p$. До отриманих оцінок $Q_\alpha(T(u_t)/\Phi_{t-1})$ застосовується зворотне перетворення $T^{-1}(\cdot)$ для отримання оцінки $Q_\alpha(u_t/\Phi_{t-1})$ [2]. В роботі [1] для знаходження початкових значень $\sigma_{t-j},\ j = 1, \ldots, p$ запропоновано використовувати редуковану ARCH(m) модель: $\sigma_{t-i} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\,|u_{t-j-i}|$,

$i = \overline{0, p}$. Оцінки параметрів моделей ARCH(m) та (2) можна отримати, наприклад, за допомогою QMLE (Gaussian quasi-maximum likelihood estimator) [1].

Використовуючи побудовану квантильну GARCH модель (1) можна на пряму оцінити та спрогнозувати VaR, виходячи з його означення. Тоді для оцінювання і прогнозування CVaR потрібно оцінити (спрогнозувати) набір квантилей із рівнями, взятими по рівномірній сітці, із значеннями, меншими за α і визначити CVaR як їх середнє.

Інший підхід, розглянутий у роботі, базується на використанні відомого типу розподілу для апроксимації точкових квантилей: розподіл Вейбула, узагальнений розподіл Парето (GPD), generalized extreme value (GEV) distribution. Окремо розглядався випадок апроксимації за допомогою металог розподілу [3], [4], який за означенням задається квантильною функцією і може досить гарно відтворювати складну поведінку "хвостової" частини функції розподілу.

Запропоновані у роботі підходи застосовувались для прогнозування динамічних мір ризиків $VaR_{0.1}$, $CVaR_{0.1}$ для часового ряду логарифмічної дохідності на денній основі індексу Netflix, Inc. (NFLX). Довжина загальної вибірки становила 5020 значень за період з 2003-09-03 по 2023-08-14. Прогнозна модель будувалася на 2500 історичних значеннях і екстраполювалася на одне значення вперед. Процедура повторювалась 2519 раз (Rolling Forecast Method). Для аналізу якості побудованих прогнозів використовувались критерії, наведені в роботі [4]. Результати досліджень були порівняні із результатами, отриманими іншими методами, які зазвичай використовуються для прогнозування динамічних мір ризиків фінансових часових рядів [4]. Новий підхід показав кращу якість і високу стабільність, що підтверджує можливість його застосування при вирішенні різних задач управління ризиками.

Література

[1] Koenker, R., et al. (2021). *Quantile regression*, https://cran.r-project.org/web/packages/quantreg

[2] Zheng Yao, Zhu Qianqian, Li Guodong, Xiao Zhijie. (2018). Hybrid Quantile Regression Estimation for Time Series Models with Conditional Heteroscedasticity. *Journal of the Royal Statistical Society Series B (Statistical Methodology)*, Volume 80, Part 5, pp. 975–993, https://doi.org/10.1111/rssb.12277

[3] Thomas W. Keelin. (2016). The Metalog Distributions. *Decision Analysis*, Volume 13, Issue 4, pp. 223-293, https://doi.org/10.1287/deca.2016.0338

[4] Zrazhevska V., Zrazhevsky G. (2020). Generalized Approach for Estimating and Forecasting of Dynamical VaR and CVaR Based on Metalog Distribution. In: Babichev S., Lytvynenko V., Wójcik W., Vyshemyrskaya S. (eds) *Lecture Notes in Computational Intelligence and Decision Making*. ISDMCI 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1246. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-54215-3_15

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: vera.zrazhevska@gmail.com

КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
Email address: greg.zrazhevsky@knu.ua

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ

Т. В. ІВАНЕНКО, Д. А. СИЧОВА

При формуванні інвестиційного портфеля інвестори традиційно використовують найбільш розповсюджені в Україні цінні папери: акції та облігації. Співвідношення «ризик/дохідність» у кожного типу цих фінансових інструментів різне: акції, особливо українських підприємств, відрізняються високим ступенем ризику та прибутковості, облігації – низьким ступенем цих взаємопов'язаних показників. При формуванні інвестиційного портфеля з метою диверсифікації ризику, звичайно обирають певну комбінацію інвестиційних інструментів, відмінність полягає у їхній пропорції. В акції переважно інвестують прихильники агресивної інвестиційної стратегії, а консервативні інвестори, не схильні до ризику, надають перевагу інвестуванню в облігації. На початку повномасштабного вторгнення ринок цінних паперів в Україні був повністю закритий і єдиним інструментом для інвестування стали військові облігації. Це різновид більш відомих облігацій внутрішньої державної позики (ОВДП). Тобто держава фактично бере кошти в борг на певний період, в кінці якого виплачує встановлену дохідність та повертає отримані від інвестора кошти. Дохід інвестора у такому разі становитиме різниця між номіналом облігації і фактичною ціною її придбання. Виплати за таким облігаціями на 100% гарантуються державою та обслуговуються МФУ, що було особливо привабливим для консервативних інвесторів на той час.[1] У структурі торгів за 2022 рік на державні облігації (ОВДП) припадало 89,09% або 14,2 млрд. грн.[2]

Дохід інвестора від облігації складається з двох частин: одна з них визначається купонною ставкою, друга обумовлена курсовою різницею, яка змінює кінцеву дохідність облігації (r_K) при відхиленні її ринкової вартості (V_p) від номіналу (N). Кінцеву дохідність знаходять з рівняння (1):

$$V_p = \sum_{k=1}^{n} \frac{INT}{(1+r_k)^k} + \frac{N}{(1+r_k)^n}, \tag{1}$$

де INT – щорічна процентна виплата по облігації.

У випадку низької ліквідності цінного паперу розраховують інвестиційну вартість облігації (2), як приведену вартість (PV) потоку платежів, згенерованого цією облігацією:

$$PV = \sum_{k=1}^{n} \frac{INT}{(1+r_p)^k} + \frac{N}{(1+r_p)^n}, \tag{2}$$

r_p – ринкова процентна ставка; n – кількість періодів до погашення.

Щодо акцій, які обертаються на фондовому ринку, їхню ринкову вартість розраховують також за середнім біржовим курсом. Якщо ж акції не беруть участі у торгах, їхню вартість розраховують за формулою (3):

$$PV = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{(1+r_k)^k}, \tag{3}$$

де d_k – величина дивідендів за акцією в k – му році; r_k – ставка можливого реінвестування дивідендів у k – му році [3].

Математична модель формування інвестиційного портфеля може бути побудована на аналізі коливання кінцевої дохідності цінних паперів з урахуванням ризиків. Слід зробити вибірку біржових курсів обраних цінних паперів за певний період. Така статистична вибірка є часовим рядом. Кожний рівень часового ряду складається з трендової, циклічної та випадкової компонент. Для формування оптимального інвестиційного портфеля, окрім дохідності, слід також врахувати ступінь ризику кожного типу цінних паперів. Залежно від походження розрізняють ризик, пов'язаний із волатильністю біржового курсу, та ризик, пов'язаний із фінансовим станом емітента. Перший характеризує вибіркове середньоквадратичне відхилення біржового курсу протягом року, а другий — ймовірність дефолту емітента. Слід зазначити, що при формуванні інвестиційного портфеля з метою мінімізації ризику портфеля в цілому варто обирати цінні папери з найменшою взаємною кореляцією дохідностей. На наступному етапі дослідження знайдемо розв'язок оптимізаційної задачі (4). Цільова функція Z дорівнює середньому очікуваному доходу інвестиційного портфеля, зменшеному на дисперсію дохідності портфеля. Ризик емітента врахуємо шляхом уведення обмежень на частку коштів x_j, вкладених у цінні папери з підвищеним ризиком. $\sigma_i^2,_j$ – дисперсії (при $i = j$) або коваріації (при $i \neq j$) i-го та j-го цінних паперів. Обмеження мають бути обернено пропорційні ступеню ризику[4].

$$Z = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j - \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_i x_j \to max; \quad 0 \leqslant x_j \leqslant \frac{1}{R_j}, \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Література

[1] В.С. Котковський - «Порядок та особливості розміщення в Україні віськових облігацій:правовий аспект» - Національний університет «Одеська юридична академія»

[2] Українська біржа -https://www.ux.ua/a10906/?nt=304

[3] Т.В. Іваненко - «Основи фінансової математики: підручник для студ. спеціальності 111 «Математика», спеціалізації «Страхова та фінансова математика» – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 267 с.»

[4] Т.В. Іваненко, І.Д. Фартушний - «Оптимізація інвестиційного портфеля консервативними інвесторами: Економічний вісник НТУУ «Київський політехнічний інститут» № 21 (2022)

ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ БАУМА-КАЦА ДЛЯ СУМ ЕЛЕМЕНТІВ ЛІНІЙНИХ АВТОРЕГРЕСІЙНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ m-ГО ПОРЯДКУ

М. К. ІЛЬЄНКО, А. Ю. ПОЛІЩУК

Нехай на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ задана послідовність випадкових величин $(\xi_k) = (\xi_k, k \geqslant 1)$ така, що

$$\xi_{1-m} = ... = \xi_0 = 0, \quad \xi_k = b_1\xi_{k-1} + b_2\xi_{k-2} + ... + b_m\xi_{k-m} + \theta_k, \quad k \geqslant 1, \tag{1}$$

де (θ_k) — послідовність незалежних копій випадкової величини θ, а $(b_j, 1 \leqslant j \leqslant m)$ — невипадковий набір дійсних чисел ($b_m \neq 0$). Для елементів послідовності (ξ_k) покладемо $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, n \geqslant 1$, та для $0 < p < 2, r \geqslant p$ та $\forall \varepsilon > 0$ розглянемо наступний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{r}{p}-2} \mathbb{P}\left\{ \frac{|S_n|}{n^{\frac{1}{p}}} > \varepsilon \right\}. \tag{2}$$

У роботі становлено необхідні та достатні умови збіжності цього ряду.

Теорема 1. *Нехай у рівнянні* (1) коефіцієнти $b_j, 1 \leqslant j \leqslant m$, є такими, що $\max|\lambda_k| < 1$, де $\lambda_i, i = 1, 2, ..., m$, — корені рівняння

$$\lambda^m - b_1\lambda^{m-1} - b_2\lambda^{m-2} - ... - b_{m-1}\lambda - b_m = 0.$$

Ряд (2) є збіжним тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{E}\,|\theta|^r < \infty$, де $\mathbb{E}\theta = 0$ для $r \geqslant 1$.

Література

[1] Ільєнко М.К., Поліщук А.Ю. (2023). Збіжність рядів Баума-Каца для сум елементів лінійних авторегресійних послідовностей m-го порядку. *Укр. мат. журн.*, прийнято до друку.

[2] Ilienko M.K., Polishchuk A.Yu. (2022). On the convergence of Baum-Katz series for sums of linear 2-nd order autoregressive sequences. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту*, том 41, №2, с. 41–47.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: mari-run@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: nastya.varennikova312@gmail.com

ЗАКОН ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМУ В ТЕОРІЇ РЕКОРДІВ

О. В. КОЛЕСНІК

Розглянемо $\{X_k, k \geqslant 1\}$ — послідовність незалежних випадкових величин, $\alpha = \{\alpha_k, k \geqslant 1\}$ – додатні дійсні числа, F — це неперервна функція розподілу. Нехай розподіли випадкових величин X_k є такими, що $P(X_k < x) = (F(x))^{\alpha_k}$. Така послідовність випадкових величин називається F^α-схемою. Означимо кількість рекордів $\mu(n)$ у послідовності $\{X_k\}$ до моменту n наступним чином:

$$\mu(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_k,$$

де $\mathbb{I}_1 = 1$, $\mathbb{I}_k = \mathbb{I}(X_k > \max(X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}))$, $k \geqslant 2$.

Важливим фактом теорії рекордів є незалежність цих індикаторів. Також відомо, що $\mathbb{P}(I_n = 1) = \dfrac{\alpha_n}{A_n}$, де $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$. В деяких випадках існує в майже напевному сенсі асимптотика $\{\mu(n)\}$ в термінах послідовності $\{A_n\}$. Наприклад,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{\ln A_n} \to C \quad \text{існує м.н., якщо} \quad \lim \frac{\alpha_n}{A_n} \quad \text{існує},$$

де C — невипадкова константа, яка залежить від $\lim \frac{\alpha_n}{A_n}$ [1].

Класичний результат Реньї [2], коли X_k однаково розподілені є наступним:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{\ln n} \to 1 \quad \text{м.н.}$$

У доповіді буде розглянуто інші граничні результати, зокрема для закону повторного логарифму.

Література

[1] P. Doukhan, O. I. Klesov, J. G. Steinebach (2015). Strong Laws of Large Numbers in an F^α-Scheme. *Mathematical Statistics and Limit Theorems, Festschrift in Honour of Paul Deheuvels*, (eds.: M. Hallin, D.M. Mason, D. Pfeifer, J.G. Steinebach), Springer International Publishing, Switzerland pp. 287–303.

[2] Rényi, A. (1962). Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations. *Annals Faculty Science University Clermont-Ferrand*, pp. 7–12.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: `lxndr.kolesnik@gmail.com`

ЗБІЖНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ЛОКАЛЬНИМ ЧАСОМ

І. Г. КРИКУН

Розглядаємо стохастичні диференціальні рівняння з локальним часом та з нерегулярними коефіцієнтами, що залежать від малого параметру ε:

$$\xi_\varepsilon(t) = x + \beta_\varepsilon L^{\xi_\varepsilon}(t,0) + \int_0^t \big(b_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s)) + g_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s))\big)ds + \int_0^t \sigma_\varepsilon(\xi_\varepsilon(s))dw(s). \quad (1)$$

Досліджується слабка збіжність розв'язків (у сенсі слабкої збіжності мір, породжених процесами) цих рівнянь при $\varepsilon \to 0$.

Нехай $\xi(t)$ – слабкий розв'язок наступного стохастичного диференціального рівняння, що містить локальний час:

$$\xi(t) = x + \gamma L^{\xi}(t,0) + \int\limits_0^t g(\xi(s))ds + \int\limits_0^t \sigma(\xi(s))dw(s). \quad (2)$$

Позначимо міри, породжені ξ_ε та ξ на функціональному просторі $(\mathbb{C}[0,T], \mathcal{C}_T)$, через μ_ε та μ відповідно.

Визначимо функції : $\mathbb{D}h(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{h(x+\varepsilon) - h(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$;

$$\mathbb{A}_u(x) = \frac{1}{2}\big[(u_2''(x) + u_1''(x)) + (u_2''(x) - u_1''(x))\operatorname{sgn} x\big];$$

$$F_\varepsilon(x) = \exp\Big\{-2\int\limits_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{a_\varepsilon(y)}dy\Big\},\ f_\varepsilon(x) = \int\limits_0^x F_\varepsilon(y)dy. \quad (3)$$

Наведемо умови, які будуть використовуватись нижче.

Умова (I).

Нехай $f_1(x), f_2(x)$ – деякі двічі диференційовані функції, такі що

I_1. $f_1(0) = f_2(0) = 0$; $f_1'(x) > 0$, $f_2'(x) > 0$; $f_1'(0) = f_1$, $f_2'(0) = f_2$;

I_2. $f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leqslant 0 \\ f_2(x), & x \geqslant 0 \end{cases}$.

This work was partially supported by a grant from the Simons Foundation (Award 1160640, Presidential Discretionary-Ukraine Support Grants, Krykun I.H.).

Умова (II).

Нехай $\Lambda > 0$, β_ϵ – константи, $g_\varepsilon(x), b_\varepsilon(x), \sigma_\varepsilon(x)$ – деякі вимірні функції, що мають властивості:

II_1. При будь-якому $\varepsilon > 0$ $|\beta_\epsilon| < 1$.

II_2. При будь-якому $\varepsilon > 0$ існує єдиний слабкий розв'язок стохастичного рівняння.

II_3. Пара функцій $(g_\varepsilon, \sigma^2_\varepsilon)$ задовольняє умові: $|g_\varepsilon(x)| \leqslant \Lambda$, $\dfrac{1}{\Lambda} \leqslant \sigma^2_\varepsilon(x) \leqslant \Lambda$.

II_4. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \int_0^x \frac{b_\varepsilon(y)}{\sigma^2_\varepsilon(y)} dy \right| \leqslant \Lambda .$$

Умова (III).

Нехай $\Lambda > 0$, β та γ – константи, $g(x), \sigma(x)$ – деякі вимірні функції, такі що:

III_1. $|\beta| < 1$, $|\gamma| < 1$.

III_2. Пара функцій (g, σ^2) задовольняє умові: $|g(x)| \leqslant \Lambda$, $\dfrac{1}{\Lambda} \leqslant \sigma^2(x) \leqslant \Lambda$.

Припустимо, що для функції $f_\varepsilon(x)$ з (3) виконується наступне:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x) = f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \leqslant 0 \\ f_2(x), & x \geqslant 0 \end{cases} . \tag{4}$$

Теорема 1. *Нехай для функції $f(x)$ з (4) та для стохастичних рівнянь (1), (2) виконуються відповідно Умови (I), (II), (III) і $\beta_\varepsilon \longrightarrow \beta$ при $\varepsilon \to 0$. Для того, щоб $\mu_\varepsilon \Rightarrow \mu$ необхідно й достатньо, щоб виконувались наступні умови:*

(*) $$\gamma = \frac{f_1 - f_2 + \beta(f_1 + f_2)}{f_1 + f_2 + \beta(f_1 - f_2)};$$

(**) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^x \frac{1}{F_\varepsilon(y)\sigma^2_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x \frac{1}{\sigma^2(y)\mathbb{D}f(y)} dy \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R};$$

(***) $$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^x \frac{g_\varepsilon(y)}{\sigma^2_\varepsilon(y)} dy = \int_0^x \left[\frac{g(y)}{\sigma^2(y)} + \frac{1}{2} \frac{\mathbb{A}_f(y)}{\mathbb{D}f(y)} \right] dy \quad \text{для всіх } x \in \mathbb{R}.$$

Докладний огляд подібних результатів інших авторів, доведення цієї теореми, допоміжних результатів та приклади можна знайти в статтях [1], [2].

Література

[1] Крикун І.Г. (2023). Про слабку збіжність стохастичних диференціальних рівнянь з нерегулярними коефіцієнтами. *Укр. мат. вісн.*, vol. 20, no. 1, pp. 87–106.

[2] Krykun I.H. (2023). On Weak Convergence of Stochastic Differential Equations with Irregular Coefficients. *J. of Math. Sci.*, vol. 273, no. 3, pp. 398–413.

ІПММ НАН України, Слов'янськ, Україна & Університет «КРОК», Київ, Україна
Email address: iwanko@i.ua

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є–СТІЛТЬЄСА ОДНОГО РОЗПОДІЛУ ТИПУ ДЖЕССЕНА–ВІНТНЕРА З СУТТЄВИМИ ПЕРЕКРИТТЯМИ

О. П. МАКАРЧУК

Нехай $F(x)$ — функція розподілу. Для перетворення Фур'є–Стілтьєса функції $F(x)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

розглянемо величину

$$L(F) = \limsup_{|t| \to +\infty} |f(t)|.$$

Якщо $F(x)$ є функцією стрибків, то відомо [1], що $L(F) = 1$. Якщо $F(x)$ абсолютно неперевна, то $L(F) = 0$. Якщо функція $F(x)$ є сингулярною, то відомо [2], що $L(F)$ може набувати довільного значення з відрізку $[0; 1]$.

Нехай s, m — натуральні числа більші за одиницю, (ψ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0,1,...,$m-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, ..., p_{(m-1)k}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k s^{-k}.$$

За теоремою Джессена–Вінтнера [3] розподіл ψ є чистим.

Теорема 1. *Рівність $L(F_\psi) = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли для кожного $n \in N$ виконується умова:*

$$\lim_{n \to +\infty} f(2s^n \pi n) = 0.$$

Література

[1] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. (1992). *Фрактальные множества, функции, распределения.* К.: Наук. думка.

[2] Schvartz L. (1941). Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités. *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 212, pp. 418–421.

[3] Jessen B., Wintner A. (1935). Distribution function and Riemann Zeta-function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, no. 38, pp. 48–88.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна
Email address: makolpet@gmail.com

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАГАЛЬНОЮ ВИПАДКОВОЮ МІРОЮ

Б. І. МАНІКІН

Позначимо через $\mathcal{B}$ σ-алгебру підмножин X, де X — довільна множина, а через $L_0 = L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — клас всіх випадкових величин на повному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тоді стохастичною мірою на $\mathcal{B}$ будемо називати σ-адитивне відображення $\mu : \ \mathcal{B} \to L_0$.

В роботі [1] було розглянуто стохастичне рівняння вигляду

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))\,dt + \sigma(t,x)\,d\mu(x) = 0\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, \end{cases} \tag{1}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, μ — загальна стохастична міра, визначена на борелевій σ-алгебрі підмножин $\mathbb{R}$, а оператор $\mathcal{L}$ має вигляд

$$\mathcal{L}u(t,x) = a(t)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x} + b(t)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + c(t)u(t,x) - \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}. \tag{2}$$

Також у ній були доведені існування та єдиність розв'язку (1). При цьому розв'язок розглядається у «м'якому» сенсі, тобто, як розв'язок інтегрального рівняння

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} p(t,x;0,y)u_0(y)\,dy + \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} p(t,x;s,y)f(s,y,u(s,y))\,dy$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)\,ds,$$

де $p(t,x;s,y)$ — фундаментальний розв'язок рівняння $\mathcal{L}u = 0$. Рівняння (1) можна також розглядати при $t \in [0,+\infty)$, що не призводить до зміни вигляду розв'язку. Автором було показано, що за деяких умов на вимірні функції u_0, f, σ з (1) та a, b, c з (2)

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x)| \to 0,\ t \to \infty, \text{м. н.}$$

Отриманий результат було опубліковано у [2].

Розглянемо тепер таке стохастичне рівняння:

$$\begin{cases} du(t,x) = a^2\Delta_x u(t,x)dt + f(t,x,u(t,x))dx + \sigma(t,x)d\mu(t)\,, (t,x) \in \bar{D}, \\ u(t,x) = 0,\ (t,x) \in S, \quad u(0,x) = u_0(x),\ x \in B\,, \end{cases} \tag{3}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \bar{B}$, B — обмежена область у $\mathbb{R}^d$, $S = (0,T] \times \partial B$. «М'який» розв'язок (3) задається співвідношенням

$$u(t,x) = \int_B G(t,x;0,y)u_0(y)dy + \int_0^t ds \int_B G(t,x;s,y)f(s,y,u(s,y))dy +$$
$$+ \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_B G(t,x;s,y)\sigma(s,y)dy, \quad (4)$$

де $G(t,x;s,y)$ — функція Гріна крайової задачі $a^2\Delta_x u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $u|_{(t,x)\in S} = 0$. Виявляється, що за певних умов на B, μ, u_0, f, σ розв'язок (4) існує, єдиний і для довільних $\delta \in (0,T)$, B', $\bar{B}' \subset B$ задовольняє співвідношення

$$|u(t_1,x_1) - u(t_2,x_2)| \leqslant L(|x_1 - x_2|^{\gamma_1} + |t_1 - t_2|^{\gamma_2})$$

для всіх t_1, $t_2 \in [\delta,T]$, x_1, $x_2 \in \bar{B}'$ і деяких сталих L, γ_1, γ_2.

Зауважимо, що аналогічне до (3) рівняння при $x \in \mathbb{R}^d$ було досліджено у [3]. Показані існування та єдиність розв'язку, виконання умови Гельдера по x та t.

Література

[1] Боднарчук І.М. (2017). Регулярність м'якого розв'язку параболічного рівняння зі стохастичною мірою. *Укр. мат. журн.*, vol. 69, no. 1, pp. 3–16.

[2] Manikin B. (2022). Asymptotic properties of the parabolic equation driven by stochastic measure. *Modern Stoch. Theory Appl.* , vol. 9, no. 4, pp. 483–498.

[3] Боднарчук І.М., Шевченко Г.М. (2015). Рівняння теплопровідності в багатовимірній області із загальною стохастичною мірою. *Теорія ймовір. та матем. статист.*, vol. 93, pp. 7–21.

Київський національний університет ім. Т. Г. Шевченка, Київ, Україна
Email address: bmanikin@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ У ВИКЛАДАННІ АЛГОРИТМІВ ПРОГРАМУВАННЯ

Р. В. МІНЕНКО, О. В. ЩИГРІНЦОВА

В теперішній час за мотивувати здобувачів освіти на навчання дуже не проста задача. Тим паче на такі навчальні дисципліни, в яких потрібно прикладати багато зусиль для їх розуміння. В такому випадку може сильно допомогти подання навчального матеріалу в ігровій формі. Наприклад, теорія ймовірностей може бути актуальної в сучасному футболі, де майже кожен день трапляються якісь неймовірні події, наприклад, перемога якоїсь аматорської команди над чемпіонами, але на великій дистанції чемпіони завжди займають своє високе місце маючи високу ймовірність до перемог. Створити такий симулятор, який емітував би хід матчу, робив би його одночасно і прогнозованим і непередбаченим, як в реальних умовах, може бути досить цікавою ідеєю для здобувачів освіти. І вже це може бути достатньою умовою для мотивування на пізнання теорії ймовірностей і алгоритмів програмування необхідних для створення такого симулятора. Задача створення такого симулятора полягає в двох етапах:

(1) теоретичний аналіз та створення ймовірнісних факторів, від яких буде залежати ймовірність виграшу конкретної команди;
(2) програмна реалізація цих факторів та текстова імітація проведення матчів.

Крім того, ця імітація повинна не просто симулювати і видавати підсумковий рахунок матчу, а повністю симулювати весь хід матчу з отриманням результату на кожній хвилині та ймовірністю отримання червоних карток, які можуть кардинально змінити шанси на підсумковий рахунок.

Все це реально створити в досить простому для розуміння середовищі Microsoft Office Excel за допомогою вбудованих функцій та мови програмування Visual Basic for Application.

Для реалізації цього було створено базу даних з параметрами команд, які будуть відповідати реальним та створювати різницю в класі між ними. Щоб сильно не ускладнювати задачу, було обрано всього три основні параметри: **Attack** (атака команди), **Defense** (захист команди), **Balance** (баланс складу).

Перші два параметри безпосередньо впливають на ймовірність голу команди, а баланс відповідає за зниження атаки і захисту при зміні складу команди.

За ймовірність голу відповідає параметр **Factor**, який окремо розраховується для домашньої і для гостьової команди, бо як відомо, своє поле за відсутності

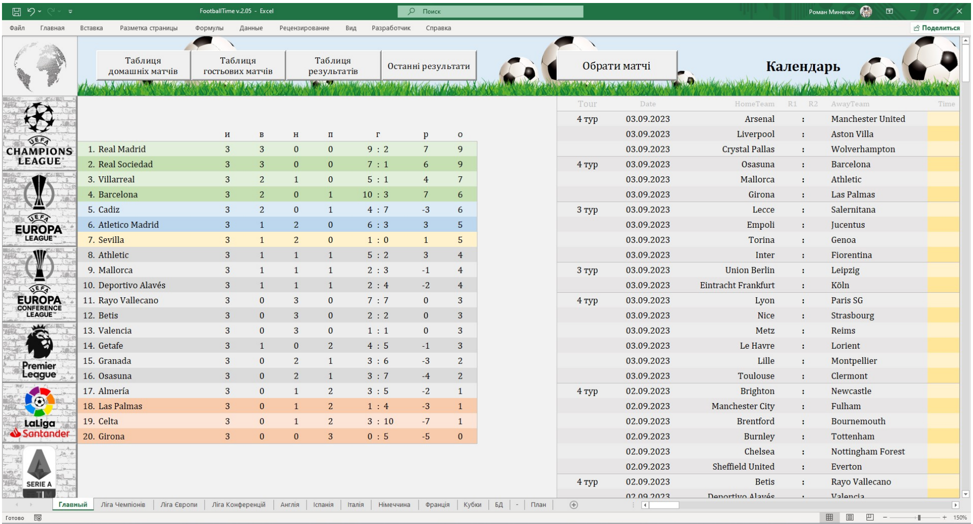


Рис. 1. Візуальне оформлення головної сторінки програми

окремих обставин завжди є додатковою перевагою. А за наявності таких обставин є ряд додаткових параметрів, які можна окремо виставити на формі для проведення матчів і збільшити/зменшити мотивацію команд, внести зміни до складу або виставити більш атакуючи чи більш захисну тактику.

Також в програмі використано багато прийомів, які навчають здобувачів освіти роботі з базами даних. Наприклад автоматичний збір основного календаря із заповнених окремо інших календарів. Тобто, щоб по натисканню на кнопку, бралась вибірка окремої дати з усіх календарів і всі матчі, які за цією датою знайшлись записувались в основний календар. Для всіх календарів створені «розумні таблиці», привчає здобувачів освіти до правильної організації даних.

На рисунку 1 приведено головне вікно програми, де відображений один із використаних чемпіонатів, є кнопки для відображення інших чемпіонатів, додаткових таблиць та основний календар результати з якого вибираються та обчислюються в таблицях.

Література

[1] Бишевець Н.Г. (2021). *Теорія ймовірностей та математична статистика з використанням табличного процесора MS Excel.* Гельветика.

Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький фаховий коледж Національного авіаційного університету», Кривий ріг, Україна
Email address: romeo.minenko@gmail.com, elenaww7@gmail.com

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЗБУРЕНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ВІНЕРІВСЬКГО ПРОЦЕСУ

Ю. Ю. МЛАВЕЦЬ, І. В. ОРЛОВСЬКИЙ, О. А. ТИМОШЕНКО

Розглянемо лінійне стохастичне диференціальне рівняння (ЛСДР)

$$dX(t) = (\alpha(t)X(t) + \gamma(t))dt + \beta(t)X(t)dw(t), \tag{1}$$

де $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ – неперервні додатні функції. Розглянемо також звичайне диференціальне рівняння (ЗДР)

$$d\mu(t) = \alpha(t)\mu(t)dt, \tag{2}$$

де $\alpha(\cdot)$ – функція, яка співпадає з функцією із (1), $\mu(\cdot)$ – розв'язок рівняння (2). Позначимо $A(t) = \int\limits_0^t \alpha(s)ds$, тоді $\ln\mu(t) = A(t)$.

