УДК 517.929.7

СХЕМИ АПРОКСИМАЦІЇ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

А. Б. Дорош, І. І. Тузик, І. М. Черевко

Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича
вул. Коцюбинського, 2, Київ, 58012, Україна
e-mail: a.dorosh@chnu.edu.ua, i.tuzyk@chnu.edu.ua, i.cherevko@chnu.edu.ua

We establish sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solutions of the boundary value problems for integro-differential equations with many delays. An iterative scheme of the approximation of boundary value problem with delay by boundary value problem for ordinary differential equations system is given and described.

Досліджено достатні умови існування та єдиності розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями. Запропоновано і обгрунтовано ітераційну схему апроксимації крайової задачі із запізненням крайовою задачею для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Вступ. Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, є математичними моделями різноманітних прикладних процесів в біології, імунології, медицині. Важливою задачею при їх дослідженні є встановлення зручних умов, що гарантують існування розв'язків таких задач [1,2].

Знаходження розв'язків крайових задач із запізненням в аналітичній формі можливе тільки в найпростіших випадках, тому актуальною задачею є розробка ефективних методів їх наближеного розв'язання [3]. Застосування методу сплайн функцій для наближеного розв'язання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь досліджувалось в роботах [4,5].

Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь спеціальними системами звичайних диференціальних рівнянь запропоновані в роботах [6,7]. Цей підхід був застосований до дослідження одного класу крайових задач із запізненням [8].

Метою даної роботи є поширення схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь для дослідження крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями.

1. Постановка задачі та існування розв'язку

Введемо позначення

$$\begin{aligned} &[y(x)] = (y(x), y(x-\tau_1), \ldots, y(x-\tau_n)]\,, \\ &[y(x)]_1 = (y'(x), y'(x-\tau_1), \ldots, y'(x-\tau_n)]\,, \end{aligned} \tag{1}$$

де $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n = \tau$.

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f\left(x, [y(x)], [y(x)]_1\right) + \int\limits_a^b g\left(x, s, [y(s)], [y(s)]_1\right) ds, \quad x \in [a,b], \tag{2}$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x),\ p = 0,1,\ x \in [a-\tau, a],\ y(b) = \gamma, \tag{3}$$

де $\gamma \in R$, $\varphi(x) \in C^1[a-\tau, a]$ – початкова функція.

Введемо множину точок, що визначається запізненнями τ_i, $i=\overline{1,n}$

$$E=\left\{x_i\in[a,b]:x_i=a+\tau_i, i=\overline{1,n}\right\}.$$

Відзначимо, що в точках множини E розв'язок крайової задачі (2)–(3), взагалі кажучи, має розривну другу похідну.

Введемо позначення

$$P=\sup\left\{|f\left(x,[y(x)],[y(x)]_1\right)|+\left|\int\limits_a^b g\left(x,s,[y(s)],[y(s)]_1\right)ds\right|; |y(x)|<P_1, |y(x-\tau_i)|<P_1,\right.$$

$$\left.|y'(x)|<P_2, |y'(x-\tau_i)|<P_2, i=\overline{1,n}, x\in[a,b]\right\},$$

$$J=[a-\tau,a], I=[a,b], I_1=[a,x_1], I_2=[x_1,x_2],\dots,I_n=[x_{n-1},x_n], I_{n+1}=[x_n,b],$$

$$B=\left\{y(x):y(x)\in\big(C(J\cup I)\cap\big(C^1(J)\cup C^1(I)\big)\big)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n+1}C^2(I_j)\right), |y(x)|<P_1, |y'(x)|<P_2\right\},$$

де P_1, P_2 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (2)–(3) будемо вважати функцію $y=y(x)$ із простору B, яка задовольняє рівняння (2), за можливим винятком точок множини E та крайові умови (3).

Введемо в просторі B норму

$$\|y\|_B=\max\left\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}|y(x)|, \frac{2}{b-a}\max\left(\max_{x\in J}|y'(x)|, \max_{x\in I}|y'(x)|\right)\right\},$$

із цією нормою даний простір є банаховим простором.

