

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Матеріали міжнародної наукової конференції,
присвяченої 55-річчю
факультету математики та інформатики

28–30 вересня 2023 року

Чернівці, 2023

УДК 51+004(08)
М340

Рекомендовано до друку вченою радою
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича
(протокол № 2 від 19 вересня 2023 року)

Математика та інформаційні технології. Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 55-річчю факультету математики та інформатики, 28–30 вересня 2023 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. – 369 с.

Збірник матеріалів міжнародної наукової конференції “Математика та інформаційні технології” включає наукові роботи вчених України, Європи, Азії та Америки, які проводять дослідження у теорії диференціальних та диференціально-функціональних рівнянь, теорії функцій та функціональному аналізі, топології, математичному моделюванні та інформаційних технологіях, а також займаються актуальними питаннями методики навчання математики та інформатики.

Для наукових працівників, аспірантів.

© Факультет математики та інформатики
Чернівецького національного універси-
тету імені Юрія Федьковича, 2023

Факультет математики та інформатики: історія та сьогодення

Факультет математики та інформатики розміщується у найстарішому корпусі Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, в якому 4 жовтня 1875 року відбувся урочистий акт відкриття університету.

Викладання математичних дисциплін у Чернівецькому університеті розпочалося у грудні 1876 року. Саме тоді на філософському факультеті почав функціонувати семінар з математики і математичної фізики. Відповідальним за напрям математики був екстраординарний професор математики Леопольд Гегенбауер (1849–1903), член-кореспондент Австрійської АН (1893), якого згодом на цій посаді змінив Густав фон Ешеріх (1849–1935), член-кореспондент Австрійської АН (1885). У 1883–1886 рр. посаду екстраординарного професора математики в університеті займав Адольф Міготі (1850–1886).

Вперше у 1887 році в університеті з'явилася посада ординарного професора математики, яку обіймав Антон Пухта (1851–1903). У Чернівцях упродовж 1904–1907 рр. працював Роберт Даублебскі фон Штернек (1871–1928).

З 1907 по 1918 рік посаду екстраординарного, а згодом ординарного професора математики Чернівецького університету обіймав відомий словенський математик Йосип Племель (1873–1967), у 1912–1913 роках – декан філософського факультету, перший ректор Словенського університету (1919), член Словенської і Сербської АН, член-кореспондент Югославської АН. Він має вагомі досягнення у теорії функцій, алгебри і теорії диференціальних рівнянь. За наукові роботи в галузі інтегральних рівнянь і теорії потенціалу в 1911 році Йосип Племель отримав нагороду Наукового товариства принца Яблоновські в Лейпцизі, а в 1912 році – нагороду Річарда Лібена Віденського університету.

Важливе місце в історії університету займає австрійський математик Ганс Ган (1879–1934), який з 1909 по 1916 рік працював у Чернівецькому університеті на посаді екстраординарного професора математики, був член-кореспондентом Австрійської АН, членом Німецької НАН. Леопольдина (1921). Він – співавтор основоположних принципів лінійного функціонального аналізу – теореми Гана-Банаха про продовження лінійних функціоналів та принципу рівномірної обмеженості. Варто зазначити, що в літньому семестрі 1912 року функціонував спільний науковий семінар Ганса Гана, Йосипа Племеля та Міхаела Радаковича.

У 1923 році філософський факультет поділено на філософсько-філологічний і науково-природничий. На науково-природничому факультеті сформовано три кафедри математичного спрямування: алгебри і теорії функцій, аналітичної та вищої геометрії, диференціального та інтегрального числення.

Одним із професорів факультету тоді був румунський математик Симіон-Стоїлов (1887–1961), який у 1923–1938 рр. очолював кафедру алгебри та теорії функцій, а у 1925–1926 н.р. обіймав і посаду декана науково-природничого факультету, член-кореспондент Румунської АН (1936) та дійсний її член (1945). У 1928–1940 рр. кафедрою аналітичної і вищої геометрії завідував Мирон Ніколеску (1903–1975), член Французького і президент Румунського математичних товариств, академік Румунської АН (1955) і її президент (з 1966). У складі факультету відкривається низка науково-дослідних інститутів, лабораторій та

наукових семінарів. Фахівець у галузі диференціальної геометрії Георгій Вринчану з грудня 1929 року працював професором кафедри аналітичної та вищої геометрії Чернівецького університету, а з лютого 1930 року – професором кафедри диференціального та інтегрального числення. На всіх відділеннях науково-природничого факультету нараховувалося 9 професорів, 1 викладач, 12 асистентів, 5 керівників курсових робіт студентів і 2 лаборанти.

У серпні 1940 року у результаті реорганізації Чернівецького університету утворено фізико-математичний факультет, до складу якого увійшли дві кафедри – алгебри та геометрії (перший завідувач – Юрій Кікець, завідувачами у різні роки були – Микола Беляєв, Михайло Фаге, Юрій Ястребов, Василь Мартинюк, Роман Домбровський, Василь Городецький) та математичного аналізу (перший завідувач – Микола Боголюбов, член-кореспондент АН України, завідувачами у різні роки були Олександр Бобров, Михайло Фаге, Юрій Валіцький, Василь Рубаник, Карл Фішман, Микола Нагнибіда, Йосип Кущнірчук, Павло Настасієв, Володимир Маслоченко), а у 1946 році на факультеті створено кафедру диференціальних рівнянь (перший завідувач – Микола Сімонов, завідувачами у різні роки були Василь Рубаник, Самуїл Ейдельман, Степан Івасишен, Михайло Матійчук, Іван Пукальський).

До університету тоді за направленнями приїхали працювати вчені з провідних закладів вищої освіти: член-кореспондент АН України Микола Боголюбов, Микола Сімонов, Олександр Бобров, Микола Беляєв, Михайло Фаге, Юхим Круг. Згодом до них приєдналися Василь Рубаник та випускники ЧДУ Карл Фішман, Самуїл Ейдельман. Їх зусиллями були закладені основи наукових досліджень на факультеті. Вони виявили високий рівень науково-педагогічної діяльності і вимогливість як до якості занять, так і до знань студентів.

У перші повоєнні роки на окремих курсах математичного відділення навчалося всього по декілька студентів. Так, у 1947 році дипломи отримали два випускники, у тому числі Борис Трахтенброт, згодом відомий спеціаліст з математичної логіки і алгоритмічних мов. Серед двох випускників 1948 року був і Самуїл Ейдельман – згодом видатний вчений, спеціаліст з теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У червні 1962 року за ініціативи професора Василя Рубаника на факультеті створено кафедру прикладної математики і механіки (перший завідувач – Василь Рубаник, завідувачами у різні роки були Василь Фодчук, Ярослав Бігун, Роман Петришин).

Математичний факультет виокремлено із фізико-математичного факультету у 1968 році, серед 44 викладачів якого був 1 доктор фізико-математичних наук, професор і 17 кандидатів фізико-математичних наук, доцентів.

У 1972 році на математичному факультеті створено кафедру математичних проблем управління і кібернетики (перший завідувач – Василь Рубаник, завідувачами у різні роки були Марк Букатар, Микола Кириченко, Федір Сопронюк, Ярослав Дріль), у 1987 році – кафедру математичного моделювання (перший завідувач – Степан Івасишен, завідувачами у різні роки були Ігор Черевко, Лариса Піддубна), а у 2000 році – кафедру математичної і прикладної статистики (перший завідувач – Михайло Свердан, на той час перший проректор Чернівецького університету, завідувачами у різні роки були Володимир Ясинський,

Ігор Малик), яка у 2017 році була приєднана до кафедри математичного моделювання.

На різних етапах розвитку математики у Чернівецькому університеті на факультеті працювали професори Антон Васмут, Леопольд Гегенбауер, Густав фон Ешеріх, Адольф Міготі, Антон Пухта, Роберт Даублебскі фон Штернек, Йосип Племель, Ганс Ган, Міхаел Радакович, Симіон Стоїлов, Флорін Васілеску, Георгій Вринчану, Мирон Ніколеску, Костянтин Первулеску, Штефан Петреску, Тиберіу Поповічіу, Дан Хулубей, Микола Боголюбов, Микола Сімонов, Олександр Бобров, Микола Беляєв, Михайло Фаге, Юхим Круг, Карл Фішман, Самуїл Ейдельман, Василь Рубаник, Євген Царков, Василь Фодчук, Микола Нагнибіда, Микола Кириченко, Михайло Матійчук, Михайло Ленюк, Степан Івасишен, Володимир Ясинський, Михайло Свердан, Федір Сопронюк, Володимир Маслюченко, Василь Григорків.

Значний вклад у розвиток факультету внесли академіки НАН України, Почесні доктори Чернівецького університету Анатолій Самойленко (1938-2020), Микола Перестюк та академік НАН України Аркадій Чикрій.

У 2004 році математичний факультет перейменовано на факультет прикладної математики, а в 2013 році – на факультет математики та інформатики.

Деканами факультету за час його існування були:

- у 1968–1995 роках – кандидат фіз.-мат. наук, доцент Володимир Крехівський,
- у 1995–1999 роках – кандидат фіз.-мат. наук, доцент Василь Мартинюк,
- у 1999–2005 роках – доктор фіз.-мат. наук, професор Роман Петришин (нині ректор Чернівецького національного університету),
- у 2005–2019 роках доктор фіз.-мат. наук, професор Ігор Черевко,
- з 2019 року – доктор фіз.-мат. наук, професор Ольга Мартинюк.

Колектив факультету має загально визнані наукові досягнення у теорії рівнянь з частинними похідними, диференціальних, диференціально-функціональних рівнянь, функціональному аналізі, теорії функцій, математичному моделюванні та застосуванні сучасних інформаційних технологій.

Нині факультет математики та інформатики складається з 5 кафедр:

- алгебри та інформатики (завідувач – доцент Руслана Колісник),
- математичного аналізу (завідувач – професор Володимир Михайлюк),
- диференціальних рівнянь (завідувач – професор Владислав Літовченко),
- прикладної математики та інформаційних технологій (завідувач – професор Ярослав Бігун),
- математичного моделювання (завідувач – професор Ігор Черевко).

На факультеті функціонують 5 комп'ютерних класів і 3 лабораторії з інформаційних та комп'ютерних технологій, 3D-графіки та 3D-друку, які обладнані сучасною комп'ютерною технікою з ліцензійним програмним забезпеченням, 3D принтерами; а також кабінет математики, де зберігається понад 11 000 книг та журналів.

Станом на 2023 рік професорсько-викладацький склад факультету математики та інформатики нараховує 67 викладачів. Серед них 17 докторів наук

(Мар'ян Бирка, Ярослав Бігун, Ярослав Виклюк, Василь Городецький, Іван Житарюк, Олена Карлова, Іван Клевчук, Владислав Літовченко, Ігор Малик, Ольга Мартинюк, Олександр Маслюченко, Володимир Михайлюк, Василь Нестеренко, Роман Петришин, Михайло Попов, Іван Пукальський, Ігор Червко) та 47 кандидатів наук або докторів філософії, які забезпечують підготовку бакалаврів, магістрів та аспірантів.

За 15 освітніми програмами на факультеті математики та інформатики навчається понад 700 здобувачів вищої освіти.

Мартинюк Ольга,
Житарюк Іван

On binomial sum relations involving Fibonacci and Lucas numbers

Adegoke Kunle¹, Frontczak Robert², Goy Taras³

adegoke00@gmail.com, robert.frontczak@web.de, taras.goy@pnu.edu.ua

¹Department of Physics and Engineering Physics,
Obafemi Awolowo University, Nigeria

²Independent Researcher, Germany

³Faculty of Mathematics and Computer Science,
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ukraine

Let F_n and L_n , respectively, the Fibonacci and Lucas numbers satisfying the second-order recurrence relation

$$X_n = X_{n-1} + X_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

with initial values $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ and $L_0 = 2$, $L_1 = 1$. For negative subscripts, we have

$$F_{-n} = (-1)^{n-1} F_n, \quad L_{-n} = (-1)^n L_n.$$

See, respectively, entries A000045 and A000032 in On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [5] for further information on these numbers.

In this note, we introduce relations between binomial sums involving Fibonacci and Lucas numbers, and different kinds of binomial coefficients. We also present some relations between sums with two binomial coefficients. The presented results are closely aligned with the spirit of our other papers [1–4].

Theorem 1. *If $r, s, t \in \mathbb{Z}$ and $m, n \in \mathbb{Z}_+$, then*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{m-n+k}{k} F_{r+s}^k F_s^{n-k} L_{r(n-k)+t} \\ &= (-1)^t \sum_{k=0}^n \binom{m+1}{k} (-1)^{n-k} F_{r+s}^k F_r^{n-k} L_{s(n-k)-t}, \\ \sum_{k=0}^n \binom{m-n+k}{k} F_{r+s}^k F_s^{n-k} F_{r(n-k)+t} \\ &= (-1)^{t+1} \sum_{k=0}^n \binom{m+1}{k} (-1)^{n-k} F_{r+s}^k F_r^{n-k} F_{s(n-k)-t}. \end{aligned}$$

Theorem 2. *If $m, n \in \mathbb{Z}_+$ and $r, s \in \mathbb{Z}$, then*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{k(s+1)} \binom{m-n+k}{k} F_r^k F_s^{n-k} L_{rn-(r+s)k+t} \\ &= (-1)^t \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m+1}{k} F_r^k F_{r+s}^{n-k} L_{sk-t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n (-1)^{k(s+1)} \binom{m-n+k}{k} F_r^k F_s^{n-k} F_{r n - (r+s)k+t} \\
= (-1)^{t+1} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m+1}{k} F_r^k F_{r+s}^{n-k} F_{sk-t}.
\end{aligned}$$

Theorem 3. *If $n, m \in \mathbb{Z}_+$ and $s, t \in \mathbb{Z}$, then*

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{4}{5}\right)^n \sum_{k=0}^{2n} \binom{m-2n+k}{k} \frac{L_s^k L_{s(2n-k)+t}}{2^k} \\
= & L_t \sum_{k=0}^n \binom{m+1}{2k} \frac{L_s^{2k} F_s^{2n-2k}}{5^k} + F_t \sum_{k=1}^n \binom{m+1}{2k-1} \frac{L_s^{2k-1} F_s^{2n-2k+1}}{5^{k-1}}, \\
& \left(\frac{4}{5}\right)^n \sum_{k=0}^{2n} \binom{m-2n+k}{k} \frac{L_s^k F_{s(2n-k)+t}}{2^k} \\
= & F_t \sum_{k=0}^n \binom{m+1}{2k} \frac{L_s^{2k} F_s^{2n-2k}}{5^k} + L_t \sum_{k=1}^n \binom{m+1}{2k-1} \frac{L_s^{2k-1} F_s^{2n-2k+1}}{5^k}, \\
& \left(\frac{4}{5}\right)^n \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{m-2n+1+k}{k} \frac{L_s^k L_{s(2n-1-k)+t}}{2^{k+1}} \\
= & F_t \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+1}{2k} \frac{L_s^{2k} F_s^{2n-1-2k}}{5^k} + L_t \sum_{k=1}^n \binom{m+1}{2k-1} \frac{L_s^{2k-1} F_s^{2n-2k}}{5^k}, \\
& \left(\frac{4}{5}\right)^n \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{m-2n+1+k}{k} \frac{L_s^k F_{s(2n-1-k)+t}}{2^{k+1}} \\
= & L_t \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+1}{2k} \frac{L_s^{2k} F_s^{2n-1-2k}}{5^{k+1}} + F_t \sum_{k=1}^n \binom{m+1}{2k-1} \frac{L_s^{2k-1} F_s^{2n-2k}}{5^k}.
\end{aligned}$$

Theorem 4. *For $n, m \in \mathbb{Z}_+$, we have*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (-1)^{mk} \frac{F_{m(n+1-k)}}{L_m^{n-k}} &= F_m \left(1 + 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k+1}{k} \frac{(-1)^{m(k+1)}}{L_m^{2(k+1)}}\right), \\
\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (-1)^{mk} \frac{L_{m(n+1-k)}}{L_m^k} &= L_m^{n+1}.
\end{aligned}$$

Theorem 5. *For $n \in \mathbb{Z}_+$, we have*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (-1)^k \frac{F_{2(n+1-k)}}{2^k} &= 2^n - 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k+1}{k} (-1)^k \frac{F_{k+2}}{4^k}, \\
\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (-1)^k \frac{L_{2(n+1-k)}}{2^k} &= 3 \cdot 2^n - 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k+1}{k} (-1)^k \frac{L_{k+2}}{4^k}.
\end{aligned}$$

Theorem 6. For $n \in \mathbb{Z}_+$, we have

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (-1)^k F_{2(n+1)+k} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k+1}{k} (-1)^k F_{3(k+2)},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (-1)^k L_{2(n+1)+k} = 3 - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k+1}{k} (-1)^k L_{3(k+2)}.$$

The last proposition in this set involves mixed identities.

Theorem 7. For $n \in \mathbb{Z}_+$, we have

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (-1)^k F_{2(n+1)+3k} = 2^{-n} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k+1}{k} (-1)^k \frac{L_{5k+8}}{2^{n-k}},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} (-1)^k L_{2(n+1)+3k} = 3 \cdot 2^{-n} - 5 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k+1}{k} (-1)^k \frac{F_{5k+8}}{2^{n-k}}.$$

Next we present some relations involving Fibonacci (Lucas) numbers and two central binomial coefficients.

Theorem 8. For $r \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{Z}_+$, we have

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} F_{2k+r} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 F_{6k-2n+r},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} L_{2k+r} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 L_{6k-2n+r}.$$

Theorem 9. For $r \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{Z}_+$, we have

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} 4^{n-k} F_{2k+r} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 5^k F_{6k-4n+r},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} 4^{n-k} L_{2k+r} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 5^k L_{6k-4n+r}.$$

Theorem 10. For $r \in \mathbb{Z}$ and $n \in \mathbb{Z}_+$, we have

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} F_{6k+r} = 4^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 F_{2(n+k)+r},$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} L_{6k+r} = 4^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 L_{2(n+k)+r}.$$

Finally, we proceed with some identities involving an additional parameter s .

Theorem 11. For $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{Z}_+$, we have

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} F_{4sk+r} = 5^n F_s^{2n} F_{2ns+r} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{L_s^2}{5F_s^2}\right)^k,$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} L_{4sk+r} = 5^n F_s^{2n} L_{2ns+r} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \left(\frac{L_s^2}{5F_s^2}\right)^k.$$

Theorem 12. For $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{N}$ and $n \in \mathbb{Z}_+$ we have

$$F_r \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \left(\frac{5F_s^2}{L_s^2}\right)^k = 4^n L_s^{-2n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 F_{2s(2k-n)+r},$$

$$L_r \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \left(\frac{5F_s^2}{L_s^2}\right)^k = 4^n L_s^{-2n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 L_{2s(2k-n)+r},$$

$$F_r \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \left(\frac{L_s^2}{5F_s^2}\right)^k = \left(\frac{4}{5}\right)^n F_s^{-2n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 F_{2s(2k-n)+r},$$

$$L_r \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \left(\frac{L_s^2}{5F_s^2}\right)^k = \left(\frac{4}{5}\right)^n F_s^{-2n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 L_{2s(2k-n)+r}.$$

1. Adegoke K. Weighted sums of some second-order sequences // Fibonacci Quart. – 2018. – 56, №3. – P. 252–262.
2. Adegoke K., Olatinwo A., Ghosh S. Cubic binomial Fibonacci sums // Electron. J. Math. – 2021. – 2. – P. 44–51.
3. Adegoke K., Frontczak R., Goy T. New binomial Fibonacci sums // Preprint arXiv:2210.12159 [math.CO], <https://arxiv.org/abs/2210.12159v1>. – 2022. – 20 p.
4. Adegoke K., Frontczak R., Goy T. Binomial Fibonacci sums from Chebyshev polynomials // Preprint arXiv:2308.04567 [math.CO], <https://arxiv.org/abs/2308.04567>. – 2023. – 25 p.
5. Sloane N.J.A. (ed.) The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Available at <https://oeis.org>.

A nonlocal problem for hyperbolic equations with impulse discrete memory

Assanova Anar T., Imanchiyev Askarbek E.

anartasan@gmail.com

*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty,
K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*

On the domain $\Omega = [0, T] \times [0, \omega]$ we consider the nonlocal problem for an impulsive system of hyperbolic equations with discrete memory in the following form

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} &= A(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} + B(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + C(t, x) u(t, x) + f(t, x) + \\ &+ A_0(t, x) \frac{\partial u(\gamma(t), x)}{\partial x} + B_0(t, x) \frac{\partial u(\gamma(t), x)}{\partial t} + C_0(t, x) u(\gamma(t), x), \end{aligned} \quad (1)$$

$$t \neq \theta_j, \quad j = \overline{1, N-1},$$

$$P(x)u(0, x) + S(x)u(T, x) = \varphi(x), \quad x \in [0, \omega], \quad (2)$$

$$\lim_{t \rightarrow \theta_p + 0} u(t, x) - \lim_{t \rightarrow \theta_p - 0} u(t, x) = \varphi_p(x), \quad x \in [0, \omega], \quad p = \overline{1, N-1}, \quad (3)$$

$$u(t, 0) = \psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

where $u(t, x) = \text{colon}(u_1(t, x), u_2(t, x), \dots, u_n(t, x))$ is unknown vector function, the $n \times n$ matrices $A(t, x)$, $B(t, x)$, $C(t, x)$, $A_0(t, x)$, $B_0(t, x)$, $C_0(t, x)$ and n vector function $f(t, x)$ are continuous on Ω ;

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \zeta_j \quad \text{if } t \in [\theta_j, \theta_{j+1}), \quad j = \overline{0, N-1}; \\ \theta_j &\leq \zeta_j \leq \theta_{j+1} \quad \text{for all } j = 0, 1, \dots, N-1; \\ 0 &= \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{N-1} < \theta_N = T; \end{aligned}$$

the $(n \times n)$ matrices $P(x)$, $S(x)$ and n vector function $\varphi(x)$ are continuously differentiable on $[0, \omega]$, the n vector functions $\varphi_p(x)$ are continuously differentiable on $[0, \omega]$, $p = \overline{1, N-1}$, the n vector function $\psi(t)$ is continuously differentiable on $[0, T]$.

Mathematical modeling of processes with discontinuity effects has necessitated the need to develop the theory of differential equations with discontinuities. An important class of such equations is comprised of differential equations with discrete memory [1, 2, 3, 4].

Along with the study of various properties of differential equations with discrete memory (or piecewise constant argument), a number of authors investigated the questions of solvability and construction of solutions to boundary value problems for these equations on a finite interval [5, 6, 7].

For impulsive partial differential equations with discrete memory, however, the questions of solvability of boundary value problems on a finite interval still remain open.

In this communication, we propose a new approach for solving nonlocal problem (1)–(4) based on Dzhumabaev's parametrization method [8, 9, 10].

We study questions of solvability and uniqueness to the nonlocal problem for an impulsive system of hyperbolic equations second order with discrete memory (1)–(4).

Conditions for the existence and uniqueness of the nonlocal problem for an impulsive system of hyperbolic equations with discrete memory are established. An algorithm for finding approximate solution this problem is offered.

Acknowledgments. This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (Grants No. AP19675193, No. BR20281002).

1. Wiener J. Generalized Solutions of Functional Differential Equations. – Singapore: World Scientific, 1993. – 410 p.
2. Samoilenko A.M., and Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. – Singapore: World Scientific, 1995. – 472 p.
3. Alonso-Sanz R. Discrete Systems with Memory. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A: Vol. 75. – Singapore: World Scientific, 2011. – 480 p.
4. Akhmet M.U. Nonlinear hybrid continuous/discrete-time models. – Paris: Atlantis Press, 2011. – 216 p.
5. Assanova A.T. Hyperbolic equation with piecewise-constant argument of generalized type and solving boundary value problems for it // Lobachevskii J. Math. – 2021. 42, No 15. – P. 3584–3593.
6. Assanova A.T., Uteshova R.E. Solution of a nonlocal problem for hyperbolic equations with piecewise constant argument of generalized type // Chaos Solitons & Fractals. – 2022. – 165, Part 2, No 12. art. no. 112816.
7. Abildayeva A., Assanova A., Imanchiyev A. A multi-point problem for a system of differential equations with piecewise-constant argument of generalized type as a neural network model // Eurasian Math. J. – 2022. – 13, No 2. – P. 8–17.
8. Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys. – 1989. – 29, No 1. – P. 34–46.
9. Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – 294, No 2. – P. 342–357.
10. Dzhumabaev D.S. New general solutions of ordinary differential equations and the methods for the solution of boundary-value problems // Ukrainian Math. J. – 2019. – 71, No 7. – P. 1006–1031.

Automatic continuity of measurable homomorphisms on Čech-complete topological groups

Banakh Taras

t.o.banakh@gmail.com

Ivan Franko National University, Lviv, Ukraine

The problem of automatic continuity of measurable homomorphisms traces its history back to Cauchy who proved in 1821 that continuous additive real functions are linear and asked about conditions implying the continuity of additive functions. In the very first issue of *Fundamenta Mathematicae* (1920), three papers (of Banach, Sierpiński and Steinhaus) were dedicated to the proof of the continuity of Lebesgue measurable additive real functions. Later those results were extended by Weil, Pettis, Christensen and other great mathematicians of XX century who substantially contributed to the theory of automatic continuity. In the talk we discuss the recent progress in extending classical results on automatic continuity of measurable homomorphisms beyond the class of Polish groups. One of such new results is

Theorem 1. *Every Haar-measurable homomorphism from a locally compact topological group to any topological group is continuous.*

Under Martin's Axiom this theorem was proved by Kuznetsova in 2012. The continuity of Haar-measurable homomorphisms between locally compact groups was proved by Kleppner in 1991.

Applying Theorem 1 to universally measurable homomorphisms on Čech-complete groups, we prove the following extension of a recent (2019) result of Rosendal on the continuity of universally measurable homomorphisms between Polish groups:

Theorem 2. *Every universally measurable homomorphism from a Čech-complete topological group to any topological group is continuous.*

A topological group is *Čech-complete* if its underlying topological space is homeomorphic to a G_δ -set in some compact Hausdorff space. A function $f : X \rightarrow Y$ between topological spaces is

- *universally measurable* if for any open set $U \subseteq Y$ the preimage $f^{-1}[U]$ is μ -measurable with respect to any probability Radon measure μ on X ;
- *BP-measurable* if for any open set U in Y the set $f^{-1}[U]$ has the Baire Property in X , i.e., belongs to the smallest σ -algebra containing all open sets and all meager sets in X ;
- *universally BP-measurable* if for any open set U in Y and any closed set F in X the set $F \cap f^{-1}[U]$ has the Baire Property in F ;
- *Borel-measurable* if for any open set U in Y the preimage $f^{-1}[U]$ is a Borel set in X .

A topological group X is ω -*narrow* if X can be covered by countably many left shifts of any neighborhood of the identity. By a classical result of Pettis (1951), every BP-measurable homomorphism from a Baire topological group to an ω -narrow

topological group is continuous. The following (nontrivial) theorem allows to “move” the ω -narrowness in Pettis’ result from the range to the domain.

Theorem 3. *Every BP-measurable homomorphism from an ω -narrow Čech-complete topological group to any topological group is continuous.*

Theorem 3 and the k -space property of Čech-complete spaces implies another automatic continuity criterion:

Theorem 4. *Every universally BP-measurable homomorphism from a Čech-complete topological group to any topological group is continuous.*

Since Borel-measurable functions are both universally measurable and universally BP-measurable, Theorem 2 or 4 imply

Theorem 5. *Every Borel-measurable homomorphism from a Čech-complete topological group to any topological group is continuous.*

A subset B of a topological space X is *functionally Borel* if there exists a continuous function $f : X \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ such that $B = f^{-1}[D]$ for some Borel set D in \mathbb{R}^ω . In fact, Theorems 1 and 3 are corollaries of the following general

Theorem 6. *Let \mathcal{I} be a ccc σ -ideal on an ω -narrow Čech-complete topological group X such that for every $I \in \mathcal{I}$ and Borel set B in X there exists a functionally Borel set F in X such that $F \subseteq B \setminus I$. A homomorphism $f : X \rightarrow Y$ to a topological group Y is continuous if and only if for every open set U in Y the preimage $h^{-1}[U]$ belongs to the smallest σ -algebra containing all sets in the ideal \mathcal{I} and all Borel subsets of X .*

1. T. Banach, Automatic continuity of measurable homomorphisms on Čech-complete topological groups, (arxiv.org/abs/2206.02481).

On concept of bounded index for Fueter regular functions of quaternionic variable

Bandura Andriy¹, Baksa Vita²

¹andriykopanytsia@gmail.com, ²vitalinabaksa@gmail.com

¹ Department of Advanced Mathematics, Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, Ukraine

² Department of Mathematics, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

Let \mathbb{H} be the real associative algebra of quaternions with the standard basis $1, i, j, k$ such that $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. $q = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3$, where $x_\ell \in \mathbb{R}$, for $\ell = 0, 1, 2, 3$ and we set $|q| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ and $|q|$ is the module of q , respectively. Sometimes it will be useful to write a quaternion in a more compact way as $q = \sum_{\ell=0}^3 \iota_\ell x_\ell$ where $x_\ell \in \mathbb{R}$ and $\iota_0 = 1, \iota_1 = i, \iota_2 = j, \iota_3 = k$.

Let us consider a function $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. The notion of holomorphicity for functions of one quaternionic variable was introduced [1, 2, 4] in defining a regular function (or quaternionic holomorphic function) as a function defined on an open set of the space of quaternions which is in the kernel of the so-called Cauchy-Fueter operator (a natural generalization of the Cauchy-Riemann operator). Let us now introduce the two differential operators which generalize the Cauchy-Riemann operator to the quaternionic case: $\frac{\partial_l}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial}{\partial x_0} + i \frac{\partial}{\partial x_1} + j \frac{\partial}{\partial x_2} + k \frac{\partial}{\partial x_3}$, $\frac{\partial_r}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial}{\partial x_1} i + \frac{\partial}{\partial x_2} j + \frac{\partial}{\partial x_3} k$. The two operators are called the left and right Cauchy-Fueter operators, respectively.

Let $U \subseteq \mathbb{H}$ be an open set and let $f : U \rightarrow \mathbb{H}$ be a real differentiable function. We say that f is *left regular* on U (see Definition 3.1.1. in [1]) $\frac{\partial_l f}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + i \frac{\partial f}{\partial x_1} + j \frac{\partial f}{\partial x_2} + k \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$. We say that f is *right regular* on U if $\frac{\partial_r f}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial f}{\partial x_0} + \frac{\partial f}{\partial x_1} i + \frac{\partial f}{\partial x_2} j + \frac{\partial f}{\partial x_3} k = 0$. The theory of left regular functions is completely equivalent to the theory of right regular functions so, classically, the theory is usually developed for the case of left regular functions. There are four different approaches to construct Fueter regular function of quaternionic variable by holomorphic function of complex variable. They are generated by corresponding assertions of Fueter (Theorem 3.1.6 in [1]), Sudbery (Theorem 4 in [4]), Mariconda (see Proposition 2.27 in [2] or [3]) and series with suitable regular homogeneous polynomials.

Proposition 1. (see Proposition 2.27 in [2], [3]) Let G_k , ($k = 1, 2, 3$), open sets in \mathbb{C} and let $h_k : G_k \mapsto \mathbb{C}$, complex holomorphic functions. Furthermore let $h_k = \text{Re } h_k + i \text{Im } h_k$. Further let $G := \{q = x_0 + e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3 \in \mathbb{H} : x_0 + e_k x_k \in G_k\}$ then the function $H : G \mapsto \mathbb{H}$ given by $H(q) = \sum_{k=1}^3 \text{Re } h_k(x_0, x_k) + \sum_{k=1}^3 e_k \text{Im } h_k(x_0, x_k)$ is quaternionic regular in G .

Every regular function $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ can be represented as a uniformly convergent series (see [4, 1]) $f(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu \in \sigma_n} p_\nu(q - q_0) a_\nu$, where $a_\nu = \frac{(-1)^n}{n!} \partial_\nu f(q_0)$, $\partial_\nu = \frac{\partial^n}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}}$, σ_n denotes the set of triples $\nu = (n_1, n_2, n_3)$, $n = n_1 + n_2 + n_3$, $q_0 \in \mathbb{H}$, and

$$p_\nu(q) = \sum_{1 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_n \leq 3} (x_0 \iota_{\lambda_1} - x_{\lambda_1}) \dots (x_0 \iota_{\lambda_n} - x_{\lambda_n})$$

Here the sum is taken over the $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$ different alignments of n_i elements equal to i , with $i = 1, 2, 3$.

A regular function $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ is said to be of bounded index if there exists $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ such that for all $q \in \mathbb{H}$ and for all $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}_+^3$ the following inequality is true

$$\begin{aligned} & \frac{|\partial_\alpha f(q)|}{(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)!} \leq \\ & \leq \max \left\{ \frac{|\partial_\beta f(q)|}{(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)!} : 0 \leq \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq n_0, \beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{Z}_+^3 \right\}. \end{aligned}$$

The least such integer n_0 is called the *index of the function f* and is denoted by $N(f, \mathbb{H})$.

Using the Mariconda Proposition (see above Proposition 1 it is possible to introduce such a quaternionic analog of the exponent, the sine and the cosine:

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbb{H}}(q) &= e^{x_0}(\cos x_1 + \cos x_2 + \cos x_3) + e^{x_0}(i \sin x_1 + j \sin x_2 + k \sin x_3), \\ \cos_{\mathbb{H}}(q) &= \cos x_0(\operatorname{ch} x_1 + \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_3) - \sin x_0(i \operatorname{sh} x_1 + j \operatorname{sh} x_2 + k \operatorname{sh} x_3), \\ \sin_{\mathbb{H}}(q) &= \sin x_0(\operatorname{ch} x_1 + \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_3) + \cos x_0(i \operatorname{sh} x_1 + j \operatorname{sh} x_2 + k \operatorname{sh} x_3). \end{aligned}$$

Our main result is the following:

Theorem 1. *The functions $\exp_{\mathbb{H}}$, $\cos_{\mathbb{H}}$, $\sin_{\mathbb{H}}$ are regular functions of bounded index in the whole space \mathbb{H} and their indexes equal to 1, 2, 2, respectively.*

Acknowledgement. The authors are deeply indebted to Prof. Oleh Skaskiv (Lviv) for his ideas and fruitful discussion.

1. Fabrizio Colombo, Irene Sabadini, Franciscus Sommen, Daniele C. Struppa. Analysis of Dirac Systems and Computational Algebra, Springer Science+Business Media LLC, 2004.
2. Klaus Gurlbeck, Wolfgang Sprossig, Quaternionic and Clifford Calculus for Physicists and Engineers, JOHN WILEY & SONS, 1997.
3. Mariconda C. (1989) Functions of quaternionic variables. Magister Philosophiae Thesis, S.I.S.S.A. — I.S.A.S., Trieste.
4. Sudbery A. Quaternionic analysis. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. — 1979. — 85. — P. 199-225. <https://doi.org/10.1017/S0305004100055638>

L-Index in Joint Variables: Composition of an Entire Function with a Function Having a Vanished Gradient

Bandura Andriy¹, Salo Tetyana²

¹andriykopanytsia@gmail.com, ²tetyan.salo@gmail.com

¹ Department of Advanced Mathematics, Ivano-Frankivsk National Technical
University of Oil and Gas, Ivano-Frankivsk, Ukraine

² Department of Mathematics, Lviv Polytechnic National University, Lviv, Ukraine

We will use notations and definitions from our recent paper [1] written together with Prof. Oleh Skaskiv (Lviv, Ukraine).

Let \mathbb{R}^n and \mathbb{C}^n be n -dimensional real and complex vector spaces, respectively, $n \in \mathbb{N}$. Denote $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. For $K = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, let us write $\|K\| = k_1 + \dots + k_n$, $K! = k_1! \cdot \dots \cdot k_n!$. For $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, $B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, we will use formal notations $A \pm B = (a_1 \pm b_1, \dots, a_n \pm b_n)$, $AB = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n)$, $A/B = (a_1/b_1, \dots, a_n/b_n)$, and if $A, B \in \mathbb{R}^n$, then $A^B = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_n^{b_n}$, $\mathbf{max}\{A; B\} = (\max\{a_1; b_1\}, \max\{a_2; b_2\}, \dots, \max\{a_n; b_n\})$, and the notation $A < B$ means that $a_j < b_j$ for all $j \in \{1, \dots, n\}$. Similarly, the relation $A \leq B$ is defined.

An entire function F of n complex variables is called a *function of bounded L-index in joint variables* [1] if there exists a number $m \in \mathbb{Z}_+$ such that for all $z \in \mathbb{C}^n$ and $J = (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, one has

$$\frac{|F^{(J)}(z)|}{J! \mathbf{L}^J(z)} \leq \max \left\{ \frac{|F^{(K)}(z)|}{K! \mathbf{L}^K(z)} : K \in \mathbb{Z}_+^n, \|K\| \leq m \right\}. \quad (1)$$

The least integer m for which inequality (1) holds is called the **L-index** in joint variables of the function F and is denoted by $N(F, \mathbf{L})$. Let us denote $\nabla\Phi(z) = \left(\frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n} \right)$, $|\nabla|\Phi(z) = \left(\left| \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_1} \right|, \dots, \left| \frac{\partial\Phi(z)}{\partial z_n} \right| \right)$. For $R \in \mathbb{R}_+^n$, $j \in \{1, \dots, n\}$ and $\mathbf{L}(z) = (l_1(z), \dots, l_n(z))$, we define

$$\begin{aligned} D^n [z^0, R/\mathbf{L}(z^0)] &= \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - z_j^0| \leq r_j/l_j(z^0), j \in \{1, \dots, n\}\}, \\ \lambda_{1,j}(z_0, R) &= \inf \{l_j(z)/l_j(z^0) : z \in D^n [z^0, R/\mathbf{L}(z^0)]\}, \\ \lambda_{2,j}(z_0, R) &= \sup \{l_j(z)/l_j(z^0) : z \in D^n [z^0, R/\mathbf{L}(z^0)]\}, \\ \lambda_{1,j}(R) &= \inf_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{1,j}(z_0, R), \lambda_{2,j}(R) = \sup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} \lambda_{2,j}(z_0, R). \end{aligned}$$

By Q^n we denote a class of functions $\mathbf{L}(z)$ for which every $R \in \mathbb{R}_+^n$ satisfies the condition $0 < \lambda_{1,j}(R) \leq \lambda_{2,j}(R) < +\infty$. If $n = 1$, then $Q \equiv Q^1$.

Theorem 1 ([2]). *Let $l \in Q$, $l(w) \geq 1$, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ and $\Phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ be entire functions such that all partial derivatives of the first order for the function Φ are nonvanishing. Suppose $\mathbf{L} \in Q^n$, where $\mathbf{L}(z) = l(\Phi(z))|\nabla|\Phi(z)$.*

In addition, for the function Φ and for $p = N(F, \mathbf{L})$ or $p = N(f, l)$ there exists $C > 0$ such that for all $z \in \mathbb{C}^n$ and for all $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, $\|J\| \leq p + 1$, one has $|\Phi^{(J)}(z)| \leq C|\nabla|\Phi(z)^J$. The entire function $F(z) = f(\Phi(z))$ has bounded L-index in joint variables if and only if the entire function f has bounded l -index.

Theorem 2 ([2]). Let $l \in Q$ such that $l(z) \geq 1$ for all $z \in \mathbb{C}$, $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ be an entire function of bounded l -index, and $\Phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ be an entire function, $n \geq 2$, such that

$$\mathbf{L} \in Q^n, \quad \mathbf{L}(w) = \max\{1, |\nabla|\Phi(w)\}l(\Phi(w)). \quad (2)$$

If there exists $C_2 \geq 1$ such that for all $w \in \mathbb{C}^n$ and for all $J \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ with $\|J\| \leq N(g, l) + 1$, one has

$$|\Phi^{(J)}(w)| \leq C_2(l(\Phi(w)))^{1/(N(g,l)+1)}(|\nabla|\Phi(w))^J, \quad (3)$$

then the entire function $H(w) = g(\Phi(w)) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ has bounded \mathbf{L} -index in joint variables.

Example. We choose $f(w) = e^w$ and $\Phi(z_1, z_2) = \sin(z_1) \cos(z_2)$. The index of the function f equals 0 because $f^{(p)}(w) = e^w$. Let us consider the composite function $F(z_1, z_2) = f(\Phi(z_1, z_2)) = e^{\sin(z_1) \cos(z_2)}$. Calculate the gradient of the function Φ :

$$\nabla\Phi(z_1, z_2) = (\cos(z_1) \cos(z_2), -\sin(z_1) \sin(z_2)).$$

One should observe that the zero sets of the functions $\cos(z_1) \cos(z_2)$ and $-\sin(z_1) \sin(z_2)$ are not empty. Therefore, Theorem 1 is not applicable to this composition. we can apply Theorem 2 to that composition. The function $\Phi(z_1, z_2) = \sin(z_1) \cos(z_2)$ satisfies (3) for $J = (0, 1)$ and $J = (1, 0)$. Thus, the function $e^{\sin(z_1) \cos(z_2)}$ has bounded \mathbf{L} -index in joint variables, where the function \mathbf{L} is constructed by (2):

$$\mathbf{L}(z_1, z_2) = (\max\{1, |\cos(z_1) \cos(z_2)|\}, \max\{1, |\sin(z_1) \sin(z_2)|\}).$$

1. Bandura, Andriy, Tetyana Salo, and Oleh Skaskiv. \mathbf{L} -Index in Joint Variables: Sum and Composition of an Entire Function with a Function With a Vanished Gradient // Fractal and Fractional. – 2023. – 7, No.8. Article ID: 593. <https://doi.org/10.3390/fractalfrac7080593>
2. Bandura, A.I.; Skaskiv, O.B. Boundedness of L -index for the composition of entire functions of several variables // Ukr. Math. J. – 2019. – 70. – P. 1538–1549. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01589-9>.

Derivations of finitary Mackey algebras

Bezushchak Oksana

`bezushchak@knu.ua`

*Taras Shevchenko National University of Kyiv,
Kyiv, Ukraine*

Let V be an infinite-dimensional vector space over a field \mathbb{F} , and let V^* denote the vector space of all linear functionals on V . A subspace $W \subset V^*$ is called *total* if $v \in V$, $(v|W) = (0)$ implies $v = 0$.

Let $\text{End}_{\mathbb{F}}(V)$ be the associative algebra of all linear transformations $V \rightarrow V$ and let $\text{End}_{\text{fin}}(V) = \{\varphi \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V) \mid \dim_{\mathbb{F}} \varphi(V) < \infty\}$.

The subalgebra $A(V|W) = \{\varphi \in \text{End}_{\mathbb{F}}(V) \mid W\varphi \subseteq W\}$ and the subalgebra $A_{\text{fin}}(V|W) = A(V|W) \cap \text{End}_{\text{fin}}(V)$ are called the *Mackey algebra* and the *finitary Mackey algebra* [5].

The algebra $A_{\text{fin}}(V|W)$ of a total subspace $W \subset V^*$ is a nonunital locally matrix algebra; see [1].

Let the characteristic of the field \mathbb{F} be different from 2, and let $\mathfrak{o}(f) = \{a \in A(V|W) \mid a^t = -a\}$ be the Lie algebra of skew-symmetric linear transformations. Let $\mathfrak{o}_{\infty}(f) = \mathfrak{o}(f) \cap \text{End}_{\text{fin}}(V)$.

The following theorem describes derivations of finitary Mackey algebras.

Theorem. (a) *An arbitrary derivation of the associative algebra $A_{\text{fin}}(V|W)$ is an adjoint operator $\text{ad}(a)$, $a \in A(V|W)$.*

(b) *Let $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$. Then an arbitrary derivation of the Lie algebra $\mathfrak{o}_{\infty}(f)$ is an adjoint operator $\text{ad}(a)$, $a \in A(V|W)$, $a^t = -a$.*

1. Bezushchak O. Derivations and automorphisms of locally matrix algebras // J. Algebra. – 2021, **576**. – P. 1–26.
2. Herstein I.N. Rings with involution. – Univ. of Chicago Press, Chicago, 1976.
3. Jacobson N. Structure of rings. Am. Math. Soc. Colloq. Publ. **37**, 1956.
4. Jacobson N. Lectures in abstract algebra. Volume 2. Linear algebra, Springer-Verlag, 1975.
5. Mackey G. On infinite dimensional linear spaces // Trans. AMS. – 1945, **57**. – P. 155–207.

On Parabolic Convergence Regions for Branched Continued Fractions of the Special Form

Bilanyk Iryna¹, Bodnar Dmytro², Voznyak Olha²

i.bilanyk@ukr.net, bodnar4755@ukr.net, olvoz@ukr.net

¹Ternopil Volodymyr Hnatiuk National Pedagogical University

²West Ukrainian National University

The most effective theorems of convergence of continued fractions and their multidimensional generalizations are theorems of the type of convergence regions. It is when the belongness of fraction elements in certain regions guarantees the convergence of this fraction. In particular, parabolic convergence regions were studied for branched continued fractions of general form with N branches of branching, two-dimensional continued fractions, and branched continued fractions with independent variables in the works of T. Antonova, I. Bilanyk, D. Bodnar, R. Dmytryshyn, Kh. Kuchminska, and O. Sus. At the same time, when considering unbounded subsets of parabolic regions, additional conditions of divergence of series composed of elements of equivalent fractions arose. On some subsets of these regions, truncation error bounds have been established.

An analog of Thron's theorem for the following two-dimensional branched continued fraction of the special form

$$\sum_{i_1=1}^2 \frac{a_{i_1(1)}}{b_{i_1(1)}} + \prod_{k=2}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i_k(k)}}{b_{i_k(k)}}$$

is established [1]. At the same time, some additional conditions arise due to the multidimensionality of the research object.

1. Bilanyk I. B., Bodnar D. I. Two-dimensional generalization of the Thron's "Jones theorem on the parabolic domains of convergence of continued fractions" // Ukr. Mat. Zhurn. – 2022. – 74 В.,– 9. – P. 1155–1169. <https://doi.org/10.37863/umzh.v74i9.7096>

On one modern method for teaching differential equations

Bilichenko Roman, Doroshenko Daniil

bilichenko@mmf.dnu.edu.ua, doroshenkode@mmf.dnu.edu.ua

Oles Honchar Dnipro National University

In modern higher education, when teaching mathematical disciplines, especially for students of applied specialties, the issue of demonstrating the application of acquired knowledge within the scope of the educational component being studied is relevant. The modern method with the application of effective implementation of mathematical models in the program code can be used in the teaching of the discipline "Differential Equations".

Classes are organized in the vast majority according to the scheme: problem statement and its research - construction of a mathematical model - solution of a differential equation or system - implementation in the form of software code. In fact, this approach allows you to combine such components as purely differential equations, mathematical modeling and numerical methods.

We will give an example of a corresponding implementation.

Problem. The weight oscillates on a spring with a mass of 0.5 kg, the stiffness of the spring is 10 N/m. The initial deviation of the weight from the equilibrium position is 0.2 m, and the speed of the initial movement is 0 m/s. It is necessary to determine the law of pendulum oscillations.

The mathematical model is implemented in the form of a system of differential equations:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} = -20x \\ \frac{dv}{dt} = -20x \end{cases}$$

with initial conditions $x(0) = 0.2$, $v(0) = 0$.

Analytical solution gives the following result:

$$\begin{cases} x(t) = 0.2 \cos 2\sqrt{5}t, \\ v(t) = -0.4 \sin 2\sqrt{5}t. \end{cases}$$

Program code (in Python):

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def runge_kutta_method(f, t0, tf, h, y0):
    t = np.arange(t0, tf + h, h)
    n = len(t)
    m = len(y0)
    y = np.zeros((n, m))
    y[0] = y0
    for i in range(1, n):
        k1 = f(t[i - 1], y[i - 1])
        k2 = f(t[i - 1] + h / 2, y[i - 1] + h / 2 * k1)
```