Сформулюємо основну теорему.

Теорема 1. *Нехай $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ – неперервні додатні функції, такі, що існує неперервний розв'язок $X(\cdot)$ рівняння* (1) *з початковою умовою X(0)>0, причому $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \infty$ м.н. Припустимо, що $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = \infty$ та мають місце наступні три умови:*

- **(i)** *існує таке число $M > 1$, що для $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{A(2^{n+1})}{A(2^n)} \leqslant M$;*
- **(ii)** *$\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ задовольняють наступним співвідношенням*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{A(t)} \int\limits_0^t \beta^2(s)ds = 0, \quad \text{та} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{A^2(2^n)} \int\limits_0^{2^{n+1}} \beta^2(s)ds < \infty;$$

- **(iii)** *для $\alpha(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$ припустимо, що $\sup\limits_{t\geqslant 0} \dfrac{1}{A(t)} \int\limits_0^t \gamma(s)ds = K_\gamma < \infty$;*

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln X(t)}{\ln\mu(t)} = 1 \text{ м.н.} \tag{3}$$

Нехай $\alpha(t) \sim \tilde{\alpha}t^m$, $\gamma(t) \sim \tilde{\gamma}t^p$, $\beta(t) \sim \tilde{\beta}t^k$, при $t \to \infty$, де $m,\ p,\ k \in (0; +\infty)$, $\tilde{\alpha},\ \tilde{\gamma},\ \tilde{\beta}$ деякі додатні сталі. Якщо $m \geqslant p$, $m > 2k$, $m,\ p,\ k \in (0; +\infty)$, то для ЛСДР (1) виконуються усі умови Теореми 1.

Застосуємо схему Ейлера-Маруями з $n = 50$ для апроксимації розв'язку наступного СДР

$$dX(t) = \left(t^{\frac{1}{2}} X(t) + t^{\frac{1}{2}}\right) dt + t^{\frac{1}{6}} X(t) dw(t),\ t \geqslant 0;\ X(0) = 5,$$

та відтворимо роз'язок ЗДР : $d\mu(t) = \sqrt{t}\mu(t)dt,\ \mu(0) = 5.$

Дійсно, як видно з Рис. 1 траєкторії прямують до нескінченності та мають схожу динаміку. Моделювання відношення логарифмів розв'язку рівняння збуреного вінерівським процесом та розв'язку ЗДР показує, що траєкторії є еквівалентними, а отже відношення самих розв'язків є також еквівалентним.

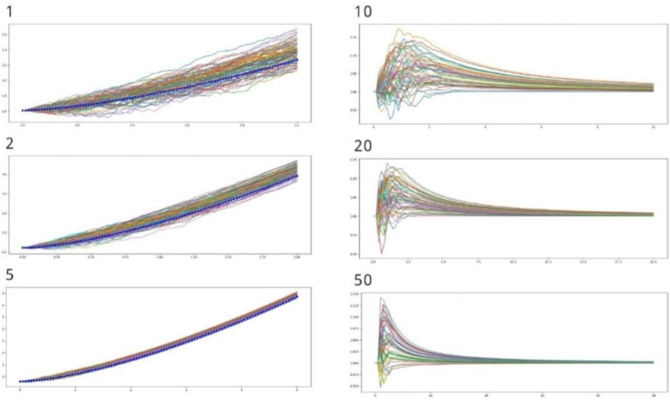


Рис. 1. Поведінка розв'язків СДР та відповідного ЗДР (точкова синя лінія), при $t \to \infty$ (*справа*). Логарифмічна еквівалентність розв'язків ЛСДР та розв'язку ЗДР (*зліва*).

Література

[1] Buldygin V.V., Tymoshenko O.A. (2010). On the exact order of growth of solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients. *Theor Stoch. Process*, no. 16, pp. 12–22.

[2] Kloeden P., Platen E. (1992). *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer.

[3] Десницький О.М., Млавець Ю.Ю., Орловський І.В., Тимошенко О.А. (2022). Асимптотична поведінка розв'язків лінійних диференціальних рівнянь загального вигляду збурених за допомогою вінерівського процесу. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика»*, Т. 41(2), с. 29–40.

ДВНЗ «Ужгородський національний університет», Ужгород, Україна
Email address: yurii.mlavets@uzhnu.edu.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: i.v.orlovsky@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: otymoshenkokpi@gmail.com

АЛГОРИТМ ВСТАНОВЛЕННЯ ХАРАКТЕРУ РОЗПОДІЛУ ЗНАЧЕНЬ У ВИБІРЦІ МАЛОГО РОЗМІРУ

Д. В. ПАРЕНЮК

Під час обробки результатів медичних досліджень часто потрібно проводити саме статистичний аналіз отриманих результатів, а для цього необхідні відомості про характер розподілення значень критерію у дослідженому масиві для правильного вибору параметричних або непараметричних тестів. Одним із способів це встановити є використання запропонованого алгоритму, який включає у себе використання критерію нормальності Ліллієфорса [1], тесту Шапіро-Уілка та графічного способу. Необхідно вказати, що тест Шапіро-Уілка є рекомендованим до застосування для малих вибірок ($n < 50$), де він є сильним та ефективним [2], [3] і під час роботи із малими вибірками він має бути головним інформаційним та числовим параметром Рис 1.

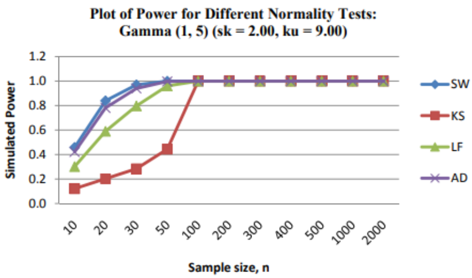


Рис. 1. Порівняння потужностей тесту Шапіро-Вілка (SW), Ліллієфорса (LF) та Колмогорова-Смірнова (KS).

Тест Шапіко-Вілка розраховувався відповідно до джерела [3]. Саме цей спосіб розрахунку даного тесту використовується у сучасних статистичних пакетах. Наступним кроком є застосування графічного способу оцінки (а саме порівняння отриманого характеру розподілу із необхіднимм). Варіант реалізації вказаних кроків приведено на Рис 2, де червоною лінією показано необхідний розподіл, а синіми стовпчиками - наявний результат.

Критерій Ліллієфорса встановлюється із застосуванням формули (1), де $S_n(x)$ є вибірковою сукупною функцією розподілу, а $F^*(x)$ це кумулятивна функція нормального розподілу.

$$D_n = max|F^*(x) - S_n(x)| \tag{1}$$

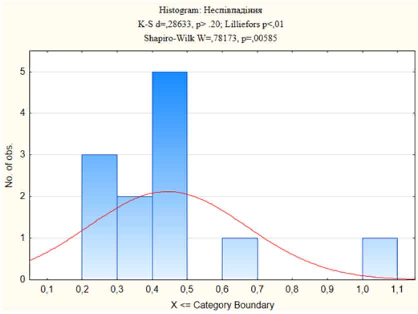


Рис. 2. Гістограма розподілу отриманих даних

Вказаний критерій було взято до розгляду тому, що він має потужність більш високу за потужність тесту Колмогорова-Смірнова. Якщо розмір вибірки зростає ($n > 50$), то потрібно як основний чисельний параметр використовувати саме критерій Ліллієфорса тому, що не усі сучасні статистичні пакети мають у своєму складі реалізована поправка Ройстона [3]. Загалом алгоритм встановлення нормальності можна привести наступним чином:

(1) Визначення основного числового методу (тест Шапіко-Вілка чи критерію Ліллієфорса).
(2) Перевірка на нормальність обраним числовим методом, якщо перевірка пройдена - зараховується 1 бал, у іншому випадку - 0 балів.
(3) Перевірка на нормальність графічним методом, якщо перевірка пройдена - оцінюємо ситуацію у 1 бал, альтернативно - у 0 балів.
(4) Перевірка на нормальність альтернативним числовим методом, якщо перевірка пройдена - оцінка 1, інакше - 0.
(5) Підсумовування отриманих оцінок для усіх попередніх кроків, якщо отримана сума $\geqslant 2$ - то розподіл нормальний.

Література

[1] Sulewski P. (2019). Modified Lilliefors goodness-of-fit test for normality. *Commun. Stat. - Simul. Comput.*, vol. 51, no. 3, pp. 1199–1219.
[2] Nabou A., Laanaoui M.D., Ouzzif M., Alamine El houssaini M. (2021). *Shapiro-Wilk Test to Detect The Routing Attacks In MANET*. Research Square.
[3] Mohd Razali N., Y B. (2011). Power Comparisons of Shapiro-Wilk, Kolmogorov-Smirnov, Lilliefors and Anderson-Darling Tests. *J. Stat. Model. Anal.*, vol. 2, no. 1, pp. 21–33.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: pdv091943-ames@lll.kpi.ua

ЗАСТОСУВАННЯ B-ЗОБРАЖЕННЯ ЧИСЕЛ У ТЕОРІЇ СИНГУЛЯРНИХ РОЗПОДІЛІВ ЙМОВІРНОСТЕЙ

М. В. ПРАЦЬОВИТИЙ, Я. В. ГОНЧАРЕНКО, І. М. ЛИСЕНКО

Нехай $A = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ — алфавіт (набір цифр), $L = A \times A \times ...$ — простір послідовностей елементів алфавіту; (Θ_n) — довільна послідовність додатних дійсних чисел ($n \in Z$) така, що

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{-n} \equiv u < 1, \; 0 < \sum_{n=0}^{+\infty} \equiv v < 1, \; u + v = 1.$$

Прикладом такої є двостороння числова послідовність (Θ_n): $\Theta_0 = \frac{1-3a}{1-a}$, $\Theta_{-n} = \Theta_n = a^n$, де параметр a задовольняє нерівності $0 < a < \frac{1}{3}$, $n \in N$.

Сформуємо іншу двосторонню послідовність (b_n), визначену числовою послідовністю (Θ_n),

$$b_n \equiv \sum_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i = b_{n-1} + \Theta_{n-1}.$$

Теорема 1. *Для будь-якого числа $x \in (0; 1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що виконується одна з рівностей*

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{m} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m(\emptyset)}, \tag{1}$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta^B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}. \tag{2}$$

Розклад числа x в суму (1) або ряд (2) називатимемо його *B-представленням*, а символічні записи $\Delta^B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m(\emptyset)}$ та $\Delta^B_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots}$ — його *B-зображенням* (скінченним або нескінченним відповідно). При цьому α_n називатимемо n-ою цифрою цього B-зображення.

Поклавши $0 \equiv \Delta^B_{(\emptyset)}$, матимемо B-зображення усіх чисел піввідрізка $[0; 1)$.

Теорема 2. *Якщо $\xi = \Delta^B_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \ldots}$ — рівномірно розподілена випадкова величина на відрізку $[0; 1]$, то цифри (ξ_n) її B-зображення є незалежними, однаково розподільними і мають розподіли $P\{\xi_n = i\} = \Theta_i \; \forall i \in Z$.*

Теорема 3. *Розподіл випадкової величини* $\xi = \Delta^B_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ *з відповідним* B-*зображенням, де* (ξ_n) *— послідовність незалежних випадкових величин таких, що* $P\{\xi_n = i\} = p_{in} \geqslant 0$ *має чистий лебегівський тип, тобто* $\max\limits_{i=\overline{1,3}}\{\alpha_i\} = 1$, *(дискретний, абсолютно неперервний або сингулярний).*

Нагадаємо, що кожна функція розподілу $y = F(x)$ є лінійною комбінацією трьох функцій розподілу, а саме:

$$F_\xi(x) = \alpha_1 F_d(x) + \alpha_2 F_{ac}(x) + \alpha_3 F_s(x), \alpha_i \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,$$

де F_d — дискретна функція розподілу, $F_{ac}(x)$ — абсолютно неперервна функція розподілу, F_s — синулярна функція розподілу [3].

Теорема 4 (Теорема про лебегівську структуру розподілу)**.** *Якщо* $\xi = \Delta^B_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_n\ldots}$ *є випадковою величиною з незалежними однаково розподіленими цифрами* B-*зображення, то*

1) ξ *— має дискретний розподіл* $\Leftrightarrow \max\{p_i\} = 1$*;*

2) ξ *— абсолютно неперервний (навіть рівномірний), якщо* $p_i = \Theta_i$ $i \in Z$*;*

3) сингулярний в решті випадків, а саме, коли існує $i \in Z$ *таке, що* $p_i \neq \Theta_i$.

У доповіді крім основних ідей доведення зазначених фактів будуть наведені результати дослідження спектральних властивостей (включаючи фрактальні) носіїв розподілів випадкової величини ξ.

Література

[1] Pratsovytyi, M.V., Baranovskyi, O.M., Bondarenko, O., Ratushniak, S. (2023). One class of continuous locally complicated functions related to infinite-symbol Φ-representation of numbers. Matematychni Studii, 59 (2), 123–131.

[2] Працьовитий М.В., Бондаренко О.І., Василенко Н.М., Лисенко І.М. (2023). Нескінченносимвольне B-зображення дійсних чисел і деякі його застосування. Буковинський матем. журнал, 2023.

[3] Працьовитий М.В. (1998). Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

[4] Працьовитий М.В. (2022). Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування. Київ: Наукова думка, 2022. – 316 с.

[5] Працьовитий М., Бондаренко О., Лисенко І., Ратушняк С. (2023). Неперервні функції з локально скданими та фрактальними властивостями, пов'язані з нескінченносимвольним B-зображенням чисел. Нелінійні коливання, 2023, т. 26. № 3.

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна; Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Email address: prats4444@gmail.com

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Email address: ya.v.honcharenko@npu.edu.ua

УДУ імені Михайла Драгоманова, Київ, Україна

Email address: i.m.lysenko@npu.edu.ua

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ СУМІШІ ДВОХ ДРОБОВИХ БРОУНІВСЬКИХ РУХІВ

К. В. РАЛЬЧЕНКО, М. С. ЯКОВЛЄВ

Значна кількість природних процесів, що змінюються з часом, традиційно моделюються математично з допомогою стандартного броунівського руху. Одночасно з цим, численні сучасні дослідження демонструють існування процесів з властивостями автомодельності, довготермінової залежності та складними кореляційними структурами [1, 2], які не можуть бути належним чином змодельовані за допомогою лише броунівського руху. Натомість, можна використати дробовий броунівський рух з індексом Херста H, прирости якого корелюють, та який має властивості короткотермінової ($H < \frac{1}{2}$) або довготермінової ($H > \frac{1}{2}$) залежності.

Нами досліджується наступна модель суміші двох дробових броунівських рухів:

$$X_t = \kappa B_t^{H_1} + \sigma B_t^{H_2}, \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

де B^{H_1} та B^{H_2} — два незалежних дробових броунівських рухи tз параметрами Херста H_1 та H_2 відповідно. Задача полягає в оцінені невідомих параметрів H_1, H_2, κ^2, σ^2 за спостереженнями $\{X_{kh}, k \in (0,1,2,\dots)\}, h > 0$. Для того, щоб модель (1) була ідентифікована, ми припускаємо $0 < H_1 < H_2 < 1$, $\sigma > 0$ та $\kappa > 0$.

Введимо наступні позначення:

$$\begin{aligned} \xi_N &:= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+1)h} - X_{kh}\right)^2, \quad \eta_N := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+2)h} - X_{kh}\right)^2, \\ \zeta_N &:= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+4)h} - X_{kh}\right)^2, \quad \phi_N := \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(X_{(k+8)h} - X_{kh}\right)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Для визначених у (2) статистик будуть мати місце наступні збіжності м.н. при $N \to \infty$:

$$\begin{aligned} \xi_N &\to \mathsf{E}\,\xi_0 = \kappa^2 h^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2}, \\ \eta_N &\to \mathsf{E}\,\eta_0 = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{2H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{2H_2}, \\ \zeta_N &\to \mathsf{E}\,\zeta_0 = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{4H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{4H_2}, \\ \phi_N &\to \mathsf{E}\,\phi_0 = \kappa^2 h^{2H_1} 2^{6H_1} + \sigma^2 h^{2H_2} 2^{6H_2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Розв'язавши нелінійну систему рівнянь (3) можна отримати строго консистентні оцінки шуканих параметрів моделі (1).

Теорема 1. *Нехай* $0 < H_1 < H_2 < 1$. *Тоді оцінки*

$$\begin{aligned} \widehat{H}_N^{(1)} &= \frac{1}{2}\log_{2+}\left(\frac{\eta_N\zeta_N - \xi_N\phi_N + d_N}{2(\eta_N^2 - \xi_N\zeta_N)}\right), \\ \widehat{H}_N^{(2)} &= \frac{1}{2}\log_{2+}\left(\frac{\eta_N\zeta_N - \xi_N\phi_N - d_N}{2(\eta_N^2 - \xi_N\zeta_N)}\right), \\ \hat{\kappa}_N^2 &= \left(\frac{2(\eta_N^2 - \xi_N\zeta_N)}{\eta_N\zeta_N - \xi_N\phi_N + d_N}\right)^{\log_2 h}\frac{\xi_N d_N + 2\eta_N^3 - 3\xi_N\eta_N\zeta_N + \xi_N^2\phi_N}{2d_N}, \\ \hat{\sigma}_N^2 &= \left(\frac{2(\eta_N^2 - \xi_N\zeta_N)}{\eta_N\zeta_N - \xi_N\phi_N - d_N}\right)^{\log_2 h}\frac{\xi_N d_N - 2\eta_N^3 + 3\xi_N\eta_N\zeta_N - \xi_N^2\phi_N}{2d_N} \end{aligned} \tag{4}$$

де

$$d_N := \left(\xi_N^2\phi_N^2 - 6\xi_N\eta_N\zeta_N\phi_N - 3\eta_N^2\zeta_N^2 + 4\eta_N^3\phi_N + 4\xi_N\zeta_N^3\right)_+^{1/2}$$

будуть строго консистентними оцінками параметрів H_1, H_2, κ^2 *та* σ^2 *відповідно.*

При цьому використовуються наступні позначення:

$$\log_{2+} x = \begin{cases} \log_2 x, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x \leqslant 0, \end{cases} \qquad (x)_+^{1/2} = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{if } x > 0, \\ 0, & \text{if } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Нами також було доведено, що оцінки визначені у (2) та (4) будуть асимптотично нормальними та побудувати формули для знаходження їх асимптотичних коваріаційних матриць. Було досліджено поведінку побудованих оцінок за допомогою методу Монте-Карло. Результати цього моделювання показали, що якість побудованих оцінок зменшується при зменшені різниці між істиними значеннями параметрів Херста H_2 та H_1.

Література

[1] Sadique S., Silvapulle P. (2001). Long-term memory in stock market returns: *International evidence. International Journal of Finance & Economics*, vol. 6, no. 1, pp. 59–67.

[2] Zhang W.-G., Xiao W.-L., He C.-X. (2009). Equity warrants pricing model under fractional Brownian motion and an empirica study. *Expert Systems with Applications*, vol. 36, no. 2, pp. 3056–3065.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Email address: kostiantynralchenko@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Email address: mykyta.yakovliev@gmail.com

АДАПТОВАНА $T(q)$-ВІРОГІДНА ОЦІНКА У СТРУКТУРНІЙ ГАММА-МОДЕЛІ РЕГРЕСІЇ З ПОХИБКАМИ У ЗМІННИХ

А. В. САВЧЕНКО

У гамма-моделі $f(y|\eta) = \frac{1}{\Gamma(p)}(\frac{p}{\omega})^p y^{p-1}\exp(-\frac{yp}{\omega})$, $y > 0$, $\omega = \exp(\beta_0 + \beta_1\xi)$, $\eta = -\omega^{-1}$, значення p вважаємо відомим, $x = \xi + \delta$, $\delta \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\delta^2)$, і δ припускається незалежною від ξ та y. Вважаємо дисперсію похибки σ_δ^2 відомою. Структурна модель регресії розглядає випадкові ξ.

Означення. *Випадкова величина δ називається похибкою вимірювання.*

За вибіркою незалежних однаково розподілених спостережень $Z_i = (y_i, x_i)$, $i = \overline{1, n}$, потрібно оцінити невідомий вектор $\beta = (\beta_0; \beta_1)^T$.
Адаптуємо оціночну функцію

$$S^{(q)}(y, \xi, \beta) = f^{(1-q)}(y, \xi, \beta)(y - \exp(\beta_0 + \beta_1\xi))\exp(-\beta_0 - \beta_1\xi)(1; \xi)^T$$

до похибок вимірювання, побудувавши виправлену оціночну функцію $S_C^{(q)}$ таку, що для всіх β з Θ виконується м.н. $\mathsf{E}[S_C^{(q)}(y, x, \beta)|y, \xi] = S^{(q)}(y, \xi, \beta)$.
Визначимо оцінку $\widehat{\beta_n}(q)$ як розв'язок рівняння

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} S_C^{(q)}(y_i, x_i, \beta) = \bar{0}, \tag{1}$$

якщо такий розв'язок існує; в протилежному випадку покладемо $\widehat{\beta_n}(q) = \bar{0}$.

Теорема. *Нехай у структурній гамма-моделі з похибками вимірювання виконуються такі умови:*

(1) *показник q залежить від обсягу вибірки, $q = q_n$, причому $0 < q_n \leqslant 1$, $n \geqslant 1$, та $q_n \to 1$ при $n \to \infty$;*
(2) *параметрична множина Θ є компактною в $\mathbb{R}^2$, а істинне значення b параметра β є внутрішньою точкою Θ;*
(3) *існує $K > 0$ таке, що $|\xi| \leqslant K$ м.н., де K – невідома стала; крім того, $\mathsf{D}\xi \neq 0$.*

Тоді мають місце наступні твердження:
а) *зрештою рівняння* (1) *має розв'язок, причому оціночна функція задається скінченною сумою;*
б) *оцінка $\widehat{\beta_n}(q)$ є строго консистентною, тобто $\widehat{\beta_n}(q) \to b$ з імовірністю* 1 *при $n \to \infty$, де b — істинне значення β.*

Література

[1] Ferrari D., Yang Y. (2010). Maximum L_q-likelihood Estimation. *Annals of Statistics*, vol. 38, no. 2, pp. 753–783.

МНТУ ім. ак. Ю.Бугая, Київ, Україна
Email address: an.savchenko@istu.edu.ua

УЗАГАЛЬНЕННЯ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗКЛАДУ РАМАНУДЖАНА–ВАТСОНА–КНУТА

В. В. СТАМАТІЄВА

Нехай задана нескінченна послідовність об'єктів довільної природи, кожний з яких рівноймовірно та незалежно від інших належить до одного з n класів. Об'єкти надходять один за одним послідовно у цілі моменти часу. Для фіксованого $r \geqslant 1$ введемо випадкову величину $T_r^{(n)}$, яка описує перший момент часу, коли деякий з класів з'явився в $(r+1)$-й раз. Зокрема, якщо $r = 1$, $n = 365$, а під об'єктами розуміти людей, народжених в 1 з 365 днів року, то ми одержимо класичну постановку добре відомої задачі про дні народження.

Багато робіт присвячено формулам для числових характеристик величин $T_r^{(n)}$. У тому числі, це стосується $\mathbb{E}T_r^{(n)}$. Наприклад, у випадку $r = 1$ у роботі [1] було наведено формулу

$$\mathbb{E}T_1^{(n)} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\Bigl(1 + \frac{t}{n}\Bigr)^n \mathrm{d}t \tag{1}$$

та початок асимптотичного розкладу Рамануджана–Ватсона–Кнута

$$\mathbb{E}T_1^{(n)} = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} - \frac{4}{135n} + \ldots . \tag{2}$$

Узагальненням (1) на випадок довільного $r \geqslant 1$ є формула

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\Bigl[S_r\Bigl(\frac{t}{n}\Bigr)\Bigr]^n \mathrm{d}t, \tag{3}$$

$$\text{де} \quad S_r(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{x^j}{j!},$$

яка була одержана у роботі Кламкіна та Ньюмана [2].

Цікавою задачею є узагальнення розкладу (2) на випадок $r \geqslant 2$. Його можна отримати, застосувавши метод Лапласа до дослідження асимптотичної поведінки інтеграла (3).

Одержані результати у цьому напрямку подамо у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. *Нехай $T_r^{(n)}$, $r \geqslant 2$, є першим моментом часу, коли деякий з n класів з'явився в $(r+1)$-й раз. Тоді має місце наступна рівність:*

$$\mathbb{E}T_r^{(n)} = n^{\frac{r}{r+1}} \sqrt[r+1]{(r+1)!}\Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right) + n^{\frac{r-1}{r+1}} \frac{1}{(r+2)!} \sqrt[r+1]{(r+1)!^{r+3}}\Gamma\left(\frac{r+3}{r+1}\right) +$$
$$+ n^{\frac{r-2}{r+1}} \left(\frac{1}{2} \frac{(r+1)}{(r+2)!^2} \sqrt[r+1]{(r+1)!^{2r+5}}\Gamma\left(\frac{2r+5}{r+1}\right) - \frac{\sqrt[r+1]{(r+1)!^{r+4}}}{2r!(r+3)(r+1)}\Gamma\left(\frac{r+4}{r+1}\right)\right) + o(n^{\frac{r-2}{r+1}}),$$
$$n \to \infty.$$

Література

[1] Ільєнко А.Б., Стаматієва В.В. (2021). Гранична теорема для точкових процесів, пов'язаних з узагальненою задачею про дні народження. *Науковий вісник Ужгородського університету*, vol. 39, no. 2, pp. 38–46.

[2] Klamkin M.S., Newman D.J. (1967). Extensions of the birthday surprise. *J. Comb. Theory*, vol. 3, pp. 279–282.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: stamatieva56@gmail.com

МОДЕЛЬ АВТОРЕГРЕСІЇ НА ПЛОЩИНІ

С. В. ШКЛЯР

Досліджуємо існування та властивості стаціонарного розв'язку рівняння

$$X_{i,j} = aX_{i-1,j} + bX_{i,j-1} + cX_{i-1,j-1} + \epsilon_{i,j}, \tag{1}$$

де $\epsilon_{i,j}$ є некорельованими випадковими величинами з нульовим середнім та однаковою дисперсією σ_ϵ^2. Наведена модель є частковим випадком авторегресійної моделі у n-вимірному просторі, яка розглядалась у статті [1]. Випадки $c = 0$ та $c = -ab$ розглядались у [2, 3].

Зауваження. Наведена модель є узагальненням моделі AR(1). Рівняння авторегресії $X_i = \phi X_{i-1} + \epsilon_i$ має стаціонарний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $|\phi| \neq 1$. Якщо $|\phi| < 1$, то автоковаріаційна функція стаціонарного розв'язку дорівнює $\operatorname{cov}(X_{i+h}, X_i) = \sigma_\epsilon^2 \phi^{|h|}(1-\phi^2)^{-1}$, та розв'язок X зображується у вигляді $X_i = \sum_{k=0}^\infty \phi^k \epsilon_{i-k}$. Якщо $|\phi| > 1$, то $\operatorname{cov}(X_{i+h}, X_i) = \sigma_\epsilon^2 \phi^{-|h|}(\phi^2-1)^{-1}$, та X зображується у вигляді $X_i = -\sum_{k=1}^\infty \phi^{-k}\epsilon_{i+k}$. В обох випадках розв'язок X має спектральну щільність

$$f_X(\nu) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{|1-\phi\exp(2\pi\nu \mathrm{i})|^2} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - 2\phi\cos(2\pi\nu) + \phi^2}.$$

Твердження 1. *Різницеве рівняння* (1) *має стаціонарний розв'язок тоді і тільки тоді, коли* $D := f_1 f_2 f_3 f_4 > 0$, *де* $f_1 = 1 - a - b - c$, $f_2 = 1 - a + b + c$, $f_3 = 1 + a - b + c$ *та* $f_4 = 1 + a + b - c$.

Твердження 2. *Припустимо, що* $D > 0$, *та* X *є стаціонарним розв'язком рівняння* (1). *Тоді*

(1) *Стаціонарне поле* X *центроване,* $\mathsf{E}\, X_{i,j} = 0$, *та має спектральну щільність*

$$f_X(\nu_1, \nu_2) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{|1 - a\exp(2\pi\nu_1 \mathrm{i}) - b\exp(2\pi\nu_2 \mathrm{i}) - c\exp(2\pi(\nu_1+\nu_2)\mathrm{i})|^2}.$$

(2) *У тих точках, де* $h_1 h_2 = 0$, *(або у більш загальному випадку* $h_1 h_2 f_1 f_4 \leqslant 0$*) автоковаріаційна функція стаціонарного поля* X *дорівнює*

$$\gamma_X(h_1, h_2) = \operatorname{cov}(X_{i+h_1, j+h_2}, X_{i,j}) = \sigma_\epsilon^2 \alpha^{|h_1|}\beta^{|h_2|} D^{-1/2}, \tag{2}$$

де $\alpha = \dfrac{2\,(a+bc)}{1 + a^2 - b^2 - c^2 + \operatorname{sign}(f_1 f_2)\sqrt{D}}$ *та*

$$\beta = \frac{2\,(ac+b)}{1-a^2+b^2-c^2+\operatorname{sign}(f_1 f_3)\sqrt{D}}.$$ *Зокрема,* $\mathsf{E}\, X_{i,j}^2 = \sigma_\epsilon^2 D^{-1/2}$.