Крайова задача (2)–(3) еквівалентна інтегральному рівнянню [9]

$$y(x)=\int\limits_{a-\tau}^{b}\left[f\left(s,[y(s)],[y(s)]_1\right)+\int\limits_a^b g\left(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1\right)d\xi\right]\bar{G}(x,s)ds+l(x),\ x\in J\cup I,\quad (4)$$

$$\bar{G}(x,s)=\begin{cases}G(x,s),\ x,s\in I,\\ 0,\ \text{в іншому випадку},\end{cases}\qquad l(x)=\begin{cases}\varphi(x),\ x\in J,\\ \dfrac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a)+\varphi(a),\ x\in I,\end{cases}$$

$$G(x,s)=\begin{cases}\dfrac{(s-a)(x-b)}{b-a},\ a\le s\le x\le b,\\ \dfrac{(x-a)(s-b)}{b-a},\ a\le x\le s\le b,\end{cases}$$

функція Гріна крайової задачі

$$y''(x)=0,\ x\in I,\ y(a)=y(b)=0.$$

Визначимо оператор T в просторі B

$$(Ty)(x)=\int\limits_{a-\tau}^{b}\left[f\left(s,[y(s)],[y(s)]_1\right)+\int\limits_a^b g\left(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1\right)d\xi\right]\bar{G}(x,s)ds+l(s),\ x\in J\cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'(x)=\int\limits_{a-\tau}^{b}\left[f\left(s,[y(s)],[y(s)]_1\right)+\int\limits_{a}^{b}g\left(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1\right)d\xi\right]\bar{G}'_x(x,s)ds+\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a},$$

$$x\in J\cup I.$$

Нехай функція $f\left(x,[y(x)],[y(x)]_1\right)$ неперервна в області $G[a,b]\times G_1^{n+1}\times G_2^{n+1}$, а функція $g\left(x,s,[y(s)],[y(s)]_1\right)$ – неперервна в області $Q=[a,b]\times G$, де $G_1=\{u\in R:|u|<P_1\}$, $G_2=\{v\in R:|v|\le P_2\}$, P_1, P_2 – додатні сталі, що входять в означення простору B та задовольняють за змінними $[y(x)]$, $[y(x)]_1$ умову Ліпшиця зі сталими L_i та L_i^1, $i=\overline{0,2n+1}$ відповідно.

Має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi(x)|,\dfrac{(b-a)^2}{8}P+\max\left(|\varphi(a)|,|\gamma|\right)\right\}\le P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'(x)|,\dfrac{b-a}{2}P+\left|\dfrac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\le P_2,$

3) $\dfrac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n}\left(L_i+(b-a)L_i^1\right)+\dfrac{b-a}{2}\sum\limits_{i=n+1}^{2n+1}\left(L_i+(b-a)L_i^1\right)<1.$

Тоді існує єдиний розв'язок крайової задачі (2)–(3) в просторі B.

Доведення теореми проводиться аналогічно до теореми 1 [5].

2. Схема апроксимації крайової задачі

Розглянемо застосування схем апроксимації диференціально-різницевих рівнянь [6, 7] до крайової задачі (2)–(3). Спочатку проаналізуємо наближення елементів із запізненням, що входять в рівняння (2). Якщо запізнення τ не є малим, тоді для покращення апроксимації розглянемо m елементів запізнення, що послідовно між собою зв‘язані

$$v_1(x)=y\left(x-\frac{\tau}{m}\right),\ v_2(x)=y_1\left(x-\frac{\tau}{m}\right)=y\left(x-\frac{2\tau}{m}\right),\ \ldots,$$

$$v_m(x)=y_{m-1}\left(x-\frac{\tau}{m}\right)=y\left(x-\tau\right).$$

Поставимо їм у відповідність послідовність аперіодичних ланок, що визначаються системою диференціальних рівнянь [6]

$$\frac{\tau}{m}z_1'(x)+z_1(x)=y(x),$$

$$\frac{\tau}{m}z_i'(x)+z_i(x)=z_{i-1}(x),\ i=\overline{2,m},x\in[a,b], \tag{5}$$

$$z_i(a)=y\left(a-\frac{i\tau}{m}\right),\ i=\overline{1,m}, \tag{6}$$

де $y(x)$ – вхідна функція першого елемента запізнення.