```

        k3 = f(t[i - 1] + h / 2, y[i - 1] + h / 2 * k2)
        k4 = f(t[i - 1] + h, y[i - 1] + h * k3)
        y[i] = y[i - 1] + h / 6 * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)
    return t, y
def f(t, y):
    return np.array([y[1], -20 * y[0]])
t0 = 0
tf = 10
h = 0.01
y0 = np.array([0.2, 0])
t, y = runge_kutta_method(f, t0, tf, h, y0)
plt.plot(t, y[:, 0], label='x')
plt.plot(t, y[:, 1], label='v')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
plt.show()
plt.plot(y[:, 0], y[:, 1])
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('v')
plt.show()
print("t\ttx\ttv")
for i in range(len(t)):
    print(f"{t[i]:.2f}\t{y[i, 0]:.6f}\t{y[i, 1]:.6f}")

```

This method can be extended to other mathematical disciplines. Analytical and numerical solution methods can be found in more detail in [1]. More details about general approaches to illustrating mathematical objects with program code can be found in [2].

1. Syasev V. A. Differential equations: study guide (in Ukrainian) – Dnipro.: Publishing House DNU, 2007. – 356 p.
2. Orland P. Math for programmers: 3D Graphics, Machine Learning, and Simulations with Python – Manning Publications, 2020. – 698 p.

Here $(d_1 + d_2) \times n$ –dimensional matrix U

$$U := \begin{bmatrix} P_{D_{d_1}^*} \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau, s) ds d\tau + B(s) \int_a^b K(s, \tau) d\tau \right] ds \\ P_{Q_{d_2}^*} \ell \int_a^b \int_a^b K(t, s) ds dt + \Psi_0(\cdot) D^+ \int_a^b \left[A(s) \int_a^s \int_a^b K(\tau, s) ds d\tau + \right. \\ \left. + B(s) \int_a^b K(s, \tau) d\tau \right] ds \end{bmatrix} \quad (5)$$

$(d_1 + d_2) \times 1$ –dimensional vector g is given as follows: $g := \begin{bmatrix} -P_{D_{d_1}^*} \tilde{b} \\ P_{Q_{d_2}^*} \{\gamma - \ell F(\cdot)\} \end{bmatrix}$, U^+ –pseudo-inverse (according to Moore–Penrose) to U – $n \times (d_1 + d_2)$ -dimensional matrix, P_{U^*} , P_U – $(d_1 + d_2) \times (d_1 + d_2)$ and $n \times n$ -dimensional matrix (orthoprojector), respectively.

Remark. Under condition $P_{U^*} g = 0$ the control of $u \in R^n$ may not be unique, because it depends on an arbitrary constant $P_U c \in R^n$. This makes it possible to use this control to investigate problems that are often encountered in the theory of optimal control.

1. Bondar, I.: Control conditions for not always solvable integro-differential equations with a degenerate kernel and boundary value problems for them // Bukovynsky Mathematical Journal, 1-2 (4), pp. 13–17 (2016, in Ukraine). <http://bmj.fmi.org.ua/index.php/adm/article/view/176/176>
2. Boichuk A. A., Samoilenko A. M., Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht, Boston: VSP, 2004, 317 p.; 2nd edition, Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2016, 314 p.
3. Boichuk, O.A., Holovatska (Bondar), I.A. Boundary-Value Problems for Systems of Integrodifferential Equations. J. Math. Sci., 2014, 203, 306–321 (Translation of Nonlinear Oscillations (Neliniini Kolyvannya), 2013, Vol. 16, No. 4, pp. 460–474). <https://doi.org/10.1007/s10958-014-2135-1>

Control Problem For The Diffusion Transfer Process With Semi-Markov Switchings

Chabanyuk Yaroslav¹, Khimka Uliana², Nikitin Anatoli³
y.chabanyuk@pollub.pl, ulyana.khimka@lnu.edu.ua,
anatolii.nikitin@ujk.edu.pl

¹*Lublin University of Technology, Poland,*

²*Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine,*

³*Jan Kochanowski University of Kielce, Poland*

We assume diffusion transfer process $y(t) \in \mathbb{R}^d$ has given by stochastic evolutionary equation [1], [2]

$$dy(t) = a(y(t), x(t))dt + \sigma(y(t), x(t), u(t))dW(t), \quad (1)$$

where $x(t)$, $t \geq 0$, is a semi-Markov process on a standard phase space (X, \mathbf{X}) [2] and it is defined by semi-Markov kernel $\mathbf{Q}(t, x, B) = P(x, B)G_x(t)$ where stochastic kernel has a form $P(x, B) := \mathbb{P}\{x_{n+1} \in B | x_n = x\}$, $B \in \mathbf{X}$ and it describes embedded Markov chain $x_n := x(\tau_n)$ at renewal moments $\tau = \sum_{k=1}^n \theta_k$, $n \geq 0$, $\tau_0 = 0$, and at intervals $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$ between renewal moments τ_n . Values θ_n of intervals are determines by distribution function

$$G_x(t) := \mathbb{P}\{\theta_{n+1} \leq t | x_n = x\} =: \mathbb{P}\{\theta_x \leq t\}.$$

Let the control function $u(t)$ for process (1) be evaluated by the quality criterion described by the function $G(y, x, u)$ with a single equilibrium point at each interval $[\tau_k, \tau_{k+1}]$. In (1) $W(t)$ is a Winer process [2].

Further we assume that semi-Markov process $x(t)$, $t \geq 0$ is regular, that is $\mathbb{P}\{\nu(t) < \infty\} = 1$ [2] and it is also uniformly ergodic with stationary distribution

$$\pi(B) := \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{x(t) \in B\} = \int_B \rho(dx)g(x)/q, \quad B \in \mathbb{X},$$

where $\rho(B)$. We define \mathbf{R}_0 as a potential operator for generator \mathbf{Q} by the relation $\mathbf{R}_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1}$ where $\rho(B)$, $B \in \mathbb{X}$ is a stationary distribution of embedded Markov chain x_n , $n \geq 0$ [2], $g(x) := \int_0^x (1 - G_x(s))ds \leq C < +\infty$, $q := \int_{\mathbb{X}} \rho(dx)g(x) > 0$.

We have control for solution of equation

$$\frac{\partial G^*(y, x, u)}{\partial u} = 0. \quad (2)$$

when condition $G(\cdot, \cdot, u) \in C^1(\mathbb{R})$ is satisfied.

Control problem (1), (2) in averaged scheme with small parameter ε has a form [1]

$$dy^\varepsilon(t) = a(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon))dt + \sigma(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), u^\varepsilon(t))dW(t) \quad (3)$$

and control function $u^\varepsilon(t)$ can be determined by stochastic optimization procedure [1]

$$du^\varepsilon(t) = \alpha(t)\nabla_{\beta(t)}G(y^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), u^\varepsilon(t)), \quad (4)$$

where $\nabla_{\beta(t)}G(\cdot, \cdot, u) = (G(\cdot, \cdot, u + \beta(t)) - G(\cdot, \cdot, u - \beta(t)))/2\beta(t)$.

Initial conditions for problem (3), (4) have a form

$$y(0) = y_0, \quad x(0) = x_0, \quad u(0) = u_0.$$

We assume that functions $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $t \geq 0$ satisfy condition

$$\alpha(t) \rightarrow 0, \quad \beta(t) \rightarrow 0$$

at $t \rightarrow \infty$.

Sufficient conditions for weak convergence were obtained in the work

$$(y^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) \Rightarrow (\hat{y}(t), \hat{u}(t)), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Averaged control problem for process $(\hat{y}(t), \hat{u}(t))$ is defined by system

$$d\hat{y}(t) = a(\hat{y})dt + \sigma(\hat{y}, \hat{u})dW(t),$$

$$d\hat{u}(t) = \nabla_{\beta(t)}G(\hat{y}, \hat{u})dt,$$

where $\hat{a}(y) = \int_{\mathcal{X}} \pi(dx)a(y, x)$,

$$\sigma^2(y, u) = \int_{\mathcal{X}} \pi(dx)\sigma^2(y, u, x),$$

$$G(y, u) = \int_{\mathcal{X}} G(y, u, x)\pi(dx).$$

1. Korolyuk V.S. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V.S. Korolyuk, N. Limnios // World Scientific, 2005. - 330 p.
2. Chabanyuk Y. Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes / Y.Chabanyuk, A.Nikitin, U.Khimka// Wiley, 2020/ - 240 p.

On applications of Nikolskii spaces of low regularity to elliptic boundary problems

Chepurukhina Iryna, Murach Aleksandr

Chepurukhina@gmail.com, Murach@imath.kiev.ua

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

We discuss applications of Nikolskii spaces $B_{p,\infty}^s$ of low order s , specifically of negative order, to an elliptic boundary problem (EBP) of the form

$$Au = f \text{ in } \Omega, \quad B_j u = g_j \text{ on } \Gamma, \quad j = 1, \dots, l. \quad (1)$$

Here, Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^{d+1} with a boundary $\Gamma \in C^\infty$; $\text{ord } A = 2l$, with $l \in \mathbb{N}$, and $m_j := \text{ord } B_j \leq 2l - 1$. All coefficients of the differential operators A and B_j belong to the complex spaces $C^\infty(\bar{\Omega})$ and $C^\infty(\Gamma)$, resp. We will pay special attention to some EBPs with white noise on the boundary.

We consider the case where $f \in \bigcup_{p>1} L_p(\Omega)$. Then the distributions $B_j u$ are well defined for any (extendable) distribution $u \in S'(\Omega) := S'(\mathbb{R}^{d+1}) \upharpoonright \Omega$

Theorem 1. *Let $s \leq 2l$ and $1 < p < \infty$. Then EBP (1) generates a Fredholm bounded operator on the pair of Banach spaces*

$$\left\{ u \in B_{p,\infty}^s(\Omega) : Au \in L_p(\Omega) \right\} \quad \text{and} \quad L_p(\Omega) \times \prod_{j=1}^l B_{p,\infty}^{s-m_j-1/p}(\Gamma)$$

(the first space is endowed with the graph norm). The kernel of this operator lies in $C^\infty(\bar{\Omega})$ and together with the index does not depend on s and p .

Assume, that an open set $U \subset \mathbb{R}^n$ satisfies $\Omega_0 := \Omega \cap U \neq \emptyset$ and $\Gamma_0 := \Gamma \cap U \neq \emptyset$. Let $B_{p,\infty}^{\sigma,\text{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$, with $\sigma \in \mathbb{R}$, denote the space of all distributions $u \in S'(\Omega)$ such that $\chi u \in B_{p,\infty}^\sigma(\Omega)$ whenever $\chi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ and $\text{supp } \chi \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$. Similarly, let $B_{p,\infty}^{\sigma,\text{loc}}(\Gamma_0)$ denote the space of all distributions $h \in \mathcal{D}'(\Gamma)$ such that $\chi h \in B_{p,\infty}^\sigma(\Gamma)$ whenever $\chi \in C^\infty(\Gamma)$ and $\text{supp } \chi \subset \Gamma_0$.

Theorem 2. *Let $s \in \mathbb{R}$ and $1 < p < \infty$. Suppose that a distribution $u \in S'(\Omega)$ is the solution to EBP (1) whose right-hand sides satisfy the conditions $f \in L_p(\Omega) \cap B_{p,\infty}^{s-2l,\text{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$ and $g_j \in B_{p,\infty}^{s-m_j-1/p,\text{loc}}(\Gamma_0)$ for each $j \in \{1, \dots, l\}$. Then $u \in B_{p,\infty}^{s,\text{loc}}(\Omega_0, \Gamma_0)$.*

We accomplish this theorem with a local *a priori* estimate of the solution u .

Theorem 3. *Let $s \in \mathbb{R}$ and $1 < p < \infty$. Suppose that a distribution $u \in S'(\Omega)$ satisfies the hypotheses of Theorem 2. Let a number $r > 0$, and let functions $\chi, \eta \in C^\infty(\bar{\Omega})$ satisfy $\text{supp } \chi \subset \text{supp } \eta \subset \Omega_0 \cup \Gamma_0$ and $\eta = 1$ in a neighbourhood of $\text{supp } \chi$. Then*

$$\begin{aligned} \|\chi u, B_{p,\infty}^s(\Omega)\| &\leq c \left(\|\eta f, L_p(\Omega)\| + \|\eta f, B_{p,\infty}^{s-2l}(\Omega)\| + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^l \|\eta g_j, B_{p,\infty}^{s-m_j-1/p}(\Gamma)\| + \|\eta u, B_{p,\infty}^{s-r}(\Omega)\| \right). \end{aligned}$$

Here, c is a certain positive number that does not depend on u , f , and g_1, \dots, g_l .

Versions of these results are true for Besov and Triebel–Lizorkin spaces [1].

Let us now discuss an application of Nikolskii spaces to EBPs with white noise on the boundary Γ . Assume that Γ is the d -dimensional torus \mathbb{T}^d , and consider the Dirichlet boundary problem for Poisson equation

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad \gamma_0 u = \xi \text{ on } \mathbb{T}^d \quad (2)$$

on the assumption that $f \in L_p(\Omega)$ for certain $p \in (1, \infty)$. Here, γ_0 is the trace operator, and ξ is the Gaussian white noise on \mathbb{T}^d . Recall that the Gaussian white noise on Γ is a random variable $\xi : \Theta \rightarrow D'(\Gamma)$ that satisfies the following two conditions: 1) the numerical random variable $\xi(v) : \Theta \rightarrow \mathbb{C}$ is normally distributed for every test function $v \in C^\infty(\Gamma)$; 2) the equality

$$\mathbb{E}[\xi(v_1)\overline{\xi(v_2)}] = C \int_{\Gamma} v_1(x)\overline{v_2(x)}dS$$

holds true for arbitrary functions $v_1, v_2 \in C^\infty(\Gamma)$ and a certain number $C > 0$ that is independent of v_1 and v_2 . Here, (Θ, K, \mathbb{P}) is a probability space.

Theorem 4. *The EBP (2) has a unique generalized solution $u(\omega, \cdot)$ of class $B_{p, \infty}^{1/p-d/2}(\Omega)$ for \mathbb{P} -almost all $\omega \in \Theta$. This solution satisfies*

$$\|u(\omega, \cdot), B_{p, \infty}^{1/p-d/2}(\Omega)\| \leq c (\|f, L_p(\Omega)\| + \|\xi(\omega), B_{p, \infty}^{-d/2}(\mathbb{T}^d)\|) < \infty$$

for a certain number $c > 0$ that does not depend on f , ξ , and ω .

This result is exact with respect to the order of the Nikolskii space over Ω . Theorems 1–4 were established in [2].

1. Chepurukhina I.S., Murach A.A. Elliptic problems in Besov and Sobolev–Triebel–Lizorkin spaces of low regularity // Dopov. Nac. Akad. Nauk Ukr. – 2021. – no 6. – P. 3–11. (arXiv:2108.08741)
2. Murach A.A., Chepurukhina I.S. Elliptic problems with rough boundary data in Nikolskiy spaces // Dopov. Nac. Akad. Nauk Ukr. – 2021. – no. 3. – P. 3–10 (Ukrainian). (arXiv:2103.10372)

Schemes of approximation of linear systems with delay and analysis of their stability

Cherevko Igor, Tuzyk Iryna

i.cherevko@chnu.edu.ua, i.tuzyk@chnu.edu.ua
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

Differential-difference and differential-functional equations are mathematical models of many applied problems in automatic control and management systems, chemical, biological, technical, economic and other processes whose evolution depends on prehistory [1, 2].

In the study of the problems of stability, oscillation, bifurcation, control, and stabilization of solutions of linear differential-difference equations, the location of the roots of the corresponding characteristic equations is very important.

Numerous applications of delayed systems have led to the active growth of research in various areas of the theory of differential-functional equations and the emergence of new interesting theoretical problems that need to be solved [3].

This paper investigates the application of approximation schemes for differential-difference equations [4]–[6] to construct algorithms for the approximate finding of nonsymptotic roots of quasipolynomials and their application to study the stability of solutions of systems of linear differential equations with many delays.

Consider the initial problem for a linear system of differential-difference equations

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^k B_i x(t - \tau_i), \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

where $A, B_i, i = \overline{1, k}$ fixed $n \times n$ matrix, $x \in R^n, 0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = \tau, \varphi(t) \in [-\tau, 0]$.

Let us correspond to the initial problem (1)–(2) the system of ordinary differential equations [4, 5]

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= A(t)z_0(t) + \sum_{i=1}^k B_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left[\frac{\tau_i m}{\tau} \right], \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \mu(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau}, \quad m \in N, \end{aligned} \quad (3)$$

with initial conditions

$$z_j(0) = \varphi\left(-\frac{\tau j}{m}\right), \quad j = \overline{0, m}. \quad (4)$$

Theorem. [5] *If the zero solution of the system with delay (1) is exponentially stable (not stable), then there is $m_0 > 0$ such that for all $m > m_0$, the zero solution of the approximating system (3) is also exponentially stable (not stable).*

If for all $m > m_0$ the zero solution of the approximation system (3) is exponentially stable (not stable) then the zero solution of the system with a delay (1) is exponentially stable (not stable).

It follows from Theorem that the asymptotic stability or instability of the solutions of the delayed linear equations and the corresponding approximating system of ordinary differential equations for sufficiently large values of m are equivalent.

This allowed us to build methods for studying the stability of linear systems with many delays, which can be constructively implemented on a computer using Mathematica software or builtin Python libraries. Computational experiments on special test examples showed the high efficiency of the proposed algorithms for studying the stability of linear differential-difference equations.

1. Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional Differential Equations : Advances and Applications. – John Wiley & Sons, 2016. – 368 p.
2. Schiesser W.E. Time Delay ODE/PDE Models. Applications in Biomedical Science and Engineering. – Boca Rona, 2019. – 250 p.
3. Forrest-Owen O. Mathematical Modelling and it's Applications in Biology, Ecology and Population Study. – University of Chester, United Kingdom, 2016. – 124 p.
4. Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. – New York : Academic Press, 1981. – P. 155-197.
5. Matviy O.V., Cherevko I.M. About approximation of system with delay and them stability // Nonlinear oscilations. – 2004. – **7**, No.2. – P. 208-216.
6. Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability // 2021 11th International Conference on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021, Deggendorf, Germany, 15-17 September 2021. – P. 49-52.

Principle of measurable choice in game problems of motion control

Chikrii Arkadii

`g.chikrii@gmail.com`

Glushkov Institute of Cybernetics NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

The paper concerns quasi-linear conflict-controlled processes which are exposed to simultaneous action of continuous and impulse controls of two counteracting sides. The terminal set is assumed to be cylindrical. The game is analyzed standing on the side of the first player who strives to steer a process trajectory to the terminal set. Sufficient conditions are developed, providing realization of the pursuer's goal in some guaranteed time under any counteraction of the second player. In constructing his control the pursuer employs control prehistory of the second player or current instantaneous values of his control. Here the method of resolving functions is used as the basic method of investigation. The scheme of the method assumes Pontryagin's condition or some its modification to be fulfilled. On its basis special set-valued mapping and its support functions, named the resolving function, are built. Under the known current control of the second player the resolving function features quality of the first player game. In view of accumulative character of the game quality evaluation of the scheme, the first direct method can be expressed in its terms with the infinity as corresponding value of the resolving function [1, 2]. Also the functional form of the first direct method is given by the way of construction of special set-valued mappings and corresponding resolving functions. Comparison of the guaranteed times of the game termination is made for the above mentioned methods. The property for the joint LxB –measurability of the set-valued mappings and corresponding superpositional measurability of their selections make it feasible a measurable choice of continuous constituent of the first player control, analogously to the Fillipov-Castaing theorem. Corresponding condition for advantage concerning impact of impulse controls is also given. The cases of only continuous and only impulse controls of each player are analyzed separately as well as the case of impulse controls of both players. By construction, the resolving function is a key object of investigation and appears as the inverse Minkowski functional of certain set-valued mapping. This fact makes it possible to construct in analytic form the upper and lower resolving functions [3] for a wide class of conflict-controlled processes. This methodology is also developed for the matrix resolving functions [4]. Suggested scheme allows evolution of the continuous and discrete controls quality in the game approach problems. The results are illustrated by the model examples. In addition, it should be noted that the method of resolving function provides full substantiation of the classic rule of parallel pursuit, the Euler curve chase method, methods of proportional navigation and ray pursuit [5, 6, 7], well known to the designers of rocket and space technology.

Acknowledgements. This work was partially supported by National Research Foundation of Ukraine under grant number 2020.02/0121.

1. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. – Boston; London; Dordrecht.: Springer Science and Business Media, 2013. – 424 p.
2. Chikrii A., Petryshyn R., Cherevko I., Bigun Y. Method of Resolving Functions in the Theory of Conflict-Controlled Processes // In book “Advanced Control Technique Systems: Theory and Applications”, seria “Studies in Systems, Decision and Control”. Editors Yu. Kondratenko, V. Kuntsevich, A. Chikrii , V. Gubarev. – Springer, 2019. – 203, – P. 3–33.
3. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image Structure of Multivalued Mappings in Game Problems of Motion Control // Journal of Automation and Information Sciences – 2016. – 48, № 3. – P. 20–35.
4. Chikrii A.A., Chikrii G.Ts. Matrix Resolving Functions in Game Dynamic Problems.// In book “Artificial Intelligence in Control and Decision – Making Systems”. Editors Yu. Kondratenko, V. Kuntsevich, A. Chikrii , W. Pedricz, A.-M. Lafuente. – Springer, 2023. – P. 64–83.
5. Chikrii A.A., Matychyn I.I. Resolving functions in parallel and pure pursuit // Journal of Automation and Information Sciences – 2003. – 35, № 11. – P. 1–6.
6. Matychyn I.I., Chikrii A.A. Motion Camouflage in Differential Games of Pursuit // Journal of Automation and Information Sciences – 2005. – 37, № 3. – P. 1–5.
7. Ignatenko A.P., Chikrii A.A. On Substantiation of the Proportional Navigation Method in the Simple Pursuit Problem // Journal of Automation and Information Sciences – 2004. – 36, № 1. – P. 19–27.

Integrability conditions for a cubic system with two invariant straight lines and exponential factors

Cozma Dumitru

dcozma@gmail.com

“Ion Creangă” State Pedagogical University / Tiraspol State University, Republic of Moldova

We consider the cubic differential system of the form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + cxy + fy^2 + kx^3 + mx^2y + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + dxy + by^2 + sx^3 + qx^2y + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x, y), \end{aligned} \quad (1)$$

in which $P(x, y)$ and $Q(x, y)$ are real and coprime polynomials in the variables x and y . The origin $O(0, 0)$ is a singular point of a center or a focus type for (1). The problem arises of distinguishing between a center and a focus, called the problem of the center. It was solved for some families of cubic differential systems (1) having invariant algebraic curves in [1], [2], [3], [4], [5], [6].

An approach to the problem of the center is to study the local integrability of the system (1) in some neighborhood of the singular point $O(0, 0)$. It is known that a singular point $O(0, 0)$ is a center for system (1) if and only if it has a holomorphic first integral $F(x, y) = C$ or a holomorphic integrating factor of the form $\mu = 1 + \sum \mu_j(x, y)$ in some neighborhood of $O(0, 0)$ [1].

We find the integrability conditions for cubic system (1) assuming that the system has homogeneous invariant straight lines and exponential factors. By [1], as homogeneous invariant straight lines $Ax + By = 0$, the system (1) can have only the lines $x \mp iy = 0, i^2 = -1$. In this case the system looks

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + ax^2 + (g - b)xy + fy^2 + kx^3 + (r - n + s)x^2y + \\ &\quad + pxy^2 + ry^3 \equiv P(x, y), \\ \dot{y} &= -(x + gx^2 + (f - a)xy + by^2 + sx^3 + (l - k + p)x^2y + \\ &\quad + nxy^2 + ly^3) \equiv Q(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

Let $h, g \in \mathbb{C}[x, y]$ be relatively prime in the ring $\mathbb{C}[x, y]$. The function $\Phi = \exp(g/h)$ is called an *exponential factor* of a system (2) if for some polynomial $K \in \mathbb{C}[x, y]$ of degree at most two it satisfies the equation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} P(x, y) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} Q(x, y) \equiv \Phi K(x, y). \quad (3)$$

In [1] the problem of the center was solved for cubic system (2) with: one invariant straight line, two invariant straight lines, one invariant conic.

An integrating factor for system (1) on some open set U of \mathbb{R}^2 is a C^1 function μ defined on U , not identically zero on U such that

$$P(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \equiv 0. \quad (4)$$

We determine the center conditions for cubic system (2) by constructing integrating factors of the Darboux form [6]

$$\mu = (x - iy)^{\alpha_1} (x + iy)^{\alpha_2} \Phi^{\alpha_3}, \quad (5)$$

with $\Phi = \exp(g(x, y))$ and $\Phi = \exp\left(\frac{g(x, y)}{x^2 + y^2}\right)$, where $\alpha_j \in \mathbb{C}$ and $g(x, y)$ is a real polynomial having $\deg(g) \leq 2$. Identifying the coefficients in $\{(3), (4)\}$ and solving the obtained algebraic systems, we prove the following theorem

Theorem. *The cubic system (1) has an integrating factor of the form (3) if and only if one of the following sets of conditions holds:*

- (i) $c = g - b, d = l = m = q = r = 0, f = a, k = p = a(g - b), s = n;$
- (ii) $c = g - b, d = f - a, g = (abf - bf^2 + fl - al + br)/(a^2 - af + r), s = n,$
 $n = (pl)/r, k = p = [r(ab - bf + l)]/(a^2 - af + r), q = l, m = r;$
- (iii) $c = g - b, d = f - a, k = m = p = r = 0, q = l, l = bf - ag, s = n,$
 $(ag - bf)(b - g) + (a - f)n = 0;$
- (iv) $c = d = 0, f = a, g = b, k = p = q = l, m = r, s = n;$
- (v) $c = g - b, d = f - a, k = l, q = p, n = 2r - s, m = 2s - r, p = -3l, l = b(a + f),$
 $s = a^2 + af - b^2 - bg + r, ag - bf = 0;$
- (vi) $c = g - b, d = f - a, k = ag, l = bf, m = af - bg + r, n = -m, p = -bf,$
 $q = -ag, s = r;$
- (vii) $c = -2b, d = -2a, f = -a, g = -b, k = l, m = 2r - n, p = q = -l, s = r.$

Under the conditions (i)–(vii) the origin is a center for cubic system (1).

1. Cozma D. Integrability of cubic systems with invariant straight lines and invariant conics. – Chişinău: Ştiinţa, 2013. – 240 p.
2. Cozma D. Darboux integrability of a cubic differential system with two parallel invariant straight lines // Carpathian J. Math. – 2022. – 38, No. 1. – P. 129–137.
3. Cozma D., Dascalescu A. Integrability conditions for a class of cubic differential systems with a bundle of two invariant straight lines and one invariant cubic // Bul. Acad. de Şt. a Rep. Moldova. Matematica. – 2018. – 86, No. 1. – P. 120–138.
4. Llibre J. On the centers of cubic polynomial differential systems with four invariant straight lines // Topological Methods in Nonlinear Analysis. – 2020. – 55, No. 2. – P. 387–402.
5. Sadovskii A.P., Scheglova T.V. Solution of the center-focus problem for a nine-parameter cubic system // Diff. Equations. – 2011. – 47. – P. 208–223.
6. Xiang Zhang. Integrability of Dynamical Systems: Algebra and Analysis. – Singapore: Springer Nature Singapore, 2017. – 380 p.

Dynamic of a nonlinear backward shift on a semiring of multisets

Dolishniak Daryna

daryna.dolishniak@pnu.edu.ua

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

Let X be a metric space and T be a continuous mapping $T: X \rightarrow X$. We say that T is a *dynamical system* on X considering the sequence of maps $\{T^n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

A dynamical system $T: X \rightarrow X$ is called topologically transitive if, for any pair U, V of nonempty open subsets of X there exists some integer $k \geq 0$ such that $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

Let us construct the ring of positive multisets \mathcal{R}_+ . Throughout this paper ℓ_1 means the real Banach space of all absolutely summing sequences. Denote

$$\ell_1^+ := \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \ell_1 : x_i \geq 0, i \in \mathbb{N}\}.$$

Let $\text{supp } x$ be the subset of all indexes $j \in \mathbb{N}$ such that $x_j > 0$. We say that $x \sim y$, $x, y \in \ell_1^+$ if there is a bijection $\sigma: \text{supp } x \rightarrow \text{supp } y$ such that $x_i = y_{\sigma(i)}$ for every $i \in \text{supp } x$. It is known that $x \sim y$ if and only if $P(x) = P(y)$ for every symmetric polynomial P on ℓ_1 . Let us denote by \mathcal{R}_+ the quotient set ℓ_1^+ / \sim . Thus, \mathcal{R}_+ consists of classes of equivalence

$$[x] = \{y : y \sim x\}.$$

In other words, $[x] = [(x_1, x_2, \dots)]$ is an unordered family of positive numbers with possible repetitions such that

$$\|[x]\| := \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \infty.$$

By this reason, we can think $[x]$ as a multiset of positive numbers and \mathcal{R}_+ as a set of positive multisets (or multinumbers).

\mathcal{R}_+ is a semiring with respect to the following operations. Let $[x] + [y] = [x] \cup [y]$ be just the union of two multisets, and $[x][y]$ be the multiset containing all products $x_i y_j$. Also, we can multiply $[x]$ by positive constants $\lambda[x] = [\lambda x]$. In addition, we can use in \mathcal{R}_+ the set theoretical operations “ \cap ”, “ \setminus ”, $[x] \Delta [y] = ([x] \setminus [y]) + ([y] \setminus [x])$ in the natural sense.

The ring \mathcal{R}_+ is a metric space with respect to the following metric

$$d([x], [y]) := \|[x] \Delta [y]\|.$$

From results in [5] we can get the following theorem.

Theorem 1. 1. $d([x], [y])$ is a metric.

2. (\mathcal{R}_+, d) is a complete metric space.

3. The operation of addition and multiplication are continuous in the metric d .

4. The multiplication by a constant is discontinuous but $\lambda[x] \rightarrow 0$ if $\lambda \rightarrow 0$, for every fixed $[x]$.

5. The metric space (\mathcal{R}_+, d) is nonseparable.

For every $x = (x_1, \dots, x_n, \dots) \in \ell_1^+$ we denote by $M(x) = (\max_i x_i, 0, 0, \dots)$. For a given $\lambda > 1$ we define the following map $\mathfrak{T}_\lambda: \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$,

$$\mathfrak{T}_\lambda([x]) = \lambda([x] \setminus [M(x)]).$$

In other words, \mathfrak{T}_λ cancels the maximal coordinate of x and multiply the result by λ . It is easy to check that \mathfrak{T}_λ is continuous in (\mathcal{R}_+, d) . Note that \mathfrak{T}_λ is not additive.

Theorem 2. *Operator \mathfrak{T}_λ is topologically transitive on \mathcal{R}_+ for every $\lambda > 1$.*

Note that the proof of Theorem 2 is still true if we replace the topology of \mathcal{R}_+ by any metrizable semiring topology such that \mathfrak{T}_λ is continuous, X_0 is dense in \mathcal{R}_+ and $S^n([y]) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

1. I. V. Chernega, *A semiring in the spectrum of the algebra of symmetric analytic functions in the space ℓ_1* , J. Math. Sci. **212** (2016), 38–45.
2. Y. Chopuyuk, T. Vasylyshyn, A. Zagorodnyuk, *Rings of Multisets and Integer Multinumerals*, Mathematics **10(5)** (2022), 778.
3. Karl-G. Grosse-Erdmann, Alfred Peris Manguillot, *Linear Chaos*, Universitext, London, 2011.
4. I. Halushchak, Z. Novosad, Y. Tsizhma, A. Zagorodnyuk, *Logistic Map on the Ring of Multisets and Its Application in Economic Models*, Mathematics and Statistics **8(4)** (2020), 424-429.
5. F. Jawad, A. Zagorodnyuk, *Supersymmetric Polynomials on the Space of Absolutely Convergent Series*. Symmetry **11(9)** (2019), 1111.
6. A. Manoussos, *A Birkhoff type transitivity theorem for non-separable completely metrizable spaces with applications to linear dynamics*, J. Operator Theory. **70:1** (2013), 165-174. doi: 10.7900/jot.2011may12.1971.
7. Z. Novosad, *Topological transitivity of translation operators in a non-separable Hilbert space*, Carpathian Math. Publ. **15(1)** (2023), 278-285.
8. S. Rolewicz, *On orbits of elements*, Studia Math. **33** (1969), 17–22.
9. A. Zagorodnyuk, Z. Novosad, *Topological Transitivity of Shift Similar Operators on Non- separable Hilbert Spaces*, Journal of Functional Spaces (2021), 7.

Approximation of Boundary Value Problem Solutions for Integro-Differential Equations of the Neutral Type Using a Spline Function Method

Dorosh Andrii, Haiuk Ivan, Pertsov Andrii

a.dorosh@chnu.edu.ua, haiuk.ivan@chnu.edu.ua, a.pertsov@chnu.edu.ua
Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine

Boundary value problems for integro-differential equations with a deviating argument are mathematical models of various applied processes in biology, immunology and medicine. Finding solutions to boundary value problems with a time delay in analytical form is possible only in the simplest cases, so the real task is to develop efficient methods for finding their approximate solutions. The application of the spline function method to the approximation of boundary value problems for integro-differential equations has been studied in [1]. The goal of this paper is to extend the approximation schemes using cubic splines of defect two for boundary value problems for integro-differential equations with many delays [2, 3].

Let us denote

$$\begin{aligned} [y(x)] &= \left(y(x - \tau_0(x)), \dots, y(x - \tau_n(x)) \right), \\ [y(x)]_1 &= \left(y'(x - \tau_0(x)), \dots, y'(x - \tau_n(x)) \right), \\ [y(x)]_2 &= \left(y''(x - \tau_0(x)), \dots, y''(x - \tau_n(x)) \right). \end{aligned}$$

Consider a boundary value problem

$$\begin{aligned} y''(x) &= f(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2) + \\ &+ \int_a^b g(x, s, [y(s)], [y(s)]_1, [y(s)]_2) ds, \quad x \in [a; b], \end{aligned} \tag{1}$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x), \quad p = 0, 1, 2, \quad x \in [a^*; a], \quad y(b) = \gamma, \tag{2}$$

where $\tau_0(x) = 0$, $\tau_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ are continuous nonnegative functions defined on $[a, b]$, $\varphi(x)$ is a twice continuously differentiable function on $[a^*; a]$, $\gamma \in R$,

$$a^* = \min_{0 < i \leq n} \left\{ \inf_{x \in [a; b]} (x - \tau_i(x)) \right\}.$$

In this paper we investigate boundary value problems for nonlinear integro-differential equations of neutral type. Sufficient conditions for the existence of solutions of such problems are established. The iterative schemes for finding approximate solutions of these problems using cubic splines of defect two are constructed and substantiated, the convergence of the iterative process is investigated. The use of spline functions allows us to construct algorithms that are simple to implement and at the same time suitable for solving a wide class of boundary value problems.

1. Cherevko I., Dorosh A. Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations // J. Numer. Anal. Approx. Theory. – 2015. – Vol. 44 No. 2. – Pp. 154–165.
2. Cherevko I., Dorosh A., Haiuk I., Pertsov A. Solving Boundary Value Problems For Linear Neutral Delay Differential-Difference Equations Using a Spline Collocation Method // Proceedings of the 29th Conference on Applied and Industrial Mathematics. CAIM 2022. – Chisinau, Republic of Moldova. August 25–27, 2022. – Pp. 57–59.
3. Cherevko I., Dorosh A., Haiuk I., Pertsov A. Approximation of Solutions of Boundary Value Problems for Integro-Differential Equations of the Neutral Type Using a Spline Function Method // Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences. – 2022. – Vol. 14 No. 2. – Pp. 7–14.

A two-pointed problem by t for diffusion equation

Drin Yaroslav¹, Drin Iryna², Drin Svitlana³

y.drin@chnu.edu.ua, Iryna.drin@gmail.com, svitlana.drin@oru.se

¹Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine

²Chernivtsi Trade and Economic Institute of the State Trade University, Ukraine

³Orebro University, Sweden

The correct solvability of two-pointed problem by t for parabolic differential equation is established for the class differentiable functions.

The Cauchy problem for parabolic equation (including the heat equation) are quite fully studied in various spaces functions [1]. We conducted a study of the parabolic two-pointed problem by t using [2] and [3] and our problem is solved by the first time.

Consider the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = M(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - B(t)p(t, x) + f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi \equiv (0, T) \times \mathbb{R} \quad (1)$$

and a nonlocal condition

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad u(T, x) = \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$M(t) > 0, B(t), f(t, x), \varphi_1(x), \varphi_2(x)$ – are known functions $v(t, x), p(t, x)$ – are not known functions $(t, x) \in \Pi$. Under solution of the problem (1), (2) we understand the pair of functions

1. $u \in C_{t, \pi}^{1,2}(\Pi), p \in KC(\Pi)$ – class of piecewise continuous functions;
2. functions u and p satisfy equation (1);
3. function u satisfies the boundary conditions (2).

For given problem we obtained following results:

Theorem 1. Let $M(t) > 0, t \in [0, T], \varphi_1(x), x \in \mathbb{R}$, – are continuous bounded functions $I(t) = \int_0^t M(\tau) d\tau > 0$ for $t \in [0, T]$.

Then fundamental solution of Cauchy problem

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = M(t) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad (t, x) \in \Pi,$$

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

obtains the view

$$G(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi I(t)}} \exp \left\{ -\frac{|x|^2}{4I(t)} \right\}, \quad (t, x) \in \Pi,$$

and the only solution to this problem is written in the form of a convolution

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x - \xi) \varphi_1(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi.$$

If the initial condition of the problem at $t = h > 0$, where h – the number, then

$$I(t) = \int_h^t M(\tau) d\tau, \quad t \in [p, T].$$

For $M(t) = a^2$, a – fixed, $I(t) = a^2 t > 0$ for $t \in (0, T]$ and this result is known from the classic course of mathematical physics. As well solution of this problem exists for increasing power functions $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Theorem 2. *When Theorem 1 is fulfilled, the convolution formula for the Greene function is valid $G(t, x)$:*

$$G(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \beta, x - y) G(\beta, y) dy, \quad (t, x) \in \Pi.$$

If some operator A can act on the last expression, then we choose the convolution formula for $AG(t, x)$.

For proof theorem 2 is used theorem 1.

In equation (1) term $B(t)p(t, x)$ combine with $f(t, x)$ and stat the solution of the Cauchy problem in the form of a sum of convolutions

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, x - y) \varphi_1(y) dy + \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(t - \tau, x - \xi) [f(\tau, \xi) - B(\tau)p(\tau, \xi)] d\xi, \quad (t, x) \in \Pi \quad (3)$$

While second boundary conditions is satisfied $u(T, x) = \varphi_2(x)$ we obtain the Fredholm equation of the first kind with respect to the unknown function $p(t, x)$, which is searched in the form

$$p(t, x) = B(t)G(t, x)C,$$

C - constant.

Substituting $p(t, x)$ in the equation

$$\begin{aligned} & \int_0^T d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(T - \tau, x - \xi) B(\tau) p(\tau, \xi) d\xi = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} G(T, x - \xi) \varphi_1(\xi) d\xi + \int_0^T d\tau \int_{-\infty}^{\infty} G(T - \tau, x - \xi) f(\tau, \xi) d\xi - \varphi_2(x) \equiv \Phi(T, x) \end{aligned}$$

for C we obtain linear algebraic equation, which has solution, which contains convolution formula and after simplification takes the form

$$C = \Phi(T, x) (G(T, x))^{-1} \left(\int_0^T B^2(\tau) d\tau \right)^{-1}.$$

Therefore

$$p(t, x) = B(t)G(t, x) \Phi(T, x) \left(G(T, x) \int_0^T B^2(\tau) d\tau \right)^{-1}. \quad (4)$$

Substituting (4) in (3) we obtain the pair of researched functions $u(t, x)$, $p(t, x)$. Thus the following is true

Theorem 3. *Let $f(t, x) \in C_{t,x}^{1,2}(\Pi)$, $M(t) > 0$, $t \in (0, T)$. Then pair of functions $p(t, x)$, from (4) and $u(t, x)$ from (3), where $p(t, x)$ from (4), is classic solution of (1), (2) problem for continuous and limited initial functions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $x \in \mathbb{R}$.*

A similar problem with a multipoint boundary condition can be solved.

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin : Birkhauser Verlag, 2004, - 390 p.
2. Matiychuk M.I. Parabolic and elliptic problems in Dini spaces : monograph. – Chernivtsi, 2010. – 248 p.
3. Drin I.I., Drin S.S., Drin Y.M., About one problem for equation of fractal diffusion with argument deviation. // Proceedings of the Sixth International Conference on «INFORMATICS AND COMPUTER TECHNICS PROBLEMS» (PICT – 2017). – 5-8 october 2017. Chernivtsi, 2017. – p. 29-31.

On fundamental solution of the Cauchy problem for a class of ultraparabolic Kolmogorov-type equations with block structure

Dron Vitaliy¹, Medynskiy Ihor²

vdron@ukr.net¹, ihor.p.medynskiy@lpnu.ua²

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics¹,
Lviv Polytechnic National University²*

Let n, n_1, n_2 and n_3 be given positive integers such that $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq 1$ and $n = n_1 + n_2 + n_3$. We suppose that spatial variable $x \in \mathbb{R}^n$ consists of three groups of variables $x := (x_1, x_2, x_3)$, where components $x_j := (x_{j1}, \dots, x_{jn_j}) \in \mathbb{R}^{n_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$; $\Pi_H := \{(t, x) | t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, if $H \subset \mathbb{R}$.

Consider the equation

$$Lu(t, x) := (S_B - A(t, x, \partial_{x_1}))u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (1)$$

with

$$S_B := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} \left(\sum_{s=1}^{n_1} b_{sj}^1 x_{1s} \right) \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} \left(\sum_{s=1}^{n_2} b_{sj}^2 x_{2s} \right) \partial_{x_{3j}}, \quad (2)$$

$$A(t, x, \partial_{x_1}) := \sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t, x) \partial_{x_i} \partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n_1} a_i(t, x) \partial_{x_i} + a_0(t, x).$$

The differential expression (2) has the following matrix form

$$S_B = \partial_t - (x, B D_x),$$

where B is a $n \times n$ -matrix which has the structure

$$B := \begin{pmatrix} O & B^1 & O \\ O & O & B^2 \\ O & O & O \end{pmatrix}, \quad (3)$$

B^1, B^2 are matrices which consists of the real numbers $b_{ij}^1, i \in \{1, \dots, n_1\}, j \in \{1, \dots, n_2\}, b_{ij}^2, i \in \{1, \dots, n_2\}, j \in \{1, \dots, n_3\}$ respectively; O are zero-matrices of the corresponding dimensions, (\cdot, \cdot) is the scalar product in \mathbb{R}^n ;

$D_x := \text{col}(\partial_{x_{11}}, \dots, \partial_{x_{1n_1}}, \partial_{x_{21}}, \dots, \partial_{x_{2n_2}}, \partial_{x_{31}}, \dots, \partial_{x_{3n_3}})$.

We suppose the following conditions hold.

A₁. For the matrix (3) in which the blocks B^1 and B^2 we can write in the form $\begin{pmatrix} B_1^1 \\ B_2^1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} B_1^2 \\ B_2^2 \end{pmatrix}$, where B_1^1, B_2^1, B_1^2 and B_2^2 are $n_2 \times n_2$ -, $(n_1 - n_2) \times n_2$ -, $n_3 \times n_3$ - and $(n_2 - n_3) \times n_3$ -matrix respectively, the conditions $\det B_1^i \neq 0, i \in \{1, 2\}$ fulfill.

A₂. There exists a constant $\delta > 0$ such that for each point $(t, x) \in \Pi_{[0, T]}$ and $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ the inequality

$$\text{Re} \sum_{i,j=1}^{n_1} a_{ij}(t, x) \sigma_{1i} \sigma_{1j} \geq \delta \sum_{i=1}^{n_1} \sigma_{1i}^2$$

holds.

The class of the equations (1) which satisfy the conditions \mathbf{A}_1 – \mathbf{A}_2 in the paper [2] is denoted by \mathbf{E}_{22}^B . This class is a generalization of the class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type \mathbf{E}_{22} from the monograph [1]. In the works [5, 2] it was constructed so called L -type fundamental solutions for equations from the class \mathbf{E}_{22}^B , and some their properties were established. The main feature of the research in these works is the establishing of an one-to-one correspondence between the classes \mathbf{E}_{22}^B and \mathbf{E}_{22} .

In our research we build and study the classic fundamental solution of the Cauchy problem for the equation (1). The method uses the results of the papers [3, 4]. Also we apply a special Hölder conditions with respect to spatial variables for the coefficients of the expression $A(t, x, \partial_{x_1})$ (namely, for the functions a_{ij} , a_i , a_0) additionally.

1. Eidelman S. D., Ivashyshen S. D., Kochubei A. N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. — Basel: Birkhäuser, 2004. — 390 p. — Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. — Vol.152.
2. Ivashyshen S.D., Layuk V.V. The fundamental solutions of the Cauchy problem for some degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Ukr. Mat. J. — 2011. — **63** (11), P.1469–1500. (in Ukrainian)
3. Ivashyshen S.D., Medynsky I.P. The classic fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. I // Math. methods and phis.-mech. fields. — 2017. — **60** (3), P.9–31. (in Ukrainian)
4. Ivashyshen S.D., Medynsky I.P. The classic fundamental solution of the Cauchy problem for ultraparabolic Kolmogorov-type equations with two groups of spatial variables of degeneration. II // Math. methods and phis.-mech. fields. — 2017. — **60** (4), P.7–24. (in Ukrainian)
5. Layuk V.V. The fundamental solution of the Cauchy problem for one class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // Nauk. visnyk Chernivetskogo un-tu. Matematika. — Ruta, 2005. — **239**, P.82–85. (in Ukrainian)

On invariant random subgroups and characters of branch groups

Dudko Artem, Grigorchuk Rostislav

adudko@impan.pl, grigorch@math.tamu.edu

Institute of Mathematics of Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland
Texas A&M University, TX, USA

An *invariant random subgroup* (IRS for short) of a countable group G is a Borel probability measure μ on the space $\text{Sub}(G)$ of subgroups of G invariant with respect to conjugation under elements of G . It can be viewed as a natural generalization of a normal subgroup and as a canonical way of constructing measure-preserving actions of G (see e.g. [12], [3], [13]). *Character* on G is a positive-definite function on G constant on conjugacy classes. A character is called *indecomposable* if it is an extreme point in the set of all characters. Characters play important role in representation theory arising naturally as traces of operators of representations (see e.g. [11], [9], [10], [5], [4]). To an IRS μ on a countable group G one can associate in a standard way two characters on G :

$$\begin{aligned}\chi_\mu(g) &= \mu(\{H \in \text{Sub}(G) : gHg^{-1} = H\}), \quad g \in G; \\ \psi_\mu(g) &= \mu(\{H \in \text{Sub}(G) : g \in H\}), \quad g \in G.\end{aligned}$$

Let $\text{IRS}(G)$ ($\text{EIRS}(G)$) stand for the set of invariant (ergodic invariant) random subgroups of G . Let $\text{Char}(G)$ ($\text{IChar}(G)$) stand for the set of characters (indecomposable characters) on G . Consider the two maps $\mathcal{X}, \Psi : \text{EIRS}(G) \rightarrow \text{Char}(G)$ given by

$$\mathcal{X} : \mu \rightarrow \chi_\mu, \quad \text{and} \quad \Psi : \mu \rightarrow \psi_\mu, \quad \mu \in \text{EIRS}(G). \quad (1)$$

Some natural questions about these maps for a particular group G are

- (i) Do \mathcal{X} and Ψ coincide?
- (ii) Is \mathcal{X} or Ψ injective?
- (iii) Is it true that $\mathcal{X}(\text{EIRS}(G))$ or $\Psi(\text{EIRS}(G))$ is a subset of $\text{IChar}(G)$?
- (iv) Is it true that $\mathcal{X}(\text{EIRS}(G))$ or $\Psi(\text{EIRS}(G))$ contains $\text{IChar}(G)$?

In general, these questions were not studied much yet. However, the answers are known for some classes of groups.

For the infinite symmetric group $S(\infty)$ both, indecomposable characters on $S(\infty)$ (see [11], [9], or [10]) and EIRSs of $S(\infty)$ (see [12]) are parameterized by two non-increasing sequences of non-negative numbers $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $\beta = \{\beta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ such that $\sum \alpha_i + \sum \beta_j \leq 1$. However, the maps \mathcal{X} and Ψ do not completely respect the parametrization. Namely, if $\mu_{\alpha, \beta}$ is the EIRS and $\chi_{\alpha, \beta}$ is the indecomposable character corresponding to the sequences α, β , then one has:

$$\mathcal{X}(\mu_{\alpha, \beta}) = \chi_{\alpha \cup \beta, 0^\infty}, \quad \Psi(\mu_{\alpha, \beta}) = \frac{1}{2}(\chi_{\alpha, \beta} + \chi_{\alpha \cup \beta, 0^\infty}).$$

Thus, the map Ψ is injective on $\text{EIRS}(S(\infty))$, the map \mathcal{X} sends $\text{EIRS}(S(\infty))$ inside $\text{IChar}(S(\infty))$, but all other questions from (i)-(iv) have negative answers.

Another example for which the answers to questions (i)-(iv) are known is a certain class of simple approximately finite groups, for which it follows from [5] and [6] that all the answers to (i)-(iv) are positive.

In this work we focus on the case when G is a *weakly branch* (or even *branch*) group acting on a d -regular rooted tree T_d , $d \geq 2$. Branch groups were introduced by the second author in [7] and play important role in many investigations in group theory and around (see [2]). They contain groups of intermediate growth, amenable but not elementary amenable groups, groups with finite commutator width etc. Weakly branch groups is a natural generalization of the class of branch groups and keep many nice properties of branch groups (for instance absence of nontrivial laws, see [1]). Weakly branch groups also play important role in studies in holomorphic dynamics (see [8]) and in the theory of fractals.

In [3] the authors constructed a continuum of EIRS for any weakly branch group G acting on a d -regular rooted tree T_d , $d \geq 2$. Equip the closure \overline{G} with the Haar measure. Given a closed but not open subset (*clonopen*, for short) $C \subset \partial T_d$ let $[C] = \overline{G}C$ be the collection of shifts of C under \overline{G} equipped with the push-forward measure $\lambda_{[C]}$. Both, the pointwise stabilizer and the set stabilizer of shift gC for a randomly chosen $g \in \overline{G}$, are EIRS, which we denote by $\mu_{[C]}^p$ and $\mu_{[C]}$ correspondingly. For simplicity, denote

$$\chi_C = \mathcal{X}(\mu_{[C]}), \quad \chi_C^p = \mathcal{X}(\mu_{[C]}^p), \quad \psi_C = \Psi(\mu_{[C]}), \quad \psi_C^p = \Psi(\mu_{[C]}^p).$$

We obtain a series of results on the above characters and the questions (i)-(iv) for the case of weakly branch and branch groups. Let us start with the formulas for computing these characters.

Lemma 1. *Let $G < \text{Aut}(T_d)$ be a weakly branch group, where $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$. Then for any clonopen subset $C \subset \partial T_d$ and any $g \in G$ one has:*

$$\begin{aligned} \chi_C(g) &= \lambda_{[C]}(\{B \in [C] : \text{St}(B) = \text{St}(gB)\}) \geq \\ \psi_C(g) &= \chi_C^p(g) = \lambda_{[C]}(\{B \in [C] : gB = B\}) \geq \\ \psi_C^p(g) &= \lambda_{[C]}(\{B \in [C] : g|_B = \text{Id}\}). \end{aligned} \tag{2}$$

Using the results of [4] we find sufficient conditions for indecomposability of the character ψ_C . As a corollary we obtain

Theorem 1. *For any branch group G acting on T_d , $d \geq 2$, and any closed set $C \subset \partial T_d$ with empty interior the character ψ_C is indecomposable.*

The above theorem means that Ψ is injective on the set of EIRS $\{\mu_C : C \subset \partial T_d \text{ is clonopen}\}$. In addition, we provide an example, showing that the condition of empty interior cannot be dropped.

Next, we study the characters χ_C^p .

Theorem 2. *Let G be a weakly branch group acting on a d -regular rooted tree $T = T_d$, $d \geq 2$. Then the following is true.*

1. *There exists a continuum \mathfrak{C}_1 of classes $[C], C \in \mathfrak{C}$, such that for any distinct classes $[C_1], [C_2] \in \mathfrak{C}_1$ one has $\mu_{[C_1]} = \mu_{[C_2]}$, and so $\chi_{C_1}^p = \psi_{C_1} = \psi_{C_2} = \chi_{C_2}^p$.*
2. *There exists a continuum \mathfrak{C}_2 of classes $[C], C \in \mathfrak{C}$ such that for any distinct classes $[C_1], [C_2] \in \mathfrak{C}_2$ one has $\chi_{C_1}^p \neq \chi_{C_2}^p$.*

Moreover, the character χ_C^p is indecomposable for every $[C] \in \mathfrak{C}_1 \cup \mathfrak{C}_2$.

The results of Theorem 2 imply that the map \mathcal{X} on $\text{IChar}(G)$ is "highly" non-injective for every weakly branch group G . Finally, concerning the character ψ_C^p , we show

Theorem 3. *For any weakly branch group G acting on a d -regular rooted tree $T = T_d$, $d \geq 2$, for any distinct classes $[C_1], [C_2]$, $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, the characters $\psi_{C_1}^p$ and $\psi_{C_2}^p$ are distinct.*

The latter implies that for every weakly branch group G the map Ψ is injective on the set of EIRS of the form $\mu_{[C]}^p$, $C \subset \partial T$ clonopen. Notice that we do not know any examples of groups G for which Ψ is not injective on $\text{EIRS}(G)$.

Among other examples, we construct a weakly branch group G acting on the binary rooted tree T_2 and a closed subset $C \subset \partial T_2$ with empty interior such that the character $\psi_{\mu_C} = \chi_{\mu_C^p}$ decomposes into an integral of continuum many indecomposable characters. In particular, neither $\mathcal{X}(\text{EIRS}(G))$, nor $\Psi(\text{EIRS}(G))$ needs to be a subset of $\text{IChar}(G)$.

1. M. Abért, Group laws and free subgroups in topological groups, *Bull. London Math. Soc.* 37 (2005), no. 4, 525-534.
2. L. Bartholdi, R. I. Grigorchuk, and Z. Šunić, Branch Groups, *Handbook of Algebra* (North-Holland, Amsterdam, (2003), Vol. 3, pp. 989-1112.
3. F. Bencs and L.M. Tóth, Invariant random subgroups of groups acting on rooted trees, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 374 (2021), pp. 7011-7040
4. A. Dudko and R. Grigorchuk, On diagonal actions of branch groups and corresponding characters, *J. Funct. Anal.* 274 (2018), no. 11, 3033-3055.
5. A. Dudko and K. Medynets, On Characters of Inductive Limits of Symmetric Groups, *Journal of Functional Analysis*, 264 (2013), no.7, 1565-1598.
6. A. Dudko and K. Medynets, On invariant random subgroups of block-diagonal limits of symmetric groups, *Proc. of AMS*, 147 (2019), no. 6, 2481-2494.
7. R. I. Grigorchuk, Just Infinite Branch Groups, *New Horizons in Pro-p Groups* (Birkhauser, Boston, MA, 2000), *Prog. Math.* 184, pp. 121-179.
8. V. Nekrashevych, Self-similar Groups, *Am. Math. Soc.*, Providence, RI, *Math. Surv. Monogr.* 117 (2005).
9. S. Kerov and A. Vershik, Characters and factor representations of the infinite symmetric group, *Soviet Math. Dokl.*, 23 (1981) No.2, 389-392.
10. A. Okounkov, On representations of the infinite symmetric group, *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)* 240, 1997, *Teor. Predst. Din. Sist. Komb. i Algoritm. Metody.* 2, 166-228, 294; translation in *J. Math. Sci. (New York)* 96 (1999), no. 5, 3550-3589.
11. E. Thoma, Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe, *Math. Z.*, 85 (1964), pp.40-61 .
12. A. Vershik, Totally non-free actions and the infinite symmetric group, *Mosc. Math. J.*, 12 (2012), no. 1, 193-212.
13. T. Zheng, On rigid stabilizers and invariant random subgroups of groups of homeomorphisms, <https://arxiv.org/abs/1901.04428>

Linear solutions to the bilateral matrix polynomial equations

Dzhaliuk Nataliia

nataliya.dzhalyuk@gmail.com

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the
NAS of Ukraine*

Consider the bilateral matrix polynomial equation

$$A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda), \quad (1)$$

where $A(\lambda) \in M(n, m, \mathcal{F}[\lambda])$, $B(\lambda) \in M(p, q, \mathcal{F}[\lambda])$ and $C(\lambda) \in M(n, q, \mathcal{F}[\lambda])$ are known matrices over ring of polynomials $\mathcal{F}[\lambda]$, F is a field. $M(n, m, \mathcal{F}[\lambda])$ is the set of $n \times m$ matrices over $\mathcal{F}[\lambda]$. Matrices $X(\lambda) \in M(m, q, \mathcal{F}[\lambda])$ and $Y(\lambda) \in M(n, p, \mathcal{F}[\lambda])$ are unknown and they are called a solution to (1) if they satisfy (1).

Matrix equation (1) is also called the Sylvester matrix polynomial equation and it has many applications in dynamical system theory [1], in control theory [2] and in many other areas. The criterion of solvability to the matrix polynomial equation (1) is established by Roth in [3].

Obviously, if the matrix polynomial equation (1) is solvable, then it has solutions of unbounded above degrees. So, it is important to investigate which solutions of minimal degree this equation has. This problem was solved only in particular cases. In [4], there has been given a necessary and sufficient condition that two regular polynomial matrices $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$ have relatively prime determinants is that the equation (1), where $C(\lambda)$ is a constant matrix, has a unique solution with the degrees of $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ less than the degrees of $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, respectively. In [5], it has been called such solution minimal and established that if in the equation (1) only $A(\lambda)$ or $B(\lambda)$ (not necessarily both) is regular, then there exists a unique minimal solution if and only if determinants of matrices $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$ are relatively prime and $\deg C(\lambda) \leq \deg A(\lambda) + \deg B(\lambda) - 1$. Row and column structure of bounded degrees solutions to the equation (1) with respect to degrees of corresponding invariant factors of matrices $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$ are described in [6]. A criterion for the uniqueness of such solutions is also pointed out.

In [7], two problems of zero-degree solutions to the bilateral matrix polynomial equation (1) are formulated and necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to the problems are established.

The main purpose of this paper is to present the necessary and sufficient conditions for the existence of linear solutions to the matrix equation (1).

Theorem. *Let $r = \max(\deg A(\lambda), \deg B(\lambda))$, where matrices $A(\lambda)$ and $B(\lambda)$ from matrix polynomial equation (1), i.e.,*

$$A(\lambda) = A_r \lambda^r + \dots + A_1 \lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_r \lambda^r + \dots + B_1 \lambda + B_0$$

and $\deg C(\lambda) \leq r + 1$, i.e.,

$$C(\lambda) = C_{r+1} \lambda^{r+1} + C_r \lambda^r + \dots + C_1 \lambda + C_0.$$

Matrix polynomial equation (1) has linear solution, i.e.,

$$X(\lambda) = X_1\lambda + X_0, \quad Y(\lambda) = Y_1\lambda + Y_0$$

if and only if

$$\text{rank} [G] = \text{rank} [\mathbf{c} \quad G],$$

where

$$G = \begin{bmatrix} A_r \otimes I_q & I_n \otimes B_r^\top & 0 & 0 \\ A_r \otimes I_q & A_{r-1} \otimes I_q & I_n \otimes B_{r-1}^\top & I_n \otimes B_r^\top \\ A_{r-1} \otimes I_q & A_{r-2} \otimes I_q & I_n \otimes B_{r-2}^\top & I_n \otimes B_{r-1}^\top \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1 \otimes I_q & A_0 \otimes I_q & I_n \otimes B_0^\top & I_n \otimes B_1^\top \\ A_0 \otimes I_q & I_n \otimes B_0^\top & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{c} = [\mathbf{c}_{r+1} \quad \mathbf{c}_r \quad \dots \quad \mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_0]^\top,$$

$$\mathbf{c}_i = [\mathbf{c}_{i1} \quad \mathbf{c}_{i2} \quad \dots \quad \mathbf{c}_{in}],$$

\mathbf{c}_{ij} is the j -th row of matrix C_i , $i = 0, 1, \dots, r+1$, $j = 1, \dots, n$, I_k is the $k \times k$ identity matrix, the symbol \otimes denotes the Kronecker product, \top denotes the transposition.

1. Kaczorek T. Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – 503 p.
2. Barnett S. Matrices in control theory with applications to linear programming. – London: Van Nostrand Reingold Company, 1971. – 221 p.
3. Roth W. E. The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Am. Math. Soc. – 1952. – 3, No. 3. – P. 392–396.
4. Barnett S. Regular polynomial matrices having relatively prime determinants // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1969. – 65, No. 3. – P. 585–590.
5. Feinstein J., Bar-Ness Y. On the uniqueness of the minimal solution to the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. – 1980. – 310, No. 2. – P. 131–134.
6. Dzhalik N. S., Petrychkovych V. M. Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure // Algebra Discrete Math. – 2019. – 27, No. 2. – P. 243–251.
7. Kaczorek T. Zero-degree solutions to the bilateral polynomial matrix equations // Bull. Polish Acad. Sci. Ser. Techn. Sci. – 1986. – 34, No. 9–10. – P. 547–552.

Numerical solution of biharmonic equations via rank structured matrices

Eidelman Yuli

`eideyu@tauex.tau.ac.il`

Tel-Aviv University

In this paper we propose a novel algorithm for the numerical solution of the Dirichlet problem for the biharmonic one-dimensional in the space variable equation in an interval, involving a potential, as follows.

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^4 u(x) + c(x)u(x) = \phi(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0.$$

Here the function $\phi(x)$ and the potential $c(x)$ are given functions.

We use a high-order finite-difference scheme, based on the Hermitian derivative following the strategy suggested in the paper [1]. For the resolution of the ensuing linear system we apply a new algorithm, leading to an optimal $O(N)$ complexity. This is achieved by an application of the theory of quasiseparable matrices.

This is a joint work with M.Benartzi and D.Fishelov.

1. D.Fishelov, M.Ben-Artzi, J.P.Croisille, Recent advances in the study of a fourth-order compact scheme for the one-dimensional biharmonic equations, *J Sci. Comput*, **53** (2012), 55–79.

Combined numerical methods for the solution of nonautonomous degenerate differential equations with the use of spectral projectors

Filipkowska Maria

maria.filipkowska@fau.de; maria.filipk@gmail.com

Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Germany

B. Verkin ILTPE of NAS of Ukraine, Ukraine

Consider the initial value problem (IVP)

$$\frac{d}{dt}[A(t)x(t)] + B(t)x(t) = f(t, x(t)), \quad (1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (2)$$

where $t \in [t_+, \infty)$, $t_0 \geq t_+ \geq 0$, $A, B \in C([t_+, \infty), L(\mathbb{R}^n))$ and $f \in C([t_+, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. The time-varying operators $A(t)$, $B(t)$ can be degenerate (noninvertible). An implicit differential equation of the form (1) with a degenerate operator $A(t)$ (for some t) is called a nonautonomous (or time-varying) degenerate differential equation (or semilinear differential-algebraic equation). A function $x \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ ($t_1 \leq \infty$) is called a solution of (1) on $[t_0, t_1]$ if $(Ax) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ and $x(t)$ satisfies (1) on $[t_0, t_1]$. If the solution $x(t)$ satisfies the initial condition (2), then it is called a solution of the IVP (1),(2).

In [3], two combined numerical methods for the equation (1), which have the first and second orders of convergence, are obtained. To demonstrate the practical application of the obtained methods and theorems, the numerical and theoretical analyses of mathematical models of the dynamics of electric circuits are carried out. Earlier, numerical methods for autonomous (time-invariant) degenerate DEs were obtained (see [1]).

It is assumed that $\lambda A(t) + B(t)$ is a regular pencil of index not higher than 1 (index 0 or 1). This means that for each $t \geq t_+$ the pencil is regular, and there exist functions $C_1, C_2: [t_+, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ such that the condition

$$\|(\lambda A(t) + B(t))^{-1}\| \leq C_1(t), \quad |\lambda| \geq C_2(t),$$

holds for each $t \in [t_+, \infty)$. Then for each $t \in [t_+, \infty)$ there exist the two pairs of mutually complementary projectors $P_1(t)$, $P_2(t)$ and $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ [4] which generate the decompositions of \mathbb{R}^n into the direct sums of subspaces $\mathbb{R}^n = X_1(t) \dot{+} X_2(t)$ and $\mathbb{R}^n = Y_1(t) \dot{+} Y_2(t)$, where $X_j(t) = P_j(t)\mathbb{R}^n$, $Y_j(t) = Q_j(t)\mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$, such that $A(t)$, $B(t): X_j(t) \rightarrow Y_j(t)$, and the restricted operators $A_j(t) = A(t)|_{X_j(t)}$, $B_j(t) = B(t)|_{X_j(t)}: X_j(t) \rightarrow Y_j(t)$, $j = 1, 2$, are such that $A_2(t) = 0$ and there exist the operators $A_1^{-1}(t)$ (if $X_1(t) \neq \{0\}$) and $B_2^{-1}(t)$ (if $X_2(t) \neq \{0\}$). Using the projectors, for each $t \in [t_+, \infty)$ we obtain the auxiliary operator $G(t) = A(t) + B(t)P_2(t) \in L(\mathbb{R}^n)$ [4].

One of the advantages of the developed numerical methods is the possibility to numerically find the spectral projectors $P_i(t)$, $Q_i(t)$. The algorithm for the calculation of the projectors is given in [3]. Below, the combined method which has the first order of convergence is presented.

Theorem 1 ([3]). *Let the conditions of the theorem [2, Theorem 2.1] or [2, Theorem 2.2] be satisfied, and in addition let the operator*

$$\Phi_{t_*, P_1(t_*)z_*, P_2(t_*)u_*} = \Phi_{t_*, P_1(t_*)z_*}(P_2(t_*)u_*): X_2(t_*) \rightarrow Y_2(t_*),$$

which is defined by [2, (2.2), p.25] or [2, (2.16), p.29] for each (fixed) t_ , $x_{p_1}^*(t_*) = P_1(t_*)z_*$, $x_{p_2}^*(t_*) = P_2(t_*)u_*$, be invertible for each*

$$(t_*, P_1(t_*)z_* + P_2(t_*)u_*) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n.$$

Let $A, B \in C^2([t_0, T], L(\mathbb{R}^n))$, $C_2 \in C^2([t_0, T], (0, \infty))$, $f \in C^1([t_0, T] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ and an initial value x_0 be chosen so that the consistency condition $(t_0, x_0) \in L_{t_+}$ holds.

Then the method: $z_0 = P_1(t_0)x_0, \quad u_0 = P_2(t_0)x_0,$

$$z_{i+1} = \left(I_{\mathbb{R}^n} + h[P_1'(t_i) - G^{-1}(t_i)Q_1(t_i)[A'(t_i) + B(t_i)]] P_1(t_i) \right) z_i + h G^{-1}(t_i)Q_1(t_i)f(t_i, x_i),$$

$$u_{i+1} = u_i - \left[I_{\mathbb{R}^n} - G^{-1}(t_{i+1})Q_2(t_{i+1}) \frac{\partial f}{\partial x}(t_{i+1}, P_1(t_{i+1})z_{i+1} + P_2(t_{i+1})u_i) P_2(t_{i+1}) \right]^{-1} \left[u_i - G^{-1}(t_{i+1})Q_2(t_{i+1}) \left[f(t_{i+1}, P_1(t_{i+1})z_{i+1} + P_2(t_{i+1})u_i) - A'(t_{i+1})P_1(t_{i+1})z_{i+1} \right] \right],$$

$$x_{i+1} = P_1(t_{i+1})z_{i+1} + P_2(t_{i+1})u_{i+1}, \quad t_{i+1} \in \omega_h, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$\omega_h = \{t_i = t_0 + ih, i = 0, \dots, N-1, t_N = t_0 + Nh = T\},$$

which approximates the initial value problem (1), (2) on $[t_0, T]$, is convergent of order 1, that is, $\max_{1 \leq i \leq N} \|x(t_i) - x_i\| = O(h)$, $h \rightarrow 0$ ($\|x(t_0) - x_0\| = 0$), where $x(t)$ is an exact solution of the IVP (1), (2) (x_i is the value of an approximate solution at t_i).

1. Filipkovska, M.S. Two combined methods for the global solution of implicit semilinear differential equations with the use of spectral projectors and Taylor expansions // Int. J. of Computing Science and Mathematics. – 2022. – 15, № 1. – P. 1–29. <http://dx.doi.org/10.1504/IJCSM.2019.10025236>
2. Filipkovskaya M.S. Global solvability of time-varying semilinear differential-algebraic equations, boundedness and stability of their solutions. I // Differential Equations.– 2021. – 57, № 1. – P. 19–40.
3. Filipkovska M.S. Combined numerical methods for solving time-varying semilinear differential-algebraic equations with the use of spectral projectors and recalculation. – 2022.
4. Rutkas A.G., Vlasenko L.A. Existence of solutions of degenerate nonlinear differential operator equations. Nonlinear Oscillations. – 2001. – 4, № 2. – P. 252–263.

Linear differential operators of infinite order in the module of copolynomials

Gefter S., Piven' A.

gefter@karazin.ua, aleksei.piven@karazin.ua

V. N. Karazin Kharkiv National University

Let K be an arbitrary integral domain with identity and let $K[x]$ be the ring of polynomials with coefficients in K . By a *copolynomial (formal generalized function) over the ring K* we mean a K -linear mapping $T : K[x] \rightarrow K$. The module of copolynomials is denoted by $K[x]'$. If $T \in K[x]'$ and $p \in K[x]$, then the result of application $T \in K[x]'$ to $p \in K[x]$ is written as (T, p) . The derivative T' of a copolynomial $T \in K[x]'$ is defined in the same way as in the classical theory of generalized functions: $(T', p) = -(T, p')$, $p \in K[x]$. An important example of a copolynomial is the δ -function which is defined by $(\delta, p) = p(0)$, $p \in K[x]$.

The convergence of the sequence $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ to T in $K[x]'$ means that for every polynomial $p \in K[x]$ there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ such that

$$(T_n, p) = (T, p), \quad n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$$

We consider the differential operator $\mathcal{F} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{d^j}{dx^j}$ of infinite order with coefficients $a_j \in K$ which acts on a copolynomial $T \in K[x]'$ by the following rule: if $p \in K[x]$ и $m = \deg p$, then $(\mathcal{F}T, p) = \sum_{j=0}^m a_j (T^{(j)}, p)$.