(3) *Справджуються рівняння Юла-Волкера*

$$\gamma_X(h_1,h_2) = a\gamma_X(h_1-1,h_2) + b\gamma_X(h_1,h_2-1) + c\gamma_X(h_1-1,h_2-1)$$

у кожному з чотирьох випадків

$$\begin{array}{llllllll} h_1 \geqslant 1, & f_1 f_3 > 0, & f_2 f_4 > 0 & \text{або} & h_1 \leqslant 0, & f_1 f_3 < 0, & f_2 f_4 < 0 & \text{або} \\ h_2 \geqslant 1, & f_1 f_2 > 0, & f_3 f_4 > 0 & \text{або} & h_2 \leqslant 0, & f_1 f_2 < 0, & f_3 f_4 < 0. & \end{array} \tag{3}$$

(4) *Випадкове поле X зображується у вигляді*

$$X_{i,j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \psi_{k,l} \epsilon_{i-k,k-\ell},$$

де $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\psi_{k,\ell}| < \infty$.

У будь-якому з чотирьох випадків (3) $\psi_{-h_1,-h_2} = 0$.

Знаючи $\gamma_X(h_1,h_2)$ при $h_1 h_2 = 0$, користуючись парністю та рівняннями Юла-Волкера, можна отримати значення $\gamma_X(h_1,h_2)$ при всіх h_1 та h_2.

Твердження 3. *Припустимо, що $f_1 > 0$, $f_2 > 0$, $f_3 > 0$, $f_4 > 0$ та поле X є стаціонарним розв'язком рівняння* (1). *Тоді*

(1) *Виконуються рівняння Юла-Волкера*

$$\gamma_X(0,0) = a\gamma_X(1,0) + b\gamma_X(0,1) + c\gamma_X(1,1) + \sigma_\epsilon^2,$$
$$\gamma_X(h_1,h_2) = a\gamma_X(h_1-1,h_2) + b\gamma_X(h_1,h_2-1) + c\gamma_X(h_1-1,h_2-1)$$

при $\max(h_1,h_2) \geqslant 1$.

(2) *Рівність* (2) *виконується при* $h_1 h_2 \leqslant 0$.

(3) $X_{i,j} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} \psi_{k,\ell}\epsilon_{i-k,j-\ell}$, *де*

$$\psi_{k,\ell} = \sum_{m=0}^{\min(k,\ell)} \binom{k}{m}\binom{\ell}{m} a^{k-m} b^{\ell-m} (ab+c)^m, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{\infty} |\psi_{k,\ell}| < \infty.$$

Література

[1] Tjøstheim D. (1978). Statistical spatial series modelling. *Advances in Applied Probability*, vol. 10, no. 1, pp. 130–154.

[2] Whittle P. (1954). On stationary processes in the plane. *Biometrika*, vol. 41, no. 3/4, pp. 434–449.

[3] Baran S., Pap. G., Van Zuijlen M. (2004). Asymptotic inference for a nearly unstable sequence of stationary spatial AR models. *Statistics & Probability Letters*, vol. 69, no. 1, pp. 53–61.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Email address: shklyar@univ.kiev.ua

ПРО АСИМПТОТИКУ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТРИБКАМИ

В. К. ЮСЬКОВИЧ

Нехай W – вінерівський процес, $\tilde{N}$ – компенсована пуассонівська випадкова міра. Ми вивчаємо асимптотику розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь вигляду

$$\mathrm{d}X(t) = a(X(t))\mathrm{d}t + b(X(t))\mathrm{d}W(t) + \int_{\mathbb{R}} c(X(t-), u)\tilde{N}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u), \; X(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

при $t \to \infty$ за умови, що $X(t) \to +\infty$ майже напевно.

Наступна теорема надає достатні умови асимптотичної еквівалентності розв'язку стохастичного диференціального рівняння (1) та розв'язку звичайного диференціального рівняння

$$\mathrm{d}x(t) = Ax^{\alpha}(t)\mathrm{d}t, \; x(0) > 0.$$

Теорема 1. *Нехай X – розв'язок стохастичного диференціального рівняння (1) такий, що $X(t) \to +\infty$ м.н., та нехай $\alpha \in [0, 1)$. Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1) задовольняють умови:*

- *для деякої сталої $A_+ \geqslant 0$*
$$|a(x)| \leqslant A_+ x^{\alpha}, \quad x \geqslant 1;$$
- *для деякої сталої $A > 0$*
$$a(x) \sim Ax^{\alpha}, \; x \to +\infty;$$
- *для деяких сталих $C \geqslant 0$ та $\beta \in \left[0, \frac{1+\alpha}{2}\right)$*
$$b^2(x) + \int_{\mathbb{R}} c^2(x, u)\nu(\mathrm{d}u) \leqslant C\left(1 + |x|^{2\beta}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді

$$X(t) \sim ((1-\alpha)At)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \to \infty, \; \textit{м.н.}$$

Зауваження 1. Ми також вивчаємо достатні умови того, що $X(t) \to +\infty$ м.н.

Література

[1] Yuskovych V.K. (2023). On asymptotic behavior of stochastic diferential equation solutions in multidimensional space. *arXiv preprint arXiv:2306.02089.*

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: viktyusk@gmail.com

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ РІВНОМІРНИХ СПЕЙСИНГІВ

Ю. В. ЯРОШ

Нехай Δ_n — точковий процес спейсингів:

$$\Delta_n = \sum_{i=0}^{n} \delta_{U_{i+1:n} - U_{i:n}}, \quad n \geqslant 1$$

де $U_{1:n}, \ldots, U_{n:n}$ — порядкові статистики, побудовані за n незалежними рівномірно розподіленими на відрізку $[0, 1]$ випадковими величинами, $U_{0:n} = 0$ і $U_{n+1:n} = 1$. δ_x — міра Дірака в x.
Ми встановлюємо дві теореми про граничну поведінку даного точкового процесу.

Теорема 1. *Нехай Π_1 — пуассонівський точковий процес на $\mathbb{R}$, щільність міри інтенсивності μ якого відносно міри Лебега λ задається як $\frac{d\mu}{d\lambda}(x) = e^{-x}$. Тоді має місце груба збіжність за розподілом:*

$$n\Delta_n - \ln n \xrightarrow{vd} \Pi_1$$

Теорема 2. *Нехай Π_2 — однорідний пуассонівський точковий процес на $[0, +\infty)$ з одиничною інтенсивністю. Тоді має місце груба збіжність за розподілом:*

$$n^2\Delta_n \xrightarrow{vd} \Pi_2$$

З цих результатів, зокрема, випливають граничні теореми для k-ого найбільшого та k-ого найменшого спейсингів, отримані іншими методами в статті [1].

Література

[1] Lars Holst (1980). On the Lengths of the Pieces of a Stick Broken at Random. *Journal of Applied Probability*, vol. 18, no. 3, pp. 623–634.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: yuriiyarosh@gmail.com

Доповідь базується на сумісних результатах з А.Б. Ільєнком.

IV

ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ ТА ТЕХНОЛОГІЇ В ОСВІТІ

INFORMATION SYSTEMS AND TECHNOLOGIES IN EDUCATION

MODELING OF DYNAMIC SYSTEMS USING MAPLE

O. V. AVRAMENKO

This report presents the capabilities of the software product for building models of dynamic systems with subsequent computer simulation and conducting virtual experiments in Maple, as well as the results of its implementation in the educational process.

Creating a mathematical model of the system using symbolic expressions is available for both systems of differential equations and other mathematical expressions, with the ability to transition between discrete and continuous systems [1]. Further changes to the model's parameters allow evaluating their impact on the system's behavior. Numerical integration of the system of equations is also applied to model the system's behavior over time, using various parameter values and input data. The analysis of results includes generating graphs, computing numerical characteristics of the system, and identifying stable and unstable equilibrium points. Notably, the software product allows the use of Maple for optimizing system parameters or designing control strategies. One of the tasks involves conducting multiple virtual experiments to explore various scenarios and aspects of the system [2].

The implementation of simulating the behavior of dynamic systems allows studying different characteristics of these systems, optimizing their performance, exploring their stability and dynamics, and ultimately gaining a better understanding of their behavior without the need for physical experiments. The software product is integrated into the educational process for students majoring in Applied Mathematics. The experience of using this package as an educational tool in the study of discrete and continuous dynamic systems demonstrates its significant capabilities.

References

[1] Lynch S. (2009). *Dynamical Systems with Applications using Maple^{TM} (2nd ed.)*. Boston: Birkhäuser.

[2] Udriste C., Tevy I. (2021). *Dynamical Systems and Differential Geometry via MAPLE*. Cambridge Scholars Publishing.

National University "Kyiv-Mohyla Academy", Kyiv, Ukraine
Email address: o.avramenko@ukma.edu.ua

Vytautas Magnus University, Kaunas, Lithuania
Email address: olga.avramenko@vdu.lt

With the support of Research Council of Lithuania.

MODELING THE PROFILE OF STUDENTS' EDUCATIONAL TRAJECTORY IN CYBERSECURITY IN THE CONTEXT OF WAR IN UKRAINE

G. WEIGANG, K. KOMAR

In the modern world, where information technology penetrates all spheres of life, cybersecurity has become extremely important. Online security incidents can have serious consequences for individuals, companies, and even countries.

Military conflicts have become as virtual as they are real. Information destabilization of society leads to a change in the perception of the facts of the real situation in countries. In Ukraine and many other countries, cybersecurity has become an important aspect of national security in times of war and hybrid threats.

Many studies on the formation of an individual educational trajectory are conducted by both domestic and foreign experts who study various factors and stereotypes that influence the choice of academic trajectories of students at different stages of their training paper [1], [2], [3], [4], [5].

Ensuring proper education, developing relevant skills and using advanced technologies in this area are important steps to ensure high-quality training of specialists to ensure Ukraine's national security and resilience in cyberspace. The education of students and their practical training should contribute to the formation of special qualities, knowledge and competencies to ensure effective cyberspace protection of information systems of the country's infrastructure.

Key qualities and knowledge required by cybersecurity professionals in times of war: Expertise in cybersecurity; Ability to analyze threats and vulnerabilities; Incident response; Communication skills; Crisis management skills; Understanding of information warfare; Political and legal education; Knowledge and experience with cyber defense technologies; Technological skills; Ability to continuously learn.

The cybersecurity student's educational trajectory profile model can be represented as a multidimensional space where each dimension corresponds to a specific aspect of education and training. Let's denote this space as V and each dimension as Vi.

For example, one dimension could be the student's level of cybersecurity knowledge and skills, labeled $V1$. Another dimension could be the number of assignments and projects that the student has successfully completed, labeled as $V2$. Additionally, you can include dimensions such as academic ranking, participation in cybersecurity competitions and contests, work experience, etc.

Mathematically, the model can be expressed as:

$$M(stud) = f(V1, V2, ..., Vn)$$

$M(stud)-$ is a model of the student's educational trajectory profile,

$n-$ is the number of dimensions (aspects) included in the model.

The construction of this model allows us to form a matrix of the level of training and evaluate its effectiveness. Some of the dimensions that form the basis of the cybersecurity student educational trajectory profile model are listed below: Educational level (EL); Learning materials (LM); Knowledge and skills (KS); Experience (E); Attestation (A); Surveys (S).

This model allows quantifying and visualizing the profile of a student's educational trajectory in the field of cybersecurity. Taking into account the study, it can be noted that the use of this model of the student's educational trajectory profile allows: adapt learning to the needs of the student, helping him or her to develop the necessary skills and competencies; to constantly monitor the academic and professional progress of the student, which helps to respond in time to possible problems; students to plan their career in cybersecurity, identifying the necessary steps to achieve success; educational institutions - to allocate resources efficiently to ensure the best learning experience for students.

Thus, building a specialized model of a student's educational trajectory in cybersecurity in wartime requires the integration of mathematical approaches, artificial intelligence tools, and category theory. Such a model allows to effectively plan and support the educational process, providing students with the necessary skills and competencies to work in the field of cybersecurity in wartime, which is an important component of the country's security and defense.

References

[1] Soo Jin Hwang, Ann M. Gansemer-Topf. (2017). *Exploring Factors Affecting College Student Education Progression: A Longitudinal Study.* Research in Higher Education

[2] Tessa V. West. (2016). *Understanding College Students' Academic Pathways: A Longitudinal Examination of Descriptive Norms.* The Journal of Higher Education.

[3] Shevchenko, A., Zhoga, R. (2023). *Individual educational trajectory in modern Ukrainian higher education as a tool for adaptability of its environment* Adaptive Management: Theory and Practice. Series Pedagogics, 16(31).

[4] Diorditsa I. (2017). *Educational standards for the training of cybersecurity specialists.* In: Jurnalul juridic national: teorie si practica: teorie si practica, 1(23), pp. 46-49.

[5] Korostianets T.P. (2020). *Individual educational trajectory of a student: analysis of interpretations of concepts.* Scientific works of young scientists of Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University. Drohobych, vol. 30. pp. 73-80.

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Email address: `weigang.ganna@gmail.com`

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine
Email address: `katyakomar7@gmail.com`

ЗАСТОСУВАННЯ ГРАФІЧНИХ РЕДАКТОРІВ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ В ПРОЦЕСІ ПІГОТОВКИ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ ІНФОРМАТИКИ

Б. П. АНТОНЮК

У сучасному світі інформаційні технології розвиваються з небаченою швидкістю, кожного дня люди створюють нові пристрої, програмні продукти для полегшення та покращення життя. Зміна умов життя суспільства незмінно викликає відповідні зміни і вдосконалення системи освіти. Головним пріоритетом стають не лише формування достатніх обсягів знань, умінь і навичок, але і формування особистості учня та студента з властивими їм індивідуальністю, особливостями та здібностями. Тому ставиться завдання розвивати творчість учнів і студентів, націлену на активну навчально-пізнавальну діяльність і використання сучасних інформаційних технологій в процесі з'ясування сутності різноманітних явищ, та їх причинно-наслідкових зв'язків. За такого підходу змінюється погляд на самостійну навчально-пізнавальну діяльність студентів і учнів, на зміст і методи навчання предметних дисциплін. На основі інформатизації навчально-виховного процесу у педагогів з'являється можливість використовувати в навчанні широкий спектр інформаційних технологій. Важливе місце серед таких технологій посідає комп'ютерна графіка яка невпинно розширює свою методологічну основу, інструментальну базу й сферу застосування.

Важко переоцінити важливість значення комп'ютерно-графічної підготовки спеціалістів в епоху масової інформатизації суспільства загалом і освіти, зокрема. Вплив комп'ютерної графічної підготовки на формування творчої особистості зумовлений, як відомо, тим фактом, що оптико-моторний гнозис у людини за інформаційною потужністю на кілька порядків перевищує логіко-вербальну компоненту. Тому відтворення образів комп'ютерної графіки у свідомості через співвідношення геометричних форм, кольорів, масштабів, текстур, а також швидкостей їх зміни створює передумови для динамічного розвитку геометричного (просторового) мислення та ефективного засвоєння нової інформації.

Теоретичною й методологічною основою комп'ютерної графіки є всі розділи математики, фізика, фізіологія, основи інформатики та обчислювальної техніки, формальна логіка, теорія побудови алгоритмів, основи програмування, образотворче мистецтво, креслення та багато інших. Комп'ютерна графіка є творчим додатком здобутих у зазначених дисциплінах знань, розширенням і закріпленням їх та стимулом більш ґрунтовного вивчення змістового матеріалу загальнотеоретичних дисциплін. Більше того, комп'ютерну графіку, як і інформатику в цілому, необхідно оцінювати з позицій подальшої практичної корисності набутих у процесі навчання знань, умінь і навичок у самостійній продуктивній діяльності майбутнього спеціаліста.

Якщо учитель інформатики володітимете основами комп'ютерного графічного дизайну, він зможе активно використовувати різноманітні цифрові засоби у своїй професійній діяльності. Це допоможе зробити уроки більш яскравими і захоплюючими, і дасть поштовх до педагогічної творчості на основі педагогічно доцільного використання сучасних технологій навчання.

Комп'ютерна графіка є однією з змістовно визначальних сфер знань, які мають формувати сучасну інформаційно-цифрову компетентність особистості, яка входить до переліку ключових компетентностей та наскрізних умінь відповідно до Державних освітніх стандартів України та на які звертається увага в Рекомендаціях Європейського Парламенту та Ради Європейського Союзу щодо формування ключових компетентностей освіти впродовж життя.

Варто зазначити, що інформаційний простір пропонує дедалі ширший вибір графічних редакторів, як растрових, так і векторних, – на різні смаки і потреби користувачів. Особливої уваги заслуговує вивчення редакторів, які належать до так званого вільного програмного забезпечення, зокрема онлайн редактори.

Оскільки комп'ютерна графіка – це процес створення графічних зображень за допомогою спеціальних програм, яких сьогодні існує величезна кількість, то важливо провести огляд та аналіз цих програм на сучасному ринку.

Ознайомлюючи здобувачів освіти з роботою графічних редакторів, головне показати суть основних загальних прийомів та методів, які використовуються при обробці малюнків.

Таким чином, вивчення комп'ютерної графіки сприяє формуванню у студентів наукового світобачення, розвитку творчого потенціалу, конструктивного, образного, просторового, асоціативного мислення, що є однією з ознак фундаментальності професійної освіти.

Література

[1] Dehtiarova N., Petrenko S., Rudenko Yu. Pedagogical design in the context of blended learning for future computer science teachers. Modern approaches to the development of knowledge management. *Ljubljana. Slovenia.* pp. 313–323.

[2] Струтинська О.В. Особливості сучасного покоління учнів і студентів в умовах розвитку цифрового суспільства. *Електронне наукове фахове видання "Відкрите освітнє е-середовище сучасного університету"*, 2020. (9). С. 145–160.

[3] Рамський Ю.С., Струтинська, О.В., Умрик, М.А. Модернізація змісту навчання майбутніх вчителів інформатики в умовах становлення інформаційного суспільства. *Науковий часопис НПУ імені МП Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання.* 2020. 22 (29). С. 17–25.

[4] Смирнова-Трибульська, Є.М. *Інформаційно-комунікаційні технології в професійній діяльності вчителя. Посібник для вчителів.* Херсон: Видавництво Айлант (2007)., 704 с.

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: `Antonyuk.Bogdan@vnu.edu.ua`

БЕТА-ФУНКЦІЯ ЕЙЛЕРА ТА ІМОВІРНІСНИЙ АНАЛІЗ ЧУТЛИВОСТІ

В. І. БАЛАБУХА, І. В. КАЛЬЧУК

Імовірнісний аналіз чутливості – це метод, який використовується для визначення економічної ефективності в умовах невизначеності параметрів [1]. Імовірнісний аналіз чутливості використовує різні розподіли ймовірностей, залежно від властивостей рандомізованих параметрів.

Бета-розподіл визначається на інтервалі $[0;1]$, тому його можна застосовувати до таких параметрів, як ймовірність або корисність. Бета-розподіл має два параметри, які позначаються як a та b. Детальна процедура вибірки в MS Excel показана нижче.

У MS Excel формула для виведення чисел з бета-розподілу має наступний вигляд

$$\texttt{=ROZKL.BETA.ODWR(LOS();}\alpha\texttt{;}\beta\texttt{)},$$

причому параметри α і β оцінюються за наявними даними. Якщо параметр, який потрібно побудувати, є ймовірністю події, то для того, щоб підібрати значення цих параметрів, достатньо підставити під α кількість подій, які нас цікавлять (кількість "успіхів"), а під β N мінус кількість цих подій (тобто кількість "невдач"), де N – це кількість спостережень. Наприклад, якщо ймовірність певної події визначена як 0,50%, то при кількості спостережень $N = 1000$ ми очікуємо 5 "успіхів". Таким чином, $a = 5$, а $\beta = 1000 - 5 = 995$. Формула MS Excel для виведення з бета-розподілу з такими параметрами має вигляд

$$\texttt{=ROZKL.BETA.ODWR(LOS();5;995).}$$

Вибір параметрів є дещо складнішим у випадку корисності. Маючи середнє значення корисності μ і стандартну похибку s, значення параметрів α і β можна оцінити за допомогою так званого методу моментів. Знаючи, що середнє значення бета-розподілу $\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, а дисперсія $S^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$, можна оцінити, що $(\alpha+\beta) = \frac{\mu(1-\mu)}{S^2} - 1$ і $\alpha = \mu(\alpha+\beta)$. Наприклад, якщо середня корисність дорівнює 0,007, а стандартна похибка – 0,032, то сума шуканих параметрів дорівнює 204,08. Це дозволяє нам оцінити $\alpha = 0{,}70 \cdot 204{,}08 = 142{,}85$ і $\beta = 204{,}08 - 142{,}85 = 61{,}22$.

Формула MS Excel для виведення з бета-розподілу з такими параметрами має вигляд

$$\texttt{=ROZKL.BETA.ODWR(LOS();142.85;61.22).}$$

Якщо є потреба розглянути корисності, менші за 0 (стани, які оцінюються як гірші за смерть), то рішення полягає у витягуванні з гамма- або логнормального розподілу параметра “1 - корисність”. Отриманий таким чином параметр приймає мінімальне значення 0 (для найкращого стану здоров'я, який можна собі уявити, де корисність дорівнює 1), але не обмежений правою частиною і може приймати значення більше 1 (для станів, гірших за смерть, з корисністю менше 0), [1].

Література

[1] Briggs A. Sculpher M. Claxton K. (2006). *Decision Modelling for Health Economic Evaluation. Handbooks in Health Economic Evaluation.* Oxford University Press.

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: vitia1488.vb@gmail.com

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: kalchuk.inna@vnu.edu.ua

МЕТОДИКА СТВОРЕННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ З ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ СПЕЦІАЛІЗОВАНИХ МАТЕМАТИЧНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ

О. О. ДИХОВИЧНИЙ, Н. В. КРУГЛОВА

Нажаль, дистанційна форма навчання математичних дисциплін для студентів КПІ ім. Ігоря Сікорського через війну росії з Україною залишається поки що єдиноможливою. Як показує практика, найкращим способом контролю знань за таких умов є комп'ютерний тест. Завантаження письмових робіт на платформи дистанційної освіти, на пошту викладача чи у месенджер завдяки недоброчесності студентів має безліч недоліків у порівнянні з тестування: обмін розв'язками, пошук розв'язків в Інтернеті, використання спеціальних програм тощо. Щоб уникнути цих проблем потрібно контролювати процес виконання роботи у Zoom або Google Meet, що, в свою чергу, генерує додаткові проблеми. Це і додаткові витрати часу викладача, маніпулювання студентів можливістю доступу до інтернету, якістю інтернет трафіка. Не кажучи вже про те, що у студентів і викладачів виникали реальні проблеми з доступом до інтернету під час масованих ракетних атак росіянами енергетичних об'єктів України. Це призводило до збільшення часу завантаження робіт до декількох днів.

Звичайно, тестування теж має споріднені недоліки, проте їх вплив можна суттєво нівелюватити, створюючи тестові завдання з великою кількістю варіантів і конструюючи завдання таким чином, щоб їх розв'язок за допомогою онлайн-сервісів значно ускладнювався. Для такої задачі найкраще підходить створення шаблонів завдань у комп'ютерних системах Wolfram [1], Geogebra [2], Excel, R [3]. Під шаблоном ми розуміємо програму у відповідному середовищі, що містить певні параметри, змінюючи які, можна отримати необхідну кількість варіантів завдання. Це дозволяє не тільки поповнювати банк завдань великою кількістю однотипних завдань, але й підбирати відповіді зі "зручними" числами. Використання шаблонів значно економить час створення тесту, допомогає уникати помилок у відповідях, дозволяє постійно доповнювати і оновлювати банк завдань. Дуже важливим є те, що всі варіанти завдання, згенеровані шаблоном, мають однакову складність.

Для кожного розділу математики необхідно обрати найбільш підходящу комп'ютерну систему, що дозволить швидко генерувати і розв'язувати завдання. Наприклад, для завдань з теорії ймовірностей і статистики найкраще використовувати Excel, R. Проте у цих програмах неможливо вводити параметри, а потрібно змінювати вхідні дані, щоб отримувати відповіді у цілих числах.

Для задач з математичного аналізу ідеально підходить Wolfram Mathematica. У шаблон вводяться параметри, генеруються у певному діапазоні коефіцієнти функцій, обмежень тощо. Задачі аналітичної геометрії краще розв'язувати у Geogebra, а потім, рухаючи відповідні елементи малюнка, змінювати результат. На рис. 1 показано скріншот тестового питання на тему "Ряди".

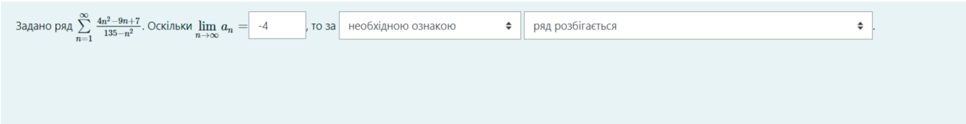


Рис. 1. Приклад тестового питання

Нижче наведено код шаблону у Wolfram Mathematica:

```
a=RandomInteger[{2,30}]
f[n_]:=(4a n^2-RandomInteger[{1,20}]n+RandomInteger[{3,35}])/
(RandomInteger[{-20,20}]+RandomInteger[{-10,10}]n+a n^2)
f[n]
Limit[f[n],n->Infinity]
```

Для наближених обчислень можна використовувати R.

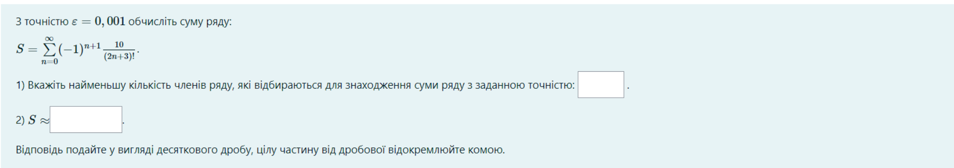


Рис. 2. Приклад тестового питання на наближене обчислення

І відповідний код шаблону у R:

```
eps<-0.001;a<-0;i<-0
while (10/factorial(2*i+3)>=eps){ a<-a+(-1)^(i+1)*10/factorial(2*i+3)
i<-i+1}
i;a
```

Література

[1] https://www.wolframcloud.com/?source=nav
[2] https://www.geogebra.org
[3] http://cran.us.r-project.org

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.dyx@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: natahak@ukr.net

ЗАСТОСУВАННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ ТЕХНІКИ У ВИВЧЕННІ АВТОМАТИЗАЦІЇ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

О. В. ІЩЕНКО

Автоматизацію технологічних процесів вивчають майбутні для розширення фахових компетентностей в галузі прикладного застосування комп'ютерної техніки в наукових дослідженнях та виробництві. Опанування цих процесів дозволяє підсилити цикл дисциплін зі схемотехнічної підготовки бакалаврів, а також надати їм додаткові знання і практичні навички при виконанні випускних кваліфікаційних робіт, та майбутній професійній діяльності. Це дозволяє формувати необхідного рівня теоретичну і практичну підготовку студентів для професійного використання знань основ автоматизації та автоматичних систем управління технологічних процесів при засвоєнні суміжних дисциплін. Шляхи опанування автоматизацією технологічних процесів або системи автоматизації використовуються для автоматичного управління процесами, такими як хімічні, нафтопереробні, паперові та целюлозні фабрики. Основна тенденція розвитку систем автоматизації йде у напрямі створення автоматичних систем, які здатні виконувати задані функції або процедури без участі людини. Роль людини полягає в підготовці початкових даних, виборі алгоритму(методу рішення) і аналізі отриманих результатів. Проте присутність у вирішуваних завданнях евристичних або складно програмованих процедур пояснює широке поширення автоматизованих систем. Тут людина бере участь в процесі рішення, наприклад, управляючи ним, вводячи проміжні дані. На міру автоматизації впливають тривалість часу, відведеного на рішення задачі, і її вид, — типова або ні. Так, при терміновому пошуку рішення нестандартної задачі слід покладатися тільки на самого себе.

Педагогічна проблема під час навчання автоматизації технологічних процесів майбутніх технологів полягає у висвітленні наступних питань [3].

- загальні положення, визначення, терміни, категорії — підґрунтя поняття автоматизації;

- історичні відомості, місце автоматики в загальних напрямках розвитку суспільства, наукових та технічних дисциплін;

- автоматика та технічний прогрес;

- основні напрямки автоматизації: контроль, вимірювання, регулювання, управління, захист, сигналізація тощо, та способи і методи досягнення мети в технічному сенсі під кутом зору розвитку та використання нових технологій;

- класифікація та характеристики застосування основних засобів автоматизації технологічних процесів;
- перетворювачі інформації, виконавчі органи і механізми;
- технологічний процес, технологічна операція;
- опис, характеристичні параметри, уніфікація структурних моделей операцій на виробництві з метою побудови схем автоматизації технологічних процесів;
- структурні особливості, основні принципи побудови та класифікаційні ознаки автоматизованих систем управління технологічними процесами;
- системи автоматичного керування та регулювання в якості підсистем;
- перспективні напрями розвитку та впровадження автоматизованих систем різного призначення з урахуванням новітніх інноваційних технологій [4].

Отже, навчання автоматизації технологічного процесу технологів має прикладний характер, який передбачає збільшення продуктивності, покращує якість продукції, мінімізацію або усунення участі людини від виробництва, підвищення надійності, оптимізацію управління, а також точність та безпечність виробництва.