Відзначимо, що система (5)–(6) досліджена в [10, 11]. Якщо функція $y(x)$ задовольняє умову Ліпшиця або має обмежену сталою M похідну на $[a-\tau,b]$, тоді

$$\left|z_i(x)-y\left(x-\frac{i\tau}{m}\right)\right|\le\frac{2M\tau}{\sqrt{m}},\ i=\overline{1,m},x\in[a,b]. \tag{7}$$

У випадку $y(x)\in C[a-\tau,b]$, тоді

$$\left|z_i(x)-y\left(x-\frac{i\tau}{m}\right)\right|\le 2\left(\frac{K\tau}{\sqrt{m}}+\omega\left(y,\frac{\tau}{m}\right)\right)=\alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right),\ i=\overline{1,m},x\in[a,b], \tag{8}$$

де стала $K > 0$ не залежить від m, $\omega\left(y, \frac{\tau}{m}\right)$ модуль неперервності функції $y(x)$ на $[a-\tau, b]$.

Якщо $x(t)$ кусково-неперервна функція на $[a-\tau, b]$, що має скінченне число точок розриву першого роду, тоді мають місце нерівності [12]

$$\int\limits_a^b \left| z_j(x) - y\left(x - \frac{j\tau}{m}\right)\right| dx \le \alpha_2\left(\frac{\tau}{m}\right), \ j = \overline{1, m}. \tag{9}$$

У нерівностях (8), (9) $\alpha_1(\delta)$, $\alpha_2(\delta)$ монотонно зростаючі функції, для яких $\lim\limits_{\delta\to 0}\alpha_i(\delta) = 0$, $i = 1, 2$.

Введемо позначення

$$[z(x)] = \left(z_0(x), z_{l_1}(x), \ldots, z_{l_n}(x)\right),$$

$$[w(x)] = \left(w_0(x), w_{l_1}(x), \ldots, w_{l_n}(x)\right),$$

де індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$\frac{\tau l_j}{m} \le \tau_j < \frac{\tau(l_j+1)}{m}. \tag{10}$$

Поставимо у відповідність крайовій задачі (2)–(3) крайову задачу для системи звичайних інтегро-диференціальних рівнянь вигляду

$$z_0''(x) = f\left(x, [z(x)], [w(x)]\right) + \int\limits_a^b g\left(x, s, [z(s)], [w(s)]\right) ds, \tag{11}$$

$$z_j(x) = \frac{m}{\tau}\left(z_{j-1}(x) - z_j(x)\right), \ j = \overline{1, m},$$

$$z_j(a) = \varphi\left(a - \frac{j\tau}{m}\right), \ j = \overline{0, m}, \ z_0(b) = \gamma, \tag{12}$$

$$w_0(x) = \int\limits_a^b \left[f\left(s, [z(s)], [w(s)]\right) + \int\limits_a^b g\left(s, \xi, [z(\xi)], [w(\xi)]\right) d\xi \right] G_x'(x, s) ds + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}, \tag{13}$$

$$w_j'(x) = \frac{m}{\tau}\left(w_{j-1}(x) - w_j(x)\right), \ j = \overline{1, m},$$

$$w_j(a) = \varphi'\left(a - \frac{j\tau}{m}\right), \ j = \overline{1, m}. \tag{14}$$

3. Обгрунтування схеми апроксимації

Введемо позначення

$$N_j(x) = \max_{a\le\xi\le x}\left| z_j(\xi) - y\left(\xi - \frac{j\tau}{m}\right)\right|,$$

$$W_j(x) = \max_{a\le\xi\le x}\left| w_j(\xi) - y'\left(\xi - \frac{j\tau}{m}\right)\right|, \quad j = \overline{0, m}, \ x \in I, \tag{15}$$

де $z_j(x)$, $w_j(x)$ – розв'язки крайової задачі (11)–(14), а $y(x)$ – розв'язок крайової задачі (2)–(3).