Lemma 1. *The differential operator $\mathcal{F} : K[x]' \rightarrow K[x]'$ is a linear continuous mapping.*

We present the following existence and uniqueness theorem for a differential equation of infinite order in the module of copolynomials.

Theorem 1. *Let $T \in K[x]'$ and let a_0 be an invertible element of K . Then the differential operator $\mathcal{F} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{d^j}{dx^j} : K[x]' \rightarrow K[x]'$ is bijective and therefore the differential equation in $K[x]'$*

$$\mathcal{F}u = T \tag{1}$$

has a unique solution $u = \mathcal{F}^{-1}(T) = a_0^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}^n T^{(n)}$, where

$$\mathcal{G} = - \sum_{n=1}^{\infty} a_0^{-1} a_n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}.$$

Note that if Equation (1) has a unique solution for any copolynomial $T \in K[x]'$ then a_0 is an invertible element of the ring K .

Theorem 1 implies following corollaries for first order and second order differential equations.

Corollary 1. *Let a be an invertible element of the ring K and $b \in K$. Then for any copolynomial $T \in K[x]'$ there exists a unique solution $w \in K[x]'$ of the equation*

$$bw' + aw = T.$$

This solution has the form

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a^{-1}b)^n a^{-1} T^{(n)},$$

where the series converges in the topology on $K[x]'$.

Corollary 2. Let a be an invertible element of the ring K and $b, c \in K$. Then for any copolynomial $T \in K[x]'$ there exists a unique solution $w \in K[x]'$ of the equation

$$cu'' + bu' + au = T.$$

This solution has the form

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{n-j} C_{n-j}^j a^j b^{n-1} c^j T^{(n)},$$

where the series converges in the topology on $K[x]'$.

Corollary 3. Let a_0 be an invertible element of K . Then the differential equation $\mathcal{F}u = \delta$ has a unique solution $\mathcal{E} = \mathcal{F}^{-1}(\delta)$.

The copolynomial \mathcal{E} is called the *fundamental solution of the operator \mathcal{F}* .

The convolution $T * p$ of a copolynomial $T \in K[x]'$ and a polynomial $p \in K[x]$ is defined by

$$(T * p)(x) = (T(y), p(x - y)) = \sum_{k=0}^m (-1)^k (T, y^k) \frac{p^{(k)}(x)}{k!},$$

where $m = \text{deg} p$. Therefore $T * p \in K[x]$.

The convolution $T_1 * T_2$ of copolynomials $T_1, T_2 \in K[x]'$ is defined as follows: if $p \in K[x]$ and $p(x) = \sum_{n=0}^m \frac{p^{(n)}(0)}{n!} x^n$, then

$$(T_1 * T_2, p) = (T_1 \otimes T_2, p(x + y)) = \sum_{n=0}^m \left(T_1(x), \frac{p^{(n)}(x)}{n!} \right) (T_2(y), y^n)$$

The following theorem shows that any solution of Equation (1) is represented as the convolution of the fundamental solution \mathcal{E} of the differential operator \mathcal{F} and the right-hand side T .

Theorem 2. Assume that assumptions of Theorem 1 hold. Then the unique solution of the operator \mathcal{F} has the form $u = \mathcal{E} * T$.

Let $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) t^n$, $u_n(x) \in K[x]'$ be a formal power series, i.e. $u(t, x) \in K[x]'[[t]]$. Define the partial derivatives

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} n u_n(x) t^{n-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) t^n.$$

The action of the differential operator $\mathcal{F} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{d^j}{dx^j}$, $a_j \in K$ on a formal power series $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n$ is defined by

$$(\mathcal{F}u)(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{F}u_n)(x)t^n.$$

Denote by $(u(t, x), p(x))$ the action of $u(t, x) \in K[x]'[[t]]$ on $p(x) \in K[x]$, which is defined by:

$$(u(t, x), p(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n(x), p(x))t^n \in K[[t]].$$

Let $u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)t^n \in K[x]'[[t]]$. The convolution of $T \in K[x]'$ and $u(t, x)$ is defined by the coefficientwise action:

$$(T * u)(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (T * u_n(x))t^n \in K[x]'[[t]].$$

Consider the following Cauchy problem in the module $K[x]'[[t]]$:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = (\mathcal{F}u)(t, x), \quad (2)$$

$$u(0, x) = Q(x) \in K[x]'. \quad (3)$$

A ring K is called a torsion-free \mathbb{Z} -module, if the equality $nx = 0$ for some $n \in \mathbb{N}$ and $x \in K$ implies $x = 0$.

Theorem 3. *Assume that the one of the following two conditions is fulfilled:*

1. *The ring K is a torsion-free \mathbb{Z} -module and $a_0 = 0$.*
2. *The ring K contains the field of rational numbers \mathbb{Q} .*

Then the Cauchy problem (2), (3) has a unique solution in the module $K[x]'[[t]]$. This solution has the form

$$u(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{F}^n Q}{n!} t^n.$$

Corollary 4. *Assume that the Condition of Theorem 3 are fulfilled. Then the Cauchy problem*

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = (\mathcal{F}u)(t, x), \quad u(0, x) = \delta(x)$$

has a unique solution in the module $K[x]'[[t]]$. This solutions has the form

$$\mathcal{E}_C(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathcal{F}^n \delta)(x)}{n!} t^n. \quad (4)$$

The formal power series $\mathcal{E}_C(t, x) \in K[x]'[[t]]$ defined by (4) is called the *fundamental solution of the Cauchy problem* (2), (3). The following theorem shows that the solution of the Cauchy problem (2), (3) is represented as the convolution of the fundamental solution $\mathcal{E}_C(t, x)$ and the initial condition Q .

Theorem 4. *Assume that assumptions of Corollary 4 hold. Then a unique solution of the Cauchy problem (2), (3) can be represented in the form*

$$u(t, x) = \mathcal{E}_C(t, x) * Q.$$

This work was supported by the Akhiezer Foundation.

1. S.L. Gefter, A.L. Piven', Linear Partial Differential Equations in Module of Formal Generalized Functions over Commutative Ring // J. Math. Sci. – 2021. – 257, № 5. – P. 579–596.
2. S.L. Gefter, A.L. Piven', Implicit Linear Differential-Difference Equations in the Module of Formal Generalized Functions over a Commutative Ring // J. Math. Sci. – 2021. – 255, № 4. – P. 409–422.
3. S.L. Hefter, O.L. Piven', Infinite-Order Differential Operators in the Module of Formal Generalized Functions and in a Ring of Formal Power Series // Ukr. Math. J.– 2022. – 74, № 6. – P. 896–915.

On solutions of the $(n + 1)$ -times integrated Cauchy problem

Gorbachuk Volodymyr

v.m.horbach@gmail.com

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv, Ukraine

Let A be a closed operator on a Banach space X with norm $\|\cdot\|$, and $0 < \tau < \infty$. We consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} u & \in C([0, \tau]; \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, \tau], X), \\ u'(t) & = Au(t), \quad t \in [0, \tau], \\ u(0) & = x, \quad x \in X, \end{cases} \quad C_0[\tau]$$

and, in accordance with [1], the $(n + 1)$ -times integrated Cauchy problem

$$\begin{cases} v & \in C([0, \tau]; \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0, \tau], X), \\ v'(t) & = Av(t) + \frac{t^n}{n!}x, \quad t \in [0, \tau], n \in \mathbb{N}, \\ v(0) & = 0. \end{cases} \quad C_{n+1}[\tau]$$

By definition, the problem $C_n[\tau]$, $n \in \mathbb{N}_0$, is well-posed if for any $x \in X$ it has a unique solution. It is not difficult to verify that the problem $C_1[\tau]$ is well-posed if and only if A is the generator of a C_0 -semigroup.

Now set

$$\Phi_n(\lambda, t) = \frac{1}{\lambda^{n+1}} \left(e^{\lambda t} - \sum_{k=0}^n \frac{(t\lambda)^k}{k!} \right), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

For a fixed λ (a fixed t), the function $\Phi_n(\lambda, t)$ is entire with respect to t (to λ); $\frac{d\Phi_n(\lambda, t)}{dt} = \Phi_{n-1}(\lambda, t)$; $\frac{d^k \Phi_n(\lambda, t)}{dt^k} = \lambda^k \Phi_n(\lambda, t) + \frac{\lambda^{k-1} t^n}{n!} + \dots + \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!}$, $k = 0, 1, \dots, n$; $\frac{d^k \Phi_n(\lambda, 0)}{dt^k} = 0$, $k = 0, 1, \dots, n$; $\frac{d^{n+1} \Phi_n(\lambda, 0)}{dt^{n+1}} = 1$.

In the case, where the operator A is normal on a Hilbert space, the following assertion holds.

Theorem 1. *Suppose that the operator A is normal on a Hilbert space $X = \mathfrak{H}$ with scalar product (\cdot, \cdot) . In order that a vector-valued function $v(t)$ be a solution of $C_{n+1}[\tau]$, it is necessary and sufficient that*

$$\int_{\sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda, \tau)|^2 d(E_\lambda x, x) < \infty;$$

the solution can be represented in the form

$$v(t) = \int_{\sigma(A)} \Phi_n(\lambda, t) x dE_\lambda,$$

(E_λ is the resolution of identity of A and $\sigma(A)$ is its spectrum). The well-posedness of $C_{n+1}[\tau]$ is equivalent to the relation

$$\sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\Phi_{n-1}(\lambda, t)| < \infty, \quad t \in [0, \tau].$$

Return now to the case of an arbitrary closed operator A on a Banach space X . We say that a vector $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^k)$ is of finite order if

$$\exists \gamma \in \mathbb{R} : \|A^k x\| \leq k^{k\gamma}$$

($k \in \mathbb{N}$ is sufficiently large). The infimum $\beta = \beta(x)$ of such γ we call the order of x . By the type of a vector x of β -order we mean the value

$$\alpha = \alpha(x) = \inf\{\delta > 0 : \|A^k x\| \leq \delta^k k^{k\beta}, \quad k > k_0(\delta)\}.$$

We are interested in the conditions on x , under which the problem $C_{n+1}[\tau]$ has a solution analytic in a neighbourhood of 0 as well as the conditions under which this solution admits the extension to an entire vector-valued function of finite order ρ and finite type σ . Recall that an entire vector-valued function $y(z)$ is of order ρ if

$$\forall \varepsilon > 0 \exists c_\varepsilon > 0 : |y(z)| \leq c_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho}.$$

Theorem 2. *The problem $C_{n+1}[\tau]$ has a solution analytic in a neighbourhood of 0 if and only if $\beta(x) \leq 1$. In order this solution admit the extension to an entire vector-valued function, it is necessary and sufficient that $\beta(x) < 1$ or $\beta(x) = 1, \alpha(x) = 0$. The entire solution is of order ρ and type σ if and only if the vector x has the order β and the type α related to ρ and σ in the following way:*

$$\rho = (1 - \beta)^{-1}, \quad \sigma = (\rho\varepsilon)^{-1}(\alpha\varepsilon)^\rho.$$

In the case where $\beta(x) \leq 1$, the solution $v(t)$ is represented in the form

$$v(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} t^k A^{k-(n+1)} x.$$

Assume now that $C_{n+1}[\tau]$ is well-posed, and denote by $S^n(A)$ the set of its solutions when x runs over the whole space X , and let $T_\rho^n(A)$ be the set of all the solutions which admit an extension to entire vector-valued functions of order $\rho < \infty$. We give the criteria for $T_\rho^n(A)$ to be dense in $S^n(A)$.

The results mentioned above are announced in [2].

1. Arendt W., El-Mennaoui O., Keyantuo V. Local integrated semigroups: evolution with jumps of regularity // J. Math. Anal. Appl. – 1994. – 186. – P. 572–595.
2. Gorbachuk V.M. On the solvability of $(n+1)$ -times integrable Cauchy problem in the class of analytic vector-valued functions // "Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine". – 2002. – № 6. – P. 7–10.

On Groups of Isometries and Dilations of Local Fields and Their Actions on Regular Trees

Grigorchuk Rostislav, Savchuk Dmytro

Recall that a discrete valuation v on a commutative field F is a homomorphism from the multiplicative group F^* onto \mathbb{Z} satisfying $v(a + b) \geq \inf\{v(a), v(b)\}$ for all $a, b \in F$, taking into account the convention $v(0) = \infty$. Let $\mathcal{O} = \{a \in F : v(a) \geq 0\}$ be the ring of integers of F and \mathfrak{m} be the maximal ideal in \mathcal{O} . Then F is called a (non-archimedean) local field if

- (i) the cardinality q of the residue field \mathcal{O}/\mathfrak{m} is finite,
- (ii) F is complete when equipped with the metric $\theta(a, b) = q^{-v(a-b)}$.

Examples of local fields include the field \mathbb{Q}_p of p -adic numbers and its finite extensions and the field of formal Laurent series $F_q((t))$ over a field F_q of finite characteristic.

Each element $\pi \in \mathfrak{m}$ with $v(\pi) = 1$ generates \mathfrak{m} as an ideal in \mathcal{O} . Let $S \subset F$ be the set of representatives of the residue field such that $0 \in S$. Then each element $a \in F^*$ can be uniquely written as a formal Laurent series

$$a = \sum_{i=n}^{\infty} s_i \pi^i, s_n \neq 0, \tag{1}$$

where $n = v(a) \in \mathbb{Z}$. This identification can be used to identify any local field F as a metric space with metric θ with the punctured boundary $\partial_\omega \tilde{T}_{q+1} = \partial_\omega \tilde{T}_{q+1} - \omega$ of the $(q+1)$ -regular tree \tilde{T}_{q+1} for a fixed end ω of the tree, equipped with a corresponding ultrametric. Under this identification the ring of integers \mathcal{O} is identified with the boundary of a rooted tree T_q that corresponds to the series of the form (1) with $n = v(a) \geq 0$ (i.e., with no negative powers of π). We refer the reader to [7, 2] for details. This tree is sometimes called Serre's tree and is a particular case of a Bruhat-Tits building [8]. The affine group $\text{Aff}(F)$, which is a subgroup of $\text{GL}(2, F)$, acts on \tilde{T}_{d+1} and is isomorphic to a closed subgroup of $\text{Aut}(\tilde{T}_{d+1})$.

We start from an (folklore type) observation connecting the groups of isometries and dilations of local fields and their rings of integers with the automorphism groups of trees.

Theorem 1. *Let F be a local field with the ring of integers \mathcal{O} and the residue field of size q . Then*

- (i) *the group $\text{Isom}(\mathcal{O})$ of isometries of \mathcal{O} is isomorphic to the group $\text{Aut}(T_q)$ of automorphisms of T_q .*
- (ii) *the group $\text{Isom}(F)$ of isometries of F is isomorphic to the group $\text{Aut}_0(\tilde{T}_{q+1})_\omega$ consisting of automorphisms of \tilde{T}_{q+1} that fix an end ω pointwise (fixing the vertices in ω).*
- (iii) *the group $\mathcal{D}(F)$ of dilations of F is isomorphic to the group $\text{Aut}(\tilde{T}_{q+1})_\omega$ consisting of automorphisms of \tilde{T}_{q+1} that fix an end ω as a point of the boundary of \tilde{T}_{q+1} (but possibly moving the vertices in ω along ω).*

We use the above result to show that the groups $\text{Isom}(\mathcal{O})$, $\text{Isom}(F)$, and $\mathcal{D}(F)$ contain abstract subgroups with unusual and very different from linear groups

properties. We construct examples of amenable totally disconnected locally compact (TDLC) groups coming from the actions of self-similar groups on d -regular rooted tree T_d , $d \geq 2$. Such groups are built as the closures of embeddings of the HNN extensions of the *liftable self-similar groups* that we introduce here, into the group of automorphisms (isometries, when viewed as a metric space) of \tilde{T}_{d+1} . Obtained groups belong to the class of *scale groups*, that are closed subgroups of the group of automorphisms of \tilde{T}_{d+1} that fix an end of the tree and that are vertex-transitive. These groups play an important role in theory of TDLC groups [1, 11]. We prove the following embedding result.

Theorem 2. *Let G be a liftable group acting on T_d and $\sigma: G \rightarrow \text{St}_G(i)$ be the corresponding lifting. Then the ascending HNN extension \tilde{G} of G by σ*

$$\tilde{G} = \langle G, t \mid \text{relations in } G, tgt^{-1} = \sigma(g) \text{ for all } g \in G \rangle$$

embeds into the group $\text{Aut}(\tilde{T}_{d+1})_\omega$ of automorphisms of \tilde{T}_{d+1} that fix a selected end ω of \tilde{T}_{d+1} (and so in the case when $d = q$ is a power of a prime, in the group $\mathcal{D}(F)$ of dilations of a local field F). Moreover, if G acts transitively on the first level of T_d , then \tilde{G} acts transitively on the set of vertices of \tilde{T}_{d+1} and the closure of \tilde{G} in $\text{Aut}(\tilde{T}_{d+1})_\omega$ is a scale group.

There are two sources of examples when this theorem is applicable. The first one is the class of self-similar groups acting essentially freely on the boundary of rooted tree. It includes such groups as the lamplighter group $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$, Baumslag-Solitar groups $BS(1, 3)$ and $BS(1, -3)$, realizations of free groups and the free products of cyclic groups as self-similar groups [9, 10, 6]. All such groups in the class of groups generated by 3-state automata over 2-letter alphabet are classified in [3]. The second source of examples consists of groups of branch type admitting finite L -presentations. This class includes the first Grigorchuk group \mathcal{G} , Gupta-Sidki 3-group [5], Basilica group [4], etc. As one of the main applications of Theorem 2 we establish the following embedding result.

Theorem 3. *The finitely presented Grigorchuk group $\tilde{\mathcal{G}}$*

$$\tilde{\mathcal{G}} = \langle a, b, c, d, t \mid a^2, b^2, c^2, d^2, bcd, (ad)^4, (adacac)^4, tst^{-1}\sigma(s)^{-1}, s \in \{a, b, c, d\} \rangle$$

that is a finitely presented amenable, but not elementary amenable group containing a subgroup of intermediate growth, embeds into $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_2)$. Moreover, when $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_2)$ is identified with $\text{Aut}(\tilde{T}_3)_\omega$, the image of this embedding acts 2-transitively on \tilde{T}_3 and its closure is a scale group acting 2-transitively on the punctured boundary $\partial_\omega \tilde{T}_3$ of \tilde{T}_3 .

1. Pierre-Emmanuel Caprace and George A. Willis. A totally disconnected invitation to locally compact groups. Preprint: arxiv:2110.05991, 2021.
2. D. I. Cartwright, V. A. Kaimanovich, and W. Woess. Random walks on the affine group of local fields and of homogeneous trees. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 44(4):1243-1288, 1994.

3. Rostislav Grigorchuk and Dmytro Savchuk. Self-similar groups acting essentially freely on the boundary of the binary rooted tree. In Group theory, combinatorics, and computing, volume 611 of *Contemp. Math.*, pages 9-48. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
4. Rostislav I. Grigorchuk and Andrzej Zuk. On a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton. *Internat. J. Algebra Comput.*, 12(1-2):223-246, 2002.
5. Narain Gupta and Said Sidki. On the Burnside problem for periodic groups. *Math. Z.*, 182(3):385-388, 1983.
6. Dmytro Savchuk and Yaroslav Vorobets. Automata generating free products of groups of order 2. *J. Algebra*, 336(1):53-66, 2011.
7. Jean-Pierre Serre. *Local fields*, volume 67 of *Graduate Texts in Mathematics*. SpringerVerlag, New York-Berlin, 1979. Translated from the French by Marvin Jay Greenberg.
8. Jean-Pierre Serre. *Trees*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
9. Mariya Vorobets and Yaroslav Vorobets. On a free group of transformations defined by an automaton. *Geom. Dedicata*, 124:237-249, 2007.
10. Mariya Vorobets and Yaroslav Vorobets. On a series of finite automata defining free transformation groups. *Groups Geom. Dyn.*, 4(2):377-405, 2010.
11. George Willis. Scale groups. arxiv:2008.05220, 2022.

Coefficient inverse problem for parabolic equation with strong power degeneration

Huzyk Nadiia

hryntsiv@ukr.net

Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy

In a domain $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ the coefficient inverse problem of determining the functions $b_1 = b_1(t), b_2 = b_2(t)$ in the degenerate parabolic equation is considered:

$$w_t = a(t)t^\beta w_{xx} + (b_1(t)x + b_2(t))w_x + c(x, t)w + f(x, t), \quad (1)$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$w_x(0, t) = \mu_1(t), \quad w_x(l, t) = \mu_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

$$\int_0^l w(x, t)dx = \mu_3(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$\int_0^l xw(x, t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5)$$

It is known that $a(t) > 0, t \in [0, T]$ and the degeneration of the equation is caused by the power function t^β , where $\beta \geq 1$.

Using the apparatus of the Green functions for the initial-boundary value problems for the parabolic equation, the Schauder fixed point theorem and properties of the solutions of the homogeneous integral Volterra equations we obtain the following result.

Theorem. *Suppose that the assumptions*

A1) $\varphi \in C^3[0, l]$, $a \in C[0, T]$, $c, f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $\mu_i \in C^1[0, T], i = \{1, 2, 3, 4\}$;

A2) $a(t) > 0, t \in [0, T]$, $\varphi'(x) > 0, x \in [0, l]$;

A3) $|f(x, t)| + |f_x(x, t)| \leq A_1 t^\gamma, |c(x, t)| + |c_x(x, t)| \leq A_2 t^\gamma, (x, t) \in \overline{Q}_T, |\mu'_3(t)| \leq A_3 t^\gamma, |\mu'_4(t)| \leq A_4 t^\gamma, t \in [0, T]$, where $\gamma > \frac{\beta-1}{2}$ and $A_i, i = 1, 2, 3, 4$ are arbitrary positive constants;

A4) $\mu_1(0) = \varphi'(0), \mu_2(0) = \varphi'(l), \int_0^l \varphi(x)dx = \mu_3(0), \int_0^l x\varphi(x)dx = \mu_4(0)$

hold. Then there exists the unique local solution $(b_1, b_2, w) \in (C[0, T_0])^2 \times C^{2,1}(Q_{T_0}) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_{T_0})$, $|b_1(t)| \leq M_1 t^\eta, |b_2(t)| \leq M_2 t^\eta$ to the problem (1)-(5), where $\eta = \min\{\gamma, \beta\}$ and M_1, M_2 are the positive constants defined by the input data.

Characterization of compact subspaces of the space of separately continuous functions with the cross-uniform topology

Ivasiuk Roman, Maslyuchenko Oleksandr

ivasiuk.roman@chnu.edu.ua, ovmasl@gmail.com

*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
University of Silesia in Katowice*

Let X and Y be a topological space and Z be a metric space. The space $S(X \times Y, Z)$ of separately continuous function $f : X \times Y \rightarrow Z$ we always endows by the *cross-uniform topology*. This topology is generated by the base which consists of the sets

$$W_{E,\varepsilon}(f_0) = \left\{ f \in S(X \times Y, Z) : |f(p) - f_0(p)|_Z < \varepsilon \text{ for any } p \in \text{cr}E \right\},$$

where E is a finite subset of $X \times Y$,

$$\text{cr}E = (X \times \text{pr}_Y(E)) \cup (\text{pr}_X(E) \times Y)$$

is the *cross* of the set E , $\varepsilon > 0$ and $f_0 \in S(X \times Y)$. This topology was introduced in [1] for the space $S = S([0; 1]^2, \mathbb{R})$ and called there by *the topology of the sectionally uniform convergence*. In [1] it was proved only that S is a separable non-metrizable complete topological vector space, and the authors asked about the other properties of S . In [2, 3, 4] the authors proved that $S(X \times Y)$ is a meager, compleat, barreled and bornological topological vector space for any compacta X and Y without isolated points.

Let $w(X)$ denote the weight of a topological space X and let $c(X)$ denote the cellularity of X . *The sharp cellularity* is

$$c^\sharp(X) = \sup \left\{ |\mathcal{U}|^+ : \mathcal{U} \text{ is a disjoint family of open sets in } X \right\},$$

where $|A|$ means the cardinality of a set A and \mathfrak{m}^+ means the least cardinal number which is greater than the cardinal number \mathfrak{m} . In [5] was announced the following result.

Theorem 1. *Let X, Y be infinity compacta and K be a compact. Then K embeds into $S(X \times Y)$ if and only if $w(K) < \min\{c^\sharp(X), c^\sharp(Y)\}$.*

Now we pass to the generalization of this result to the space $S(X \times Y, Z)$. Recall that a compact space K calls an Eberlein compact if it is homeomorphic to some subspace of $C_p(X)$ for some compact space X . We start from the following observation.

Theorem 2. *Let X be a compact space, Y be a separable metrizable space and K be a compact subspace of $C_p(X, Y)$. Then K is an Eberlein compact.*

This result allows to modify the proof of Theorem 1 and obtain the following.

Theorem 3. *Let X, Y be compacta, Z be a separable metric space and K be a compact space which embeds into $S(X \times Y, Z)$ Therefore, the following inequality holds: $w(K) < \min\{c^\sharp(X), c^\sharp(Y)\}$.*

And now we obtain the following generalization of Theorem 1.

Theorem 4. *Let X, Y be infinity compacta, Z be a separable metric space which contains a homeomorphic copy of \mathbb{R} and K be a compact. Then K embeds into $S(X \times Y, Z)$ if and only if $w(K) < \min\{c^\#(X), c^\#(Y)\}$.*

1. Voloshyn H.A., Maslyuchenko V.K. *The topologization of the space of separately continuous functions*, Carpathian Mathematical Publications 2013, 5(2), 199–207.
2. H. A. Voloshyn, V. K. Maslyuchenko, O. V. Maslyuchenko, *Embedding of the space of separately continuous functions into the product of Banach spaces and its barrelledness*, Mathematical Bulletin of Shevchenko Scientific Society, **11** (2014), 36-50.
3. H. A. Voloshyn, V. K. Maslyuchenko, O. V. Maslyuchenko, *The bornologicity of the space of separately continuous functions*, Mathematical Bulletin of Taras Shevchenko Scientific Society, **12** (2015), 61-67.
4. H. A. Voloshyn, V. K. Maslyuchenko, O. V. Maslyuchenko, *On Baireness of the space of separately continuous function*. Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine, 12 (2015) No. 3, 78-96.
5. Ivasiuk R., Maslyuchenko O., Compact subspaces of the space of separately continuous functions with the cross-uniform topology and the sharp cellularity// Report of Meeting. The Twenty-second Debrecen–Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities Hajdúszoboszló (Hungary), February 1–4, 2023. P.9-10. Annales Mathematicae Silesianae. 2023. Retrieved from <https://journals.us.edu.pl/index.php/AMSIL/article/view/15621> DOI: 10.2478/amsil-2023-0006

Fractal analysis of the Guthrie-Nymann's set

Karvatskyi Dmytro

karvatsky@imath.kiev.ua

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine

We study properties of the set

$$X = \left\{ x \mid x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4^n}, \alpha_n \in \{0, 2, 3, 5\} \right\},$$

which is the set of subsums for the Guthrie-Nymann's series

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + \dots + \frac{3}{4^n} + \frac{2}{4^n} + \dots$$

Such set contains the interval $[3/4, 1]$, but it is not a finite union of closed intervals [2]. In addition, the set X combines non-trivial properties of a nowhere dense set and closed intervals. Following [3], because of its topological structure, one can call this set a Cantorval (or M-Cantorval).

A Cantorval is one of three possible topological type of the set of subsums for a convergent positive series. However, Cantorvals also naturally appear as the product

$$C_1 \oplus C_2 = \{x_1 + x_2; x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$$

of the arithmetic sum for two Cantor sets.

Every Cantorval is homeomorphic to the set K , which is defined as follows

$$K \equiv C \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n-1} \equiv [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{2n},$$

where C is the Cantor ternary set, G_k is the union of the 2^{n-1} open middle thirds which are removed from $[0, 1]$ at the n -th step in the construction of C . From it follows that Guthrie-Nymann's Cantorval X or any arbitrary Cantorval can be represented as a union of intervals and some Cantor set. Next we define the set X_I as the set of all possible intervals contained in X . In addition, we define the set X_C as the Cantor-type part of X i.e $X_C = X \setminus X_I$.

In the paper [1] were described topological and metric properties of the set X . In particular, authors proved that X contains closed intervals having some special form and calculated the Lebesgue measure for the set X_I . The computation based on the following important structural properties of X :

- The interval $[\frac{2}{3}, 1]$ is included in the Cantorval X .
- The set $X \setminus [\frac{2}{3}, 1] \subset X$ is the union of pairwise disjoint affine copies of X . In particular, this union includes two isometric copies of $H_n = \frac{1}{4^n} \cdot X$, for every $n > 0$.
- The subset $X \setminus ((\frac{2}{3}, 1) \cup (\frac{1}{6}, \frac{1}{4}) \cup (\frac{17}{12}, \frac{3}{2})) \subset X$ is the union of six pairwise disjoint affine copies of $D = [0, \frac{1}{6}] \cap X$.

Let's recall that Hausdorff dimension for a set $E \subset R^n$ may be defined as

$$\dim_H E = \inf\{s \geq 0 : \text{for all } \epsilon > 0 \text{ there exist a cover } \{U_i\} \text{ of } E \\ \text{such that } \sum |U_i|^s \leq \epsilon\}.$$

As the Cantorval X has positive Lebesgue measure, its Hausdorff dimension equals to 1. However, there are no any results on fractal dimension of the Cantor set X_C .

In the talk we shall describe structural properties of the set X_C as well as calculate its fractal dimension. The set X_C has complicated self-similar structure, which does not satisfy open cover condition. The main result of our research may be formulated in the following theorem.

Theorem. *The set X of subsums for the Guthrie-Nymann's series can be represented as*

$$X \equiv X_I \cup X_C,$$

where X_I is an infinity union of closed intervals having Lebesgue measure equals to 1, X_C is a Cantor set with zero Lebesgue measure and fractional Hausdorff dimension $\dim_H X_C = \log_4 3$.

In this context, naturally appear the following questions:

- Is it possible to represent an arbitrary Cantorval T , which is the set of subsums for a convergent positive series, as a union of closed intervals T_I and some Cantor set T_C with zero Lebesgue measure? In other words, is the Lebesgue measure for a random Cantorval concentrated only on its intervals as for the case X ?
- Is it possible for the set T_C to be a superfractal set ($\dim_H T_C = 1$) or anomalyfractal set ($\dim_H T_C = 0$)?
- Can we construct a general technique for calculation of the Hausdorff dimension for Cantor-type part of an arbitrary Cantorval?

1. Bielas W., Plewik S., Walczyńska M. On the center of distances // European Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 4. – P. 687-698.
2. Guthrie J. A., Nymann J. E. The topological structure of the set of subsums of an infinite series // Colloq. Math. – 1988. – Vol. 55, № 2. – P. 323-327.
3. Mendes P., Oliveira F. On the topological structure of the arithmetic sum of two cantor sets // Nonlinearity. – 1994. – Vol. 7, № 2. – P. 329-343.

Existence and stability of cycles in parabolic systems with small diffusion

Klevchuk Ivan, Hrytchuk Mykola

i.klevchuk@chnu.edu.ua

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

The existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument were considered in [6]. The existence and stability of an arbitrarily large finite number of cycles for the equation of spin combustion with delay were considered in [7]. We study the existence and stability of an arbitrarily large finite number of cycles for a parabolic system with delay and weak diffusion. Similar problems for partial differential equations were studied in numerous works (see, e.g., [1 – 8]).

1. Traveling waves for parabolic equations with weak diffusion. Consider a system

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= \varepsilon\gamma \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \varepsilon\delta \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \omega_0 u_2 + \varepsilon(\alpha u_1 - \beta u_2) + (d_0 u_1 - c_0 u_2)(u_1^2 + u_2^2), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= \varepsilon\gamma \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon\delta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \omega_0 u_1 + \varepsilon(\alpha u_2 + \beta u_1) + (d_0 u_2 + c_0 u_1)(u_1^2 + u_2^2)\end{aligned}\quad (1)$$

with periodic condition

$$u_1(t, x + 2\pi) = u_1(t, x), \quad u_2(t, x + 2\pi) = u_2(t, x), \quad (2)$$

where ε is a small positive parameter, $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$.

Passing to the complex variables $u = u_1 + iu_2$ and $\bar{u} = u_1 - iu_2$, we arrive at the equation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega_0 u + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + i\beta)u \right] + (d_0 + ic_0)u^2 \bar{u}. \quad (3)$$

We investigate the existence and stability of the wave solutions of problem (1), (2). The solution of equation (3) is sought in the form of traveling wave $u = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, where the function $\theta(y)$ is periodic with period 2π . We arrive at the equation

$$\sigma \frac{d\theta}{dy} = i\omega_0 \theta + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta) \frac{d^2 \theta}{dy^2} + (\alpha + i\beta)\theta \right] + (d_0 + ic_0)\theta^2 \bar{\theta}.$$

By the change of variables $\frac{d\theta}{dy} = \theta_1$, this equation is reduced to the following system:

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1, \quad \sigma \theta_1 = i\omega_0 \theta + \varepsilon \left[(\gamma + i\delta) \frac{d\theta_1}{dy} + (\alpha + i\beta)\theta \right] + (d_0 + ic_0)\theta^2 \bar{\theta}.$$

The periodic solution of problem (1), (2) takes the form

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon} r_n \cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad u_2 = \sqrt{\varepsilon} r_n \sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

where $r_n = \sqrt{(\alpha - n^2\gamma) |d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2 - \varepsilon\delta n^2$, $n \in \mathbb{Z}$.

The following statement is true:

Theorem. Let $\omega_0 > 0$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ and let the inequality $\alpha > \gamma n^2$ be true for some integer n . Then there exists $\varepsilon_0 > 0$ such that, for $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, problem (1), (2) has solutions (4) periodic in t .

The problems of existence and stability of traveling waves in the parabolic system with retarded argument and weak diffusion are investigated.

1. Fodchuk V.I., Klevchuk I.I. Integral sets and the reduction principle for differential-functional equations // Ukrainian Math. J. – 1982. – **34**, № 3. – P. 272–277.
2. Klevchuk I.I., Fodchuk V.I. Bifurcation of singular points of differential-functional equations // Ukrainian Math. J. – 1986. – **38**, № 3. – P. 281–286.
3. Klevchuk I.I. On the reduction principle for functional-differential equations of the neutral type // Differ. Equ. – 1999. – **35**, № 4. – P. 464–473.
4. Klevchuk I.I. Bifurcation of the state of equilibrium in the system of nonlinear parabolic equations with transformed argument // Ukrainian Math. J. – 1999. – **51**, № 10. – P. 1512–1524.
5. Klevchuk I.I. Homoclinic points for a singularly perturbed system of differential equations with delay // Ukrainian Math. J. – 2002. – **54**, № 4. – P. 693–699.
6. Klevchuk I.I. Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, № 3. – P. 341–349.
7. Klevchuk I.I. Bifurcation of self-excited vibrations for parabolic systems with retarded argument and weak diffusion // J. Math. Sci. – 2017. – **226**, № 3. – P. 285–295.
8. Klevchuk I.I. Existence and stability of traveling waves in parabolic systems of differential equations with weak diffusion // Carpathian Mathematical Publications. – 2022. – **14**, № 2. – P. 493–503.

A linear Noetherian boundary value problem for a system of dynamic equations on a time scale

Klimchuk Taras, Lavrenyuk Mykola, Shovkoplias Tetiana

tarasklimchuk@knu.ua, m.lavrenyuk@knu.ua, from_tatyana@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv

For a system of dynamic equations of the second order on the time scale, a linear Noetherian boundary value problem is considered, in which the number of its boundary conditions is not equal to the order of its corresponding operator system. For are considering the boundary value problem, its solvability condition is found.

The study of Noetherian boundary value problems on the time scale is interesting. This issue was addressed in [1]. The conditions for the existence of solutions to such problems are studied using the theory of generalized inverse operators developed in [2] and the theory of dynamic equations on time scales [3].

The linear inhomogeneous Noetherian boundary value problem for the system of dynamic equations of the second order

$$(P(t)x^\Delta(t))^\Delta - Q(t)x(t) = f(t), t \in [a, b]_T, \tag{1}$$

$$lx(\cdot) = \alpha, \alpha \in R^m, \tag{2}$$

is considered on the time scale T .

The time scale T is a nonempty closed subset of real numbers [3]:

$$[a, b]_T := [a, b] \cap T,$$

$x(t)$ is a n -dimensional vector function, $f(t) = col(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ is n -dimensional vector function, which is rd -continuous on the time scale T : $f(t) \in C_{rd}([a, b]_T, R^n)$;

$P(t)$, $P^\Delta(t)$ and $Q(t)$ is $(n \times n)$ - dimensional matrix-functions, the elements of which are rd - continuous functions on $[a, b]_T$ [3]:

$$P(t), P^\Delta(t), Q(t) \in \mathfrak{R}([a, b]_T; R^{n \times n});$$

the matrix -function $P(t)$ is non-degenerate, $\det P(t) \neq 0$; l - m -dimensional linear vector functional defined on the space of n -dimensional continuous vector functions: $l = col(l_1, l_2, \dots, l_m)$; $l : C[a, b]_T \rightarrow R^m$,

$$l_i : C[a, b]_T \rightarrow R, i = 1, 2, \dots, m, b < +\infty,$$

α is a m -dimensional vector-column of constants, $\alpha \in R^m$.

Theorem 1. [3]. *We assume that the functions $f, g : T \rightarrow R$ are differentiable at the point $t \in T^k$. Then the product $fg : T \rightarrow R$ is differentiable at the point $t \in T^k$ and*

$$(fg)^\Delta(t) = (f)^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = (f)(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)).$$

For a differentiable function $f : T \rightarrow R$, if its derivative f^Δ is differentiable on the set $T^{k^2} = (T^k)^k$, then its second derivative $f^{\Delta\Delta}, f^{\Delta\Delta} : T^{k^2} \rightarrow R$ is defined as follows [3]:

$$f^{\Delta\Delta} = (f^\Delta)^\Delta. \quad (3)$$

If we apply the theorem 1 twice in a row to the quantity $(P(t)x^\Delta)^\Delta$, and then condition (3), we obtain:

$$\begin{aligned} (P(t)x^\Delta(t))^\Delta &= (P(t))^\Delta x^\Delta(t) + \\ &+ P(\sigma(t))(x^\Delta(t))^\Delta = P^\Delta(t)x^\Delta(t) + P(\sigma(t))x^{\Delta\Delta}(t). \end{aligned}$$

As a result of performing some transformations, the system (1) reduces to the system

$$x^{\Delta\Delta}(t) + A(t)v(x(t)) = P^{-1}(\sigma(t))f(t), t \in [a, b]_T,$$

here $A(t)$ is $(n \times 2n)$ -dimensional matrix:

$$\begin{aligned} A(t) &= [-P(t)Q(t), P^{-1}(\sigma(t))f(t)P^\Delta(t)], \\ v(x(t)) &\text{ is } 2n\text{-dimensional vector: } v(x(t)) = (x^T(t), (x^\Delta(t))^T). \end{aligned}$$

$$x^{\Delta\Delta}(t) + A(t)v(x(t)) = P^{-1}(\sigma(t))f(t), t \in [a, b]_T. \quad (4)$$

Equivalence of systems (1) and (2) is obtained as a result of performing certain transformations, which are based on previous explanations and previously given conditions on the coefficients of system (1), as well as theorem 1. Since systems (1) and (3) are equivalent, the considerations that apply to system (3) also hold for system (1). The dynamic system (3) has a $2n$ -parametric set of solutions:

$$x(t) = X(t)c + \bar{x}(t), c \in R^{2n},$$

where

$$\bar{x}(t) := \int_{t_0}^t e_A(t, \sigma(s))\varphi(s)\Delta s, t \in [a, b]_T,$$

$X(t)$ — $(n \times 2n)$ - dimensional matrix function, $X(t)$ is the fundamental matrix of the corresponding homogeneous ($P^{-1}(t)f(t) = 0$) of the dynamic system (3). $e_A(t, s)$ — $(n \times 2n)$ -dimensional matrix exponential function [3]. The matrix $X(t)$ is normalized at the point $t_0 \in [a, b]_T$: $X(t) = e_A(t, t_0)$. D — $(m \times 2n)$ - dimensional matrix obtained as a result of the action of the m -dimensional linear vector-functional l on the vector-columns of the matrix-function $e_A(t, t_0)$: $D := le_A(\cdot, t_0)$, $rank D = n_1$, $n_1 \leq \min(2n; m)$. $\sigma(t)$ is a function that is a direct jump operator for an arbitrary $t \in T$, $\sigma : T \rightarrow T$ and is defined as follows: $\sigma(t) := inf\{s \in T : s < t\}$ [3]. $\varphi(t)$ is a $2n$ dimensional vector.

P_D — $(2n \times 2n)$ - dimensional matrix – orthoprojector, $P_D : R^{2n} \rightarrow N(D)$, where $N(D)$ is null space of matrix D , $N(D) = P_D R^{2n}$,

P_{D_r} is a $(2n \times r)$ -dimensional matrix obtained from a $(2n \times 2n)$ -dimensional matrix-orthoprojector P_D .

P_{D^*} is a $(m \times m)$ -dimensional matrix-orthoprojector, $P_{D^*} : R^m \rightarrow N(D^*)$, where $N(D^*)$ is null space of matrix D^* , $N(D^*) = P_{D^*} R^m$; $P_{D_d^*}$ is a $(d \times m)$ -dimensional matrix obtained from a $(m \times m)$ -dimensional matrix - orthoprojector P_{D^*} .

The next theorem holds for the linear inhomogeneous Noetherian boundary value problem for the system of dynamic equations of the second order (1), (2).

Theorem 2. *If $\text{rank} D = n_1 < \min\{2n, m\}$, then the homogeneous ($\alpha = 0$, $f = 0$) boundary value problem (1), (2) has r and only r ($r = 2n - n_1$) linearly independent solutions*

$$x(t, c_r) = e_A(t, t_0) P_{D_r} c_r, \forall c_r \in R^r.$$

The inhomogeneous boundary value problem (1), (2) is solvable then and only then if $f(t) \in C_{rd}([a, b]_T; R^n)$ and $\alpha \in R^m$ satisfies the solvability condition

$$P_{D_d^*}[\alpha - l\bar{x}(\cdot)] = \theta_d, d = m - n_1,$$

and at the same time has an r -parametric set of solutions

$$x(t, c_r) = e_A(t, t_0) P_{D_r} c_r + X(t) D^+ \alpha - X(t) D^+ l\bar{x}(\cdot) + \bar{x}(t), \forall c_r \in R^r.$$

1. Agarwal, R., Bohner, M., Boichuk, A., Strakh, O. (2014). *Fredholm boundary value problems for perturbed systems of dynamic equations on time scales* Mathematical Methods in the Applied Sciences. – DOI: 10.1002/ mma.3356
2. Boichuk, A. A., Samoilenko A. M. (2004). *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems* Utrecht, Boston: VPS. 317 p.
3. Bohner, M., Peterson, A. (2003). *Advances in dynamic equations on time scales* Birkhauser Inc., Boston: MA. 361 p.

Stochastic Modified Flows, Mean-Field Limits and Dynamics of Stochastic Gradient Descent

Konarovskyi Vitalii

vitalii.konarovskyi@math.uni-bielefeld.de

Hamburg University, Hamburg, Germany

Bielefeld University, Bielefeld, Germany

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

In this talk, we will propose new limiting dynamics for stochastic gradient descent in the small learning rate regime called stochastic modified flows. These SDEs are driven by a cylindrical Brownian motion and improve the so-called stochastic modified equations by having regular diffusion coefficients and by matching the multi-point statistics. As a second contribution, we introduce distribution dependent stochastic modified flows which we prove to describe the fluctuating limiting dynamics of stochastic gradient descent in the small learning rate - infinite width scaling regime.

More precisely, we will focus on the principle setup of SGD in supervised learning. For a given training data set $\Theta \subseteq \mathbb{R}^{n_0}$ sampled from a probability distribution ϑ , one aims to minimize the empirical risk

$$R(z) := \mathbb{E}_{\vartheta} \tilde{R}(z, \theta), \quad z \in \mathbb{R}^d,$$

where $\tilde{R} : \mathbb{R}^d \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ is a loss function. Let $\theta_n, n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, be i.i.d. samples of training data drawn from ϑ . Then, the SGD dynamics is given by

$$Z_{n+1}^\eta(x) = Z_n^\eta(x) - \eta \nabla \tilde{R}(Z_n^\eta(x), \theta_n), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (1)$$

where $Z_0(x) = x, x \in \mathbb{R}^d$ and $\eta > 0$. In particular, $Z_n^\eta, n \in \mathbb{N}_0$, allows to analyze the training dynamics of different initializations x subject to the same choice of training data.

We introduce the flow defined by the following SDE, which we name stochastic modified flow (SMF),

$$\begin{aligned} dX_t^\eta(x) &= -\nabla \left(R(X_t^\eta(x)) + \frac{\eta}{4} |\nabla R(X_t^\eta(x))|^2 \right) dt \\ &\quad + \sqrt{\eta} \int_{\Theta} G(X_t^\eta(x), \theta) W(d\theta, dt), \quad (2) \\ X_0^\eta(x) &= x, \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

where $G(x, \theta) = \nabla \tilde{R}(x, \theta) - \nabla R(x)$ and W is a cylindrical Wiener process on the space $L_2((\Theta, \vartheta); \mathbb{R})$.

Let $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ denote the space of probability measures on \mathbb{R}^d with finite moments equipped with 2-Wasserstein distance. The main result reads as follows.

Theorem 1 (see Theorem 3.3 and Corollary 3.6 in [2]). *Let $\tilde{R}(\cdot, \theta)$ be regular enough for ϑ -a.e. $\theta \in \Theta$ and let $T > 0$. Then for every $\Phi \in C_b^4(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d))$ one has*

$$\sup_{\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)} \sup_{n: n\eta \leq T} \left| \mathbb{E} \Phi(\mu \circ (X_{n\eta}^\eta)^{-1}) - \mathbb{E} \Phi(\mu \circ (Z_n^\eta)^{-1}) \right| \lesssim \eta^2,$$

where $\mu \circ f^{-1}$ denotes the push forward of the measure μ under a map f . Furthermore, for every $m \in \mathbb{N}$ and $f \in C_b^4(\mathbb{R}^{dm})$,

$$\sup_{x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d} \sup_{n: n\eta \leq T} |\mathbb{E}f(X_{n\eta}^\eta(x_1), \dots, X_{n\eta}^\eta(x_m)) - \mathbb{E}f(Z_n^\eta(x_1), \dots, Z_n^\eta(x_m))| \lesssim \eta^2.$$

It is the joint work with Benjamin Gess and Sebastian Kassing from Bielefeld University.

1. Benjamin Gess, Rishabh S. Gvalani, Vitalii Konarovskiy, Conservative SPDEs as fluctuating mean field limits of stochastic gradient descent // arXiv:2207.05705. – 2022. – 65 p.
2. Benjamin Gess, Sebastian Kassing, Vitalii Konarovskiy, Stochastic modified flows, mean-field limits and dynamics of stochastic gradient descent // arXiv:2302.07125. – 2023. – 24 p.

About compromise states in the battle of opponents with various external support

Koshmanenko Volodymyr, Karataieva Tetyana

koshman63@gmail.com, karat@imath.kiev.ua

Institute of Mathematics of NASU

We study the models of dynamical systems of conflict which describe the struggle of alternative opponents for a presence in different regions Ω_i of a living or resource space $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$, $2 \leq m < \infty$. We establish the existence of equilibria (compromise states) under different external supports for both opponents.

Досліджуються моделі динамічних систем конфлікту, які описують боротьбу альтернативних опонентів за присутність у різних регіонах Ω_i життєвого або ресурсного простору $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$, $2 \leq m < \infty$. Встановлюємо існування рівноваги (компромісних станів) при різних зовнішніх допомагах обом суперникам.

Альтернативність опонентів, позначимо їх А та В, означає, що їх конфліктна боротьба відбувається по закону відштовхування – взаємного витіснення у кожному з регіонів у ймовірнісному сенсі. Такі моделі описуються поведінкою в дискретному часі стохастичних векторів

$$\{p^0, r^0\} \rightarrow \{p^t, r^t\}, \quad t = 1, 2, \dots$$

і генеруються системою різницевих рівнянь виду

$$p_i^{t+1} = \lambda p_i^t (1 - r_i^t), \quad r_i^{t+1} = \lambda r_i^t (1 - p_i^t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

$$\lambda = 1/z^t, \quad z^t = 1 - \theta^t, \quad \theta^t := (p^t, r^t) = \sum_i p_i^t r_i^t,$$

де $p_i^t := P^A(\Omega_i, t)$, $r_i^t = P^B(\Omega_i, t)$, $P^A(\Omega_i, t)$, $P^B(\Omega_i, t)$ - незалежні ймовірності захоплення опонентами А, В регіонів Ω_i в момент часу t . Стохастичність означає, що вектори $p^t = (p_1^t, \dots, p_m^t)$, $r^t = (r_1^t, \dots, r_m^t)$ при кожному t задовольняють умови:

$$\sum_{i=1}^m p_i^t = 1 = \sum_{i=1}^m r_i^t, \quad p^t, r^t \in \mathbb{R}_{+,1}^m.$$

Такі моделі вже досліджувались в ряді публікацій (див. [1] - [1] та наведенні там посилання). Один з основних результатів стверджує збіжність траєкторій таких систем до рівноважних станів. Цей результат, відомий як Теорема про конфлікт, коротко можна сформулювати таким чином.

Кожна траєкторія $\{p^t, r^t\}$ динамічної системи породженої системою рівнянь (1), що стартує з довільної точки $\{p^0, r^0\}$ заданої парою стохастичних векторів $p^0, r^0 \in \mathbb{R}_{+,1}^m$ з умовою, $(p^0, r^0) \neq 1$, збігається до граничного стану (fixed point),

$$\{p^t, r^t\} \longrightarrow \{p^\infty, r^\infty\}, \quad t \longrightarrow \infty,$$

який складається з ортогональних векторів, $p^\infty \perp r^\infty$. При цьому, якщо в початковий момент часу для якихось координат виконувалась нерівність $p_i^0 > r_i^0$, то $p_i^\infty > 0, r_i^\infty = 0$, якщо $p_k^0 < r_k^0$, то $p_k^\infty = 0, r_k^\infty > 0$, а якщо $p_j^0 = r_j^0$, то

$p_j^\infty = r_j^\infty = 0$. Значення не нульових граничних координат $p_i^\infty > 0$, $r_k^\infty > 0$ є пропорційними початковим різницям $d_i = p_i^0 - r_i^0$, $d_k = r_k^0 - p_k^0$, тобто $p_i^\infty = d_i/D$, $r_k^\infty = d_k/D$, де коефіцієнт пропорції D є незалежним від індексів ненульових координат.

Тут ми досліджуємо питання про існування рівноважних компромісних станів, коли боротьба у фіксованому регіоні завершується не перемогою чи поразкою, а постійною присутністю взагалі з різною ймовірністю обох опонентів хоча б в одному спірному регіоні. Виявляється, що явище своєрідної компромісної рівноваги у боротьбі альтернативних опонентів стає можливим, якщо опоненти одержують (зовнішню) допомогу (підсилення). Математично це записується введенням зсувів координат у векторах ймовірнісної присутності опонентів в різних регіонах. В загальному випадку динамічна картина таких моделей досить складна і нетривіальна. Ми наводимо найпростіші спостереження і умови, при яких альтернативні опоненти здатні одночасно співіснувати в одному чи декількох регіонах із строго додатними ймовірностями. Новий результат встановлює існування компромісних станів (одночасну присутність обох опоненти у фіксованому регіоні) при наявності, як несиметричної, так і симетричної стратегії отримання зовнішньої допомоги.

У несиметричному випадку один з опонентів отримує підсилення, яке пропорційне силі іншого опонента (залежне від часу), а другий не залежну від часу постійну підтримку. Не втрачаючи загальності ми покладемо, що кількість регіонів конфлікту дорівнює чотирьом, $m = 4$, а зовнішній вплив, як адитивне підсилення, опоненти одержують лише в одному третьому регіоні. Тоді рівняння динаміки мають вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{p_i^t(1 - r_i^t)}{z_p^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{r_i^t(1 - p_i^t)}{z_r^t}, \quad \forall i \neq 3, \quad (2)$$

$$p_3^{t+1} = \frac{(p_3^t + h_{p3}r_3^t)(1 - r_3^t)}{z_p^t}, \quad r_3^{t+1} = \frac{(r_3^t + h_{r3})(1 - p_3^t)}{z_r^t}, \quad (3)$$

де $0 < h_{p3}$, h_{r3} позначають параметри підсилення в регіоні Ω_3 для опонентів А та В, відповідно. Зараз нормувальні знаменники z_p^t, z_r^t мають складніший вигляд, а саме легко переконатися, що

$$z_p^t = 1 - \theta^t + h_{p3}r_3^t(1 - r_3^t), \quad z_r^t = 1 - \theta^t + h_{r3}(1 - p_3^t),$$

де $\theta^t = \sum_i p_i^t r_i^t$. В цьому випадку ми доводимо, що система задана рівняннями (2)- (3) при умові

$$h_u \geq \frac{4h_v}{(1 + h_v)^2}.$$

має принаймні пару компромісних станів.

При симетричних стратегіях обидва опоненти отримують підсилення пропорційне силі іншого. Рівняння динаміки мають вигляд

$$p_i^{t+1} = \frac{(p_i^t + h_{pi}r_i^t)(1 - r_i^t)}{z_p^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{(r_i^t + h_{ri}p_i^t)(1 - p_i^t)}{z_r^t}, \quad i \in \overline{1, m}, \quad (4)$$

де параметри $h_{p_i}, h_{r_i} \geq 0$ мають інтерпретацію зовнішнього впливу (допомоги чи підсилення) опонентам А, В, відповідно, у регіоні Ω_i , а нормувальні знаменники явно визначаються за формулами:

$$z_p^t = 1 - \theta^t + \sum_{i=1}^m h_{p_i} r_i^t (1 - r_i^t), \quad z_r^t = 1 - \theta^t + \sum_{i=1}^m h_{r_i} p_i^t (1 - p_i^t).$$

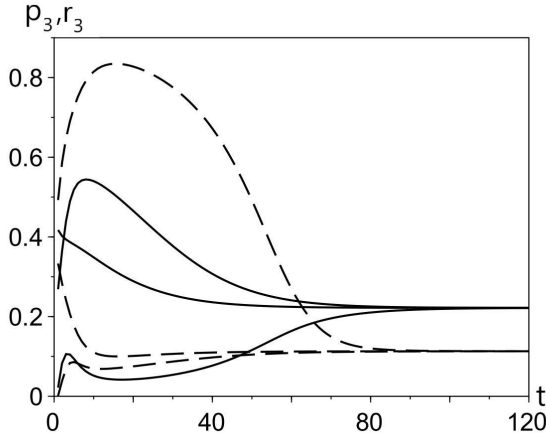


Рис. 1: При фіксованих параметрах допомоги $h_{p,k} = H$, $h_{r,k} = h$ траєкторії координат p_k^t, r_k^t збігаються до тих самих граничних (компромісних) значень незалежних від початкових розподілів.

Для динамічних систем конфлікту заданих рівняннями (4) при необтяжливих умовах на параметри підсилення також існують компромісні стани. При цьому, компромісні значення координат у регіонах Ω_i визначаються тільки величинами параметрів зовнішньої допомоги і повністю втрачають залежність від координат у початкових векторах. Цей факт ми ілюструємо на Рис. 1.

Відзначимо, що одержані результати придатні до застосування в теорії формування та поширення переконань та для знаходження умов встановлення консенсусу між різними поглядами у сенсі робіт [9] - [10].

1. V. Koshmanenko, *A theorem on conflict for a pair of stochastic vectors*, Ukrainian Math. J., **55**, № 4, 671–678 (2003), MR2072559.
2. V. Koshmanenko, *Theorem of conflicts for a pair of probability measures*, Math. Methods of Operations Research, **59**, № 2, 303–313 2004, MR2063246.

3. T.V. Karataieva, V.D. Koshmanenko *Society, Mathematical Model of a Dynamical System of Conflict*, J. Math. Sci., **247**, 291-313 (2020); <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04803-3>
4. T.V. Karataieva, V.D. Koshmanenko, M.J.Krawczyk, K. Kulakowski, *Mean field model of a game for power*, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, **525**, 535-547 (2019); <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.03.110>
5. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, *Модель конфліктного соціуму з ефектами зовнішнього впливу*, Нелінійні коливання, **24**, № 3, 342- 362 (2021).
6. Т. В. Каратаєва, В. Д. Кошманенко, *Рівноважні стани динамічної системи конфлікту для трьох гравців із параметром впливу зовнішнього середовища*, Нелінійні коливання, **25**, № 2-3 (2022).
7. В.Д. Кошманенко *Формула конфліктної динаміки*, Збірник праць Ін-ту математики НАН України, **17**, № 2, 113–149 (2020).
8. В. Д. Кошманенко *Спектральна теорія динамічних систем конфлікту*, Наукова Думка, Київ, 287 (2016).
9. L. Li, A. Scaglione, A. Swami, Q. Zhao, *Consensus, polarization and clustering of opinions in social networks*, J. on Selected Areas in Communications, **31**, № 6, 1072-1083 (2013), DOI: 10.1109/JSAC.2013.130609
10. M. DeGroot, Reaching a consensus, *Journal of the American Statistical Association* **69**, 291-293 (1974), <https://doi.org/10.1080/01621459.1974.10480137>

Автори вдячні за фінансову підтримку по проекту "Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів актуальних для безпеки держави", № 0123U100853.

Separately continuous functions for the space with the regular subset

Kozlovskiy Mykola

`kozlovskiy.mykola@chnu.edu.ua`

Yurii Fedkovych Chernivtsi National University

The inverse problem is a finding necessary and sufficient conditions on the discontinuity points set of separately continuous functions and it is important to study a *special inverse problem* on construction of a separately continuous function $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ with a given discontinuity points set of special rectangular type $A \times B$, where $A \subseteq X$ and $B \subseteq Y$. This problem was investigated in [1] and [2] where the following results were obtained.

The subset A in a topological space X is called *regular*, if there exists a continuous function $\varphi : X \rightarrow [0, 1]$ such that

1. $A = \varphi^{-1}(0)$;
2. for every point $a \in A$ and a neighborhood U of a there exists an integer $n \in \mathbb{N}$ such that

$$\varphi(U) \cap \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}} \right] \neq \emptyset$$

for every $k \geq n$.

The subset A in a topological space X is *bilaterally separable* if there exist a sequence $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ of points $a_n \in A$ and family $(x_{nk} : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N})$ of points $x_{nk} \in X \setminus A$ such that

1. $A \subseteq \overline{\{a_n : n \in \mathbb{N}\}}$;
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{nk} = a_n$ for every $k \in \mathbb{N}$.

Lemma 1. *Any nowhere dense functionally closed set A in a locally connected space X is a regular set in X .*

Lemma 2. *Every closed nowhere dense set A in a metrizable space X is regular.*

Lemma 3. *Let X be a topological space and $A \subseteq X$ be a functionally closed bilaterally separable set. Then A is regular.*

Theorem. *Let X, Y be topological spaces, $A \subseteq X$ be a regular set in X and $B \subseteq Y$ be a nowhere dense functionally closed set in Y . Then there exists a lower semi-continuous separately continuous function $f : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ such that $D(f) = A \times B$.*

Theorem. *Let X, Y be topological spaces, $A \subseteq X, B \subseteq Y$ be nowhere dense functionally closed sets and one of the following conditions holds:*

- (i) X is locally connected;
- (ii) X is metrizable;
- (iii) A is bilaterally separable in X ;
- (iv) X is a first countable space and A is separable.

Then there exists a lower semi-continuous separately continuous function $f : X \times Y \rightarrow [0, 1]$ with $D(f) = A \times B$.

1. Maslyuchenko V., Mykhaylyuk V., Sobchuk O. *Investigations on separately continuous mappings*, Proceedings of International conference dedicated to Hans Hahn, Chernitsi (1995), 192-246 (in Ukrainian).
2. Mykhaylyuk V.V. *The set of discontinuity points of separately continuous functions on the products of compact spaces* Methods of Func. Anal. and Top. **13** (3) (2007) 284-295.
3. Kozlovskiy M.R., Mykhaylyuk V.V *The set of discontinuity points of separately continuous functions on the products of compact spaces* European Journal of Mathematics **8** (3)

Block-supersymmetric polynomials

Kravtsiv Viktoriia

viktoriia.kravtsiv@pnu.edu.ua

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University

Let us denote by $\ell_p(\mathbb{C}^s)$, $1 \leq p < \infty$ the vector space of all sequences

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots), \quad (1)$$

where $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(s)}) \in \mathbb{C}^s$ for $j \in \mathbb{N}$, such that the series $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^s |x_j^{(r)}|^p$ is convergent. We say that elements x_j in () are vector coordinates of x . The space $\ell_p(\mathbb{C}^s)$ endowed with norm

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^s |x_j^{(r)}|^p \right)^{1/p}$$

is a Banach space. A polynomial P on the space $\ell_p(\mathbb{C}^s)$ is called block-symmetric (or vector-symmetric) if:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m, \dots) = P(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)}, \dots)$$

for every permutation $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, where $x_j \in \mathbb{C}^s$ for all $j \in \mathbb{N}$. Let us denote by $\mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$ the algebra of all block-symmetric polynomials on $\ell_p(\mathbb{C}^s)$.

For a multi-index $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbb{Z}_+^s$ let $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_s$ and $\mathbf{k}! = k_1!k_2! \dots k_s!$.

Polynomials

$$H^{\mathbf{k}}(x) = H^{k_1, k_2, \dots, k_s}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{r=1 \\ |k| \geq [p]}}^s (x_j^{(r)})^{k_r}$$

form an algebraic basis in $\mathcal{P}_{vs}(\ell_p(\mathbb{C}^s))$, $1 \leq p < \infty$, where $x = (x_1, \dots, x_m, \dots) \in \ell_p(\mathbb{C}^s)$, $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(s)}) \in \mathbb{C}^s$.

In the case of the space $\ell_1(\mathbb{C}^s)$ there are important algebraic bases:

$$R^{\mathbf{k}}(x) = R^{k_1, k_2, \dots, k_s}(x) = \sum_{\substack{i_1^j < \dots < i_{k_1}^j \\ 1 \leq j \leq s}} \prod_{j=1}^s x_{i_1^j}^{(j)} \dots x_{i_{k_1}^j}^{(j)},$$

and

$$E^{\mathbf{k}}(x) = E^{k_1, k_2, \dots, k_s}(x) = \sum_{\substack{i_1^j \leq \dots \leq i_{k_1}^j \\ 1 \leq j \leq s}} \prod_{j=1}^s x_{i_1^j}^{(j)} \dots x_{i_{k_1}^j}^{(j)}.$$

Let us denote by $\ell_1(\mathbb{C}_{\mathbb{Z}_0}^s)$ the Banach space of all sequences

$$z = (\dots, z_{-n}, \dots, z_{-1}, z_1, \dots, z_n, \dots) =$$

$$= (y|x) = (\dots, y_n, \dots, y_1 | x_1, \dots, x_n, \dots)$$

with

$$\|z\| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \|z_i\| = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^s |z_i^{(j)}|,$$

where $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ and $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ are in $\ell_1(\mathbb{C}^s)$, $x_i = (x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(s)})$ and $y_i = (y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(s)})$ are in \mathbb{C}^s , $z_n = x_n$, $z_{-n} = y_n$ for $n \in \mathbb{N}$ and

$$x \mapsto (0|x_1, \dots, x_n, \dots) \text{ and } y \mapsto (\dots, y_{-n}, \dots, y_{-1}|0)$$

are naturale isometric embeddings of the copies of $\ell_1(\mathbb{C}^s)$ into $\ell_1(\mathbb{C}_{\mathbb{Z}_0}^s)$.

Let us define the following polynomials on $\ell_1(\mathbb{C}_{\mathbb{Z}_0}^s)$:

$$T^{\mathbf{k}}(z) = H^{\mathbf{k}}(x) - H^{\mathbf{k}}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{r=1 \\ |k| \geq 1}}^s (x_j^{(r)})^{k_r} - \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{\substack{r=1 \\ |k| \geq 1}}^s (y_j^{(r)})^{k_r}, \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_s).$$

A polynomial P on $\ell_1(\mathbb{C}_{\mathbb{Z}_0}^s)$ is said to be *block-supersymmetric* if it can be represented as an algebraic combination of polynomials $\{T^{\mathbf{k}}\}_{|\mathbf{k}|=1}^{\infty}$. In other words, P is a finite sum of finite products of polynomials in $\{T^{\mathbf{k}}\}_{|\mathbf{k}|=1}^{\infty}$ and constants. We denote by \mathcal{P}_{vsup} the algebra of all block-supersymmetric polynomials on $\ell_1(\mathbb{C}_{\mathbb{Z}_0}^s)$.

Note first that polynomials $T^{\mathbf{k}}$ are algebraically independent because $H^{\mathbf{k}}$ are so. Hence $\{T^{\mathbf{k}}\}_{|\mathbf{k}|=1}^{\infty}$ forms an algebraic basis in \mathcal{P}_{vsup} .

In this talk we will introduce basic definitions and consider general results about block-supersymmetric polynomials on the space of absolutely convergent series.

Problem with integral conditions for nonhomogeneous system of partial differential equations third order

Kuduk Grzegorz

gkuduk@onet.eu

Faculty of Mathematics and Natural Sciences University of Rzeszow, Graduate of University

Let $H(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$ be a class of certain function, $K_{L,M}$ be a class of quasi-polynomials of the form

$$f(t, x) = \sum_{i=1}^n Q_i(t, x) e^{\alpha_i x + \beta_j t}, \quad (1)$$

where $Q_{ij}(t, x)$ are given polynomials, $M \subseteq \mathbb{C}$, $\alpha_i \in M$, $\alpha_k \neq \alpha_l$, for $k \neq l$, $\beta_j \in M$, $\beta_k \neq \beta_l$, for $k \neq l$. Each quasi-polynomial (1) defines a differential operator $f\left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda}\right)$ of finite order on the class of certain function, in the form

$$\sum_{i=1}^n Q_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial \nu}, \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \exp \left[\alpha_i \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta_j \frac{\partial}{\partial \nu} \right] \Bigg|_{\lambda=\nu=0}.$$

Let be $T_{kjp}(t, \lambda) = \tilde{l}\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right) W(t, \lambda)$, $j = 1, \dots, n$, $p = 1, \dots, n$, $k = 1, 2$, satisfies of system of equations

$$\sum_{j=1}^n l_{ij} \left(\frac{d}{dt}, \lambda \right) T_j(t, \lambda) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

where $\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right) = \delta_{ij} \frac{d^3}{dt^3} - a_{ij} \frac{d^2}{dt^2} - b_{ij} \frac{d}{dt}$, $\delta_{ij} - c_{i,j}$ - symbol Kroneckera. Let $L(\lambda, \nu) = \|L(\nu, \lambda)\|_{ij=1, \dots, n}$, $\psi(\nu, \lambda) = \det L(\nu, \lambda)$, $\tilde{l}\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right)$ - algebraic component element $\left(\frac{d}{dt}, \lambda\right)$ is matrix $L(\lambda, \nu)$. $W(t, \lambda)$ is a solution of the problem

$$\psi \left(\frac{d}{dt}, \lambda \right) W(t, \lambda) = 0,$$

satisfies conditions $W^j(0, \lambda) = \delta_{j, 2n-1}$, $j = 2n-1$, let be $\eta(\lambda)$ ba a certain function.

Denote be

$$P = \{\lambda \in \mathbb{C} : \eta(\lambda) = 0\} \quad (2)$$

In the strip $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} : t \in (0, T), x \in \mathbb{R}^n\}$ we consider problem

$$\frac{\partial^3 U_i}{\partial t^3} + \sum_{j=1}^n \left\{ a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} + b_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial t} + c_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right\} U_j(t, x) = f_i(t, x), \quad (3)$$

$$\int_0^T t^k U_i(t, x) dt = 0, \quad k = 0, 1, 2, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

where $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, $b_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, are differential expressions with entire functions $a_{ij}(\lambda) \neq 0$, $b_{ij}(\lambda) \neq 0$

Theorem. Let $f_i(t, x) \in K_{L,M}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, 2$, then the class $K_{M \setminus P}$ exist and unique solution of the problem (3), (4), where P is set (2). Solution of the problem (3), (4) can be represented in the form

$$U_j(t, x) = \sum_{k=0}^1 \sum_{p=1}^n f_{kp} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}, \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \left\{ \frac{1}{\eta(\lambda)} T_{kjp}(t, \lambda) \exp[\lambda x] \right\} \Bigg|_{\lambda=\nu=0}.$$

Solution of the problem (3), (4) according to the differential-symbol [1, 2] method exists and uniqueness in the class of quasi-polynomials.

1. Kalenyuk P. I. Nytrebych Z. M. Kuduk G. Symotyuk M. M. Integral problem for partial differential equation of second order in unbounded layer, Bukovinian Mathematical Journal., - Vol. 4, No 3-4. (2016) - Chernivtsi: Chernivtsi Nat. Univ., - P. 69 - 74.
2. Kalenyuk P. I. Nytrebych Z. M. Kuduk G. Symotyuk M. M. Integral problem for partial differential equation of higher order in unbounded layer. Methods and Phys.- Mech. Polia, **59** (4), (2016) - P. 19 - 28.

On Banach spaces of Laplace-Stieltjes integrals

Kuryliak A., Sheremeta M.

andriykuryliak@gmail.com, sheremeta.m.m@gmail.com

Ivan Franko National University of Lviv

Let V be a class of nonnegative nondecreasing unbounded continuous on the right functions F on $[0, +\infty)$. We assume that a real-valued function f on $[0, +\infty)$ is such that the Lebesgue-Stieltjes integral $\int_0^A f(x)e^{x\sigma}dF(x)$ exists for every $A \in [0, +\infty)$ and $\sigma \in \mathbb{R}$. Consider the integral

$$I(\sigma) = \int_0^{\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x), \quad \sigma \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Suppose that h is a positive continuous function on $[0, +\infty)$ increasing to $+\infty$. We study the properties of the integrals (1) for which

$$|f(x)| \exp\{xh(x)\} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (2)$$

By LS_h we denote a class of integrals (1) with real-valued functions f such that (2) holds. On LS_h we define operations $(I_1 + I_2)(x) = \int_0^{\infty} (f_1(x) + f_2(x))e^{x\sigma}dF(x)$, $(\lambda I)(\sigma) = \int_0^{\infty} \lambda f(x)e^{x\sigma}dF(x)$, where $I_j(\sigma) = \int_0^{\infty} f_j(x)e^{x\sigma}dF(x)$ for $j \in \{1, 2\}$, and let

$$\|I\|_h = \sup \{|f(x)| \exp\{xh(x)\} : x \geq 0\}.$$

Theorem. *If $F \in V$ and $\ln F(x) = o(x)$ as $x \rightarrow +\infty$ then $(LS_h, \|\cdot\|_h)$ is non-uniformly convex Banach space.*

1. Kuryliak A.O., Sheremeta M. M. On Banach spaces and Frechet spaces of Laplace–Stieltjes integrals // Journal of Mathematical Sciences. – 2023. – V.270, №2. – P. 280–293.

Entire Gaussian functions: probability of zeros absence

Kuryliak A., Skaskiv O.

andriy.kuryliak@gmail.com, olskask@gmail.com

Ivan Franko National University of Lviv

Let us consider the class \mathcal{E} of random entire functions of the form

$$f(z, \omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n(\omega_1) \xi_n(\omega_2) a_n z^n. \quad (1)$$

Here $a_0 \neq 0$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, $\varepsilon_n(\omega_1) = e^{i\theta_n(\omega_1)}$, (θ_n) is a sequence of independent random variables uniformly distributed on $[-\pi, \pi)$, $(\xi_n(\omega_2)) \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0, 1)$, i.e. independent random complex values with a standard Gaussian distribution with density $p_{\xi_n}(z) = \frac{1}{\pi} e^{-|z|^2}$, $z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}_+$.

For $r > 0$ and $\delta \in \mathbb{R}$ we denote

$$\mathcal{N}(r) = \{n: \ln(|a_n| r^n) > 0\}, \quad N(r) = \#\mathcal{N}(r),$$

$$s(r) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \ln^+(|a_n| r^n) = 2 \sum_{n \in \mathcal{N}(r)} \ln(|a_n| r^n), \quad \ln^+ x := \max\{\ln x; 0\},$$