Література

[1] Автоматизація технологічних процесів. URL: `https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%B2%D1%82%D0%BE%D0%` (дата звернення 11.09.2023)

[2] Автоматизація технологічних процесів. Методичні вказівки до виконання дипломного проекту освітнього рівня «бакалавр» та самостійної роботи для студентів спеціальності 151 автоматизація та комп'ютерно-інтегрованітехнології. URL: `https://kxtp.kpi.ua/common/my-fsa-2017pv.pdf` (дата звернення 11.09.2023)

[3] Бабіченко А.К., Тушинський В.І., Михайлов В.С. Промислові засоби автоматизації: навчальний посібник / за заг. ред. Бабіченка А.К. Харків: НТУ "ХПГ", 2001. Ч. 1. 470 с.

[4] Іщенко О.В. Комп'ютерне моделювання та автоматизація процесу виробницва 1,2 – дихлоретану. URL: `https://kxtp.kpi.ua/theses/2020-ishchenko.pdf` (дата звернення 11.09.2023)

[5] Лукінюк М.В. Автоматизація типових технологічних процесів: технологічні об'єкти керування та схеми автоматизації: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл., які навчаються за напрямом «Автоматизація і комп'ют.- інтегр. технології. К.: НТУУ «КПІ», 2008. 236 с.

[6] Робоча навчальна програма з дисципліни «Автоматизація технологічних процесів та виробництв». URL: `http://surl.li/dwnkr` (дата звернення 11.09.2023)

[7] Організація виробництва. URL: `https://library.if.ua/book/106/7125.html` (дата звернення 11.09.2023)

ЦИФРОВІ РІШЕННЯ ДЛЯ РОЗВИТКУ СТАРТАП-ЕКОСИСТЕМИ ОСВІТНЬОГО ЗАКЛАДУ

Я. О. КОЛОДІНСЬКА

Через сучасні виклики, пов'язані спочатку з пандемію COVID-19, а потім – з повномасштабним вторгненням росії в Україну у лютому 2022 року, освітні заклади були вимушені швидко адаптувати свої підходи до навчання. Ці виклики вимагали від освітніх інституцій перегляду і переосмислення своєї діяльності, а також впровадження цифрових інновацій для забезпечення надійної та ефективної освіти. Одними з ключових тенденцій в освіті і науці України стали цифрова трансформація та робота над побудовою інноваційної екосистеми у навчальних закладах [1].

Освітніми закладами були впроваджені в навчальний процес цифрові рішення, що надали можливість продовжити навчання навіть в умовах військового часу. Сучасні виклики показали важливість створення та застосування інноваційних підходів до освіти та підкреслили необхідність гнучкості та швидкого реагування з боку освітніх закладів. З огляду на вищевказані виклики, актуальним та затребуваним напрямком у світі і в Україні, що активно розвивається, є академічне підприємство та розробка стартап-проєктів, особливо, з використанням цифрових технологій. Інноваційне підприємництво є одним із рушіїв економічного зростання країни, розвитку культури, освіти і науки, джерелом створення якісних робочих місць. Студенти та викладачі стають активними учасниками підприємницької спільноти, а університети – платформами для зрощування майбутніх підприємців та підтримки стартап-екосистеми.

У квітні 2023 року Міністерство цифрової трансформації представило драфт Стратегії розвитку екосистеми інновацій в Україні, в котрому йдеться про впровадження ініціатив комплексної підприємницької освіти для інноваторів, розвиненої професійної та інноваційної освіти для талантів майбутнього та науки як фундаменту для інноваційного розвитку. Ключовими бенефіціарами даних ініціатив стануть школи, університети, науково-дослідницькі центри, заклади неформальної освіти та інші [2]. Таким чином, щоб стимулювати підприємницьке мислення та інноваційну діяльність серед студентів, навчальні заклади повинні впроваджувати комплексні програми, цифрові рішення та ініціативи, які сприятимуть розвитку стартап-екосистеми.

Розглянемо впроваджені на сьогоднішній день диджитал інструменти та ініціативи і роль їх застосування освітніми закладами у розвитку стартап-екосистеми:

(1) Цифрові платформи та портали, що допомогають закладам освіти залучити школярів або студентів до стартап активностей, надають онлайн-курси та ресурси для студентів, які бажають розвинути свої навички у сфері інноваційного підприємництва. Наприклад, на платформі «Дія. Цифрова освіта» можна знайти освітні серіали такі, як: «Стартуй стартап», «Підприємництво для школярів», «Почати бізнес. Креативна індустрія» та інші. Також лідерами ринку онлайн-навчання, котрими користуються багато українців, є Coursera, EdX, Udemy [3].
(2) Цифрові інструменти дозволяють організувати та популяризувати стартап івенти, конкурси та хакатони. Це сприяє об'єднанню студентів, викладачів та підприємців для спільної роботи над ідеями та проєктами.
(3) Всеукраїнські освітні проєкти та ініціативи від фахівців практиків та бізнесу. Наприклад Всеукраїнська програма «Підприємницький університет» надає методичні матеріали та інші можливості від стартап-інкубатора УЕР викладачам та студентам для створення та розвитку їх власних інноваційних ідей в університеті.
(4) Інноваційні інфраструктури, що засновані на базі університету такі, як стартап клуби чи школи, інкубатори чи акселератори, дають можливість студентам знаходитись у середовищі однодумців, фахівців-практиків, експертів та отримувати менторську підтримку.

Незважаючи на вже впроваджені цифрові технології, ініціативи та інфраструктуру до освітніх закладів, Україна потребує системного розвитку людського капіталу, створення навчальних програм, формування підприємницького мислення населення та започаткування власних EdTech стартапів. Розвиток цифрових інструментів у сфері стартапів сприяє не лише створенню інноваційних проєктів, а й зростанню кількості успішних стартапів, які виходять на ринок та сприяють економічному розвитку країни.

Література

[1] Міністерство освіти і науки України. Цифрова трансформація освіти і науки. *URL:* https://mon.gov.ua/ua/tag/cifrova-transformaciya-osviti-ta-nauki
[2] Міністерство цифрової трансформації України, Центр економічного відновлення (2023). Розвиток екосистеми інновацій в Україні. *URL:* https://drive.google.com/drive/folders/1BsqTijFWycOQUmUhZvbFmwZSUMT4HmlB
[3] Міністерство освіти і науки України. Цифрові платформи у вищій освіті. *URL:* https://mon.gov.ua/ua/osvita/cifrova-osvita/cifrovi-platformi-u-vishij-osviti
[4] Скляренко О.В., Федік О.І., Колодінська Я.О. (2021). Digital рішення для управління проєктами та бізнес-процесами в умовах сучасних викликів. *Журнал "Економіка і управління"*, no. 2 (90), pp. 85–90

ПВНЗ «Європейський університет», Київ, Україна
Email address: yanina.kolodinska@e-u.edu.ua

БАЗИ ДАНИХ: ПІДХОДИ ДО ЇХ ВИВЧЕННЯ ТА СЕРВІСИ ДЛЯ СТВОРЕННЯ

О. П. КУДРЕВИЧ

Інформаційно-цифрова компетентність сучасного здобувача освіти передбачає впевнене і водночас критичне застосування інформаційно-комунікаційні технології, щоб створити, знайти, обробити інформацію, обмінятися нею в публічному просторі та приватному спілкуванні. Здобувач освіти — інформаційно й медіа-грамотна особистість, алгоритмічно мислить, вміє працювати з базами даних, має навички безпеки в Інтернеті та кібербезпеки, знає основи програмування, розуміє етику роботи з інформацією (авторське право, інтелектуальна власність тощо).

Саме тому в курсі інформатики передбачено вивчення теми «Бази даних. Системи управління базами даних». Задача учителя — сприяти формуванню культури правильної постановки задачі, пошуку й добору інформації адже це не тільки частина роботи бухгалтера, менеджера, юриста, а й важлива складова життя пересічного громадянина, який шукає і збирає інформацію за допомогою Internet або ChatGPT. Якщо вчасно не сформована культура складання запитів, то людина зіштовхується з безліччю варіантів або не одержує відповіді на поставлений запит взагалі. Пропоную наступні підходи до вивчення баз даних:

1) Ознайомлення з основами баз даних.
2) Практичні завдання та проекти.
3) Запити до баз даних.
4) Розробка бази даних.
5) Вивчення мов запитів.
6) Проектні завдання.

Традиційно «Бази даних» вивчаємо з використанням системи управління базами даних MS Access. Та виклики сьогодення: ізоляція під час пандемії, повномасштабне вторгнення рф; перехід на онлайн або дистанційне навчання; нестача гаджетів на кожну дитину змушують учителів шукати альтернативні варіанти. Таким «рятівним колом» є онлайн застосунки баз даних, наприклад:

1) Ragic — це онлайн-конструктор баз даних, схожий на електронні таблиці (безкоштовний обліковий запис обмежено 10 ГБ пам'яті та 100 електронними листами на день, доступні оновлення за доступною ціною). У Ragic є програми для мобільних пристроїв iOS і Android, а також спільнота користувачів для підтримки та консультацій.

2) Obvibase пропонує прапорці, розкривні параметри з кількома варіантами вибору, значення за замовчуванням, таблиці, вкладені в клітинки, та багато інших компонентів для створення форм. Безкоштовно для індивідуального використання.

3) Grubba — це безкоштовна веб-база даних, яка підходить для початківців і досвідчених користувачів. Можна скористатися одним із шаблонів або створити власну базу даних відповідно до потреб. Безкоштовно.

4) Caspio.com. Цей застосунок використовує хмарні технології і працювати можна як на стаціонарному комп'ютері, так і на смартфоні. Онлайн-сервіс баз даних Caspio має вбудований сертифікат FERPA для освіти, яка дозволяє побудувати реляційну базу даних. Візуальні інструменти перетягування підходять для легкого зв'язування та фільтрації даних у кількох таблицях, а також для забезпечення цілісності.

Таким чином, вивчення баз даних сприяє мотивації до навчання, оскільки їх створення пов'язане з реальними життєвими ситуаціями. Використовується дослідницький підхід (чим більше питань — тим краще). Налагодьте співпрацю між учнями під час роботи з базами даних. Завдання, де потрібно спільно розробляти та виконувати запити до бази, сприяють розвитку навичок командної роботи, обміну ідеями та розв'язанню завдань за допомогою об'єднаної мудрості. Таким чином формуються soft skills. Доповніть заняття фактами з історії та розвитку баз даних. Дайте зрозуміти, що вивчення баз даних має практичне значення для різних професій, що спонукатиме у майбутньому свідомому вибору професії.

Первомайська гімназія № 2, Первомайськ, Україна
Email address: `lenakudrevich@ukr.net`

СТВОРЕННЯ ЦИФРОВОГО ОСВІТНЬОГО КОНТЕНТУ З ДОПОВНЕНОЮ РЕАЛЬНІСТЮ НА ПРИКЛАДІ ДОСЛІДЖЕННЯ З ІСТОРІЇ МАТЕМАТИКИ

І. Ю. МЕЛЬНИК, П. В. ЗАДЕРЕЙ, Н. М. ЗАДЕРЕЙ, Г. Д. НЕФЬОДОВА

В освітньому процесі відбувається перехід до нових методів та форм навчання з використанням таких елементів дослідження, як визначення проблемності, науковий пошук, збільшення обсягу самостійної роботи, технологізація та комп'ютеризація, інтелектуальна і творча спрямованість, практична орієнтованість. Персоналізація програм під потреби студентів із врахуванням рівня знань, формування індивідуальної траєкторії навчання, використання онлайн платформ та мобільних пристроїв, тісно пов'язані з використанням технологій віртуальної реальності VR [1].

Технології VR містять великий об'єм нереалізованого потенціалу та тісно пов'язані з набуттям цифрових компетенцій. Простір віртуальної реальності є неперервним процесом з використанням техніки гемдизайну. Актуальність обумовлена переходом системи освіти до активних форм та методів навчання, що базується на яскравому поданні та передачі інформації з метою впливу на емоційну, мотиваційну, пізнавальну сферу студента [2].

Учасниками дослідження стали студенти першого та другого курсів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки». Студенти створювали цифрові роботи, аналізували отримані результати, систематизували виконані завданння. Усі завдання виконувались з використанням електронних сервісів.

Як приклад, наведемо дослідження студентів з історії математики, а саме з теми «Роль жінок у математиці», яке виконувалось за допомогою сервісу Blippbuilder. Для виконання дослідження було зібрано, завантажено та систематизовано відповідні зображення та 3-D моделі, аудіофайли та посилання на відео. Поставлена задача по створенню AR-середовища, яке з'являється навколо користувача (around the user), тобто панорамний об'єкт, віртуальний музей, інформація про науковиць у сфері математики.

За допомогою інструментів роботи із зображеннями, таких як форматування зображення, поворот, переміщення об'єктів та зміни сцен, ефектів руху з визначенням різноманітних параметрів, виконана робота по відтворенню історичного внеску жінок-математиків у розвиток математичної науки від перших відомих нам жінок-математиків до сучасних. Після створення проєкту на заключному етапі формується QR–код. Елемент роботи з дослідження представлено на рисунку 1.

Застосування технологій віртуальної реальності поєднує наукові розробки з сьогоденням, відтворює реальні життєві ситуації, допомагає створити вигадані простори для невирішених задач. Це формує нові можливості для опанування

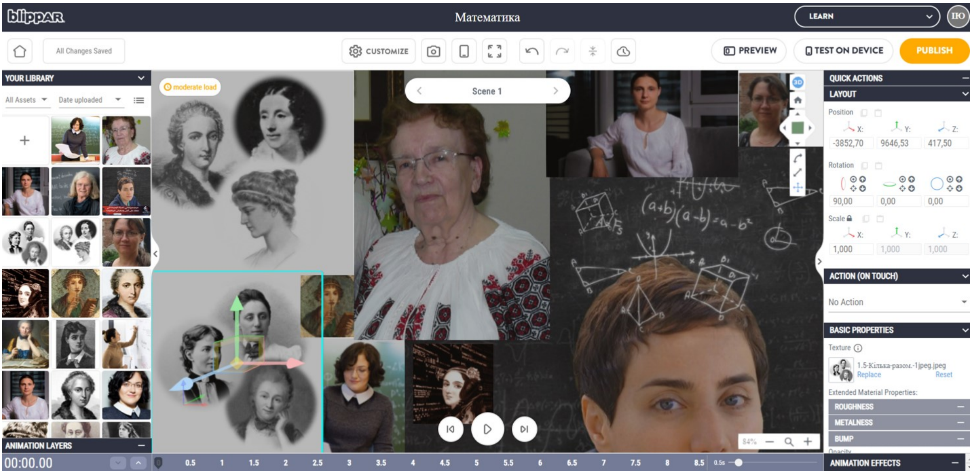


Рис. 1. Використання сервісу Blippbuilder при дослідженні «Роль жінок у математиці»

практичними навичками, надає досвід дослідницької роботи, робить навчання для студентів яскравим процесом, зацікавлює їх, і тому унеможливлює відволікання від поставленого завдання, підвищує мотивацію до навчального процесу, допомагає більш глибоко зрозуміти складні поняття, означення, теореми, властивості, які мають засвоїти студенти під час навчання.

Достатній рівень сформованості навичок студентів в галузі цифрових технологій, професійна спрямованість, наявність обладнання спеціального призначення для створення VR, практика виконання нестандартних завдань в інформаційному просторі є необхідними умовами використання VR. Ці навички мають професійно значиму мету та вдосконалюють освітній процес.

Література

[1] Глобальна реорганізація освіти – бачення експертів ЮНЕСКО. (2022). URL: https://pon.org.ua/novyny/9210-globalna-reorganizaciia-osvity-bachennia-ekspertiv-yunesko.html

[2] Melnyk I., Nefodova G., Hashchuk Y. (2023). The Method of Positive-Oriented Research with Augmented Reality (AR) in the Educational Activities of Students, in Information Technologies and Computer Modelling: International Scientific Conference 2023, July, 6th to 8th, Ivano-Frankivsk, 2023, pp. 31–32

Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна
Email address: iy.melnyk@kubg.edu.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: pvzaderey@gmail.com, zadereynm@gmail.com, g.nefyodova@gmail.com

ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ СТРУКТУРНОЇ НАДІЙНОСТІ КОМП'ЮТЕРНИХ МЕРЕЖ

А. В. НЕВЗОРОВ, О. Ю. НІКОЛАЄВСЬКИЙ

Бурхливий розвиток хмарних обчислень і очікування доступності даних та послуг в довільний момент часу для користувача висунули задачу стійкості мереж на передній план досліджень. Сучасні мережі можуть складатися з сотень тисяч серверів і мільйонів кінцевих вузлів. При таких обсягах проблеми масштабованості, ефективності та структурної надійності мережі стають все більш актуальними. Метою даної роботи є дослідження основних проблем стійкості та структурної надійності комп'ютерних мереж.

Фізичні компоненти мережі стикаються з широким спектром проблем, починаючи від спотворення сигналу і закінчуючи збоями самих компонентів. Аналогічно програмне забезпечення з інтерфейсом високого рівня часто містить невідомі помилки та інші приховані проблеми з надійністю [1]. Програмна та структурна надлишковість є основою для всіх підходів відмовостійкості.

Надлишковість приймає дві форми: структурну та часову. Структурна надлишковість досягається резервуванням компонентів або даних в системі. Прикладом її є передача даних кількома шляхами мережі та використання перешкодозахищеного кодування. Часова надлишковість є основою для алгоритмів повторного запиту, які використовуються для надійної передачі даних з використанням різних протоколів.

Усі збої комп'ютерних мереж можна класифікувати за часовою характеристикою як постійні, тимчасові та перехідні [3]. Наприклад, збої, що перешкоджають функціонуванню компонента при його ремонті або заміні, (наприклад, фізичне пошкодження лінії зв'язку) є постійними. Відмови, що все ж дозволяють компоненту зберігати працездатність, називають збоями. Це можуть бути збої електричних компонентів, що знаходяться у працездатному стані до тих пір, поки механічні або температурні коливання не стануть причиною збою, та припиняються при поверненні показників до нормальних параметрів.

Використання сучасних методів тестування та діагностики мереж дозволяє своєчасно виявити та виправити збої, а також підвищити експлуатаційний термін мережі [2]. Для побудови моделі забезпечення стійкості комп'ютерної мережі пропонується відомий метод – тестування навантаження.

Шляхи забезпечення стійкості комп'ютерної мережі можна розділити на три категорії: запобігання, виявлення та реагування. Виявлення вторгнень відіграє критичну роль в безпеці систем, оскільки методи встановлення паролів та контроль доступу часто можуть бути скомпрометовані. Отже, при управлінні мережею необхідно включати додаткові механізми виявлення вторгнень. Важливим також є і аналіз виявлених вторгнень, що дозволяє скорегувати або заблокувати загрозу. Після аналізу класифікації методів тестування мережі пропонується найбільш раціональний – метод тестування навантаження. Отримані дані можуть бути використані в подальших дослідженнях у цьому напрямку для розробки моделі забезпечення структурної надійності комп'ютерних мереж.

Література

[1] Muriel Médard, Steven S. Lumetta (2003). Network Reliability and Fault Tolerance March *URL*: https://www.researchgate.net/publication/2884965_Network_Reliability_and_Fault_Tolerance

[2] Paul Rubens. Understanding Fault Tolerance: Securing Your System *URL*: https://www.enterprisestorageforum.com/storage-management/fault-tolerance.html

[3] Микитишин А., Митник М.М., Стухляк П.Д., Пасічник В.В. (2013). *Комп'ютерні мережі*: Львів: Магнолія

ПВНЗ "Європейський університет", Київ, Україна
Email address: `andrey.nevzorov@e-u.edu.ua`

ПВНЗ "Європейський університет", Київ, Україна
Email address: `alexander.nikolaievskyi@e-u.edu.ua`

ДЕЯКІ ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ

Т. В. ПІДГОРНА, П. Ф. САМУСЕНКО

Моделювання різноманітних процесів і явищ є одним з основних загальних методів, що використовується в наукових дослідженнях. Навчання розв'язування задач з параметрами, що розглядаються в процесі навчання математики, – важливий підготовчий етап до дослідження моделей за різних умов, зокрема за різних значень їх можливих параметрів.

Незважаючи на те, що даній тематиці присвячено велику кількість досліджень в галузі методики навчання математики, зокрема і з використанням сучасних комп'ютерно-орієнтованих технологій, її важливість не викликає сумнівів, оскільки кількість зазначених задач та їх типів постійно збільшується. Зрозуміло, що для практичного використання важливо знати не стільки точне значення розв'язку задачі, яка описує математичну модель реального процесу чи явища, скільки те, чи сумісна та стійка задача. Тоді, використовуючи сучасні програмні засоби можна знайти наближене значення певного розв'язку задачі з наперед заданою точністю, що цілком достатньо для практики.

У даній праці розроблено критерії вибору програмного забезпечення, яке варто використовувати в процесі розв'язування задач з параметрами (табл. 1). Розв'язуючи такі задачі як аналітичним, так і геометричним методами, доцільно здійснювати побудову графіків досить складних функцій за різних значень параметрів з використанням відповідних програмних засобів, що сприяє уникненню помилок в побудові таких графіків, зосередженню уваги на аналізі їх форми і знаходженню відповіді на питання задачі.

Серед найбільш відомих вільнопоширюваних прикладних програмних засобів, з використанням яких можна раціонально розв'язувати задачі з параметрами, можна виокремити GeoGebra, WolframAlpha, SageMath, Maxima та програмний комплекс GRAN (GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D). З перелічених програмних засобів для розв'язування задач з параметрами доцільно використовувати, насамперед, GRAN1 та GeoGebra для побудови і аналізу відповідних графіків. Зауважимо, що для отримання аналітичного розв'язку можна використовувати WolframAlpha, SageMath, Maxima. Однак, під час застосування цих програм не завжди можна отримати правильний розв'язок задачі. Для отримання повної правильної відповіді потрібно проаналізувати аналітичний і графічний розв'язок задачі. При цьому графічний розв'язок доцільно знаходити, використовуючи системи комп'ютерної математики. Результати аналізу побудованих графіків функцій можуть бути джерелом припущень, що виникають при аналітичному розв'язувані задачі. І навпаки, геометрична інтерпретація задачі часто може використовуватись як критерій правильності її аналітичного розв'язання.

Табл. 1

Функції програми	GRAN1	GeoGebra	Wolfram Alpha	SageMath	Maxima
Побудова графіка функції, заданої в явному вигляді	+	+	+	+	+
Побудова графіка функції, заданої в неявному вигляді	+	+	+	-	+
Використання параметра в аналітичному записі функції	+	+	-	-	-
Автоматична заміна графіка функції в залежності від значення параметра	+	+	-	-	-
Можливість зміни кроку зміни параметра	+	+	-	-	-
Побудова дотичної до кривої в точці	+	+	+	-	-
Побудова нормалі до кривої в точці	+	+	+	-	-
Можливість зміни масштабу	+	+	-	-	+
Визначення координат перетину графіків функцій	+	+	+	-	-
Отримання аналітичного розв'язку	-	-	+	+	+

Державний торговельно-економічний університет, Київ, Україна
Email address: t.pidhorna@knute.edu.ua

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: psamusenko@ukr.net

V

ІСТОРІЯ І МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

HISTORY AND METHODOLOGY OF TEACHING MATHEMATICS AND INFORMATICS

TEACHING THE PROBABILITY THEORY IN THE CZECH LANDS UNTIL THE 1920'S

T. V. MALOVICHKO

In the Czech Republic the probability theory was first included in a school textbook in 1870. It was Josef Smolík's textbook "Algebra pro střední školy". The section with the probability theory has 10 pages and covered questions related to combinatorics but included the mathematical expectation. The terminology had nothing to do with modern one. The probability theory also considered in the textbook "Algebra pro vyšší třídy škol středních" by František Josef Studnička, where, in addition to tasks related to combinatorics, there were also tasks for life insurance. It contained the elementary probability theory and problems from life insurance. At that time it was apparently considered part of general secondary school education. The textbooks were complemented by "Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol" by František Hromádko and Alois Strnad in 1876. It contained more than 3000 problems, 25 of which were related to the probability theory [1].

By the beginning of the 20th century the probability theory was taught sporadically at universities in the Czech Republic and Austria. In some technical universities in the middle of the 19th century, the "political arithmetic" was studied [2].

Christian Doppler worked at the Prague Polytechnic in 1841–1847 and probably was the first university professor in Czechia to include the probability theory in his lectures. He also included it in his textbook "Arithmetik und Algebra" (1844) [1].

Wilhelm Matzka in 1850-1871 taught at the University of Prague. In addition to the ordinary lectures of algebra, analysis and analytical mechanics he taught new topics ad in partilular probability calculus [3].

Augustin Pánek started reading lectures on probability theory at the Prague Polytechnic in the 1870's. The syllabus of his lectures is: "Absolute, relative and complex probability. Geometric probability. Bernoulli and Poisson Theorems. Objective and subjective expectations. Probability a posteriori. Bayes Formula. Laplace Theorem. On insurance. Probability and judgment. Historical overview of probability calculus and the least squares method" [2].

Pánek also wrote numerous popularizing articles. He paid particular attention to the binomial theorem, the definition of probability, gave nice solutions to simple problems (throwing dice, tossing coins, determining the minimum number of attempts etc.). He also wrote about more complex problems, for example, the probability of a collision between two trains of different lengths that depart at different speeds from different distances from the intersection of tracks to the station, the probability of the formation of a given concentration of the mixture, etc. He also noticed geometric probabilities. He solved this problem: "We draw three arbitrary tangents to the given circle. What is the probability that the circle will be inscribed in the triangle caused by the tangents?" His articles "On Mathematical and Moral Expectation" and "Probability a posteriori" can be considered as small textbooks of classical probability theory with a number of historical comments [4].

In 1912 Václav Láska read a public lecture "The Introduction to Probability Theory". In 1922 a two–year course of actuarial mathematics and mathematical statistics was organized at the Prague University. Emil Schoenbaum taught both these subjects. The lectures on probability theory were read by Miloš Kössler [2].

An actuarial technical course was established in 1904 in the Prague Polytechnic. It was initiated by Gabriel Blažek who taught actuary mathematics. The lectures were then taken over by Josef Beneš who was also teaching mathematical statistics. Then actuary mathematics teaching was taken over by Jaroslav Janko. The probability theory was not examined at the final examination. The lectures were given by professor Pánek until his death, then by František Velísek and by Karel Rychlík.

In 1906 a similar course was opened at the German Technical University in Prague. Actuarial mathematics was taught by Gustav Rosmanith. He taught also mathematical statistics which was taken over by Josef Fuhrich. Lectures on probability theory were read by Karl Carda. The syllabus of his lectures in the 1920's was: "Problems about urns. Classical problems: problem of de Moivre die, meeting problem, sharing problem. Repeated trials, J. Bernoulli's theorem. Poisson approximation formula. Probability of causes. Bayes theorem." During the war lectures on probability theory were given by Fuhrich who taught actuarial mathematics and statistics. The lectures were common for the Technical University and the German University.

In 1908 the actuarial technical course was opened in the German Technical University in Brno. Friedrich Benze was teaching probability and statistics until 1939. In 1906–1920 actuarial mathematics was taught by Ernst Fanta. During the 1920's it was taught by Ferdinand Schnitzler and by Oskar Kubelka [2].

References

[1] Mačák K. (2005). *Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938 (krátký přehled)*. Praha: Prometheus, pp. 6–23.

[2] Bilová Š., Mazliak L., Šišma P. (2006). The Axiomatic melting pot: Teaching probability theory in Prague during the 1930's. *Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 2, No. 2, 30 pp.

[3] Chocholová M. (2007). Wilhelm Matzka (1798–1891) and His Algebraic Works. *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedings of the 5th European Summer University*, Prague, pp. 845–854.

[4] Bečvářová M. (2004). Augustin Pánek (1843–1908). *Matematika v proměnách věků. III.* Praha: Výzkumné centrum pro dějiny vědy, pp. 206–234

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
Email address: `tatianamtv@protonmail.com`

ВІД ЗАЦІКАВЛЕННЯ ДО ЗНАННЯ

Т. В. АВДЄЄВА, Л. М. ІЛЛІЧЕВА, О. І. КУШЛИК-ДИВУЛЬСЬКА

Теорія ігор – математичний метод аналізу стратегій при взаємодії двох або більшої кількості сторін, що також включає передбачення наслідків прийняття тих чи інших рішень та оцінку оптимальності задіяних стратегій. При цьому розглядається довільна ситуація, в якій наявні інтереси двох чи більше учасників (їх традиційно називають гравцями). Для кожного гравця існує набір стратегій (сценаріїв) – правил, за якими кожен виконує певний хід, дію, що змінює ситуацію на ігровому полі. У грі завжди бере участь кілька гравців, при цьому дії кожного з них впливають на наслідки гри, а інтереси їх відрізняються. У цьому полягає принципова відмінність теорії ігор від теорії оптимізації.

Головна мета теорії ігор – навчитися розробляти виграшні стратегії та оптимальні дії для згладжування негативних наслідків у випадку програшу. Відомо, що спочатку до теорії ігор зверталися при моделюванні економічних ситуацій, але поступово визнали доцільним її використовувати у політиці, соціології, політології, а останнім часом – у психології та біології, кібернетиці, сфері IT тощо.

Для визначення виграшної стратегії можна використовувати доступний вже школярам математичний апарат: симетричний хід, графи та дерева, матриці та таблиці можливих сценаріїв. Теорія ігор дозволяє зрозуміти та розробити виграшні стратегії учням 5–8 класів, тому ця тема розглядалася зі школярами на математичній школі. В якості прикладу, з учасниками літньої математичної школи розглянуто тандем двох художників (гравців), що пишуть портрети та пейзажі. Перший художник за портрет бере 12 одиниць винагороди, а за пейзаж – всього 4 одиниці. Другий є більш професійний, тому він бере 16 та 10 одиниць відповідно. Дехто замовив портрет та пейзаж. Який найвигідніший сценарій для обох гравців?