Представимо $z_j(x) = z_j^{(1)}(x) + z_j^{(2)}(x)$, де $z_j^{(1)}(x)$ та $z_j^{(2)}(x)$ розв'язки таких задач Коші

$$\frac{\tau}{m} z_1'^{(1)}(x) + z_1^{(1)}(x) = y(x),$$

$$\frac{\tau}{m}z_j'^{(1)}(x)+z_j^{(1)}(x)=z_{j-1}^{(1)}(x),\ j=\overline{2,m},\ t\in I,$$

$$z_j^{(1)}(a)=y\left(a-\frac{j\tau}{m}\right),\ j=\overline{1,m}, \tag{16}$$

$$\frac{\tau}{m}z_1'^{(2)}(x)+z_1^{(2)}(x)=z_0(x)-y(x),$$

$$\frac{\tau}{m}z_j^{(2)}(x)+z_j^{(2)}(x)=z_{j-1}^{(2)}(x),\ j=\overline{2,m},\ t\in I,$$

$$z_j^{(2)}(a)=0,\ j=\overline{1,m}. \tag{17}$$

Оцінимо різниці $\left|z_j(x)-y\left(x-\frac{j\tau}{m}\right)\right|$, $j=\overline{1,m}$, враховуючи структуру систем (16)–(17)

$$\left|z_j(x)-y\left(x-\frac{j\tau}{m}\right)\right|\le\left|z_j^{(1)}(x)-y\left(x-\frac{j\tau}{m}\right)\right|+\left|z_j^{(2)}(x)\right|. \tag{18}$$

Оскільки $y(x)\in C[a-\tau,b]$, тому згідно нерівності (8) маємо

$$\left|z_j^{(1)}(x)-y\left(x-\frac{j\tau}{m}\right)\right|\le\alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right).$$

Для другого доданка в правій частині (18), аналогічно як в роботі [11] нескладно одержати нерівність

$$\left|z_j^{(2)}(x)\right|\le\max_{a\le\xi\le x}|z_0(\xi)-y(\xi)|=N_0(x). \tag{19}$$

Із нерівностей (18), (19) дістаємо оцінку

$$N_j(x)\le\alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right)+N_0(x),\ j=\overline{1,m},x\in I. \tag{20}$$

Розглянемо тепер представлення

$$w_j(x)=w_j^{(1)}(x)+w_j^{(2)}(x),\ j=\overline{1,m},$$

де $w_j^{(1)}(x)$, $w_j^{(2)}(x)$ – розв'язки задач Коші

$$\frac{\tau}{m}w_1'^{(1)}(x)+w_1^{(1)}(x)=y'(x),$$

$$\frac{\tau}{m}w_j'^{(1)}(x)+w_j^{(1)}(x)=w_{j-1}^{(1)}(x),\ j=\overline{2,m},\ x\in I,$$

$$w_j(a)=y'\left(a-\frac{j\tau}{m}\right),\ j=\overline{1,m}, \tag{21}$$

$$\frac{\tau}{m}w_1'^{(2)}(x)+w_1^{(2)}(x)=w_0(x)-y'(x),$$

$$\frac{\tau}{m}w_j'^{(2)}(x)+w_j^{(2)}(x)=w_{j-1}^{(2)}(x),\ j=\overline{2,m},\ x\in I,$$

$$w_j^{(2)}(a)=0,\ j=\overline{1,m}. \tag{22}$$

Оцінимо різниці $\int\limits_a^x\left|w_j(s)-y'\left(s-\frac{j\tau}{m}\right)\right|ds$, $j=\overline{1,m}$, враховуючи вигляд систем (21), (22):

$$\int\limits_a^x\left|w_j(s)-y'\left(s-\frac{j\tau}{m}\right)\right|ds\le\int\limits_a^x\left|w_j^{(1)}(s)-y'\left(s-\frac{j\tau}{m}\right)\right|ds+\int\limits_a^x\left|w_j^{(2)}(s)\right|ds,$$

$$j=\overline{1,m},\ x\in I. \tag{23}$$

Функція $y'(x)$ є кусково-неперервною на $[a-\tau,b]$, тому згідно (9)

$$\int\limits_a^x \left|w^{(1)}(s)-y'\left(s-\frac{j\tau}{m}\right)\right|ds\le\alpha_2\left(\frac{\tau}{m}\right),\ j=\overline{1,m},x\in I.$$

Для оцінки $\left|w_j^{(2)}(x)\right|$, аналогічно як в (19), маємо

$$\left|w_j^{(2)}(x)\right|\le\max_{a\le\xi\le x}\left|w_0(\xi)-y'(\xi)\right|=W_0(x).$$

Враховуючи одержані нерівності, із (23) дістаємо

$$\int\limits_a^x w_j(s)ds\le\alpha_2\left(\frac{\tau}{m}\right)+\int\limits_a^x w_0(s)ds,\ j=\overline{1,m},\ x\in I. \tag{24}$$