$$P_0(r) = P\{\omega: f(z, \omega) \neq 0 \text{ in } r\mathbb{D}\}, \quad p_0(r) = \ln^- P_0(r), \quad \ln^- x := \max\{-\ln x; 0\},$$

where $r\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$.

Theorem 1. *Let $\varepsilon > 0$ and $f \in \mathcal{E}$. Then there exist a nonrandom set $E \subset (1; +\infty): (\int_E \frac{dr}{r} < +\infty)$ and almost surely $r_0(\omega) > 0$ such that for all $r \in (r_0(\omega), +\infty) \setminus E$ we have*

$$0 \leq \liminf_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ r \notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)}, \quad \overline{\lim}_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ r \notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} \leq \frac{1}{2}, \quad (2)$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ r \notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln N(r)} = 1.$$

Sharpness of inequalities (2) follows from such a statement.

Theorem 2. *There exist $f_1 \in \mathcal{E}$, a nonrandom set $E \subset (1; +\infty): (\int_E \frac{dr}{r} < +\infty)$ and almost surely $r_0(\omega) > 0$ such that for all $r \geq r_0(\omega)$ we obtain*

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ r \notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} = \frac{1}{2}.$$

There exist $f_2 \in \mathcal{E}$, a nonrandom set $E \subset (1; +\infty): (\int_E \frac{dr}{r} < +\infty)$ and almost surely $r_0(\omega) > 0$ such that for all $r \geq r_0(\omega)$ we get

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ r \notin E}} \frac{\ln(p_0(r) - s(r))}{\ln s(r)} = 0.$$

1. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. Entire Gaussian functions: probability of zeros absence // *Axioms*. – 2023. – V.12(3). – 255.

The domain of existence of the maximum term of Dirichlet series with complex exponents

Kuryliak M., Skaskiv O.

kuryliakmariya@gmail.com, olskask@gmail.com

Ivan Franko National University of L'viv

Let us denote by $\mathcal{D}(\Lambda)$ the class of Dirichlet series of the form

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n} \quad (1)$$

such that $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), where a sequence of the exponents $\Lambda = (\lambda_n)$ form a sequence of pairwise distinct complex numbers $\lambda_n \in \mathbb{C}$. For a formal Dirichlet series $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ we denote

$$D_\mu := \{z \in \mathbb{C} : a_n e^{z\lambda_n} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow +\infty)\}$$

the set of the existence of maximal term $\mu(z, F) = \max\{|a_n|e^{\Re(z\lambda_n)} : n \geq 0\}$; $G_\mu = D_\mu \setminus \partial D_\mu$ is the domain of the existence of maximal term.

It is obvious that G_μ is a convex domain or $G_\mu = \emptyset$, and as simple examples show, it can be both unbounded and bounded in the general case.

Let us denote $\mathcal{N}_1(z) := \{n : \Re(z\lambda_n) > 1\}$, $\mathcal{N}_2(z) := \{n : \Re(z\lambda_n) < -1\}$.

Proposition 1. *Let $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ be of form (1). In order that $G_\mu = \mathbb{C}$, it is necessary and sufficient that*

$$\forall z \in \mathbb{C} : \quad \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathcal{N}_1(z)}} \frac{-\ln |a_n|}{\Re(z\lambda_n)} = +\infty, \quad \overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathcal{N}_2(z)}} \frac{-\ln |a_n|}{-\Re(z\lambda_n)} = +\infty.$$

Let us denote

$$\alpha^{(1)} := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_n|}{\lambda_n}, \quad \alpha^{(2)} := \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln |a_n|}{\lambda_n}.$$

Proposition 2. *Let $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ be of form (1), where $\Lambda = (\lambda_n)$ such that $\lambda_n \in \mathbb{R}$ ($n \geq 0$). 1) If $\alpha^{(2)} < \alpha^{(1)}$ then $G_\mu(F) = \{z : \Re z \in (\alpha^{(2)}, \alpha^{(1)})\}$, $G_\mu(F) \cap \{z : \Re z \in (-\infty, \alpha^{(2)}) \cup (\alpha^{(1)}, +\infty)\} = \emptyset$. 2) If $\alpha^{(2)} \geq \alpha^{(1)}$ then $G_\mu(F) = \emptyset$.*

For $\theta \in [0, \pi)$ we denote

$$\alpha^{(1)}(\theta) := \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathcal{N}_1(e^{i\theta})}} \frac{-\ln |a_n|}{\Re(e^{i\theta}\lambda_n)}, \quad \alpha^{(2)}(\theta) := \overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathcal{N}_2(e^{i\theta})}} \frac{-\ln |a_n|}{\Re(e^{i\theta}\lambda_n)}$$

Proposition 3. *Let $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ be of form (1). 1) If $\alpha^{(2)}(\theta) < \alpha^{(1)}(\theta)$ for some $\theta \in [0, \pi)$ then $\{te^{i\theta} : t \in (\alpha^{(2)}(\theta), \alpha^{(1)}(\theta))\} \subset G_\mu(F)$ and*

$$\{te^{i\theta} : t \in (-\infty, \alpha^{(2)}(\theta)) \cup (\alpha^{(1)}(\theta), +\infty)\} \cap G_\mu(F) = \emptyset.$$

2) If $\alpha^{(2)}(\theta) > \alpha^{(1)}(\theta)$ for some $\theta \in [0, \pi)$ then $\{te^{i\theta} : t \in \mathbb{R}\} \cap G_\mu(F) = \emptyset$.

Proposition 4. *Let $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ be of form (1). Then*

$$G_\mu(F) = \bigcup_{\theta \in [0, \pi)} \{z = te^{i\theta} : t \in (\alpha^{(2)}(\theta), \alpha^{(1)}(\theta))\}.$$

Let us formulate some simple corollaries.

Corollary 1. *Let $\Lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_n \geq 0$ ($n \geq 0$). If $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ of form (1) then the abscissa of existence of the maximal term $\sigma_\mu(F) = \alpha^{(1)}$.*

The statement of Corollary 1 was previously proved in a master's thesis (A.Yu. Bodnarchuk, Ivan Franko National University of L'viv, 2021).

Corollary 2. *Let $\Lambda = (\lambda_n)$, $\{\lambda_n\} = \bigsqcup_{j=1}^4 \{\lambda_n^{(j)}\}$, $\lambda_n^{(1)} \geq 0$, $\lambda_n^{(2)} < 0$, $i\lambda_n^{(3)} < 0$, $i\lambda_n^{(4)} > 0$ ($n \geq 0$) and $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ be of form (1).*

1. *If $\alpha^{(2)}(\pi) < \alpha^{(1)}(0)$ and $\alpha^{(2)}(-\pi/2) < \alpha^{(1)}(\pi/2)$ then*

$$G_\mu(F) = \{z = x + iy: \alpha^{(2)}(\pi) < x < \alpha^{(1)}(0), \alpha^{(2)}(-\pi/2) < y < \alpha^{(1)}(\pi/2)\}.$$

2. *If $\alpha^{(2)}(\pi) \geq \alpha^{(1)}(0)$ or $\alpha^{(2)}(-\pi/2) \geq \alpha^{(1)}(\pi/2)$ then $G_\mu = \emptyset$.*

Remark. *In particular, under the conditions of the Corollary 1, in the case $\alpha^{(2)}(\pi) = -\infty$, $\alpha^{(1)}(0) < +\infty$ or $\alpha^{(2)}(\pi) > -\infty$, $\alpha^{(1)}(0) = +\infty$ we obtain horizontal semi-strips*

$$G_\mu(F) = \{z = x + iy: x < \alpha^{(1)}(0), \alpha^{(2)}(-\pi/2) < y < \alpha^{(1)}(\pi/2)\}$$

or $G_\mu(F) = \{z = x + iy: x > \alpha^{(2)}(\pi), \alpha^{(2)}(-\pi/2) < y < \alpha^{(1)}(\pi/2)\}$, respectively.

On conditions of ergodicity of the solutions to Itô's stochastic differential equations

Kushnirenko Svitlana

bksv@ukr.net

Taras Shevchenko National University of Kyiv

Consider Itô's stochastic differential equation

$$d\xi(t) = a(\xi(t)) dt + \sigma(\xi(t)) dW(t), \quad t > 0, \quad \xi(0) = x_0, \quad (1)$$

where a and σ are measurable, linearly bounded on infinity and real-valued functions, $W = \{W(t), t \geq 0\}$ is one-dimensional Wiener process on the complete probability space $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$. Let for any $N > 0$ there exist $\delta_N > 0$ such that $\sigma(x) \geq \delta_N > 0$ for $|x| \leq N$.

A solution ξ to equation (1) is called ergodic with a distribution function $F(x)$ if

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \{ \xi(t) < x \} = F(x)$$

for any $x \in \mathbb{R}$.

Consider the function

$$f(x) = \int_0^x \exp \left\{ -2 \int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)} dv \right\} du. \quad (2)$$

Assume that $f(-\infty) = -\infty$, $f(+\infty) = +\infty$. It is known (see [1], Chapter 4, §18) that the previous equalities are necessary conditions for ergodicity of the solution to equation (1).

Next we will use the following notations

$$l(x) = 2xa(x) + \sigma^2(x); \quad D(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dv}{f'(v)\sigma^2(v)},$$

where $f'(x)$ is the derivative of the function $f(x)$, which is defined in (2).

Theorem 1. *Let ξ be a solution to equation (1). Let*

$$1) \limsup_{|x| \rightarrow +\infty} l(x) < 0$$

and

2) for some $\delta > 0$ there exist $0 < C_\delta < +\infty$ such that

$$\left| \int_{|x| \geq \delta} \frac{dx}{x\sigma^2(x)} \right| \leq C_\delta,$$

then the solution ξ is ergodic and for all $x \in \mathbb{R}$ we have

$$\mathbb{P}\{\xi(t) < x\} \rightarrow F(x), \quad \text{as } t \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

where $F(x) = [D(+\infty)]^{-1} \cdot D(x)$.

Next let us consider the case $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} l(x) = 0$.

G. L. Kulinich proved that this case is critical: for such $l(x)$ we have equations with ergodic solutions and equations with stochastically unstable solutions. For more details see Chapter 3 of the book [2].

In the following theorems the equivalence " \sim " of the functions means that their fraction goes to a certain positive constant.

Theorem 2. *Let ξ be a solution to equation (1) and $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} l(x) = 0$.*

If

$$\sigma^2(x) \sim \begin{cases} x^p, & p > 0, x \rightarrow +\infty, \\ |x|^q, & q > 0, x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

then the solution ξ is ergodic and for all $x \in \mathbb{R}$ we have (3).

Theorem 3. *Let ξ be a solution to equation (1) and $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} l(x) = 0$.*

If

$$\sigma^2(x) \sim \begin{cases} \frac{1}{x^p}, & p > 0, x \rightarrow +\infty, \\ \frac{1}{|x|^q}, & q > 0, x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

$$l(x) \sim \begin{cases} -x^{\alpha-p}, & 0 < \alpha < p, x \rightarrow +\infty, \\ -|x|^{\beta-q}, & 0 < \beta < q, x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

then the solution ξ is ergodic and for all $x \in \mathbb{R}$ we have (3).

1. I. I. Gikhman, A. V. Skorokhod: *Stochastic Differential Equations*, Springer, Berlin and New York (1972)
2. G. Kulinich, S. Kushnirenko and Yu. Mishura: *Asymptotic Analysis of Unstable Solutions of Stochastic Differential Equations*, Vol. 9, Bocconi & Springer Series, Mathematics, Statistics, Finance and Economics (2020)

Perturbed motions of a dynamically symmetric rigid body with cavity filled with a viscous fluid subject to constant body-fixed torques

Leshchenko Dmytro, Kozachenko Tetiana

`leshchenkodmytro@gmail.com`, `kushpil.t.a@gmail.com`

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odessa, Ukraine

A satellite or a spacecraft in its motion about the center of mass is affected by the torques of forces of various physical nature. These motions may have various causes, for example, the presence of fluid in the cavities in the body (for example, liquid fuel or oxidizer in the tanks of a rocket). Similar problems also arise in the theory of aircraft and ship and in other technical questions. These problems are also of major theoretical interest. There is a necessity to study the problems of the rigid body dynamics with cavities containing a viscous fluid to calculate the motion of spacecraft about its center of mass as well as their orientation and stabilization. The problems of rigid body dynamics with cavities containing a viscous fluid are more difficult than in the case of ideal fluid. The study [1] showed that solving the problems of the rigid body dynamics with viscous fluid in cavity can be separated into two parts: the hydrodynamic and dynamic ones, which represent a simplification of the original problem. The torques of viscous fluid in cavity forces, acting on the body, are often relatively small and can be considered as perturbations. Slow increase of the vector of the kinetic moment of the satellite may be explained by the effect of perturbation torque which is constant in fixed axes. This torque may be evoked by the represent small amount of release of gas in the gas reactive system. It is natural to use the methods of small parameter to analyze the dynamics of rigid body under the action of applied torques. The method applied in this paper is the Krylov-Bogolubov asymptotic averaging method.

An asymptotic solution was obtained describing the evolution of the motion of a body having a cavity with a fluid of high viscosity over a long-time interval.

Book [2] is devoted to analytically approximate methods in the nonlinear dynamics of a rigid body with cavities partly filled by a fluid. In the work [3] analytical solution is obtained for the problem of the motion of a rigid body influenced by a torque which is constant in the body-fixed axes.

The motion of a close to dynamically spherical rigid body with a cavity filled with a viscous fluid at low Reynolds number was investigated in [4]. Qualitative and quantitative results of motion in a resistive medium of a nearly dynamically spherical rigid body with a cavity containing fluid of high viscosity was studied in [5].

Reference was made to the angular momentum vector of a satellite, noted during the determination of the actual orientation of the artificial earth satellite. This change was explained as a result of the presence of a the small perturbation torque, which is constant in fixed axes relative to the satellite. In the case of small torques, it is possible to use perturbation methods to obtain analytical or numerical descriptions of motion.

We consider the motion of a rigid body with a cavity filled with a viscous fluid subjected to constant body-fixed torques. As a result of the conducted asymptotic

analysis, a solution is obtained which describes, in a nonlinear setting, the evolution over a significant time interval of the motion of a body having a cavity with high-viscosity fluid.

We obtained the system of motion equations in the standard form. The Cauchy problem for a system determined after averaging was analyzed. The evolution of the motion of a rigid body under the action of small internal and external torques of forces is described by the solutions which obtained as a result of asymptotic, analytical and numerical calculations.

Obtained results made it possible to evaluate the dynamical effects caused by the presence of fluid in cavity and constant body-fixed torques.

Results summed here make it possible to analyze motions of artificial satellites and celestial bodies under the influence of small internal and external torques.

1. Chernousko F.L., Akulenko L.D., Leshchenko D.D. Evolution of Motions of a Rigid Body About its Center of Mass. – Cham: Springer International Publishing, 2017. – 241 p.
2. Lukovsky I.A. Nonlinear Dynamics. Mathematical Models for Rigid Body with a Liquid. – Walter De Gruyter GmbH, Berlin, 2015. – 410 p.
3. Ayobi M.A., Longuski J.M. Analytical solution for translational motion of spinning-up rigid bodies subject to constant body-fixed forces and moments // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2008. – 75(1) – P. 011004/1–011004/8.
4. Akulenko L.D., Leshchenko D.D., Paly K.S. Perturbed rotational motions of a spheroid with cavity filled with a viscous fluid// IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. – 2021. – 235(20) – P. 4833–4837.
5. Leshchenko D., Ershkov S., Kozachenko T. Evolution of rotational motions of a nearly dynamically spherical rigid body with cavity containing a viscous fluid in a resistive medium// International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2022. – 142(3) – 103980.

Scattered spaces and pairs of Hahn related with separately continuous functions

Lianha Anastasiia, Maslyuchenko Oleksandr

lianha.anastasiia@chnu.edu.ua, ovmasl@gmail.com

Yuriy Fedkovich Chernivtsi National University
University of Silesia in Katowice

In 1917 H. Hahn proved that for any pair of functions on a metric space such less one is upper semicontinuous and grater one is lower semicontinuous there is an intermediate continuous function. Later, J. Dieudonne, H. Tong and M. Katetov generalized Hahn's result on wider classes of spaces. V. Maslyuchenko in [1] proposed to call such pair of functions as a pair of Hahn. More precisely, a pair (g, h) of functions $g, f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ is called a *pair of Hahn* if $g \leq h$, g is an upper semicontinuous function and h is a lower semicontinuous function. In [1] authors proved that *the minimal and the maximal sections* $\wedge_f, \vee_f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\wedge_f(x) = \inf_{y \in Y} f(x, y)$, $\vee_f(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y)$, $x \in X$, form a pair of Hahn for any separately continuous function $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ and asked the following question.

Problem I. *Let X and Y be topological spaces and (g, h) be a pair of Hahn on X . Under which assumptions does it exist a separately continuous function $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ such that $g = \wedge_f$ and $h = \vee_f$?*

In [1] this problem was solved only in the case when X and Y are segments in \mathbb{R} . They also obtained a partial answer on Problem I in more general situation: if $X = Y$ is a perfectly normal space with G_δ diagonal and normal square and (g, h) be a pair of Hahn on X such that g is continuous, then there is a separately continuous function $f : X^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ such that $g \leq f \leq h$ and $\vee_f = h$.

Recall that a pair (g, h) of functions on X is a *countable pair of Hahn* if there exists a sequence of continuous functions u_n on X such that $h(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ and $g(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ for any $x \in X$. Obviously, every countable pair of Hahn is a pair of Hahn. Furthermore, by the Tong theorem the notion of a countable pair of Hahn coincides with the notion of a pair of Hahn for perfectly normal spaces. In our paper [2] (see also [3]) we deals with the following more general question.

Problem II. *Let X and Y be topological spaces and (g, h) be a countable pair of Hahn on X . When does it exist a separately continuous function $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ such that $g = \wedge_f$ and $h = \vee_f$?*

We solved Problem II for topological spaces X and Y such that Y has a non-scattered compactification. So, for a compact space Y we answered Problem II only in the non-scattered case.

Now we pass to considering of the case when Y is a scattered compact. A pair (g, h) of functions on X calls a *stable pair of Hahn* if there exists a sequence of continuous functions u_n on X such that $h(x) = \min_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ and $g(x) = \max_{n \in \mathbb{N}} u_n(x)$ for any $x \in X$. This notion plays the central role in our investigation. Evidently, every stable pair of Hahn is a countable pair of Hahn, and then a pair of Hahn. But the inverse implications are false.

We obtained the following results.

Theorem 1. *Let X be a topological space, Y be a compact countable topological space and $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ be a separately continuous function. Then (\wedge_f, \vee_f) is a stable pair of Hahn.*

Theorem 2. *Let X be a separable topological space, Y be a scattered compact and $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ be a separately continuous function. Then (\wedge_f, \vee_f) is a stable pair of Hahn.*

Theorem 3. *Let X be a compact, Y be a scattered compact such that X or Y has the countable chain condition, $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ be a separately continuous function and $g = \wedge_f$, $h = \vee_f$. Then (g, h) is a stable pair of Hahn.*

Theorem 4. *Let X be a topological space, Y be an infinity completely regular topological space and (g, h) be a stable pair of Hahn on X . Then there exists a separately continuous function $f : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ such that for any $x \in X$, $\min_{y \in Y} f(x, y) = g(x)$ and $\max_{y \in Y} f(x, y) = h(x)$.*

1. V. K. Maslyuchenko, V. S. Mel'nyk, H. A. Voloshyn. Hahn's pairs and zero inverse problem, *Mat. Stud.*, **48**, N1 (2017), 74-81.
2. A. S. Kushnir, O. V. Maslyuchenko, *Pairs of Hahn and separately continuous functions with the given extremal sections*, *Bukovinian Math. Journal.* **6**, N1 (2021), 210-229.
3. A. Kushnir, O. Maslyuchenko, *On extremal sections of continuous and separately continuous functions*, Report of Meeting, The Twenty-first Katowice-Debrecen Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities Brenna (Poland), February 2022, *Annales Mathematicae Silesianae* **36** (2022), N1, 98-99, DOI: 10.2478/amsil-2022-0003

Homotopy types of diffeomorphism groups of Morse-Bott foliations

Maksymenko Sergiy

maks@imath.kiev.ua

Institute of mathematics, NAS of Ukraine

Let F be the Morse-Bott foliation on the solid torus $T = S^1 \times D^2$ into 2-tori parallel to the boundary and one singular circle $S^1 \times 0$. A diffeomorphism $h : T \rightarrow T$ is called *foliated* (resp. *leaf preserving*) if for each leaf $\omega \in F$ its image $h(\omega)$ is also leaf of F (resp. $h(\omega) = \omega$). Gluing two copies of T by some diffeomorphism between their boundaries, one gets a lens space $L_{p,q}$ with a Morse-Bott foliation $F_{p,q}$ obtained from F on each copy of T . Denote by $\mathcal{D}^{fol}(T, \partial T)$ and $\mathcal{D}^{lp}(T, \partial T)$ respectively the groups of foliated and leaf preserving diffeomorphisms of T fixed on the boundary ∂T . Similarly, let $\mathcal{D}^{fol}(L_{p,q})$ and $\mathcal{D}^{lp}(L_{p,q})$ be respectively the groups of foliated and leaf preserving diffeomorphisms of $F_{p,q}$. Endow all those groups with the corresponding C^∞ Whitney topologies. The aim of the talk is give a complete description the homotopy types of the above groups $\mathcal{D}^{fol}(T, \partial T)$, $\mathcal{D}^{lp}(T, \partial T)$, $\mathcal{D}^{fol}(L_{p,q})$, $\mathcal{D}^{lp}(L_{p,q})$ for all p, q .

Analogous computations can be done for the non-orientable case: for a similar foliation on the solid Klein bottle and the twisted S^2 -bundle over the circle.

1. O. Khokhliuk, S. Maksymenko, *Homotopy types of diffeomorphism groups of polar Morse-Bott foliations on lens spaces, 1*, [arXiv:2210.11043](https://arxiv.org/abs/2210.11043), to appear in Journal of Homotopy and Related Structures, 2025, 44 pages, doi: 10.1007/s40062-023-00328-z
2. S. Maksymenko, *Homotopy types of diffeomorphisms groups of polar Morse-Bott foliations on lens spaces, 2*, [arXiv:2301.12447](https://arxiv.org/abs/2301.12447)
3. S. Maksymenko, *Diffeomorphism groups of Morse-Bott foliation on the solid Klein bottle by Klein bottles parallel to the boundary*, Transactions of Institute of Mathematics, the NAS of Ukraine – Modern problems of mathematics and its applications, III, 20, no. 1 (2023) 896-910, doi: 10.3842/trim.v20n1.532

Thin Film Equations with Nonlinear Deterministic and Stochastic Perturbations

Martynyuk Olha, Stanzhytskyi Oleksandr

o.martynyuk@chnu.edu.ua, ostanzh@gmail.com

Department of Mathematics, Ukraine

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine

We consider the nonlinear stochastic thin-film equation with nonlinear drift coefficients

$$du = (-\partial_x(u^2 u_{xx}) + l(u))dt + \partial_x(u \circ dW) + f(u)dW_1(t) \quad (1)$$

for $(t, x) \in [0, T) \times \mathbb{T}_L$, on torus \mathbb{T}_L , where T and L are positive constants, and \mathbb{T}_L denotes the torus on the interval $[0, L]$ with periodic boundary conditions

$$\partial_x^i u(\cdot, 0) = \partial_x^i u(\cdot, L), \quad i = 0, 1, 2, 3$$

and non-negative initial condition $u(0, x) = u_0(x)$. The term $\partial_x(u \circ dW)$ is a stochastic perturbation in Stratonovich form, and $f(u)dW$ is a stochastic perturbation of Ito type. Here

$$W(t, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \Psi_k(x) \beta^k(t), \quad W_1(t, x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k \Psi_k(x) \beta_1^k(t),$$

where $\{\Psi_k\}$ is ONB in $H^2(\mathbb{T})$.

The processes β^k and β_1^k are mutually independent standard real-valued \mathcal{F}_t -Wiener processes on a complete filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathcal{P})$, $t \in [0, T]$, with a complete and right-continuous filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$. The coefficients $\lambda_k \geq 0$ and γ_k satisfy the coloring condition

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (\lambda_k^2 + \gamma_k^2) < \infty. \quad (2)$$

Finally, we will assume that the nonlinear drift coefficients are $l(u) = -|u|^{r-1}u$ for some $r \geq 1$, and $f(u)$ is globally Lipschitz with $f(0) = 0$.

The deterministic equations of type (1) arise in modeling the motion of liquid droplets of thickness u , spreading over the solid surface. This model follows from lubrication theory under the assumption that the dimensions in the horizontal directions are significantly larger than in the vertical (normal) one. In this regime the dynamics of the droplet is governed by the surface tension and limited by viscosity. The equation (1) is parabolic in the interior of these regions, and degenerate on their boundary. The boundary of the wetted region, in turn, has a finite speed of propagation [1]. Thus, one may interpret (1) as a fourth-order nonlinear free boundary problem inside a wetted region, which itself evolves in time. In broad terms, the dynamics of the deterministic version of (1) is characterized by the presence of the *wetted regions* $u > 0$.

The stochastic version of thin-film equation, which takes into account the effect of random forcing when modeling the enhanced spreading of droplets, was first introduced in [4, 2, 3], with $l = f = 0$.

Our main result is the following existence theorem for a solution of equation (1).

Theorem. (*Existence of martingale solution*) Suppose $u_0 \in H^1(\mathbb{T})$ is such that $u_0 \geq 0$. Then the equation (1) with has a martingale solution $u(t)$, which is non-negative a.s. for $t \in [0, T]$, and for any $p \geq 2$ there is $C_p > 0$ such that

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} \|u(t, \cdot)\|_{H^1(\mathbb{T})}^p \leq C_p \|u_0\|_{H^1(\mathbb{T})}^p$$

for any $p \in [2, \infty)$, where $C < \infty$ is independent on u_0 .

1. Bernis F. and Friedman A. Higher order nonlinear degenerate parabolic equations // J. Differ. Eqn. – 1990. – 83, № 1. – p. 179–206.
2. Dareiotis K, Gess B, Gnann M, and Grün G. Non-negative Martingale solutions to the stochastic thin-film equation with nonlinear gradient noise// Arch. Ration. Mech. Anal.–2021.– 242, №1–p. 179–234.
3. Fischer J. and Grün G. Existence of positive solutions to stochastic thin-film equations// SIAM J. Math. Anal.–2018.–50, №1–p. 411–455.
4. Gess B. and Gnann M. The stochastic thin-film equation: existence of nonnegative martingale solutions// Stochastic Process. Appl.–2020.–130, №12–p. 7260–7302.

Streamlining Practical Labs: Using Decorators to Automate Code Testing in Google Colab

Melnyk Halyna

`g.melnik@chnu.edu.ua`

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

The landscape of education is evolving with the integration of cutting-edge technologies, redefining the way students learn and instructors teach. In the realm of programming education, the utilization of innovative tools holds the promise of enhancing practical labs and transforming the learning experience. Google Colab, a cloud-based coding platform, emerges as a key player in this paradigm shift, offering a dynamic environment for collaborative programming and experimentation.

Traditional barriers of local software installations and compatibility issues are dismantled with Google Colab's cloud-based approach. Educators can conduct programming practical labs effortlessly, providing students with an accessible and consistent coding environment that negates the need for manual software setup.

However, the influx of students' work in Colab notebooks brings forth the challenge of manual progress assessment. Educators find themselves navigating through multiple notebooks to evaluate each student's solutions, often consuming substantial time and effort. This manual assessment process can hinder the scalability and efficiency of programming classes.

The concept of employing decorators to the functions and classes created by students in Colab notebooks presents an innovative solution to the manual assessment conundrum. Decorators, akin to wrappers, allow instructors to inject automated tests, performance benchmarks, and logging mechanisms into the students' code. This method transforms the code not only into a functional solution but also a testable and analyzable one.

To facilitate the integration of decorators, educators can curate a dedicated GitHub repository housing a collection of decorator functions. These functions are meticulously designed to assess common coding aspects such as input validation, output correctness, and execution efficiency. This repository serves as a centralized resource that empowers both educators and students to access and apply decorators effortlessly.

Leveraging the repository, instructors guide students on importing the decorator module into their Colab files. This integration is straightforward and mirrors the real-world practice of importing external libraries. The module acts as an extension to the students' code, enriching it with standardized and quality-tested functionalities.

With the module imported, students can now wrap their functions and classes with the decorators relevant to their tasks. This process imbues their code with enhanced capabilities such as comprehensive testing suites, performance measurement, and insightful logging. As a result, students not only create functional solutions but also engage in the art of writing robust and reliable code.

The benefits of automating code testing through decorators in Colab are multifaceted. Educators can conduct more comprehensive assessments efficiently, providing students with prompt feedback. Students, in turn, learn to write code that adheres

to industry standards and best practices. This approach also lays the foundation for continuous improvement, allowing educators to iteratively refine and expand the repository of decorators, thereby enhancing the quality and coverage of automated assessments.

The integration of decorator functions for code testing in Google Colab ushers in a new stage of programming education. It improves the way assignments are completed, and assessed. With the power of decorators, the manual assessment bottleneck is dissolved, and students are equipped with the skills needed to thrive in the rapidly evolving landscape of software development. By embracing these new technologies, educators can instill in their students a passion for coding excellence and a readiness for the challenges of the digital world.

1. Google Colaboratory. URL: <https://colab.google/> (date of access: 01.09.2023).
2. Understanding Python Decorators and How to Use Them Effectively. Soshace. URL: <https://soshace.com/understanding-python-decorators-and-how-to-use-them-effectively/> (date of access: 01.09.2023).

Using github classroom for student education

Melnyk Vasyl

`va.melnyk@chnu.edu.ua`

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University

In the dynamic landscape of modern education, technology continues to play a transformative role in enhancing learning experiences. GitHub Classroom, a powerful tool born from the realm of software development, has emerged as a versatile platform for educators to facilitate collaboration, code sharing, and project-based learning. This thesis explores the benefits and innovative applications of GitHub Classroom in student education, showcasing how it empowers educators and learners alike.

GitHub Classroom: A Brief Overview. GitHub Classroom is an extension of the widely used version control platform GitHub. It provides educators with a streamlined way to distribute, collect, and review assignments in a collaborative and organized manner. Leveraging the power of Git, GitHub Classroom offers students a practical introduction to version control, a fundamental skill in software development and beyond. [1]

Introducing technology such as GitHub requires that the students are comfortable with the tools and can understand their use.

The best approach to starting the usage of GitHub classroom for university course is to start with a creation of github organization. There you can register classroom for every laboratory task in the course and add a roster of students assigned to the course.

You can use autograding to automatically check a student's work for an assignment on GitHub Classroom. You configure tests for an assignment, and the tests run immediately every time a student pushes to an assignment repository on GitHub.com. The student can view the test results, make changes, and push to see new results. Autograding tests can be added during the creation of a new assignment. You can also download a CSV of your students' autograding scores via the "Download" button. A pull request can be automatically created, where you can provide feedback and answer a student's questions about an assignment. To create and access the feedback pull request, you must enable the feedback pull request when you create the assignment.

GitHub Pages in connection with classroom. Github Pages can be used to automatically deploy student works and make them available via url link. GitHub Pages is available in public repositories with GitHub Free and GitHub Free for organizations, and in public and private repositories with GitHub Pro, GitHub Team, GitHub Enterprise Cloud, and GitHub Enterprise Server [2].

1. Teach with GitHub Classroom - GitHub Docs. GitHub Docs. URL: <https://docs.github.com/en/education/manage-coursework-with-github-classroom/teach-with-github-classroom> (date of access: 01.09.2023).
2. Creating a GitHub Pages site - GitHub Docs. GitHub Docs. URL: <https://docs.github.com/en/pages/getting-started-with-github-pages/creating-a-github-pages-site> (date of access: 01.09.2023).

Asymptotic Behavior of Stochastic Functional Differential Evolution Equations

Mogylova Viktoriia, Koval'chuk Tatiana, Kravets Vasil

mogylova.viktoria@gmail.com, 8172@ukr.net, vkravets@ukr.net

Department of Physics and Mathematics,

Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Ukraine,

State University of Trade and Economics, Kyiv, Ukraine,

Dmitro Motornyi Tavia state agrotechnological university, Melitopol, Ukraine

We study the long time behavior of nonlinear stochastic functional-differential equations in Hilbert spaces. More precise we establish the existence of invariant measure based on Krylov-Bogoliubov theorem on the tightness of the family of measures.

We consider the solutions of stochastic functional-differential equations. In a bounded domain, the equation reads as

$$\begin{aligned} du &= [Au + f(u_t)]dt + \sigma(u_t)dW(t) \text{ in } D, t > 0; \\ u(t, x) &= \phi(t, x), t \in [-h, 0], u(0, x) = \varphi_0(x) \text{ in } D; \\ u(t, x) &= 0, x \in \partial D, t \geq 0. \end{aligned} \tag{1}$$

The corresponding problem in the entire space has the form

$$\begin{aligned} du &= [Au + f(u_t)]dt + \sigma(u_t)dW(t) \text{ in } \mathbb{R}^d, t > 0; \\ u(t, x) &= \phi(t, x), t \in [-h, 0], u(0, x) = \varphi_0(x) \text{ in } \mathbb{R}^d. \end{aligned} \tag{2}$$

Here A is an elliptic operator

$$A = A(x) = \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x), \tag{3}$$

the interval $[-h, 0]$ is the interval of delay, and $u_t = u(t+\theta)$ with $\theta \in [-h, 0]$. Denote

$$\rho(x) := \frac{1}{1 + |x|^r} \tag{4}$$

where $r > d$ if $D = \mathbb{R}^d$ and $r = 0$ (i.e. no weight) for bounded D . We introduce the following spaces:

$$\begin{aligned} B_0^\rho &:= L_\rho^2(D); \\ B_1^\rho &:= L^2(-h, 0; L_\rho^2(D)); \\ B^\rho &:= B_0^\rho \times B_1^\rho; \\ H &:= L^2(D). \end{aligned} \tag{5}$$

The coefficients a_{ij} of the operator A defined in (3) are Holder continuous with the exponent $\beta \in (0, 1)$, symmetric, bounded and satisfying the ellipticity condition

$$\sum_{i,j=1}^d a_{i,j} \eta_i \eta_j \geq C_0 |\eta|, \quad \eta \in \mathbb{R}^d$$

for some $C_0 > 0$. The coefficients b_i and c are also bounded and Hölder continuous with some positive Hölder exponent. We will use the compactness approach of Da Prato and Zabczyk [2].

Assumptions on nonlinearities. Assume f and σ satisfy the following conditions:

- [i] The functionals f and σ map B_1^ρ to B_0^ρ ;
- [ii] There exists a constant $L > 0$ such that

$$\|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)\|_{B_0^\rho} + \|\sigma(\varphi_1) - \sigma(\varphi_2)\|_{B_0^\rho} \leq L\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{B_1^\rho}$$

for any $\varphi_1, \varphi_2 \in B_1^\rho$.

Hence the phase space of the problem is the Hilbert space B^ρ . In this case $y(t) \in B^\rho$ if $y(t) = (u(t, \cdot), u_t) \in B_0^\rho \times B_1^\rho$, with $u_t = u(t + \theta, \cdot)$ and $\theta \in [-h, 0]$. Define $\bar{\rho}(x) = (1 + |x|^{\bar{r}})^{-1}$. The main result is the following theorem:

Theorem 1. *Suppose f and σ satisfy the conditions [i] and [ii] and assume the equation (1) or (2) has a solution in $B^{\bar{\rho}}$ which is bounded in probability for $t \geq 0$ with*

$$r > d + \bar{r}. \tag{6}$$

Then there exists an invariant measure μ on B^ρ , i.e.

$$\int_{B^\rho} P_t \varphi(x) d\mu(x) = \int_{B^\rho} \varphi(x) d\mu, \text{ for any } t \geq 0 \text{ and } \varphi \in C_b(B^\rho).$$

1. Kryloff N. and Bogoliouboff N. La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire// Ann. of Math. – 1937. – 38, № 1. – p. 65–113.
2. Da Prato G. and Zabczyk J. Stochastic equations in infinite dimensions// Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge–460 p.

Patterns in Shape Memory Alloys: Variational Perspective

Misiats Oleksandr

omisiats@vcu.edu

Virginia Commonwealth University

In my talk I will describe a class of minimization problems arising in modelling shape memory alloys. I will start with a shape memory material illustration, followed with a simple one dimensional model of this phenomenon. Its extensions in 2D and 3D will help us understand the energetic mechanism behind the formation of patterns in physical experiments. By means of sharp upper and lower energy bounds, I will show that the physically observable patterns, such as branching or zigzag, are actually energetically optimal.

Dependence on \aleph coordinates of separately continuous functions of many variables

Mykhaylyuk Volodymyr

vmykhaylyuk@ukr.net

Jan Kochanowski University in Kielce, Poland

Yurii Fedkovych Chernivtsi National University, Ukraine

The dependence of continuous mappings on products on a certain number of coordinates was intensively studied by many mathematicians of the middle of the 20th century. The most general results in this direction were obtained by N. Noble and M. Ulmer in [1].

Theorem. (*[1, Theorems 2.3 and 3.2]*) *Let \aleph be an infinite cardinal, X be the product of family $(X_s : s \in S)$ of nontrivial completely regular spaces X_s . Then the following conditions are equivalent*

- (i) *every continuous function $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ depends on \aleph coordinates;*
- (ii) *X is pseudo- \aleph^+ -compact.*

Analogous questions on the dependence for separately continuous mappings remained out of the attention of researchers of the separately continuous mappings theory. Necessary and sufficient conditions of the dependence on a certain number of coordinates of separately continuous functions of two or more variables on products were investigated in [2] and [3]. In particular, the following characteristic results were obtained there.

Theorem. (*[2, Theorem 6]*) *Let \aleph be an infinite cardinal, X and Y be the products of families $(X_s : s \in S)$ and $(Y_t : t \in T)$ of nontrivial compact Hausdorff spaces X_s and Y_t with $|S \cup T| > \aleph$. Then the following conditions are equivalent.*

- (i) *every separately continuous function $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ depends on \aleph coordinates;*
- (ii) *$p(X) \leq \aleph$ or $p(Y) \leq \aleph$ (where $p(Z)$ is the pointwise cellularity of a topological space Z).*

Theorem. (*[3, Theorem 3]*) *Let \aleph be an infinite cardinal, $n \geq 2$, X_1, \dots, X_n be the products of families $(X_s^{(1)} : s \in S_1), \dots, (X_s^{(n)} : s \in S_n)$ of nontrivial metrizable spaces $X_s^{(k)}$ with $|S_1 \cup \dots \cup S_n| > \aleph$. Then the following conditions are equivalent.*

- (i) *every continuous function $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$ depends on \aleph coordinates;*
- (ii) *every separately continuous function $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$ depends on \aleph coordinates;*
- (iii) *for every $k \leq n$ and $s \in S_k$ the density $d(X_s^{(k)})$ of the topological space $X_s^{(k)}$ is less than or equal to \aleph .*

The following question naturally arises in the connection with the previous two theorems.

Question. *Let \aleph be an infinite cardinal, $n \geq 2$, X_1, \dots, X_n be the products of families $(X_s^{(1)} : s \in S_1), \dots, (X_s^{(n)} : s \in S_n)$ of nontrivial compact spaces $X_s^{(k)}$ with $|S_1 \cup \dots \cup S_n| > \aleph$. What are the necessary and sufficient conditions that every separately continuous function $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$ depends on \aleph coordinates?*

Definition. A family $(A_s : s \in S)$ of subsets A_s of the product $\prod_{k=1}^n X_k$ of topological spaces X_k is called (locally) finite with respect to the i -th variable if for every

$$p = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^{i-1} X_k \times \prod_{k=i+1}^n X_k$$

the family $(B_s : s \in S)$ of sets

$$B_s = \{x \in X_i : (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \in A_s\}$$

is (locally) finite in X_i . A family $(A_s : s \in S)$ of sets $A_s \subseteq \prod_{k=1}^n X_k$ is called separately (locally) finite if it is (locally) finite with respect to any variable x_i .

Let \mathfrak{A} be the system of all separately finite families of open nonempty subsets of the product $X_1 \times \dots \times X_n$ of topological spaces X_k and \mathfrak{B} be the system of all separately locally finite families of open nonempty subsets of the product $X_1 \times \dots \times X_n$. The cardinal

$$sc(X_1 \times \dots \times X_n) = \sup\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$$

is called a *separate cellularity* of $X_1 \times \dots \times X_n$ and the cardinal

$$slc(X_1 \times \dots \times X_n) = \sup\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \in \mathfrak{B}\}$$

is called a *separate locally cellularity* of $X_1 \times \dots \times X_n$.

Theorem. Let \aleph be an infinite cardinal, $n \geq 2$, X_1, \dots, X_n be the products of families $(X_s^{(1)} : s \in S_1), \dots, (X_s^{(n)} : s \in S_n)$ of nontrivial completely regular spaces $X_s^{(k)}$ with $|S_1 \cup \dots \cup S_n| > \aleph$ and such that all spaces X_1, \dots, X_n are countable Čech complete. Then the following conditions are equivalent

- (i) $slc(X_1 \times \dots \times X_n) \leq \aleph$;
- (ii) every separately continuous function $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$ depends on \aleph coordinates.

Corollary. *Corollary.* Let \aleph be an infinite cardinal, $n \geq 2$, X_1, \dots, X_n be the products of families $(X_s^{(1)} : s \in S_1), \dots, (X_s^{(n)} : s \in S_n)$ of nontrivial compact Hausdorff spaces $X_s^{(k)}$ with $|S_1 \cup \dots \cup S_n| > \aleph$. Then the following conditions are equivalent

- (i) $sc(X_1 \times \dots \times X_n) \leq \aleph$;
- (ii) every separately continuous function $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$ depends on \aleph coordinates.

1. Noble N., Ulmer M. *Factoring functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972) 329–339.
2. Mykhailiuk V. *Dependence of separately continuous functions on \mathfrak{n} coordinates on products of compact sets*, Ukrainian Math. J. **50** (6) (1998) 934–943.
3. Mykhailiuk V. *Separately continuous functions on products and their dependence on \aleph coordinates*, Ukrainian Math. J. **56** (10) (2004) 1619–1632.

Stationary Wave Diffraction Problems on Spherical Defects

Nazarenko Oleg¹, Stekhun Angela²

Gelo.fabric@gmail.com, angela.stehun@gmail.com

¹*Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture*

²*Odesa I. I. Mechnikov National University*

The main analytical methods used in three-dimensional problems of the theory of elasticity are the potential method, the method of integral transformations, the method of distribution of variables (the Fourier method and various modifications), as well as the theory of the function of complex variables.

In addition, one of the general methods that allow studying the interaction of defects (cracks and inclusions) with the environment is the method of discontinuous solutions [5]. In this method, one of the main points is the concept of a defect, which should be understood as a part of the surface, when crossing it, breaks of the first kind of displacement and stress are suffered. A discontinuous solution of the elasticity equations is a solution that satisfies them everywhere except for the points of the defect. At these points, stress and displacement jumps are considered known.

The purpose of the work is to transfer the method of discontinuous solutions to dynamic problems of diffraction of elastic waves on spherical defects [5]. For what should be constructed a discontinuous solution of the wave equation [3, 6], and then three-dimensional equations of motion of the elastic medium for the specified defect. Then, using the constructed discontinuous solution of the equations of motion of an elastic medium, reduce the problem of elastic waves on a spherical defect to integral equations, including the problem of diffraction of torsional waves [4].

Research methods are based on the well-known fact of reducing the problems of oscillations of an elastic medium to the determination of three functions that satisfy the wave equation in the spherical coordinate system [1, 2]. Therefore, in order to construct a discontinuous solution of the equations of motion of an elastic medium, it is necessary to first construct a discontinuous solution of the wave equation for a spherical defect. It is built using a generalized scheme of the method of integral transformations. After that, using the method of discontinuous solutions, diffraction problems are reduced to integral equations of the first kind with non-integrated features. To construct such a solution by the method of orthogonal polynomials, a new spectral relation for Jacobian polynomials with nonintegrated weight functions is used. At the same time, integrals of functions with non-integrated features should be understood in a generalized (regularized) sense.

The scientific novelty of the work is as follows:

1. Constructed discontinuous solution of the wave equation and three-dimensional equations of motion for a spherical defect.
2. The problems of diffraction of elastic waves of arbitrary nature on a spherical defect have been reduced to one-dimensional integro-differential (integral) equations.

The reliability of the main provisions and the obtained results is ensured by the mechanical and mathematical rigor of the problem statements, the correct use of the proven mathematical apparatus for their solution, as well as the use of various variants of the calculated sought values with subsequent comparison of the results.

1. Guz A. N., Kubenko A. V., Cherevko M. A. Diffraction of elastic waves. – Kyiv: Naukova Dumka, 1978. – 308 c.
2. Guz A. N., Names Y. N. Perturbation methods in spatial problems of elasticity theory. – Kyiv: Vyshcha Shkola, 1982. – 352. c.
3. Nazarenko O. A. Construction of a discontinuous solution of the wave equation for a spherical defect. // Norwegian Journal of development of the International Science, ISSN 3453-9875, Oslo, Norway. – 2022. – No 87. – P. 3–5.
4. Nazarenko O.A., Stehun A.O., Yarovy A.T. Diffraction of elastic waves on spherical defects. // Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, ISSN 2616-7700 (print), 2708-9568 (online), Uzhgorod «Hoverla» – 2023. – Vol.42, No 1. – P. 64–71.
5. Popov G. Ya. Problems of stress concentration in the neighbourhood of a spherical defect. // Advances in Mechanics. – 1992. – 15, 1-2. – P. 71–110.
6. Popov G. Y., Nazarenko O. A. Research method of burst analysis of acoustic wave diffraction on a perfectly rigid obstacle. // Acoustics and ultrasonic technique. Kyiv. – 1992. – 27. – P. 27–31.

Construction of continuous functions with the given cluster set in a point with finite local rank

Onypa Denys, Maslyuchenko Oleksandr

d.onypa@chnu.edu.ua, ovmas1@gmail.com

*Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University
University of Silesia in Katowice*

The notion of a cluster set was first formulated in 1985 by Painlevé in the study of analytic functions of a complex variable. Actually, the cluster sets is a topological notion which characterizes a behavior of a function on the closure of the domain. The oscillation is another limit characteristic of functions which is tightly connected with the notion of cluster sets. Namely, the oscillation is the diameter of the cluster set.

Let X be a topological spaces and Y be a compact space, $D \subseteq X$ and $f : D \rightarrow Y$. The cluster set of f at a point $x \in \bar{D}$ is defined as

$$\bar{f}(x) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}_x} \overline{f(U \cap D)},$$

where \mathcal{U}_x denotes the system of all neighborhoods of x in X . The corresponding multifunction $\bar{f} : \bar{D} \multimap Y$ is called *the cluster multifunction of f* . Of course, we can consider the cluster multifunction for a non-compact space Y . But in this case the domain of \bar{f} is narrower than \bar{D} .

We deal with the following general question.

Problem 1. *Let X be a topological space and Y be a dense subspace of a compact space \bar{Y} , $D \subseteq X$ and $L \subseteq \bar{D} \setminus D$. Describe all multifunctions $\Phi : L \multimap \bar{Y}$ such that there exists a continuous function $f : D \rightarrow Y$ with $\bar{f}(x) = \Phi(x)$ for any $x \in L$.*

In [1] we solved Problem 1 in the case when X is a metrizable space, D is a boundary locally connected open subset of X , L is a closed set, $Y = \mathbb{R}$ and $\bar{Y} = \mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

Here we consider only the case when L is a singleton but Y is more general topological space. The first result in this direction was obtained in [2]. There we introduce the following notion. A subspace X of a topological space Y we call *locally arcwise connectedly embedded into Y* if for any point $a \in Y$ and its neighborhood U in Y there is a neighborhood V of a in Y such that for any points $x, y \in V \cap X$ there is a continuous curve $L_{x,y} \subseteq U \cap X$ connecting x and y . In [2] we obtain the following result.

Theorem 1 ([2]). *Let Y be a locally arcwise connectedly embedded into a metrizable compact space \bar{Y} . Then F is a non-empty closed connected subset of \bar{Y} if and only if there exists a continuous function $f : (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\bar{f}(0) = F$.*

We generalize these results to the case when the domain of \bar{f} is an arbitrary metric space. The central role in our approach is the notion of the local rank. The rank of a point x in a subset E of some topological space X we define as the supremum of all $n \in \mathbb{N}$ such that there are disjoint nonempty clopen sets

U_1, U_2, \dots, U_n , in E with $x \in \overline{U}_k$ for any $k = 1, 2, \dots, n$. We denote it by $r(x, E)$. The local rank of the point x in E is defined as

$$\text{lr}(x, E) = \sup_{U \in \mathcal{U}_x} r(x, E \cap U).$$

It is clear that $(r(x, E \cap U))_{U \in \mathcal{U}_x}$ is an increasing net with respect to the order \supseteq on \mathcal{U}_x . Thus, the local rank is the limit of this net. In particular, if $\text{lr}(E, x) \in \mathbb{N}$ then we can replace the supremum to the maximum in the previous definition.

Let us denote by $\mathcal{C}(E)$ the system of all connected components of the set E . The notation $\text{nc}(E)$ means the number of all connected components in the case when $\mathcal{C}(E)$ is finite and $\text{nc}(E) = \infty$ if $\mathcal{C}(E)$ is infinite.

The following result gives some necessary condition for the existing of continuous function with the given cluster set.

Theorem 2. *Let D be a subset of a topological space X , $x \in \overline{D}$, Y be a dense subset of a compact \overline{Y} and $f : D \rightarrow Y$ be a continuous function. Then $\text{nc}(\overline{f}(x)) \leq \text{lr}(x, D)$.*

Using Theorem 1 we also obtain the inverse result in the case when the local rank of a point x in the domain D is finite.

Theorem 3. *Let X be a metrizable space X , $D \subseteq X$, $x \in \overline{D}$, Y be a dense locally arcwise connectedly embedded into a metrizable compact \overline{Y} and F be a non-empty closed subset of Y such that $\text{nc}(F) \leq \text{lr}(x, D) < \infty$. Then there exists a continuous function $f : D \rightarrow Y$ such that the cluster set $\overline{f}(x)$ equals to F .*

1. O. V. Maslyuchenko, D. P. Onypa. *The cluster sets of continuous functions*, Mat. Stud., **46** (2016), N 1, 44–50. (in Ukrainian)
2. O. V. Maslyuchenko, D. P. Onypa, *On cluster sets of continuous functions with values in locally arcwise connected spaces*, Buk. Math. J., **3** (2015), N 3–4, 127–132. (in Ukrainian)

Mathematical modeling and parameters identification of nonlinear competitive adsorption in nanoporous particles media

Petryk Mykhaylo, Boyko Igor, Petryk Oksana

mykhaylo_petryk@tntu.edu.ua

Ternopil Ivan Puluj National Technical University

Based on the physical hypotheses and justifications of multi-component mass heat transfer in the media of nanoporous particles presented in [1, 2], we have developed a competitive adsorption model. For interparticle space model is described as follows:

$$\frac{\partial C_s(t, Z)}{\partial t} = \frac{D_{inter,s}}{l^2} \frac{\partial^2 C_s}{\partial Z^2} - e_{inter} \tilde{K}_s \frac{D_{intra,s}}{R^2} \left(\frac{\partial Q_s}{\partial X} \right)_{X=1}, \quad (1)$$

and in the intraparticle space following equation is obtained:

$$\frac{\partial Q_s(t, X, Z)}{4t} = \frac{D_{intra,s}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 Q_s}{\partial X^2} + \frac{2}{X} \frac{\partial Q_s}{\partial X} \right). \quad (2)$$

with initial conditions:

$$\begin{aligned} C_s(t=0, Z) &= 0; \quad Q_s(t=0, X, Z) = 0; \\ Z &\in (0, 1), \quad X \in (0, 1), \quad s = \overline{1, 2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Boundary conditions for coordinate X of the crystalite is give by the Langmuir's equilibrium:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} Q_s(t, X=0, Z) &= 0; \\ Q_s(t, X=1, Z) &= \frac{K_s C_s(t, Z)}{1 + K_1 C_1(t, Z) + K_2 C_2(t, Z)}, \quad s = \overline{1, 2} \end{aligned} \quad (4)$$

together with boundary and interface conditions for coordinate Z :

$$C_1(t, 1) = 1; \quad C_2(t, 1) = 0.5; \quad \frac{\partial C_s}{\partial Z}(t, Z=0) = 0, \quad t > 0, \quad (5)$$

where K_s – are the adsorption constants, $D_{inter,s}$, $D_{intra,s}$ – are the diffusion coefficients for interparticle space and intraparticle space for s -th adsorbate component.

Here $C_s, Q_s, j = \overline{1, n}$ - is the current concentrations of diffused adsorbent components in the interparticle space (interparticle space) and micropores of particles (intraparticle space), $C_{\infty j}, Q_{\infty j}$ - is the the corresponding equilibrium concentrations of the adsorbent components in the gas and adsorbed phases, n is the total amount of diffused adsorbent components,

$$\tilde{K}_s = \frac{Q_{\infty_s}}{Q_{\infty_s}} \quad (6)$$

- is the adsorption constant of the s -th component of the adsorbent, where $K_s = 1/\tilde{K}_s$, $s = \overline{1, n}$. Macroporosity of the medium is defined as follows:

$$e_{\text{inter}_s} = \frac{\varepsilon_{\text{inter}} C_s}{\varepsilon_{\text{inter}} C_s + (1 - \varepsilon_{\text{inter}}) q_s} \approx \frac{\varepsilon_{\text{inter}}}{(1 - \varepsilon_{\text{inter}}) \tilde{K}_s}; \quad (7)$$

$$e_{\text{intra}_s} = 1 - e_{\text{inter}_s}; \quad s = \overline{1, n}$$

The non-isothermal model (1) - (5) is decomposed into a system of linearized boundary value problems using the Landau decomposition approach of nonlinear Langmuir competitive adsorption equilibrium to a convergent series at the small parameter [3]. As result, the nonlinear function of Langmuir's multi-component competitive adsorption equilibrium is given in the following form:

$$\varphi_j(C_1, C_2, \dots, C_n) = \frac{K_s C_s(t, Z)}{1 + \sum_{s_1=1}^n K_{s_1} C_{s_1}(t, Z)}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (8)$$

High-speed analytical solutions of linearized problems that allow calculation parallelization using Heaviside's operational method are constructed. On the base linearized mathematical model (1) - (5) the inverse boundary value problems are formalized and identification of diffusion coefficients for interparticle space and intraparticle space are realized.

1. M. Petryk, N. Ivanchov, S. Leclerc, D. Canet, J. Fraissard. Competitive Adsorption and Diffusion of Gases in a Microporous Solid. Zeolites - New Challenges. IntechOpen, Jul. 22, 2020. doi: 10.5772/intechopen.88138.
2. Petryk, M., Boyko, I., Fraissard, J. et al. Modelling of non-isothermal adsorption of gases in nanoporous adsorbent based on Langmuir equilibrium. Adsorption 29, 141–150 (2023). <https://doi.org/10.1007/s10450-023-00389-9>.
3. Petryk, M.R., Boyko, I.V., Khimich, O.M. et al. High-Performance Supercomputer Technologies of Simulation and Identification of Nanoporous Systems with Feedback for n-Component Competitive Adsorption. Cybern Syst Anal 57, 316–328 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00357-7>

Investigations into the Asymptotic Equivalence between Stochastic Functional Differential Equations and Ordinary Differential Equations

Petryna G.

grpetryna@gmail.com

Taras Shevchenko National University of Kyiv

The topic of asymptotic equivalence between two systems is widely recognized within the domain of ordinary differential equations (ODE) theory. Extensive scholarly literature delves into the exploration of this concept. Related findings concerning functional differential equations (FDE) can be found in the study by [1], whereas research on stochastic differential equations is elaborated in [2]. This article [3] introduces novel outcomes concerning the asymptotic equivalence of the functional stochastic differential equations system and an ODE system.

For $h > 0$ we define a function space $C_h = C([-h, 0]; \mathbf{R}^d)$ of continuous functions with a norm $\|\phi\|_C = \sup_{\theta \in [-h, 0]} |\phi(\theta)|$. Consider the system of ODE in the following form

$$dx = Axdt, \tag{1}$$

with the initial conditions $x(t_0) = x_0$, $t \geq t_0 \geq 0$, $x \in \mathbf{R}^d$, and A be a constant deterministic matrix. Along with system (1), we consider the system of Functional Stochastic Differential Equations

$$dy = (Ay + \int_{-h}^0 B(t, \theta)y(t + \theta)d\theta)dt + \int_{-h}^0 D(t, \theta)y(t + \theta)d\theta dW(t), \tag{2}$$

where $B(t, \theta), D(t, \theta)$ are continuous deterministic matrices for $t \geq 0$, $\theta \in [-h, 0]$, integrable with respect to θ . $W(t)$ is a Wiener process on a probability space (Ω, \mathbf{F}, P) with filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\} \subset \mathbf{F}$, and there exist such $b(t)$ and $d(t)$

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-h}^0 B(t, \theta)\phi(\theta)d\theta \right\| &\leq b(t)\|\phi\|_C, \quad t \geq 0, \\ \left\| \int_{-h}^0 D(t, \theta)\phi(\theta)d\theta \right\| &\leq d(t)\|\phi\|_C, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Theorem. *Let all solutions of system (1) be bounded on $t \in [0, \infty)$ and the following conditions hold*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |b(t)|dt &\leq K_1 < \infty, \\ \int_0^\infty |d(t)|^2 dt &\leq K_1 < \infty, \end{aligned} \tag{3}$$

for some $K_1 > 0$, then system (2) is asymptotically mean square equivalent to system (1), i.e. for each solution $y(t)$ of system (2) there corresponds a solution $x(t)$ of system (1) such that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}|x(t) - y(t)|^2 = 0,$$

Also, if we change (3) by

$$\int_0^{\infty} td^2(t)dt \leq K_1 < \infty,$$

then system (2) is asymptotically equivalent to system (1) with probability 1, i. e. for each solution $y(t)$ of system (2) there corresponds a solution $x(t)$ of system (1) such that

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - y(t)| = 0\} = 1.$$

1. K. G. Valeev, N. A. Kulesko, Family of solutions with a finite number of parameters of a system of differential equations with deviating argument, Ukrainian Mathematical Journal, 1968, 20, No 6, 637-646.
2. O. M. Stanzhyts'kyi, A. P. Krenevich, I. G. Novak, Asymptotic equivalence of linear stochastic Ito systems and oscillation of solutions of linear second-order equations, Differ. Equ., 2011, 47, No 6, 799-813.
3. O. M. Stanzhyts'kyi, G. O. Petryna, M. V. Hrysenko, On the Asymptotic Equivalence of Ordinary and Functional Stochastic Differential Equations, Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA), 31 (1), 2023, 125-142

Conditions of the input-to-state stability for the impulse boundary-value problem

Pokutnyi Oleksandr, Panasenko Yevhen

sherlock_int@ukr.net, panasenko.yevgeniy@gmail.com

Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Zaporizhzhia National University

The report is devoted to obtaining the conditions of the input-to-state stability of the impulse boundary-value problem.

Statement of the problem.

Consider the following boundary-value problem with impulse action:

$$\begin{cases} x'(t) = -Ax(t) + Bu, \\ x(t_1 + 0) - Dx(t_1 - 0) = \alpha. \end{cases} \quad (1)$$

Here A is a linear and bounded operator in the Hilbert space \mathcal{H} which has a bounded inverse A^{-1} , B, D are linear and bounded operators in \mathcal{H} , $\|D\| \leq q$, $\alpha \in \mathcal{H}$. The main result is the following theorem.

Theorem 1. *For the solution of the boundary-value (1) the following estimate is hold*

$$\|x(t)\| \leq \frac{e^{-t\|A\|}}{1-q} e^{t_1\|A\|} \|\alpha\| + \|A^{-1}\| \left(e^{t_1\|A\|} + 3 \right) \|Bu\| \quad (2)$$

From this theorem follows condition of the input-to-state stability (see [1] - [5]).

Acknowledgments. The authors acknowledges the financial support from the grant: Boundary-Value Problems and Impulse Perturbations of Nonlinear Evolution Equations in Infinite-Dimensional Spaces. 3M2022 (Reg. No. 0122U002463).

1. Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary-Value Problems. - 2nd ed. Berlin: De Gruyter, 2016. - 296 p.
2. Sontag E.D. Mathematical control theory. Deterministic finite dimensional systems, New York, Springer, 2nd edition, 1991.
3. Perestyik M., Samoilenko A. Impulse differential equations. – World scientific, 1995. — 472 p.
4. Kapustyan O.V., Yusupiv T.V. Stability of limit regimes in general reaction-diffusion type systems // Visnik Uggorodsk. University. – 41, No. 2. – P. 48–60.
5. Dashkovskiy S, Slynko V. Dwell-time stability conditions for infinite dimensional impulsive systems // Automatica. – 2023. – Vol. 147. – P. 1–12.

Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer means

Rovenska Olga

rovenskaya.olga.math@gmail.com

Donbas State Engineering Academy

Let $C(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi; \pi]$ be the space of continuous 2π -periodic functions with the norm

$$\|f\|_C = \max_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|.$$

Denote by $G(q, m)$, $q \in (0; 1)$, $m \in [-1; 1]$ the class of continuous 2π -periodic functions, given by the convolution

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(x+t) P_q(t) dt, \quad P_q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos kt,$$

where A_0 is a constant, $P_q(t)$ is the well-known Poisson kernel, the summable function φ satisfies the condition

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in \mathbb{T}} |\varphi(t)| \leq 1, \quad M_{\mathbb{T}}[\varphi] := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \varphi(t) dt = m.$$

Let

$$S[f] = \frac{a_0[f]}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k[f] \cos kx + b_k[f] \sin kx),$$

be the Fourier series of the function $f \in C(\mathbb{T})$, where $a_k[f]$, $b_k[f]$, $k \in \mathbb{Z}_+$ are the Fourier coefficients of the function f and let

$$S_n[f](x) = \frac{a_0[f]}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k[f] \cos kx + b_k[f] \sin kx)$$

be the n -partial sum of the Fourier series of the function f .

Trigonometric polynomials given by the relation

$$\sigma_n(f; x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f; x)$$

are called Fejer means of function f .

The purpose of this work is to present the asymptotic formulas for upper bounds of deviations of Fejer means taken over classes of Poisson integrals in case when mean of function $\varphi(t)$ would not be equal zero. So far, formulas that directly take into account the values of the parameters q and m have not been found. This paper is motivated by the works [1, 2, 3, 4].

Theorem

1. If $-1 \leq m \leq 0$, $q \in (0; 2 - \sqrt{3}]$, then the following inequalities hold as $n \rightarrow \infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q}{\pi n} \frac{4 \cos \frac{\pi}{2} m}{1+2q \sin \frac{\pi}{2} m + q^2} + \frac{4qm}{n} \frac{(1+q^2) \sin \frac{\pi}{2} m + 2q}{(1+2q \sin \frac{\pi}{2} m + q^2)^2} + O(1) \frac{q^n}{n}, \quad -\frac{4}{\pi} \arctan q \leq m, \\ \frac{q}{\pi n} \frac{4 \cos \frac{\pi}{2} m}{1+2q \sin \frac{\pi}{2} m + q^2} + O(1) \frac{q^n}{n}, \quad m \leq -\frac{4}{\pi} \arctan q, \end{array} \right.$$

$$\leq \sup_{f \in G(q, m)} \|f(\cdot) - \sigma_n(f; \cdot)\|_C \leq$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{q}{\pi n} \frac{4 \cos \frac{\pi}{2} m}{1+2q \sin \frac{\pi}{2} m + q^2} + O(1) \frac{q^n}{n}, \quad -\frac{4}{\pi} \arctan q \leq m, \\ \frac{q}{\pi n} \frac{4 \cos \frac{\pi}{2} m}{1+2q \sin \frac{\pi}{2} m + q^2} + \frac{4qm}{n} \frac{(1+q^2) \sin \frac{\pi}{2} m + 2q}{(1+2q \sin \frac{\pi}{2} m + q^2)^2} + O(1) \frac{q^n}{n}, \quad m \leq -\frac{4}{\pi} \arctan q, \end{array} \right. \quad (1)$$

2. If $-1 \leq m \leq 0$, $q \in (2 - \sqrt{3}; \sqrt{3} - 2\sqrt{2}]$, and

$$\frac{\partial P_q(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} m)}{\partial q} \geq \frac{\partial P_q(\pi)}{\partial q}, \quad (2)$$

then inequalities (1) hold.

3. If $0 < m \leq 1$, $q \in (0; 2 - \sqrt{3}]$ and condition (2) is fulfilled, then the following inequalities hold as $n \rightarrow \infty$

$$\frac{q}{\pi n} \frac{4 \cos \frac{\pi}{2} m}{1 + 2q \sin \frac{\pi}{2} m + q^2} + O(1) \frac{q^n}{n} \leq \sup_{f \in G(q, m)} \|f(\cdot) - \sigma_n(f; \cdot)\|_C$$

$$\leq \frac{q}{\pi n} \frac{4 \cos \frac{\pi}{2} m}{1 + 2q \sin \frac{\pi}{2} m + q^2} + \frac{4qm}{n} \frac{(1 + q^2) \sin \frac{\pi}{2} m + 2q}{(1 + 2q \sin \frac{\pi}{2} m + q^2)^2} + O(1) \frac{q^n}{n}.$$

Here $O(1)$ is a quantity uniformly bounded with respect to n .

1. Savchuk, V.V., Chaichenko, S.O., Savchuk, M.V. Approximation of Bounded Holomorphic and Harmonic Functions by Fejer Means // Ukr Math J. – 2019. Vol. **71**. – P. 589–618.
2. O. Novikov, O. Rovenska. Approximation of periodic analytic functions by Fejer sums // Matematychni Studii. – 2017. – Vol. **47**, No **2**. – P. 196–201.
3. O. Novikov, O. Rovenska, Yu. Kozachenko. Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer sums // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics. – 2018. – Vol. **87**. – P. 4–12.
4. S. Verblunsky. Inequalities for the derivatives of a bounded harmonic function // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – 1948. – Vol. **44**, No **2**. – P. 155–158.

Bifurcation and stability of traveling waves in free boundary models of active gels

Rybalko Volodymyr

rybalko@chalmers.se, vrybalko@ilt.kharkov.ua

*B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of NASU,
Kharkiv, Ukraine,*

*Department of Mathematical Sciences, Chalmers University of Technology and the
University of Gothenburg, Gothenburg, Sweden*

Self-sustained motion of living cells using metabolic energy, is a fundamental process involved in a variety of biological phenomena, e.g. wound healing, tissue remodeling (physiological or pathological), immune response, metastatic tumor cell migration etc. There has been marked an increasing interest to mechanics of cell motion in the last decade, leading to creation of a new branch of soft matter physics, active gel physics [3], that continues its rapid development. Here, based on [1] and [2], we address mathematical aspects of mechanics of cell motion, considering a model of motility of an individual cell and a model of collective cell motion during tissue spreading.