Також проаналізовано виграшні стратегії при діленні прямокутної шоколадки на прямокутні фрагменти по прямих, що співпадають з природними заглибленнями на шоколадці, за умови виграшу того, хто робить останній розлом [1]. Значно складнішою виявилася задача для двох гравців, які мають розподілити між собою 2023 сірники. Вони по черзі беруть їх зі столу, але за один хід дозволяється взяти 1 або 2 сірники. Гравцеві не можна брати 2 сірники двічі підряд. Виграє той, хто взяв останній сірник. Який з гравців має виграшну стратегію?

З'ясовано, що при правильній стратегії гри для всіх початкових позицій виду $5k$ та $5k+3$ будуть виграшними для другого гравця, а початкові позиції вигляду $5k+1, 5k+2$ та $5k+4$ – для першого гравця [2].

Розглядалися статичні та динамічні ігри з повною інформацією [3], задачі на складання оптимального сценарію для гри, що може неодноразово повторюватися, ігри із переслідуваннями (з серії: «поліціант-втікач»). Гравці тоді діляться на тих, хто переслідує, і тих, хто втікає; неважливими є учасники гри: мисливець-здобич, тарган-тапок чи поліцейський-в'язень. Мета переслідувача – якнайшвидше наздогнати втікача, мета втікача протилежна – уникнути переслідувача. Якщо неможливо втекти, то потрібно максимізувати час до того моменту, коли втікача наздожене переслідувач.

Теорія ігор вийшла за межі економіки та математики, вона відіграє помітну роль у багатьох областях, передусім, в ігровій індустрії. Для всіх популярних ігор вже створено програми, які називаються ботами. Такі програми у кожній ситуації пропонують оптимальний хід. Вони можуть імітувати віртуального партнера для гравця будь-якого рівня – від новачка до досвідченого майстра, підтримувати як командну гру, так і гру «сам з собою». Поява ботів дозволила розвинути теорію настільних ігор та виконати докладний аналіз ситуацій, щодо яких не було єдиної думки навіть серед професіоналів та чемпіонів світу.

У літній математичній школі розглядалися лише деякі аспекти теорії ігор. Коло застосування цієї теорії буде з часом лише розширюватися, але й на представлених прикладах можна оцінити красу та всеохоплюючу її цінність. В інтернеті всі зацікавлені можуть знайти класичні задачі, пов'язані із теорією ігор: дилема в'язня; задача про розподіл майна; полювання на оленя; матеріальна демотивація, вимірювання чесності грошима тощо.

Теорія ігор, безсумнівно, корисна, коли потрібно визначити найбільш важливі фактори, які потребують обліку; в ситуаціях невизначеності, тобто при необхідності прийняття рішень в умовах конкурентної боротьби. Ця інформація дозволяє враховувати додаткові змінні чи фактори, які можуть вплинути на ситуацію; опанування такими знаннями значно підвищує ефективність прийняття остаточного рішення. Тому ознайомлення школярів із основами теорії ігор не лише сприяє підвищенню самооцінки, розвитку лідерських навичок, а також допомагає ліквідувати певні прогалини шкільного курсу математики.

Література

[1] *https://njestandartn-zadach.webnode.com.ua/products/prikladi-rozvyazuvannya-zadach-na-vigrashn*

[2] Федак І.В. (2002). *Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх.* Чернівці: Зелена Буковина, –340с.

[3] Барановська Л.В. (2022). *Теорія ігор. Курс лекцій*: навч. посіб. для студ. Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, –245с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: avdeeva.tetyana@gmail.com

Національний авіаційний університет, Київ, Україна
Email address: m_ilicheva@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: olgakushlyk64@gmail.com

ВНЕСОК МИХАЙЛА КРАВЧУКА У РОЗВИТОК УКРАЇНСЬКОЇ МЕТОДИКИ МАТЕМАТИКИ

А. А. АЛЕКСАНДРУК, С. І. ШВОРАК

Михайло Пилипович Кравчук – це не лише всесвітньо відомий учений-математик, а й талановитий педагог і методист. Однією з найбільших заслуг Кравчука є його робота над українською математичною термінологією [2].

В той період було характерне запровадження нової за змістом шкільної літератури. Саме так, популярними стали підручники для сільських трудшкіл – це робочі книжки, в яких відобразилися спроби поєднання відомостей з різних шкільних предметів.

Михайло Кравчук був ініціатором створення та організатором українських математичних шкіл, де акцентував увагу на розвитку творчого мислення, а не просто на вивченні алгоритмів. Він сприяв створенню відповідних підручників та навчальних матеріалів, а саме склав оригінальну програму з курсу "Елементи вищої математики для використання у сільському господарстві" [1].

Неодноразово був редактором шкільних підручників з математики, писав на них рецензії. Також йому належить багато методичних статей з питань викладання математики в школі, а саме: «Новий метод викладання логарифмів у середній школі», «Наближені обчислення у середній школі».

Серед підручників для вищої школи варто відзначити надрукований літографським способом у 1919 році курс лекцій з геометрії, який він прочитав в Українському народному університеті.

У 1932–1934 рр. у співавторстві були видані такі підручники: «Вступ до вищої математики», «Елементи теорії визначників», а також посібник для студентів та самоосвіти «Вища математика» обсягом в 407 сторінок, та інші.

Отже, Кравчук – талановитий педагог, який багато зробив для того, щоб освіта стала доступною для всіх українців.

Література

[1] Незаймай Т.І., Стяглик Н.І. (2012). Методична спадщина М. П. Кравчука. *Зб. Наук. Пр. Харк. Наці. Пед. Ун-ту ім. Г. С. Сковороди*, №. 7, с. 139–148.
[2] http://slovoprosvity.org/2012/04/19/matematyk-vid-boha-pedahoh-vid-ser/

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: aniytaaleksandruk@gmail.com

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: sofiasvorak7@gmail.com

ДИДАКТИЧНІ ТА ВИХОВНІ МОЖЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ІСТОРИЧНОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ РОБОТІ ЗІ СТУДЕНТАМИ СПЕЦІАЛЬНОСТІ 111 МАТЕМАТИКА

О. П. АНТОНЮК

Використання матеріалів з історії науки при викладанні математики висвітлювалось різними дослідниками і практиками. Оскільки дана проблематика має чимало аспектів, а з плином часу перед нею з'являються нові завдання чи можливості, то залишається чимало питань для обговорень. Згадаємо тут, зокрема, величезну ниву роботи з висвітлення внеску ряду вчених, чиї імена необґрунтовано забуті з ряду причин. Адже довгий час, з розшматуванням території сучасної України між кількома імперіями, здобутки українських науковців приписувались іншим націям та державам. Чимало інформації за період існування тоталітарного Радянського Союзу не тільки про самі особистості, але і про їх наукові доробки, поховані під грифами секретності. Тільки завдяки сміливості ентузіастів, стали відомими деякі імена, яких би тогочасна держава воліла поховати навіки. І серед плеяди цих людей, зіркою першої величини є, звичайно, академік М. П. Кравчук. Сподіваємось, що ознайомлення молодого покоління з життєвими шляхами українських вчених та їх внесками у світову науку матиме значення для виховання національного самоусвідомлення, гордості, стане ще одним аргументом у боротьбі з ворогом.

Про навчання історії математики писали: В.Г. Бевз, О.М. Боголюбов, О.І. Бородін, Л.М. Вивальнюк, Н.О. Вірченко, А.Г. Конфорович, М.І. Шкіль та ін. Є чимало посібників, які приділяють велику увагу історичним аспектам поданого в ньому матеріалу. Згадаємо тут як один з прикладів підручник В.О. Тадеєва [1].

Згідно загального дидактичного принципу свідомості, активності й самостійності необхідним є формування та використання у студентів пізнавальної активності. Викладач спрямовує діяльність студентів для свідомого засвоєння ними вмінь, навичок, розвиток професійних компетентностей. Крім того, активізацію пізнавальної діяльності студентів ми отримуємо за умови позитивного відношення до навчання, стійкого пізнавального інтересу, відчуття взаємозв'язку теорії з практикою на основі прикладів її використання. А наведені вище фактори можна формувати з допомогою використання матеріалів з історії науки. Тим більше, що останнім часом відбувається орієнтація на вивчення у ВНЗ кожної науки у розвитку, ознайомлення студентів із сучасною проблематикою дисципліни і спонуканні їх до власної науково-дослідної роботи.

Відомі класичні приклади тем та розділів математики, викладання яких не мислиться можливим без глибоких екскурсів у історію. Йдеться перш за все про основи геометрії, геометрію Лобачевського, конструктивну геометрію. Адже задачі на побудову на площині, будучи взірцем логічних доведень, вправ на дослідження, можуть бути джерелом ілюстрації взаємозв'язків з різними розділами математики. А вражаюча історія дослідження проблеми п'ятого постулату Евкліда та розв'язання цієї проблеми М.І. Лобачевським мають чимало емоційних аспектів революційних змін у геометрії. Навіть використання вдало підібраної окремої історичної задачі здатне істотно вплинути на бачення прикладних аспектів науки, пов'язати з тенденціями, проголошеними НУШ.

Факти з історії науки при регулярному використанні у навчальному процесі впливають не тільки на розуміння теми, яка вивчається, але й мають виховний вплив на студентів. Кожен викладач, в залежності від обраної мети, може з допомогою історії науки розв'язати те чи інше завдання: зацікавити постановкою проблеми, значенням в практичній діяльності, пробудити пізнавальну активність, гуманізувати тематику.

Величезний навчальний і виховний потенціал застосування історичного матеріалу використовується багатьма університетами та окремими викладачами. Є приклади, коли окремий курс історії науки і техніки розглядається і видозмінюється до рівня інтеграційний предмету, який дозволяє осмислити в тому числі і сучасний стан галузі, і тому стає незамінним у підготовці спеціалістів.

Зауважимо тут про ще один аспект використання матеріалів з недавнього минулого. Вивчення історії діяльності наукових шкіл факультету, на якому навчається конкретний студент, дозволяє глибше познайомитись з рідним закладом, конкретними науковцями, їх проблематикою досліджень [2].

Знайомство з трудовими долями недавніх випускників – це виховна робота з молоддю, забезпечення тяглості традицій факультету. Присутність на зустрічі колишніх студентів для сучасної молоді – це і передача професійного досвіду, і запрошення до співпраці, і проекція на власну наступну діяльність.

Таким чином, вивчення історії математики є необхідним компонентом підготовки майбутнього спеціаліста, а для викладача – благодатним засобом організації результативного навчального процесу.

Література

[1] Тадеєв В.О. (2003). *Геометрія. Основи стереометрії. Многогранники: дворівневий підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів.*. Тернопіль: Навчальна книга-Богдан.

[2] Антонюк О.П. (2017). Становлення математичної школи в Луцькому педагогічному інституті. *Вісімнадцята наукова конференції імені академіка Михайла Кравчука (м. Київ, м. Луцьк, 7–10 жовтня 2017 р.): Матеріали конференції. Київ: Т.2. Київ: НТУУ «КПІ»*, pp. 171–174.

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: Antoniuk.Oksana@vnu.edu.ua

ДИСТАНЦІЙНЕ ВИВЧЕННЯ КУРСУ МАТЕМАТИКИ В УМОВАХ ВОЄННОГО СТАНУ

О.І. БАЛІНА, І.С. БЕЗКЛУБЕНКО, Ю.П. БУЦЕНКО

Традиційно викладання математики у вищому навчальному закладі підпорядковане двом цілям. По-перше, це забезпечення зростання загальноосвітнього рівня студентів шляхом вивчення формалізованої (чітко визначена термінологія, логічна еволюція, жорсткі вимоги до обґрунтованості тверджень) дисципліни. По-друге, викладання математики має забезпечити належні підвалини для курсів власне спеціальної підготовки. Дистанційні технології у вищій освіті (надалі ДТВО) у режимі воєнного стану мають принципові відмінності порівняно з використанням цих технологій під час епідемії КОВІДу. Перш за все, це стосується необхідності реалізації певних організаційних заходів та запровадження змін у традиційній нормативній базі. У той же час напрацювання кожної задіяної кафедри, факультету, вищого учбового закладу щодо виконання достатньо трудомістких робіт пов'язаних з їх методичним забезпеченням залишаються актуальними [1, 2]. Накопичений авторами досвід дозволяє визначити принципові моменти, які, на наш погляд, обов'язково мають бути враховані при цьому.

Зазвичай вважають,що явище прокрастинації є характерним для приблизно 40 відсотків людей, проте, за нашими спостереженнями,у середовищі студентів, які навчаються дистанційно, вона набуває значно більшого поширення. У той же час, нам видається безальтернативним істотне пом'якшення режиму "дедлайнів" щодо виконання студентами робіт, передбачених навчальними планами.

Природним розвитком першого пункту є другий. Як студентам, так і викладачам істотно не вистачає «колективного настрою на роботу», який є предметом заслужених гордощів досвідчених викладачів та істотним фактором кращого засвоєння матеріалу для студентів [3]. Відеоконференції не замінюють спільної роботи в аудиторіях, участь у них студентів слабка з різних причин.

По-третє, слід зауважити, що структура та об'єм матеріалів, що адресуються студентам дистанційної форми навчання у великій мірі продиктовані стереотипами їх викладачів: розлогі списки рекомендованої літератури, тести та задачі, достатні для комплектації задачника, призначеного для стаціонарного навчання.

Четвертою проблемною позицією є, звичайно, форма проведення заліків та іспитів при дистанційному навчанні.

Поділимось спостереженнями, зробленими у процесі дистанційного навчання як протягом карантину, так і у військовий час:

По-перше, студенти з низьким рівнем шкільної підготовки демонструють у переважній більшості випадків значно гіршу динаміку засвоєння навчального матеріалу аніж при традиційній формі навчання.

По-друге, у кращий бік вирізняються студенти, які знайшли можливість, попри всі обставини, оселитись в університетському гуртожитку.

По-третє, при проведенні контрольних міроприємств кращу успішність демонструють групи, для яких такі заходи проводяться за більш жорстких обмежень.

Резюмуючи сказане вище, сформулюємо наступні рекомендації.

(1) Для студентів, які використовують дистанційну форму навчання, абсолютно необхідним є як вхідний, так і поточний контроль рівня їх знань із предмета, що вивчається.
(2) Методичне забезпечення ДТВО повинно надавати студенту, за його бажанням, можливість отримання мінімально необхідного рівня знань з предмета для отримання мінімальної позитивної оцінки.
(3) За наявності технічної (фінансової) можливості студент повинен мати можливість спілкуватися з викладачем якнайчастіше.
(4) Слід очікувати, що при використанні ДТВО набутий студентами рівень знань, умінь, навичок (компетенцій) буде залежати від рівня його мотивації істотно сильніше, ніж при традиційній схемі.

Література

[1] Balyna O.I., Bezklubenko I.S., Butsenko Yu.P. (2017). Additional parameters are in informative providing of educational process. *Fourth international Scientific-practical conference "Management of development of technologies", Ministry of education and science of Ukraine*, Kyiv, 19-20 May 2017, (с.15-16). Київ: Київський національний університет будівництва і архітектури.

[2] Баліна О.І., Безклубенко І.С., Буценко Ю.П., Лабжинський В.А. (2020). Кластерний підхід до діагностування складних систем. *У матеріалах VII Міжнародної науково-практичної конференції «Управління розвитком технологій. Інформаційні технології розвитку освіти»*, Київ, 2020 (с.51-53.). Київ: КНУБА.

[3] Баліна О.І., Безклубенко І.С., Буценко Ю.П., Гетун Г.В. (2019). Вибір стратегії викладання курсу вищої математики в технічному ВНЗ. *У матеріалах XIV International conference «Modern achievements of science and education»*, Netania, Israel, 26.09.-3.10.2019 (P. 86-88.).

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна
Email address: elena.i.balina@gmail.com

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна
Email address: i.bezklubenko@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: armchairdoc@ukr.net

ЗНАХОДЖЕННЯ ФОРМУЛ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Д. М. БУШЕВ

Диференціальні та інтегральні рівняння вивчаються у відповідних курсах вищої математики. Функціональним рівнянням, які не є диференціальними та інтегральними, приділяється значно менше уваги, як в курсі математичного аналізу так і в курсі функціонального аналізу, хоча ці рівняння достатньо часто пропонувалися для розв'язання на математичних олімпіадах і турнірах. Значний вклад у вивчення таких рівнянь вніс О. Коші (1789–1857), іменем якого називається рівняння $f(x+y) \equiv f(x) + f(y)$.

Одним з методів розв'язання функціональних рівнянь є метод підстановок. При розв'занні багатьох функціональних рівнянь методом підстановок розв'язки спочатку вгадують, а потім підбирають потрібні підстановки для їх одержання. В деяких випадках, навіть вгадавши розв'язки, зовсім непросто підбирати потрібні підстановки щоб їх одержати. Успішне розв'язання одного рівняння, аж ніяк не гарантує успіх при розв'язанні іншого. Наша робота – спроба хоч би для деяких рівнянь, змінити ситуацію.

Суть методу підстановок полягає у виборі потрібних підстановок для розв'язання функціонального рівняння. Оскільки алгоритми вибору потрібних підстановок для розв'язання багатьох функціональних рівнянь невідомі, розглянемо рівняння, за загальним виглядом яких можна записати множину всіх його розв'язків.

Встановлено, що до таких рівнянь відносяться функціональні рівняння виду $a(u,v)f^n(u) + b(u,v)f^m(v) \equiv 0$ і $a(u,v)f^n(u) + b(u,v))f^m \equiv g(u,v)$, де $a(u,v)$, $b(u,v), g(u,v)$ – довільні задані дійсні функції від двох дійсних змінних, $f^{(t)}$ – невідомі функції і раозв'язання цих рівнянь в загальному випадку, на нашу думку, пропонується вперше.

Позначимо через $M_0(f) = \{f : a(u,v)f^n(u) + b(u,v)f^m(v) \equiv 0\}$ множину всіх розв'язків однорідного функціональнго рівняння.

Теорема 1. *Якщо для кожної функції $\varphi(t)$, функції $-\frac{b(u,v)}{a(u,v)}$ і $\frac{\varphi^n(u)}{\varphi^m(v)}$ не є тотожньо рівними, тобто $-\frac{b(u,v)}{a(u,v)} \not\equiv \frac{\varphi^n(u)}{\varphi^m(v)}$, то функціональне рівняння має єдиний нульовий розв'язок $f(t) \equiv 0$*

Нехай справедлива тотожність $-\frac{b(u,v)}{a(u,v)} \equiv \frac{\varphi^n(u)}{\varphi^m(v)}$

а. Якщо $n-m$ – непарне число, то функціональне рівняння має два розв'язки: нульовий і $f_1(t) \equiv \varphi(t)$.

б. Якщо $n \neq m$ – непарні числа, то рівняння має три розв'язки: нульовий, $f_1(t) \equiv \varphi(t)$ і $f_2(t) \equiv -\varphi(t)$.

в. Якщо $n \neq m$ – парні числа, то множина всіх розв'язків рівняння є об'єднанням нульового розв'язку з множиною всіх функцій, які дорівнюють $\varphi(t)$ на довільній підмножині E області визначення функції φ і $-\varphi(t)$ на множині $D(\varphi)\backslash E$.

г. Якщо $n = m$ – непарне число, то множина всіх розв'язків рівняння дорівнює множині всіх функцій $k\varphi(t)$, де k довільна стала.

д. Якщо $n = m$ – парне число, то множина всіх розв'язків рівняння дорівнює множині всіх функцій, які дорівнюють $k\varphi(t)$ на довільній множині E і $-k\varphi(t)$ на множині $D(\varphi)\backslash E$, де k довільна стала, тобто $(a(u,v)f^n(u) + b(u,v)f^m(v) \equiv 0) \wedge (M_0(f) = \{f : a(u,v)f^n(u) + b(u,v)f^m(v) \equiv 0\}) \Rightarrow (I) \wedge (II)$.

I. $\left((\forall\varphi(t)) \Rightarrow \left(-\frac{b(u,v)}{a(u,v)} \neq \frac{\varphi^n(u)}{\varphi^n(v)}\right)\right) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0\})$.

II. $\left(\exists\varphi(t) : -\frac{b(u,v)}{a(u,v)} \neq \frac{\varphi^n(u)}{\varphi^n(v)}\right) \Rightarrow$ (а) $\wedge$ (б) $\wedge$ (в) $\wedge$ (г) $\wedge$ (д).

а. $(n - m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0, f(t) \equiv \varphi(t)\})$.

б. $(n = 2s - 1 \neq m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv 0, f_1(t) \equiv \varphi(t), f_2(t) \equiv -\varphi(t)\})$.

в. $(n = 2s \neq m = 2l) \Rightarrow \left(M_0(f) = \{f(t) \equiv 0\} \cup M_\infty^\varphi = \{f(t) \equiv 0\} \cup \left\{f_E(t) \equiv \left\{\begin{array}{c} \varphi(t), t \in E, \\ -\varphi(t), t \in D(\varphi)\backslash E \end{array}\right. : (\forall E \subseteq D(\varphi))\right\}\right)$.

г. $(n = m = 2l - 1) \Rightarrow (M_0(f) = \{f(t) \equiv K\varphi(t) : K \in R\})$.

д. $(n = m = 2s) \Rightarrow$
$$\left(M_0(f) = \left\{Kf_E(t) \equiv \left\{\begin{array}{c} K\varphi(t), t \in E \\ -K\varphi(t), t \in D(\varphi)\backslash E \end{array}\right. : (\forall E \subseteq D(\varphi)) \wedge (K \in R)\right\}\right).$$

Література

[1] Федак І.В. (2018). Функціональні рівняння: Навчальний посібнк. (Видання друге). Івано-Франківськ: ПНУ, pp. –144.

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: bushev-d@ukr.net

РОЗВИТОК КРЕАТИВНОСТІ ТА МОТИВАЦІЇ УЧНІВ НА УРОКАХ ІНФОРМАТИКИ

Н. М. ВОЛКОВА, О. В. СКЛЯРЕНКО

У сучасному світі креативність є досить затребуваною навичкою, що допомагає знаходити інноваційні та неординарні рішення багатьох проблем, з якими стикається людство щодня. Креативність відноситься до тих компетенцій, яку необхідно не тільки формувати, а також постійно працювати над її розвитком, починаючи з дитинства, особливо це стосується навчального процесу у закладах освіти. Вміння мислити нешаблонно і сміливо, швидко орієнтуватись у нестабільних ситуаціях і знаходити рішення, вміння аналізувати інформацію тощо – ці навички є похідними креативної особистості [1].

Кожен учень має здібності й таланти, і основне завдання вчителя – розкрити і розвинути ці здібності засобами тієї дисципліни, що викладається. Розглянемо цей процес на прикладі навчання інформатики у середній школі. Урок є першою сходинкою формування творчої особистості учня, зокрема, засобами інформатики. Навчити думати, допомогти не просто засвоювати певну інформацію та цифрові рішення, але й аналізувати її, застосовувати на практиці, не боятися висувати гіпотези, і як результат – генерувати інноваційні ідеї та відкривати нові горизонти учням [2].

Потрібно викликати у дітей пізнавальний інтерес, мотивувати їх до навчання та творчого розвитку. Особливо це стосується уроків інформатики, на яких кожен учень може не тільки навчитися використовувати існуючі програмні продукти, але й спробувати себе в ролі розробника, дизайнера інтерфейсів, стартапера, проаналізувати існуючі IT-продукти та подумати над тим, як їх можна було б покращити.

Наведемо основні завдання вчителя, які допоможуть учням у мотивації навчання та розвитку креативності:

(1) знаходити таку задачу, щоб її розв'язання активізувало здатність учнів мислити, самостійно шукати шляхи її розв'язання;
(2) формувати в учнів інтерес до навчання через проблемно-пошуковий підхід до висвітлення теми;
(3) застосовувати метод проєктів, командної роботи, використовувати методи брейнстормінгу з метою генерації нестандартних ідей та рішень.

Формуванням та розвитком креативності на уроках необхідно керувати. Для організації такої діяльності потрібно добирати різноманітні форми організації освітнього процесу:

(1) фронтальну, що забезпечує діалог між учителем та учнями;
(2) індивідуальну, яка орієнтує учня на самостійне виконання навчального завдання на рівні його можливостей;
(3) групову, для досягнення конкретного навчального результату;
(4) роботу в парах, для забезпечення кращого засвоєння навчального матеріалу, розвитку навичок спілкування, вміння висловлюватися, критично мислити, переконувати, вести дискусію.

Вивчення курсу інформатики є золотим стержнем в освітньому інтеграційному просторі навчання базових дисциплін та в ньому саме проектна технологія відзначається високою ефективністю.

При роботі над проектами учні набувають навички планувати свою діяльність, використовувати багато різних джерел інформації, самостійно відбирати й накопичувати матеріал; аналізувати, аргументувати факти і приймати рішення та створювати кінцевий продукт.

Технології та інструменти розвитку креативного мислення як формат навчання на занятті має величезну практичну користь: легке засвоєння матеріалу, розвиток уяви, подолання страху публічного виступу, налагодження стосунків з іншими учнями, самопізнання [3, 4].

Сучасний вчитель повинен не тільки досконально володіти базовим знанням, а й бути активною, креативною особистістю, здатною до пошуку нових форм та методів виховання та навчання, спонукати учня до активної самостійної діяльності. Учитель сьогодення має креативити не лише у стінах школи, вивчати спеціалізовану літературу, бути дослідником, розвивати власне критичне і креативне мислення, розширювати свій світогляд, загалом, бути цікавою, доброзичливою і творчою особистістю. Тільки креативний наставник може виховати майбутнього креативного фахівця.

Література

[1] Дмитренко А.В. Технології та інструменти розвитку креативного мислення. *Освітній проект «На урок» для вчителів*: https://naurok.com.ua/tehnologi-ta-instrumenti-rozvitku-kreativnogo-mislennya-156906.html
[2] Урсуленко І.В. (2013). *Інтелектуально-творчий розвиток учнів на уроках інформатики та інформаційних технологій*. Березівка: Березівській професійний аграрний ліцей.
[3] Кадігроб А.Л. Розвиток творчих здібностей учнів на уроках інформатики. *Електронний ресурс*: https://imidg.ucoz.ua/elgurnal/vyp22/6/kadigrob_stattja.pdf
[4] Воронов В.О. (2014). Формування інтелектуальних умінь на уроках інформатики. *Інформатика в школі.*, no. 5, pp. 2–5.

ПВНЗ "Європейський університет", Київ, Україна
Email address: `ninel.volkova@e-u.edu.ua`

ПВНЗ "Європейський університет", Київ, Україна
Email address: `olena.skliarenko@e-u.edu.ua`

ОСОБЛИВОСТІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ З МЕТОДИКОЮ НАВЧАННЯ У ВПФК

О. В. ГНЕПА

Володимирський педагогічний фаховий коледж імені Агатангела Кримського Волинської обласної ради – освітній заклад, який упродовж вісімдесяти чотирьох років готує освітянську еліту нашої держави.

Підготовка майбутніх фахівців початкової школи є складною і багатоаспектною. Окрім оволодіння здобувачами освіти загальнонауковими і професійними знаннями значна увага у процесі навчання приділяється формуванню базових компетентностей. Вагомим фактором, який впливає на ефективну реалізацію мети і завдань Нової української школи випускниками коледжу, є методики навчання різних освітніх галузей. Розглянемо особливості викладання «Математики з методикою навчання», яка є інтегрованим курсом математики та методики її викладання.

Метою вивчення дисципліни є якісна підготовка професійно компетентного, творчого вчителя сучасної початкової школи, який володіє достатніми математичними знаннями та вміннями, уміє застосовувати їх під час вивчення інших навчальних предметів, використовує сформовані компетентності для вирішення професійних завдань.

Аналіз джерельної бази і власний педагогічний досвід свідчать про те, що існує низка проблем під час викладання математичних дисциплін. Насамперед, це низький рівень базової підготовки студентів, їх мотивації при вивченні предметів математичного циклу, недостатня обізнаність щодо творчо-пошукової та науково-дослідницької діяльності.

Шляхи подолання вказаних суперечностей вбачаємо в активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів, залученні здобувачів освіти до науково-дослідної роботи, активному впровадженні практико-орієнтованого підходу, інноваційних, інформаційно-комунікаційних і здоров'язберігаючих технологій в освітній процес.

Під час занять нами успішно реалізовуються такі методи і прийоми розвитку критичного мислення, як «Алфавіт», «Асоціативний кущ», «Кошик», «Знайди помилку», «Кубування», «Сенкан» тощо. Перші три прийоми стимулюють студентів активно згадувати те, що вони знають з опрацьовуваної теми або вивченого матеріалу, змушують їх аналізувати, систематизувати та узагальнювати власну математичну ерудицію. Озброїти майбутніх вчителів методико-математичними знаннями допомагають такі ігрові технології, як «Анаграми», «Хмари слів», «Термінологічний батл», «Склади слово», використання ребусів (наприклад, 100лиця – столиця). Карти знань або інтелект-карти – простий та цікавий спосіб узагальнити і систематизувати вивчений студентами матеріал, класифікувати терміни, виділити головне і другорядне. Допоможуть у цьому наступні ресурси: MindMeister, MindMup, Mindomo, Coggle, Draw.io тощо.

Одним із пріоритетних напрямів удосконалення професійної підготовки майбутніх вчителів є науково-дослідна робота. Викладання педагогіки і математики з методикою навчання, а також керівництво студентським науковим товариством з педагогіки і психології сприяє тому, що, окрім педагогічної спрямованості дослідницької діяльності, студенти обирають також методико-математичні дослідження. У процесі наукового пошуку майбутні вчителі набувають нового досвіду, усвідомлюють необхідність постійної самоосвіти, вчаться швидко реагувати на освітні інновації. Наведемо приклади тематики цікавих та актуальних у наш час досліджень «Використання мобільних технологій на уроках математики у початковій школі», «Арт-терапія на уроках математики у початкових класах» тощо. Зауважимо, що завдяки мобільним додаткам математичні заняття стають захоплюючим пізнавальним процесом, у якому студенти та учні із задоволенням беруть участь [1, с. 95].