Для функції $z_0(x)$ запишемо еквівалентне інтегральне рівняння

$$z_0(x)=\int\limits_a^b\left\{f\left(s,[z(s)],[w(s)]\right)+\int\limits_a^b g\left(s,\xi,[z(\xi)],[w(\xi)]\right)d\xi\right\}G(x,s)ds+$$

$$+\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a)+\varphi(a),\ x\in I. \tag{25}$$

Враховуючи позначення (9), (15), оцінки (20) та (24), одержимо допоміжні нерівності

$$\left|y(x-\tau_j)-z_{l_j}(x)\right|\le\left|y(x-\tau_j)-y\left(x-\frac{l_j\tau}{m}\right)\right|+\left|y\left(x-\frac{l_j\tau}{m}\right)-z_{l_j}(x)\right|\le$$

$$\le N_{l_j}(x)+\omega\left(y,\frac{\tau}{m}\right)\le\alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right)+N_0(x)+\omega\left(y,\frac{\tau}{m}\right)=$$

$$=\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right)+N_0(x),\ j=\overline{1,m},x\in I. \tag{26}$$

$$\int\limits_a^b\left|y'(s-\tau_j)-w_{l_j}(s)\right|ds\le\int\limits_a^b\left|y'(s-\tau_j)-y'\left(s-\frac{l_j\tau}{m}\right)\right|ds+\int\limits_a^b\left|y'\left(s-\frac{l_j\tau}{m}\right)-w_{l_j}(s)\right|ds\le$$

$$\le\int\limits_a^{a+\frac{l_j\tau}{m}}\left|y'(s-\tau_j)-y'\left(s-\frac{l_j\tau}{m}\right)\right|ds+\int\limits_{a+\frac{l_j\tau}{m}}^{a+\tau_j}\left|y'(s-\tau_j)-y'\left(s-\frac{l_j\tau}{m}\right)\right|ds+$$

$$+\int\limits_{a+\tau_j}^b\left|y'(s-\tau_j)-y'\left(s-\frac{l_j\tau}{m}\right)\right|ds+\alpha_2\left(\frac{\tau}{m}\right)+\int\limits_a^b W_0(s)ds\le$$

$$\le\left(\max_{x\in J}|\varphi'(x)|+P_2\right)\frac{2\tau}{m}+(b-a)\omega\left(y',\frac{\tau}{m}\right)+\alpha_2\left(\frac{\tau}{m}\right)+\int\limits_a^b W_0(s)ds=$$

$$=\beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)+\int\limits_a^b W_0(s)ds,\ j=\overline{1,m},x\in I, \tag{27}$$

де
$$\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right)=\alpha_1\left(\frac{\tau}{m}\right)+\omega\left(y,\frac{\tau}{m}\right),$$
$$\beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)=\left(\max_{x\in J}|\varphi'(x)|+P_2\right)\frac{2\tau}{m}+(b-a)\omega\left(y',\frac{\tau}{m}\right)+\alpha_2\left(\frac{\tau}{m}\right),$$
$\omega\left(y,\dfrac{\tau}{m}\right)$, $\omega\left(y',\dfrac{\tau}{m}\right)$ – модулі неперервності функцій $y(x)$ та $y'(x)$ відповідно на $J\cup I$ та I.

Враховуючи властивості функцій f та g, оцінки (26) та (27) та $|G(x,s)|\le\dfrac{b-a}{4}$, $x,s\in I$, із співвідношень (4) і (25) дістанемо нерівності
$$|y(x)-z_0(x)|\le\frac{(b-a)^2}{4}\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right)\sum_{j=0}^{n}\left(L_j+(b-a)L_j^1\right)+\frac{b-a}{4}\beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)\sum_{j=n+1}^{2n+1}\left(L_j+(b-a)L_j^1\right)+$$
$$+\frac{b-a}{4}\sum_{j=0}^{n}\left(L_j+(b-a)L_j^1\right)\int_a^b N_0(s)ds+\frac{b-a}{4}\sum_{j=n+1}^{2n+1}\left(L_j+(b-a)L_j^1\right)\int_a^b W_0(s)ds. \qquad (28)$$