1. Motility of individual cells. We consider a 2D model of motion of a cell on a flat substrate. The cell occupies a domain $\Omega(t)$ with free boundary. The flow of the acto-myosin network inside $\Omega(t)$ is described by the velocity field \mathbf{u} that obeys (in the adhesion-dominated regime) Darcy's law $-\nabla p = \zeta \mathbf{u}$, where $-p$ stands for the scalar stress and ζ is the constant effective adhesion drag coefficient. The main modeling assumption is the following constitutive law $-p = \mu \operatorname{div} \mathbf{u} + km - p_h$, where $\mu \operatorname{div} \mathbf{u}$ is the hydrodynamic stress (μ being the effective bulk viscosity of the gel), the term km is the active component of the stress which is proportional to the density $m = m(x, y, t) > 0$ of myosin motors with a constant contractility coefficient $k > 0$, p_h is the constant hydrostatic pressure. We assume for simplicity that $\mu = 1$ and $k = 1$. The following boundary condition (known as the Young-Laplace equation) $p + p_e = \gamma \kappa$ is prescribed on $\partial\Omega(t)$, where κ denotes the curvature, $\gamma > 0$ is a constant coefficient and p_e is the effective elastic restoring force which describes the mechanism of approximate conservation of the area due to the membrane-cortex tension, $p_e = k_e(|\Omega_h| - |\Omega|)/|\Omega_h|$, where k_e is the inverse compressibility coefficient (characterizing membrane-cortex elastic tension), $|\Omega_h|$ is the area of the reference configuration. The evolution of the myosin motors density is described by the advection-diffusion equation $\partial_t m = \Delta m - \operatorname{div}(\mathbf{u}m)$ in $\Omega(t)$ and no flux boundary condition in the moving domain, $\partial_\nu m = (\mathbf{u} \cdot \nu - V_\nu)m$ on $\partial\Omega(t)$, where ν stands for the outward pointing normal vector and V_ν is the normal velocity of the boundary $\partial\Omega(t)$. Finally, we assume continuity of velocities $V_\nu = \mathbf{u} \cdot \nu$ on the boundary. Introduce the potential $\phi := -\frac{1}{\zeta}(p - p_h)$ for the velocity field \mathbf{u} , $\mathbf{u} = \nabla \phi$, we write the following free moving boundary problem,

$$\Delta \phi + m = \zeta \phi \quad \text{in } \Omega(t), \tag{1}$$

$$\partial_t m = \Delta m - \operatorname{div}(m \nabla \phi), \quad \text{in } \Omega(t), \tag{2}$$

$$\zeta \phi = p_*(|\Omega(t)|) - \gamma \kappa, \quad \partial_\nu m = 0, \quad V_\nu = \partial_\nu \phi \quad \text{on } \partial\Omega(t), \tag{3}$$

where we introduced the notation $p_*(|\Omega|) := p_h + p_e(|\Omega|) = p_h - k_e(|\Omega| - |\Omega_h|)/|\Omega_h|$ for the sum of the hydrostatic pressure p_h and the effective elastic restoring force p_e .

We are interested stationary states and traveling waves in the problem (1)–(3).

Problem (1)–(3) has the family of radial stationary solutions with constant density $m = m_0$,

$$\Omega = B_R, \quad m_0 = p_*(\pi R^2) - \gamma/R, \quad \zeta \phi_0 = p_*(\pi R^2) - \gamma/R, \quad (4)$$

where R denotes the radius of the disc B_R . We study linear stability of this solutions and show that it is (essentially) determined by the sign of the eigenvalue

$$E(R) = -\inf \left\{ E_\zeta(m) / \int_{B_R} m^2 dx dy; m \in H^1(B_R), m = \hat{m}(r) \cos \varphi \right\},$$

where $E_\zeta(m) = \int_{B_R} (|\nabla m|^2 - m_0 m^2 + m_0 \zeta |\nabla \phi|^2 + m_0 \zeta^2 \phi^2) dx dy$ and ϕ is the unique solution of $\Delta \phi + m = \zeta \phi$ in B_R , $\phi = 0$ on ∂B_R . Next we show that in the critical case $E(R) = 0$ there bifurcates a family of traveling waves. These are solutions of (1)–(3) moving via shifts with constant velocity, e.g., a solution moving with the velocity V along x -axis is of the form

$$m = m(x - Vt, y), \quad \phi = \phi(x - Vt, y), \quad \Omega(t) = \Omega + (Vt, 0). \quad (5)$$

Theorem 1. *Let R_0 be the critical radius, i.e. $E(R_0) = 0$. Assume that $m_0(R_0) < \zeta$, $p'_*(\pi R_0^2) < -(\gamma/R_0 + 2m_0(R_0))/(2\pi R_0^2)$, and $F'(R_0) \neq 0$, where*

$$F(R) := \frac{R^3}{\Theta(R)} \left(\frac{\zeta I_1(\sqrt{\Theta(R)})}{\sqrt{\Theta(R)} I_1'(\sqrt{\Theta(R)})} - m_0(R) \right), \quad \Theta(R) = R^2(\zeta - m_0(R)), \quad (6)$$

I_1 is the 1st modified Bessel function of the first kind. Then stationary solutions (4) at $R = R_0$ bifurcate to a family of traveling wave solutions, i.e. solutions of (1)–(3) having form (5) and parametrized by the velocity V .

Note, that the condition $E(R_0) = 0$ is equivalent to $F(R_0) = 0$ for the function $F(R)$ explicitly given by (6). Next result summarizes (linear) stability analysis of the traveling waves with small velocities.

Theorem 2. *Assume that conditions of Theorem 1 are satisfied, and the derivative $M'(V)$ of the total myosin mass of the traveling wave is nonzero for sufficiently small $V \neq 0$. Then the generator of the evolution problem (1)–(3) linearized around the traveling wave solution with velocity $V \neq 0$, has the zero eigenvalue and its multiplicity is equal to four. The next smallest in absolute value eigenvalue is $\lambda(V) \neq 0$, this eigenvalue is simple and it is given by the following asymptotic formula*

$$\lambda(V) = -\frac{E'(R_0)}{M'_{ss}(R_0)} V M'(V) (1 + O(V)) \quad \text{as } V \rightarrow 0, \quad (7)$$

where $M_{ss}(R)$ stands for the total myosin mass of the stationary solution (4). All other eigenvalues have real parts bounded away from zero. If additionally R_0 is such that m_0 is bounded by above by fourth eigenvalue of the operator $-\Delta$ in B_{R_0} with the homogeneous Neumann condition on ∂B_{R_0} , then nonzero eigenvalues other than $\lambda(V)$ have negative real parts.

2. *Tissue spreading.* Following [4], we employ a continuum active polar fluid model of tissue spreading, described by a polarity field $\mathbf{p}(x, y, t)$ and a velocity field $\mathbf{v}(x, y, t)$. A tissue monolayer spreads via extending its edge towards free space. The phenomenon is mainly caused by traction forces generated by cells close to the monolayer edge. These cells polarize perpendicular to the edge, where we prescribe $\mathbf{p} = \mathbf{n}$ (the unit outward normal). The field \mathbf{p} is assumed to follow a purely relaxational dynamics, and equilibrate fast to the solution of the equation $L_c^2 \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}$, where L_c is the characteristic length describing the decay rate of \mathbf{p} in the bulk. For simplicity we set $L_c = 1$ that always can be achieved by an appropriate scaling of spacial variables. The force balance equation reads $\text{div} \sigma + \mathbf{f} = 0$, where σ is the stress tensor and \mathbf{f} is the stress field given by the following constitutive equations for a compressible active polar fluid: $\sigma = \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) - \zeta \mathbf{p} \otimes \mathbf{p}$, $\mathbf{f} = -\xi \mathbf{v} + \zeta_i \mathbf{p}$, where \mathbf{v} is the velocity field, $\mu > 0$ is the constant effective viscosity, $\zeta < 0$ is the constant contractility coefficient, $\xi > 0$ is the constant friction coefficient, and ζ_i is the constant contact active force coefficient. On the free boundary σ satisfies $\sigma \cdot \mathbf{n} = -\gamma \kappa \mathbf{n}$, where κ denotes the curvature of the boundary and $\gamma > 0$ is the constant surface tension of the monolayer edge.

We assume that the tissue monolayer occupies a half-plane type domain $\Omega(t) = \{(x, y) | y < \rho(x, t)\}$ whose boundary is given by the graph of the function $y = \rho(x, t)$. Then the continuity condition $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = V_{\mathbf{n}}$ (where $V_{\mathbf{n}}$ denotes the normal velocity of the boundary) yields the evolution equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \mathcal{A}(\rho) := (v_y - v_x \rho') \Big|_{y=\rho(x,t)}, \quad (8)$$

where $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ solve

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} \quad \text{for } y < \rho(x, t), \quad (9)$$

$$\mu(\Delta \mathbf{v} + \nabla \text{div} \mathbf{v}) - \zeta \text{div}(\mathbf{p} \otimes \mathbf{p}) - \xi \mathbf{v} + \zeta_i \mathbf{p} = 0 \quad \text{for } y < \rho(x, t), \quad (10)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{n} \quad \text{for } y = \rho(x, t), \quad (11)$$

$$\left(\mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) - \zeta \mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \right) \mathbf{n} = -\gamma \kappa \mathbf{n} \quad \text{for } y = \rho(x, t). \quad (12)$$

We also assume that \mathbf{v} and \mathbf{p} vanish as $y \rightarrow -\infty$.

We seek periodic solutions traveling in y -direction with constant velocity. It is easy to show that there exists the flat front solution, $\rho(x, t) = V^{(0)}t$, $\mathbf{v}(x, y, t) = \mathbf{V}(y - V^{(0)}t)$, $\mathbf{p}(x, y, t) = \mathbf{P}(y - V^{(0)}t)$, where $P_x = V_x = 0$,

$$P_y = e^y, \quad V_y(y) = \frac{\zeta}{8\mu - \xi} \left(2e^{2y} - \frac{\sqrt{\xi}}{\sqrt{2\mu}} e^{\sqrt{\xi}y/\sqrt{2\mu}} \right) + \frac{\zeta_i}{2\mu - \xi} \left(\frac{\sqrt{2\mu}}{\sqrt{\xi}} e^{\sqrt{\xi}y/\sqrt{2\mu}} - e^y \right).$$

We perform Fourier analysis of the linearized operator \mathcal{L} around the flat front solution and find $\Lambda(q)$ such that $\mathcal{L}e^{iqx} = \Lambda(q)e^{iqx}$. Then, considering the prescribed period Π as the bifurcation parameter we obtain the transcendental equation $\Lambda(q) = 0$ to find the critical value of the period $\Pi = 2\pi/q$, and show that it always has a root if ζ_i is sufficiently large. We prove the following result on the bifurcation of traveling waves with finger-like structure.

Theorem 3. *Assume that $\Lambda(q_0) = 0$ for some $q_0 > 0$ and $\Lambda(jq_0) \neq 0$ for $j = 2, 3, \dots$. Assume also that $\partial_q \Lambda(q_0) \neq 0$. Then there is a family of non-trivial (non-flat) traveling wave solutions $\rho = \rho(x, \alpha)$ of $\mathcal{A}(\rho) = V$ with periods $\Pi = 2\pi\theta(\alpha)/q_0$, depending on a small parameter α . Moreover, $\rho(x, \alpha)$ and $\theta(\alpha)$ smoothly depend on the parameter α and $\rho(x, 0) = 0$, $\theta(0) = 1$.*

Next we study stability of these solutions and show that depending on the value of the contractility coefficient, the bifurcation can be subcritical or supercritical pitchfork.

1. V. Rybalko and L. Berlyand. Emergence of traveling waves and their stability in a free boundary model of cell motility // Trans. Am. Math. Soc. – 2023. – 376, no. 03 – P. 1799–1844.
2. L. Berlyand, A. Rybalko, V. Rybalko, C.A. Safsten. Bifurcation of finger-like structures in traveling waves of epithelial tissues spreading (in preparation)
3. J. Prost, F. Jülicher, F. and J.F. Joanny. Active gel physics// Nature physics. – 2015. – 11, no. 2 – P.111–117.
4. R. Alert, C. Blanch-Mercader, J. Casademunt. Active fingering instability in tissue spreading// Phys. Rev. Lett. – 2019. – 122, no. 8 – 088104.

Analytic method for solution Schrödinger-type equation

Samoilenko Igor, Samoilenko Tetiana

`isamoil@i.ua`

Taras Shevchenko National University of Kyiv,

National Technical University of Ukraine

"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

Numerous works are devoted to the description of random evolutions (random flights) that generalize original work of M.Kac in the multidimensional case. They are mostly devoted to discussion of convergence of the model studied to the Wiener process, also description of corresponding equations and solving them for some well posed modes. The main problem is that the methods for solving equations proposed there can not be applied for any model as soon as they are, as a rule, strictly connected with the structure of the corresponding equation. In the article [1] we proposed to change the approach, namely to solve a well posed Cauchy problem instead of a well posed equation. The idea is based on the use of real-analytic initial conditions and computation of the moments of Markov random evolution which solve Cauchy problem for any evolutionary equation with power functions as initial conditions. Thus, having corresponding solutions, we may approximate solution for any initial condition by real-analytic functions.

Here we apply the method, proposed in [1] to equations that appear in the case of Goldstein-Kac model on a complex plane, namely

$$\begin{aligned}\gamma_{r,z}^{\lambda,v}(t) &= x + iy + v \int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)} ds \\ +iv \int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)} ds &= z + (i+1)v \int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)} ds,\end{aligned}$$

where $x + iy$ is the starting point, $v > 0$ is the constant velocity of movement, $\xi_r^\lambda(s)$ is the Markov chain that takes values in $\{0, 1\}$ and has the infinitesimal matrix

$$Q_\lambda = \lambda \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

and initial distribution $P\{\xi_r^\lambda(0) = 0\} = p$, $P\{\xi_r^\lambda(0) = 1\} = q$, $r = p - q$.

We show that the expectations of function of the evolution, namely the functionals $U_j(t, z) = E_j f(z + (i+1)v \int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)} ds)$, where $j \in \{0, 1\}$ is the state of the process $\xi_r^\lambda(s)$ at the moment of time $s = 0$, satisfy Cauchy problem:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\lambda \frac{\partial U}{\partial t} = 2iv^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1)$$

$$U(0, z) = f(z), \quad \frac{\partial}{\partial t} U(t, z)|_{t=0} = rv(1+i)f'(z).$$

This result is used to represent the solution to the Cauchy problem with complex-analytic initial conditions:

$$\begin{cases} f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, z \in C; \\ g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k, z \in C. \end{cases} \quad (2)$$

Solution of this Cauchy problem, like in the case of the one-dimensional telegraph equation, may be constructed by Riemann method in terms of Bessel functions. But the probability approach proposed here is based on the explicit calculation of arbitrary moments of the random process and allows to avoid analytic difficulties and, moreover, to obtain new formulas for the Bessel functions. It can also be used in the study of models described by equations that are more complex than the one-dimensional telegraph equation.

There is also another reason for the construction of a new representation of the solution of this Cauchy problem. Solution in terms of Bessel functions does not explicitly contain boundary-layer functions, which is explained by the fact that Riemann method is based on the analytic-geometric approach. The solutions constructed in the present paper explicitly contain the regular and boundary-layer components that may be useful for calculation of approximate solutions.

Namely, a consequence of our representation of the solution of Cauchy problem is the following result. We set $\varepsilon = \frac{1}{2\lambda}$ and write equation (1) in the form

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t, z) = \left(i \frac{v^2}{2\lambda} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) U(t, z). \quad (3)$$

In the hydrodynamic limit, when $v \rightarrow \infty$, $\lambda \rightarrow \infty$ so that $\frac{v^2}{\lambda} \rightarrow \sigma^2$ equation (3) has the form of a singularly perturbed differential equation with a small parameter for the highest derivative with respect to t . In the limit, we have a Schrödinger-type equation (see, e.g. free-particle wave equation):

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, z) = \frac{\sigma^2}{2} i \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(t, z). \quad (4)$$

Solutions of Schrödinger-type equations may be found in the form of series for corresponding complex functions. Now we see that Schrödinger-type equation may be approximated by a singularly perturbed differential equation with a small parameter as the coefficient of the higher derivative with respect to t .

We show that the solution of Cauchy problem for the last equation also may be presented as a series. Moreover, in the theory of singularly perturbed evolutionary equations, solutions often contain a regular (with respect to ε) component and a boundary-layer component, which contains a function of the form $\exp(-t/\varepsilon)$ (in our case, $\exp(-2\lambda t) = \exp(-t/\varepsilon)$). The solutions constructed in the present paper explicitly contain the regular and boundary-layer components.

Thus, we construct solutions for complex-analytic initial conditions of Cauchy problem (1), (2). As soon as other functions may be approximated by complex-analytic functions, we may thus approximate solutions for Cauchy problems with other initial conditions, and, assuming $\varepsilon \rightarrow 0$ we shall see approximate solution of Cauchy problem for Schrödinger-type equation (4).

Theorem. Let $c_r^{\lambda,v}(t, z; n) = E(\gamma_{r,z}^{\lambda,v}(t))^n$ be a solution of equation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2\lambda \frac{\partial U}{\partial t} = 2iv^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (5)$$

with initial conditions

$$f(z) = z^n; g(z) = rv(i+1)nz^{n-1}. \quad (6)$$

Then the solution $U(t, z)$ of the Cauchy problem

$$U(0, z) = f(z), U'_t(t, z)|_{t=0} = (i+1)vr f'(z)$$

with complex analytic conditions (2) is given by

$$U(t, z) = f_0 + \frac{g_0}{2\lambda} \left(1 - e^{-2\lambda t}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} [f_k c_0^{\lambda,v}(t, z; k) + \frac{g_{k-1}}{rvk(i+1)} \left(c_r^{\lambda,v}(t, z; k) - c_0^{\lambda,v}(t, z; k)\right)].$$

The problem of constructing the solution is thus reduced to calculating the moments $c_r^{\lambda,v}(t, z; k)$ of evolution defined by Kac model on a complex plane.

The following lemma holds true:

Lemma.

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \infty \\ v \rightarrow \infty \\ \frac{v^2}{\lambda} \rightarrow \sigma^2}} c_r^{\lambda,v}(t, z; n) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} z^{n-2j} \mu_{2j} (\sigma^2 t)^j (i+1)^j,$$

where $\lfloor p \rfloor$ is the integer part of p ,

$$\mu_{2j} = \begin{cases} 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2j-1) & \text{if } j \text{ is an even number;} \\ 0 & \text{if } j \text{ is an odd number.} \end{cases}$$

The lemma allows to seek a solution to equation (5) with initial conditions (6) in the form (see also [2]):

$$c_r^{\lambda,v}(t, z; n) = z^n + \frac{rvnz^{n-1}}{2\lambda} \left(1 - e^{-2\lambda t}\right) (i+1) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2j} z^{n-2j} \mu_{2j} \left(\frac{v^2}{\lambda} t\right)^j \times \\ \times (i+1)^j + a_n(t, z) + b_n(t, z) \left(1 - e^{-2\lambda t}\right),$$

where the functions $a_n(t, z)$ and $b_n(t, z)$ may be found explicitly and are polynomials in z (for a fixed t) and in t (for a fixed z) which degree is at most $n-2$.

In conclusion, we present equation (5) in the form of a singularly perturbed Cauchy problem:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t, z) = \left(\frac{\sigma^2}{2} i \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) U(t, z)$$

$$U(0, z) = f(z), \quad \left. \frac{\partial}{\partial t} U(t, z) \right|_{t=0} = r \frac{\sigma}{\sqrt{2\varepsilon}} (i+1) f'(z), \quad r \in R.$$

Using the Theorem, we present solutions of this Cauchy problem for conditions of independent interest (in square brackets the regular part of the solution is distinguished):

$$f(z) = z : U(t, z) = \left[z + \frac{r}{\sqrt{2}} \sigma \varepsilon (i+1) \right] - \frac{r}{\sqrt{2}} \sigma \varepsilon (i+1) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}};$$

$$f(z) = z^2 : U(t, z) = \left[z^2 + \sigma^2 t (i+1)^2 + r \sigma \sqrt{2\varepsilon} z (i+1) - \sigma^2 \varepsilon^2 (i+1)^2 \right] + \\ + \left(\sigma^2 \varepsilon^2 (i+1)^2 - r \sigma \sqrt{2\varepsilon} z (i+1) \right) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}};$$

$$f(z) = z^3 : U(t, z) = \left[z^3 + 3z\sigma^2 t - 3x\sigma^2 \varepsilon^2 (i+1)^2 + \frac{3r}{\sqrt{2}} \sigma \varepsilon z^2 (i+1)^2 - \right. \\ \left. - \frac{3r}{\sqrt{2}} \sigma^3 \varepsilon^3 (i+1)^3 \right] + (3z\sigma^2 \varepsilon^2 (i+1)^2 - \frac{3r}{\sqrt{2}} \sigma \varepsilon z^2 (i+1) + \frac{3r}{\sqrt{2}} \sigma^3 \varepsilon t (i+1)^3 + \\ + \frac{3r}{\sqrt{2}} \sigma^3 \varepsilon^3 (i+1)^3) e^{-\frac{t}{\varepsilon^2}}.$$

If we put $\varepsilon \rightarrow 0$ we easily see the solutions of Cauchy problem for Schrödinger-type equation (4).

1. Turbin A.F., Samoilenko I.V. A probability method for the solution of the telegraph equation with real-analytic initial conditions // Ukrainian Mathematical Journal. – 2000. – 52, № 8. – P. 1292–1299.
2. Samoilenko I.V. Moments of Markov random evolutions // Ukrainian Mathematical Journal. – 2001. – 53, № 7. – P. 1197–1205.

Dynamics of conflict interaction in terms of minimal players

Satur Oksana

`oksana@satur.in.ua`

Institute of mathematics NSAU

Let the two opponents A and B , who are called the players below, at the moment of time $t = 0$ be assigned independent discrete random distributions in the space $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, $n \geq 2$ (set of visited positions):

$$A \sim \mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n), \quad B \sim \mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n).$$

Obviously that the vectors \mathbf{p}, \mathbf{r} are stochastic: $0 \leq p_i, r_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n r_i = 1$, $i = 1, \dots, n$. Next, we assume that they are different and non-orthogonal, that is, in \mathbb{R}_+^n their scalar product satisfies the condition $0 < (\mathbf{p}, \mathbf{r}) < 1$. Coordinates p_i, r_i can be interpreted as independent probabilities of presence A, B in ω_i . In other words, the values p_i, r_i characterize the random events of visits to the position ω_i by players A and B at the initial moment of time $t = 0$. So, $p_i = \mathbf{P}(A \text{ is in position } \omega_i)$, where $\mathbf{P}(\cdot)$ means probability. Similarly for r_i .

Suppose that at the following moments of discrete time $t = 1, 2, \dots$ players A and B enter into an interaction with each other, which we denote by $*$. This leads to a change in their respective distributions:

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{r}\} \equiv \{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\} \xrightarrow{*} \{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\} \xrightarrow{*} \dots \xrightarrow{*} \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{*} \dots \quad (1)$$

We assume that the law of change of coordinates of stochastic vectors is given iteratively by the following formulas:

$$p_i^t = p_{\min}^t = \min_{j=1, \dots, n} p_j^t, \quad r_i^t = r_{\min}^t = \min_{j=1, \dots, n} r_j^t, \quad (2)$$

$$p_i^{t+1} = \frac{\alpha \cdot p_{\min}^t (1 - r_{\min}^t)}{z_p^t}, \quad r_i^{t+1} = \frac{\alpha \cdot r_{\min}^t (1 - p_{\min}^t)}{z_r^t}, \quad (3)$$

$$p_j^{t+1} = \frac{p_j^t}{z_p^t}, \quad r_j^{t+1} = \frac{r_j^t}{z_r^t}, \quad i \neq j, \quad \alpha > 0, \quad (4)$$

$$t = 0, 1, \dots, \quad p_j^0 = p_j, \quad r_j^0 = r_j, \quad p_{\min}^0 = p_{\min}, \quad r_{\min}^0 = r_{\min},$$

where the normalizing denominators z_p^t and z_r^t are introduced to ensure the stochasticity of the vectors $\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}$

$$z_p^t = \alpha \cdot p_{\min}^t (1 - r_{\min}^t) + \sum_{j \neq \min} p_j^t, \quad z_r^t = \alpha \cdot r_{\min}^t (1 - p_{\min}^t) + \sum_{j \neq \min} r_j^t.$$

A model of a dynamic system with conflict interaction for two players is built above. It is assumed that each of them is probabilistically distributed according to the positions of the common space of existence. At each step of the iteration, each player exerts minimal effort. That is, the conflict is conducted only on positions with a minimum value for each of the players. Random events of the presence of players A and B in positions ω_i are redistributed at each step of time t . The behavior of such

a dynamic system for players with only two positions ($\mathbf{p}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}_+^2$) was studied. The bifurcation parameter α can be interpreted as a shared external resource for each of the players. Note that in this formulation of the problem, α acquires a certain positive value that does not depend on the players in any way.

In the papers [1], various problems related to dynamic systems of conflict in discrete time were investigated in terms of stochastic vectors given by trajectories:

$$\{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{*,t} \{\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}\}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

where coordinates of vectors $\mathbf{p}^{t+1}, \mathbf{r}^{t+1}$ were determined by a system of difference equations. The simplest version of such equations has the form:

$$p_i^{t+1} = \frac{1}{z^t} p_i^t (1 - \alpha r_i^t), \quad r_i^{t+1} = \frac{1}{z^t} r_i^t (1 - \alpha q_i^t), \quad -1 \leq \alpha \leq 1,$$

where $z = 1 - \alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ – the normalizing denominator, (\cdot, \cdot) – the scalar product in \mathbb{R}_+^n . More such models can be found in the works [2] – [6].

1. Koshmanenko, V. Spectral Theory for Conflict Dynamical Systems (Ukrainian). – Kyiv: Naukova Dumka. –2016. – 288 p.
2. Karataieva T., Koshmanenko V., Krawczyk M., Kulakowski K. Mean field model of a game for power // Physica A. – 2019, **525**. – P. 535–547.
3. Satur O.R. Dependence of the behavior of the trajectories of dynamic conflict systems on the interaction vector // Nonlinear Oscillations. – 2021. – **25** (1). – P. 72–88.
4. Satur O.R., Kharchenko N.V. The model of dynamical system for the attainment of consensus // Ukrainian Mathematical Journal. –2020. – **71** (9). – P. 1456–1469.
5. Koshmanenko V., Kharchenko N. Fixed points of complex system with attractive interaction // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2017. – **23** (2). – P 164–176.
6. Koshmanenko V. Theorem of conflicts for a pair of probability measures // Math. Methods of Operations Research. –2004. – **59** (2). – P. 303–313.

Simulation a solution of a parabolic equation with random factors

Slyvka-Tylyshchak Ganna, Kuchinka Katalin

anna.slyvka@uzhnu.edu.ua, kucsinka.katalin@kmf.org.ua

Uzhhorod National University,

Ferenc Rakoczi II Transcarpathian Hungarian College of Higher Education

In this paper, a model of solution to the heat equation with initial conditions from the Orlicz space $L_p(\Omega)$ of random variables is built. The constructed model approximates the solution of a homogeneous parabolic equation with given reliability and accuracy in some Orlicz space.

Consider a boundary value problem for a parabolic equation with two independent variables

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) - q(x)V(t, x) - \rho(x) \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$V(t, 0) = 0, V(t, \pi) = 0 \quad (2)$$

$$V(0, x) = \xi(x), \quad (3)$$

where $0 \leq x \leq \pi$ and $t \geq 0$, $\xi(x)$ is a continuous stochastic process with probability one belonging to the Orlicz space $L_U(\Omega)$, such that $E\xi(x) = 0$. The functions $p = (p(x), x \in [0, \pi])$, $q = (q(x), x \in [0, \pi])$, $\rho = (\rho(x), x \in [0, \pi])$ in equation (1) satisfy the conditions

1. $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$, $x \in [0, \pi]$
2. $\rho(x)$, $p(x)$ are twice continuously differentiable for all $x \in [0, \pi]$
3. $q(x)$ is continuously differentiable for all $x \in [0, \pi]$.

Let

$$V(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e^{-\lambda_k t} X_k(x),$$

where $X_k(x)$ are eigenfunctions and λ_k are eigenvalues of the Sturm-Liouville problem

$$L(X) = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dX(x)}{dx} \right) - q(x)X(x) + \lambda \rho(x)X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \quad X(\pi) = 0, \quad \xi_k = \int_0^{\pi} \rho(x) X_k(x) \xi(x) dx.$$

Let $\xi(x)$ be a stochastic process from (3) and his model be $\hat{\xi}(x)$, then as a model for the process ξ_k we consider

$$\hat{\xi}_k = \int_0^{\pi} \rho(x) X_k(x) \hat{\xi}(x) dx.$$

Let us denote:

$$V_N(t, x) \doteq \sum_{k=1}^{N-1} \xi_k e^{-\lambda_k t} X_k(x);$$

and

$$\hat{V}_N(t, x) \doteq \sum_{k=1}^{N-1} \hat{\xi}_k e^{-\lambda_k t} X_k(x). \quad A_T \doteq \{0 \leq x \leq \pi, \delta \leq t \leq T\},$$

where $\delta > 0$ is a constant.

Theorem. *Let the initial condition $\xi = \{\xi(x), x \in [0, \pi]\}$ on the right hand side of (3) be a strictly Orlicz stochastic process belonging to the Orlicz space $L_p(\Omega)$ ($p \geq 2$) of random variables. Assume that the stochastic process ξ is separable and mean square continuous, $E\xi(x) = 0$. If the conclusion of Theorem 9 [1] holds for $\xi(x)$ and we have*

$$\int_0^\pi |(E|\xi(x) - \hat{\xi}(x)|^p)^{\frac{1}{p}} dx < \Lambda.$$

for the $\hat{\xi}(x)$, where $\hat{\xi}(x)$ is the model for a process $\xi(x)$, then $\hat{V}_N(t, x)$ is the model for the process $V(t, x)$ with reliability $1 - \alpha$ and accuracy ε in uniform metric of A_T , if for the N the following conditions hold :

$$\sqrt{W_N} < \left(\frac{\alpha}{2C_{T p \beta}} \right)^{1/p} \varepsilon \cdot l, \quad K_{N-1} < \frac{\alpha^{\frac{1}{p}} (1-l) \varepsilon}{2^{\frac{1}{p}} \rho(x) C_x^2 \Lambda}$$

where W_N and $C_{T p \beta}$ are defined in Theorem 9 [1], $0 < l < 1$, $\rho = \max \rho(x)$, $|X_k(x)| < C_x$, $K_{N-1} = \sup_{\delta \leq t \leq T} \left| \sum_{k=1}^{N-1} e^{-\lambda_k t} \right|$, $\delta > 0$ some constant.

1. Kuchinka Katalin, Slyvka-Tylyshchak Ganna Modelling a solution of a homogeneous parabolic equation with random initial condition from $L_p(\Omega)$ // Przegląd Elektrotechniczny, 2023, 5, pp. 77–82

Decoupling method for the maxwell equations in the case of null field

Taistra Yurii, Pelykh Volodymyr

`ythelloworld@gmail.com`

Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics

The Maxwell equations in the pseudo-Riemannian space of general relativity are a strongly coupled system of the first-order PDEs. Decoupling methods for such a system were developed by Teukolsky (1973), Cohen, Kegeles (1974, 1979), and Stewart (1979) [1, 2]. Maxwell equations in the Teukolsky approach decouple in the Petrov type D space-times. Electromagnetic equations for Herz potential decouple in generalized Goldberg-Sachs space-times, assuming the additional condition of an algebraical specialty of the Herz spinor (null one-way Herz field). An approach to decoupling Maxwell equations in Kasner space-time were developed by Bochner (2021).

We assume that the Maxwell field is null, which means that both electromagnetic invariants are equal to zero (pure electromagnetic waves). Under the assumption, the system of Maxwell equations decouples in general space-time. Two of the four decoupled equations are the first-order quasilinear PDEs.

We consider decoupled equations in the Kerr space-time and apply Teukolsky ansatz. It enables a more simple (2-dimensional) decoupled system, which gives an advantage for numerical considerations of such equations.

1. S. A. Teukolsky Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-Field Perturbations // *Astroph. J.* – 1973. – 185. – p. 635–648.
2. J. M. Cohen, L. S. Kegeles Electromagnetic fields in curved spaces: A constructive procedure // *Phys. Rev. D.* – 1974., **10**, No. 4. – p. 1070–1084.

Problem of convergence mathematics and information theory and methods of their modeling

Trokhimchuck Petro

Trokhimchuck.Petro@vnu.edu.ua, trope1650@gmail.com

*Anatolii Svidzinskii Department of Theoretical and Mathematical Physics,
Lesya Ukrainka Volyn National University, Lutsk, Ukraine*

The problem of formalization knowledge has long history [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Roughly speaking this problem is the realization. R. Backon phrase вЂњAny science is as much science as there are mathematicians in itвЂќ quite accurately reflects this trend. In general, mathematics, translated from Greek, means accurate knowledge [1]. Euclid [1, 2] started mathematics as a science. His axiomatic method turned out to be so productive that it still forms the basis of mathematics [2]. Later, Descartes and I. Newton applied it to other sciences [1]. Modern mathematics is a science with a well-developed structure of relevant disciplines, and it is generally quite difficult to consider it separately from other fields of knowledge [1].

C. Shannon's entropy principle is main in modern information theory [4].

According to F. George [3], cybernetics is a synthetic science, which is a synthesis of several sciences that are necessary to solve the relevant problem.

The main task of modern computer science is the formalization of the thesis of the Canadian philosopher L. Hall "Everything that comes from the head is intelligent" [1, 2].

It should be note that according to Plato there are three types of numbers: mathematical (pure mathematics), sensory (applied mathematics) and ideal (numerology and, from a modern point of view, information-coding theory) [1].

This report raises the question of creating a single theory that would include the main achievements of the above concepts.

According to [1, 2] this theory, it should be based on six criteria:

1. It must be open theory or theory with variable hierarchy.
2. This theory must be having minimal number of principles.
3. It must based on nature of mathematics (analysis, synthesis and formalization all possible knowledge).
4. We must create sign structure, which unites verbal and nonverbal knowledge (mathematical and other) in one system.
5. We must have system, which is expert system of existing system of knowledge and may be use for the creation new systems of knowledge.
6. Principle of continuity must be true for all science.

These conditions must be used for the creation any dynamic science, which can be presented as open system. An example of so metascience is Polymetrical Analysis (PA) – theory of variable hierarchy (measure) [1, 2], which is created as system of optimal analysis, synthesis and formalization of knowledge.

PA is the theory of variable measure and systems with variable hierarchy. The main elements of this theory are functional numbers (generalized quadratic forms); generalized mathematical transformations (15 minimum types); information lattices; theory of information calculations; polymetric theory of measures and measurements

and theory of hybrid systems.

The theory of informational calculations made it possible to combine analogous and numerical calculations into a single system. Its main principle of optimal (minimum) computation is the generalization of the principle of least action and the entropy laws of physics and information theory into a single "dimensionless" principle, owing to the de Broglie ratio from the thermodynamics of a point [6].

The hybrid theory of systems made it possible to combine all fields of knowledge, including verbal and non-verbal, and to classify them by complexity. The basis of complexity is the concept of completeness and the parameter of connectivity of the elements of the information lattice [1, 2]. It was shown that only 10 minimal types of hybrid systems (systems of formalization the knowledge) are existed, but number these systems may be however large [1, 2].

PA theory fully satisfies these six criteria and is the most general theory that combines the main concepts of mathematics and information theory into a single system. PA may be represent as natural concept of foundations of mathematics (mathematics is precised knowledge [1]); variant of resolution S. Beer centurial problem in Cybernetics (problem of information complexity) [1] and variant of foundations of Computer Science [1].

1. Trokhimchuck P.P. Theories of Everything: Past, Present, Future. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2021. – 260 p.
2. Trokhimchuck P.P. Foundations of Mathematics: Retrospective and Perspective. Ch. 3. In: Recent Research Trends in Mathematics Eds. R. Mechta, M. K. Sharma. – New Dehli: Integrated Publications, 2023. – P. 41–71.
3. George F.H. Philosophical Foundations of Cybernetics, Cybernetics and System Series. – London: Abacus Press, 1979. – 310 p. 0
4. Kuhtenko A.I. Cybernetics and Fundamental Science. – Kyiv: Naukova Dumka, 1987. – 144 p. (In Russian)
5. Kuzmin I.V., Kedrus V.A. Foundations of information theory and coding. – Kyiv: Vyscha Shkola, 1986. – 237 p. (In Russian)
6. De Broglie L. Thermodynamics of Isolated Point. The hidden thermodynamics of particles. – Paris: Gauthier Villars, 1964. – 98 p.

Continuous solutions of the systems of nonlinear difference-functional equations in the hyperbolic case

Yeromina Tetiana, Povarova (Sivak) Olena

ierominat@ukr.net, olena-sivak@ukr.net

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

The consider the systems of nonlinear difference-functional equations of the form

$$x(qt) = \Lambda x(t) + f(t, x(t+1)), \quad (1)$$

with the following conditions:

1. Λ - real $(n \times n)$ - matrix of this form $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2)$, where Λ_1, Λ_2 - real $(p \times p)$ and $(r \times r)$ - matrices $(p + r = n)$, $\det \Lambda \neq 0$, $f(t, x(t+1)) = (f^1(t, x^1(t+1), x^2(t+1)), f^2(t, x^1(t+1), x^2(t+1)))$, q is real positive constant.

2.

$$\begin{cases} |f^1(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2) - f^1(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2)| \leq l_1 \left(|\bar{x}^1 - \bar{x}^1| + |\bar{x}^2 - \bar{x}^2| \right), \\ |f^2(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2) - f^2(t, \bar{x}^1, \bar{x}^2)| \leq l_2 \left(|\bar{x}^1 - \bar{x}^1| + |\bar{x}^2 - \bar{x}^2| \right), \end{cases}$$

where l_1, l_2 - are real positive constants, which depend on $l(l_1 = l_1(l), l_2 = l_2(l), l_1 \rightarrow 0, l_2 \rightarrow 0$ for $l \rightarrow 0$). Then the system (1) will look like this

$$\begin{cases} x^1(qt) = \Lambda_1 x^1(t) + f^1(t, x^1(t+1), x^2(t+1)), \\ x^2(qt) = \Lambda_2 x^2(t) + f^2(t, x^1(t+1), x^2(t+1)), \end{cases} \quad (2)$$

where $x^1 = (x_1, \dots, x_p)$, $x^2 = (x_{p+1}, \dots, x_{p+r})$, $f^1 = (f_1, \dots, f_p)$, $f^2 = (f_{p+1}, \dots, f_{p+r})$.

Theorem. *Suppose that conditions 1-2 are satisfied and:*

3. $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1, 2, \dots, p, j = p+1, 2, \dots, n, 0 \leq p \leq n, q > 1$;

4. $\theta = \max \left\{ \frac{2l_1}{1-\lambda_*}, \frac{2l_2}{\lambda_*-1} \right\} < 1$, where $1 > \lambda_* > \max \{ \lambda_i, i = 1, \dots, p \}$, $1 < \lambda_* < \min \{ \lambda_i, i = p+1, \dots, n \}$.

Then system of equations (2) has a family of solutions continuous and bounded for $t \geq T > 0$ (T is a sufficiently large positive constant) of the form

$$y^1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t), y^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t),$$

where $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0, 1, \dots$ vector-functions are continuous and bounded for $t \geq T > 0$.

Model of the diagnostic signals in the form of bi-periodically non-stationary random process

Yuzefovych Roman^{1,2}, Lychak Oleh¹, Javorskyj Ihor^{1,3}, Varyvoda Mykola¹

roman.yuzefovych@gmail.com

¹*Karpenko Physico-mechanical Institute of NAS of Ukraine,*

²*Lviv Polytechnic National University,*

³*Bydgoszcz University of Science and Technology, Poland*

The model of vibration signal in the form of bi-periodically non-stationary random process (BPNRP) is proposed. It is shown that the properties of the deterministic and stochastic interaction of cycles with different periods are described in this model by simultaneous amplitude and phase modulation of carrier harmonics with combination frequencies by jointly stationary random processes.

The modulation effects in the vibration model in the form of periodically non-stationary random process (PNRP), which describe the stochastic recurrence with one period, are characterized by jointly stationary random processes $\xi_k(t)$ in the representation in the form of a stochastic trigonometric polynomial

$$\xi(t) = \sum_{k=-L}^L \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}. \quad (1)$$

The random process (1) is a PNRP only in the case when the modulating processes are mutually correlated [1, 2, 3, 4]. Generalizing this representation, we may deduce that modulation of two stochastic cycles, induced by the rotation of two elements with different speeds, can be modeled as:

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \xi_k^{(P_2)}(t) e^{ik \frac{2\pi}{P_1} t}, \quad (2)$$

where the harmonics of frequency $2\pi/P_1$ and its multiples are modulated by PNRP with period P_2 : $\xi_k(t) = \sum_{l \in Z} \xi_{kl}(t) e^{il \frac{2\pi}{P_2} t}$. Then, for the random process (2) we have:

$$\xi(t) = \sum_{k,l \in Z} \xi_{kl}(t) e^{i\omega_{kl} t}, \quad (3)$$

where $\xi_{kl}(t)$ is a jointly stationary random processes and $\omega_{kl} = k(2\pi/P_1) + l(2\pi/P_2)$. As we can see, process (3) is the sum of the amplitude- and phase-modulated harmonics, in which frequencies ω_{kl} are the linear combination of the two main frequencies $\omega_{10} = 2\pi/P_1$ and $\omega_{01} = 2\pi/P_2$. The mathematical expectations of the modulating processes $m_{kl} = E\xi_{kl}(t)$ are the Fourier coefficients of the mean function:

$$m(t) = E\xi(t) = \sum_{k,l \in Z} m_{kl}(t) e^{i\omega_{kl} t}, \quad (4)$$

and for its covariance function $R(t, \tau) = E\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t + \tau)$, $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m(t)$, we have

$$R(t, \tau) = \sum_{k, l \in Z} B_{kl}(\tau) e^{i\omega_{kl}t}, \quad (5)$$

where

$$B_{kl}(\tau) = \sum_{p, q \in Z} R_{p-k, p, q-l, q}(\tau) e^{i\omega_{kl}\tau}, \quad (6)$$

and $R_{pqkl}(\tau) = E \bar{\xi}_{pq}(t) \overset{\circ}{\xi}_{kl}(t + \tau)$, $\bar{\xi}_{pq}(t) = \xi_{pq}(t) - m_{pq}$, are the cross-covariance functions of the modulating processes. Thus, the Fourier coefficients of the covariance function (5) are defined by the cross-covariance functions of the modulating processes with numbers which are shifted by k and l , respectively. It follows from (6) that the correlations of the modulating processes $\overset{\circ}{\xi}_{kl}(t)$ of the different orders lead to the bi-periodical non-stationarity of the second order.

The random processes, whose mean and covariance function are bi-periodical functions of time and can be presented by the Fourier series (4) and (5), are called bi-periodically non-stationary random processes (BPNRP) [1, 2]. The BPNRP can be used, for example, for the analysis of vibrations that are selected from a bearing with an outer race fault. Then the quantity P_1 is the period of the shaft rotation and P_2 is the period of the ball passing over the defect. Proceeding from (3), we can quite easily obtain some particular cases of the bi-rhythmic hidden periodicity. If $\overset{\circ}{\xi}_{kl}(t) = c_{kl} + \eta_{kl}(t)$, where $\eta_{kl}(t)$ are non-correlated stationary random processes and c_{kl} are some complex numbers, we have following "additive" model of diagnostic vibration signal:

$$\xi(t) = \sum_{k, l \in Z} c_{kl} e^{i\omega_{kl}t} + \sum_{k, l \in Z} \eta_{kl}(t) e^{i\omega_{kl}t} = s(t) + \eta(t),$$

where $s(t)$ is a bi-periodical function and $\eta(t)$ is a stationary random process with the covariance function $R_{\eta}(\tau) = \sum_{k, l \in Z} R_{kl}^{(\eta)}(\tau) e^{i\omega_{kl}\tau}$, where $R_{kl}^{(\eta)}(\tau) = E \bar{\overset{\circ}{\eta}}_{kl}(t) \overset{\circ}{\eta}_{kl}(t + \tau)$, $\bar{\overset{\circ}{\eta}}_{kl}(t) = \overset{\circ}{\eta}_{kl}(t) - m_{kl}^{(\eta)}$, $m_{kl}^{(\eta)} = E \eta_{kl}(t)$.

1. Javorskyj I, Mykhailyshyn V. Probabilistic models and statistical analysis of stochastic oscillations. Pattern Recogn Image Anal 1996; 6(4): 749-763.
2. Javorskyj I, Yuzefovych R, Kravets I, Matsko I. Methods of periodically correlated random processes and their generalizations in Cyclostationarity: Theory and Methods, Lecture Notes in Mechanical Engineering F. Chaari, J. Leskow, A. Sanches-Ramires (Eds.), Springer, New York, 2014; 73-93.
3. Javorskyj I, Lekow J, Kravets I, Isayev I, Gajecka-Mirek E. Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes - Part II: Harmonic series representation. Signal Process 2011; 91: 2506-2519.
4. Javorskyj I, Yuzefovych R, Lychak O, Semenov P, Slyepko R. Detection of distributed and localized faults in rotative machines using periodically non-stationary covariance analysis of vibrations. Meas Sci Technol 2023; 34: 065102.

Absolute stability of control systems with rigid feedback taking into account external load

Zhumatov Sailaubay S.

sailau.math@mail.ru

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Consider the problem of construction of the control systems with rigid feedback, taking into account external load by given $(n - s)$ -dimensional program manifold Ω [1, 4, 5]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x) - b_1 \xi, \quad t \in I = [0, \infty), \\ \dot{\xi} &= \varphi(\sigma) \psi(\nu), \quad \sigma = p^T \omega - q \xi, \end{aligned} \quad (1)$$

where $x \in R^n$ is a state vector of the object, $f \in R^n$ is a vector-function, satisfying to conditions of existence of a solution $x(t) = 0$, and the coefficients $b_1 \in R^n, p \in R^s$ are constant, q is constant coefficients of rigid feedback, σ is a total impulse-signal and the differentiable function $\varphi(\sigma)$ satisfies the following conditions

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \wedge \varphi(\sigma) \sigma > 0 \quad \forall \sigma \neq 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} &< \chi > 0, \end{aligned} \quad , \quad (2)$$

and the function $\psi(\nu)$ takes into account the actions of the external load, and determined as follows:

$$\psi(\nu) = \begin{cases} 1 & \text{at } \nu \geq 1, \\ \sqrt{\nu} & \text{at } 0 < \nu < 1, \\ 0 & \text{at } \nu \leq 0, \end{cases} \quad (3)$$

where in the general case ν has the following form [2]:

$$\nu = 1 - (a\ddot{\xi} + b\dot{\xi} + c\xi) \operatorname{sign} \sigma.$$

Here a, b, c are real numbers.

The second equation from (1) was presented by Letov in [3].

The functions $\varphi(\sigma), \psi(\nu)$ are expressed in terms of the coefficients of the equation of the hydraulic actuator, taking into account external load[2]:

$$\dot{x} = \mu \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \cdot \frac{l}{F} \sqrt{p_0 - \Delta p \operatorname{sign} \sigma} \cdot \sigma. \quad (4)$$

Here $\mu \sqrt{\frac{g}{\gamma}} \cdot \frac{l}{F}$ is the constructive constant, μ is the flow coefficient, σ is the spool displacement, $p_0 = p_k - p_\sigma, p_k$ is pressure in the supply line, p_σ is pressure at the drain, Δp is pressure difference in the cameras of the actuator, determined by the load.

The $\varphi(\sigma)$ function replaces the expression $\sqrt{\frac{g p_0}{\gamma}} \cdot \frac{l}{F}$, which determines the speed of an unloaded executor, and the multiplier $\psi(\nu) = \sqrt{1 - \frac{\Delta p}{p_0} \operatorname{sign} \sigma}$ takes into account the influence of the load.

In order for the manifold $\Omega(t)$ to be integral to system (1) at $\omega = 0$, it is sufficient to perform $\xi = 0$. This condition is satisfied if and only if $q \neq 0$.

The problem under consideration reduce to investigation of quality properties of the some system with respect to vector-function ω [4, 5, 6].

Considering that the manifold $\Omega(t)$ is an integral manifold system (1),(2),(3) and taking the Erugin function to be linear with respect to the vector function ω :

$$F(t, x, \omega) = -A\omega, \quad (5)$$

we arrive at the following system with respect to ω :

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -A\omega - \bar{b}\xi, & t \in I = [0, \infty), \\ \dot{\xi} &= \varphi(\sigma)\psi(\nu), & \sigma = p^T\omega - q\xi, \end{aligned} \quad (6)$$

where $\bar{b} = H_1 b_1$, $H_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}$, and $-A(s \times s)$ is a constant Hurwitz matrix, the nonlinearity of $\varphi(\sigma)$ satisfies conditions (2), and the multiplier $\psi(\nu)$ is determined by formula (5).

Statement of the problem. Find the absolute stability condition for the program manifold $\Omega(t)$ of the indirect control system, taking into account the external load with respect to the vector function ω under conditions (2), (5). System (6) is reduced to the canonical form [3]

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= -\rho\eta + \varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu), \\ \sigma &= c^T\eta - g\xi, \\ \dot{\sigma} &= \gamma^T - q\varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu), \end{aligned} \quad (7)$$

where $\rho = \text{diag}(\rho_1, \dots, \rho_s)$, c, g, q, γ are constant.

Consider the case when the load is positional, i.e.

$$\nu = 1 - c\xi \text{ sign}\sigma. \quad (8)$$

For system (7), we construct the Lyapunov function as follows

$$V = \eta^T H \eta + \frac{1}{2} \eta^T L \eta + \int_0^\sigma \varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu) d\sigma. \quad (9)$$

Here $H = \left\| \frac{l_i l_j}{\rho_i + \rho_j} \right\|_1^s$, l_i, l_j are real numbers and $L = \text{diag}\|L_1, \dots, L_s\| > 0$.

The condition for V to be definitely positive when the function $\xi \neq 0$ is always satisfied, i.e. when the actuator is running. We find the total derivative of the function V with respect to the variable t by virtue of system (7).

$$-\dot{V} = \left[\tilde{H}\eta + \sqrt{q}\varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu) \right]^2 + \eta^T \rho L \eta - \left[\int_0^\sigma \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \varphi(\sigma) d\sigma \right] \varphi(\sigma) \cdot \psi(\nu) > 0. \quad (10)$$

where $\tilde{H} = \text{diag}(l_1, \dots, l_s)$, ρ is also diagonal matrix, in order to have $-\dot{V} > 0$ it is enough to fulfill the following equality:

$$L + 2\sqrt{q}\tilde{H}\varphi\psi + 2H + \gamma = 0, \quad \gamma = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_s). \quad (11)$$

It should be noted that the last sum of derivative (10) will have a positive sign, for any $\sigma \neq 0$, i.e. $\frac{\partial\psi}{\partial\xi} < 0$ if $\sigma > 0$ and $\frac{\partial\psi}{\partial\xi} > 0$ if $\sigma < 0$. Therefore, when the actuator is running, $-\dot{V} > 0$ is executed.

Theorem. *If the Erugin function is linear with respect to ω , the nonlinearity $\varphi(\sigma)$ satisfies condition (2), the function $\psi(\nu)$ is determined by formula (5),(8), there are $\tilde{H} = \text{diag}(l_1, \dots, l_s)$, $L = \text{diag}\|L_1, \dots, L_s\| > 0$ then in order for the program manifold of the automatic system of indirect control, taking into account the external load was absolutely stable with respect to the vector function ω , it suffices to satisfy equalities (11).*

Acknowledgments. This research is funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP19677693).

1. Erugin N.P. *Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral curve* // Prikl. mat. Mech.– 1952. Vol. 10, No 5. – P. 659–670.
2. Khokhlov I.A. *Electrohydraulic servo drive*. Moskow: Nauka.– 1966.– 240 p.
3. Letov A.M. *Stability of nonlinear controlled systems*. Moskow: Nauka.– 1962. – 484 p.
4. Maygarin B.G. *Stability and quality of process of nonlinear automatic control system*. Alma-Ata: Nauka. – 1981. – 316 p.
5. Zhumatov S.S., Krementulo B.B., Maygarin B.G. *Lyapunov's second method in the problems of stability and control by motion*. Almaty: Gylym. – 1999. – 208 p.
6. Zhumatov S.S., Vasilina G., K. *The Absolute Stability of Program Manifold of Control Systems with Rigid and Tachometric Feedbacks* // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 11, pp. 3344-3351.

Організація роботи з учнями на уроках математики з метою подолання освітніх прогалин

Андрух Юлія, Шакун Жанна, Вязнікова Лариса

juliandruh@ukr.net, shakunzh@gmail.com, vaznikovalarisa@gmail.com

Чернівецький багатопрофільний ліцей №4

Тривала пандемія COVID-19 та повномасштабна воєнна агресія на території нашої держави вплинули абсолютно на всі сфери людської діяльності. Не минули вони і освіту. На жаль вже протягом тривалого часу і в даний період учні не мають можливості навчатися у звичному для них ритмі. Зрозуміло, що ці причини призвели до того, що майже у кожного школяра від початківця до випускника є теми, які засвоєні ним на недостатньо високому рівні, а подекуди залишаються зовсім незрозумілими.

З огляду на це перед кожним освітянином постає питання як допомогти своїм учням здолати ті недоліки при вивченні певних тем, які заважають їм рухатися вперед, вибудовуючи власну освітню траєкторію. Що ж потрібно зробити для того, щоби освітні прогалини учнів з часом не перетворилися на освітні втрати та не стали справжньою проблемою як для самих школярів та їх сімей так і для держави вцілому?

Щоби мати можливість досягнення мети подолання освітніх прогалин на уроках математики вчитель повинен підібрати такі форми і методи роботи з учнями, які би сприяли не тільки засвоєнню нових навчальних тем, а і допомагали формувати міцні знання з тем, які передували зазначених, а також формувати в учнів стійку мотивацію на шляху подолання недоліків у вивченні окремих тем або і цілих розділів.

Серед ефективних методів, що дозволяють активізувати розумову діяльність учнів різного віку на уроках математики та сприяють повторенню раніше вивченого, зокрема можна запропонувати використання усних обчислень. Доцільним є впроваджувати хвилинок усного рахунку на різних етапах уроку. Ці обчислення можуть бути як пов'язані з темою, що вивчається в цей період, так і включати в себе повторення матеріалу будь-якого розділу, якщо вчителем виявлено недоліки при його засвоєнні. Найпростішим прикладом організації усного рахунку на уроці, є ланцюжки обчислень. Для того, щоби спонукати учнів до виконання обчислень усно можна використовувати ігрові методи: естафети, змагання, вікторини та багато інших.

Ефективним та сучасним методом при роботі на уроках є завдання у тестовій формі, які учні виконують за допомогою QR-кодів на власних телефонах чи планшетах та дають можливість вчителю отримати оперативний зворотній зв'язок. За допомогою цього метода можна швидко діагностувати рівень засвоєння певної теми, що вивчалась минулого року, а після виконання завдань протягом уроку порівняти чи покращився цей рівень або визначити, що ця тема потребує ще додаткового опрацювання.

Серед методів, які дають можливість вчителю швидко і ефективно організувати повторення певної теми, яка потребує додаткової уваги учнів, є так звані ментальні карти. Для подолання освітніх прогалин доцільно використовувати ментальні карти декількох видів в залежності від того, яку мету переслідує

вчитель. Такі карти можуть містити стислу інформацію по цілому розділу або навпаки давати певні підказки для вивчення конкретної теми під час уроку.

В залежності від рівня підготовки учнів можна надати дітям таку карту знань, розроблену вчителем або запропонувати частково заповнити прогалини чи навіть створити власну карту знань, працюючи в парах або малих групах. Після завершення роботи по створенню карт знань учні можуть запропонувати однокласникам з інших груп обрати найбільш ефективну або скористатися створеними картами на уроці під час повторення раніше вивчених тем.

При організації навчання велику увагу слід звернути на групові форми роботи. Як показує світовий досвід та наукові дослідження найефективніше та з більшою охотою учні здобувають знання, уміння та навички комунікуючи у малих групах (3-5 учнів). Працюючи в команді учні усвідомлюють свою важливість та відчувають свою відповідальність за успіх виконання завдання, а матеріал донесений однолітком сприймається легко та якісно.

Отже, використання елементів STEM-освіти, зокрема, методу проектів є ефективним засобом для подолання прогалин, оскільки мотивує учнів до здобуття знань у тісному зв'язку з реальними життєвими задачами, формує специфічні уміння та навички для творчої самореалізації учнів та їх інтелектуальних здібностей.

1. Навчальні втрати: причини, наслідки й шляхи подолання. <https://osvita.ua/school/88921/>(дата звернення 31.08.2023).

Використання \LaTeX для підготовки дисертацій в Україні

Барановський Олександр

ombaranovskiy@gmail.com

Доктор Барбарус допоможе

Інститут математики Національної академії наук України

Дисертація на здобуття наукового ступеня — це документ великого обсягу, який має розгалужену структуру, містить список використаних джерел, має деякі специфічні структурні елементи (наприклад, титульний аркуш чи анотація зі спеціальним оформленням). Залежно від спеціальності може містити значну кількість математичних формул, теорем, ілюстрацій чи таблиць. А також в дисертації істотно використовуються посилання на структурні частини дисертації, формули, ілюстрації, таблиці, джерела в списку літератури тощо.

Система підготовки документів \LaTeX , що ґрунтується на системі комп'ютерної верстки \TeX , може бути ефективним інструментом для роботи, зокрема, і з дисертаціями.

У доповіді представлено набір \LaTeX -класів `vakthesis`, які забезпечують оформлення дисертації відповідно до вимог, затверджених Міністерством освіти і науки України 2017 року, [1] (а також попередніх вимог Вищої атестаційної комісії):

- оформлення титульного аркуша дисертації (обкладинки автореферату дисертації),
- підтримка анотації і списку ключових слів двома мовами,
- оформлення заголовків розділів, підрозділів, пунктів, підпунктів, а також додатків,
- нумерація сторінок, розділів (підрозділів, пунктів, підпунктів), ілюстрацій, таблиць, формул тощо,
- оформлення підписів до ілюстрацій і таблиць,
- оформлення теорем, лем, означень тощо,
- оформлення списку використаних джерел,
- повтор списку публікацій здобувача з анотації у списку використаних джерел і в додатку,
- повтор відомостей про апробацію зі вступу в додатку,
- окремі модулі, які забезпечують специфічні вимоги деяких установ до оформлення дисертації,
- оформлення автореферату дисертації.

\LaTeX -класи з набору `vakthesis` уже використовувалися для підготовки дисертацій з різноманітних галузей науки: біологія, інформатика, математика, фізика. Кілька прикладів розглядається в доповіді.

За весь час від 2003 року, коли вийшла перша версія `vakthesis`, накопичилося чимало критичних проблем. Найважливіші з них:

1. Цей набір класів нині складається з двох окремих модулів: `vakthesis` призначений для оформлення дисертацій згідно з традиційними вимогами ВАК, а `mon2017dev` — згідно із сучасними вимогами МОН.

Таке розділення, з одного боку, забезпечує стабільність і цілісність класів `vakthesis`, але, з іншого боку, тепер створює додаткові труднощі для користувачів і розробників.

2. Цей програмний засіб, взагалі кажучи, несумісний з кодуванням UTF-8, яке є стандартним у сучасному світі.

Для розв'язання накопичених проблем заплановано:

1. Об'єднати традиційний і сучасний модулі зі збереженням сумісності.
2. Забезпечити повну сумісність `vakthesis` з UTF-8.
3. Покращити документацію і зробити її зрозумілішою і кориснішою для користувачів (зокрема, доступнішою для недосвідчених користувачів \LaTeX).
4. Завантажити на Comprehensive \TeX Archive Network (CTAN), звідки `vakthesis` потрапить до головних дистрибутивів \TeX .
5. Використовувати систему керування версіями і відповідні вебсервіси, щоб полегшити доступ до коду для незалежних розробників.

Поточний стан проєкту, деякі відомі проблеми й план розробки детально описано в статті [2]. Ознайомитися з `vakthesis` можна на сторінці [3].

Цю роботу частково підтримано грантом \TeX Users Group.

1. Про затвердження Вимог до оформлення дисертації: Наказ; МОН України від 12.01.2017 № 40 // База даних «Законодавство України» / Верховна Рада України. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/go/z0155-17> (дата звернення: 24.08.2023).
2. Baranovskyi O. \LaTeX classes for doctoral theses in Ukraine: Interesting tips and painful problems // TUGboat. – 2022. – 43, No. 2. – P. 176–181. doi:10.47397/tb/43-2/tb134baranovskyi-vakthesis.
3. Поточна сторінка проєкту `vakthesis`. URL: <https://www.imath.kiev.ua/~baranovskyi/tex/vakthesis/> (дата звернення: 24.08.2023).

Програмний комплекс моделювання диференціальної гри переслідування

Бардан Андрій

bardan.andrii@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Теорія диференціальних ігор це розділ теорії керування, який вивчає взаємодію двох або більше об'єктів або груп, в умовах конфлікту. Такі задачі виникають, наприклад, у військовій справі, коли потрібно знищити ворожий об'єкт, якому властиве певне керування.

Навчальні курси з диференціальних ігор викладаються у ЗВО України, зокрема такий курс у 2011 році запровадив на кафедрі прикладної математики та інформаційних технологій академік А.О. Чикрій. Теоретичний матеріал, що стосується диференціальних ігор, викладений в матеріалах Р. Айзекса [1], А. О. Чикрія [2] та інших працях. Важливо також продемонструвати процес «переслідувач» - «втікач» у динаміці, як без фазових обмежень, так і за їх наявності. Для вирішення цієї задачі розроблено програмний комплекс, який дозволяє змоделювати процес диференціальних ігор з можливістю змінювати вхідні дані та порівнювати вихідні результати. Додаток розроблений за допомогою ігрового рушія Unity на мові програмування C Sharp.

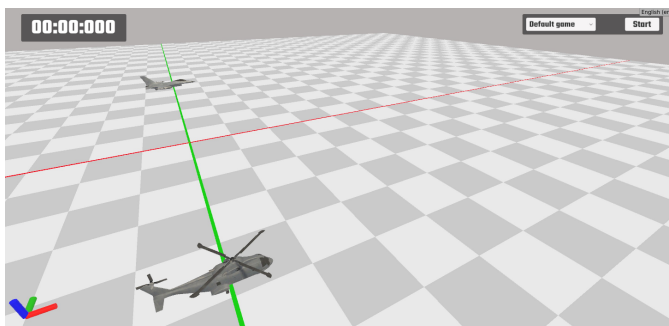


Рис 1.Вигляд розробленого програмного додатку

В основі диференціальних ігор лежить процес переслідування, який відбувається між двома групами ворожих один до одного об'єктів: переслідувачами та втікачами. Кожен з об'єктів може мати одну з цілей, яка властива групі, до якої він належить. Типовою ціллю для переслідувача є знищення усіх втікачів. Ціллю втікача - є уникнути знищення або, принаймні, відтягнути момент успіху переслідувача на максимально можливий час.

Розроблений програмний додаток дозволяє змоделювати хід диференціальної гри між двома об'єктами, один з яких переслідувач, а інший - втікач. У ролі переслідувача виступає модель винищувача «General Dynamics F-16 Fighting Falcon», а в ролі втікача модель гелікоптера «AgustaWestland AW101» (рис. 1).

Комплекс дозволяє змоделювати наступні ситуації:

1. звичайна гра - завершується перемогою переслідувачів, якщо всі втікачі знищені,
2. обмежена в часі гра - завершується перемогою втікачів, якщо заданий час гри вичерпаний, або перемогою переслідувачів, якщо всі втікачі знищені,
3. втеча в безпечну зону – завершується перемогою втікачів, якщо вони досягли безпечної області, або перемогою переслідувачів, якщо всі втікачі знищені.

На початку гри, користувач має можливість задати вхідні параметри для кожного з об'єктів, а саме, початкову позицію (координати x та y), швидкість (в межах від 0.1 до 2), обрати один з доступних способів керування. Швидкість також можна змінити безпосередньо під час процесу моделювання (рис. 2).

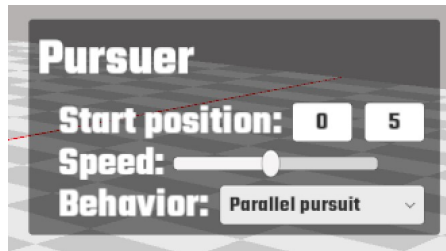


Рис 2. Користувачський інтерфейс для зміни вхідних параметрів

Можливі варіанти керування відрізняються для переслідувача та втікача. У випадку переслідувача доступні такі керування: просте переслідування (погонна крива), паралельне переслідування.

Для втікача доступні: рух від втікача (втікач обирає керування таким чином, щоб на кожному кроці його відстань від переслідувача збільшувалась), рух в заданому напрямку (втікач рухається в одному заданому напрямку), рух у найкоротшому напрямку до безпечної області.

В залежності від обраних користувачем налаштувань, додаток передбачає декілька варіантів закінчення гри:

1. перемога переслідувача
2. перемога втікача:
 - (a) вийшов час переслідування
 - (b) переслідувач досягнув безпечної області

Після закінчення гри, користувачеві доступна інформація про результати гри, яка містить: час закінчення гри (у секундах), інформацію про переможця, причину закінчення гри, довжину пройденої відстані кожного з гравців. Також на екрані відображається пройдена траєкторія руху обох гравців. Володіючи цією інформацією користувач може аналізувати, як впливають різні вхідні дані на хід та результат гри (рис. 3).

Програмний комплекс є безкоштовним та доступний онлайн за посиланням - <https://play.unity.com/mg/other/differentialgameswebgl-build>. Для роботи онлайн вимагається постійний доступ до мережі інтернет. Також можливо заван-

тажити офлайн збірку для операційної системи Windows за наступним посиланням - <https://github.com/blekoni/differential-games>. Для її запуску рекомендовано сучасний персональний або портативний комп'ютер з графічним адаптером.

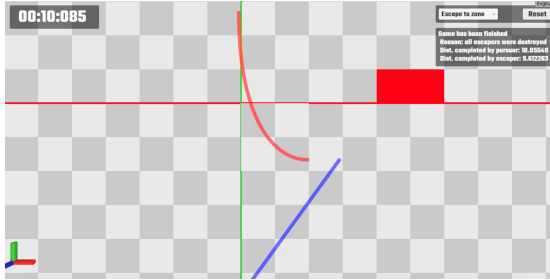


Рис 3. Гра завершена. Екран результатів

Висновок: створений програмний комплекс дозволяє змоделювати процес диференціальної гри між переслідувачем і втікачем. У користувача є можливість задати різні вхідні дані та порівнювати отримані результати гри. Такий програмний комплекс можна використовувати як інструмент для демонстрації студентам процесу диференціальних ігор при вивченні відповідних курсів.

1. Isaacs R. Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization. Dover Publications, 1999. 416 p.
2. Chikrii A. A. Conflict Controlled Processes. Boston : Springer Science and Business media, 1997. 404 p.

Синтез обмежених керувань для нелінійних систем зі степеневою головною частиною

Бєбія Максим

m.bebiya@karazin.ua

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Розглянемо задачу синтезу обмежених керувань для нелінійної некерованої за першим наближенням системи. А саме, розглянемо систему вигляду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, & |u(x)| \leq d, \\ \dot{x}_2 = c_1 x_1^{2k_1+1} + f_1(t, x, u), \\ \dot{x}_3 = c_2 x_2^{2k_2+1} + f_2(t, x, u), \end{cases} \quad (1)$$

де $u \in \mathbb{R}$ – керування, $d > 0$ – задане число, $k_i = \frac{p_i}{q_i}$ ($p_i > 0$ – цілі числа, $q_i > 0$ – непарні числа, $i = 1, 2$), $c_i \neq 0$ ($i = 1, 2$) – дійсні числа, $f_i(t, x, u)$ ($i = 1, 2$) – неперервні дійсні функції і $f_i(t, 0, 0) = 0$ для всіх $t \geq 0$.

Наша задача полягає у побудові класу обмежених керувань, таких що для будь-якої початкової точки $x_0 \in U(0)$ розв'язок $x(t, x_0)$ відповідної замкнутої системи є коректно визначеним і потрапляє в 0 за скінченний час $T(x_0) < +\infty$. Тобто $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t, x_0) = 0$.

Задачу стабілізації таких систем у n -вимірному випадку було досліджено в роботах [1], [2]. Задачу синтезу для випадку $f_i(t, x, u) = 0$ ($i = 1, 2$) і $k_1 = 0$, $k_2 > 0$ розв'язано у [3]. Запропонований у [3] підхід до побудови керувань у n -вимірному випадку для систем з однією степеневою нелінійністю ґрунтується на методі функції керованості [4]. При деяких додаткових умовах на зростання функцій $f_i(t, x, u)$ ми розвиваємо цей підхід для побудови класу керувань $u = u(x)$, що стабілізують систему (1) за скінченний час. Ми також будуємо клас функцій керованості $\theta(x)$, таких що нерівність

$$\dot{\theta}(x) \leq -\beta \theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$$

виконується для деяких $\alpha \geq 1$, $\beta > 0$. Остання нерівність гарантує, що траєкторія замкнутої системи переводить довільну початкову точку $x_0 \in U(0)$ у початок координат за скінченний час $T(x_0)$.

Функцію керованості $\theta(x)$ для $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ визначимо як єдиний додатний корінь рівняння

$$2a_0 \theta^{2m} = (FD(\theta)x, D(\theta)x), \quad (2)$$

де $a_0 > 0$ – фіксоване число, F – деяка додатно визначена матриця. $D(\theta) = \text{diag}(\theta^{m-1}, \theta^{m-2k_1-2}, 1)$ – діагональна $n \times n$ -матриця, $m = (2k_2 + 1)(2k_1 + 2) + 1$. Покладемо $\theta(0) = 0$.

Керування шукаємо у вигляді

$$u(x) = \frac{1}{\theta^m(x)}(a, D(\theta(x))x) + a_4 \frac{x_1^{2k_1+1}}{\theta^{2k_1+1}(x)} + a_5 \frac{x_2^{2k_2+1}}{\theta^{m-1}(x)}, \quad (3)$$

де $a = (a_1, a_2, a_3)^*$.

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Виберемо $a_i < 0$, $i = 1, 2, 3$ довільним чином. Нехай симетрична матриця $F = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^n$ є довільним додатно визначеним розв'язком сингулярної матричної нерівності Ляпунова $A^*F + FA \leq 0$, яку досліджено у [1]. Покладемо

$$a_4 = -\frac{a_1 f_{22}}{a_2 f_{11}} < 0, \quad a_5 = -\frac{a_1 f_{33}}{a_3 f_{11}} < 0, \quad f_{23} = \frac{a_3}{a_2} f_{22} > 0.$$

Лема. *Нехай a_0 є додатнім розв'язком нерівності*

$$\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)} \left(\|a\| - a_4 \left(\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)} \right)^{k_1} - a_5 \left(\frac{2a_0}{\lambda_{\min}(F)} \right)^{k_2} \right)^2 \leq d^2, \quad (4)$$

де λ_{\min} – мінімальне власне значення матриці F . Тоді керування вигляду (3) задовольняє обмеження $|u| \leq d$.