Отже, ґрунтовна методико-математична підготовка дозволяє студентам не лише легко включатися у професійну діяльність після закінчення коледжу, а й продовжувати навчання на математичних факультетах університетів і працювати у майбутньому вчителями математики.

Компетентність здобувачів фахової передвищої освіти підтверджується відгуками стейкхолдерів, які навчалися раніше у коледжі і нині є генераторами якісних змін у системі освіти.

Література

[1] Біляй І.М. (2018). Застосування мобільних технологій на уроках математики. *Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 2. Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*, № 20. с. 95–101.

Володимирський педагогічний фаховий коледж імені Агатангела Кримського Волинської обласної ради, м. Володимир, Україна

Email address: olchik.gnepa@gmail.com

РОЛЬ ІНШОМОВНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ У ПРОФЕСІЙНОМУ СТАНОВЛЕННІ МАТЕМАТИКА МИХАЙЛА КРАВЧУКА

О. В. ГНЕПА

Іншомовна компетентність є обов'язковою умовою освітньої і професійної мобільності, які є наслідками не лише світових процесів інтернаціоналізації та глобалізації, а й російсько-української війни. Знання іноземної мови сприяє швидшій адаптації вихідців з України в іншомовному середовищі, а загалом — налагодженню ділових контактів і міжнародних наукових зв'язків, участі в міжнародних конференціях, вивченню іноземного досвіду в галузі професійної діяльності.

Підтвердженням цієї думки є співпраця всесвітньо відомого математика, волинянина, Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942) із французьким математиком Жаком Адамаром, німецьким математиком Ріхардом Курантом та італійськими математиками Тулліо Леві-Чівіта і Франческо Трікомі, які високо цінували талант і знання українця. Зі ста вісімдесяти однієї наукової праці академіка М. Кравчука шість написано німецькою мовою і тридцять дві — італійською. У цьому йому допомагало вільне володіння не лише цими двома мовами, а й французькою, українською, російською та польською. Розглянемо передумови формування іншомовної компетентності М. Кравчука.

Початкову освіту майбутній академік здобув удома. Його мати, Адельфіна Фрідріхівна, знала декілька мов, навчала дітей німецької, польської, французької та італійської. У 1901 році М. Кравчук був зарахований до Луцької чоловічої гімназії, головне місце в якій, як і у всіх класичних гімназіях того часу, відводилося вивченню іноземних мов (німецької, французької і латинської). Гімназисти читали іноземну літературу мовою оригіналу, розуміли зміст прочитаного, вміли висловлювати думки різними мовами. Після закінчення гімназії із золотою медаллю у 1910 році М. Кравчук вступає на математичне відділення фізико-математичного факультету Київського університету святого Володимира. У цьому закладі вищої освіти студенти вивчали німецьку, французьку, польську, італійську, грецьку і латинську мови. Бібліотечний фонд університетської книгозбірні нараховував більше ста шести тисяч одиниць зберігання, серед яких частина книг іноземними мовами. Завдяки роботі з іншомовною літературою студенти знаходили спільне і відмінне у різних мовах, вдосконалювали розмовну мову, запам'ятовуючи афоризми, ідіоми та фразеологізми. За допомогою підручників і навчальних посібників латинською, польською, німецькою і французькою мовами Михайло Кравчук розумів іншомовні математичні терміни і позначення, особливості передачі російською мовою іншомовної математичної термінології. Все це стало передумовою його подальших життєвих успіхів, створенню української математичної термінології.

У 1924 році М. Кравчука запросили на Міжнародний конгрес математиків у Канаду, але через проблеми зі здоров'ям він не зміг бути присутнім у Торонто. У 1926–1927 роках вченого обрали членом математичних товариств Німеччини, Франції та Італії.

Вагомий вплив на формування іншомовної комунікативної компетентності М. Кравчука мало двомісячне відрядження на міжнародний конгрес в Італію. Доповідь, представлена майбутнім академіком у вересні 1928 року у Болоньї, справила виняткове враження на кращих математиків світу. Після знайомства з науковим життям, літературою та станом математичної освіти Італії М. Кравчук поїхав у Париж, де виступив на засіданні Французького математичного товариства та продовжив вивчати підходи до викладання математики у Франції. Науково насичена атмосфера з'їзду заохотила Михайла Кравчука до участі в дев'ятому Міжнародному конгресі математиків у Швейцарії (1932).

Виокремимо ще одну передумову вільного володіння М. Кравчуком іноземними мовами — його культурне оточення. Серед друзів вченого були літератори-поліглоти А. Кримський і М. Зеров, перший з яких знав шістдесят мов, а другий — двадцять.

Отже, впродовж свого життя М. Кравчук вдосконалював іншомовні мовленнєві навички, що сприяло розвитку його наукового світогляду, успішному виконанню професійних завдань.

Володимирський педагогічний фаховий коледж імені Агатангела Кримського Волинської обласної ради, м. Володимир, Україна

Email address: olchik.gnepa@gmail.com

ФОРМУВАННЯ SOFT SKILLS ЗДОБУВАЧІВ ВИЩОЇ ОСВІТИ В СУЧАСНИХ УМОВАХ В ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

О. О. ДЕМ'ЯНЕНКО, Л. А. РЕПЕТА, А. Ю. ЄЖЕЛЄВА

Вже чотири роки поспіль навчання української молоді відбувається в екстремальних умовах. Більшу частину часу — це режим online навчання. У такому режимі гостро постає проблема комунікацій в молодіжному середовищі та комунікацій з навколишнім світом. Результатом є виникнення проблем, що пов'язані вже безпосередньо з професійною діяльністю.

Сучасна молодь тяжіє до опанування спеціальностей, пов'язаних з комп'ютерними технологіями. Заклади вищої освіти надають широкі можливості для цього. Проте, великі компанії та працедавці зацікавлені не просто у кваліфікованих комп'ютерниках. Надважливими є навички та вміння співробітників працювати спільно в команді, вміти комунікувати, прислухатись і розуміти ідеї інших. Тобто ключем до кар'єрного і професіонального успіху, на думку багатьох відомих людей, є soft skills (соціально-комунікативні навички). Ці навички корисні в будь-якій сфері діяльності.

Питання формування та розвитку soft skills під час здобуття вищої освіти є дуже важливим і приділяти цьому увагу мусять викладачі з різних дисциплін, у тому числі та математичних. Розв'язувати проблему формування soft skills можна на різних рівнях. У вигляді компетенцій вона сформульована у силабусах дисциплін. На менш загальному рівні цю проблему вирішує активації взаємодій «викладач-студент» або «студент-студент» формуючи зацікавлення предметом вивчення і дослідження зі застосуванням, приміром, ділових і рольових ігор.

Для організації рольової гри можна, наприклад, розбити студентів однієї або кількох академічних груп на кілька підгруп, у кожній з яких будуть студенти різного рівня підготовки (і «слабші» і «сильніші»), поставити задачі перед кожною з таких підгруп і за результатами виконання завдання кожного члена групи оцінити спільну роботу. У такому разі зростає зацікавленість усіх разом і кожного окремо у досягненні максимального результату. Причому, кожен розуміє, що на ньому особисто відповідальність за оцінку роботи групи. Необхідність виробити спільну ефективну стратегію розв'язання поставленої задачі спонукає до взаємодії, потреби дослухатись до думок і міркувань інших, прийняття колективного рішення, вміння переконувати у своїй правоті й доцільності запропонованих дій або зважувати на інші думки і пропозиції та вибирати найкращий варіант дій. Тісна співпраця у вузькому колі своїх одногрупників згодом дасть можливість застосувати одержаний досвід і в подальшій роботі в більших колективах, швидко пристосуватись до нових умов і ситуацій. Фактично, у такій спільній діяльності формуються і набувають розвитку навички, які зазвичай і називають soft skills. Слід зауважити, що проводити такі заходи можна як в online, так і в offline.

Також ефективним способом розвитку комунікаційних навичок є залучення студентів до участі у «круглих столах» та наукових конференціях, що організовані для студентів та спільноти молодих вчених. Тут є можливість приділити увагу спілкуванню, вмінню вислухати та зрозуміти іншого, спроможність висловити свою думку, коректно сформулювати питання, змістовно заперечити співрозмовнику.

З власного досвіду корисним для розвитку комунікаційних навичок також є спілкування з випускниками, які можуть поділитись досвідом, своїми історіями про те, як влаштовувались на роботу, які навички виявились найважливішими з їх точки зору.

Участь студентів у різноманітних заходах, присвяченим важливим датам в діяльності навчального закладу, видатним випускникам або діячам, які вплинули на його розвиток дозволяє студентам глибше розібратися в історії видатної події, підтримати традиції навчального закладу, відчути корпоративний дух та свою приналежність до відповідної спільноти, що однозначно сприяє розвитку і поглибленню soft skills.

КПІ ім. Ігоря Сікорськогоа, Київ, Україна
Email address: o.dem@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: repetalesia@gmail.com

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: a.yezhelieva.om12@kpi.ua

ДО ПИТАННЯ ПРО КЛАСИ ГАРДІ

П. В. ЗАДЕРЕЙ, Н. М. ЗАДЕРЕЙ, Г. Д. НЕФЬОДОВА, І. Ю. МЕЛЬНИК

У 1914 році англійський математик Ґодфрі Гарольд Гарді (1877–1947), професор Кембриджського університету, опублікував в працях Лондонського математичного товариства роботу, присвячену середньому значенню модуля аналітичної функції, заданої в одиничному крузі. Гарді ввів класи функцій H^p, де $0 < p < \infty$. H^p – це множина функцій $F(z)$, аналітичних в крузі $|z| < 1$, що задовольняють при $0 \leqslant r < 1$ умову

$$\mu_p(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(re^{ix})|^p \, dx < \infty \tag{1}$$

Класи Гарді були узагальнені в роботах німецько-швейцарського математика українського походження О. М. Островського (1893–1986), який ввів класи функцій A або N. Функція $F(z)$ аналітична в крузі $|z| < 1$, належить класу A (або N), якщо при $r < 1$ справджується умова

$$\mu_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^+ |F(re^{ix})| \, dx < \infty, \tag{2}$$

де

$$\ln^+(x) = max[0, \ln(x)]$$

Можна довести [1], якщо функція $F(z) \in H^p$, то функція $F(z) \in A$. Такі класи функцій розглядалися також фінським математиком Рольфом Неванлінною (1895–1980) [2]. Клас Неванлінни включає усі класи Гарді.

Досить цікавою є особистість Олександра Марковича Островського. Народився він у Києві, в багатодітній сім'ї, закінчив на «відмінно» приватне комерційне училище і не мав атестату зрілості, потрібного для вступу до університету. Вчитель з математики Чир'єв, спостерігаючи за неабиякими математичними здібностями п'ятнадцятирічного хлопчика, привів його до професора Київського університету Дмитра Граве, який провів для нього два непростих випробування. Перше завдання полягало у доведенні усіх теорем на декількох сторінках, вибраних навмання у підручнику з теорії чисел, яке юний Островський виконав за два дні. Друге завдання було пов'язано зі швидким опрацюванням складних книг, а саме праці Д. Граве про квадратичну область. Професор, вражений математичними результатами О. Островського, негайно прийняв його до свого знаменитого наукового семінару, у творчій атмосфері якого виховувалися такі талановиті учні, як майбутній академік ВУАН М. Кравчук, майбутній академік АН СРСР Ю. Шмідт, М. Крейн, В. Вельмін, М. Чеботарьов, Б. Делоне та багато інших.

Попри підтримку Д. Граве та його прохання до попечителя учбового округу Олександру Островському не дозволили екстерном здати іспити на атестат зрілості, і вчитель порадив йому навчатися за кордоном. За рекомендацією Д. Граве молодий вчений був одразу прийнятий до двох університетів, Геттінгенського та Марбурзького. Спочатку Островський вивчав математику у Марбурзькому університеті, де швидко набув світового авторитету. Потім у Геттінгені захистив під керівництвом Гільберта, Клейна та Ландау докторську дисертацію і у віці 35 років у 1927 році очолив у Базельскому університеті знамениту кафедру Йоганна Бернуллі. Зазначимо, що на своїй Батьківщині, яка стала радянською, вчений світового рівня знову не був затребуваний, хоча мав значну підтримку з боку провідних радянських математиків.

Дослідження О. Островського стосувалися багатьох розділів математики: геометрія, топологія, алгебра, теорія чисел, диференціальні рівняння та теорія функцій. Такі широкі наукові інтереси були рідкістю у XX столітті. О. Островський був чудовим лектором, викладачем, методистом, займався видавничою діяльністю [3].

У 1980 р. з'явилася монографія професора Каліфорнійського університету Пола Кусиса, присвячена класам H^p, що відзначилася ясним та доступним викладенням основної теорії класів Гарді в одиничному крузі і півплощині та застосуванню їх в різних областях. Друге видання монографії [4], більш розширене та доповнене, вийшло у 1998 р.

Дослідження класів Гарді, Островського–Неванлінни істотньо вплинули на теорію рядів та інтегралів Фур'є. Класи H^p виявилися корисними в теорії лінійних операторів і в теорії ймовірностей.

Література

[1] Zigmund A. (1965). Trigonometric series., Izdat. «Mir», Moscow. vol. I, pp. 615. vol. II, pp. 537.

[2] Nevanlinna Rolf (1970). Analytic Functions. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. pp. 376.

[3] Митропольський Ю.О., Самойленко А.М., Перестюк М.О., Дрозд Ю.А., Кириченко В.В., Сущанський В.І. (1970). Дмитро Граве – професор Київського університету. Наукові записки НаУКМА. т. 23, Фізико-математичні науки. с. 5–9.

[4] Koosis Paui (1980, 1998). Introduction to Spaces. Cambridge University Press. pp. 286.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: pvzaderey@gmail.com, zadereynm@gmail.com, g.nefyodova@gmail.com

Київський університет імені Бориса Грінченка, м. Київ, Україна
Email address: iy.melnyk@kubg.edu.ua

ПРОФЕСОР НІНА ВІРЧЕНКО – ЗАСНОВНИК ТА ОРГАНІЗАТОР КОНФЕРЕНЦІЙ ІМЕНІ МИХАЙЛА КРАВЧУКА

Н. М. ЗАДЕРЕЙ, Г. Д. НЕФЬОДОВА, І. Ю. МЕЛЬНИК

31 серпня 1898 року відбулося відкриття найбільшого вишу України – Київського політехнічного інституту. Нині КПІ ім. Ігоря Сікорського відмічає 125-річчя. Визнання і славу КПІ самовідданою працею створювали видатні вчені, педагоги, науковці, які підготували кількасот тисяч фахівців, серед них визначні інженери, вчені, винахідники. Доля викладачів вишу, як і доля України, часом була досить непростою.

Вже 50 років вагомим внеском у розвиток педагогічної складової та математичної школи КПІ ім. Ігоря Сікорського є діяльність професора кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей Ніни Вірченко. В Київській політехніці найбільш повно розкрився педагогічний та науковий талант Н. Вірченко, тут вона завершила роботу над докторською дисертацією «Нові типи парних інтегральних рівнянь зі спеціальними функціями». Професор Вірченко – автор понад 500 наукових робіт, багатьох монографій, підручників, довідників, науково-методичних посібників, науково-популярних творів. Визначним є її досвід, тверда система цінностей, толерантність, незламність у відданості своїй країні, непорушна любов до математики та життя. Не одне покоління випускників завдячує їй своїм професіоналізмом, жагою до творчих досліджень. У світовій науковій спільноті професор Вірченко знана і своєю активною плідною громадською діяльністю.

У 1965 році, досліджуючи деякі проблеми математичної фізики, Ніна Опанасівна натрапила у науковій літературі на згадку про академіка Михайла Пилиповича Кравчука. З'ясувала, що праці видатного українського математика XX-го століття, безневинно знищеного тоталітарним радянським режимом на Колимі, вилучено з бібліотечних фондів. З того часу понад півсторіччя Н. Вірченко проводить величезну роботу по відновленню та поверненню з небуття імені та праць українського вченого, по увіковічуванню його пам'яті.

Ніна Опанасівна Вірченко – упорядник і редактор трьох томів праць вченого (2000, 2002, 2004), цілої низки публікацій про М. Кравчука. Завдяки її зусиллям в КПІ ім. Ігоря Сікорського була відкрита аудиторія ім. М. Кравчука (2002), пам'ятник Кравчуку (2003), ім'ям академіка названо вулицю в Києві (2009), вона приймала участь у створенні фільму про вченого «Голгофа академіка Кравчука» (2004), музею його імені у селі Човниця Луцького району [1, 2]. Цю непересічну жінку називають «духовною донькою» Михайла Кравчука, «математиком із серцем і душею поета».

У травні 1992 р. в Київській політехніці була організована Перша міжнародна наукова конференція ім. М. Кравчука, присвячена 100-річчю від дня народження вченого. Ніна Вірченко є ініціатором, організатором, керівником та натхненником як першої, так і наступних конференцій. Протягом тридцяти років на базі кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей організовано вже дев'ятнадцять конференцій, учасниками яких були провідні вчені з багатьох країн світу.

Кожна з цих конференцій пов'язана з активною, напруженою, самовідданою роботою Ніни Опанасівни. Міжнародні конференції ім. М. Кравчука – неоціненна наукова школа як для вчених, педагогів, так і для молодих науковців, студентів. Основна мета міжнародних конференцій ім. М. Кравчука – узагальнювати, стимулювати наукові пошуки математиків, заразом віддаючи належну шану великому математикові XX-го століття, патріоту України, який зробив величезний внесок у розбудову математичної науки на своїй Батьківщині – академіку Михайлу Кравчуку. Велика вдячність, низький уклін, пошана професору Ніні Вірченко, за її патріотичну життєву позицію, незламну волю, відданість ідеалам справедливості, свободи, незалежності, палку любов до України та її славних синів.

Література

[1] Вірченко Н., Гайдей В., Міхно О. (2014). *Михайло Кравчук. Вибрані праці. Історія та методика математики.* НТУУ «КПІ», педаг. музей. Вип.1., 252 с.

[2] Вірченко Н. (2011). *Зернини з доріг життя мого... (Спомини).* К.: Задруга. 2011, 760 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: zadereynm@gmail.com, g.nefyodova@gmail.com

Київський університет імені Бориса Грінченка, Київ, Україна
Email address: iy.melnyk@kubg.edu.ua

М. П. КРАВЧУК: ПОЛІНОМИ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

О. І. КЛЕСОВ

У доповіді докладно розглянуто зміст статті М. П. Кравчука [1], у якій вперше наведено означення поліномів, які тепер називають його ім'ям. У цій статті не наведено жодного твердження, але майже кожен абзац містить ідеї, які пізніше розвинуто самим М. П. Кравчуком [2]–[3], а також багатьма його послідовниками. У другій частині доповіді наведено низку результатів з теорії кодів, що виправляють помилки, у яких використовуються поліноми Кравчука. Перераховано також низку алгебраїчних властивостей поліномів Кравчука, які необхідні для розвитку теорії кодування, а також сформульовано кілька нерозв'язаних задач стосовно коренів поліномів Кравчука.

Про статтю [1]. Ця стаття має формат доповідей Академії наук, який не передбачає доведень результатів і вимагає від автора стислого викладу матеріалу. Умовно дві сторінки статті можна розділити на три частини.

У першій частині для загального випадку вагових коефіцієнтів означаються ортогональні поліноми дискретної змінної і наводиться формула найкращого наближення заданної функції лінійними поліномами.

У другій частині дискретною змінною є послідовність натуральних чисел. Зазначається, що для рівних між собою вагів так означені поліноми відповідають поліномам Чебишова, які узагальнюють поліноми Лежандра. Відмічається, що поліноми, які становлять інтерес для автора, відповідають вагам, що утворюють біноміальний розподіл. Для поліномів, які ми зараз називаємо ім'ям Кравчука, наведено формулу з використанням різницевого оператора, а також вираз для них у явному вигляді. Зазначено, що поліноми Ерміта є граничним випадком означених поліномів.

Третю частину присвячено двом формулам, у яких означені поліноми використані для обчислення узагальнених неповних моментів.

Більше деталей стосовно поліномів Кравчука наведено у іншій його роботі [2], опублікованій українською у тому ж році. У роботі [3] Кравчук також обговорює властивості ортогональних поліномів, що відповідають біноміальним вагам.

Про застосування у теорії кодування. Обговорюється кілька застосувань поліномів Кравчука у теоретичних питаннях теорії кодів, що виправляють помилки.

1. Для максимально можливої кількості кодових слів $A(n,d)$ довжини n з мінімальною відстанню між словами d наведено оцінку Варшамова–Гілберта:

$$A(n,d) \leqslant \binom{n}{k} \frac{n-k-(k+1)Q_{k,n}}{-2a(k+1)Q_{k,n}},$$

де

$$Q_{k,n} = \frac{\mathscr{K}_{k+1}(a;n)}{\mathscr{K}_k(a;n)},$$

$\mathscr{K}_k(a;n)$ — поліном Кравчука з параметрами k та n для аргументу a, який задовольняє умові

$$x_{1;k+1,n} < a < x_{1;k,n},$$

у якій $x_{1;k,n}$ — мінімальний корінь поліному Кравчука з параметрами k та n.

2. Наведено критерій існування досконалого коду у термінах існування нецілих коренів відповідного поліному Кравчука. З цим питанням пов'язано нерозв'язані задачі:

(1) якими є умови існування нецілих коренів поліному Кравчука?
(2) якими є умови відсутності цілих коренів поліному Кравчука?

3. Пояснено зв'язок поліномів Кравчука з спектром кодів та перетворенням Мак-Вільямс.

4. Сформульовано теорему Ллойда про оптимальну потужність коду у термінах коренів спеціальної лінійної комбінації поліномів Кравчука.

Література

[1] Krawtchouk, M. (1929). Sur une généralisation des polynomes d'Hermite. *Comptes Rendus Mathematique*, vol. 189, no. 17, pp. 620–622.
[2] Krawtchouk, M. (1929). Про інтерполяцію з допомогою ортогональних поліномів. *Зап. Київ. с.-г. ін-ту*, випуск 4, стор. 21–28.
[3] Кравчук, М. (1931). Про ортогональні поліноми, зв'язані зі схемами повернення та неповернення куль. *Зап. фіз.-мат. відділу УАН*, випуск 5, стор. 19–48.

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна
Email address: voselk@gmail.com

БОРЕЦЬ ЗА ВІДРОДЖЕННЯ УКРАЇНСЬКОЇ ДЕРЖАВИ – АКАДЕМІК МИХАЙЛО ПИЛИПОВИЧ КРАВЧУК

О.М. КРАВЧУК

У Концепції національно-патріотичного виховання [1] головною домінантою передбачено формування в молоді особистісної ідентифікації зі своєю нацією, віри в її майбутнє. . . знання історії, життя та діяльності видатних українських діячів, які виявили активну громадянську позицію.

Однією із найяскравіших на терені математичної науки є багатогранна й цікава для дослідження постать українського вченого-математика, педагога, методиста, громадського діяча, академіка Всеукраїнської академії наук Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942).

Він дбав про можливості здобуття освіти всіма верствами населення, готував методичне забезпечення, розробляючи відповідні програми, навчальні та методичні посібники українською мовою; намагався всіляко підтримувати. випускників тодішніх сільських шкіл при вступі до ЗВО. Зокрема, завдячуючи йому, змогли вступити до вищих навчальних закладів і його обдаровані учні із Саварки, серед яких учень-сирота Архип Люлька, якому по-батьківськи допомагав М.П. Кравчук під час навчання у Київському політехнічному інституті, і він став відомим українським вченим. Так само, по-батьківськи, він допомагав молодому Сергію Корольову, якого прийняли на навчання до КПІ саме за наполяганням Кравчука (молодому одеському робітнику не вистачало півроку трудового стажу). М. Кравчук завжди залучав здібних студентів до наукової роботи через заняття у гуртках різних математичних напрямів. Багато його учнів стали відомими математиками.

У 1922 році його запросили працювати у США, гарантуючи найсприятливіші умови для творчої праці. Але М.П. Кравчук не залишив свою Україну, не зрадив тих мудрих, добрих, видатних вчених, хто повірив йому і дав можливість здобути вищу освіту, щоб жити і працювати задля розвитку математичної науки та майбутнього своєї рідної землі. Вчений продовжував віднаходити нові скарби серед молоді, розвивати їх, робити нові відкриття у різних галузях математики, дотримуючись принципу сформульованого ним словами "треба тримати руку на пульсі науки", вражаючи своєю далекоглядністю та влучністю думок. Зокрема, він наполегливо акцентував увагу на важливості наближених обчислень, вважаючи, що саме вони торують шлях до реалізації найглибших математичних ідей. Направду, через десятки років, саме у добу бурхливого розвитку кібернетики відчутно зросла роль наближених обчислень і саме його наукові напрацювання стали для американських вчених основою при створенні першого електронного комп'ютера.

А скільки б ще міг він зробити для вітчизняної та світової математичної науки, для своєї рідної мови, для рідної України, якби не склалась так трагічно його доля! Адже він не лише визначав і розв'язував ті чи інші задачі, але й вказував перспективні проблеми для майбутніх дослідників.

Після довгих років забуття, у 1992 році наукова громадськість України та світу широко відзначила 100-річчя від дня народження видатного вченого: перша міжнародна конференція його імені; відкриття у Луцьку меморіальної дошки на приміщенні обласної юнацької бібліотеки – колись Луцької гімназії, в якій навчався Михайло Кравчук. Так було започатковано щорічні наукові форуми його імені, що стимулюють наукові пошуки математиків України та різних країн світу, консолідують зусилля вчених, які вивчають життєвий шлях М. П. Кравчука і розвивають його ідеї. У 2016 році Гнепою О.В. у Волинському національному університеті імені Лесі Українки захищена дисертація «Організаційна діяльність та педагогічна спадщина Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942)»

Ми повинні берегти пам'ять про нашого земляка, геніальну, надзвичайно талановиту людину, видатного науковця, який так щиро любив Україну, мріяв про її утвердження у світі. Він заслуговує цього і своєю трагічною долею, і багатогранністю творчого таланту.

Література

[1] *Концепція національно-патріотичного виховання в системі освіти України.* Наказ Міністерства освіти і науки України від 06.06.2022 № 527. URL: `https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0527729-22#Text` (дата звернення 22.08.2023).

МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДИ ТА РОБОТА МАТЕМАТИЧНИХ ГУРТКІВ В ІСЗЗІ

Н. В. КРОШКО, Т. В. ІВАНЕНКО, В. О. БІЛИЙ, О. Г. БІЛИЙ

Олімпіадний рух в КПІ має глибоке коріння, усталені традиції та славну історію. З самого заснування КПІ керівництво та професорсько-викладацький склад віддавали належне високому рівню інженерно-технічної підготовки студентів, що неможливо без досконалих знань математики та інших точних наук. З 2010 року частиною цієї історії стали студенти та курсанти Інституту спеціального зв'язку та захисту інформації КПІ ім. Ігоря Сікорського (ІСЗЗІ), в якому в подальшому щорічно кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей (МАтаТЙ) почали проводитись студентські математичні олімпіади під керівництвом та за участю завідувачів кафедри професорів Булдигіна В.В. та Клесова О.І. Математична олімпіада — це змагання не тільки обдарованих індивідуальностей, а й всієї системи математичної підготовки як у державі, так і в конкретному ВНЗ. Самій олімпіаді передує багатогранна комплексна робота підготовки до неї, що має багато складових. Перш за все грає велику роль наявність і професійність достатньої кількості викладачів, які заряджають знаннями і любов'ю до предмета та спеціальності. Таких в КПІ дуже багато.

Важливою другою складовою підготовки до олімпіади є робота математичних гуртків. Починаючи з 2009 року математичний гурток ІСЗЗІ регулярно працював під керівництвом доцентів Рудоміно-Дусятської І.А., Сікорського Ю.Г., Іваненко Т.В., Крошко Н.В. та ст. викл. Білого О.Г. Робота математичного гуртка націлена не лише на підготовку слухачів до олімпіад, але й на підвищення їх загального математичного рівня, поглиблене засвоєння ними важливих програмних тем, таких, наприклад, як «Визначники вищих порядків», «Розширена теорема Лапласа», «Побудова графіків деяких нестандартних функцій», «Формули Валіса та Стірлінга», «Застосування рядів Фур'є», «Комбінаторика» та ін. з курсів вищої математики, ознайомлення з темами, що прямо не входять до програм курсів, допомогу при підготовці курсантами та ад'юнктами наукових робіт за спеціальностями. Факультетські тури олімпіади в ІСЗЗІ стали регулярно проводитись з 2010 року. Основну організаційну роботу здійснювали доценти Іваненко Т.В., Крошко Н.В. та ст. викл. Білий О.Г. Вони ж формували 4 задачі білетів для першого та старших курсів, а також перевіряли олімпіадні роботи. Підготовку студентів та курсантів до першого та другого рівнів олімпіади проводили у різних формах — безпосередньо на лекціях та практичних заняттях, на штатних та додаткових консультаціях та у формі роботи математичних гуртків. Відмітимо, що протягом багатьох останніх років при кафедрі МАтаТЙ функціонують ще два математичних гуртка, а саме: «Нестандартні та олімпіадні задачі аналізу та теорії ймовірностей», а також «Додаткові розділи математичного аналізу», які також відвідували студенти ІСЗЗІ.

Нарешті, третя складова — це система довузівської підготовки. При ІСЗЗІ були організовані та успішно працювали підготовчі групи абітурієнтів, заняття з математики в яких протягом багатьох років проводив к.ф.-м.н. Білий В.О.