Позначимо $\max\limits_{0\le i\le 2n+1}(L_i,L_i^1)=Q$, тоді нерівність (28) перепишемо у вигляді
$$|y(x)-z_0(x)|\le\frac{b-a}{4}Q(n+1)(1+b-a)\left[(b-a)\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right)+\beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)\right]+$$
$$+\frac{b-a}{4}Q(n+1)(1+b-a)\int_a^b[N_0(s)+W_0(s)]ds. \qquad (29)$$

Враховуючи тепер, що $|G'_x(x,s)|\le 1$, $t,s\in I$, аналогічно маємо
$$|y'(x)-w_0(x)|\le Q(n+1)(1+b-a)\left[(b-a)\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right)+\beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)\right]+$$
$$+Q(n+1)(1+b-a)\int_a^b[N_0(s)+W_0(s)]ds. \qquad (30)$$

Нерівності (29), (30) справедливі для всіх $x\in I$, тому дістаємо оцінку
$$N_0(b)+W_0(b)\le Q_1\left[(b-a)\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right)+\beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)\right]+Q_1\int_a^b[N_0(s)+W_0(s)]ds, \qquad (31)$$
де $Q_1=Q(n+1)(1+b-a)\left(1+\dfrac{b-a}{4}\right)$.

Застосувавши, тепер нерівність Гроноуола, дістаємо
$$N_0(b)+W_0(b)\le Q_1\left[(b-a)\beta_1\left(\frac{\tau}{m}\right)+\beta_2\left(\frac{\tau}{m}\right)\right]e^{Q_1}.$$

Сформулюємо одержаний результат у вигляді теореми.

Теорема 2. *Нехай функції $f\left(x,[y(x)],[y(x)]_1\right)$ та $g\left(x,s,[y(s)],[y(s)]_1\right)$ задовольняють умови теореми 1. Тоді крайова задача (11)–(14) апроксимує крайову задачу (2)–(3) і мають місце співвідношення*
$$\max_{a\le\xi\le x}\left|z_j(\xi)-y\left(\xi-\frac{j\tau}{m}\right)\right|+\max_{a\le\xi\le x}\left|w_j(\xi)-y'\left(\xi-\frac{j\tau}{m}\right)\right|\le N\gamma\left(\frac{\tau}{m}\right),\ j=\overline{0,m},x\in I,$$

де стала N не залежить від j та m, а $\gamma\left(\frac{\tau}{m}\right)$ – монотонно неспадна функція, така що

$$\lim_{m\to\infty}\gamma\left(\frac{\tau}{m}\right)=0.$$

Література

1. *Cushing J. M.* Integrodifferential equations and delay models in population dynamics / Lecture Notes in Biomathematics. Vol. 20. – Berlin-Heidelberg-New York : Springer Verlag, 1977.

2. *Tunc C.* Properties of Solutions to Volterra Integro-Differential Equations with Delay // Appl. Math. Inf. Sci. – 2016. – V. 10, № 5. – P. 1775-1780.

3. *Brunner H.* Recent advances in the numerical analysis of Volterra functional differential equations with variable delays // J. Comput. Appl. Math. – 2009. – V. 228, № 2. – P. 524-537.

4. *Настасьева Н. П., Черевко І. М.* Наближений метод розв'язання крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу // Математичні студії. – 1998. – Т. 10, № 2. – С. 147-152.

5. *Cherevko I., Dorosh A.* Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations // J. Numer. Anal. Approx. Theory. – 2016. – V. 44, № 2. – P. 154-165.

6. *Halanay A.* Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. – New York : Academic Press, 1981. – P. 155-197.

7. *Матвій О. В., Черевко І. М.* Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – № 2. – С. 208-216.

8. *Матвій О. А., Черевко І. М.* Апроксимація крайових задач із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. – 2003. – № 3. – С. 129-137.

9. *Grim L. J., Schmitt K.* Boundary value problems for delay-differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. – 1968. – V. 74, № 5. – P. 997-1000.

10. *Піддубна Л. А., Черевко І. М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 1999. – № 1. – С. 42-50.

11. *Матвій О. В., Черевко І. М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих та різницевих рівнянь з багатьма запізненнями // Наук. вісн. Чернів. ун-ту: Зб. наук. пр. Математика. – 2002. – Вип. 150. – С. 50-54.

Одержано .11.2022