В роботі доведено існування такої константи $\beta > 0$, що похідна функції керованості в силу системи (1) при $u = u(x)$ вигляду (3) задовольняє нерівність

$$\dot{\theta}(x) \leq -\beta$$

у деякому околі Q початку координат.

Остання нерівність згідно з методом функції керованості [4] гарантує потрапляння траєкторій замкнутої керуванням (3) системи (1) із довільної точки $x_0 \in Q$ у початок координат за скінченний час $T(x_0)$. Більше того, $T(x_0) \leq \frac{1}{\beta} \theta(x_0)$. Позначимо через a_0^* розв'язок нерівності (4). Тоді вибір константи $a_0 > 0$ з умови $0 < a_0 \leq a_0^*$ гарантуватиме виконання обмеження на керування $\|u(x)\| \leq d$.

1. M.O. Bebiya and V.I. Korobov. On Stabilization Problem for Nonlinear Systems with Power Principal Part // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry – 2016. – 12, No. 2. – P. 113–133.
2. V.I. Korobov and M.O. Bebiya. Stabilization of one class of nonlinear systems // Automation and Remote Control – 2017. – 78, No. 1. – P. 1–15.
3. M.O. Bebiya. Global synthesis of bounded controls for systems with power nonlinearity // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University, Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics – 81. – P. 36–51.
4. V.I. Korobov. A general approach to the solution of the bounded control synthesis problem in a controllability problem. // Math USSR Sb., – 37, P. 535–557.

ω -граничні множини імпульсної динамічної системи для гіперболічної еволюційної задачі

Безущак Дмитро, Капустян Дмитро,
Сукретна Анна, Федоренко Юлія

bezushchak@gmail.com, dimonkapus@gmail.com, sukretna.a.v@knu.ua,
juliamfed@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Дослідження присвячене важливому класу еволюційних систем, що характеризуються наявністю імпульсних збурень при досягненні траєкторією системи фіксованої підмножини в фазовому просторі. Систематичне вивчення таких систем розпочалося порівняно недавно і було сфокусовано здебільшого на скінченновимірний випадок [1]. Для нескінченновимірних імпульсних динамічних систем в основному розглядалась ситуація, коли імпульсному збуренню піддавалась лише скінченна кількість координат фазового вектору.

У роботі досліджується якісна поведінка еволюційної задачі, що складається з гіперболічного дисипативного рівняння, траєкторії якого зазнають миттєвої зміни при досягненні енергетичним функціоналом певного порогового значення. Новизною даного дослідження є те, що ми розглядаємо випадок, коли весь нескінченновимірний фазовий вектор зазнає імпульсного збурення. При досить загальних умовах на параметри задачі доведено, що така задача породжує імпульсну динамічну систему в природньому фазовому просторі, а її траєкторії мають непорожні компактні ω -граничні множини.

Нехай задано трійку гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактними щільними вкладеннями, $\|\cdot\|$, (\cdot, \cdot) є нормою та скалярним добутком у H , $A : V \rightarrow V^*$ — лінійний, неперервний, самоспряжений, коерцитивний оператор, $\|u\|_V := \langle A^{\frac{1}{2}}u, u \rangle$ — норма в V , $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярний добуток у V .

Розглянемо еволюційну задачі

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\beta \frac{dy}{dt} + Ay = 0, \\ y|_{t=0} = y_0 \in V, \\ y_t|_{t=0} = y_1 \in V. \end{cases} \quad (1)$$

Введемо функціонал $\Psi : X \rightarrow \mathbb{R}_+$, який для $z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X$ визначається за правилом

$$\Psi(z) = \|z\|_X^2 = \|u\|_V^2 + \|v\|^2. \quad (2)$$

Імпульсна задача формулюється наступним чином: якщо в деякий момент часу $t > 0$ на розв'язку $z = \begin{pmatrix} y \\ y_t \end{pmatrix}$ задачі (1) функціонал (2) досягає значення Ψ_0 , то система миттєво переходить у нове положення

$$z^+ = Iz := \varphi(z) + \alpha, \quad (3)$$

де відображення $I : M \rightarrow X$, визначене на замкненій множині

$$M = \{z \in X : \Psi(z) = \Psi_0\},$$

$\alpha \in X$, $\varphi : X \rightarrow X$ задані.

Зазначимо, що постановка (3) є природною у багатьох механічних задачах, що характеризуються, наприклад, миттєвою зміною швидкості.

Задача (1) у фазовому просторі $X = V \times H$ породжує неперервну напівгрупу $G : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$, а саме відображення G , яке для $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in X$ визначається рівністю

$$G(t, z_0) = z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix} = e^{-\beta t} \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (y_0, \varphi_j) \cos \omega_j t + \left(\beta(y_0, \varphi_j) + (y_1, \varphi_j) \right) \frac{1}{\omega_j} \sin \omega_j t \\ (y_1, \varphi_j) \cos \omega_j t - \left(\lambda_j^2 (y_0, \varphi_j) + \beta(y_1, \varphi_j) \right) \frac{1}{\omega_j} \sin \omega_j t \end{pmatrix}, \quad (4)$$

де $\omega_j = \sqrt{\lambda_j^2 - \beta^2}$, $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$, $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – розв'язки спектральної задачі

$$A\varphi_j = \lambda_j \varphi_j, \quad j \geq 1,$$

$\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – ортонормований базис у H , $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, $\lambda_j \rightarrow +\infty$, $j \rightarrow \infty$, без обмеження загальності будемо вважати, що $\lambda_1 > \beta$.

При виконанні умов

$$M \cap IM = \emptyset; \quad (5)$$

$$\forall z \in M \exists \tau = \tau(z) > 0 \forall t \in (0, \tau) : G(t, z) \notin M \quad (6)$$

відомо [2], що якщо для $z \in X$

$$M^+(z) := \left(\bigcup_{t>0} G(t, z) \right) \cap M \neq \emptyset,$$

то існує $\tilde{s} := \tilde{s}(z) > 0$ таке, що

$$\forall t \in (0, \tilde{s}) : G(t, z) \notin M, \quad G(\tilde{s}, z) \in M. \quad (7)$$

Використовуючи введені позначення z^+ , $M^+(z)$, \tilde{s} , побудуємо імпульсну траєкторію $\tilde{G}(\cdot, z_0)$ що стартує з точки $z_0 \in X$ наступним чином:

- якщо $M^+(z_0) = \emptyset$, то $\tilde{G}(t, z_0) = G(t, z_0)$, $t \geq 0$;
- якщо $M^+(z_0) \neq \emptyset$, то для $s_0 := \tilde{s}(z_0)$ позначимо $z_1 := G(s_0, z_0)$, тоді

$$\tilde{G}(t, z_0) = \begin{cases} G(t, z_0), & t \in [0, s_0), \\ z_1^+, & t = s_0; \end{cases}$$

- якщо $M^+(z_1^+) = \emptyset$, то $\tilde{G}(t, z_0) = G(t - s_0, z_1^+)$, $t \geq s_0$;
- якщо $M^+(z_1^+) \neq \emptyset$, то для $s_1 := \tilde{s}(z_1^+)$ позначимо $z_2 := G(s_1, z_1^+)$, тоді

$$\tilde{G}(t, z_0) = \begin{cases} G(t - s_0, z_1^+), & t \in [s_0, s_0 + s_1), \\ z_2^+, & t = s_0 + s_1; \end{cases}$$

і так далі.

Продовжуючи цей процес ми отримуємо скінченну або нескінченну кількість імпульсних точок

$$z_{n+1}^+ = IG(s_n, z_n^+), \quad z_0^+ := z_0, \quad n \geq 0;$$

і відповідну послідовність моментів часу

$$T_{n+1} := \sum_{k=0}^n s_k, \quad T_0 := 0, \quad n \geq 0.$$

При цьому \tilde{G} задається формулою

$$\tilde{G}(t, z_0) = \begin{cases} G(t - T_n, z_n^+), & t \in [T_n, T_{n+1}), \\ z_{n+1}^+, & t = T_{n+1}. \end{cases} \quad (8)$$

Слід зауважити, що в такій системі можуть бути "ефекти биття" або "Zeno"-режими, коли моменти імпульсної дії відбуваються настільки часто, що траєкторія (8) руйнується за скінченний час.

Оскільки нас цікавить поведінка (8) при $t \rightarrow \infty$, то будемо вважати, що:

$$\begin{aligned} &\text{для кожного } z_0 \in X \text{ або імпульсних точок немає,} \\ &\text{або їх скінченна кількість, або } T_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Умова (9) гарантує, що для довільного $z_0 \in X$ функція $t \mapsto \tilde{G}(t, z_0)$ визначена на $[0, +\infty)$.

Відображення $\tilde{G} : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$ побудоване вище називається **імпульсною динамічною системою**.

Теорема. *Припустимо, що для задачі (1) – (3) виконується умова*

$$\|\varphi(z)\|_X \leq \|z\|_X, \quad \Psi_0 < \frac{1}{4} \|\alpha\|_X^2. \quad (10)$$

Тоді задача (1) – (3) породжує імпульсну динамічну систему \tilde{G} , причому кожна імпульсна траєкторія має нескінченну кількість імпульсних точок.

Якщо, крім того, виконуються умови

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} < \frac{1}{8\beta} \ln \left(\frac{\|\alpha\|_X^2}{2\Psi_0} - 1 \right);$$

$\varphi : M \rightarrow X$ – компактне відображення.

то ω -гранична множина імпульсної динамічної системи \tilde{G}

$$\tilde{\omega}(z_0) = \left\{ \xi \in X \mid \exists \{t_n\}_{n=1}^\infty : t_n \nearrow \infty, \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{G}(t_n, z_0) \right\}$$

для кожного $z_0 \in X$ є непорожнім компактом і вірно граничне співвідношення

$$\text{dist}_X(\tilde{G}(t, z_0), \tilde{\omega}(z_0)) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Зауважимо, що умову компактності відображення $\varphi : M \rightarrow X$ можна замінити на умову існування границі $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$.

1. Samoilenko A. M., Perestyuk N. A. Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – 462 p.
2. Капустян О.В., Перестюк М.О. Глобальні атрактори імпульсних нескінченновимірних систем // Укр. Мат. Журн. – 2016. – т. 68, No 4. – С. 517 – 528.

Основні акценти викладання математики та інформатики в 5-9 класах Нової української школи

Бирка Маріан, Чепишко Олеся

m.byrka@chnu.edu.ua, chepyshkoolesia@gmail.com

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Спаська філія I-II ст. Михальчанського ліцею*

Викладання математики та інформатики у сучасній базовій середній освіті відбувається відповідно до нового Державного стандарту базової середньої освіти (математична та інформатична освітні галузі) [2]. Зазначений нормативний документ не тільки детермінує нову мету, завдання, зміст, форми і методи викладання, а й змінює акценти діяльності вчителя на більш важливі для належної підготовки особистості до подальшого життя.

Приміром, метою математичної освітньої галузі є розвиток особистості учня через формування математичної компетентності у взаємозв'язку з іншими ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає засвоєння системи знань, удосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі; розвиток логічного мислення та психічних властивостей особистості; розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті, а метою інформатичної освітньої галузі є розвиток особистості учня, здатного використовувати цифрові інструменти і технології для розв'язання проблем, розвитку, творчого самовираження, забезпечення власного і суспільного добробуту, здатного критично мислити, безпечно та відповідально діяти в інформаційному суспільстві [3]. Як бачимо, і математична, і інформатична освітня галузі спрямовані на формування ключових компетентностей учнів, при цьому, вони тісно переплетені між собою, адже спрямовані на осмислення важливості застосування математики та інформатики в особистому і суспільному житті в інформаційну епоху.

Для досягнення мети обидвох освітніх галузей вважаємо за необхідне виокремити три основні акценти важливі для викладання математики та інформатики в 5-9 класах Нової української школи.

Так, найважливішим завданням вчителя у ході викладання математики та інформатики в 5-9 класах Нової української школи є формування в учнів позитивного ставлення, що зумовлено виокремленням в Державному стандарті базової середньої освіти [3] разом із знаннями та вміннями нового критерію оцінювання навчальних досягнень учнів - "ставлення". Крім цього, формування в учнів позитивного ставлення до цих предметів є передумовою до появи, формування та розвитку в них інших важливих ставлень, зокрема: позитивного ставлення до навчання, а також позитивного ставлення до праці. Також відмітимо, що позитивне ставлення може набути форми "любви до математики та інформатики що залишиться з учнями на все їх життя.

Другим акцентом є формування вчителем математики та інформатики визначених Державним стандартом базової середньої освіти 11 наскрізних вмінь, а саме: 1) читати з розумінням; 2) висловлювати власну думку усно і письмово; 3) критично та системно мислити; 4) здатність логічно обґрунтовувати позицію; 5) здатність діяти творчо; 6) виявляти ініціативу; 7) конструктивно керувати

емоціями; 8) оцінювати ризики; 9) приймати рішення; 10) розв'язувати проблеми; 11) співпрацювати з іншими [2]. При цьому, відмітимо, що наскрізні вміння є спільними для всіх ключових компетентностей, адже розвивають в учнів здатність застосовувати отримані знання при вирішенні реальних життєвих ситуацій.

Третім акцентом, на який необхідно звернути увагу у ході викладання математики та інформатики в 5-9 класах Нової української школи необхідність розуміння розподілення відповідальності за результати навчання між усіма учасниками освітнього процесу. У цьому контексті, як зазначають М. Бирка, В. Лучко та Г. Перун у дослідженні основних ризиків та викликів, які несе реформа "Нова українська школа" для вчителів на рівні базової середньої освіти, "для сучасної української шкільної освіти і виховання панівною є думка, що кожен педагог несе повну відповідальність за якість навчання і освітні досягнення учнів. Проте новий Державний стандарт базової середньої освіти, як і Концепція Нової української школи, акцентують увагу на тому, що відповідальність за результати навчання несуть всі учасники цього процесу - не тільки вчителі, а й учні та їх батьки" [1, с. 52-53]. При цьому автори визначили, що відповідальність за результати навчання доцільно розподілити наступним чином: вчитель - 40%, учень/учениця - 30%, його/її батьки - 30%. Таке бачення відповідає основному концептуальному положенню Нової української школи, а саме педагогіки партнерства.

Таким чином, у дослідженні нами означено три основні акценти важливі для викладання математики та інформатики в 5-9 класах Нової української школи, а саме: формування в учнів позитивного ставлення до математики та інформатики, формування в них наскрізних умінь, а також розуміння всіма учасниками освітнього процесу своєї відповідальності за результати навчання.

1. Бирка М. Ф., Лучко В. М., Перун Г. М. Реформа "Нова українська школа" на рівні базової середньої освіти: основні ризики та виклики для вчителів. Педагогіка формування творчої особистості у вищій і загальноосвітній школах. 2022. Вип. 85. С. 50-57.
2. Державний стандарт базової середньої освіти. Постанова КМУ № 898 від 30.09.2020 року. URL: <http://surl.li/kenu>.
3. Про інструктивно-методичні рекомендації щодо викладання навчальних предметів/інтегрованих курсів у закладах загальної середньої освіти у 2023/2024 навчальному році. URL: <http://surl.li/lapjf>.

Усереднення в багаточастотних системах із малими параметрами і лінійно перетвореними аргументами

Бігун Ярослав, Скутар Ігор

y.bihun@chnu.edu.ua, i.skutar@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

У багатьох працях досліджуються багаточастотні системи рівнянь вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = X(\tau, a, \varphi, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y(\tau, a, \varphi, \varepsilon),$$

де ε – малий параметр, вектор-функції X і Y – 2π -періодичні за швидкими змінними $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ і є сумами за степенями параметра ε . Дослідженню широкого класу таких систем методом усереднення і методом інтегральних многовидів присвячена монографія [1]. Метод усереднення за швидкими змінними застосований для дослідження багаточастотних систем із запізненням аргументу і з початковими, багатоточковими й інтегральними умовами або їх комбінаціями у працях [2, 3, 4, 5] та ін.

У даній роботі досліджується система рівнянь із дійсними степенями малого параметра в рівняннях для повільних a і швидких φ змінних вигляду

$$\frac{da}{d\tau} = \varepsilon^{\kappa_1} X(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^\kappa} + \varepsilon^{\kappa_2} Y(\tau, a_\Lambda, \varphi_\Theta), \quad (1)$$

де $\tau \in [0, L]$, $\kappa > 0$, $\kappa_1 \geq 0$, $\kappa_2 \geq 0$; $a \in D \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi \in T^m$, $n, m \geq 1$; $a_\Lambda = (a_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_p})$, $\varphi_\Theta = (\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_q})$, $a_{\lambda_\nu}(\tau) = a(\lambda_\nu \tau)$, $\varphi_{\theta_\nu}(\tau) = \varphi(\theta_\nu \tau)$, $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq 1$, $0 < \theta_1 < \dots < \theta_q \leq 1$.

Відповідна (1) усереднена система за m змінними $\varphi_{\theta_1}, \dots, \varphi_{\theta_q}$ набуває вигляду

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = \varepsilon^{\kappa_1} X_0(\tau, \bar{a}_\Lambda), \quad (2)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon^\kappa} + \varepsilon^{\kappa_2} Y_0(\tau, \bar{a}_\Lambda). \quad (3)$$

Якщо розв'язок $\bar{a}(\tau; \bar{y})$ рівняння (2) із початковою умовою $\bar{a}(0) = \bar{y}$ знайдено, то знаходження розв'язку $\bar{\varphi}(\tau; \bar{y}, \psi, \varepsilon)$, $\bar{\varphi}(0; \bar{y}, \psi, \varepsilon) = \psi$, зводиться до задачі інтегрування.

Відповідний системі (1) осциляційний інтеграл записується у вигляді

$$I_k(\tau, \varepsilon) = \int_0^\tau f_k(\tau, \varepsilon) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^\kappa} \int_0^s \gamma_k(z) dz\right) ds, \quad (4)$$

де $k = (k_1, \dots, k_q)$, $\|k\| \neq 0$, $\gamma_k(\tau) = \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu(k_\nu, \omega(\theta_\nu \tau))$.

Умова резонансу в точці $\tau \in [0, L]$ у системі (1) залежить від величини запізнь у швидких змінних та задається рівністю

$$\gamma_k(\tau) = 0, \quad k \neq 0. \quad (5)$$

При достатній гладкості правих частин системи рівнянь (1) і виконанні умови

$$W[\omega(\theta_1\tau), \dots, \omega(\theta_q\tau)] \neq 0, \quad \tau \in [0, L], \quad (6)$$

де W – визначник Вронського за системою функцій $\{\omega(\theta_1\tau), \dots, \omega(\theta_q\tau)\}$, для всіх $\tau \in [0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ правильна оцінка

$$\|I_k(\tau, \varepsilon)\| \leq c_1 \varepsilon^\alpha \left(\sup \|f_k(\tau, \varepsilon)\| + \frac{1}{\|k\|_\Theta} \sup \left\| \frac{df_k(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \right\| \right) \quad (7)$$

де $\alpha = \kappa/mq$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$, $\|k\|_\Theta = \sum_{\nu=1}^q \theta_\nu \|k_\nu\|$.

Встановлено існування і єдиність розв'язку на відрізку $[0, L]$ системи рівнянь (1) із початковими умовами $(\bar{y}, \bar{\psi})$. На підставі оцінки (7) отримано для $(\tau, \varepsilon) \in [0, L] \times (0, \varepsilon_2]$ оцінку похибки методу усереднення вигляду

$$\varepsilon^{\kappa_2} \|a(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) - \bar{a}(\tau; \bar{y})\| + \varepsilon^{\kappa_1} \|\varphi(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau; \bar{y}, \bar{\psi}, \varepsilon)\| \leq c_2 \varepsilon^{\alpha + \kappa_1 + \kappa_2},$$

де $c_2 > 0$ і не залежить від ε .

Якщо $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa - 1 = 0$, то оцінка похибки методу усереднення має порядок ε^α й одержана в [2].

1. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. Київ. Наукова думка, 2004. 475 с.
2. Бігун Я. Й., Скутар І. Д. Усереднення в багаточастотних системах із запізненням та локально-інтегральними умовами. Буковинський математичний журнал. 2020. Т. 8, № 2. С. 14-23.
3. Bihun Yaroslav, Roman Petryshyn, Inessa Krasnokutska. Averaging method in multifrequency systems with linearly transformed arguments and with point and integral conditions. Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences, 2018, Nr. 2(6). P. 20-27.
4. Бігун Я.Й., Краснокутська І.В., Петришин Р.І. Усереднення в багаточастотних системах із лінійно перетвореними аргументами і точковими та інтегральними умовами. Буковинський математичний журнал. 2016. Т. 4, № 3-4. С. 30-35.
5. Бігун Я.Й. Усереднення в багаточастотних системах диференціально-функціональних рівнянь: Дис. ... д-ра. фіз.-мат. наук: 01.01.02. Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. Київ, 2009. 298 с.

Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь з нелінійностями, що є композиціями правильно та швидко змінних функцій

Білозерова Марія

marbel@ukr.net

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \exp(R(y, y')), \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$), $R : \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$ є неперервно диференційовною функцією, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — або проміжок $[y_i^0, Y_i[$, або $]Y_i, y_i^0]$. Крім того, будемо вважати, що функція R така, що

$$\lim_{\substack{(y_0, y_1) \rightarrow (Y_0, Y_1) \\ (y_0, y_1) \in \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1}}} R(y_0, y_1) = +\infty, \quad \lim_{\substack{y_i \rightarrow Y_i \\ y_i \in \Delta_{Y_i}}} \frac{y_i R'(y_i)}{R(y_i)} = \gamma_i, \quad i = 0, 1. \quad (2)$$

Прикладами функцій, що задовольняють умову (2) можуть слугувати функції виду $|y|^{\gamma_0} |y'|^{\gamma_1}$, $|y|^{\gamma_0} |y'|^{\gamma_1} \ln^\mu ||y|^{\sigma_0} |y'|^{\sigma_1}|$ та інші при певних $Y_0, Y_1 \in \{0, \infty\}$. У роботах [1] та [2] досліджувалися диференціальні рівняння, що можуть містити частинні випадки рівняння (1), але не містять вищезазначені достатньо широкі класи функцій, які зокрема потребують істотних змін методики дослідження.

Розв'язок y , визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, якщо

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \quad (3)$$

Метою даної роботи є встановлення необхідних і достатніх умов існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків, а також асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку у випадках $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Введемо наступні необхідні надалі позначення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty, \end{cases} \quad \Phi_0(y) = \int_{Y_0}^y \exp(-R(\tau, y'(t^{-1}(\tau)))) d\tau,$$

де $t^{-1}(y)$ є оберненою функцією для $y(t)$,

$$\Phi_1(y) = \int_{Y_0}^y \frac{\Phi_0(\tau)}{\tau} d\tau, \quad Z_1 = \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \Phi_1(y), \quad \Psi(y) = \frac{\Phi_1'(y)}{\Phi_1(y)}, \quad J(t) = \frac{I_1(t)}{I_1'(t)},$$

$$I(t) = \alpha_0 (\lambda_0 - 1) \int_{B_\omega^0}^t \pi_\omega(\tau) p(\tau) d\tau, \quad I_1(t) = \int_{B_\omega^1}^t \frac{\lambda_0 I(\tau)}{(\lambda_0 - 1) \pi_\omega(\tau)} d\tau,$$

¹При $Y_i = +\infty$ ($Y_i = -\infty$) вважаємо, що $y_i^0 > 0$ ($y_i^0 < 0$) відповідно.

границі інтегрування B_ω^0 та B_ω^1 обираються так, щоб відповідні інтеграли прямувати або до нуля, або до нескінченності.

Теорема. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ та $\gamma_0 \lambda_0 + \gamma_1 \neq 0$. Тоді для існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків необхідно, а якщо $I(t)I_1(t)\lambda_0 > 0$ при $t \in]b, \omega[$, то й достатньо виконання умов

$$\begin{aligned} \pi_\omega(t)y_1^0 y_0^0 \lambda_0 (\lambda_0 - 1) > 0; \quad \pi_\omega(t)y_1^0 \alpha_0 (\lambda_0 - 1) > 0 \quad \text{при } t \in [a; \omega[, \\ y_1^0 \cdot \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{\frac{1}{\lambda_0 - 1}} = Y_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} I_1(t) = Z_1, \\ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_1''(t)I_1(t)}{(I_1'(t))^2} = 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_1'(t)\pi_\omega(t)}{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))\Phi_1^{-1}(I_1(t))} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \\ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{I_1'(t)I(t)\Phi_0'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))}{I'(t)\Phi_0(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I_1(t)))} = 1, \\ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)J'(t)}{J(t)} = \frac{\lambda_0 \gamma_0 + \gamma_1 - \lambda_0 + 1}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\Psi'(y)}{\Psi(y)} = \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\lambda_0} - 1. \end{aligned}$$

Більше того, для кожного такого розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$\Phi_1(y(t)) = I_1(t)[1 + o(1)], \quad \frac{y'(t)\Phi_1'(y(t))}{\Phi_1(y(t))} = \frac{I_1'(t)}{I_1(t)}[1 + o(1)].$$

1. Evtukhov V., Chernikova A. Asymptotic of of Slowly Varying Solutions of Ordinary Binomial Differential Equations of the Second Order with Rapidly Varying Nonlinearity. – Journal of Mathematical Sciences. (2017) 2018. V.228, N 3. pp. 207-225.
2. Чепок О.О. Асимптотичні зображення правильно змінних $P(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків диференціального рівняння другого порядку, яке містить добуток різного типу нелінійностей від невідомої функції та її похідної. Нелінійні коливання, 2022, т. 25, №1 ISSN 1562-3076.

Про співпрацю IT Cluster "Chernivtsi IT Community" та IT освіти в регіоні

Білокурський Руслан, Черевко Ігор, Шкільнюк Дмитро

r.biloskurskyu@chnu.edu.ua, i.cherevko@chnu.edu.ua, dimonshk@gmail.com
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

В IT Cluster "Chernivtsi IT Community" входять представники провідних IT компаній регіону. Основна мета кластеру – розвиток IT галузі в регіоні, створення відповідної інфраструктури в місті, робота над спільними проєктами [1]–[4].

Українська IT-індустрія бурхливо розвивалась напередодні повномасштабного російського вторгнення. Із початком активних бойових дій інтерес до IT-індустрії в українців не зник. Адже попри всі складнощі у 2022 році обсяг експорту комп'ютерних послуг в Україні зріс на 5,8% у порівнянні з 2021 роком. IT-індустрія забезпечила валютні надходження до української економіки в обсязі \$7,35 млрд.

Інновації та технології – саме те, чого потребує освіта сьогодні. Світ дуже динамічно розвивається, і завдання системи освіти – швидко знаходити ефективні відповіді на виклики сьогодення. Під впливом нових технологій, розвитку штучного інтелекту й автоматизації певних процесів деякі ролі просто можуть зникнути або трансформуватись. І до цього треба бути готовими. IT-освіта не тільки здійснюватиме підготовку початківців – вже наявні спеціалісти також постійно шукатимуть, як навчитись чогось нового.

Підготовка IT-фахівців має починатися зі школи. Однак ще 2021 році дослідження за методологією PISA показали що у базових знаннях із математики відставання України від розвинених країн складає 12%. А зараз і поготів: повітряні тривоги та онлайн-режим не сприяють поліпшенню навчання.

За таких обставин перед системою освіти і науки України постали досі небачені виклики та загрози, які, попри активні бойові дії й агресію рф, вимагають оперативного реагування насамперед задля збереження життя всіх учасників освітнього процесу, реалізації права на освіту з огляду на безпекову ситуацію на конкретній території, забезпечення безперервності та рівного доступу до освітніх послуг внутрішньо переміщених дітей і дітей-біженців за кордоном, оцінювання освітніх потреб.

IT Cluster "Chernivtsi IT Community" докладає значних зусиль до популяризації IT галузі, підвищення рівня IT освіти в регіоні.

Шкільна освіта:

- Mini Мудрик
- Онлайн академія
- VR workshop
- IT KickStart
- Портал абітурієнта
- Співпраця з олімпіадами
- Співпраця з МАН

Вища освіта:

- Лекції "Find yourself in IT industry"

- Мікростажування у компаніях викладачів ЗВО
- IT практика
- IT сніданки
- Організація проекту "від студента до Джуна"
- Сертифікація викладачів ЗВО
- Дуальна освіта

Сьогодні український сектор налічує понад 300 тисяч спеціалістів. Серед них 38% джуніорів і лише 14% – сеньйорів. За цими параметрами ми сильно відстаємо від інших країн (наприклад, в Польщі 46% сеньйорів). Чому так сталося? Дисбаланс спричинила тенденція минулих років, коли компанії активно наймали студентів других-третьох курсів. Проте без фундаментальних базових знань – з алгоритмізації, прикладної математики, архітектури, методів оптимізації тощо – зростати до рівня сеньйор дуже складно. Виправити ситуацію зараз може напрямок неформальної освіти, який активно розвивається, зокрема і в IT Cluster. Поєднання формальної та неформальної освіти дозволить створити оптимальну еко-систему, де людина зможе отримати системні знання та стати якісним спеціалістом.

1. <https://www.it-cluster.cv.ua/>
2. <https://www.youtube.com/watch?v=HKuyqxT7IA>
3. <https://acc.cv.ua/news/chernivtsi/chernivecka-it-industriya-roboty-v-umovah-viyini-86757>
4. <https://c4.com.ua/novyny/trimayut-ekonomichnij-front-yak-pracyuyut-it-kompanii-v-chernivcyax/>

Метод парних рівнянь для дослідження напружено-деформованого стану циліндра з тріщиною

Бобилев Дмитро

dmytrobobyliiev@gmail.com

Криворізький державний педагогічний університет

В роботі [1] був досліджений осесиметричний напружено-деформований стан нескінченного циліндра, що містить дископодібну тріщину. Бічна поверхня циліндра вільна від навантаження, а деформація симетрична відносно площини тріщини. Розглянемо аналогічний антисиметричний випадок і застосуємо метод парних рівнянь, щоб розв'язати задачу для будь-якого навантаження, яке діє на межу тріщини.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченний пружний циліндр одиничного радіуса $\rho \leq 1$, $-\infty < x < \infty$ ((ρ, ϕ, x) – циліндричні координати). Дископодібна тріщина радіуса ε належить площині $x = 0$. Напружено-деформований стан циліндра будемо вважати антисиметричним відносно площини $x = 0$. Отже, дана задача може бути сформульована для напівнескінченного циліндра $x \leq 0$ на торці якого поставлено змішані умови:

$$\begin{aligned} \sigma_x = 0, \quad u = 0, \quad \text{якщо} \quad x = 0, \quad \varepsilon \leq \rho \leq 1; \\ \sigma_x = N(\rho), \quad \tau_{x\rho} = T(\rho); \quad \text{якщо} \quad x = 0, \quad 0 \leq \rho \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

де u – тангенціальне переміщення; $\sigma_x, \tau_{x\rho}$ – складові тензору напружень; $N(\rho), T(\rho)$ – напруження задані на поверхні тріщини. Будемо вважати, що $N(\rho) = 0$.

Використаємо умови відсутності напружень на циліндричній поверхні і розв'язок будемо шукати у вигляді рядів (1), (2):

$$\sigma_x(p, x) = 2G \sum_k A_k \sigma_k(\rho) e^{p_k x}, \quad (1)$$

$$u(\rho, x) = \sum_k A_k u_k(\rho) e^{p_k x}, \quad \tau_{x\rho}(p, x) = 2G \sum_k A_k \tau_k(\rho) e^{p_k x}. \quad (2)$$

де A_k невідомі коефіцієнти; p_k – корні рівняння Шиффа.

Для розв'язання задачі методом парних рівнянь схемою [2], а саме до визначимо змішані умови (3).

$$\sum_k A_k u_k(\rho) = U(\varepsilon) \equiv \begin{cases} 0, & \varepsilon \leq \rho \leq 1, \\ \frac{(1-\nu)}{G} \rho \int_\rho^\varepsilon \frac{h(t)}{t^2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}, & 0 \leq \rho \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (3)$$

Проінтегруємо по контуру [2] отримаємо ядро (4) інтегрального рівняння для обчислення напружень.

$$\begin{aligned} \Pi(\rho, \xi) = \frac{1}{1-\nu} \left[\int_0^\infty J_1(\rho y) J_1(\xi y) y^2 dy - \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_1(y)}{I_1(y)} I_1(\rho y) I_1(\xi y) y^2 dy \right] - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\tau^*(iy, \rho) \tau^*(iy, \xi)}{\Delta(fy)} dy. \end{aligned} \quad (4)$$

Де $\Delta(p) = (1 - \nu)p^{-2} J_1^2(p) s(p)$.

Остаточню приходимо до регулярного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (5).

$$h(s) = \int_0^\varepsilon L(s, t)h(t)dt + \frac{2}{\pi} \int_0^s \frac{T(\rho)\rho^2 d\rho}{\sqrt{s^2 - \rho^2}}, 0 \leq s \leq \varepsilon \quad (5)$$

з симетричним ядром (6)

$$L(s, t) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \left[\frac{K_1(y)}{I_1(y)} \alpha(y, s)\alpha(y, t)y^2 + (1 - y) \frac{\psi(iy, s)\psi(iy, t)}{\Delta(iy)} \right] dy. \quad (6)$$

Таким чином, розв'язок поставленої задачі визначається формулами (5), (6).

1. Sneddon I. N., Welch J. T. A note on the distribution of stress in a cylinder containing a penny-shaped crack // Int. J. Engng Sci.. – 1963. – v. 1, № 4. – С. 411–419.
2. Srivastav R. P. Dual relations involving Dini series // Proc. Roy. Soc. Edinb. Ser. A. – 1964. – v. 66, part 3. – С. 161–172.

Слабкозбурена лінійна крайова задача для системи диференціальних рівнянь дробового порядку

Бойчук Олександр, Ферук Віктор

boichuk.aa@gmail.com, feruk.viktor@gmail.com

Інститут математики НАН України

Розглядається слабкозбурена лінійна крайова задача для системи дробових диференціальних рівнянь у просторі $C[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$

$${}^C D_{a+}^{\alpha} x(t) = A(t)x(t) + \varepsilon A_1(t)x(t) + f(t), \quad (1)$$

$$lx(\cdot) = q + \varepsilon Jx(\cdot), \quad (2)$$

де $0 < \alpha < 1$, ${}^C D_{a+}^{\alpha}$ — лівостороння похідна Капуто, $A(t)$, $A_1(t)$ — $(n \times n)$ -вимірні матриці і $f(t)$ — n -вимірний вектор, компоненти яких належать простору $C[a, b]$, $l = \text{col}(l_1, l_2, \dots, l_p) : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ і $J = \text{col}(J_1, J_2, \dots, J_p) : L_2[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$ — обмежені лінійні векторні функціонали, $l_{\nu}, J_{\nu} : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\nu = \overline{1, p}$, $q = \text{col}(q_1, q_2, \dots, q_p) \in \mathbb{R}^p$, $\varepsilon \ll 1$ — малий параметр.

Досліджується питання біфуркації розв'язків $x \in C[a, b]$ задачі (1), (2) за припущення, що породжуюча задача, тобто задача

$${}^C D_{a+}^{\alpha} x(t) = A(t)x(t) + f(t), \quad (3)$$

$$lx(\cdot) = q, \quad (4)$$

не має розв'язку.

Використовуючи методи теорії слабкозбурених операторних крайових задач з нетеровою лінійною частиною [1] та встановлений у роботі [2] критерій розв'язності задачі (3), (4), знайдено умови виникнення та структуру сім'ї розв'язків крайової задачі (1), (2). Отримано наступний результат.

Теорема. *Нехай породжуюча для крайової задачі (1), (2) задача (3), (4) не є розв'язною. Тоді, якщо виконуються умови*

$$X(t)P_{Q_{d_2}} \neq 0, \quad P_{B_0^*} P_{Q_{d_1}^*} = 0,$$

то крайова задача (1), (2) буде мати d_2 -параметричну сім'ю розв'язків у вигляді збіжного, при достатньо малих фіксованих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_)$, ряду з сингулярністю в точці $\varepsilon = 0$*

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t). \quad (5)$$

Тут $X(t)$ — фундаментальна $(n \times n)$ -вимірна матриця однорідної системи (3) ($f = 0$), стовпці якої утворюють фундаментальну систему розв'язків цієї системи,

$$B_0 = P_{Q_{d_1}^*} \left(JX(\cdot)P_{Q_{d_2}} - W\Lambda^{-1}F_m \left[A_1(\cdot)X(\cdot)P_{Q_{d_2}} \right] \right)$$

— $(d_1 \times d_2)$ -вимірна матриця, $P_{B_0^*}$ — $(d_1 \times d_1)$ -вимірна матриця, яка є проектором на коядро матриці B_0 , $W = l\Phi(\cdot)$ — матриця, яка складається із p рядків

та нескінченної кількості стовпчиків, $Q = lX(\cdot) - (p \times n)$ -вимірنا матриця, $P_{Q_{d_2}}(P_{Q_{d_1}}^*) - (n \times d_2)((d_1 \times p))$ -вимірна матриця, що складається із повної системи $d_2(d_1)$ лінійно незалежних стовпчиків(рядків) матриці-проектора $P_Q(P_{Q^*})$, $d_1 = p - \text{rank}Q$, $d_2 = n - \text{rank}Q$,

$$\Lambda = I - \int_a^b \int_a^t \Phi^*(t) K_m(t, s) \Phi(s) ds dt, \quad F_m[w(\cdot)] = \int_a^b \Phi^*(t) w^m(t) dt,$$

$$\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_i(t), \dots),$$

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^\infty$ — повна ортонормальна система функцій в $L_2[a, b]$,

$$w^m(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_a^t \frac{w(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds + \sum_{l=1}^{m-1} \int_a^t \int_a^s \frac{K_l(t, s) w(\tau)}{(s-\tau)^{1-\alpha}} d\tau ds \right),$$

$$K_m(t, s) = \int_s^t K(t, \xi) K_{m-1}(\xi, s) d\xi, \quad K_1(t, s) = \frac{A(s)}{\Gamma(\alpha)(t-s)^{1-\alpha}}, \quad m > \frac{1}{2\alpha}.$$

Умова $P_{B_0^*} P_{Q_{d_1}}^* = 0$ є достатньою умовою існування d_2 -параметричної сім'ї розв'язків крайової задачі (1), (2). Якщо умова $P_{B_0^*} P_{Q_{d_1}}^* = 0$ не виконується, то d_2 -параметричної сім'ї розв'язків задачі (1), (2) у вигляді ряду (5) не існує, але вона може існувати у вигляді ряду типу (5) за степенями малого параметра ε починаючи із $-2, -3, \dots$

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. – Berlin: De Gruyter, second ed., 2016. – 298 p.
2. Boichuk O.A., Feruk V.A. Fredholm boundary-value problem for the system of fractional differential equations // Nonlinear Dyn. – 2023. – Vol. 111. – P. 7459–7468.

Автори дякують за фінансову підтримку за рахунок проекту “Математичне моделювання складних динамічних систем та процесів актуальних для безпеки держави”, реєстраційний номер 0123U100853 та гранту H2020-MSCA-RISE-2019, номер проекту 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology).

Модифікація моделі інфекційного захворювання для урахування дифузійних збурень в умовах адсорбційної терапії

Бомба Андрій, Барановський Сергій

abomba@ukr.net, svbaranovsky@gmail.com

*Національний університет водного господарства та природокористування,
м. Рівне*

Ефективне застосування та персоналізація розроблених програм лікування інфекційних захворювань зумовлює потребу якісного прогнозування протікання хвороби за умов застосування різного роду терапій залежно від імунологічного стану організму та форми і стадії захворювання. Описані в [1] базова модель інфекційного захворювання та моделі імунної відповіді забезпечують прогнозування загальних закономірностей розвитку процесу вірусного захворювання з урахуванням гуморального та клітинного типів імунітету. Розширення меж застосування такого роду моделей для урахування впливу і інших механізмів захисту організму, а також зовнішніх, в тому числі, керуючих терапевтичних чинників потребує розробки відповідних їх модифікацій та узагальнень. Зокрема, в роботі [2] запропоновано підхід для урахування впливу дифузійних збурень діючих факторів на розвиток процесу та показано, що урахування цього ефекту призводить до зниження прогнозних концентрацій діючих чинників в епіцентрі зараження, а, отже, і до «гостроти» протікання захворювання. А в [3] такий підхід узагальнено для урахування впливу дифузійних збурень в умовах температурної реакції організму. У роботі [4] запропоновано узагальнення базової моделі для урахування впливу зовнішнього екологічного чинника, що пов'язаний із забрудненням довкілля.

Як засвідчує медична практика терапевтичний ефект різного роду лікарських препаратів можливо посилити при їх комплексному застосуванні з адсорбційними методами. Механізм дії адсорбційних препаратів має істотні відмінності. Зокрема, адсорбенти не розчиняються і не потрапляють у кровообіг, вони не є специфічними до конкретних токсинів чи метаболітів, а після їх накопичення і зв'язування адсорбенти виводяться із організму. Зв'язувальна дія таких препаратів (наприклад, силікагель, активоване вугілля чи пористі смоли) пов'язана з дифузією речовини у пори окремих адсорбційних елементів.

Обмежившись урахуванням процесу адсорбції в мезопорах, динаміку діючих чинників вірусної інфекції з урахуванням дифузійних збурень, зосереджених впливів в умовах адсорбційної терапії описано такою знерозміреною сингулярно-збуреною системою нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням τ :

$$\begin{aligned} V'_t &= \omega_V + \beta V - \gamma FV + \varepsilon D_V (V''_{xx} + V''_{yy} + V''_{zz}) - \\ &\quad - \delta^2 D_W^* (W'_n)|_{\partial G_*}, \\ W'_t &= \delta^2 D_W (W''_{xx} + W''_{yy} + W''_{zz}), \\ C'_t &= \xi(m)\alpha F(t - \tau)V(t - \tau) - \mu(C - C^*) + \\ &\quad + \varepsilon^2 D_C (C''_{xx} + C''_{yy} + C''_{zz}), \\ F'_t &= \omega_F + \rho C - (\mu_f + \eta\gamma V)F + \varepsilon D_F (F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz}), \\ m'_t &= \sigma V - \mu_m m + \varepsilon^2 D_m (m''_{xx} + m''_{yy} + m''_{zz}) \end{aligned} \quad (1)$$

за умов

$$\begin{aligned} C(x, y, z, 0) &= C^0(x, y, z), \quad m(x, y, z, 0) = m^0(x, y, z), \\ V(x, y, z, \tilde{t}) &= V^0(x, y, z, \tilde{t}), \quad F(x, y, z, \tilde{t}) = F^0(x, y, z, \tilde{t}), \\ -\tau \leq \tilde{t} \leq 0, \quad L\Omega|_{\partial\tilde{G}} &= 0, \quad W(x, y, z, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, 0) = 0, \\ W(x, y, z, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)|_{\partial G_*(x, y, z)} &= \kappa \cdot V(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (2)$$

де $V(x, y, z, t)$, $F(x, y, z, t)$, (x, y, z, t) , $m(x, y, z, t)$ – відповідно концентрації антигенів, специфічних імунних агентів, імунологічних клітин, які продукують ці імунні агенти та значення відносної характеристики ураження органу-мішені в момент часу t у точці (x, y, z) деякого обмеженого мезопористого середовища \tilde{G} ; $W(x, y, z, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, t)$ – концентрації антигенів в опуклих областях адсорбційних частинок (характерних околах точок (x, y, z)) [5]; $\kappa > 0$ – константа адсорбційної рівноваги; β – темп розмноження антигенів; γ – коефіцієнт, що визначає результат взаємодії антигенів з антитілами; μ_C – величина, обернена тривалості життя плазматичних клітин; α – коефіцієнт стимулювання імунної системи; C^* – концентрація імунологічних клітин у здоровому організмі; ρ – швидкість виробництва власних антитіл однією плазматичною клітиною; μ_f – величина, обернена тривалості існування антитіл; η – витрати антитіл на нейтралізацію одного антигену; σ – темп ураження клітин органу-мішені; μ_m – швидкість відновлення органу-мішені; ε_{DV} , $\delta^2 D_W$, ε_{DF} , $\varepsilon^2 D_C$, $\varepsilon^2 D_m$ – коефіцієнти дифузійного перерозподілу відповідно антигенів в середовищі організму та в мезопорах частинок адсорбенту, антитіл, плазматичних та уражених клітин, $\delta^2 D_W^*$ – коефіцієнт, що характеризує вплив дифузійного перерозподілу антигенів у мікропорах частинок адсорбенту на їх дифузійний перерозподіл в середовищі організму [5]; ε , δ – малі параметри, які характеризують малий вплив дифузійних компонент у порівнянні з іншими складовими процесу; $C^0(x)$, $m^0(x)$, $V^0(x, \tilde{t})$, $F^0(x, \tilde{t})$ – обмежені достатньо гладкі функції; L – оператор граничних умов (I-го, II-го, чи III-го роду); $\Omega = (V, C, F, m)$. Функція $\xi(m)$ призначена для урахування ефекту зниження ефективності функціонування імунологічного органу при його значному ураженні, а функції $\omega_V(x, t)$, $\omega_F(x, t)$ – для опису, зокрема, зосереджених змін концентрацій антигенів та антитіл [6].

Покрокове наближення розв'язку модельної сингулярно збуреної задачі із запізненням здійснюється шляхом застосування спеціальної обчислювальної технології, що синтезована на основі покрокової процедури, асимптотичного та чисельних методів.

Результати комп'ютерного моделювання ілюструють ефективність застосування адсорбційної терапії для лікувального впливу на розвиток інфекційного захворювання. Продемонстровано, що введення в організм адсорбентів забезпечує додаткову нейтралізацію та виведення вірусних елементів з організму. Така дія підвищує прогностичну ефективність різних лікувальних терапій, зокрема, імунотерапії та сприяє більш швидкій стабілізації інфекційного захворювання. Також показано, що ефективність самої адсорбційної терапії, з-поміж іншого, визначатиметься ще й часом введення відповідного препарату. Урахування таких особливостей впливу адсорбентів на динаміку інфекційного захворювання є досить важливим при розробці відповідної програми застосування адсорбційної терапії.

1. Marchuk G.L. Mathematical models of immune response in infectious diseases. Dordrecht: Kluwer Press, 1997. 350 p.
2. Bomba A.Ya., Baranovsky S.V., Pasichnyk M.S., Pryshchepa O.V. Modeling small-scale spatial distributed influences on the development of infectious disease process. Mathematical modeling and computing. 2020. Vol. 7, No. 2. pp. 310–321.
3. Bomba A., Baranovsky S., Blavatska O., Bachyshyna L. Infectious disease model generalization based on diffuse perturbations under conditions of body's temperature reaction, Computers in Biology and Medicine, Volume 146, 2022, 105561.
4. Бігун Я. Математична модель впливу екологічного фактору на імунну відповідь при інфекційних захворюваннях / Я. Бігун, М. Патратій, А. Юрійчук // Матеріали міжн. наук. конф. "Сучасні проблеми диференціальних рівнянь та їх застосування". – Чернівці, 2020. – С. 93–94.
5. Petryk M. Mathematical modeling and visualization of gas transport in a zeolite bed using a slice selection procedure / Petryk M., Leclerc S., Canet D., Fraissard J. // Diffusion Fundamentals. – 2007. – 4. – P. 11.1-11.23.
6. Bomba A., Baranovskii S., Pasichnyk M., Malash K. Modeling of infectious disease dynamics under the conditions of spatial perturbations and taking into account impulse effects. Proc. of the 3rd International Conference on Informatics and Data-Driven Medicine. CEUR Workshop Proceedings. Vol-2753.– 2020. – pp. 119–128.

Параболічне рівняння з випадковим збуренням та змінним показником нелінійності

Бугрій Олег¹, Бугрій Наталія², Доманська Олена¹

oleh.buhrii@lnu.edu.ua, nataliia.v.buhrii@lpnu.ua,

olena.domanska@lnu.edu.ua

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,

²Національний університет "Львівська політехніка"

Нехай \mathbb{S} – цілком регулярний топологічний простір, \mathcal{F} – сім'я підмножин \mathbb{S} , $\mathbb{P} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ – імовірнісна міра Радона, які задовольняють традиційні аксіоми імовірнісного простору. Нехай $n \in \mathbb{N}$ та $T > 0$ – деякі фіксовані числа, Ω – обмежена область в \mathbb{R}^n з досить гладкою межею $\partial\Omega$,

$$Q_{0,T} = \Omega \times (0, T), \quad \Pi_{0,T} = \Omega \times (0, T) \times \mathbb{S}.$$

Досліджуватимемо мішану задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + g(x,t,u) = f(x,t,\omega) +$$

$$+ \frac{\partial b(x,t,\omega)}{\partial t}, \quad (x,t,\omega) \in \Pi_{0,T}, \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times [0, T], \quad (2)$$

$$u(x,0,\omega) = u_0(x,\omega), \quad x \in \Omega, \quad \omega \in \mathbb{S}, \quad (3)$$

де $a_{ij}(i, j = \overline{1, n})$, g, f, b, u_0 – деякі функції. Похідні тут розуміються в сенсі узагальнених функцій з відповідних просторів, причому вираз $\frac{\partial b}{\partial t}$ трактується як білий шум. Нелінійність функції g за третьою змінною має змінний степеневий характер, зокрема, для $(x,t) \in Q_{0,T}$ та $\xi \in \mathbb{R}$ виконується оцінка

$$g_0|\xi|^{q(x)} \leq g(x,t,\xi)\xi \leq g^0|\xi|^{q(x)},$$

де $0 < g_0 \leq g^0 < +\infty$. Доведемо однозначну розв'язність мішаної задачі (1)-(3) та вимірність її розв'язку за параметром $\omega \in \mathbb{S}$, який вважається випадковою змінною. Отримані властивості є перенесенням на випадок параболічних рівнянь зі змінними показниками нелінійності деяких результатів праці [1].

1. Coayla-Teran E.A., Ferreira J., Magalhaes P.M.D. Weak solutions for random nonlinear parabolic equations of nonlocal type. *Random Operators and Stochastic Equations*. 2008; 16: 213-222.

Синхронізація каналів на основі методу графічної оцінки та аналізу програм

Буйновський Віктор, Пасічник Галина

pasichnyk.gs@gmail.com

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Підхід до управління на основі бізнес-процесів є ефективним інструментом управління складними системами. Ефективність їх базується на застосуванні мережі взаємопов'язаних бізнес-процесів, що збільшує цінність результату, а також на керуванні процесами. Математичний апарат GERT (графічної оцінки та аналізу програм) є одним з інструментів дослідження систем різних видів [1, 2].

Можливості математичного апарату GERT-мереж знаходить широке застосування в різних прикладних задачах: інформаційно-телекомунікаційних системах; складанні виробничих розкладів та розподілі ресурсів; ресурсно-часовому аналізі виробничих процесів тощо [3, 4, 5]. Вибір GERT-мереж як основи для розробки як основи для аналізу виробничих процесів викликана тим, що вони дозволяють використовувати багатократне імітаційне моделювання виробничих процесів, часові параметри та інші стохастичні параметри.

Ми розглядаємо евристичний алгоритм покращення характеристик протоколів передачі інформації на основі виявлення в них прихованої паралельності, застосовуючи модель GERT. Він полягає в зведенні полімодальних розподілів до унімодального розподілу та уточненні моментів часу початку передачі пакетів за рахунок виявлення запасів часу передачі з одного кінця в інший сітки. Реалізація апарату GERT-сіткового моделювання дозволяє підвищити ефективність та обґрунтувати прийнятність управлінських рішень.

1. Pritsker, A. A. B. GERT: Graphical evaluation and review technique. Memorandum RM-4973-NASA, 1966.
2. Phillips D., Garcia-Diaz A. Fundamentals of Network analysis, Prentise – Hall, 1981.
3. Semenov S, Voloshyn D, Ahmed AN. Mathematical model of the implementation process of flight task of unmanned aerial vehicle in the conditions of external impact // International Journal of Advanced Trends in Computer Science and Engineering. – 2019.– Vol. 8, № 1. – P. 7–13.
4. Barkalov S., Budkov O., Sidorenko Ye. Choice of Effective Organizational and Technological Decisions under Reconstruction with Consideration for Ecological Monitoring // Scientific Israel – Technological Advantages. – 2012. – Vol. 14, № 2, 3. – P. 21–29 .
5. Семенов С.Г., Гавриленко С.Ю., Халіфе Кассем GERT-модель прогнозування параметрів функціональної безпеки технічних систем системи обробки інформації // Системи обробки інформації. – 2016. – Вип. 2 (139). – С. 50–52.

Один клас вироджених параболічних систем

Буртняк Іван, Малицька Ганна

ivan.burtnyak@pnu.edu.ua

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

Ми досліджуємо вироджені параболічні системи, що мають три групи змінних за якими є виродження параболічності [1].

Нехай $n_j \in N, j = \overline{1, 4}, n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4, \sum_{j=1}^4 n_j = n_0, x \in R^{n_0}, x_j \in R^{n_j}, \xi \in R^{n_0}, \xi_j \in R^{n_j}, 0 < \tau < t \leq T < +\infty, x_j = x_{j1}, \dots, x_{jn_j}, \bar{x}_j = x_{j1}, \dots, x_{jn_{j+1}}, \bar{\bar{x}}_j = x_{j1}, \dots, x_{jn_{j+2}}, \bar{\bar{\bar{x}}}_j = x_{j1}, \dots, x_{jn_{j+3}}, \rho_1(t, x_1, \tau, \xi_1) = |x_1 - \xi_1|(t - \tau)^{-\frac{1}{2}}, \rho_2(t, x'_1, \tau, \xi'_1) = |x_2 - \xi_2 + \frac{(\bar{x}_1 - \xi_1)(t - \tau)}{2}|(t - \tau)^{-\frac{3}{2}}, x' = (\bar{x}_1, x_2), \rho_3(t, x''_1, \tau, \xi''_1) = |x_3 - \xi_3 + \frac{(\bar{x}_2 - \xi_2)(t - \tau)}{2} + \frac{(\bar{\bar{x}}_1 - \xi_1)(t - \tau)^2}{12}|(t - \tau)^{-\frac{5}{2}}, x'' = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{x}_2, x_3), \rho_4(t, x'''_1, \tau, \xi'''_1) = |x_3 - \xi_4 + \frac{(\bar{x}_3 - \xi_3)(t - \tau)}{2} + \frac{(\bar{\bar{x}}_2 - \xi_2)(t - \tau)^2}{10} + \frac{(\bar{\bar{\bar{x}}}_1 - \xi_1)(t - \tau)^3}{120}|(t - \tau)^{-\frac{7}{2}}, \rho(t, x, \tau, \xi) = \sum_{j=1}^4 \rho_j^2.$

Ми розглядаємо задачу Коші:

$$\partial_t u(t, x) - \sum_{j=1}^3 x_j \partial_{x_{j+1}} u(t, x) = \sum_{|k| \leq 2} A_k(t, x) D_{x_1}^k u(t, x), \quad (1)$$

$$u(t, x)|_{t=\tau} = u_0(x). \quad (2)$$

Виконуються умови:

I) $\partial_t \omega(t, x) = \sum_{|k| \leq 2} A_k(t, x) D_{x_1}^k u(t, x)$ -рівномірно параболічна система, $(t, x) \in \Pi_{[0, T]}$

$\Pi_{[0, T]} = \{(t, x), x \in R^{n_0}, 0 \leq \tau < t \leq T\}$, (x_1, x_2, x_3) - параметри.

II) $A_k(t, x), D_{x_1}^k A_k(t, x), 1 < D \leq 2b$, неперервні і обмежені в $\Pi_{[0, T]}$, задовольняють умову Гельдера по $x, 0 < \alpha \leq 1$.

III) $\sum_{|k|=2} A_k(t, x) \sigma_1^k = \sum_{|k|=2} \gamma_k(t, x) \sigma_1^k A_0, A_0$ - стала матриця, $\gamma_k(t, x) \sigma_1^k$ - одно-рідні многочлени по σ_1 .

Теорема. *Нехай виконуються умови I-III тоді існує матриця Гріна $G(t, x, \tau, \xi)$ задачі (1)-(2), існує матриця Гріна $G^*(t, x, \tau, \xi)$ спряженої системи до (1) за Лагранжосом. Для похідних правильні оцінки*

$$|\partial_{x_1}^m G(t, x, \tau, \xi)| \leq C_m (t - \tau)^{-\sum_{j=1}^4 \frac{(2j-1)n_j + |m|}{2}} \exp\{-c_0 \rho^2(t, x, \tau, \xi)\}, C_m > 0, |m| \leq 2,$$

$$|\partial_{x_l} G(t, x, \tau, \xi)| \leq C_l (t - \tau)^{-\sum_{j=1}^4 \frac{(2j-1)n_j + 2l-1}{2}} \exp\{-c_0 \rho^2(t, x, \tau, \xi)\}, C_l > 0, l = \underline{2, 4}.$$

1. Burtnyak I.V., Malychka H.P. On the Fundamental Solution of the Cauchy Problem for Kolmogorov Systems of the Second Order. Ukr. Math. J. 2019, **70**, 1275–1287. doi:10.1007/s11253-018-1568-y

Методичні особливості використання інтерактивних методів при проведенні уроків та оцінюванні знань учнів з математики в старшій школі ЗЗСО

Венгрин Юлія, Боднарчук Світлана

venhryn.yuliia@chnu.edu.ua, s.bodnaruk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

У сучасному освітньому контексті, де активно зростає значення використання інноваційних підходів у навчанні, інтерактивні методи стають ключовим фактором у досягненні якісного та цілеспрямованого навчання математики. Математика, як фундаментальна дисципліна, вимагає не лише механічного засвоєння формул та правил, але й глибокого розуміння концепцій та їхнього практичного застосування у реальному житті.

Інтерактивні методи, такі як використання головоломок, групової роботи, ігор, взаємодія з мультимедійними засобами, спільне моделювання ситуацій, дозволяють залучити учнів до активної пізнавальної діяльності, розвивати критичне мислення, комунікативні навички та сприяють їхньому зануренню в математичний світ. Ці методи сприяють глибшому розумінню матеріалу, оскільки вони стимулюють учнів досліджувати, аналізувати та пояснювати концепції один одному. Крім того, інтерактивні методи навчання математики навчають учнів співпрацювати, обмінюватися ідеями та розв'язувати завдання в команді, що відповідає сучасним вимогам до соціальних компетенцій. [1]

Розглянемо приклад застосування інтерактивного методу на уроці алгебри у 10 класі з теми "Тригонометричні рівняння":

Створення тригонометричних "головоломок-загадок" відбувається за наступною схемою.

1. Підготовка. Вчитель підготовлює кілька тригонометричних рівнянь різних типів, які потрібно буде розв'язати. Для кожного рівняння вчитель також готує загадку, яка містить підказку щодо правильного підходу до розв'язання.
2. Створення головоломок-загадок. Вчитель розділяє тригонометричні рівняння на окремі кроки. Наприклад, для рівняння типу $\sin(x) = 0.5$, перший крок може бути загадкою "Знайди кут, у якого синус дорівнює 0.5".
3. Розподіл завдань. Учні розподіляються на пари або невеликі групи. Кожна пара отримує одне тригонометричне рівняння та відповідну загадку-підказку.
4. Розв'язання рівнянь. Учні мають завдання розв'язати своє тригонометричне рівняння, використовуючи підказку зі своєї загадки.
5. Презентація результатів. Кожна пара представляє своє вирішене рівняння та роз'яснює, як саме було використано підказку для знаходження розв'язку.
6. Обговорення. Вчитель та інші учні можуть коментувати рішення, порівнювати підходи та ділитися враженнями.
7. Підведення підсумків. Вчитель робить висновки про те, які методи та підходи були найбільш ефективними для розв'язання тригонометричних рівнянь.

Цей метод сприяє активному та цікавому навчанню тригонометричних рівнянь, стимулює творчий підхід до розв'язання та сприяє глибшому розумінню матеріалу.

На уроці алгебри у 10 класі під час вивчення теми "Похідна функції" можна

використати інтерактивний метод - рольова гра: "Диференціальні детективи". Учні розподіляються на групи. Кожна група отримує картку з іменем детектива та список завдань, які вони повинні розв'язати. Кожна група отримує список функцій, для яких треба знайти похідну. Завдання можуть бути різнорівневими, від простих до більш складних. Наприклад, знайти похідну від x^2 , $\sin x$, x , $\ln x$, $\frac{1}{x}$ тощо.

Кожна група готує коротку презентацію, в якій вони демонструють свої результати. В презентації можна показати, як вони знайшли похідні та які практичні застосування є для цих похідних (наприклад, в фізиці, економіці, інженерії). Після презентацій вчитель може ставити додаткові питання та коментувати розв'язки.

Ця рольова гра допомагає учням застосовувати знання про похідні функцій на практиці та розвиває їх комунікативні навички.

Під час вивчення теми "Значення синуса, косинуса, тангенса та котангенса для деяких кутів" у 10 класі, етап закріплення вивченого на уроці пропонуємо провести за допомогою методу "Мікрофон". Учні пропонується заповнити таблицю значень тригонометричних функцій для деяких конкретних кутів, наприклад, 30° , 45° , 60° , 90° .

Отже, використання інтерактивних методів навчання математики відкриває нові можливості для створення позитивного та результативного навчального середовища, яке сприяє якісному засвоєнню матеріалу та підготовці учнів до викликів сучасності.

1. Використання інтерактивних форм і методів навчання. URL: <http://surl.li/gwetz>.

Паралельна реалізація скінченно-елементної апроксимації крайової задачі для FADE

Вербіцький Віктор, Максимов Артур, Черноморець Вероніка

*v.verbitskyi@onu.edu.ua, a.maximov@onu.edu.ua,
veronika.chernomorets@stud.onu.edu.ua*

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Нехай $\Omega = (0, 1)$, $0 \leq \beta < 1$, $\alpha = (2 - \beta)/2$, $H_0^\alpha(\Omega)$ — простір Соболева. Для побудови скінченно-елементного розв'язку[3] крайової задачі для стаціонарного дробового рівняння адвекції-дисперсії (FADE — Fractional Advection Dispersion Equation) маємо розглянути наступну варіаційну задачу[1]. Для $f \in L^2(\Omega)$ знайти таке $u \in H_0^\alpha(\Omega)$, що

$$\int_{\Omega} a \left(p D_{0,x}^{-\beta} + q D_{1,x}^{-\beta} \right) Du Dv + b(x) Duv + c(x) u v dx = \int_{\Omega} f v dx \quad \forall v \in H_0^\alpha(\Omega),$$

де D — просторова похідна, $D_{0,x}^{-\beta}$, $D_{x,1}^{-\beta}$ — лівосторонній та правосторонній дробовий інтеграл, відповідно, порядку β , $0 \leq p, q \leq 1$ та $p + q = 1$.

Для визначення елементів матриці скінченно-елементної апроксимації[3] крайової задачі треба обчислювати дробові інтеграли $D_{0,x}^{-\beta} D\varphi_j(x)$, $D_{1,x}^{-\beta} D\varphi_j(x)$ в різних точках проміжку Ω . Тут $\varphi_j(x)$ — базисна функція скінченно-елементного простору, $(x_{j-1}, x_j) \subset \Omega$ — носій функції $\varphi_j(x)$. Зауважимо, що $D_{0,x}^{-\beta} D\varphi_j(x) \neq 0$ для $x > x_{j-1}$. Аналогічні зауваження мають місце для правостороннього інтегралу $D_{1,x}^{-\beta} D\varphi_j(x)$. Таким чином, при побудові матриці скінченно-елементної апроксимації значна частина обчислювальної роботи приходить на обчислення дробових інтегралів у різних точках проміжку Ω . З іншого боку, обчислення дробового інтегралу $D_{0,x}^{-\beta} D\varphi_j(x)$ в різних точках можна проводити паралельно, знаючи значення $D\varphi_j(x)$ в вузлах деякої сітки проміжка (x_{j-1}, x_j) [2].

Нами запропоновано паралельний алгоритм обчислення елементів матриці скінченно-елементної апроксимації, основою якого є паралельне обчислення дробових інтегралів.

1. Ervin V. J., Roop J. P. Variational formulation for the stationary fractional advection dispersion equation // Numerical methods for partial differential equations. – 2005. – Vol. 22. – Is. 3. – P. 558-578.
2. *Li Ch., Zeng F.* Numerical methods for fractional calculus. – CRC Press, 2015. – 294 p.
3. *Szabó B., Babuška I.* Finite element analysis. Method, verification and validation. Second ed. – John Wiley & Sons, Inc., 2021. – 387 p.

Оцінка ефективності SIRV моделі для дослідження епідемії в контексті пандемії COVID-19 у Рівненській області

Гаврильчук Леонід

leonid.havrylchuk@oa.edu.ua

Національний університет "Острозька академія"

Постановка проблеми. Базова модель SIR, заснована на теорії Кермака-МакКендріка, є ключовим інструментом для аналізу розповсюдження інфекційних хвороб. Її модифікація, модель SIRV, особливо актуальна для вивчення впливу вакцинації на динаміку COVID-19. Дослідження ситуації в Рівненській області допоможе виявити взаємозв'язки між факторами поширення вірусу та ефективністю вакцинаційних заходів, маючи значуще наукове та практичне значення.

Аналіз останніх досліджень. Вчені як М. О. Оке, О. М. Огунмілоро, Ч. Т. Акінвумі та Р. А. Раджі [2] зробили значний вклад у оптимізацію SIRV моделі та вивчення впливу вакцинації. Особливо слід відзначити роботу М. Ісікаві [1]. В Україні динаміку захворюваності на COVID-19 вивчали А. Нікітін, І. Самойленко, І. Нестерук, а також у рамках співпраці з литовськими ученими – Є. Мейдуте-Кавалаяускене та С. Бекесіене ([3], [4])

Постановка завдання. Метою дослідження є аналіз епідеміологічної ситуації щодо COVID-19 в Україні, враховуючи параметри смертності, госпіталізації та ефективності вакцинації. Основним завданням є вивчення ефективності SIRV моделі для передбачення перебігу пандемії.

Основна частина. Побудувавши SIRV модель:

$$N = S(t) + I(t) + R(t) + V(t) \quad (1)$$

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} + \frac{dV}{dt} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (3)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (4)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \quad (5)$$

$$\frac{dV}{dt} = \nu S(t) - V(t) \quad (6)$$

де N - це загальна кількість населення, яке приймається за константу; $S(t)$ - сприйнятливий населення; $I(t)$ - інфікований населення; $R(t)$ - "вилучений" населення; $V(t)$ - вакцинований населення; β - постійна швидкість передачі захворювання; γ - швидкість одужання; ν - швидкість вакцинації сприйнятливого населення.

та проаналізувавши її результати шляхом порівняння їх з історичними даними, які беруть свій початок від 27 березня 2020 року. Ми зможемо відзначити, що пік епідемії відбувся у січні 2021 року, після чого захворюваність почала знижуватися. Але, порівнюючи дані моделі з історичними показниками, можна помітити значні відхилення. Незважаючи на спрощеність моделі SIRV, реальна ситуація в Україні була інакшою. Дані відмінності можуть бути зумовлені рядом факторів: міграційні процеси, урядові рішення, а також поява нових штамів вірусу. Модель відображає реальність найбільш точно на короткий період часу. Проте, при аналізі довгострокових даних, особливо стосовно вакцинованого населення та "вилученого" населення, відхилення стають значними.

Висновки. SIRV модель дозволяє адекватно описати перебіг епідемії COVID-19 у 2020-2021 роках, проте містить певні похибки, зокрема не враховуються повторні зараження.

1. Ishikawa. (2012). Optimal Strategies for Vaccination using the Stochastic SIRV Model. *Shisutemu Seigyo JoHo Gakkai Ronbunshi*, 25(12), 343–348. URL: <https://doi.org/10.5687/iscie.25.343>
2. Oke, M. O., Ogunmiloro, O. M., Akinwumi, C. T., and Raji, R. (2019). Mathematical Modeling and Stability Analysis of a SIRV Epidemic Model with Non-linear Force of Infection and Treatment. *Communications in Mathematics and Applications*, 10(4). URL: <https://doi.org/10.26713/cma.v10i4.1172>
3. Bekesiene, S., Samoilenko, I., Nikitin, A., and Meidute-Kavaliauskiene, I. (2022, February 9). The Complex Systems for Conflict Interaction Modelling to Describe a Non-Trivial Epidemiological Situation. *Mathematics*, 10(4), 537. URL: <https://doi.org/10.3390/math10040537>
4. Nesteruk, I., Rodionov, O., Nikitin, A., and Walczak, S. (2022, April 22). Influences of seasonal and demographic factors on the COVID-19 pandemic dynamics. *EAI Endorsed Transactions on Bioengineering and Bioinformatics*, 1(4), 172364. URL: <https://doi.org/10.4108/eai.8-12-2021.172364>

Вігамільтонова структура раціонально-факторизованих потоків Лакса, пов'язаних з алгеброю Лі дробових інтегро-диференціальних операторів

Гентош Оксана¹, Прикарпатський Анатолій²

ohen@ua.fm, pryk.anat@cybergal.com

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики

і.м. Я.С. Підстригача НАН України

¹Краківський університет технологій

На спряженому просторі \mathbb{A}_α^* до алгебри Лі $\mathbb{A}_\alpha := \mathbb{A}_0\{\{D^\alpha, D^{-\alpha}\}\}$ дробових інтегро-диференціальних операторів у вигляді $a_\alpha := \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j \circ D^{\alpha(p_\alpha - j)} \in \mathbb{A}_\alpha$, де $a_j \in \mathbb{A}_0$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $p_\alpha \in \mathbb{Z}_+$ – порядок оператора a_α , $\mathbb{A}_0 := A\{\{D, D^{-1}\}\}$ – алгебра Лі звичайних інтегро-диференціальних операторів, елементами якої є формальні ряди Лорана за оператором просторової похідної $D : A \rightarrow A$ з коефіцієнтами, що належать алгебрі функцій $A := W_2^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C}) \cap W_\infty^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, $D^\alpha : A \rightarrow A$ – оператор дробової похідної Рімана-Ліувілля, $\alpha \in \mathbb{C}^\# := \{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \mid \operatorname{Re} z \neq 0\}$, відносно скалярного добутку

$$(a_\alpha, b_\alpha) = \int_{\mathbb{R}} \operatorname{res}_D (\operatorname{res}_{D^\alpha} ((a_\alpha \circ b_\alpha) \circ D^{-\alpha})) dx, \quad a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha, \quad (1)$$

де $\operatorname{res}_{D^\alpha}$ позначає коефіцієнт при $D^{-\alpha}$ у розвиненні дробового інтегро-диференціального оператора, res_D – коефіцієнт при D^{-1} у розвиненні звичайного інтегро-диференціального оператора, розглядається пара гамільтонових потоків Лакса

$$dl_\alpha/dt_n = [(\nabla \gamma_n(l_\alpha))_+, l_\alpha], \quad (2)$$

$$d\tilde{l}_\alpha/dt_n = [(\nabla \gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_+, \tilde{l}_\alpha]. \quad (3)$$

Тут символ ∇ позначає градієнт гладкого за Фреше функціонала на \mathbb{A}_α^* відносно скалярного добутку (1), нижній індекс "+" – проєкцію дробового інтегро-диференціального оператора на підалгебру Лі $\mathbb{A}_{\alpha,+} \subset \mathbb{A}_\alpha$ формальних поліномів за оператором D^α , $\mathbb{A}_\alpha = \mathbb{A}_{\alpha,+} \oplus \mathbb{A}_{\alpha,-}$, t_n , $n \in \mathbb{N}$, – еволюційні параметри, а $l_\alpha, \tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^* \simeq \mathbb{A}_\alpha$ – дробові інтегро-диференціальні оператори порядку $m_\alpha \in \mathbb{N}$, які для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ у початковий момент часу пов'язані перетворенням подібності:

$$\tilde{l}_\alpha(0) = B_\alpha^{-1}(0)l_\alpha(0)B_\alpha(0),$$

$B_\alpha(0)$ – деякий дробовий диференціальний оператор порядку $s_\alpha \in \mathbb{N}$, $s_\alpha \leq m_\alpha$, коефіцієнти якого не залежать від t_n , $n \in \mathbb{N}$.

У кожній точці $l_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^* \simeq \mathbb{A}_\alpha$ потоки (2) породжуються \mathcal{R} -деформованою дужкою Лі-Пуассона $\{.,.\}_\mathcal{R}$:

$$\{\gamma, \mu\}_\mathcal{R}(l_\alpha) = (\nabla \gamma(l_\alpha), \Theta_1 \nabla \mu(l_\alpha)),$$

де $\gamma, \mu \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_\alpha^*)$ – гладкі за Фреше функціонали на \mathbb{A}_α^* , оператор Пуассона $\Theta_1 : T^*(\mathbb{A}_\alpha^*) \rightarrow T(\mathbb{A}_\alpha^*)$ діє за правилом $\Theta_1 : \nabla \gamma(l_\alpha) \mapsto -[l_\alpha, (\nabla \gamma(l_\alpha))_-] + [l_\alpha, \nabla \gamma(l_\alpha)]_{\leq 0}$ для будь-якого $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_\alpha^*)$, $T(\mathbb{A}_\alpha^*)$, $T^*(\mathbb{A}_\alpha^*)$ – дотичний та кодотичний простори

до \mathbb{A}_α^* , індекс "-" позначає проєкцію дробового інтегро-диференціального оператора на підалгебру Лі $\mathbb{A}_{\alpha,-}$, індекс " ≤ 0 " – проєкцію на підалгебру Лі $\mathbb{A}_{\alpha,-} \circ D^\alpha \subset \mathbb{A}_\alpha$, та інваріантами Казимира $\gamma_n(l_\alpha) = \frac{m_\alpha}{n+m_\alpha} \int_{\mathbb{R}} \text{res}_D (\text{res}_{D^\alpha} l_\alpha^{(n+m_\alpha)/m_\alpha} \circ D^{-\alpha}) dx$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Для згаданих вище операторів $l_\alpha, \tilde{l}_\alpha \in \mathbb{A}_\alpha^*$ порядку $m_\alpha \in \mathbb{N}$ встановлено існування дробових диференціальних операторів $A_\alpha, B_\alpha \in \mathbb{A}_{\alpha,+}$ порядків $r_\alpha = m_\alpha + s_\alpha$ і s_α відповідно, таких що

$$l_\alpha = A_\alpha B_\alpha^{-1}, \quad \tilde{l}_\alpha = B_\alpha^{-1} A_\alpha. \quad (4)$$

Також показано, що оператори $A_\alpha, B_\alpha \in \mathbb{A}_{\alpha,+}$ задовольняють системи еволюційних рівнянь у вигляді:

$$\begin{aligned} dA_\alpha/dt_n &= (A_\alpha(\nabla\gamma_n(l_\alpha))_-)_+ - ((\nabla\gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_- A_\alpha)_+, \\ dB_\alpha/dt_n &= (B_\alpha(\nabla\gamma_n(l_\alpha))_-)_+ - ((\nabla\gamma_n(\tilde{l}_\alpha))_- B_\alpha)_+, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рівності (4) задають перетворення Беклунда

$$P : (A_\alpha, B_\alpha) \in \mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha \mapsto (l_\alpha, \tilde{l}_\alpha) \in \mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*. \quad (6)$$

Теорема. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ система еволюційних рівнянь (5), задана на підпросторі $\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+} \subset \mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha$, є бігамільтоновою відносно дужок Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{L}_1}$ і $\{.,.\}_{\mathcal{L}_2}$, що виникають в результаті редукування на $\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+}$ дужок Пуассона $\{.,.\}_{\tilde{\mathcal{L}}_1}$ і $\{.,.\}_{\tilde{\mathcal{L}}_2}$ з відповідними операторами Пуассона $\tilde{\mathcal{L}}_1 = (P')^{-1}(\Theta_1 \oplus \tilde{\Theta}_1)(P'^*)^{-1}$ і $\tilde{\mathcal{L}}_2 = (P')^{-1}(\Theta_2 \oplus \tilde{\Theta}_2)(P'^*)^{-1}$, де оператор Пуассона $\Theta_2 : T^*(\mathbb{A}_\alpha^*) \rightarrow T(\mathbb{A}_\alpha^*)$, асоційований з дужкою Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{R}\mathcal{R}}$, діє за правилом $\Theta_2 : \nabla\gamma(l_\alpha) \mapsto -[l_\alpha, (l\nabla\gamma(l_\alpha) + \nabla\gamma(l_\alpha)l)_-] + l[l_\alpha, \nabla\gamma(l_\alpha)]_{\leq 0} + [l_\alpha, \nabla\gamma(l_\alpha)]_{\leq 0}l$ для будь-якого $\gamma \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_\alpha^*)$, $\tilde{\Theta}_1, \tilde{\Theta}_2$ – оператори Пуассона, які породжують дужки Пуассона $\{.,.\}_{\mathcal{R}}$ і $\{.,.\}_{\tilde{\mathcal{R}}}$ у точці $\tilde{l} \in \mathbb{A}_\alpha^*$, $P'^* : T^*(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*) \rightarrow T^*(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha)$ – спряжений оператор до похідної Фреше $P' : T(\mathbb{A}_\alpha \times \mathbb{A}_\alpha) \rightarrow T(\mathbb{A}_\alpha^* \oplus \mathbb{A}_\alpha^*)$ перетворення Беклунда (6), $(P'^*)^{-1}$ – обернений до нього оператор, та гамільтоніанів $\tilde{H}_n \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$ і $\frac{1}{2}\tilde{H}_{n-1} \in \mathcal{D}(\mathbb{A}_{\alpha,+} \times \mathbb{A}_{\alpha,+})$ відповідно, де