ІСЗЗІ завжди забезпечував високу явку на олімпіади всіх рівнів. Переможців першого туру керівництво ІСЗЗІ та кафедра МАтаТЙ нагороджували відзнаками і грамотами. Були також доповіді кращих студентів на методичному семінарі кафедри. Деякі студенти були співавторами разом з викладачами науково-методичних статей, та виступали з доповідями на Всеукраїнській науковій конференції молодих математиків.

В роботі [1] наведені деякі приклади методичних розробок при підготовці до олімпіад, а також представлено зразки білетів факультетського та Всеукраїнського рівнів різних років.

Література

[1] Білий О.Г., Білий В.О., Іваненко Т.В., Крошко Н.В. (2023). Деякі аспекти підготовки та проведення математичних олімпіад в ІСЗЗІ. *Mathematics in Modern Technical University*, vol. 2023, no 1.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: kroshko06@bigmir.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: tivanenko2015@gmail.com

КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна
Email address: valeri_y@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: belyi.oleksandr@gmail.com

РОЛЬ МИХАЙЛА КРАВЧУКА В ОРГАНІЗАЦІЇ УКРАЇНСЬКИХ ПІДГОТОВЧИХ КУРСІВ ДО УНІВЕРСИТЕТУ

С. О. КУХАРУК

Суттєвий внесок у розвиток освіти завжди був ключовим чинником становлення національної свідомості та ідентичності. Один із видатних діячів – Михайло Пилипович Кравчук – відіграв важливу роль у становленні української освіти, сприяючи розвитку освітніх ідей, методик навчання та національно-патріотичного виховання, що формувало майбутнє українського суспільства. Від самого початку своєї діяльності, Михайло Кравчук проявляв великий інтерес до освіти та української культури. Його відданість ідеям національного відродження підштовхнула його до активної діяльності у цій сфері.

У 1917 році відбулися суттєві політичні зміни, що вплинули на долю нашого народу. І, починаючи з часів Української Центральної Ради, Михайло Кравчук взяв на себе лідерську роль у розвитку національної освіти. Він очолив Головне управління освіти та наукової справи, де зосередив свої зусилля на створенні та реформуванні освітньої системи. Саме завдяки його ініціативам та наполегливості, почалася активна робота з відновлення українських шкіл, гімназій та університетів. Молодий, та вже відомий серед науковців, математик викладав у Києві у щойно відкритих українських гімназіях, Українському університеті та був активним членом Українського наукового товариства у Києві, сприяв розвитку Української академії наук, заснованої у 1918 році.

У 1918–1919 роках Михайло Кравчук бере активну участь у формуванні національної освіти, відіграючи ключову роль в керівництві Українськими Підготовчими Курсами до Університету [1]. Робота курсів розпочалася одночасно з відкриттям Українського Народного Університету 5 жовтня 1917 року. Для вступу на навчання необхідно було мати «свідоцтво за 6 класів гімназії». Завданням курсів було підготувати молодь, яка не мала повної освіти за 6 класів, для вступу до Українського Народного Університету.

Під час засідання Ради Лекторів 21 вересня 1918 року Михайло Пилипович Кравчук був обраний на посаду директора Українських Підготовчих Курсів до Університету [1]. Директор Михайло Кравчук став перед однією з основних задач – забезпечити належну наступність між підготовчими курсами та Українським Народним Університетом. Для досягнення цієї мети він вніс зміни до програми лекцій, адаптуючи її більше до гімназійного рівня. Це призвело до запровадження курсів, які працювали у форматі вечірніх шкіл для дорослих.

Матеріал у цих курсах мав загальноосвітній характер, що робило його більш доступним для засвоєння.

Далі у навчання було впроваджено трирічну систему підготовки для слухачів курсів. Ця ініціатива призвела до значного зростання їх кількості. Михайло Пилипович Кравчук, як директор курсів, виконував низку обов'язків, включаючи планування навчально-виховної діяльності. Зокрема, при складанні розкладу занять він брав за основу розклад державних гімназій. Також був переконаним прихильником виділення більшої кількості годин на такі предмети, як математика та мова, з максимальною кількістю практичних занять, вважаючи їх базовими для здобуття вищої освіти.

Важливо відзначити, що Михайло Пилипович Кравчук відіграв визначну роль у встановленні юридичного статусу курсів. Після перетворення Українського Народного Університету у державний навчальний заклад, директор взяв на себе завдання вирішення питання щодо їхнього правового статусу.На засіданні Ради Лекторів 1 листопада 1918 року було обрано комісію, яка мала переглянути розроблений проєкт і внести деякі зміни. 18 листопада директор зачитав по параграфах власний проєкт статуту і отримав схвальну оцінку. Після консультацій з юристами 17 лютого 1919 року М. Кравчук здійснив реєстрацію статуту курсів у суді, а через місяць після публікації документ набув законної сили. Згідно з новим статутом 26 березня 1919 року відбулися вибори нового Правління курсів, на яких Головою Ради Курсів було обрано професора М. П. Кравчука, а секретарем – Е. М. Грицака [1].

Михайло Кравчук, будучи директором, стикався з проблемою забезпечення місця для проведення курсів і зазнавав значних труднощів у її вирішенні. Вирішення цієї проблеми вимагало від нього значних зусиль і ресурсів.

Діяльність курсів відігравала важливу роль у поширенні наукових знань серед української молоді, що одночасно сприяло зарахуванню обдарованих абітурієнтів до університету. Свідченням вагомого внеску Михайла Пилиповича Кравчука в організацію роботи курсів є той факт, що суспільство називало їх «бурсою Кравчука». Михайло Кравчук відіграв надзвичайно важливу роль у становленні та розвитку української національної освіти. Завдяки його ініціативам та наполегливій праці було засновано українські гімназії, організовано підготовчі курси для вступу до університету.

Література

[1] Гнепа О.В. (2011). Розв'язання М. Кравчуком проблем ефективного керівництва Українськими підготовчими курсами до університету. *Зб. Наук. Пр. Уман. Держ. Пед. Ун-ту ім. П. Тичини*, № 4, с. 61–68.

[2] Вірченко Н.О. (2007). *Велет української математики*. Київ: Задруга.

[3] Гнепа О.В. (2010). Обстоювання М. Кравчуком інтересі національної школи. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології: Науковий журнал*, № 8, с. 8–15.

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: Kukharuk.Sofiia2021@vnu.edu.ua

НАУКОВІ ЗДОБУТКИ МИХАЙЛА КРАВЧУКА ТА ЙОГО УЧНІВ

Л. В. ЛУЦЮК, С. Р. ЯЦЕНЮК

Михайло Пилипович Кравчук – математик, академік, напрацювання й методи якого застосовуються і сьогодні. Наукові праці Михайла Кравчука широко використовували американські вчені для створення першого у світі комп'ютера [2].

Історія створення першого електронного цифрового комп'ютера й досі має чимало таємниць. До початку 70-х років минулого століття вважалося, що винахідниками першої ЕОМ є Джон Маучлі і Джон П. Еккерт, які в 1943–1946 роках створили ENIAC, діючий електронний цифровий комп'ютер [1]. Але після жовтня 1973 року за рішенням американського суду винахідником електронного комп'ютера визнали Джона Вінсента Атанасова.

Підґрунтям для створення першого електронного цифрового комп'ютера були наукові розробки видатного науковця Михайла Пилиповича Кравчука. Д. Атанасов використовував праці М. Кравчука і, навіть, переклав з української мови англійською двотомну монографію М. Кравчука з нових методів наближеного розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь. У 2001 році в архівах Смітсонівського Музею Американської історії у Вашингтоні та університету штату Айова в Еймсі американському вченому, волинянину за походженням із села Лище Луцького району, досліднику праць М. Кравчука Івану Качановському пощастило знайти ці переклади.

Михайло Пилипович Кравчук був вчителем всесвітньо відомих конструкторів ракетної та космічної техніки, академіків Архипа Люльки, Сергія Корольова та Володимира Челомея.

Архип Михайлович Люлька – Генеральний конструктор авіаційної техніки, автор конструкції першого в світі двоконтурного турбореактивного двигуна, творець літаків з надзвуковою швидкістю [3]. Архип Люлька був звичайним сільським хлопцем, якого Михайло Пилипович помітив, працюючи директором школи в селі Саварка (нині Богуславський район, Київська область) у 1920–1921 роках. Він долучив талановитого хлопця до науки та розвинув його таланти. Архип Люлька згадував ім'я свого вчителя з великою повагою та вдячністю, протягом усього свого життя.

У період 1965–1985 рр. був розроблений під керівництвом генерального конструктора академіка А.М. Люльки турбореактивний двигун третього покоління. Двигуни АЛ-31 Ф, АЛ-21 Ф-3 встановлені на літаках фронтової авіації. Саме такі літаки ЗСУ зараз використовують у боротьбі з окупантами.

Ще одним учнем Михайла Кравчука був Сергій Павлович Корольов (1907–1966 рр.) – радянський вчений українського походження у галузі ракетобудування та космонавтики, конструктор [4], один із засновників практичної космонавтики. Під його керівництвом було запущено першу міжконтинентальну балістичну ракету, перший штучний супутник Землі, здійснено перший вихід людини в космос. М. Кравчук відіграв важливу роль у долі Сергія Корольова – допоміг йому, тоді ще молодому одеському робітникові, подолати бюрократичні перешкоди й вступити до Київського політехнічного інституту.

Одним із учнів Михайла Кравчука також був Володимир Миколайович Челомей (1914–1984 рр.) – український радянський механік, фахівець у галузі динаміки стійкості складних коливальних систем, генеральний конструктор ракетно-космічної техніки [5]. З 1950-их років брав активну участь у різних проектах ракетобудування в СРСР, був одним з головних учених-консультантів у галузі ракетних двигунів для ракет та літаючих апаратів, переважно військового призначення. Володимир Миколайович досить часто згадував свого наставника Михайла Пилиповича та завжди дякував йому за отримані знання та настанови.

Михайло Пилипович Кравчук не лише давав своїм учням знання і навички, які вони успішно використовували протягом усього життя, але також він вкладав у них важливі цінності і принципи. Він вчив їх не лише математичним та науковим аспектам, але й важливості наукової дисципліни, цілеспрямованості, працьовитості і віри в можливість досягнення великих цілей. Вони стали лідерами у своїх областях, внесли значний внесок у розвиток сучасних технологій, а також сприяли національному і міжнародному науковому співробітництву.

В усіх здобутках учнів Михайла Кравчука, ми повинні віддати дяку та шану великому математику. Адже, саме він зміг навчити своїх підлеглих усього того, чим вони користувалися все своє життя. Завдяки своєму наставнику, вони зуміли зробити те, чим ми всі пишаємось, та те, що нам зараз дуже необхідно для боротьби за наше майбутнє. Це однозначно великий внесок особисто Михайла Кравчука та його учнів у наше сьогодення.

Література

[1] Матеріали XVI Міжнародної науково-практичної конференції аспірантів і студентів «Молода наука Волині: пріоритети та перспективи досліджень» (17 травня 2022 року). Луцьк: ВНУ ім. Лесі Українки, 2022. С. 440–442.

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Mikhail_Kravchuk

[3] Ховрич С. Важка дорога до Архипа Люльки, 2011.

[4] https://uk.wikipedia.org/wiki/Корольов_Сергій_Павлович

[5] Пістоленко І.О. Володимир Миколайович Челомей у роки дитинства та становлення його як ученого та конструктора (1914–1941). Полтава, 2009.

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: Lutsiuk.Liubomyr2021@vnu.edu.ua

ВНУ ім. Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: solomiaacenuk@gmail.com

РОЛЬ МИХАЙЛА КРАВЧУКА У СТАНОВЛЕННІ НАЦІОНАЛЬНОЇ УНІВЕРСИТЕТСЬКОЇ ОСВІТИ (1917–1920 РОКИ)

Я. М. МАДЯР, О. М. КРАВЧУК

Михайло Пилипович Кравчук - найвизначніший український математик XX століття. Педагог, методист, член Всеукраїнської Академії наук, учений світової слави, відомий у різних галузях математичної науки, а саме: вищої алгебри та математичного аналізу, теорії ймовірностей і математичної статистики та ін.

1917-1920 рр. – один з найскладніших періодів в історії України. Країна пережила за цей час декілька змін влади. Кожна влада прагнула зруйнувати нововведення в організації системи освіти, запропоновані попередниками і внести щось своє.

Відродження освіти рідною мовою вважалося необхідною передумовою для вирішення назрілих національних проблем. Україномовна науково-педагогічна громадськість усвідомлювала пріоритетність українізації вищої школи, випускники якої займали різноманітні державні та громадські посади.

З метою заснування неофіційного вищого навчального закладу у червні 1917 року була створена «Спільна комісія по улаштуванню народного університету», до якої ввійшли представники Наукового Товариства, Товариства шкільної освіти, товариства «Просвіта» і «Праця». М.П. Кравчук також входив в організаційний комітет. У 1917-1920 роках був членом УНТ у Києві, заступником голови математичної секції товариства [1, арк. 97].

19 червня відбулося засідання організаційної комісії, на якому активно обговорювали план роботи майбутнього університету, умови прийому студентів та програми викладання. Відкриття університету було заплановане на осінь 1917 року. Були створені відповідні комісії для успішного завершення розробки навчальних планів і програм для Українського народного університету (УНУ). Михайло Пилипович Кравчук був членом природничо–технічної комісії по влаштуванню УНУ. З часу відкриття УНУ і до кінця 1918 року він був секретаря фізико-математичного факультету (8грудня 1918 року відмовився від виконання своїх обов'язків).

У жовтня 1917 року відбулися засідання, на яких розглядалися питання про видавничу комісію, яка мала видавати тексти лекцій, та фінансування університету. У листопаді 1917 року розпочав видання власний друкований орган КУНУ. Підготувати і випустити перший том «Вісника» і деякі конспекти лекцій, у тому числі і конспект лекцій з геометрії М.Кравчука.

5 серпня1918 року Рада Міністрів ухвалила закон про перетворення університету в Київський Державний Український Університет. Однією із найважливіших проблем була кадрова. Потрібно було не лише підібрати лекторів – фахівців своєї справи, а, насамперед, здатних викладати українською мовою. Прихильне ставлення частини педагогічного колективу до українського відродження вносило у навчальний процес елемент особистого протистояння з боку проросійської професури [2, 73].

Незважаючи на це, національна ідея глибоко проникла у свідомість значної частини викладачів. Науково-педагогічний колектив нової державної інституції було ухвалено наказом Міністра освіти і мистецтва М. Василенка 12 серпня 1918 року. Відповідно до цього наказу, Михайла Пилиповича Кравчука, приват-доцента університету св. Володимира, по кафедрі математики, було затверджено виконуючим обов'язки екстраординарного професора.

З приходом до влади більшовиків 1 червня 1919 року КДУУ та Університет Святого Володимира були об'єднані у Київський Університет. 16 грудня 1919 року Київ зайняли частини червоної армії і з встановленням в Україні більшовицької влади українські університети припинили своє існування.

На основі вивчення архівних документів встановлено, що Михайло Кравчук усвідомлював необхідність розповсюдження наукових знань серед молоді як засобу інтелектуального потенціалу нації. Талановитий педагог багато зробив для того, щоб освіта стала доступною для всіх українців. Його активна участь у становленні та розвитку КДУУ залишила глибокий слід у функціонуванні національної університетської системи освіти у 1917-1920 роках.

Література

[1] Держархів Київської обл. Ф. 16. Оп. 479. Спр. 120. 5 арк

[2] Завальнюк О.М. Функціонування Київського українського народного університету – прорив національної освіти і науки у 1917-1918 рр. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Історичні науки: наукове видання, 2009. Вип. 2. С. 72-87.

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: madarana4@gmail.com

Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: olikr57@ukr.net

ОРГАНІЗАЦІЙНО-ПЕДАГОГІЧНА ДІЯЛЬНІСТЬ М. П. КРАВЧУКА

М. М. МЕЛЬНИЧУК, А. Р. ПАНАСЮК

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — видатний науковий діяч та відмінний педагог. Тривалий час його постать перебувала у тіні — ім'я М. Кравчука було занесено до списку «ворогів народу», а сам він, сповнений творчих ідей і невичерпної енергії, засланий на Колиму, де і помер.

У 1917 році Кравчук починає викладати математичні дисципліни у першій та другій гімназіях Києва та в Українському народному університеті. 5 вересня 1917 року молодий науковець дебютував із лекцією з чистої математики «Про функції, що справджують теорему додавання», а через кілька днів — із лекцією з теорії множин, отримавши звання доцента [1].

У другій половині 20-х років педкомісія математичної секції природничого відділу Інституту української наукової мови під керівництвом Михайла Кравчука створила тритомний математичний словник.

М. Кравчук організував драматичний та хоровий гуртки в с. Саварка Богуславського району, куди він переїхав із своєю дружиною Есфірою Йосипівною. Разом із місцевими селянами вчитель відбудував школу, підключив електрику від млина, створив бібліотеку, забезпечив наукове приладдя в класах, столярну майстерню, підготовив нові педагогічні кадри та реалізував свої педагогічні ідеї.

У 1925 р. професор Михайло Кравчук очолював кафедри вищої математики кількох столичних вузів, працював деканом Інституту народної освіти. На його заняттях студенти знайомилися з найновішими досягненнями світової математичної науки, новинками літератури та результатами власних досліджень лектора.

Досвід у сфері освіти допоміг йому втілити мрію про україномовну освіту, вступу до університетів здібної молоді, а праці стали надійним фундаментом української математики [2].

Література

[1] https://dspace.udpu.edu.ua/bitstream/6789/4237/1/tgodovanyuk.pdf
[2] https://lib.iitta.gov.ua/715569/

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: mashamelnicuk79@gmail.com

ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: ango.p2004@gmail.com

РОЛЬ М. П. КРАВЧУКА У РЕФОРМУВАННІ УКРАЇНСЬКОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ

С. В. МОРОЗ, О. М. КРАВЧУК

Михайло Пилипович Кравчук — відомий український математик, академік АН УРСР, доктор фізико-математичних наук (з 1924), професор Київського політехнічного інституту.

Активна діяльність Михайла Пилиповича Кравчука в освітній галузі була плідною і багатоаспектною: педагогічна, управлінська, організаційна, методична, термінологічна, видавнича. Упродовж всього свого життя учений займався розробкою методик викладання математики, впровадженням у навчальний процес національної математичної термінології, розв'язанням проблем організації освіти та науки в Україні [2].

У період 1920–1929 педагогічні погляди Михайла Кравчука сформувались у чітку систему, центральне місце в якій належить розвитку творчої особистості. На переконання вченого, цього можна було досягнути за допомогою рідномовної освіти й орієнтації навчально-виховного процесу на краєзнавчий та етнографічний матеріал. Значною мірою ці ідеї реалізовані в очолюваній ним Саварській трудовій школі.

Можна виділити коло проблем, над якими працював Михайло Пилипович Кравчук: реорганізація змісту і методів навчання; покращення рівня теоретичного і методичного магістерського навчання математичних дисциплін; створення сприятливих умов для навчання й виховання студентів та учнів; вдосконалення підготовки майбутніх вчителів [1].

Основними складовими педагогічної системи М. П. Кравчука є: віра у творчі здібності кожної дитини; створення сприятливих умов для самовияву кожного учня (студента); зміст, форми і методи навчання, спрямовані на розвиток особистості; забезпечення його активності та самостійності у процесі пізнання; навчання рідною мовою та формування національної свідомості і патріотизму.

Вчений отримав високе світове визнання, але в Україні протягом десятиліть його заслуги в науково-педагогічній галузі і вагомий внесок у розвиток освіти замовчувалися та ігнорувалися, і його роботи були знищені.

Упродовж останнього часу творча спадщина вченого педагога — є складовою частиною науково-дослідницької роботи, аспірантів та науковців у багатьох навчальних закладах України.

Література

[1] https://ra.vnu.edu.ua/wp-content/uploads/2021/11/Zbirnyk20212-1.pdf
[2] https://ra.vnu.edu.ua/wp-content/uploads/2017/05/gnepa-dis_0.pdf

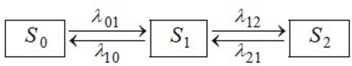
ВНУ імені Лесі Українки, Луцьк, Україна
Email address: morozsofia87@gmail.com

НАДІЙНІСТЬ ДВОКАНАЛЬНОЇ СИСТЕМИ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Н. В. ПОЛІЩУК, Н. П. СЕЛЕЗНЬОВА

Системи масового обслуговування (СМО) широко використовуються в прикладних задачах. Також розглядаються питання дослідження надійності, ефективності роботи таких систем в курсах теорії ймовірностей, теорії надійності, в інших прикладних задачах.

Маємо двоканальну СМО з відмовами, яка може перебувати в трьох станах: S_0, S_1, S_2. Граф системи має вигляд:



.

В системі протікає найпростіший (тобто стаціонарний ординарний і без післядії) потік, який переводить її із стану S_i в стан S_j, $i, j = 0, 1, 2$ з інтенсивністю λ_{ij}.

Позначимо $p_i(t)$ – ймовірність знаходження системи в стані $S_i i, j = 0, 1, 2$,в момент часу . Ці ймовірності задовольняють системі диференціальних рівнянь Колмогорова:

$$\begin{cases} p_0' = -\lambda_{01}p_0 + \lambda_{10}p_1, \\ p_0' = \lambda_{01}p_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 + \lambda_{21}p_2, \\ p_2' = \lambda_{12}p_1 - \lambda_{21}p_2, \end{cases}$$

з початковими умовами: $p_0(0) = 1$, $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = 0$.

В кожний момент часу t, для функцій $p_i(t)$ виконуються співвідношення:

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1.$$

В теорії випадкових процесів доведено, що, якщо кількість станів системи скінчена і з кожного з них можна за скінчене число кроків перейти в будь-який інший стан, то існують фінальні ймовірності станів, тобто

$$\lim_{t\to\infty} p_i = p_i, \ i = 0, 1, 2,$$

які задовольняють системі лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -\lambda_{01}p_0 + \lambda_{10}p_1 = 0, \\ \lambda_{01}p_0 - (\lambda_{10} + \lambda_{12})p_1 + \lambda_{21}p_2 = 0, \\ \lambda_{12}p_1 - \lambda_{21}p_2 = 0, \end{cases}$$

при умові $p_0 + p_1 + p_2 = 1$

Ці ймовірності можна визначити за формулами Ерланга:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}, \quad p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}}p_0, \quad p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}}p_0, \quad p_0 + p_1 + p_2 = 1 \quad (1)$$

Застосуємо цю систему для дослідження надійності роботи поліграфічного комплексу з двох друкувальних машин і однієї ремонтної бригади. Нехай стан системи S_0 – обидві машини працюють, S_1 – одна з машин працює, інша в ремонті, S_2 – обидві машини не працюють. Нехай середній час безвідмовної роботи однієї машини $t_0 = 10$ годин, ремонт машини триває $t_1 = 3$ години. При переході із стану S_0 в стан S_1 з ладу може вийти перша або друга машина з інтенсивністю $\lambda = 1/t_0 = 1/10$, тому $\lambda_{01} = 2\lambda = 2/t_0 = 1/5$, $\lambda_{12} = 1/t_0 = 1/10$, $\lambda_{21} = \lambda_{10} = 1/t_1 = 1/3$.

Обчислюючи фінальні ймовірності за формулами (1), маємо

$$p_0 = 0{,}562; p_1 = 0{,}337; p_2 = 0{,}101.$$

Надійність системи P в стаціонарному режимі визначається за формулою [1]:

$$P = p_0p_1p_2 = 0{,}526 \cdot 0{,}337 \cdot 0{,}019.$$

Середнє число справно працюючих елементів визначається співвідношенням $u = n/(1+\rho) = 2/(1+0{,}3) = 1{,}54$, де $n = 2$, $\rho = \lambda_{12}/\lambda_{10} = 0{,}3$.

Враховуючи формули (1), запишемо вираз для надійності системи P як функцію зведеної інтенсивності ρ, $\rho = \lambda_{12}/\lambda_{10}$, $2\rho = \lambda_{01}/\lambda_{10}$, маємо:

$$P = p_0p_1p_2 = \frac{4\rho^3}{(1 + 2\rho + 2\rho^3)^3}$$

Дослідивши цю функцію на екстремум, маємо $P_{\max} = \frac{5\sqrt{2}-7}{2} = 0{,}0355$ при $\rho = \sqrt{2}/2$. Тоді середня кількість працюючих машин $u = n/(1+p) = 1{,}5858$.

Література

[1] Вентцель, Е.С. (1972). *Исследование операций.* М.: Сов.радио, 552 с.

[2] Поліщук, Н.В., Кушлик-Дивульська, О.І., Орел, Б.П. (2011). *Дослідження операцій: конспект лекцій для студентів видавничо-поліграфічного інституту НТУУ «КПІ». Електронне навчальне видання НМУ* № Е 10/11. 571. Київ: НТТУ «КПІ», 68 с., гриф «Рекомендовано Методичною радою НТУУ «КПІ», № протокола Ради 10; дата отримання грифу 16.06.2011.

МУЗЕЙ МИХАЙЛА КРАВЧУКА І КПІ ІМ. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

Л. С. СВИНОВЕЙ

Перший музей видатного українського математика 20 століття М.П. Кравчука відкритий 13 червня 1987 року на батьківщині вченого, у селі Човниця. Саме з того часу ми співпрацюємо з КПІ ім. Ігоря Сікорського, де Кравчук працював з 1921 по 1938 роки, був завкафедри вищої математики, мав талановитих учнів, підняв українську алгебраїчну школу до світового рівня. Світова громадськість знає професора, академіка Київської політехніки Вірченко Н.О. як активного дослідника життя і наукової творчості М.П. Кравчука, безневинно знищеного на Колимі тоталітарним режимом. Ніна Опанасівна зробила неймовірно багато для того, щоб ім'я цього видатного вченого залишилось у пам'яті прийдешніх поколінь: організувала і провела Вісімнадцять Міжнародних наукових конференцій імені академіка Михайла Кравчука в Києві. Голова конференцій — ректор М.З. Згуровський. У конференціях брали участь відомі вчені з багатьох країн світу. На XI МНКК наша родина Лукашуків була нагороджена медаллю М. Кравчука за заснування першого в світі музею вченого. Ніна Опанасівна доклала чимало зусиль для відкриття аудиторії імені академіка Михайла Кравчука в КПІ (2002 р.), відкриття пам'ятника вченому на Алеї вчених на території КПІ (2003 р.), відкриття пам'ятного знака М. Кравчуку в с. Човниця, створення фільму "Голгофа академіка Кравчука" (2004 р., режисер О. Рябокрис), найменування вулиці у Києві на честь його імені (2009 р.), створення та підтримки музею Михайла Кравчука на його батьківщині в селі Човниця.

Завдяки академіку Н.О. Вірченко музей має в експозиції науково-популярні книги про нашого земляка академіка М. Кравчука, унікальні праці, які допомагають здобувачам освіти і студентам, аспірантам глибше вивчити наукову спадщину вченого:

- Вірченко Н.О. Математика в афоризмах, цитатах і висловлюваннях, 1974, 1983.
- Вірченко Н.О. Математика в афоризмах (японською мовою), 1989, 1995 (2-е вид.).
- Вірченко Н.О., Сита Г.М. Михайло Пилипович Кравчук, 1992.
- Вирченко Н.А. Афористически о математике и математиках, 1997.
- Вирченко Н.А. О математике и математиках, 1998.
- Михайло Кравчук. Науково-популярні праці // Упор. Н. Вірченко, 2000.

- Михайло Кравчук. Вибрані математичні праці // Упор. Н. Вірченко, 2002.
- Розвиток математичних ідей Михайла Кравчука / Ред. Н. Вірченко, І. Качановський, В. Гайдей, Р. Андрушків, Р. Воронка, 2004.
- Вірченко Н.О. Велет української математики, 2007.
- Вірченко Н.О. Математичні усмішки, 2014.
- «Н.Вірченко» Велет української математики, 2-е видання, 2014.
- «Михайло Кравчук. Вибрані праці. Історія та методика математики» / Н. Вірченко, В. Гайдей, О. Міхно // 2014.

Допомагав Ніні Вірченко у подвижницькій праці Віктор Олександрович Гайдей — дослідник наукової спадщини видатного математика М.П. Кравчука, викладач кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей, продовжувач популяризації наукової спадщини видатного вченого математика. Багато зусиль докладав для організації Міжнародних конференцій академіка М.П. Кравчука в КПІ ім. Ігоря Сікорського. Доброзичливий, спокійний, працьовитий, вдумливий, інтелігентний, делікатний. «Моя любов — Україна і математика!». Таким було життєве кредо академіка М.П. Кравчука, таким воно стало й для Віктора Олександровича. Музей Михайла Кравчука має його праці з вищої математики у співавторстві з науковим керівником Н. Вірченко. Щира подяка всім, хто долучився до створення музею.

Музей М.П. Кравчука є середовищем навчання, науковим, духовним і розвивальним осередком, виховання патріотичних почуттів сучасного громадянина. Світ пізнає Україну як сильну і цивілізовану країну світу. Слава Україні.

Музей М.П. Кравчука, Човницька початкова школа, Човниця, Україна

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПОНЯТЬ ПРИ ВИВЧЕННІ ФІЗИКИ

Т. Г. ЧИЖСЬКА, О. Ю. ДЮЖЕНКОВА

У 2005 році Україна приєдналася до Болонської системи освіти, що привело до двоступінчатої системи вищої освіти: бакалаврату та магістратури. Це забезпечило в освіті спільні стандарти з європейськими країнами, зокрема, для визнання дипломів українських університетів та можливості продовжувати навчання за кордоном. При переході на нові стандарти у технічних вищих навчальних закладах поступово перенесли початок вивчення фізики з другого на перший семестр, що охопило більшість факультетів та інститутів КПІ ім. Ігоря Сікорського. На жаль, така зміна навчального плану мала негативний вплив на вивчення фізики студентами технічних спеціальностей університету. Справа в тому, що математичний апарат, який не вивчається в школі, а в університеті вивчається в другому семестрі, в курсі фізики застосовується уже в першому.

Єдине, чим викладачі фізики і математики можуть допомогти студенту в цій ситуації, це запропонувати методичний матеріал, який поєднує математичні поняття та їх застосування у фізиці. Зокрема, студент може використовувати цей матеріал при підготовці до практичних та лабораторних робіт з фізики. Студентам за навчальним планом виділяється певна кількість годин для самостійної роботи, частину з яких він може використовувати на опрацювання цього методичного матеріалу [1].

Вивчення курсу «Загальна фізика» починається з розділу «Механіка», а саме з кінематики, де відразу доводиться визначати, що таке швидкість і прискорення. Визначення цих кінематичних величин пов'язане з похідними та інтегралами. І хоча ці поняття вивчаються в школі, але є досить складними для розуміння. Зазначимо, що при вивченні кінематики розглядаються також задачі, в яких рух тіла здійснюється під дією сили опору середовища. При розв'язанні цих задач отримують диференціальні рівняння першого порядку, які взагалі не розглядаються в школі, а в курсі вищої математики вивчаються тільки в другому семестрі.

Крім того, у першому семестрі в розділі «Механіка» вивчаються механічні коливання. Цикл лабораторних робіт з механіки охоплює різні маятники, за допомогою яких відбувається вивчення коливального руху, моделювання та описання даного процесу. Розглядаючи механічні коливання, студент має справу з диференціальними рівняннями другого порядку, які також вивчаються в другому семестрі.

Вивчаючи фізику, студенти розглядають векторні та скалярні величини. При виконанні дій над векторними величинами потрібно пригадати додавання, віднімання і скалярний добуток векторів. І хоча цей матеріал вивчався у школі, але, зважаючи на рівень математичної підготовки в сучасних умовах, варто повторити ці поняття і розглянути їх більш детально [2]. Теоретичний матеріал необхідно проілюструвати достатньою кількістю різноманітних прикладів з фізики. Зокрема, варто розглянути фізичні задачі, де при додаванні векторних величин застосовується теорема косинусів, причому не лише для трикутника, а й для паралелограма.

Для знаходження таких скалярних величин, як робота і потужність, використовують скалярний добуток. Тут варто розглянути задачу, в якій для тіла, кинутого під кутом до горизонту, потрібно знайти величину потужності сили тяжіння у різні моменти часу (в початковий момент часу; в деякий момент часу на проміжку, коли тіло піднімається вгору; у верхній точці; в деякий момент часу на проміжку, коли тіло падає вниз та в нижній точці). На цьому прикладі можна проілюструвати, яких значень може набувати скалярна величина, отримана в результаті скалярного добутку.

Крім того, для розв'язання фізичних задач потрібно ввести нові поняття векторного та мішаного добутків, які не вивчаються у школі. Аксіальні вектори з'являються при вивченні фізики вже в другій лекції (кутова швидкість і кутове прискорення), тому викладачам фізики доводиться давати означення векторного добутку. І хоча в курсі вищої математики це поняття розглядається в першому семестрі, але тільки після вивчення визначників.

Очевидно, що для кращого розуміння та засвоєння матеріалу студентами при вивченні фізики є сенс у створенні спільного навчально-методичного посібника викладачами фізики і математики, в якому розглядаються необхідні математичні поняття, що мають фізичні застосування. Посібник повинен містити короткі теоретичні відомості, проілюстровані як типовими прикладами, так і прикладними задачами з фізики, що дає змогу зрозуміти суть математичних понять, вивчити їх властивості та навчитись застосовувати їх у фізичних задачах.

Література

[1] Носачов Ю.Ф., Савченко Д.В., Чижська Т.Г., Штофель О.О. (2021). Актуалізація нового матеріалу з фізики як один з методів адаптації першокурсників у ЗВО. *Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка: Серія педагогічна*, випуск 27, с. 21–24.

[2] Дюженкова О.Ю. (2017). *Методичні вказівки з вищої математики для студентів інженерних спеціальностей.* Київ: Центр ІТ. 192 с.

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: chijskaya@ua.fm

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: oduzen@ukr.net

VI

МАТЕМАТИЧНА ФІЗИКА ТА ТЕОРЕТИЧНА ФІЗИКА

MATHEMATICAL PHYSICS AND THEORETICAL PHYSICS

SPIN WAVES IN A CIRCULAR NANOTUBE COMPOSED OF AN EASY-PLANE FERROMAGNET

V. V. KULISH

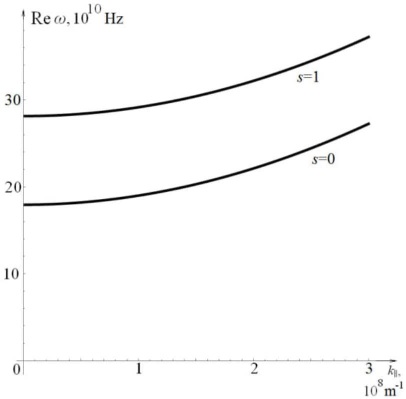
Spin waves in nanoscale systems are an actual and promising topic of research. They are promising for a variety of technical application — both current and prospective — in different fields of technology. Most applications concern new devices for data storage, transfer and processing [1,2]. These applications require precise theoretical models of excitation and propagation of spin waves in various nanosystems, so these models are extensively developed recently. During research of spin waves in nanosystems, usually either isotropic or uniaxial easy-axis ferromagnets are considered. Uniaxial easy-plane ferromagnets possess a number of unique magnetic properties; however, spin waves in nanosystems composed of easy-plane ferromagnets remain poorly researched.

The presentation studies dipole-exchange spin waves in a circular nanotube composed of an easy-plan ferromagnet. The proposed model considers the magnetic dipole-dipole interaction, the exchange interaction, the anisotropy effects, the damping effects and the general boundary conditions. As a result, the following dispersion law for the investigated waves has been obtained:

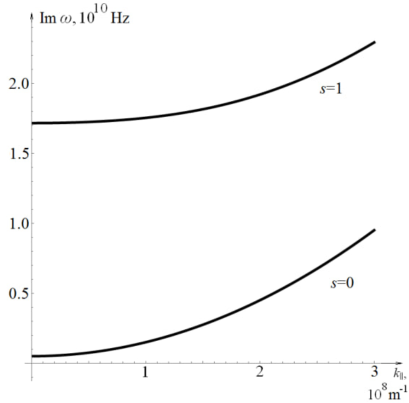
$$\omega = \gamma M_0 \left(\sqrt{\left(\alpha k^2 + \frac{H_0^i}{M_0}\right)\left(\alpha k^2 + \frac{H_0^i}{M_0} + (4\pi + |\beta|)\frac{k_{||}^2}{k^2}\right)} \right. \\ \left. - i\alpha_G \left(\alpha k^2 + \frac{H_0^i}{M_0} + \frac{1}{2}(4\pi + |\beta|)\frac{k_{||}^2}{k^2}\right)\right),$$

here α, β, γ, M_0 and α_G are the ferromagnet parameters (α is the exchange constant, $\beta < 0$ is the uniaxial anisotropy parameter, γ is the gyromagnetic ratio, $\vec{M}_0$ is the saturation magnetization and α_G is the Gilbert damping constant), $\vec{H}_0^{(i)} \approx \vec{H}_0^{(e)} - 4\pi\vec{M}_0$ is the ground state internal magnetic field (where $\vec{H}^{(e)}$ is the external magnetic field), $k_{\|}$ is the longitudinal wave vector component (corresponds to the wave propagation along the symmetry axis of the tube that coincides with the anisotropy axis of the ferromagnet), $k = \sqrt{k_{\|}^2 + k_{\perp}^2}$ is the wavenumber (where $k_{\perp}$ is the transverse wave vector component).

After implying boundary conditions, this dispersion law has been complemented with the relation between the wave vector components. This relation has been shown to degenerate into a quasi-one-dimensional values' spectrum of the orthogonal wave vector component for a thin nanotube ($(b-a)/a << 1$, here a and b are the inner and outer radii of the tube, correspondingly), namely $k_\perp = \pi s/(b-a)$ (here s is an integer, number of the transverse mode). For the obtained spectral characteristics, graphical representations have been given. In particular, the dependencies of the real and imaginary parts of the frequency on the longitudinal wave vector component have the following form:



(a)



(b)

Fig.1 — Dependence of $\mathrm{Re}\,\omega$ (a) and $\mathrm{Im}\,\omega$ (b) on $k_{||}$ for the investigated nanotube with the thickness $b-a = 10\,\mathrm{nm}$ and the ferromagnet parameters $\alpha = 10^{-12}\,\mathrm{cm}^{-2}$, $\beta = -1$, $\gamma = 10^7\,\mathrm{Gs/Hz}$, $M_0 = 10^3\,\mathrm{Gs}$, $\alpha_G = 0.1$.

The branches on these graphs (that correspond to different orthogonal model) are close to parabolic and are essentially apart from each other. The resulting spin wave frequency for typical values of the nanotube parameters has the order of magnitude 10^{11}–10^{12} Hz for the real part (that corresponds to typical values observed in experiments) and 10^9–10^{10} Hz for the imaginary part.

Comparative analysis of the dispersion relation obtained above and the analogous dispersion relation for a nanotube composed of an easy-axis ferromagnet has been performed; differences and similarities have been outlined. The method proposed in the presentation can be applied to nanotubes of more complex configuration.

References

[1] Flebus B., Rezende S.M., Grundler D., Barman A. (2023). Recent advances in magnonics. *J. Appl. Phys.*, vol. 133, 160401

[2] Chumak A.V., Kabos P., Wu M., Abert C., Adelmann C. et al. (2022). Advances in Magnetics Roadmap on Spin-Wave Computing. *IEEE T.Magn.*, vol. 58, 0800172

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine
Email address: kulish_volv@ukr.net

ON FAST CHARGED PARTICLES SCATTERING ON A PLANE RELATIVISTIC BEAM OF CHARGED PARTICLES

N. F. SHUL'GA, V. D. KORIUKINA

Nowadays lots of experiments are associated with beam collision on particle colliders around the world. One of the particular problems that needs to be investigated is the scattering problem. The reason for its importance lies in the fact that typically processes of interest (e.g. radiation) are triggered by the particle scattering. If we improve our method for calculating the scattering cross-section, we will facilitate and speed up the consideration of the following processes accompanying scattering.

In this work, we demonstrate the results for the problem of a fast charged particle scattering on a plane relativistic beam of charged particles (e.g. electrons or positrons). These results are related to the problem of particle scattering on a beam that is "elliptical" in its cross-section (by "elliptical" we mean Gaussian distribution of particles in the beam with sufficiently different variance parameters along different axes). As an approximation of a beam of flattened elliptical cross-section (which correlates with current experiments at KEKB, Japan), we consider a plane target beam.

In the present consideration, we use the Eikonal approximation of the quantum electrodynamics to find the scattering cross-section for a particle interacting with a plane relativistic beam of charged particles. This approach is based on our previous experience with problems of scattering on static targets [1, 2].

We can find the scattering cross-section using the $\bar{\chi}_0$-function. The $\bar{\chi}_0$-function is averaged χ_0, which in its turn is the first term of series expansion of the wave function phase (the series terms are proportional to reciprocal powers of momentum).

From the Klein-Gordon equation (1) (written in natural units)

$$\left[(p_\mu - eA_\mu)^2 - m^2\right]\Phi = 0 \tag{1}$$

we find the wave function (for a particle of mass m, four-momentum p_μ moving in four-potential A_μ) in the Eikonal approximation, where the wave function phase and pre-exponential factor are series in reciprocal powers of momentum ($f_j, \chi_j \sim p^{-j}$):

$$\Phi = f\, e^{iS}, f = f_0 + f_1(\vec{r},t) + \ldots, S = \vec{p}\vec{r} - Et + \chi_0(\vec{r},t) + \chi_1(\vec{r},t) + \ldots \tag{2}$$

where S is defined with the relativistic Hamilton-Jacobi equation:

$$(\partial_t S + eA_0)^2 - \left(\nabla S - e\vec{A}\right)^2 - m^2 = 0 \tag{3}$$

As shown in [2], consideration of scattering on a complex target in the Eikonal approximation leads us to the idea of continuous potential. To implement this idea, we need to average χ_0-function over the positions of the target's particles. In our case, $\bar{\chi}_0$ for a separate particle of the beam can be obtained analytically in this form:

$$\bar{\chi}_0 = \frac{\alpha}{2}\left\{\frac{(y+ix)^2}{2\langle u_x^2\rangle}\,{}_2F_2\left[1,1;\frac{3}{2},2;\frac{(y+ix)^2}{2\langle u_x^2\rangle}\right] - \frac{\pi}{2}Erfi\left[\frac{y+ix}{\sqrt{2\langle u_x^2\rangle}}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{(y-ix)^2}{2\langle u_x^2\rangle}\,{}_2F_2\left[1,1;\frac{3}{2},2;\frac{(y-ix)^2}{2\langle u_x^2\rangle}\right] - \frac{\pi}{2}Erfi\left[\frac{y-ix}{\sqrt{2\langle u_x^2\rangle}}\right]\right\} + const \qquad (4)$$

where α is the fine-structure constant and $\langle u_x^2\rangle$ is the variance of particle distribution in the beam along the x-axis (while the variance along the y-axis is 0 since we are dealing with plane beam). The *const* here is defined by the cut-off we need to make since long-range potential of the beam leads to $\bar{\chi}_0$ divergence.

Using formula (4) and derivatives of the $\bar{\chi}_0$-function, we can obtain the scattering cross-section for the mentioned problem in Eikonal approximation applying numerical integration or the stationary phase method.

In the present work, we obtained the differential cross-section in the Eikonal approximation for a fast charged particle scattering on a plane beam of relativistic charged particles. The results show that due to the long-range interaction of particles, macroscopic impact parameters are essential for this process. Also, we mention that the rainbow scattering effect is possible in this case.

References

[1] Shul'ga N.F., Koriukina V.D. (2020). On coherent and incoherent scattering of fast charged particles in ultrathin crystals. *Problems of Atomic Science and Technology*, vol. 127, pp. 120–125.

[2] Shul'ga N.F., Koriukina V.D. (2021). The Eikonal Approximation of the Scattering Theory for Fast Charged Particles in a Thin Layer of Crystalline and Amorphous Media *Nucl. Instr. Meth. B*. vol. 487, pp. 25–29.

National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology", Kharkiv, Ukraine; V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine
Email address: `shulga@kipt.kharkov.ua`

National Science Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology", Kharkiv, Ukraine
Email address: `koriukina@kipt.kharkov.ua`

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІКИ ВИТІКАННЯ РІДИНИ ІЗ ЄМНОСТЕЙ РІЗНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФОРМ В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД ЗМІНИ ОСІ ОБЕРТАННЯ

В. О. БІЛИЙ, О. Г. БІЛИЙ

В промислових підприємствах, на деяких заводах та фабриках в технологічних процесах застосовується розливання різного роду речовин в рідкому стані (чавун, сталь, золото, срібло, шоколад тощо) із великих ємностей певних геометричних форм в менші стандартні форми методом повороту ємності відносно закріпленої точки або фіксованої осі та виливу через край. Важливо, щоб при цьому потік рідини був, по можливості, рівномірним, що в дійсності не справджується навіть при постійній кутовій швидкості обертання. В роботах [1, 2, 3] авторів розглянуто процес розливу із ємностей півсферичної, конічної, параболічної та циліндричної форм поворотом відносно закріпленої точки і відносно деяких фіксованих осей, а саме відносно нижньої точки котла або відносно діаметра верхньої частини. Отримані результати вивчення динаміки зміни розходу рідини P_φ (об'єм витікаючої рідини за одиницю часу) в залежності від кута нахилу φ, аналізуємо, порівнюємо з різними способами розливу та подаємо висновки-рекомендації, які дають можливість створити алгоритм дій для коригування роботи поворотних механізмів, щоб виливання було рівномірним.

Для прикладу розглянемо ємність — параболоїд обертання, з параметрами R та H, вщент наповнений рідиною.

A. Обертання відбувається в фронтальній площині відносно вершини параболоїда з постійною кутовою швидкістю ω. Тоді [2] розхід рідини P_φ, який дорівнює добутку площі поверхні витоку S_φ, помноженій на вертикальну складову $\upsilon_{\text{верт.}}$ швидкості руху рідини в точці витоку відносно вершини має вигляд (1):

$$P_\varphi = S_\varphi \cdot \upsilon_{\text{верт.}} = \frac{\pi R^2}{4H^2}\omega\sqrt{R^2+H^2}\cdot g(\varphi) = C\cdot g(\varphi), \tag{1}$$

де C — const, $g(\varphi) = \frac{(2H - R\tan\varphi)^2}{\cos\varphi}\cos\left(\arctan\frac{H}{R} - \varphi\right)$.

Дослідження на екстремум показують:

1) При $H > R$, $P_{max} = P(\varphi_1)$, де

$$0 \leqslant \varphi_1 = \arctan\left(\frac{2}{3}\frac{H^2+R^2}{RH}\right) < \varphi_{max} = \arctan\frac{2H}{R},$$

$$P_{max} = \frac{\pi R^2}{4H^2}\omega\sqrt{R^2+H^2}\frac{(2H - R\tan\varphi_1)^2}{\cos\varphi_1}\cos\left(\arctan\frac{H}{R} - \varphi_1\right),$$

$$P_{min} = P(\varphi_{max}) = 0.$$

2) При $H \leqslant R$, P_φ – монотонно спадає, тоді

$$P_{max} = P(\varphi = 0) = \pi R^2\omega\sqrt{R^2+H^2}\cos\left(\arctan\frac{H}{R}\right),$$

$$P_{min} = P(\varphi_{max}) = 0.$$

B. Якщо ж обертання буде відносно діаметра верхньої частини котла [3], то P_φ – монотонно спадає (2), де

$$P_\varphi = \pi\omega R^3\left(1 - \frac{R}{2H}\tan\varphi\right)^2 \tag{2}$$

тоді

$$P_{max} = P(\varphi = 0) = \pi\omega R^3, \quad P_{min} = P(\varphi_{max}) = 0.$$

Маючи ці дані про динаміку розходу рідини для ємностей різних геометричних форм при різних способах виливу, можна в кожному конкретному випадку виробити алгоритм послідовних дій управління механізмів, які забезпечують процес виливання так, що він стає достатньо рівномірним.

Література

[1] Bilyi V., Bilyi O. (2022). Dynamics of liquid outflow from containers of classic geometric shapes. Part I. Znanstvena Misel Journal, 70, 24–28. https://doi.org/10.5281/zenodo.7095676

[2] Bilyi V., Bilyi O. (2022). Dynamics of liquid outflow from containers of classic geometric shapes. Part II. Znanstvena Misel Journal, 71, 38–44. https://doi.org/10.5281/zenodo.7248072

[3] Білий В.О., Білий О.Г. (2023). Порівняльна динаміка витікання рідини із ємностей певних геометричних форм в залежності від зміни осі обертання. Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки. №1(2023), 65–68. https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Email address: valeri_y@ukr.net

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: belyi.oleksandr@gmail.com

ЗМІНА КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ОБЕРТАННЯ СОНЦЯ ТА МАГНІТОЗМІННИХ ЗІРОК, ЇЇ ВПЛИВ НА КУТОВУ ШВИДКІСТЬ ОБЕРТАННЯ ЗЕМЛІ

О. Г. БІЛИЙ, М. П. БОНДАРЕНКО

Останнім часом з'явилась ціла низка експериментальних даних, що вказують на зміну кутової швидкості обертання Сонця та на зв'язок цих змін з циклом сонячної активності. Теоретична можливість такої зміни кутової швидкості обертання магнітозмінних зірок, в тому числі і Сонця, передбачалась в роботі одного із авторів [1]. Аналіз спостережень показав значний діапазон змін T — періода обертання Сонця, а саме, в роки максимума сонячної активності $T \approx 30^d$, а в роки мінімума, до 24^d. При цьому ця швидкість залежить від фази 11-літнього циклу сонячної активності, а також змінюються від одного циклу до іншого, причому ці зміни пов'язані з потужністю циклу. В середньому відносна зміна періоду $\tau = \Delta T/T$ в межах 0,03 ÷ 0,04, причому в року максимума Сонце обертається повільніше ніж в роки мінімума. Для пояснення цього явища та подальших прогнозів про зміну кутової швидкості обертання магнітозмінних зірок а також Сонця та планет в рамках класичної магнітогідродинаміки розглянуто умови рівноваги однорідної ідеальної рідини нескінченої провідності з урахуванням магнітного поля. Розв'язуючи відповідну фундаментальну систему рівнянь [2], отримано умову рівноваги ідеальної однорідної рідини, що обертається з магнітним полем:

$$\lambda = \frac{1}{2}\Omega^2\omega^2 + U - \frac{1}{15}\frac{\beta^2}{\rho^2}C_0\widetilde{a}^3(x_3^2 + 2\omega^2)\Omega - \frac{1}{90}\frac{\beta^2}{\rho^2}C_0^2\widetilde{a}^6(4x_3^2 + 3\omega^2), \qquad (1)$$

яка узагальнює класичну умову рівноваги без магнітного поля $\lambda = \frac{1}{2}\Omega^2\omega^2 + U$.

Застосовуючи цей результат до Сонця, як до однорідної конфігурації з магнітним полем, що описується еліпсоїдом обертання Маклорена $\frac{\omega^2}{a_1^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$, $\omega^2 = x_1^2 + x_2^2$, a_1 та a_2 — півосі еліпсоїда, після перетворень отримуємо в [2],

$$\frac{\Omega^2}{2K} + \frac{M_2}{15}\left(\frac{a_3^2}{a_1^2} - 2\right)\frac{\Omega}{\sqrt{2K}} - \left(A_1 - A_3\frac{a_3^2}{a_1^2}\right) - \frac{M_1}{90}\left(\frac{4a_3^2}{a_1^2} - 3\right) = 0 \qquad (2)$$

Звідки можна оцінити $\tau = \Delta\Omega/\Omega$. Якщо $\Omega = \Omega_0 + \frac{\upsilon_p}{\omega}\frac{H_\phi}{H_\rho}$, де $H_\phi/H_\rho = \operatorname{tg}\Psi$, υ_p — мередіальна складова лінійної швидкості, H_ϕ та H_ρ — відповідно тороїдальна та мередіальна складові магнітного поля, Ω_0 — кутова швидкість твердотільного обертання при відсутності магнітного поля, $\operatorname{tg}\Psi$ — закрученість магнітного поля (для Сонця $\operatorname{tg}\Psi > 1$). Тоді

$$\tau = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{\Omega - \Omega_0}{\Omega_0} = \frac{v_\rho}{\Omega_0 R_0} \operatorname{tg}\Psi. \tag{3}$$

Підставляючи в (3) $v_\rho = 10 \div 20$ м/с, $R_0 = 6,96 \cdot 10^8$ м, маємо

$$\tau = \frac{\Delta\Omega}{\Omega} = (0{,}005 \div 0{,}01) \operatorname{tg}\Psi.$$

Тобто зміна кутової швидкості обертання Сонця буде співпадати з даними спостережень $\tau = 0{,}03 \div 0{,}04$, якщо $\operatorname{tg}\Psi = (4 \div 6)$, що правдоподібно. Якісно це можна пояснити таким чином. В роки максимума сонячної активності «вмикається» магнітне поле, тороїдальна складова якого переносить речовину в напрямку, протилежному звичайному руху речовини через обертання Сонця. При цьому напрям цієї складової зберігається від одного циклу до другого, а змінюється лише напрям полоїдальної складової.

По формулі (3) можна також оцінити зміну кутової швидкості обертання Землі впродовж земного циклу, приблизно 300 років. Приймаючи для Землі типові значення:

$$\Omega_0 = 10^{-4} \text{ рад/с}, \; v_\rho = 10^{-4} \text{ м/с}, \; R = 10^6 \text{ м}, \; H_\rho = 10G, \; H_\phi = 100G,$$

отримаємо $\tau = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = 10^{-5}$, що складає $0{,}32 \cdot 10^{-4}$ с за добу або 0,012 с за рік, що може бути зафіксовано сучасними методами спостереження [3].

Література

[1] Bondarenko N.P., Kravtsov O.V. (1977). Equilibrium figures with a magnetic field. *Astrophys. and Space Sci.*,, vol. 46, pp. 341–356.

[2] Бондаренко М.П. (2023). Зміна кутової швидкості обертання Сонця та магнітозмінних зірок. *Готуеться до публікації.*.

[3] Jon E. Mound, Bruce A. Buffett. (2006). Detection of a gravitational oscillation in length-of-day. *Earth and Planetary Science Letters*, Volume 243, Issues 3–4, 30 March 2006, Pages 383–389, https://doi.org/10.1016/j.epsl.2006.01.043

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна
Email address: belyi.oleksandr@gmail.com

Київський політехнічний інститут, Київ, Україна
Email address: +380672941088

ПОШИРЕННЯ КОРЕЛЯЦІЙ В СИСТЕМІ ПРУЖНИХ КУЛЬ

І. В. ГАП'ЯК

У цій доповіді розглядаються математичні проблеми опису еволюції багатьох пружних куль на основі різних способів, а саме, за допомогою функцій, що описують поширення кореляцій. Один із розроблених підходів дозволяє описати еволюцію як скінченної, так і нескінченної середньої кількості пружних куль за допомогою редукованих функцій розподілу або редукованих кореляційних функцій, які визначаються динамікою кореляцій системи пружних куль [1]. Відзначаємо важливість опису процесів зародження та поширення кореляцій [2], зокрема це пов'язано з проблемою опису ефектів пам'яті в багаточастинкових системах з динамікою зіткнень.

Встановлено, що поняття кумулянтів груп операторів лежить в основі непертурбативних розв'язків фундаментальних еволюційних рівнянь, що описують стан еволюції системи пружних куль, зокрема ієрархії Ліувіля для кореляційних функцій, ієрархії ББГКІ для редукованих функцій розподілу та нелінійної ієрархії ББГКІ для редукованих кореляційних функцій. Підкреслимо, що структура отриманих розкладів для кореляційних функцій, у яких породжуючими операторами є кумулянти відповідного порядку груп операторів пружних куль, індукує кумулянтну структуру розкладів для редукованих функцій розподілу, редукованих кореляційних функцій і редукованих кореляційних функціоналів.

Також, у доповіді описується колективна поведінка системи пружних куль у мікроскопічному масштабі за допомогою одночастинкової кореляційної функції, яка визначається немарківським кінетичним рівнянням Енскога. Переваги такого підходу до виведення кінетичних рівнянь з динаміки зіткнень полягають у можливості побудови кінетичного рівняння з початковими кореляціями, що дає змогу описати поширення початкових кореляції в границі Больцмана–Греда [3].

Література

[1] Gerasimenko V.I., Gapyak I.V. (2022). Propagation of Correlations in a Hard-Sphere System. *Journal of Stat. Phys.*, vol. 189, no. 1, p. 24.

[2] Prigogine I. (1962). *Non-Equilibrium Statistical Mechanics*. New York: John Wiley and Sons.

[3] Gerasimenko V.I., Gapyak I.V. (2021). BoltzmannâGrad asymptotic behavior of collisional dynamics. *Reviews in Math. Phys.*, vol. 33, p. 32.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
Email address: ihapiak@knu.ua

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ГОФРОВАНИХ ОБОЛОНОК ЗІ СКІСНИМИ ЗРІЗАМИ

О. Я. ГРИГОРЕНКО, М. М. КРЮКОВ, С. М. ЯРЕМЧЕНКО

Аналіз механічних характеристик гофрованих тіл – цікава і актуальна задача, оскільки такі об'єкти часто використовуються в будівельній справі та машинобудуванні [1]. Гофрування часто дозволяє зробити оболонкову конструкцію більш жорсткою, зменшивши при цьому товщину.

В цьому повідомленні проведено дослідження циліндричних оболонок гофрованих в поперечному перерізі зі скісними зрізами на торцях під дією внутрішнього тиску. При цьому використано рівняння уточеної теорії оболонок типу Тимошенка [3] у ортогональній системі координат.

Для моделювання зрізу використано заміну змінних, тобто від ортогональної системи координат зроблено перехід до неортогональної. Це дозволило записати рівняння, що описують напружено-деформований стан оболонки в прямокутній області [2], але в неортогональних координатах. Отриману двовимірну крайову задачу зведено до одновимірної за допомогою методу сплайн-колокації. Одновимірну крайову задачу розв'язано методом дискретної ортогоналізації

Проведено дослідження впливу амплітуди, кроку гофрування, кутів зрізу на розподіл переміщень в оболонці.

Література

[1] Lai M., Eugster S.R., Reccia E., Spagnuolo M., Cazzani A. (2022). Corrugated shells: An algorithm for generating double-curvature geometric surfaces for structural analysis. *Thin-Walled Structures*, vol. 173, pp. 109019.

[2] Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Голуб Г.П. (1986). *Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью.* Київ: Наук. думка.

[3] Григоренко Я.М., Григоренко О.Я., Крюков М.М., Яремченко С.М. (2020). Напружено-деформований стан циліндричних оболонок з еліптичним поперечним перерізом зі скісними зрізами. *Доп. НАН України*, no. 6, pp. 21–29.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
Email address: ayagrigorenko1991@gmail.com

Державний університет інфраструктури та технологій, Київ, Україна
Email address: mmkryukov@ukr.net

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна
Email address: yaremch@gmail.com

Зміст