$$\tilde{H}_n(A_\alpha, B_\alpha) := \gamma_n(l_\alpha)|_{l_\alpha=A_\alpha B_\alpha^{-1}} + \gamma_n(\tilde{l}_\alpha)|_{\tilde{l}_\alpha=B_\alpha^{-1} A_\alpha}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Перетворення Абеля–Пуассона формальних рядів Ерміта та його властивості

Городецький Василь, Мартинюк Сергій

v.gorodetskiy@chnu.edu.ua, s.martyniuk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

При дослідженні багатьох задач аналізу та математичної фізики використовуються функціональні ряди, побудовані за ортонормованими системами функцій у різних гільбертових просторах. Розв'язки таких задач зображаються у вигляді таких рядів, підсумованих певними лінійними методами (Абеля–Пуассона, Гаусса–Вейерштрасса та ін.). Наприклад, розв'язок періодичної задачі Коші для рівняння теплопровідності збігається з перетворенням Гаусса–Вейерштрасса тригонометричного ряду початкової функції. З розвиненням теорії узагальнених функцій такі ряди стали ототожнюватись із лінійними неперервними функціоналами, заданими на різних просторах узагальнених функцій (розподілів Шварца, ультрарозподілів, гіперфункцій тощо [1]–[6]). Це дозволило значно розширити область застосування таких рядів, зокрема, у теорії позитивних та негативних просторів, які будуються за невід'ємними самоспряженими операторами у гільбертових просторах, спектри яких суто дискретні. До таких рядів відносяться і формальні ряди Ерміта, що будуються за ортонормованою у $L_2(\mathbb{R})$ системою функцій Ерміта. Такі ряди ототожнюються з неперервними функціоналами, заданим на просторах типу S . Функції Ерміта є власними функціями гармонійного осцилятора – невід'ємного самоспряженого в $L_2(\mathbb{R})$ оператора.

У цій роботі досліджуються властивості перетворення Абеля–Пуассона формальних рядів Ерміта (зокрема, властивість диференційовності за параметром, певні граничні властивості). Знайдено явний вигляд функції, яка є ядром такого перетворення, досліджені властивості цієї функції, дається застосування такого перетворення при дослідженні розв'язності задачі Коші для певного рівняння з частинними похідними, що вироджується.

1. Komatsu H. Hyperfunktions 1) Lect. Notes in Math. – 1973, V. 287. – P. 164.
2. Sato M. Theory of hyperfunktions. I // J. Fact. Univ. – Sect. I, 1959. – P. 133–193.
3. Городецький В.В. Проблема локалізації Рімана : деякі аспекти та застосування. – Чернівці : Рута, 1998. – 256 с.
4. Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці : Рута, 1998. – 219 с.
5. Городецький В.В. Еволюційні рівняння в зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. – Чернівці : Рута, 2008. – 400 с.
6. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Параболічні псевдодиференціальні рівняння з аналітичними символами у просторах типу S : Монографія. – Чернівці : Технодрук, 2019. – 280 с.

Зліченні криві Пеано

Горошкевич Сергій, Карлова Олена

o.karlova@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Добре відомо, що квадрат $[0, 1]^2$ є неперервним образом відрізка $[0, 1]$, що було відкрито Джузеппе Пеано ще у 1890 році [2]. Мотивацією до цього відкриття для Пеано був класичний результат Георга Кантора про те, що множина точок одиничного відрізка має таку ж саму потужність, як і множина точок одиничного квадрату. Природно розглянути подібну задачу для злічених множин. А саме, дослідити питання, чи є квадрат множини раціональних чисел своєюрідною "кривою Пеано", тобто, неперервним образом раціональних чисел? Крім того, чи будуть "кривими Пеано" квадрати інших злічених підмножин числової прямої? Які необхідні і достатні умови повинна задовольняти зліченна підмножина X числової прямої, для того, щоб множина X^2 була її неперервним образом? Метою доповіді є дати відповіді на ці питання.

Будемо казати, що топологічний простір X має *властивість Пеано*, якщо існує таке неперервне відображення $f : X \rightarrow X^2$, що $X^2 = f(X)$. Топологічний простір X є *зліченно компактним* [1], якщо кожна його нескінченна множина має граничну точку.

Теорема 1. *Нехай X – злічений метризовний простір. Наступні умови рівносильні:*

- (i) X не є зліченно компактним;
- (ii) X має властивість Пеано.

Деякі проміжні результати на цю тему також доповідалися першим співавтором на науково-практичній конференції [3].

1. Engelking R. General Topology, Warsaw, 1986.
2. Peano G. *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Mathematische Annale, 1890, **36** (1), 157–160.
3. Горошкевич С. *Зліченна криві Пеано*, Міжнародна науково-практична конференція "Молодіжна наука заради миру та розвитку", 9-11 листопада 2022 року, Чернівці, ЧНУ.

Застосування воркшопів та методу проєктів при вивченні інформаційних технологій

Готинчан Тетяна

t.hotynchan@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

У наш час знання і навички набувають усе більшої ваги, а тому методи навчання постійно розвиваються й удосконалюються. Під час навчання широко використовується метод проєктів у освіті. Якщо на молодших курсах, зазвичай, це індивідуальні проєкти, то на середніх та старших курсах – командні. Використання командних проєктів під час навчання у галузі інформаційних технологій (ІТ) має низку важливих переваг і стає ключовим елементом успішної підготовки фахівців у цій галузі, оскільки командні проєкти не лише дозволяють студентам застосовувати раніше набуті теоретичні знання на практиці, що дає їм практичний досвід, а й навчають студентів співпрацювати, обговорювати ідеї, вирішувати конфлікти та приймати спільні рішення. У ІТ сфері ефективна комунікація та здатність працювати в команді – це життєво важливі навички. Командні проєкти також допомагають студентам зрозуміти різні ролі, які вони можуть виконувати в ІТ-команді. Вони можуть випробувати себе як розробники програмного забезпечення, тестувальники, бізнес-аналітики, і т. д., що допомагає їм обрати напрямок для подальшого розвитку.

ІТ-проєкти можуть бути творчими завданнями, що спонукає команди шукати нові та нестандартні шляхи для розв'язання технічних завдань. Це сприяє розвитку творчого мислення та здатності долати труднощі. Крім того, командні проєкти можуть передбачати роботу з реальними даними та задачами, що відображають сучасні виклики в ІТ-сфері. Отже, працюючи в командах над реальними проєктами, студенти набувають досвіду, який допоможе їм легше впоратися з вимогами ринку праці в майбутньому [1].

Однією з найбільш ефективних стратегій освіти є використання воркшопів у навчанні, особливо в контексті командної роботи. Воркшоп ("робоча майстерня") – це інтерактивний навчальний захід, спрямований на досягнення конкретної мети або навички через практичні вправи, обговорення та співпрацю. Воркшопи можуть бути використані не лише у бізнесі, а й у освіті для сприяння навчанню, розвитку навичок та залучення учасників до активної участі. Основна мета воркшопу при вивченні ІТ полягає в тому, щоб учасники отримали практичні знання і конкретні технічні навички, а також мали можливість їх відразу використовувати. Воркшоп може сприяти розв'язанню проблем, підвищенню ефективності команди або стимулювати творчий процес [2].

Поєднання воркшопу та командної роботи може бути дуже ефективним способом навчання, особливо в галузі інформаційних технологій, де командна співпраця має важливе значення. Учасники вчаться співпрацювати, слухати одне одного та розробляти рішення у групах, що розвиває навички комунікації та лідерства. Вони виробляють критичне мислення та уміння ефективно взаємодіяти у команді, що є надзвичайно важливими як в академічному, так і в реальному житті. Ефективний воркшоп при вивченні певного предмету в галузі ІТ вимагає детального планування, активної участі та взаємодії з уча-

сниками, а також практичного підходу до навчання. Для цього можна виділити декілька занять підряд або об'єднати в один день. Головне, щоб учасники воркшопу активно готувались до кожного наступного етапу і співпрацювали. Під час воркшопу можна запропонувати навчальний міні-проект, де команди мають вирішити конкретні завдання. Залежно від ролі учасники кожної команди вирішують своє завдання. При цьому рекомендується обговорювати різні варіанти розв'язання проблеми або завдання і вибирати найкращий спосіб дії. Після завершення командних завдань воркшопу або його етапів проводять обговорення і аналіз результатів. Зворотний зв'язок щодо роботи команд є достатньо важливим у навчанні, оскільки допомагає зрозуміти помилки і в подальшому їх уникати.

Навички командної роботи, отримані студентами при виконанні міні-проекту під час воркшопу під керівництвом викладача допоможуть їм організувати й реалізувати власні проекти. У подальших воркшопах можна заохочувати студентів працювати в командах уже над власними проектами, якщо співпраця налагоджена. Проте слід зауважити, що від викладача такі воркшопи вимагають неабиякої педагогічної майстерності.

Отже, воркшопи та командна робота стають необхідними інструментами для досягнення високої ефективності та збагачення навчального процесу. Вони надають нові можливості у сприйнятті, засвоєнні та розумінні навчального матеріалу, спонукаючи студентів активно взаємодіяти, співпрацювати та вдосконалювати свої навички, а також виробляти інноваційні ідеї та вчитися один у одного.

1. Практика реалізації педагогічних проектів: навчально-методичний посібник до курсу / авт.-упоряд. І.В. Єгорова. – Івано-Франківськ, 2021. – 112 с.
2. Наливайко Олексій, Друганова Олена, Іваненко Людмила. Використання технології "Воркшоп" у роботі зі студентами класичних університетів // THE PEDAGOGICAL PROCESS: THEORY AND PRACTICE (SERIES: PEDAGOGY) – 2019. – № 3-4 (66-67). – С. 129–137. URL: <https://doi.org/10.28925/2078-1687.2019.3-4.129137>

Дослідження динаміки чисельності окремої популяції в рамках моделі Ферхюльста

Грод Іван, Грод Інна

igrod@ukr.net

Тернопільський національний педагогічний університет ім. Володимира
Гнатюка

Вивчення динаміки популяцій пов'язане з побудовою різних моделей чисельності, ці моделі часто є емпіричними і вимагають додаткового обґрунтування або підбору невідомих параметрів. Не існує жодної популяції, чисельність якої не зазнавала б змін. Дискретні значення цієї величини можуть бути отримані з експериментальних даних (лабораторних або польових). При цьому завдання опису динаміки популяції приводить до аналізу дискретної системи (модель Мальтуса, модель Ферхюльста, модель Рікера тощо). Відомо, що біологічні параметри популяції з плином часу змінюються під впливом кліматичних умов, обмеженості ресурсів харчування та інших факторів довкілля. Тому в роботі розглядається дослідження динаміки популяції з використанням моделі Ферхюльста.

Метою роботи є дослідження процесів зміни динаміки окремої популяції в рамках моделі Ферхюльста, а саме – побудова моделі на основі рівняння популяційної динаміки з використанням знань про екологію виду і розрахунок прогнозу розвитку популяції на 7 років (враховуючи рівень браконьєрства і різну оцінку густини угідь).

Ідея Ферхюльста полягала в накладанні на експоненціальний ріст, який виражений формулою, деякого фактору, що характеризує уповільнення, і який збільшується з ростом популяції. Найпростіше із можливих припущень, полягає в тому, що степінь уповільнення росту для одного індивідуума пропорційна розміру популяції, тобто загальна швидкість росту рівна не r , а $r(1 - N/K)$, і визначає уповільнення росту. В цьому випадку логістичне диференціальне рівняння набуде такого вигляду

$$\frac{dN}{dt} = rN - \frac{rN^2}{K} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

де K – константа, верхня асимптота для S -подібної кривої. Ітераційний крок для розрахунків – 1 рік. Формально розрахунок по моделі Ферхюльста з урахуванням просторового розподілу всіх параметрів виглядає так:

$$N(t+1) = \sum_{i=0}^m N(t)_i * \left\{ 1 + \sum_{i=0}^m r(t)_i * \left(1 - \frac{\sum_{i=0}^m N(t)_i}{\sum_{i=0}^m K(t)_i} \right) \right\},$$

де m – загальна кількість просторових комірок, на які розбита площа дослідження. У формулі використовуються параметри $r(t)$ і $K(t)$. У загальному випадку будемо вважати, що ці параметри не тільки просторово розподілені, але є функціями від часу, таким чином ми маємо можливість закладати зміну цих параметрів внаслідок зміни параметрів середовища або факторів стороннього

впливу на популяцію. Наприклад, в параметрі K передбачається враховувати фактори стороннього впливу (зміна ситуації з кормовою базою, боротьба з бракон'єрством) передбачають враховувати при розрахунках коефіцієнту смертності в популяції. Цей коефіцієнт прогнозованої смертності буде коливатися в залежності від рівня охорони тої чи іншої території і змінюватися з року в рік, якщо буде вибраний сценарій посиленої охорони. Загальна формула для розрахунку окремого осередку ґрида виглядає так:

$$N(t+1)_i = N(t)_i * \left\{ 1 + r(t)_i * \left(1 - \frac{N(t)_i}{K(t)_i} \right) \right\}.$$

Застосування моделі для розрахунку динаміки чисельності популяції диких кабанів дало хороші результати за період з 2019 по 2026 роки. Отримані в результаті обчислення значення або відповідали даним спостереження, або відрізнялися від них з незначною похибкою, фіксуючи збільшення чисельності за 10 років приблизно в 5 раз. Картина змінилася для останнього періоду спостережень. Модель дала чергове збільшення чисельності за 7 років в 4 рази, тоді як дані дослідження показали тенденцію до стабілізації чисельності популяції. Очевидно, цей факт можна пояснити тривалим вирубуванням лісу. Після 2019 року, згідно моделі, деякий час продовжувався ріст чисельності популяції. В 2023 році результати дослідження узгоджуються з останніми даними обліку. Після 2025 року чисельність популяції кабана дикого мала би збільшуватися з подальшою стабілізацією. Для всіх лісництв ДП «Чортківський лісгосп» кількість кабанів в 2019 році складає 115 особин, цю кількість ми можемо закласти в модель як початкову. За результатами роботи програми, через яку реалізуємо модель, бачимо, що стабілізація кількості особин популяції відбудеться через 17 років.

1. Литвинова С.Г. Використання систем комп'ютерного моделювання для проектування дослідницьких завдань // Фізико-математична освіта – 2018. – 15, № 1. – С. 83–89.
2. Маценко В.Г. Математичне моделювання: навчальний посібник. – Чернівці: Чернівецький національний університет, 2014. – 519 с.
3. Balyk N., Grod I., Vasylenko Y., Oleksiuk V., Rogovchenko Y. Project-based learning in a computer modelling course// Journal of Physics: Conf. Ser. 2021. Vol. 1840 e012032. URL: <http://doi.org/10.1088/1742-6596/1840/1/012032/>

Проектна діяльність на уроках математики у 6 класі

Грудей Яна, Лучко Вікторія

hrudei.yana@chnu.edu.ua, viktorija.luchko@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Метод проєктів у навчальній діяльності дозволяє заповнити частину недоліків традиційної школи. Так, використання цього методу дозволяє повною мірою продемонструвати міжпредметні зв'язки математики, що сприяє розвитку інтересу до предмета.

Педагог, використовуючи елементи проєктної діяльності під час навчання, не тільки вчить, а скоріше допомагає вчитися, спрямовує пізнавальну діяльність свого учня. Навчальний проєкт дозволяє формувати метапредметні знання, уміння, компетентність. Активна діяльність учнів у виконання проєкту забезпечує досягнення розвиваючих цілей навчання: знання добуваються самими учнями, а не передаються від вчителя у готовому вигляді. У ході спільної роботи вчителя та учнів відбувається становлення самостійної творчої навчальної діяльності учнів. Вирішуючи реальні життєві завдання, вони опановують шкільні знання і набувають досвіду вирішення проблем.

Оскільки створення проєктів стало обов'язковим видом діяльності учнів, які навчаються за Державним стандартом базової середньої освіти, багато сучасних педагогів намагаються запроваджувати проєктні форми організації навчання. Проте вчителі зіштовхуються у своїй роботі з великими труднощами. Адже організувати навчання методом проєктів потрібно тим, кого навчали у традиційній школі. На жаль, не існує "універсального" рецепту, як це робити. Кожен вчитель методом спроб і помилок набуває свого унікального досвіду, поповнює свою скарбничку новими цікавими методичними розробками.

В рамках сучасної освіти на багатьох уроках, у тому числі на математиці, важливо навчити дітей самостійно шукати інформацію, висувати припущення, наводити аргументи та доведення. Одне з головних завдань сучасної школи - створення повноцінних та необхідних умов для формування активної життєвої дитини, її особистісного розвитку. Державні стандарти загальної освіти нового покоління вносять значні зміни до структури та змісту, мети та завдання освіти, зміщують акценти з одного завдання, надати учневі знання, на інше - сформувати у дитини загальнонавчальні вміння та навички як основу навчальної діяльності. Це уможливило проєктна діяльність. Тому що в процесі роботи над проєктом дитина зможе оцінити наявні знання, сама почне активно діяти, заповнюючи нестачу знань та підключаючи до цього процесу вчителя як більше знаючого та досвідченого партнера.

Поступово учні опановують способи та прийоми, необхідні для ведення проєктної діяльності: планувати роботу, передбачати результат, використовувати різні джерела інформації (книги, фільми, інтернет тощо), самостійно відбирати та накопичувати матеріал, аналізувати, аргументувати думку, самостійно приймати рішення, грамотно взаємодіяти один з одним - розподіляти обов'язки, адекватно оцінювати себе та інших.

Розглянемо декілька проєктів, які можна застосувати на уроках та факультативних заняттях з математики для учнів 6 класу.

Наприклад, при вивченні теми "Відношення можна запропонувати учням розв'язати таку задачу: Один з найулюбленіших зимових салатів українців - це вінегрет, разом із буряковим салатом та квашеною капустою. Яскравий, поживний та простий у приготуванні, вінегрет стане в нагоді як до звичайної вечері, так і до святкового столу. Найсмачніший вінегрет виходить, якщо взяти наступні інгредієнти: 5 картоплин; 3 моркви; 3 буряки; 1 цибулина; 2 солоних огірка; 100 г квашеної капусти; 100 г вареної квасолі; сіль, перець за смаком; 3 столові ложки соняшникова олія. Знайти відношення в якому потрібно взяти овочі. Побудувати кругову діаграму за отриманими даними.

Також при вивченні теми "Координатна площина можна запропонувати учням відтворити візерунок вишиванки, який притаманний саме нашому регіону, а також створити свій власний візерунок за допомогою координат точок на площині.

Можна провести бінарне заняття з вчителем трудового навчання, на якому учні можуть приготувати вінегрет і навіть вишити свій власний візерунок.

Отже, проектна діяльність на уроках математики в ЗЗСО дає змогу накопичити більше знань у порівнянні зі стандартною освітою.

1. Білик Т. С., Казьмірчук Н. С. Особливості організації проектної діяльності на уроках математики // Наукові записки. Серія: Педагогіка і психологія : зб. наук. праць. — Вінниця: Твори, 2020. — Вип. 61. — С. 18–23

Необхідна і достатня ознака існування внутрішнього часу на орієнтованій множині

Грушка Ярослав

grushka@imath.kiev.ua

Інститут математики НАН України

Поняття орієнтованої множини є базовим найелементарнішим технічним поняттям теорії мінливих множин, необхідним для формулювання загального означення мінливої множини.

Означення 1. *Орієнтованою множиною називається довільна реляційна система з одним рефлексивним бінарним відношенням, тобто упорядкована пара виду $\mathcal{M} = (\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}), \overset{\leftarrow}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}})$, де $\overset{\leftarrow}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}}$ — рефлексивне бінарне відношення на $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$.*

У випадку, коли відомо, про яку орієнтовану множину \mathcal{M} йде мова, в позначенні $\overset{\leftarrow}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}}$ символ \mathcal{M} будемо опускати, вживаючи позначення “ \leftarrow ”. Множину $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ будемо називати базовою, або множиною всіх елементарних станів орієнтованої множини \mathcal{M} , а відношення \leftarrow будемо називати напрямним відношенням змін (трансформації) \mathcal{M} .

Орієнтовані множини можна трактувати як найпримітивніші абстрактні моделі сукупностей мінливих об’єктів, що еволюціонують в рамках однієї (фіксованої) системи відліку. Також орієнтовані множини є найпростішими математичними структурами, на яких можна ввести поняття часу.

Означення 2. *Нехай, \mathcal{M} — орієнтована множина і $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \leq)$ — лінійно упорядкована множина. Відображення $\psi : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ називається **часом** на \mathcal{M} , якщо виконуються такі умови:*

1) *Для довільного елементарного стану $x \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ існує елемент $t \in \mathbf{T}$ такий, що $x \in \psi(t)$.*

2) *Якщо $x_1, x_2 \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$, $x_2 \leftarrow x_1$ і $x_1 \neq x_2$, то існують елементи $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ такі, що $x_1 \in \psi(t_1)$, $x_2 \in \psi(t_2)$ і $t_1 < t_2$ (тобто має місце часова роздільність послідовних неоднакових елементарних станів).*

При цьому елементи $t \in \mathbf{T}$ будемо називати **моментами часу**, а пару $\mathcal{H} = (\mathbf{T}, \psi) = ((\mathbf{T}, \leq), \psi)$ будемо називати **хронологізацією** \mathcal{M} .

Наступна мета — дати означення внутрішнього часу на орієнтованій множині, тобто часу, який можна фіксувати “засобами”, що знаходяться “всередині” орієнтованої множини.

Позначення 1. На довільній орієнтованій множині \mathcal{M} введемо додатково наступне бінарне відношення. Для довільних $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ будемо позначати $y \overset{\leftarrow}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ тоді і тільки тоді, коли $y \leftarrow x$ і $x \not\leftarrow y$. У випадках, коли не виникає непорозумінь замість позначення $y \overset{\leftarrow}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$ будемо використовувати позначення $y \overset{\leftarrow}{\leftarrow} x$.

Означення 3. *Нехай \mathcal{M} — орієнтована множина. 1) Будемо говорити, що множина $B \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ **монотонно послідовна** множині $A \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ в орієнтованій множині \mathcal{M} , якщо існують такі елементи $x \in A$ і $y \in B$, що $y \overset{\leftarrow}{\underset{\mathcal{M}}{\leftarrow}} x$.*

В цьому випадку будемо використовувати позначення $B \leftarrow(+)_M A$.

2) Нехай $\mathcal{Q} \subseteq 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ — деяка система підмножин множини $\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$. Будемо говорити, що множина $B \in \mathcal{Q}$ **транзитивно монотонно послідовна** множині $A \in \mathcal{Q}$ відносно \mathcal{Q} (використовуючи позначення $B \leftarrow(+)_M A$), якщо існує така послідовність множин $C_0, C_1, \dots, C_n \in \mathcal{Q}$ ($n \in \mathbb{N}$), що $C_0 = A$, $C_n = B$ і для довільного $k \in \overline{1, n}$ має місце співвідношення, $C_k \leftarrow(+)_M C_{k-1}$.

У випадку, коли наперед відомо, про яку орієнтовану множину \mathcal{M} йде мова в позначеннях $\leftarrow(+)_M$ і $\leftarrow(+)_M$ символ \mathcal{M} будемо опускати, вживаючи, замість них позначення $\leftarrow(+)$ і $\leftarrow(+)$ відповідно.

Означення 4. Нехай \mathcal{M} — орієнтована множина, а $\psi : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ — час на \mathcal{M} (заданий на лінійно упорядкованій множині $\mathbf{T} = (\mathbf{T}, \leq)$).

Відображення $\mathbf{h} : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ будемо називати **хронометричним процесом** (для часу ψ), якщо:

1) $\mathbf{h}(t) \subseteq \psi(t)$ для довільного $t \in \mathbf{T}$.

2) Для довільних $t, \tau \in \mathbf{T}$ умова $t < \tau$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{h}(\mathbf{T})$

$\mathbf{h}(\tau) \leftarrow(+)_M \mathbf{h}(t)$ і $\mathbf{h}(t) \neq \mathbf{h}(\tau)$, де $\mathbf{h}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{h}(t) \mid t \in \mathbf{T}\}$;

Час ψ на орієнтованій множині \mathcal{M} будемо називати **внутрішнім**, якщо для цього часу існує хоч один хронометричний процес.

Інтуїтивний зміст терміну “внутрішній час” полягає в тому, що якщо час на орієнтованій множині є внутрішнім, його можна “поміряти” в межах цієї орієнтованої множини, використовуючи хронометричний процес в якості “годинника”, а стани хронометричного процесу в якості “індикаторів моментів часу”.

Виявляється, що найпростіше розв’язується питання про існування внутрішнього часу на статичній орієнтованій множині.

Означення 5. Орієнтовану множину \mathcal{M} будемо називати **статичною**, якщо для довільних $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})$ умова $y \leftarrow x$ має місце тоді і тільки тоді, коли $x = y$. Орієнтовану множину \mathcal{M} будемо називати **нестатичною**, якщо вона не є статичною.

Нехай \mathcal{M} — статична орієнтована множина. Розглянемо довільну одноелементну лінійно упорядковану множину (наприклад $\mathbf{T} = \{1\}$) зі стандартним порядком на множині натуральних чисел, який в даному випадку задається єдиним співвідношенням $1 \leq 1$). Покладемо

$$\psi_{\text{st}}(t) := \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}) \quad (t \in \mathbf{T}). \quad (1)$$

Можна довести, що відображення $\psi_{\text{st}} : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M})}$ є внутрішнім часом на \mathcal{M} з хронометричним процесом

$$\mathbf{h}_{\text{st}}(t) = \mathfrak{B}\mathfrak{s}(\mathcal{M}) = \psi_{\text{st}}(t) \quad (t \in \mathbf{T}). \quad (2)$$

Час ψ_{st} , побудований в формулі (1) (на одноелементній лінійно упорядкованій множині) будемо називати **тривіально-статичним** часом на орієнтованій множині M . Таким чином:

Теорема 1. *В статичній орієнтованій множині завжди існує (тривіально-статичний) внутрішній час.*

Також нескладно переконатися, що в статичній орієнтованій множині може існувати лише тривіально-статичний внутрішній час. Отже, нетривіальним залишається питання про існування внутрішнього часу в нестатичних орієнтованих множинах. Теорема нижче дає розв'язок цього питання, а також питання про існування невинного внутрішнього часу. Для формулювання цієї теореми сформулюємо спочатку означення невинного часу.

Означення 6. *Час $\psi : \mathbf{T} \rightarrow 2^{\mathfrak{B}\mathfrak{s}(M)}$ на орієнтованій множині M (де (\mathbf{T}, \leq) — лінійно упорядкована множина) будемо називати **невинним**, якщо не існує моментів часу $t_1, t_2 \in \mathbf{T}$ таких, що $t_1 < t_2$ і для довільного $t \in \mathbf{T}$ такого, що $t_1 \leq t \leq t_2$ має місце рівність $\psi(t) = \psi(t_1)$.*

Теорема 2. *Для довільної нестатичної орієнтованої множини M наступні твердження рівносильні:*

It1 *На M існує внутрішній час.*

It2 *На M існує невинний внутрішній час.*

It3 *Існує хоч одна пара елементів $x, y \in \mathfrak{B}\mathfrak{s}(M)$ така, що $y \stackrel{\pm}{\leftarrow} x$.*

Зауваження Існують приклади, які показують, що якщо орієнтована множина задовольняє умову **It3** теореми 2, то невинний внутрішній час на ній визначається, взагалі кажучи, неоднозначно.

Активізація пізнавальної діяльності учнів при вивченні математики за допомогою мобільних додатків

Довгей Жанна

zh.dovghey@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Вчені прогнозують, що це століття стане століттям глобальної комп'ютеризації життя та виробництва. А в сучасному світі гаджети вже стали невід'ємною частиною життя людини. У зв'язку із тим, що мобільні пристрої та планшети на базі операційної системи почали широко використовуватися в освітньому процесі, виникло поняття "мобільного навчання" (mobile learning) і відноситься воно як до використання мобільних, а також і портативних ІТ-пристроїв, зокрема, кишенькових комп'ютерів PDA (Personal Digital Assistants), мобільних телефонів та смартфонів, а також і планшетних ПК, що працюють під управлінням операційної системи (наприклад, iOS, Android, Windows Phone), такі що підтримують роботу в мобільних мережах і технологію Wi-Fi. Ці пристрої дають змогу створювати та відкривати мультимедійні файли, також обмінюватися інформацією в освітніх цілях, через мережу Інтернет, надають доступ до адаптованих навчальних і довідникових ресурсів, спеціалізованих сайтів, що містять, як онлайн-тести, так і теоретичний матеріал та практичні завдання.[1]

Розвиток та широке використання мобільних "девайсів" призводить до створення, розвитку та вдосконалення мобільних додатків. Мобільний додаток – це автономний програмний продукт, розроблений спеціально для мобільних пристроїв із метою оптимізувати вирішення якоїсь проблеми або завдання в житті користувача. Мобільний додаток розробляється спеціально під задану платформу (Android, Windows Phone або iOS), розповсюджується через спеціальні магазини додатків (Apple App Store, Google Play, Windows Phone Store) і встановлюється на пристрій також, як і комп'ютерна програма.[1]

Цікавий додаток "Калькулятор дробів із розв'язками" може стати надійним помічником при вивченні та запам'ятовуванні дій над дробовими числами, а також для порівняння різних числових виразів, що містять як звичайні, так і десяткові дроби. Цей додаток підтримує українську мову та окрім результату дій над дробами надає при потребі покроковий алгоритм розв'язування прикладу та наводить попередні розрахунки. Окрім вище згаданого калькулятора є великий вибір інших калькуляторів, зокрема, із можливістю побудови графіків функцій – Desmos Graphing Calculator.

Додаток "Математичні хитрощі як зазначають користувачі, тренує мозок та робить його більш пластичним, дозволяє проходити гру як самому, так і спільно із іншими користувачами та супроводжується багатьма математичними загадками.

При закріпленні знань та навичок, пов'язаних із числами, множинами, системами рівнянь, квадратичними функціями, многочленами, числовими послідовностями, логарифмами, тригонометричними функціями, границями функцій, похідними, комбінаторними задачами, теорією ймовірності, статистикою та логікою доцільним стане використання додатку "Математика: Генератор завдань який згенерує на обрану тему приклади, продемонструє результат та

розв'язання, а також наведе теоретичний матеріал стосовно конкретного прикладу.

Окремо хочеться виділити навчальні додатки, що слугують мобільними довідниками з математики. Зокрема, додаток "Піфагор" містить 5 розділів: алгебра, тригонометрія, математичний аналіз, теорія ймовірності та дискретна математика та "Математика: формули+тести" що складається із 4 розділів: алгебри, геометрії, теорії множин та комбінаторики та початків аналізу. А мобільний додаток "Формули" містить приблизно 750 основних математичних формул.

Є додатки, такі, як "Algebrator-step-by-stepsolver" "Math" "Mathway" які, за допомогою камери телефону зчитують приклад написаний від руки чи надрукований, і наводять всі етапи розв'язання рівнянь або побудови графіків функцій.

Додаток "XSection" який навчить будувати многогранники та їх перерізи, стане незамінним помічником при вивченні стереометрії.

В [2] досліджено особливості використання мобільного навчання у підготовці бакалаврів математики. Для вивчення вищої математики може підійти, наприклад, "MathHelper". Функціонал додатка включає в себе лінійну алгебру (дії над матрицями, розв'язування систем лінійних рівнянь), векторну алгебру (вектори та фігури), теорію ймовірності, числа та послідовності.

1. Білоус В. В. Мобільні навчальні додатки в сучасній освіті. Освітологічний дискурс. – 2018. – № 1–2 (20–21). – С. 353–362.
2. Самойленко О. М. Особливості використання мобільного навчання у підготовці бакалаврів математики. Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. – 2015. – № 3 (81). – С. 19–23.

**Усереднення для стохастичних
диференціально-функціональних рівнянь з врахуванням
зовнішніх збурень типу випадкових величин**

Дорошенко Ірина

i.doroshenko@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

В роботі отримані достатні умови усереднення для СДФР зі скінченною післядією під дією зовнішніх збурень типу випадкових величин. Результати носять теоретичний характер.

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ задано СДФР при випадкових зовнішніх збуреннях

$$dx(t, \omega) = \varepsilon [\varphi(\omega)a(t, x_t) dt + \psi(\omega)b(t, x_t) dw(t, \omega)] \quad (1)$$

за початковою умовою

$$x(t + \theta) = \beta(\theta) \Big|_{t=0} \text{ при } \theta \in [-r; 0]. \quad (2)$$

Тут $x_t \equiv \{x(t + \theta)\}$ при $\theta \in [-r; 0]$; $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ – вимірні відображення $R_+ \times D \rightarrow R^n$, що задовільняють глобальну модифіковану умову Ліпшиця та умову рівномірної обмеженості. Будемо використовувати рівномірну метрику

$$\|\alpha\| = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\alpha(\theta)|. \quad (3)$$

Для $\alpha \in D([-r; 0])$ позначимо на функцію $\hat{\alpha} \equiv \alpha(0)$. $\hat{x}_t = x(t)$ для всіх $\theta \in [-r; 0]$.

Поряд з СДФР (1) розглянемо рівняння

$$dy(t, \omega) = \varepsilon [\varphi(\omega)\hat{a}(t, y(t, \omega))dt + \psi(\omega)\hat{b}(t, y(t, \omega))dw(t, \omega)] \quad (4)$$

за початковими умовами (2).

Тут $\hat{a}(t, y(t)) \equiv a(t, \hat{y}_t)$; $\hat{b}(t, y(t)) \equiv b(t, \hat{y}_t)$; $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ – попарно незалежні випадкові величини від вінеревського процесу $w(t, \omega)$ на $t \in [0, \infty)$.

Нехай виконуються умови I-VII [3] та існує

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_s^{s+T} K_1 \hat{a}(t, x) dt = \check{a}(x). \quad (5)$$

Поряд з СДФР (4) розглянемо рівняння усередненого руху

$$\frac{d\bar{x}(t, \omega)}{dt} = \varphi(\omega)\check{a}(\bar{x}(t, \omega)) \quad (6)$$

або

$$d\bar{x}(t) = K_1 \check{a}(\bar{x}(t)), \quad (7)$$

де $K_1 \equiv \sup_{\omega \in \Omega} |\varphi(\omega)|$.

Перш ніж оцінити нормовану різницю

$$\eta_\varepsilon(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left[x \left(\frac{t}{\varepsilon}, 0, \alpha \right) - x(t, 0, \alpha(0)) \right], \quad (8)$$

доведемо допоміжне твердження.

Теорема 1. Якщо виконуються умови глобальної модифікованої умови Ліпшиця та умови рівномірної обмеженості для функцій $a(t, x)$, $b(t, x)$, то для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\alpha \in D[-r; 0]$, $K_1, K_2 > 0$ та $T > 0$, то має місце нерівність

$$E \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} K^* |x(t, 0, \alpha) - y(t, 0, \alpha(0))|^2 \right\} \leq g(\varepsilon, T, K^*) \varepsilon^2 (\|\alpha\| + \beta^2), \quad (9)$$

де $g(\varepsilon, T, K^*)$ задовольняє умову $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} g(\varepsilon, T/\varepsilon, K^*) = c(T) < \infty$.

Теорема 2. Нехай виконані умови теореми 1 та крім того: А) відображення $a(t, \beta)$ двічі неперервно диференційоване за Фреше за другим аргументом, причому друга похідна задовольняє умову Ліпшиця рівномірно по t

$$\left| \frac{\partial^2 a(t, \beta_1)}{\partial \beta_1^*} - \frac{\partial^2 a(t, \beta_2)}{\partial \beta_2^*} \right| \leq L_1 \|\beta_2 - \beta_1\|,$$

В) для довільного розв'язку (9) при всіх $t \in [0, T]$ виконується співвідношення:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t K_1 \left[a \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{x}_\tau \right) - \hat{a}(\bar{x}(\tau)) \right] &= 0; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} K_1 \int_0^t \nabla \hat{a} \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{x}(\tau) \right) d\tau &= \int_0^t g(\tau) d\tau; \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_0^T K_2^2 \left[b \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{x}_\tau \right) b^T \left(\frac{\tau}{\varepsilon}, \hat{x}_\tau \right) \right] &= \int_0^t f(\tau) f^T(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

де $g(t)$ та $f(t)$ – неперервні матричні функції, $\hat{a}(t, x) \equiv a(t, \hat{\beta})|_{\beta(0)=x}$.

Тоді при $\varepsilon \rightarrow 0$ нормована різниця слабо збігається до розв'язку неоднорідного стохастичного рівняння

$$d\eta(t, \omega) = \varphi(\omega)g(t)\eta(t, \omega) + \psi(\omega)f(t)dw(t, \omega).$$

1. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3 : Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. – Чернівці : Золоті литаври, 2009. – 782 с.
2. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев : Наук. думка, 1987. – 328 с.
3. Yasinsky V.K., Doroshenko I.V. Asymptotics of solutions of diffusion stochastic differential-functional systems with a small parameter under the action of external random variables // Sworld Jornal, Issue No11, Part 2, January, 2022. – P. 62-71.

Про класичність узагальнених розв'язків неоднорідних крайових задач для параболічних систем другого порядку

Дяченко Олександр

ol_v_dyachenko@ukr.net

*Національний технічний університет України "Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського"*

З початку 2010-х років в теорії параболічних задач почали істотно використовувати узагальнені анізотропні простори Соболева $H^{s,s/(2b);\varphi}$ [1, 2, 3]. Вони параметризуються парою дійсних чисел $s, s/(2b)$ та повільно змінною на нескінченності за Карамата функцією φ . Остання дозволяє більш тонко характеризувати регулярність функцій, належних цим просторам, ніж це можна робити в межах класичних просторів Соболева. Тому використання узагальнених просторів Соболева дає можливість отримати більш тонкі умови класичності узагальненого розв'язку параболічної задачі порівняно із соболевськими просторами. У доповіді обговоримо такі умови для параболічної за Петровським системи диференціальних рівнянь другого порядку з неоднорідними початковими та крайовими умовами [3]. Версію цього результату для скалярного випадку наведено в монографії [1, п.3.5].

Нехай $\Omega := G \times (0, \tau)$ — відкритий циліндр в \mathbb{R}^{n+1} , $S := \Gamma \times (0, \tau)$ — його бічна поверхня. Тут G — обмежена область в \mathbb{R}^n з нескінченно гладкою межею $\Gamma := \partial G$, дійсне число $\tau > 0$. У циліндрі Ω розглянемо задачу:

$$\partial_t u_j(x, t) + \sum_{k=1}^N \sum_{|\alpha| \leq 2} a_{j,k}^\alpha(x, t) D_x^\alpha u_k(x, t) = f_j(x, t) \quad (1)$$

для всіх $(x, t) \in \Omega$ і $j \in \{1, \dots, N\}$;

$$\sum_{k=1}^N \sum_{|\alpha| \leq l_j} b_{j,k}^\alpha(x, t) D_x^\alpha u_k(x, t)|_S = g_j(x, t) \quad (2)$$

для всіх $(x, t) \in S$ і $j \in \{1, \dots, N\}$;

$$u_j(x, t)|_{t=0} = h_j(x) \quad \text{для всіх } x \in G \text{ і } j \in \{1, \dots, N\}. \quad (3)$$

Тут натуральне $N \geq 2$, всі числа $l_j \in \{0; 1\}$; всі коефіцієнти $a_{j,k}^\alpha$ і $b_{j,k}^\alpha$ є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями. Покладемо

$$S_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, S) < \varepsilon\}, \quad G_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, G) < \varepsilon\},$$

де число $\varepsilon > 0$. Позначимо $l_0 := \max\{l_1, \dots, l_N\}$, $u := (u_1, \dots, u_N)$.

Узагальнений розв'язок u з соболевського простору $(H^{2,1}(\Omega))^N$ задачі (1)–(3) називаємо *класичним*, якщо узагальнені частинні похідні вектор-функції $u = u(x, t)$ задовольняють такі три умови:

- (а) $D_x^\alpha \partial_t^\beta u$ неперервна на Ω , якщо $0 \leq |\alpha| + 2\beta \leq 2$;
- (б) $D_x^\alpha u$ неперервна на $S_\varepsilon \cup S$ для деякого числа $\varepsilon > 0$, якщо $0 \leq |\alpha| \leq l_0$;
- (в) u неперервна на $G_\varepsilon \cup G$ для деякого числа $\varepsilon > 0$.

У цьому означенні наведено мінімальні умови, за яких ліві частини задачі обчислюються за допомогою неперервних класичних похідних і слідів вектор-функції u . Означення функціональних просторів, використаних у формулюванні наступної теореми, див. [1, с.130] або [3, п.3].

Теорема. [3, теорема 4] *Припустимо, що $u \in (H^{2,1}(\Omega))^N$ є узагальненим розв'язком параболічної задачі (1)–(3), праві частини якої задовольняють такі умови:*

$$\begin{aligned} (f_1, \dots, f_N) \in & (H_{\text{loc}}^{1+n/2, 1/2+n/4; \varphi}(\Omega, \emptyset))^N \cap \\ & \cap (H_{\text{loc}}^{l_0-1+n/2, l_0/2-1/2+n/4; \varphi}(S_\varepsilon, S))^N \cap \\ & \cap (H_{\text{loc}}^{-1+n/2, -1/2+n/4; \varphi}(G_\varepsilon, G))^N, \end{aligned} \quad (4)$$

$$(g_1, \dots, g_N) \in \bigoplus_{j=1}^N H_{\text{loc}}^{l_0+n/2-l_j+1/2, l_0/2+n/4-l_j/2+1/4; \varphi}(S, \emptyset), \quad (5)$$

$$(h_1, \dots, h_N) \in (H_{\text{loc}}^{n/2; \varphi}(G))^N \quad (6)$$

з деяким функціональним параметром $\varphi \in \mathcal{M}$, що задовольняє інтегральну умову

$$\int_1^\infty \frac{dr}{r \varphi^2(r)} < \infty. \quad (7)$$

Тоді розв'язок $u = u(x, t)$ класичний.

Відмітимо, щоб висновок теореми залишився правильним у випадку просторів Соболева $\varphi = 1$ (умова (7) не виконується), треба у включеннях (4)–(6) збільшити числові показники регулярності всіх просторів на деяке число $\delta > 0$. Це робить результат більш грубим.

1. Лось В. М., Михайлець В. А., Мурач О. О. Параболічні граничні задачі та узагальнені простори Соболева. – Київ: Наукова думка, 2023. – 162 с. (препринт arXiv:2109.03566)
2. Diachenko O., Los V. Some problems for Petrovskii parabolic systems in generalized Sobolev spaces // J. Elliptic Parabol. Equ. – 2022. – 8. – P. 313–329.
3. Diachenko O., Los V. Regular conditions for the solutions to some parabolic systems // Ukrainian Math. Journal. - 2023. - 74, no. 8. - P. 1263-1274.

Асимптотична поведінка розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку

Євтухов В'ячеслав, Голубев Сергій

evmod@i.ua, sergii.golubev@stud.onu.edu.ua

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Розглядається двочлене неавтономне диференціальне рівняння четвертого порядку виду

$$y^{(4)} = \alpha_0 p_0(t)[1 + r(t)]e^{\sigma y} \quad (\sigma \neq 0), \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p_0 : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ — неперервна, або неперервно диференційовна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $r : [a, \omega[\rightarrow]-1, +\infty[$ — неперервна функція така, що $\lim_{t \uparrow \omega} r(t) = 0$. Неважко помітити, що в цьому рівнянні функція $e^{\sigma y}$ ($\sigma \neq 0$) є швидко змінною функцією при $y \rightarrow Y_0 = \pm\infty$. При цьому у якості околів Δ_{Y_0} точок $Y_0 = \pm\infty$ можемо обирати проміжки

$$\Delta_{Y_0} = \begin{cases}]0, +\infty[, & \text{якщо } Y_0 = +\infty, \\]-\infty, 0[, & \text{якщо } Y_0 = -\infty, \end{cases}$$

При дослідженні рівнянь з експоненціальною нелінійністю, які проводилося в роботах Євтухова В.М., Дрік Н.Г.[1], Євтухова В.М., Шинкаренко В.М.[2], Євтухова В.М., Харькова В.М.[3] були розроблені методи дослідження асимптотичної поведінки класу розв'язків, які визначаються через експоненціальну нелінійність, що не зовсім є природним. Найбільш природним представляється встановлення асимптотичних властивостей тих розв'язків, які досліджувалися раніше при розгляді диференціальних рівнянь з правильно змінними нелінійностями, а саме, так званих, $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків. Таким чином, для рівняння (1) отримуємо наступне означення. Розв'язок y диференціального рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо він визначений на проміжку $[t_0, \omega[$ $C[a, \omega[$ і задовольняє наступним умовам

$$y(t) \in \Delta_{Y_0} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0 = \pm\infty,$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty, \end{cases} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y^{(3)}(t)]^2}{y^{(2)}(t)y^{(4)}(t)} = \lambda_0.$$

В даній роботі досліджується випадок, коли $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$ (неособливий випадок). Для цього уведемо додаткові допоміжні позначення $K(\lambda_0) = \frac{(\lambda_0 - 1)^3}{\lambda_0(2\lambda_0 - 1)}$, $J_0(t) = \int_{A_0}^t \pi_\omega^3(\tau) p_0(\tau) d\tau$, $J_1(t) = \int_{A_1}^t \frac{p_0(\tau)}{J_0(\tau)} d\tau$, $J_i(t) = \int_{A_i}^t J_{i-1}(\tau) d\tau$ ($i = 2, 3$), $Y(t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(\alpha_0(-\frac{1}{\sigma})K(\lambda_0)J_0(t))$, $q(t) = \frac{Y'(t)}{\alpha_0 J_3(t)}$. Де границя інтегрування A_i дорівнює або ω або сталій і визначається таким чином, щоб інтеграл прямував або до 0 або до $\pm\infty$. Для рівняння (1) справедливими є наступні дві теореми.

Теорема 1. *Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$. Для існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків необхідно, щоб виконувались нерівності*

$$\alpha_0 \nu_0 \lambda_0 (2\lambda_0 - 1)(3\lambda_0 - 2) > 0, \quad \alpha_0 \nu_1 K(\lambda_0) \pi_\omega(t) > 0, \quad \text{при } t \in]a, \omega[\quad (2),$$

і наступні умови

$$\alpha_0 \sigma K(\lambda_0) J_0(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_0(t)}{J_0(t)} = \pm \infty, \quad (3)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_1(t)}{J_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} q(t) = 1 \quad (4)$$

причому кожний такий розв'язок допускає при $t \uparrow \omega$ наступні асимптотичні зображення

$$y(t) = -\frac{1}{\sigma} \ln\left(\alpha_0 \left(-\frac{1}{\sigma}\right) K(\lambda_0) J_0(t)\right) + o(1) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$y^{(k)}(t) = \alpha_0 J_{4-k}(t) [1 + o(1)], \quad t \uparrow \omega, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (5)$$

Теорема 2. Нехай $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$ і виконуються умови (2)-(5).

Нехай, крім того $\lim_{t \uparrow \omega} (1 - q(t)) |Y(t)|^{\frac{3}{4}} = 0$ і $\alpha_0 \sigma > 0$. Тоді дифференціальне рівняння (1) має двопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ розв'язків, що задовольняють при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення

$$y(t) = Y(t) + o(1), \quad y'(t) = \alpha_0 J_3(t) [1 + |Y(t)|^{-\frac{3}{4}}], \quad y''(t) = \alpha_0 J_2(t) [1 + |Y(t)|^{-\frac{1}{2}}],$$

$$y'''(t) = \alpha_0 J_1(t) [1 + |Y(t)|^{-\frac{1}{4}}], \quad \text{при}, \quad (k = 1, 2, 3)$$

Питання про існування $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$ -розв'язків дифференціального рівняння (1) у випадку коли $\alpha_0 \sigma < 0$ залишається відкритим.

1. Evtukhov V.M., Drik N.G. Asymptotic behavior of solutions of a second order nonlinear differential equation// Georgian Math. J. – 1996. – V. 3, N 2. – P. 101 – 120.
2. Евтухов В.М., Шинкаренко В.Н. Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью// Дифференц. уравнения. - 2008. - 44, № 3. - С. 308-322.
3. Евтухов В.М., Харьков В.М. Асимптотические представления решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка// Дифференц. уравнения. 2007.Т. 43, №9. С. 1311-1323.

Аналіз коректності нечіткої бази правил в системах логічного виведення

Єгошкін Данило, Гук Наталія

KnightDanila@i.ua, NatalyGuk29@gmail.com

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Автоматичне формування продукційної бази правил в експертних системах та доведення її коректності є актуальним завданням, оскільки дозволяє забезпечити простоту розробки експертних систем та досягати високої якості логічного висновку. Для забезпечення достовірності логічного висновку на основі сформульованої бази знань необхідно, щоб база знань мала властивості повноти, мінімальності (не надмірності), несуперечності та зв'язаності.

Аналіз коректності бази знань системи нечіткого логічного висновку досліджено у низці робіт із застосуванням різних підходів. Так, у роботі [1] система правил зображується метаграфом, у роботі [2] для автоматизації перевірки коректності продукційних правил пропонується квантова модель кодування символів багатозначного алфавіту. Також для зображення бази знань широко застосовуються ациклічні графи. У роботі [3] задля організації великих наборів знань застосовується алгоритм побудови орієнтованого ациклічного графа з подальшою трансляцією графа за допомогою спеціалізованої мови TLC (Target Language Compiler). На етапі трансляції здійснюється перевірка коректності бази знань. У роботі [4] для створення бази правил типу Мамдані пропонується визначення оптимальних консеквентів на основі використання мультиагентних оптимізаційних алгоритмів.

У цій роботі здійснюється автоматична генерація бази нечітких продукційних правил на основі лінгвістичних змінних та їх терм-множин із подальшою перевіркою її коректності.

Для побудови антецедентів правил використано ознаки об'єктів зі скінченної терм-множини, кон'юнкція істинних значень яких визначає умови застосування продукції. Антецеденти правил формуються з використанням декартового добутку, для консеквентів зазначаються класи з деякої скінченної множини класів об'єктів. Консеквенти правил зображуються у вигляді вектору стовпця, значення елементів вектора залежить від матриці антецедентів і об'єктів навчальної вибірки. Формування вектора консеквентів здійснюється під час виконання процедури навчання бази знань. Кожен об'єкт з навчальної вибірки X^{Train} проходить процедуру фазифікації, після чого вектор визначається наступним чином:

$$c_p = C_m : \max_i^{I^{Train}} (fuzz(x_i^{Train}) \in a_p, C_m) \quad (1)$$

де $card()$ – функція потужності множини.

Вектор повинен містити в собі всі класи C_m , якщо ця умова не виконується, то зазначається, що на вхід системи подано неповну навчальну вибірку і необхідно перенавчити систему на іншому наборі даних. Для перевірки отриманої бази знань на коректність, використовуються критерії повноти, мінімальності, зв'язності та несуперечності. Під повнотою розуміється, що будь-якому поєднанню значень термів вхідних лінгвістичних змінних відповідає певне правило

в базі правил. Під мінімальною базою правил розуміється база, з якої не можна видалити жодного з продукційних правил, не порушивши цим її повноту. База знань є несуперечливою (узгодженою), якщо вона не містить несумісних правил, тобто правил з однаковими лінгвістичними умовами, але різними логічними висновками. Для доведення повноти системи правил застосовується логіка Хоара, метод резолюцій та програмний додаток Simplify, за допомогою якого здійснюється автоматична перевірка системи на несуперечність.

Розроблений підхід застосовується для розв'язання задачі класифікації видової популяції арктичних пінгвінів [5], оцінка якості отриманої нечіткої бази правил проводиться за допомогою метрик accuracy, precision, recall, f1-score.

1. Терновой М. Ю., Штогриня Е. С. Формальная спецификация свойств баз нечетких знаний Мамдани на основе метаграфа // Вісник ХНУ імені В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління, Вип. 27, – 2015. – С. 157–171.
2. Кривуля Г. Ф., Шкиль А. С., Кучеренко Д. Е. Анализ корректности продукционных правил в системах нечеткого логического вывода с использованием квантовых моделей // АСУ и приборы автоматики: всеукр. межвед. науч.-техн. сб. – Х.: Изд-во ХНУРЭ, Вып. 165, – 2013. – С. 42–53.
3. Darwiche A., Marquis P. A Knowledge Compilation Map // Journal of Artificial Intelligence 17, –2002. – P. 229-264. doi: <https://doi.org/10.1613/jair.989>
4. Кондратенко Ю. П., Козлов А. В. Генерація баз правил нечітких систем на основі модифікованих мурашиних алгоритмів // Міжнародний наук.-техн. журнал «Проблеми керування та інформатики», № 2, –2019. – С. 59-79.
5. Gorman K.B., Williams T.D., Fraser W.R. Ecological sexual dimorphism and environmental variability within a community of Antarctic penguins (genus *Pygoscelis*), PLoS ONE 9(3):e90081, –2014. – P. 1-14. doi: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0090081>

Сторітелінг — ефективний метод комунікації на уроках математики в основній і старшій школі

Житарюк Іван, Колісник Руслана, Шевчук Наталія

i.jitariuk@chnu.edu.ua, r.kolisnyk@chnu.edu.ua, n.shevchuk@chnu.edu.ua
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Першочерговим і незмінним завданням педагога у всі часи є зацікавлення учнів і мотивація їх до дії як щодо певного предмета, так і при розгляді кожної окремо взятої теми.

Навчання учнів основної і старшої школи математики будується на основі відтворення наявних наочних образів, понять і тверджень, що їх пов'язують. На жаль, часто спостерігається характерний феномен «зазубрювання» навчального матеріалу та формування розрізаних уявлень про ті факти дійсності, з якими той, хто навчається, стикається вперше, але повинен буде вже як поняття використовувати в майбутньому. Таке навчання відповідає примусовому характеру набуття нових знань. Примусовий характер освітнього процесу з математики обумовлений не відсутністю наукових та методичних знань за спеціальністю, а труднощами у здійсненні комунікації, спрямованої на розуміння навчального матеріалу.

Виникає проблема пошуку таких засобів та форм здійснення комунікації, за яких для учня провідним напрямом пізнання та спілкування на навчальних заняттях буде інтерес щодо пошуку нового знання та ціннісне ставлення до нього, за яких здійснювалися б взаєморозуміння та взаємовплив учасників освітнього процесу. Пізнавальна активність учня при цьому має проявлятися як відкриття себе в пізнавальному процесі та відкриття пізнавального процесу в собі.

У сучасному освітньому процесі інтеграція різних технологій стає дедалі важливішою для вчителів, які прагнуть підвищити навички учнів. Включаючи метод сторітелінгу у навчальний процес, вчителі можуть створювати захоплюючі та інтерактивні навчальні програми, що сприяють оволодінню математичною компетенцією. Однак, щоб ефективно реалізувати потенціал сторітелінгу, викладачам необхідно ретельно продумати свою власну організовану структуру для її використання на заняттях.

У основній і старшій школі сторітелінг допомагає при викладі складної теми, завдяки йому учні запам'ятовують важливі факти, дати, формули чи правила. З іншого боку, використання учнями різних форм сторітелінгу добре тренує їх комунікативні навички, допомагає впорядковувати мислення. Слухаючи історії, учні набувають нового досвіду, вчать контролювати свої емоції та дізнаються про нові варіанти врегулювання конфлікту чи вирішення будь-якої проблеми.

Запозичений з англійської термін «сторітелінг» нещодавно увійшов у практику педагогів і означає «розповідання історій». У наукових статтях сторітелінг розглядається як педагогічна технологія, побудована на використанні історій з певною структурою та героєм й спрямована на вирішення педагогічних задач навчання, розвитку та мотивації і виконує такі функції: наставницьку, мотивуючу, виховну, освітню, розвиваючу. Але, на жаль, сьогодні ще мало наукових розвідок щодо використання методу *storytelling*, особливо на уроках математики в основній і старшій школі.

Сторітелінг може бути пасивним й активним. При пасивному варіанті за створення історії та її розповідь відповідає вчитель, а активному – вчителю допомагають учні. Вибір певного варіанту залежить від уроку, теми заняття, а також від особистих побажань вчителя. Зауважимо, що пасивний сторітелінг оптимально підходить при початковому вивченні нової теми, де у формі розповіді можна подати нові правила, теорії, формули, закони тощо. Активний ж сторітелінг – для закріплення знань, коли учні самі створюють історії, а вчитель спрямовує їх у потрібне русло.

Метод сторітелінгу дозволяє реалізувати індивідуальні освітні траєкторії щодо певного змістового блоку уроку математики, що необхідні для розкриття індивідуальності, творчих начал учнів. Під цим ми маємо на увазі систему задач, адекватну індивідуальним особливостям окремого учня. Система задач відрізняється відкритістю формулювання завдання, наприклад: «запропонуйте свій варіант історії щодо застосування ознак рівності чи подібності трикутників», «складіть розповідь про свої досягнення при розв'язуванні задач» тощо. Реалізація методу сторітелінгу для створення комунікації на уроках математики передбачає дотримання певних правил, до яких можна віднести: робота над змістом історії; дизайн оформлення історії, подання інформації; довіра; зворотній зв'язок.

Розглянемо кілька прикладів реалізації методу сторітелінгу на уроках математики як засобу здійснення комунікації, коли провідним напрямом пізнання і спілкування стає інтерес до пошуку нового знання та ціннісне ставлення до нього, досягається взаєморозуміння та взаємовплив учасників освітнього процесу.

1. На уроці геометрії у 8 класі при вивченні теми «Теорема Піфагора» учнів можна у формі сторітелінгу (історії) познайомити з теоремою Піфагора, практичним використанням теореми Піфагора в житті.

2. На уроці в 5 класі при вивченні теми «Множення та ділення натуральних чисел» запропонувати скласти історію про те, чому не можна ділити на нуль. Учням п'ятого класу ще складно скласти історію повністю самостійно, тому на інформаційній дошці можна розташувати наочний матеріал і ставити навідні питання.

3. На уроках подачі нового знання або рефлексії можна запропонувати учням поміркувати над питаннями: «Про що мріє сектор?», «Якими предметами могли б бути трапеція, піраміда?», «Чому логарифм за основою 1 не визначається?», «Чому стілець на трьох ніжках стійкіший, ніж на чотирьох?», «Чому кішка, щоб зігрітися, згортається в клубок?», «Чому сир, що має форму кулі, довше зберігається?» тощо. Розповідь історії, що містить аргументовані міркування або гіпотези, створює сприятливу навчальну атмосферу, дозволяє сконцентрувати зусилля учнів перед новою порцією предметної інформації, краще запам'ятати конкретні приклади, формули та способи розв'язування задач. Учні розуміють те, що наука – ближча, ніж здається. Адже трапеція, наприклад, асоціюватиметься зі столом і тією історією, в якій вона фігурувала як неживий персонаж.

4. При вивченні властивостей геометричних фігур на уроках геометрії на етапі систематизації та узагальнення знань можна запропонувати учням скласти розповідь на тему «Трикутник», «Чотирикутник», «Коло» тощо, використати

стовуючи, наприклад, 15 дієслів та прикметників. Завдання сприяє як систематизації знань учнів про властивості геометричних фігур, так і значною мірою сприяє розвитку семантичної гнучкості й адаптивності їх математичної мови.

5. На уроках розвиваючого контролю знань, умінь і способів діяльності можна запропонувати учням написати історії на теми: «Моя хвилина слави», «Мої досягнення», «П'ять причин вивчити геометрію та п'ять причин, чому ви цього ще не зробили» тощо. Навичка самопрезентації на сьогоднішній день є найбільш затребуваною. Багато отримати зворотний зв'язок (відгук слухача): у вашій історії сподобалося . . . , вона допомагає пам'ятати про те

Використання методу сторітелінгу дає можливість учням основної і старшої школи брати активну участь у спілкуванні та взаємозбагаченні знаннями з однолітками і педагогом, забезпечує розвиток уяви, вільного, креативного мислення, сприяє становленню грамотної мови. Метод сторітелінгу як формат навчання у основній і старшій школі має величезну практичну користь: легке засвоєння матеріалу, подолання страху публічного виступу, налагодження стосунків з іншими учнями, самопізнання.

1. Кованцов М.І. Математика і романтика. – Київ: Вища школа, 1990. – 41 с.
2. Ляшова Н.М. Застосування методу storytelling у навчанні методики математики майбутніх учителів// Професіоналізм педагога: теоретичні й методичні аспекти. – Вип. 14, Ч. 1.– Слов'янськ, 2021. – С. 96–105.
3. Малиновская С.К. Storytelling// Business Education Review. – 2006. – № 2. – С. 50–56.

Критерій керованості крайових задач для операторних рівнянь у банахових просторах

Журавльов Валерій

vfz2008@ukr.net

Поліський національний університет

Нехай $\mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $z(t)$, визначених на скінченному проміжку \mathcal{I} зі значеннями у банаховому просторі \mathbf{B}_1 , $z(\cdot) : \mathcal{I} \rightarrow \mathbf{B}_1$ з нормою $\|z\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|z(t)\|_{\mathbf{B}_1}$, $\mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $f(t)$, визначених на тому ж проміжку \mathcal{I} зі значеннями у банаховому просторі \mathbf{B}_2 з нормою $\|f\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, $\mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — банаховий простір обмежених вектор-функцій $u(t)$, визначених на тому ж проміжку \mathcal{I} зі значеннями у банаховому просторі \mathbf{B}_3 з нормою $\|u\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|u(t)\|_{\mathbf{B}_3}$, \mathbf{B} — банаховий простір векторів зі сталими компонентами.

Розглянемо лінійну крайову задачу з керуванням

$$(Lz)(t) = f(t) + (Hu)(t), \tag{1}$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + Gu(\cdot), \tag{2}$$

де $L : \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ та $H : \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \rightarrow \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — лінійні обмежені оператори, $\ell : \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}$ та $G : \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \rightarrow \mathbf{B}$ — лінійні обмежені вектор-функціонали.

Нехай оператор $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ — узагальнено оборотний. Узагальнена оборотність оператора L означає [1], що він нормально розв'язний, а його нуль-простір $N(L)$ та ядро $R(L)$ доповнювальні у банахових просторах $\mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$ та $\mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, відповідно. При цьому існують [2] обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(L)} : \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow N(L)$, $\mathcal{P}_{Y_L} : \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \rightarrow Y_L$, де $Y_L = \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \ominus R(L)$ та обмежений узагальнено обернений оператор L^- до оператора L .

Відомо [3], що нормально розв'язне операторне рівняння (1) має розв'язки для тих і лише тих правих частин, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_L} [f + Hu] = 0. \tag{3}$$

Позначивши $B = \mathcal{P}_{Y_L} H$ з умови (3) отримаємо операторне рівняння

$$Bu = -\mathcal{P}_{Y_L} f \tag{4}$$

відносно керування u . Таким чином виконання умови (3) залежить від розв'язності рівняння (4).

Керування $u(t)$, які є розв'язками рівняння (4) будемо називати допустимими керуваннями для рівняння (1) у сенсі [4].

Нехай $B \in \mathbf{GI}(\mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ — узагальнено оборотний, а отже нормально розв'язний оператор. Тоді існують [2] обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(B)} : \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \rightarrow N(B)$, $\mathcal{P}_{Y_B} : \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \rightarrow Y_B$, де $Y_B = \mathbf{I}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \ominus R(B)$ та обмежений узагальнено обернений оператор B^- .

Теорема 1. Нехай лінійні оператори $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ та $B \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$, а операторне рівняння (1) без керування ($H = 0$) не має розв'язку при довільних $f \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$.

Тоді рівняння (1) з керуванням розв'язне для тих і лише для тих $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, які задовольняють умову

$$\mathcal{P}_{Y_B} \mathcal{P}_{Y_L} f = 0, \quad (5)$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$z = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \end{bmatrix} + L^- \tilde{H} f, \quad (6)$$

де $X_1 = \mathcal{P}_{N(L)}$, $X_2 = L^- H \mathcal{P}_{N(B)}$, $\tilde{H} = I_{\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)} - H B^- \mathcal{P}_{Y_L}$, $\hat{z} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\hat{u} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — довільні елементи.

При цьому воно має сім'ю допустимих керувань

$$u = \mathcal{P}_{N(B)} \hat{u} - B^- \mathcal{P}_{Y_L} f. \quad (7)$$

Підставимо загальний розв'язок (6) операторного рівняння (1) та відповідне допустиме керування (7) у крайову умову (2). Отримаємо

$$\begin{aligned} \ell z(\cdot) &= \begin{bmatrix} \ell X_1 & \ell X_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \end{bmatrix} + \ell L^- \tilde{H} f = \\ &= \alpha + G \left[\mathcal{P}_{N(B)} \hat{u}(\cdot) - B^- \mathcal{P}_{Y_L} f \right]. \end{aligned}$$

Позначивши

$$Q_1 = \ell X_1 : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \rightarrow \mathbf{B}, \quad Q_2 = \ell X_2 - G \mathcal{P}_{N(B)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \rightarrow \mathbf{B},$$

після перетворень отримаємо

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \alpha - (\ell L^- \tilde{H} + G B^- \mathcal{P}_{Y_L}) f. \quad (8)$$

Нехай оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$ та $\hat{Q}_2 = \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} Q_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{B})$ — узагальнено оборотні, тоді операторна матриця $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$ теж узагальнено оборотна [5, с. 545]. Отже операторне рівняння (8) нормально розв'язне і, як наслідок, існують обмежені проектори $\mathcal{P}_{N(Q)} : \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3) \rightarrow N(Q)$, $\mathcal{P}_{Y_Q} : \mathbf{B} \rightarrow Y_Q$ та обмежений узагальнено обернений оператор $Q^- : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1) \times \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ до оператора Q .

Нормально розв'язне рівняння (8) може бути: однозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(Q)} \equiv 0$), всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{Y_Q} \equiv 0$), неоднозначно і не всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{N(B_0)} \neq 0, \mathcal{P}_{Y_Q} \neq 0$) [6].

Розглянемо найбільш загальний випадок, коли рівняння (8) неоднозначно і не всюди розв'язне, тобто $\mathcal{P}_{N(Q)} \neq 0, \mathcal{P}_{Y_Q} \neq 0$. Оскільки оператор Q нормально розв'язний, то використовуючи теорему 3 з [5, с. 545] про розв'язність рівняння

з операторною матрицею маємо, що рівняння (8) має розв'язок тоді і лише тоді коли виконується умова [3]

$$\mathcal{P}_{Y_Q} \left\{ \alpha - (\ell L^{-1} \tilde{H} + GB^{-1} \mathcal{P}_{Y_L}) f \right\} = 0,$$

при виконанні якої рівняння (8) має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{u} \end{bmatrix} - Q^{-1} \left\{ \alpha - (\ell L^{-1} \tilde{H} + GB^{-1} \mathcal{P}_{Y_L}) f \right\}, \quad (9)$$

де

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \quad \mathcal{P}_{N(Q)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^{-1} Q_2 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} Q_1^{-1} - Q_1^{-1} Q_2 \hat{Q}_2^{-1} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \\ \hat{Q}_2^{-1} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix} \quad (11)$$

— узагальнено обернений оператор до оператора Q , $\bar{z} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1)$, $\bar{u} \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ — довільні елементи.

Позначивши для скорочення записів

$$\tilde{Q}_1^{-1} = Q_1^{-1} - Q_1^{-1} Q_2 \hat{Q}_2^{-1} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \quad \tilde{Q}_2^{-1} = \hat{Q}_2^{-1} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \quad (12)$$

розв'язок (9) запишемо у вигляді

$$\begin{bmatrix} \hat{z} \\ \hat{u} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{u} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} \\ \tilde{Q}_2^{-1} \end{bmatrix} \left\{ \alpha - (\ell L^{-1} \tilde{H} + GB^{-1} \mathcal{P}_{Y_L}) f \right\}. \quad (13)$$

Підставивши (13) у (6), будемо мати

$$\begin{aligned} z &= \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \left\{ \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{u} \end{bmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1^{-1} \\ \tilde{Q}_2^{-1} \end{bmatrix} \left[\alpha - (\ell L^{-1} \tilde{H} + GB^{-1} \mathcal{P}_{Y_L}) f \right] \right\} + L^{-1} \tilde{H} f. \end{aligned}$$

Теорема 2. Нехай лінійні оператори $L \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ та $B \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2))$ — узагальнено оборотні.

Тоді, якщо оператори $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_1), \mathbf{B})$ та $\hat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3), \mathbf{B})$ — узагальнено оборотні, то крайова задача з керуванням (1), (2) розв'язна для тих і лише для тих $f(t) \in \mathbf{l}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ та $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють систему умов

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_B} \mathcal{P}_{Y_L} f = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left[\alpha - (\ell L^{-1} \tilde{H} + GB^{-1} \mathcal{P}_{Y_L}) f \right] = 0, \end{cases} \quad (14)$$

при виконанні яких вона має сім'ю розв'язків

$$z = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \bar{z} \\ \bar{u} \end{bmatrix} + (X_1 \tilde{Q}_1^- + X_2 \tilde{Q}_2^-) \alpha + \\ + L^- \tilde{H} f - (X_1 \tilde{Q}_1^- + X_2 \tilde{Q}_2^-) (\ell L^- \tilde{H} + GB^- \mathcal{P}_{Y_L}) f,$$

де $\bar{z} \in \mathbf{1}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\bar{u} \in \mathbf{1}_\infty(\mathcal{I}, \mathbf{B}_3)$ – довільні елементи.

При цьому вона має сім'ю допустимих керувань

$$u = \mathcal{P}_{N(B)} \mathcal{P}_{N(\tilde{Q}_2)} \bar{u} + \mathcal{P}_{N(B)} \tilde{Q}_2^- \alpha - \\ - \mathcal{P}_{N(B)} \tilde{Q}_2^- (\ell L^- \tilde{H} + GB^- \mathcal{P}_{Y_L}) f - B^- \mathcal{P}_{Y_L} f.$$

1. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
2. Попов М. М. Доповнювані простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха // Математика сьогодні'07. – 2007. – В. 13. – С. 78 – 116.
3. Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М. *Нормально разрешимые краевые задачи.* – Киев: Нукова думка, 2019. – 628 с.
4. Зубов В.И. Построение программых движений в линейных управляемых системах // Дифференц. уравнения. – 1970. – 6, № 4. – С. 632 – 633.
5. Zhuravlev V. F., Fomin N. P., Zabrodskiy P. N. Conditions of solvability and representation of the solutions of equations with operator matrices// Ukr. Mat. Journal. – 2019. – 71, № 4, P. 537 – 552.
6. Крейн С. Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1971. – 104 с.

Поточкові оцінки розв'язків вагового параболічного рівняння р-Лапласа з використанням потенціалів Вольфа

Зозуля Євген

albelgen27@gmail.com

Донбаська державна машинобудівна академія

Узагальнюється представлення Пуассона на випадок квазілінійного параболічного рівняння дивергентного типу

$$v(x) u_t - \operatorname{div}(w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f, \quad p > 2 \quad (1)$$

у області $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, з ваговими функціями $v(x)$, $w(x)$, що належать класу Маккенхаупта та правою частиною $f \in L^1(\Omega_T)$. Вважаємо, що Ω - обмежена область у R^n , $n \geq 2$, $0 < T < +\infty$.

Більш узагальнено ми маємо справу з прототипом рівняння (1), тобто з квазілінійним параболічним рівнянням дивергентного типу

$$v(x) u_t - \operatorname{div} A(x, t, u, \nabla u) = f(x, t) \quad \text{у } \Omega_T, \quad (2)$$

де векторне поле $A = (a_1, a_2, \dots, a_n) : \Omega_T \times R^1 \times R^n \rightarrow R^n$ є вимірюваним за Лебегом стосовно $(x, t) \in \Omega_T$ для всіх $(u, \xi) \in R^1 \times R^n$, та неперервним щодо (u, ξ) для майже всіх $(x, t) \in \Omega_T$. Ми також припускаємо, що наступні структурні умови задовольняються деякими додатними константами K_1, K_2

$$\begin{aligned} A(x, t, u, \xi) \xi &\geq K_1 w(x) |\xi|^p, \\ |A(x, t, u, \xi)| &\leq K_2 w(x) |\xi|^{p-1}, \quad p > 2 \end{aligned} \quad (3)$$

Припускаємо далі, що w належить до класу Маккенхаупта A_p , $1 < p < \infty$, тобто

$$\sup \frac{w(B)}{|B|} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}}(x) dx \right)^{p-1} = K_{p,w} < +\infty, \quad w(B) = \int_B w dx,$$

де супремум береться за всіма кулями $B \subset R^n$. Тут ми говоримо, що $v(x) \in A_\infty$, якщо існує $p_0 > 1$ таке, що $v(x) \in A_{p_0}$.

Безпосереднім наслідком означення класу A_p є

$$\frac{w(B_\rho(y))}{w(B_r(y))} \leq K_{p,w} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{np}$$

для всіх куль $B_r(y) \subset B_\rho(y)$.

Більше того (детальніше [4]), існують константи $K_3 > 0$, $0 < \xi_1 \leq 1$, $0 < \xi_2 < p$ залежні тільки від $n, p, K_{p,w}$ такі, що

$$K_3^{-1} \left(\frac{|B_\rho(y)|}{|E|} \right)^{\xi_1} \leq \frac{w(B_\rho(y))}{w(E)} \leq K_3 \left(\frac{|B_\rho(y)|}{|E|} \right)^{\xi_2}$$

для будь-якої кулі $B_\rho(y)$ та $E \subset B_\rho(y)$

Далі будемо вважати, що

$$K_4^{-1} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\nu_1} \leq \frac{v(B_\rho(y))}{v(B_r(y))} \leq K_4 \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\nu} \quad (4)$$

$$K_4^{-1} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\mu_1} \leq \frac{w(B_\rho(y))}{w(B_r(y))} \leq K_4 \left(\frac{\rho}{r} \right)^{n\mu}, \quad (5)$$

з деякими додатними $K_4, \nu_1, \mu_1, \nu, \mu$ і для куль $B_r(y) \subset B_\rho(y)$. Наступне наше припущення - це співвідношення між v та w . Фіксуємо $y \in \Omega$ та R так, що $B_{8R}(y) \subset \Omega$ і покладемо

$$\psi_y(r) := r^p \frac{v(B_r(y))}{w(B_r(y))}, \quad 0 < r \leq R.$$

Припускаємо, що $\psi_y(r)$ зростає для $r \in (0, R]$ і існують дві додатні константи α, K_5 такі, що

$$\frac{\psi_y(r)}{\psi_y(\rho)} \leq K_5 \left(\frac{r}{\rho} \right)^\alpha \quad (6)$$

Для формулювання наших результатів нам також потрібно означення зваженого параболічного потенціалу Вольфа. Нехай $(x_0, t_0) \in \Omega_T$ для будь-яких $\rho, \theta > 0$ визначаємо $Q_{\rho, \theta}^+(x_0, t_0) := Q_{\rho, \theta}^+(x_0, t_0) \cup Q_{\rho, \theta}^-(x_0, t_0)$, $Q_{\rho, \theta}^+(x_0, t_0) := B_\rho(x_0) \times (t_0, t_0 + \theta)$, $Q_{\rho, \theta}^-(x_0, t_0) := B_\rho(x_0) \times (t_0 - \theta, t_0)$

і встановимо

$$D(x_0, t_0; \rho) := \inf_{\tau > 0} \left\{ \tau^{-\frac{1}{p-2}} + \frac{1}{v(B_\rho)} \iint_{Q_{\rho, \tau \psi_{x_0}(\rho)}(x_0, t_0)} f dx dt \right\} \quad (7)$$

Зауважимо, що зазначений вище мінімум досягається при деякому $\tau \in (0, \infty]$, оскільки функція під інфімумом є неперервною по τ .

Тепер нехай, для $\rho > 0$ та $\rho_j := \frac{\rho}{2^j}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ Визначимо параболічний потенціал функції f так:

$$P_{v, w}^f(x_0, t_0, \rho) := \sum_{j=0}^{\infty} D(x_0, t_0; \rho_j) \quad (8)$$

У випадку, якщо f не залежить від часу, для кожної кулі з центром у x_0 , мінімум у означенні $D(x_0, t_0; \rho)$ досягається при

$$\tau_0 = \left(\frac{C}{w(B_\rho(x_0))} \int_{B_\rho(x_0)} |f| dx \right)^{-\frac{p-2}{p-1}}.$$

Тому

$$D(x_0, t_0; \rho) = \left(\frac{\rho^p}{w(B_\rho(x_0))} \int_{B_\rho(x_0)} |f| dx \right)^{\frac{1}{p-1}}, \quad P_{v, w}^f(x_0, t_0, \rho) = W_{w, p}^f(x_0, \rho), \quad (9)$$

де $W_{w,p}^f(x_0, \rho)$ - зважений потенціал Вольфа (детальніше [4]).

Перш ніж формулювати наш основний результат, введемо означення слабого розв'язку (1).

Скажемо, що u - це узагальнений розв'язок рівняння (1) у Ω_T якщо $u \in C([T_1, T_2]; L^p(\Omega)) \cap L^p([T_1, T_2]; W^{1,p}(\Omega))$ та для будь-якого інтервалу $[t_1, t_2] \subset [T_1, T_2]$ і невід'ємної тестової функції $\varphi \in W^{1,2}([t_1, t_2]; L^2(\Omega)) \cap L^p([t_1, t_2]; W_0^{1,p}(\Omega))$ виконується інтегральна тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v(x)u\varphi dx \Big|_{t_1}^{t_2} + \iint_{\Omega \times [t_1, t_2]} w(x)|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \varphi dx dt &= \\ &= \iint_{\Omega \times [t_1, t_2]} f\varphi dx dt + \iint_{\Omega \times [t_1, t_2]} v(x)u\varphi_t dx dt \end{aligned} \quad (10)$$

Наш основний результат формулюється наступним чином

Теорема. *Нехай u слабкий розв'язок рівняння (1) і $p > 2$. Тоді для кожного $\lambda \in (0, \min\{\frac{1}{p-1}, \frac{1}{N}\})$ існує $\gamma > 0$, що залежить тільки від даних p, N, c_0, c_1 і λ , таке, що для кожної точки Лебега $(y, s) \in \Omega_T$ для u_{\pm} та $\rho, \theta > 0$ такі, що $Q_{\rho, \theta} := \{x : |x - y| \leq \rho\} \times [s - \theta, s + \theta] \subset \Omega_T$, виконується*

$$\begin{aligned} u_{\pm}(y, s) \leq \gamma \left[\left(\frac{\psi_y(R)}{\theta} \right)^{\frac{1}{p-2}} + \left[\frac{1}{\psi_y(\rho)v(B_{\rho})} \iint_{Q_{\rho, \theta}} v u_+^{(1+\lambda)(p-1)} dx dt \right]^{\frac{1}{1+\lambda(p-1)}} + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\psi_y(\rho)w(B_{\rho})} \iint_{Q_{\rho, \theta}} w u_+^{(1+\lambda)(p-1)} dx dt \right]^{\frac{1}{1+\lambda(p-1)}} + P_{v,w}^f(y, s, \rho) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

Доведення Теорема (приведене у [9]) ґрунтується на відповідних модифікаціях ітераційної техніки Де Джорджі [2], метода внутрішнього масштабування (intrinsic scaling) Ді Бенедетто [3], після адаптації техніки Кілпелайнен - Мали [5], [4] до параболічних рівнянь сумісно з ідеями [7], [8].

1. Adams A., Fournier J. J., Sobolev Spaces, Academic Press, 2003.
2. De Giorgi E., Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolary. Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 1957, 3, P. 25-43.
3. Di Benedetto E., Gianazza U., Vespi V., Harnack inequality for degenerate and singular parabolic equations. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2012.
4. Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O., Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, in: Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.

5. Kilpeläinen T., Malý J., The Wiener test and potential estimates for quasilinear elliptic equations, *Acta Math.*, 1992, 172, P. 137-161.
6. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tceva N. N., *Linear and quasilinear equations of parabolic type.* Amer. Math. Soc., 1968.
7. Liskevich V., Skrypnik I. I., Harnack's inequality and continuity of solutions to quasi-linear degenerate parabolic equations with coefficients from Kato-type classes, *J. Differential Equations*, 2009, (10) 247, P. 2740-2777.
8. Liskevich V., Skrypnik I., Sobol Z., Potential estimates for quasi-linear parabolic equations. *Advanced Nonlinear Studies*, 2011, 11 (4), 905-915.
9. Zozulia Y., Pointwise estimates of solutions to weighted parabolic p -Laplacian equation via Wolff potential, *Праці ІПММ НАН України*, 2023, Т. 36, № 2, С. 72-90.

Про властивості операторів Гріна і спряжених з ними операторів, породжених задачею Коші для параболічних за Ейдельманом систем довільного порядку

Івасюк Галина, Процах Наталія, Фратавчан Тоня

h.ivasjuk@chnu.edu.ua, protsakh@ukr.net t.fratavchan@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,

Національний лісотехнічний університет України,

Національний університет "Львівська політехніка"

Розглядається задача Коші для системи рівнянь з частинними похідними, параболічної за Ейдельманом вигляду

$$\partial_t^{n_k} u_k(t, x) - \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{\|\bar{\alpha}\| \leq 2bn_j, \\ (\alpha_0 < n_j)}} a_{\bar{\alpha}}^{kj}(t, x) \partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} u_j(t, x) = f_k(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_T,$$

$$\partial_t^{\mu-1} u_k(t, x)|_{t=0} = \varphi_k^{\mu}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \{1, \dots, n_k\}, \quad (1)$$

де $n, N, b_1, \dots, b_n, n_1, n_2, \dots, n_N$ – задані натуральні числа, $k \in \{1, \dots, N\}$, b – найменше спільне кратне чисел b_1, \dots, b_n ; $\bar{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$; $\|\bar{\alpha}\| := \sum_{j=0}^n m_j \alpha_j$, $m_0 := 2b$, $m_j := b/b_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$; $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; $\partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} := \partial_t^{\alpha_0} \partial_x^{\alpha}$, $\partial_x^{\alpha} := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $\Pi_T := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \in (0, T], x \in \mathbb{R}^n\}$, T – задане додатне число.

Припускається, що система диференціальних рівнянь є рівномірно параболічна за Ейдельманом у шарі Π_T , а коефіцієнти системи задачі (1) обмежені, задовольняють рівномірну умову Гельдера за x , неперервні за t , при цьому неперервність за t коефіцієнтів $a_{\bar{\alpha}}^{kj}$, з $\|\bar{\alpha}\| = 2bn_j$ рівномірна щодо $x \in \mathbb{R}^n$. Крім того, вважається, що коефіцієнти системи мають неперервні та обмежені похідні $\partial_{t,x}^{\bar{\alpha}} a_{\bar{\alpha}}^{kj}$, $\|\bar{\alpha}\| \leq 2bn_j$, $\{k, j\} \subset \{1, \dots, N\}$, які задовольняють відповідну умову Гельдера за x рівномірно щодо t з показником $\lambda \in (0, 1)$ в Π_T .

Як показано в [1], розв'язок такої задачі для довільних гладких і фінітних функцій f_k та φ_k^{μ} , $\mu \in \{1, \dots, n_k\}$, $k \in \{1, \dots, N\}$, зображається у вигляді

$$u_k(t, x) = \sum_{j=1}^N \left(\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0^{kj}(t, x; \tau, \xi) f_j(\tau, \xi) d\xi + \sum_{\mu=1}^{n_k} \int_{\mathbb{R}^n} G_j^{k\mu}(t, x; \xi) \varphi_j^{\mu}(\xi) d\xi \right),$$

$$(t, x) \in \Pi_T.$$

Тут $G := (G_0, G_1, \dots, G_N)$, де $G_0 := (G_0^{kj})_{k,j=1}^N$, $G_j := (G_j^{k\mu})_{k=1, \mu=1}^{N, n_k}$, $j \in \{1, \dots, N\}$, – матриця Гріна задачі (1).

Операторами Гріна задачі Коші (1) називатимемо інтегральні оператори вигляду

$$\widehat{G_0^{kj}} f = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_0^{kj}(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi, \quad \widehat{G_j^{k\mu}} \varphi_j = \int_{\mathbb{R}^n} G_j^{k\mu}(t, x; \xi) \varphi_j(\xi) d\xi, \quad (2)$$

$\{k, j\} \subset \{1, \dots, N\}$, $\mu \in \{1, \dots, n_k\}$.

Оператори

$$\widehat{G_0^{kj*}} g(\tau, \xi) := \int_{\tau}^T dt \int_{\mathbb{R}^n} \overline{G_0^{kj}(t, x; \tau, \xi)}' g(t, x) dx, \quad (\tau, \xi) \in \Pi_T,$$

$$\widehat{G_j^{k\mu*}} g(\xi) := \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} \overline{G_j^{k\mu}(t, x; \xi)}' g(t, x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

де $\{k, j\} \subset \{1, \dots, N\}$, $\mu \in \{1, \dots, n_k\}$, штрих означає транспонування, а риска – комплексну спряженість, називатимемо спряженими до (2) відповідно.

Через $H^{s+\lambda}$ (s – ціле додатне число, $0 < \lambda < 1$) позначимо простір Гельдера спеціально підібраних спадних функцій, що визначаються так само як $H_{s+\lambda}^{\vec{k}(\cdot, \vec{a})}$ з [2], в яких потрібно замінити функцію $\psi(t, x)$ на

$$\tilde{\psi}(t, x) := \exp \left\{ -c \sum_{j=1}^n (T_1 - t)^{1-q_j} |x_j|^{q_j} \right\}, \quad T_1 > T, \quad q_j := 2b_j / (2b_j - 1).$$

Через $\overset{\circ}{H}^{s+\lambda}$ та $\overset{\circ}{H}^{s+\lambda}$ позначимо множини функцій u з $H^{s+\lambda}$, для яких $\partial_t^{\mu-1} u_k(t, x)|_{t=0} = 0$ та $\partial_t^{\mu-1} u_k(t, x)|_{t=T} = 0$, $\mu \in \{0, \dots, n_k - 1\}$, відповідно.

Встановлена обмежена дія операторів $\widehat{G_0^{kj*}}$ з $\overset{\circ}{H}^{s+\lambda}$ в $\overset{\circ}{H}^{2bn_k+s+\lambda}$ (s – ціле додатне число, $0 < \lambda < 1$) та $\widehat{G_0^{kj*}}$ з $\overset{\circ}{H}^{s-2bn_j+\lambda}$ в $\overset{\circ}{H}^{s+\lambda}$ ($s \geq \max_j(2bn_j)$, $0 < \lambda < 1$).

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. Birkhäuser Verlag. 2004. – 390 pp.
2. Івасишен С. Д., Івасюк Г. П. Параболічні початкові задачі Солонникова-Ейдельмана. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. **74**, 2011, 98–108.

Схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь та їх застосування

Ліліка Світлана, Матвій Олександр, Піддубна Лариса

s.ilika@chnu.edu.ua, o.matvij@chnu.edu.ua, l.piddubna@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Математичними моделями багатьох фізичних і технічних процесів є диференціально-різницеві та диференціально-функціональні рівняння [1, 2]. Для диференціально-функціональних рівнянь важливою задачею є побудова та обґрунтування методів знаходження розв'язків початкових та крайових задач, оскільки на даний час немає універсальних методів їх розв'язання. У даній роботі розглядаються схеми апроксимації диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями спеціальними системами звичайних диференціальних рівнянь, які виявилися ефективними для ряду прикладних застосувань [3, 4].

Розглянемо початкову задачу для ДРР із багатьма запізненнями

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_p)), \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

де $0 < \tau_1 < \dots < \tau_p = \tau$, $p \geq 1$.

Замінивши елементи запізнення $x(t - \tau_i)$, $i = \overline{1, p}$ ланцюжками m аперіодичних ланок, отримуємо задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \dots, z_{l_p}(t)), \quad l_i = \left[\frac{m\tau_i}{\tau} \right], \\ \frac{dz_j}{dt} &= \frac{m}{\tau} (z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (3)$$

$$z_j(0) = \varphi\left(-\frac{\tau j}{m}\right), \quad j = \overline{0, m}. \quad (4)$$

Теорема. [3] Нехай $z_j(t)$, $j = \overline{0, m}$, – розв'язок задачі Коші (3)–(4), а $x(t)$ – розв'язок початкової задачі (1)–(2). Припустимо, що функція f задовольняє умову Ліпшица

$$|f(t, u_0, u_1, \dots, u_p) - f(t, v_0, v_1, \dots, v_p)| \leq \sum_{k=0}^p L_k |u_k - v_k|, \quad L_k > 0,$$

$$u_k, v_k \in \mathbb{R}, \quad k = \overline{0, p}.$$

Тоді розв'язок задачі Коші (3)–(4) апроксимує розв'язок початкової задачі (1)–(2) і мають місце співвідношення

$$\left| x\left(t - \frac{\tau j}{m}\right) - z_j(t) \right| \leq \beta\left(\frac{\tau}{m}\right), \quad j = \overline{0, m}, \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

де $\beta(\delta)$ – монотонно зростаюча функція та $\lim_{\delta \rightarrow 0} \beta(\delta) = 0$.

Подальше вивчення схем апроксимації диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь здійснювалось для нових класів рівнянь та в різних функціональних просторах.

Побудова та обґрунтування схем апроксимації лінійних та квазілінійних диференціально-функціональних рівнянь послідовністю систем звичайних диференціальних рівнянь досліджено в роботі І.М. Черевка та С.А. Іліки [5]. Вивчення зв'язків між диференціально-різницевиими рівняннями і відповідними апроксимуючими системами звичайних диференціальних рівнянь дозволили запропонувати алгоритми розв'язання низки прикладних задач. У роботах [4]-[7] запропоновано схеми апроксимації неасимптотичних коренів квазіполіномів лінійних диференціально-різницевих рівнянь та методика дослідження стійкості розв'язків таких рівнянь. Конструктивні алгоритми побудови областей стійкості лінійних систем із багатьма запізненнями одержані в [6].

1. Schiesser W.E. Time delay ODE/PDE models. Applications in biomedical science and engineering. – Boca Rona, 2019. – 250 p.
2. Corduneanu C., Li Y., Mahdavi M. Functional differential equations: advances and applications. – John Wiley & Sons, 2016. – 368 p.
3. Піддубна Л.А., Черевко І.М. Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання. – 1999. – 2, No. 1. – С. 42-50.
4. Матвій О.В., Черевко І.М. Про апроксимацію систем із запізненням та їх стійкість // Нелінійні коливання. – 2004. – 7, № 2. – С. 208-216.
5. Іліка С.А., Черевко І.М. Апроксимація нелінійних диференціально-функціональних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 1. – С. 39-48.
6. Клевчук І.І., Пернай С.А., Черевко І.М. Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь // Доповіді НАН України. – 2012. – № 7. – С. 28-34.
7. Cherevko I., Tuzyk I., Ilika S., Pertsov A. Approximation of Systems with Delay and Algorithms for Modeling Their Stability // 11th Int. Conf. on Advanced Computer Information Technologies ACIT'2021, Deggendorf, Germany, 15-17 September 2021. – P. 49-52.

Про умову Лопатинського

Ільків Володимир

ilkivvv@i.ua

Національний університет „Львівська політехніка“

У 1953 році Український математичний журнал (т. 5, № 2, с. 131–151) опублікував всесвітньо відому сьогодні статтю видатного нашого математика Я. Б. Лопатинського „Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям“, в якій фігурує розглядувана умова.

Вона отримала згодом назву умова Лопатинського, а також умова Лопатинського–Шапіро (одночасно і незалежно від Лопатинського умова Шапіро була оприлюднена стосовно частинного випадку задачі). Використовують ще назви умова накриття, умова доповнювальності тощо.

Важливість цієї умови полягає у тому, що вона виділяє еліптичні задачі серед загальних лінійних крайових задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь.

Аналогічні умови виникають при дослідженні параболічних та інших задач для відповідних класів рівнянь.

Формулювання умови Лопатинського має декілька варіантів, зокрема, алгебричні. Від формулювання залежить спроможність перевірки цієї умови.

Існують приклади задач, що справджують умову Лопатинського, і приклади задач, що її не справджують.

Крайова задача в області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ з границею Γ для еліптичної системи диференціальних рівнянь полягає у знаходженні функції $u = u(x)$, яка в Ω задовольняє систему рівнянь

$$A(x, D) = f(x), \quad (1)$$

де $D = (D_1, \dots, D_n) = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, і на Γ крайові умови

$$B(x, D) = \varphi(x), \quad (2)$$

де $A = (A_{jk})_{j,k=1,\dots,m}$, $B = (B_{jk})_{j=1,\dots,s, k=1,\dots,m}$, причому A_{jk} , B_{jk} — лінійні диференціальні оператори зі змінними коефіцієнтами.

Із еліптичності (за Петровським, за Дуглісом–Ніренбергом) системи (1) випливає, що для старшої частини $\mathring{A}(x, D)$ оператора $A(x, D)$ виконується умова $\det \mathring{A}(x, \xi) \neq 0$ для усіх ненульових $\xi \in \mathbb{R}^n$, де многочлен $\det \mathring{A}(x, \xi)$ має степінь $2s$ і корені z_1, \dots, z_p многочлена $\det \mathring{A}(x, \xi', z)$ кратності q_1, \dots, q_p належать верхній півплощині, а $\xi = (\xi', \xi_n)$.

Дослідження задачі (1), (2) за допомогою введення у довільній точці границі Γ локальної системи координат та замороження коефіцієнтів зводиться до дослідження у півпросторі $x_n \geq 0$ задач

$$\mathring{A}(D)u(x) = 0, \quad \mathring{B}(D)u(x', 0) = \varphi(x')$$

для еліптичних систем, де $x = (x', x_n)$.

Умова Лопатинського полягає в однозначній розв'язності задачі

$$\mathring{A}(i\xi', D_n)\tilde{u}(\xi', x_n) = 0, \quad \mathring{B}(i\xi', D_n)\tilde{u}(\xi', 0) = \tilde{\varphi}(x')$$

для системи звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами для довільного ненульового $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, де \tilde{u} і $\tilde{\varphi}$ — перетворення Фур'є за змінною x' вектор функцій u і φ , у класі стійких розв'язків (прямують до нуля на $+\infty$).

Нехай $V(x_n) = (v_1(x_n), \dots, v_s(x_n))$, тоді умова Лопатинського набуває вигляду $\det \mathring{B}(D)u(i\xi', D_n)V(x_n) \neq 0$ для усіх $\xi' \neq 0$, де v_1, \dots, v_s — база у просторі стійких розв'язків.

Алгебричною умовою, яка найчастіше використовується, є умова:

рядки матриці $\mathring{B}(i\xi', z)\widehat{A}(i\xi', z)$ — лінійно незалежні по модулю многочлена $P^+(z) = (z - z_1)^{q_1} \dots (z - z_p)^{q_p}$,

де $\widehat{A}(i\xi', z)$ — взаємна матриця для матриці $\mathring{A}(i\xi', z)$.

Встановлено нову модифікацію умови Лопатинського, а саме алгебричну умову:

$$\text{матриця} \left(\left(\frac{(\mathring{B}(i\xi', iz)\widehat{A}(i\xi', iz))^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right)_{\alpha=1}^{q_r} \Big|_{z=z_r} \right)_{r=1}^p$$

розміру $s \times sm$ має ранг s , тобто лінійно незалежні рядки.

Для випадку одного рівняння умова спрощується до нерівності

$$\det \left(\left(\frac{(\mathring{B}(i\xi', iz))^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} \right)_{\alpha=1}^{q_r} \Big|_{z=z_r} \right)_{r=1}^p \neq 0.$$

Задача Ніколетті для безтипного рівняння із частинними похідними

Ільків Володимир¹, Симолюк Михайло², Слоновьовський Ярослав¹
 ilkivvv@ukr.net, quaternion@ukr.net, yaroslav.o.slonyovskiy@lpnu.ua
¹Національний університет «Львівська політехніка»
²ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

Розглядаємо таку задачу Ніколетті для рівняння з частинними похідними типу Ейлера

$$L(t\partial_t, D)u \equiv (t\partial_t)^n u + \sum_{j=0}^{n-1} (t\partial_t)^j A_{n-j}(D)u = 0, \quad (t, x) \in Q_T^p, \quad (1)$$

$$\partial_t^{j-1} u(t, x)|_{t=t_j} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad 1 \leq t_1 < \dots < t_n \leq T, \quad x \in \Omega^p, \quad (2)$$

де $u = u(t, x)$, $t \in (0, T)$, $x = (x_1, \dots, x_p) \in \Omega^p$, Ω^p – p -вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $Q_T^p = (0, T) \times \Omega^p$, $D = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_p)$, A_j – многочлен степеня j , $j = 1, \dots, n$. Припускаємо, що для всіх $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$ многочлен $L(\lambda, ik) \equiv \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(ik)\lambda^j$ має прості корені $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$.

Встановлено умови коректності задачі (1), (2), описаних у термінах діофантових властивостей таких характеристичних визначників [1]:

$$\Delta(k) = \det \left\| y_q^{(j-1)}(t_j, k) \right\|_{j,q=1}^n, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (3)$$

де $y_q(t, k) = t^{\lambda_q(k)}$, $q = 1, \dots, n$. Доведено теореми метричного характеру про оцінки знизу для послідовностей визначників (3), на підставі яких отримано існування розв'язку задачі (1), (2) у відповідному функційному просторі для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{R}^n) векторів $\vec{t} \in [1, T]^n$, складених із вузлів інтерполяції t_1, \dots, t_n .

Розглянуто частковий випадок задачі, коли вузли t_1, \dots, t_n в умовах (2) є логарифмічно рівновіддаленими. Отримані результати є розвитком досліджень, проведених у [1, 2].

1. Ільків В. С., Симолюк М. М., Слоновьовський Я. О. Метричні оцінки характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – 65, № 1–2. – С. 65–79.
2. Матурін Ю. П., Симолюк М. М. Оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для строго гіперболічного рівняння // Наук. вісник Ужгород. нац. ун-ту. – 2018. – 2, вип. 2 (33). – С. 100–108.

**Умови коректної розв’язності неоднорідної крайової задачі
з нелокальними умовами для диференціального рівняння
з оператором узагальненого диференціювання**

Львів Володимир, Страп Наталія, Волянська Ірина

ilkivvv@i.ua, n.strap@i.ua, i.volyanska@i.ua
Національний університет “Львівська політехніка”

В області $\mathcal{D} = [0, T] \times \mathcal{S}$, де $\mathcal{S} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, досліджено умови однозначної розв’язності неоднорідної крайової задачі з нелокальними умовами для диференціально-операторного рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$Lu = \sum_{s_0+s_1 \leq n} a_{s_0, s_1} B^{s_1} \frac{\partial^{s_0} u}{\partial t^{s_0}} = f(t, z),$$

$$\mu \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \Big|_{t=0} - \frac{\partial^m u}{\partial t^m} \Big|_{t=T} = \varphi_m, \quad m = 0, 1, \dots, n-1,$$

де $a_{s_0, s_1} \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $a_{n,0} = 1$, $u = u(t, z)$ – шукана функція, а $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ і $f(t, z)$ – задані функції, B – оператор узагальненого диференціювання.

Коректна розв’язність цієї задачі показана у парі шкал $\{\mathbf{H}_q(\mathcal{S})\}_{q \in \mathbb{R}}$ і $\{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})\}_{q \in \mathbb{R}}$, де $\mathbf{H}_q(\mathcal{S})$ – гільбертовий простір функцій однієї змінної $\psi = \psi(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_k z^k$ із нормою

$$\|\psi\|_{\mathbf{H}_q(\mathcal{S})} = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{k}^{2q} |\psi_k|^2}, \quad \tilde{k} = \sqrt{1 + k^2},$$

а $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$, $n \in \mathbb{Z}_+$ – банахів простір функцій $u(t, z)$ таких, що похідні $\frac{\partial^r u(t, z)}{\partial t^r}$, $r = 0, 1, \dots, n$, що визначені формулою $\frac{\partial^r u(t, z)}{\partial t^r} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k^{(r)}(t) z^k$, для кожного $t \in [0, T]$ належать до просторів $\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S})$ і неперервні за змінною t у цих просторах. Норма $\|u\|_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})}$ функції u у просторі $\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})$ обчислюється за формулою

$$\|u\|_{\mathbf{H}_q^n(\mathcal{D})}^2 = \sum_{r=0}^{n-1} \max_{[0, T]} \left\| \frac{\partial^r u(t, \cdot)}{\partial t^r} \right\|_{\mathbf{H}_{q-r}(\mathcal{S})}^2.$$

Оператор узагальненого диференціювання B діє у запроваджених просторах за формулою $B\psi = z \frac{\partial \psi}{\partial z}$.

Степені B^s оператора B визначаємо стандартно $B^s \psi = B(B^{s-1} \psi)$ при $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, де $B^0 \psi = \psi$; при цьому z^k є власною функцією оператора B , тобто $B^s(z^k) = k^s z^k$, і $B^s \psi \in \mathbf{H}_{q-s}(\mathcal{S})$ для всіх $s \in \mathbb{N}$, якщо $\psi \in \mathbf{H}_q(\mathcal{S})$.

У загальному випадку багатьох комплексних просторових змінних дослідження таких нелокальних задач пов’язане з проблемою малих знаменників.

Ця проблема полягає у тому, що послідовність знаменників членів ряду, який є розв’язком нелокальної задачі, містить підпослідовність, яка збігається до нуля з довільною швидкістю.

Особливістю даної роботи є дослідження нелокальної крайової задачі для неоднорідного диференціального рівняння з частинними похідними з оператором узагальненого диференціювання $B = z\partial/\partial z$, який діє на функцію однієї скалярної комплексної змінної z .

Розглянута задача є некоректною за Адамаром, що відрізняє випадок однієї просторової змінної від випадку багатьох просторових змінних, коли задача некоректна за Адамаром.

Показано, що відповідні знаменники відділені від нуля, який не є їх точкою скупчення.

Встановлено достатні умови існування та необхідні і достатні умови єдиності розв'язку задачі у вказаних просторах, а також побудовано цей розв'язок.

Стійкість від входу до стану для атракторів еволюційних систем без єдиності

Капустян Олексій, Юсупів Тарас

alexkap@univ.kiev.ua, yusypiv7@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Поняття стійкості від входу до стану (Input-to-State Stability) дозволяє визначити відхилення траєкторії збуреної системи диференціальних рівнянь від глобально-асимптотично стійкого положення рівноваги [1]. При переході до дисипативних нескінченновимірних систем цікавим є дослідження поведінки збуреної системи в околі стійкої рівномірно-притягуючої множини – глобального атрактора [2]. В даній роботі одержано результати щодо робастної стійкості атракторів для еволюційних систем за умов, що не забезпечують єдиність розв'язку початкової задачі.

Розглядається задача

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + F(y(t)), \quad (1)$$

де $y(t) \in X$, $(X, \|\cdot\|_X)$ – нескінченновимірний фазовий простір, $A : D(A) \mapsto X$ – диференціальний оператор, $F : X \mapsto X$ – нелінійне відображення. Вважаємо, що умови на A і F забезпечують глобальну розв'язність (1) в X і відповідна (можливо, багатозначна) напівгрупа $S_0 : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$, породжена розв'язками (1), має глобальний атрактор Θ , тобто існує компактна множина $\Theta \subset X$ така, що $\Theta = S_0(t, \Theta) \forall t \geq 0$ і для будь-якої обмеженої $B \subset X$

$$\|S_0(t, B)\|_{\Theta} := \text{dist}_X(S_0(t, B), \Theta) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Нехай (1) зазнає неавтономних збурень $d \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. В роботі досліджується питання оцінок відхилення траєкторій такої системи від множини Θ . Нехай $S_d : \mathbb{R}_+ \times X \mapsto 2^X$ – напівпроцес, породжений збуреною задачею.

Робастність атрактора Θ незбуреної задачі (1) по відношенню до збурень визначається наступною властивістю (ISS): існують $\beta \in \mathcal{KL}$ і $\gamma \in \mathcal{K}$ такі, що $\forall y_0 \in X, \forall d, \forall t \geq 0$

$$\|S_d(t, y_0)\|_{\Theta} \leq \beta(\|y_0\|_{\Theta}, t) + \gamma(\|d\|_{\infty}), \quad (2)$$

де $\mathcal{K} := \{\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \gamma \text{ строго зростаючою, } \gamma(0) = 0\}$, $\mathcal{KL} := \{\beta : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid \beta(\cdot, t) \in \mathcal{K}, \forall t \geq 0, \beta(r, \cdot) \text{ неперервною, спадною і } \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(r, t) = 0 \forall r > 0\}$.

Доведено, що принаймні локально, властивість (2), а також властивість AG:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \sup \|S_d(t, y_0)\|_{\Theta} \leq \gamma(\|d\|_{\infty}) \quad (3)$$

справедливі для широких класів параболічних та гіперболічних рівнянь [3].

1. Sontag E.D., Wang Y. On characterizations of the input-to-state stability property // *Systems and Control Letters* – 1995. – 24, №5. – Pp. 351–359.
2. Dashkovskiy S., Kapustyan O. Robustness of global attractors: abstract framework and application to dissipative wave equations // *Evolution Equations and Control Theory* – 2022. – 11, №5. – Pp. 1565–1577.
3. Kapustyan O.V., Sobchuk V.V., Yusypiv T.V., Pankov A.V. Robust stability of global attractors for evolutionary systems without uniqueness // *Journal of optimization, differential equations and their applications (JODEA)* – 2022. – 30, №2. – Pp. 49–61.

Асимптотичні властивості розв'язків одного виду диференціальних рівнянь n -го порядку

Карпетров Валентин

valentyn.karapetrov@stud.onu.edu.ua

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Розглядається диференціальне рівняння

$$(r(t)u^{(m)})^{(n-m)} = \sum_{k=0}^m p_k u^{(k)}, \quad n \geq 2 \quad (1)$$

де $p_k \in C_{loc}([a; +\infty[)$ ($k = 0, \dots, m$),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{p_0(t)}{q(t)} = \sigma, \quad \sigma = \text{sign}(p_0(a)), \quad (2)$$

$r(t)$ та $q(t)$ – додатні двічі неперервно диференційовні на проміжку $[a; +\infty[$ функції, $C_{loc}([a; +\infty[)$ – простір локально неперервних функцій на проміжку $[a; +\infty[$, $L([a; +\infty[)$ – Банаховий простір інтегрованих за Лебегом функцій.

Рівняння виду (1) при $m = 0$ розглядалося у роботі[2]:

$$(r(t)u^{(m)})^{(n-m)} \pm qy = 0, \quad n \geq 2.$$

Рівняння виду (1) при $s \equiv 1$ та $m = n - 1$ розглядалося у роботі[3]:

$$u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t)u^{(k)}.$$

Для таких рівнянь у відповідних роботах було отримано асимптотичні зображення розв'язків при накладанні різних умов на коефіцієнти.

Нами для рівняння (1) знайдені умови існування та асимптотичні зображення розв'язків при деяких умовах на функції p_k та функцію r .

Отримано наступну теорему.

Теорема. *Нехай для рівняння (1) виконується умова (2), а також умови*

$$\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{n}} \notin L([a; +\infty[),$$

$$\begin{aligned} \frac{r'}{r} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a; +\infty[), \quad \frac{q'}{q} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a; +\infty[) \\ \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a; +\infty[), \quad \left(\frac{q'}{q}\right)^2 \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{-\frac{1}{n}} \in L([a; +\infty[), \end{aligned}$$

$$\frac{p_{k-1}(t)}{q(t)} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{k-1}{n}} \in L([a; +\infty[) \quad (k = \overline{2, m}), \quad \frac{p_m(t)}{r(t)q(t)} \cdot \left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{m}{n}} \in L([a; +\infty[).$$

Тоді рівняння (1) має фундаментальну систему розв'язків u_j ($j = \overline{1, n}$), які допускають асимптотичні зображення

$$u_j^{k-1} = q(t)^{-\alpha_k} \cdot r(t)^{-\beta_k} \cdot \exp \left[\lambda_j \cdot \int_a^t \left(\frac{q}{r} \right)^{\frac{1}{n}} \right] \cdot [\lambda_j^{k-1} + o(1)], \quad (k, j = \overline{1, n})$$

де λ_j^0 – корені рівняння

$$\lambda^n = \sigma.$$

Результати, отримані для вказаного рівняння (1), у деякому сенсі узагальнюють результати, отримані в роботах Хінтона та І. Т. Кігурадзе. При отриманні асимптотичних зображень за допомогою заміни змінної рівняння (1) перетворюється у еквівалентну систему квазілінійних диференціальних рівнянь, для якої виконуються відомі результати Левінсона (див., наприклад у [1], при цьому рівняння (1) у деякому сенсі асимптотично еквівалентне до відповідного дво-членного диференціального рівняння n -го порядку.

1. Coddington E. A. and Levinson N. (1955) Theory of Ordinary Differential Equations (McGraw-Hill, New York–Toronto–London)
2. Hinton Don B. (1968) Asymptotic behavior of solutions of $(ry^{(m)})^{(k)} \pm qy = 0$. // Journal of Differential Equations, – Vol. 4, No. 5,– pp. 590–596
3. Кігурадзе І. Т. Деякі сингулярні крайові завдання звичайних диференціальних рівнянь. – Тбілісі: Вид-во Тбіліс. ун-ту, 1975. – 352 с.

Онлайн-сервіси для створення інтерактивних вправ, тестувань та опитувань

Колісник Руслана, Усатюк Інна

r.kolisnyk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

У сучасному світі технологічний розвиток та зростання важливості електронного навчання відкривають нові можливості для покращення освітнього процесу. Запровадження інформаційних та комунікаційних технологій у навчання відкриває нові можливості для підвищення якості та ефективності навчання. Один із важливих аспектів такого розвитку – це використання онлайн-сервісів для створення інтерактивних вправ, тестувань та опитувань. Ці сервіси дозволяють створювати інтерактивні завдання, які сприяють більш активному залученню учнів до навчання, підвищенню їх мотивації та засвоєнню навчального матеріалу та суттєво впливають на розвиток сучасних педагогічних методик. Перед вчителями відкриваються нові можливості для забезпечення якісного та ефективного освітнього процесу.

Серед платформ/сервісів, які найкраще підходять для створення інтерактивних навчальних вправ, тестів, опитувань для уроків математики, варто виділити наступні: Kahoot!, Quizizz, Всеосвіта, OnlineTestPad, GoogleForms, LearningApps.

У роботі вивчено питання ефективності використання вказаних сервісів при проведенні уроків математики.

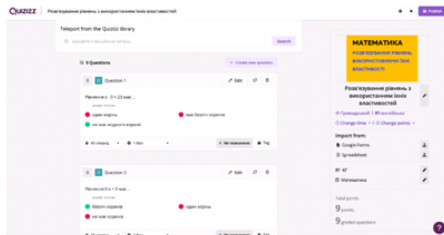


Рис 1. Тест оцінювання досягнень учнів

Зупинимось детальніше на можливостях використання платформи Quizizz при проведенні уроку математики в 6 класі. Quizizz – це онлайн-платформа для створення тестів та опитувань, які можуть використовуватися для інтерактивної перевірки знань учнів на уроках математики. Наприклад, учитель підготував урок математики у 6 класі на тему “Розв’язування рівнянь. Основні властивості рівнянь”. Для оцінювання досягнень учнів створив тест (рис. 1) із запитаннями про різні види рівнянь, їх властивості та методи їх розв’язування.

В класі є мультимедіа, на якому відображаються питання тесту з Quizizz. Учні відповідають на тестові запитання за допомогою своїх смартфонів (рис. 2) або ноутбуків. Система Quizizz відображає результати тестувань учнів наживо, а завдяки лідерській дошці, учні бачать, хто з них набрав найбільше балів, що створює додатковий інтерес до змагання та мотивує до навчання. Пі-

сля завершення кожного запитання, вчитель обговорює правильні та помилкові відповіді, пояснюючи основні моменти та техніки розв'язування.

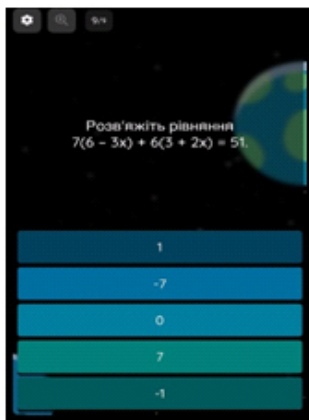


Рис 2. Вікно для відповіді на тестові запитання

Отже, використання інтерактивних вправ та тестів через онлайн-сервіси сприяє більш активному залученню учнів до навчання. Ігровий характер завдань на платформах, таких як Quizizz, Kahoot! та інші, створює зацікавленість та конкурентну атмосферу на уроках. Учні з більшим задоволенням взаємодіють з математичним матеріалом, відповідають на питання та долучаються до змагань.

1. Використання онлайн-платформ для створення тестів та опитувань [Електронний ресурс]. – URL: <http://ict.ippo.edu.te.ua/files/files/rekomendacii/vikoristannya-onlajn-platform-dlya-stvorennya-testiv-ta-opituvan.pdf>.
2. Методичні рекомендації “Платформа Quizizz та мобільний додаток” [Електронний ресурс]. – URL: <https://naurok.com.ua/metodichni-rekomendacii-platforma-quizizz-ta-mobilniy-dodatok-111732.html>.

Керування рухом матеріальної точки з урахуванням невідомого тертя

Коробов В., Ревіна Т.

valeriikorobov@gmail.com, t.revina@karazin.ua

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Розглянемо задачу синтезу для руху матеріальної точки з урахуванням невідомого тертя:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ p(t, x_1, x_2)x_2 + u \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Тут $t \geq 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ - це стан; u - скалярне керування, яке задовольняє обмеженню $|u| \leq 1$; доданок $p(t, x_1, x_2)x_2$ - потужність тертя, причому нелінійне в'язке тертя $p(t, x_1, x_2)$ - невідома функція, яка задовольняє обмеженню $p_1 \leq p(t, x_1, x_2) \leq p_2$, $p_1 < 0$, $p_2 > 0$. Випадок $p(t, x_1, x_2) = \text{const} < 0$ відповідає в'язкому тертю, яке є пропорційним першій степені швидкості. Запропоновані обмеження не виключають "від'ємного" тертя, тобто $p(t, x_1, x_2) > 0$.

Загальний підхід до розв'язку задачі базується на методі функції керованості, який був запропонований Коробовим В. І. у 1979 році [1]. Із роботи [2] випливає наступний результат.

Теорема 1. (Чоке Риверо, Коробов, Скорик) [2] Нехай функція керованості $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$ визначена для всіх $(x_1, x_2) \neq 0$ як єдиний додатний корінь рівняння

$$3\Theta^4 = 350x_1^2 + 140x_1x_2\Theta + 35x_2^2\Theta^2. \quad (2)$$

Тоді керування

$$u(x_1, x_2) = -\frac{10x_1}{\Theta^2(x_1, x_2)} - \frac{3x_2}{\Theta(x_1, x_2)} \quad (3)$$

розв'язує задачу синтезу для системи $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ u \end{pmatrix}$. Тобто траєкторія $x(t)$ замкненої системи, яка починається з довільної початкової точки $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$, закінчується у початку координат за скінченний час $T(x_0)$ (settling-time function). Більш того, час руху $T(x_0)$ дорівнює $\Theta(x_0)$, тобто функції керованості, та керування задовольняє обмеженню $|u(x_1, x_2)| \leq 1$.

Завдання даного дослідження полягає у наступному.

1. Чи можна застосовувати керування (3) для розв'язку задачі синтезу для системи з тертям (1)?
2. Якщо так, то знайти обмеження на тертя p_1 , p_2 .
3. Знайти обмеження на час руху з довільної початкової точки у початок координат.

Теорема 2. Нехай $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_2 > 1$, $c > 0$ та функція керованості $\Theta = \Theta(x_1, x_2)$ визначена як єдиний додатний корінь рівняння (2). Нехай $Q = \{(x_1, x_2) \mid \Theta(x_1, x_2) \leq c\}$,

$$p_1^0 = \max\{(1 - \gamma_1)\bar{p}_1^0; (1 - \gamma_2)\bar{p}_2^0\}, \quad p_2^0 = \min\{(1 - \gamma_1)\bar{p}_2^0; (1 - \gamma_2)\bar{p}_1^0\},$$

$$\bar{p}_1^0 = -\frac{7 + 2\sqrt{15}}{c}, \quad \bar{p}_2^0 = \frac{-7 + 2\sqrt{15}}{c}$$

Тоді для всіх $p_1 \leq p(t, x_1, x_2) \leq p_2$, таких, що $[p_1; p_2] \subset (p_1^0; p_2^0)$, траєкторія замкненої системи (1) з керуванням (3), яка починається з довільної початкової точки $x(0) = x_0 \in Q$, закінчується у початку координат за скінченний час $T = T(x_0, p_1, p_2)$, який задовільняє обмеженню $\Theta(x_0)/\gamma_2 \leq T(x_0, p_1, p_2) \leq \Theta(x_0)/\gamma_1$.

Зауважимо, що скінченність часу руху (settling-time function) впливає з нерівності на похідну функції керованості в силу збуреної системи [3] $-\gamma_2 \leq \dot{\Theta} \leq -\gamma_1$.

Для знаходження траєкторії, яка починається у заданій початковій точці $x_0 = (x_1^0, x_2^0) \in Q$, обираємо $p_1 \leq p(t, x_1, x_2) \leq p_2$, потім знаходимо єдиний додатний корінь рівняння (2) $\Theta_0 = \Theta(x_1^0, x_2^0)$. Нехай $\theta(t) = \Theta(x(t))$. Шукана траєкторія є розв'язком задачі Коші

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = p(t, x_1, x_2)x_2 - \frac{10x_1}{\theta^2(t)} - \frac{3x_2}{\theta(t)}, \\ \dot{\theta} = -\frac{20x_1^2 + 6x_1x_2\theta + x_2^2\theta^2 - p(t, x_1, x_2)(2x_1x_2\theta^2 + x_2^2\theta^3)}{20x_1^2 + 6x_1x_2\theta + x_2^2\theta^2}, \\ x_1(0) = x_1^0, \quad x_2(0) = x_2^0, \quad \theta(0) = \Theta_0. \end{cases}$$

Робота виконана за підтримки гранту від фонду імені Н. І. Ахієзера.

1. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Математический сборник. — 1979. — 109. — №. 4 (8). — С. 582-606.
2. Чоке Риверо А. Е., Коробов В. И., Скорик В. А. Функция управляемости как время движения. I // Журнал математической физики, анализа, геометрии. — 2004. — 11, №. 2. — С. 208-225.
3. Korobov V.I., Revina T.V. On perturbation range in the feedback synthesis problem for a chain of integrators system // IMA J. Math. Control and Information. — 2021. — 38, No. 1. — pp. 396-416, <https://doi.org/10.1093/imamci/dnaa035>

Про впровадження проєкту “Оновлена інформатика – ІТ-студії” у загальноосвітніх закладах України

Косован Василь

v.kosovan@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна

Ще у грудні 2021 року Міністерством освіти і науки та Міністерством цифрової трансформації було ініційовано оновлення шкільного курсу з «Інформатики» відповідно до концептуальних засад Нової української школи (в межах реформи ІТ-освіти в Україні). Мета цього проєкту (названого спочатку "Інформатика NewG") — оновити та осучаснити навчання інформатики в середній школі, модернізувати системи підготовки ІТ-фахівців "від школи до аспірантури" забезпечити ІТ-індустрію висококваліфікованими спеціалістами [1].

Наприкінці травня 2022 року даний проєкт, який впроваджувався програмою EU4DigitalUA в межах другого компоненту «Інституційне зміцнення та розвиток потенціалу» (FIPAPP) та фінансувався ЄС, відновили — провели добір вчителів інформатики та закладів освіти, які висловили бажання апробувати новий зміст та ресурси у 2022–2023 навчальному році[2].

У пілоті взяли участь 50 шкіл, яких відібрали з 405 заявок, створили валідну вибірку за такими критеріями: максимальне покриття всіх областей України, розподіл закладів за кількістю учнів, місцем розташування, формою власності, профілізацією тощо. Загалом до пілотування залучили більш як 3000 учнів під керівництвом 73 вчителів інформатики.

Пілотування курсу оновленої інформатики тривало з вересня 2022 по червень 2023 року. Матеріали розміщувалися, модерувалися на платформі "Всеукраїнська школа онлайн". Ці ресурси допомагали, зокрема, готуватися вчителю до занять, учневі ж навчатися, опрацьовуючи, матеріал, який він здатен опанувати як в синхронному, так і в асинхронному режимі, в класі, або самотійно. Кількість годин на кожен з модулів змістової лінії визначав вчитель. Варто відзначити плідну співпрацю з Харківським, Одеським і Львівським ІТ-кластерами. Їхні представники надавали зворотний зв'язок, технічну експертизу з окремих тем і створили декілька навчальних відео, надавали власні навчальні ресурси.

Однією із основних ідей при пілотуванні була реалізація академічної свободи викладача, а саме: можливість регулювати кількість навчальних годин, відведених на кожне із запропонованих в ІТ-студіях занять, не залежно від навчальної програми. У результаті вчителі отримали не матеріали під конкретну навчальну програму, а уніфіковані рекомендації для навчання. Автори проєкту виділили п'ять напрямів, за якими структурували ресурси. Це аналоги розділів навчальної програми:

- "Цифрова грамотність";
- "Медіаторчість";
- "Обчислювальне мислення та програмування";
- "Аналіз даних та моделювання";
- "Цифрове громадянство".

При пілотуванні проекту оновленої інформатики було доопрацьовано навчальну програму, зокрема додано більше інтерактивних і різнорівневих завдань, виділено роль теоретичних обґрунтувань при проведенні практичних досліджень та навчальних проєктів, презентовано навчальні відео. [3, 4].

Наразі освітні ресурси «Оновленої інформатики — ІТ-студії» розміщуються на окремому модулі платформи «Дія.Освіта» [5] та до кінця осені 2023 плануються бути відмасштабовані для всіх загальноосвітніх закладів України. На думку ініціаторів запуску програми, це допоможе покращити функціонал, інклюзивність, навігацію ресурсами та інтеграцію різнорівневих завдань.

1. МОН та Мінцифри розпочинають роботу над реформуванням ІТ-освіти. URL: <https://mon.gov.ua/ua/news/mon-ta-mincifri-rozpochinayut-robotu-nad-reformuvannjam-it-osviti>.
2. Про пілотування оновленого змісту інформатичної освіти: Наказ Міністерства освіти і науки України від 2.12.2022 №1089. URL: <https://mon.gov.ua/ua/npa/pro-pilotuvannya-onovlenogo-zmistu-informatichnoyi-osviti>.
3. Більше ігор, інтерактиву та рефлексії. Школярам почали викладати оновлену «Інформатику» — як виглядає новий курс. DOU: Спільнота програмістів. URL: <https://dou.ua/lenta/articles/updated-informatics-2023/>.
4. ІТ-студії на уроках інформатики: як зміниться шкільна інформатика з 1 вересня? Освіторія. Медіа. URL: <https://osvitoria.media/experience/it-studiyi-na-urokah-informatyky-yak-zminytsya-shkilna-informatyka-z-1-veresnya/>.
5. Що таке оновлена інформатика? URL: <https://osvita.diia.gov.ua/it-studios>.

Моделювання SIR моделей для прогнозування поширення COVID-19

Косович Ігор, Щур Тетяна, Щур Олександр

kosovych.igor@chnu.edu.ua, lunyk.tetiana@chnu.edu.ua,
shchur.olexandr@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

При моделюванні інфекційних захворювань популярними є класичні SIR-моделі [1]. За останній час розроблені нові способи імітаційного моделювання інфекцій за допомогою методу клітинних автоматів, де є набір агентів, які моделюють рух індивідів що можуть перебувати у різних станах. При такому моделюванні важливим є застосування компенсаторного вивчення [2] поширення вірусу. Розглядається метод "Multi-agent reinforcement learning" для моделювання взаємодії в динамічному середовищі.

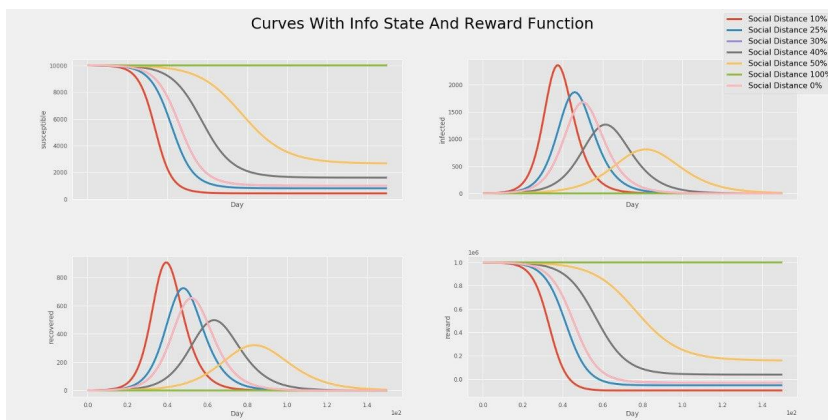


Рис. 1. Динаміка різних обмежень соціальної дистанції на різні криві

На рис. 1 наведено розглянуті стратегії на різні криві захворювань, щоб побачити, як вони вирівнюються і в якому форматі. Без жодних витрат на впровадження соціального дистанціювання найкращим варіантом є виконання 100% соціального дистанціювання. При зменшенні соціального дистанціювання до 50% крива не має високого піку і є досить згладженою. Для практичної стратегії потрібно розглядати 10%, 25% та 30% соціального дистанціювання.

Математичні моделі динаміки інфекційних хвороб детально проаналізовані в наукових дослідженнях [1]-[3]. Як правило, SIR моделі – системи диференціальних рівнянь, що описують поширення захворювання в популяції розміру N , які мають три відділи, кожен з яких є функцією часу t : $S(t)$ – кількість осіб, які ще не інфіковані, $I(t)$ – кількість інфікованих осіб, а $R(t)$ – кількість осіб, які одужали від захворювання та мають імунітет. Вважаємо, що хвороба має інкубаційний період вірусу $\tau_1 > 0$, а період відновлення $\tau_2 > 0$.

Динаміка такого процесу описується системою із запізненням [4]:

$$\frac{dS}{dt} = -bS(t - \tau_1)I(t - \tau_1),$$

$$\frac{dI}{dt} = bS(t - \tau_1)I(t - \tau_1) - gI(t - \tau_2) - aI(t),$$

$$\frac{dR}{dt} = gI(t - \tau_2).$$

Наближений розв'язок розглянутої SIR моделі із запізненнями одержаний за допомогою модифікованого ітераційного методу Ейлера з початковими умовами $y_1(0) = 5$, $y_2(0) = 1$, $y_3(x) = 0$ при $t \geq 0$ та параметрами $h = 0.1$, $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 10$.

Із отриманих числових експериментів [5] можемо зробити висновок, що періодичні спалахи інфекції (при фіксованому інкубаційному періоді $\tau_1 = 1$) виникають, якщо імунітет втрачається за час $\tau_2 \geq 7$. Епідемія стабілізується, якщо $\tau_2 \leq 6$. Аналіз математичних моделей біології, екології, медицини показав, що введення в них запізнення дозволяє зробити їх адекватними до реальних процесів.

1. N. Bacaër. McKendrick and Kermack on epidemic modelling (1926-1927) // A Short History of Mathematical Population Dynamics. Springer, London, 2011. – P. 89-96.
2. Gupta T., Sycara K. A brief survey of deep multi-agent reinforcement learning // Proceedings of the 2nd International Conference on Intelligent Autonomous Systems and Networks (IASN), 2020. – P. 1-6.
3. Fathalla A. Rihan. Delay Differential Equations and Applications to Biology // Springer, 2021. – 303 p.
4. Ebraheem H., Alkhateeb N., Badran H., Sultan E. Delayed Dynamics of SIR Model for COVID-19 // Open Journal of Modelling and Simulation, 2021. – No9. – P. 146-158.
5. І.Т. Косович, Т.В. Щур, І.М. Черевко. Математичне та імітаційне моделювання епідеміологічних процесів // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наукових праць. Кам'янець-Подільський, 2022. – Вип. 23. – С. 49-57.

Про один критерій рівномірного розподілу послідовностей заданих в термінах Q_s -представлення дійсних чисел

Кривошия Ростислав

vikasvat2013@gmail.com

Кривницький будівельний фаховий коледж

Послідовність (x_n) називається рівномірно розподіленою, якщо для довільного інтервалу $(a; b) \subset [0; 1]$ виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n((a; b))}{n} = b - a,$$

де $N_n((a; b))$ — кількість чисел серед $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}$, які належать інтервалу $(a; b)$.

Нехай $(q_0; q_1; \dots; q_{s-1})$ — стохастичний вектор з строго додатними координатами. Відомо [3], що для довільного дійсного числа $x \in [0; 1]$ існує нескінченний вектор $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n; \dots)$ кожна координата якого належить множині $\{0; 1; \dots; s-1\}$ такий, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \beta_{\alpha_3} q_{\alpha_2} q_{\alpha_1} + \dots + \beta_{\alpha_{n+1}} q_{\alpha_n} q_{\alpha_{n-1}} \dots q_{\alpha_1} + \dots, \quad (1)$$

де $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0, \dots, \beta_{s-1} = q_0 + \dots + q_{s-2}$.

Представлення (1) називається Q_s -представленням числа x і має наступне зображення:

$$x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}$$

Розглянемо наступний оператор зсуву:

$$T(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n \dots}^{Q_s}$$

Позначимо

$$T_n(x) = \underbrace{T(T(\dots T(x)))}_n$$

Теорема 1. *Послідовність $(T_n(x))$ рівномірно розподілена тоді і тільки тоді, коли існує стала C така, що для кожної інтегрованої за Ріманом функції $f(t)$ виконується умова:*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{j=1}^n f(T_j(x))}{n} \leq C \int_0^1 f(t) dt.$$

1. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.
2. Borel.E Les probabilies denombrables et leurs applications arithmetiques. — Rend. Circ. Mat. Palermo. — 1909. — №28. — P. 247-271.

3. De Bruijn N.G., Post K. A. A remark on uniformly distributed sequences and Riemann integrability. – *Indag. Math.* – 1968. – №30. – P.149-150.
4. Weil.H. Über die Gibbsche Erscheinung und verwandte Konvergenzphänomene. – *Rend. Circ. Math. Palermo.* – 1910. – №30. – P. 377-407.
5. Niven I., Zuckerman H.S. On the definition of normal numbers. – *Pacific J. Math.* – 1951. – №1. – P. 103-109.

Задача з інтегральними умовами для одного узагальненого рівняння Трікомі в смузі

Кузь Антон

kuz.anton87@gmail.com

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України

В області

$$D := \{(x, y) : x \in (-M, L), y \in \mathbb{R}\}, \quad M, L > 0,$$

розглядаємо задачу знаходження майже періодичного за змінною y із заданим спектром \mathcal{M} ,

$$\mathcal{M} := \{\mu_k \in \mathbb{R} : d_1 |k|^{\sigma_1} \leq |\mu_k| \leq d_2 |k|^{\sigma_2}, \mu_{-k} = \mu_k, k \in \mathbb{Z}\}$$

розв'язку $u := u(x, y)$ рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 x^n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1)$$

з інтегральними умовами за змінною x вигляду

$$\int_{-M}^L x^{r_1} u(x, y) dx = \varphi_1(y), \quad \int_{-M}^L x^{r_2} u(x, y) dx = \varphi_2(y), \quad (2)$$

де $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}_+$, $r_2 > r_1$; функції φ_1, φ_2 — є майже періодичними зі спектром \mathcal{M} ,

$$\varphi_j(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k y), \quad j = 1, 2.$$

В роботі встановлено умови однозначної розв'язності задачі (1), (2) у просторах типу Соболева майже періодичних за змінною y функцій та побудовано розв'язок задачі у вигляді ряду. Виділено випадки, коли розв'язність задачі (1), (2) пов'язана з проблемою малих знаменників [1].

1. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я, Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. — К.: Наукова думка, 2002. — 416 с.

Регулярність лінійних розширень динамічних систем на торі з виродженою матрицею

Кулик Віктор¹, Кулик Ганна², Степаненко Наталія³

¹viktor.kulyk@polsl.pl, ²ganna_1953@ukr.net,

³nataliya.stepanenko@111.kpi.ua

¹Сілезький Технічний Університет, Глівіце (Польща)

^{2,3}Національний Технічний Університет України «КПІ» імені І.Сікорського, Київ

Питання регулярності лінійних розширень динамічних систем на торі є дуже важливим, оскільки з допомогою таких систем описуються багаточастотні нелінійні коливання, які виникають в багатьох задачах математичної фізики.

В запропонованій доповіді будемо розглядати питання існування функції Гріна-Самойленка системи диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x \quad (1)$$

з тотожно виродженою матрицею $A(\varphi)$. Це питання пов'язане з існуванням експоненціально дихотомічних на всій осі $R = (-\infty, +\infty)$ лінійних нестационарних систем диференціальних рівнянь $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ зі змінною матрицею $A(t)$ неперервною і обмеженою на R такою, що $\det A(t) \equiv 0 \quad \forall t \in R$. Очевидно, при постійній матриці $A(t) = A$, для якої $\det A = 0$, система $\frac{dx}{dt} = Ax$ не буде експоненціально дихотомічною. Простим прикладом експоненціально дихотомічної нестационарної лінійної системи з виродженою матрицею може служити наступна

$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & (\sin 2t - 1) \\ (\sin 2t + 1) & -\cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, а регулярним лінійним розширенням (1) з тотожно виродженою матрицею $A(\varphi) \in$ наступне $\frac{d\varphi}{dt} = 5, \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (3\cos 2\varphi + 4\sin 2\varphi) & (-4\cos 2\varphi + 3\sin 2\varphi - 5) \\ (-4\cos 2\varphi + 3\sin 2\varphi + 5) & (-3\cos 2\varphi - 4\sin 2\varphi) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Розглядаючи в системі (1) більшу розмірність ніж 2 нормальних змінних x , виникло питання: чи можливий випадок, коли $\text{rang} A(\varphi) \equiv 1$ і при цьому система (1) є регулярною? На це питання можна дати позитивну відповідь.

Приведемо приклад.

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = [L(\varphi) J L^{-1}(\varphi)] x \quad (2)$$

де $a(\varphi) \in C_{Lip}(T_1)$, $x \in R^3$,

$$L(\varphi) = \begin{bmatrix} (1 + \sqrt{2}\cos\varphi) & 2\sin\varphi & (1 - \sqrt{2}\cos\varphi) \\ 2\sin\varphi & -2\sqrt{2}\cos\varphi & -2\sin\varphi \\ (1 - \sqrt{2}\cos\varphi) & -2\sin\varphi & (1 + \sqrt{2}\cos\varphi) \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Доведено, що система (2) має єдину функцію Гріна-Самойленка при кожній фіксованій скалярній функції $a(\varphi)$, яка не приймає нульових значень.

Досліджуючи властивість регулярності наступної системи диференціальних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi_1}{dt} = a_1(\varphi_1, \varphi_2), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = a_2(\varphi_1, \varphi_2), \end{array} \right. \frac{dx}{dt} = [L(\varphi_1, \varphi_2) J L^{-1}(\varphi_1, \varphi_2)] x, \quad x \in R^4, \quad (3)$$

$$a_j(\varphi_1, \varphi_2) \in C_{Lip}(T_2), \quad J = \text{diag}\{1, 0, 0, 0\}, \quad L(\varphi_1, \varphi_2) = L_1(\varphi_1) + L_2(\varphi_2),$$

$$L_1(\varphi_1) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \\ \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & -\cos\varphi_1 \end{bmatrix},$$

$$L_2(\varphi_2) = \begin{bmatrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 \\ \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \\ -\cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & -\cos\varphi_2 \end{bmatrix},$$

доведено наступне твердження.

Теорема. Якщо в системі (3) скалярні функції $a_j(\varphi_1, \varphi_2)$ задовольняють одночасно двом нерівностям $\begin{cases} a_1(\varphi_1, \varphi_2) + a_2(\varphi_1, \varphi_2) > 0, \\ a_1(\varphi_1, \varphi_2) \cdot a_2(\varphi_1, \varphi_2) < 0, \end{cases}$ то система (3) матиме єдину функцію Гріна-Самойленка.

Зауваження. Змінні матриці $L_1(\varphi_1)$, $L_2(\varphi_2)$ такі, що $L_1(\varphi_1) \cdot L_2(\varphi_2) \equiv L_2(\varphi_2) \cdot L_1(\varphi_1) \equiv 0$, $(L_1(\varphi_1) + L_2(\varphi_2))^2 \equiv 4 \text{diag}\{1, 0, 0, 0\}$ і обернена матриця записується у вигляді $L^{-1}(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \frac{1}{4} L(\varphi_1, \varphi_2)$.

Як наслідок приведені теорема приведемо приклад регулярної на R лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(t)x$, $x \in R^4$, всі нетривіальні розв'язки якої експоненціально затухають до нуля на $-\infty$ і зростають на $+\infty$ і при цьому $\text{rang } A(t) \equiv 1$.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 & \sigma_1\sigma_3 & \sigma_1\sigma_4 \\ \sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \sigma_2\sigma_3 & \sigma_2\sigma_4 \\ \sigma_3\sigma_1 & \sigma_3\sigma_2 & \sigma_3^2 & \sigma_3\sigma_4 \\ \sigma_4\sigma_1 & \sigma_4\sigma_2 & \sigma_4\sigma_3 & \sigma_4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

де позначено $\sigma_1 = \cos mt + \cos nt$, $\sigma_2 = \sin mt - \sin nt$, $\sigma_3 = \cos mt - \cos nt$, $\sigma_4 = \sin mt + \sin nt$, m, n – натуральні числа для яких виконується нерівність $m - n > 0$.

1. Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko, V. L. Kulyk Dichotomies and stability in nonautonomous linear systems, Taylor & Francis Inc, London 2003
2. Кулик В.Л., Кулик Г.М., Степаненко Н.В. Про деякі конструкції регулярних лінійних розширень динамічних систем на торі. // Нелінійні коливання, 2023, т.26. №1. -С.77-94

Про необхідні умови існування та асимптотику одного класу розв'язків деякого диференціального рівняння другого порядку

Кусік Людмила

1k09032017@gmail.com

Одеській національний морський університет

Розглядаємо диференціальне рівняння

$$y'' = f(t, y, y'), \quad (1)$$

де $f : [a, \omega[\times \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною функцією, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Δ_{Y_i} ($i \in \{0, 1\}$) - односторонній окіл Y_i і Y_i ($i \in \{0, 1\}$) є або 0 або $\pm\infty$. Будемо вважати, що числа, задані формулою

$$\mu_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } Y_i = +\infty \text{ або } Y_i = 0 \text{ і } \Delta_{Y_i} - \text{правий окіл } 0, \\ -1, & \text{якщо } Y_i = -\infty \text{ або } Y_i = 0 \text{ і } \Delta_{Y_i} - \text{лівий окіл } 0, \end{cases}$$

задовольняють нерівності

$$\mu_0 \mu_1 > 0 \text{ при } Y_0 = \pm\infty \text{ і } \mu_0 \mu_1 < 0 \text{ при } Y_0 = 0. \quad (2)$$

Рівняння (1) будемо досліджувати на одному класі розв'язків (див. [1]).

Означення 1. Розв'язок у рівняння (1), що визначений на проміжку $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, називаємо $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком, де $-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$, якщо виконано наступні умови

$$y^{(i)}(t) \in \Delta_{Y_i} \quad \text{при } t \in [t_0, \omega[\text{ , } \lim_{t \uparrow \omega} t \uparrow \omega y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{[y'(t)]^2}{y(t)y''(t)} = \lambda_0.$$

В залежності від λ_0 ці розв'язки мають різні властивості. А саме, в [1] встановлено, що

$$\text{для } \lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1},$$

$$\text{для } \lambda_0 = 1 \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = \pm\infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = \pm\infty,$$

$$\text{для } \lambda_0 = \pm\infty \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = 0,$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

При певних умовах на функцію f рівняння (1) може бути подане близьким до двочленного.

Означення 2. Ми говоримо, що функція f задовольняє умову $(FN1)_{\lambda_0}$ для $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, якщо існує число $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, неперервна функція $p : [a, \omega[\rightarrow$

$]0, +\infty[$ і двічі неперервно диференційована функція $\varphi_1 : \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$, що задовольняє умови

$$\varphi_1'(w) \neq 0, \quad \lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \varphi_1(w) = \varphi_1 \in \{0, +\infty\}, \quad \lim_{\substack{w \rightarrow Y_1 \\ w \in \Delta_{Y_1}}} \frac{\varphi_1(w)\varphi_1''(w)}{(\varphi_1'(w))^2} = 1,$$

такі, що для довільних неперервно диференційованих функцій $z_i : [a, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}$ ($i = 0, 1$), для яких

$$\lim_{t \uparrow \omega} z_i(t) = Y_i \quad (i = 0, 1),$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)z_0'(t)}{z_0(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 - 1}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)z_1'(t)}{z_1(t)} = \frac{1}{\lambda_0 - 1}.$$

має місце зображення

$$f(t, z_0(t), z_1(t)) = \alpha_0 p(t) \varphi_1(z_1(t)) [1 + o(1)] \quad \text{при } t \uparrow \omega.$$

В силу $(FN)_{\lambda_0}$ знак другої похідної будь-якого $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язку (1) у деякому околі ω співпадає з α_0 . Тому з урахуванням (2), маємо

$$\alpha_0 \mu_1 > 0 \quad \text{при } Y_1 = \pm\infty \quad \text{і} \quad \alpha_0 \mu_1 < 0 \quad \text{при } Y_1 = 0, \quad (3)$$

Користуючись властивостями класу $\Gamma_{Y_1}(Z_1)$ (див. [2]), тут встановлено необхідні умови існування та асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків диференціального рівняння (1) у випадку, коли виконано нерівності (2), (3) та функція f задовольняє умову $(FN1)_{\lambda_0}$ для $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

1. Евтухов В.М. Асимптотическое поведение решений одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка типа Эмдена - Фаулера.: дис. ... канд. физ. -мат. наук: 01.01.02. Одесса, 1980. – 154 с.
2. Черникова А.Г. Асимптотична поведінка розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з швидко змінними нелінійностями.: дис. ... канд. физ. -мат. наук: 01.01.02. Одеса, 2019. – 156 с.

Онлайн калькулятор розрахунку необхідної товщини теплової ізоляції для будівельних конструкцій та трубопроводів

Кушнірчук Василь, Кушнірчук Володимир

v.kushnirchuk@chnu.edu.ua, vovak@com.cv.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Більшість практичних задач прийняття оптимальних рішень є багатокритеріальними. Такими, зокрема, є задачі, які описують економічні, еколого-економічні, соціальні, механічні процеси. Ці задачі виникають у тих випадках, коли необхідно одним актом прийняття рішень домогтися найкращого, у певному розумінні, виконання кількох, можливо таких, що протирічать один одному, критеріїв. З математичної точки зору задачі багатокритеріальної оптимізації є природним узагальненням звичайних задач оптимізації.

В цих задачах розв'язок вважається оптимальним (ефективним чи Парето-оптимальним), якщо будь-який з критеріїв можна покращити лише за рахунок погіршення значень решти критеріїв [1, 3].

Більшість відомих підходів до розв'язування задачі багатокритеріальної оптимізації базується на її зведенні до задачі нелінійного програмування. Одним з основних методів такого типу є метод згорток, в якому всі критерії згортаються в один критерій. Використовуються також мультиплікативні згортки, методи поступок, цільового програмування та інші методи.

Процес розв'язання задачі, очевидно, залежить від конкретизації тих функцій, що формують задачу. У певних випадках можна застосувати метод візуалізації множини досяжних оцінок і виділення її межі, яка буде містити множини ефективних оцінок. Такий підхід був реалізований при розробці онлайн калькулятора розрахунку необхідної товщини теплової ізоляції для будівельних конструкцій та трубопроводів. Розроблений калькулятор [4] обчислює значення необхідної товщини теплоізоляції:

- для будівельних конструкцій – з урахуванням температури навколишнього середовища, необхідної температури в приміщенні та характеристик кожного зі слоїв стіни;
- для трубопроводів – з урахуванням температури на поверхні ізоляції, температури теплоносія в трубопроводі, внутрішнього діаметру трубопроводу, а також характеристик стінок трубопроводу (товщини та їх матеріалу) над та під теплоізоляційним матеріалом.

1. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Теорія прийняття рішень: Навчальний посібник. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2010. – 336 с.
2. Кушнірчук В.В., Кушнірчук В. Застосування сучасних комп'ютерних технологій при підготовці фахівців економічних спеціальностей // Праці наукового товариства ім.Шевченка. Том II. Комп'ютерно-орієнтовані технології. Матеріали Косівського осередку НТШ. – Косів, 2005. – С. 39–40.
3. Червак Ю.Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. – Ужгород. Ужгородський Національний університет, 2002. – 312 с.
4. Розрахунок товщини теплоізоляції. URL: <https://rotys.com/calculate-en>.

Розробка навчальної онлайн платформи для Чернівецького регіонального центру підвищення кваліфікації

Кушнірчук Володимир

vovak@com.cv.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

При впровадженні карантинних заходів, пов'язаних з пандемією Covid-19, Чернівецький регіональний центр підвищення кваліфікації (ЧРЦПК) [1] зіштовхнувся з необхідністю організації процесу дистанційного навчання та тестування слухачів курсів, що пропонує центр. Впродовж деякого часу ЧРЦПК проводив діяльність використовуючи загальнопоширені платформи. Але пізніше виникли деякі унікальні вимоги, які або не вирішувалися зазначеними засобами, або процес зводився до одночасного використання багатьох платформ, кожна з яких вирішувала певний сектор завдань. Але їх адміністрування і керування вимагало значних трудовитрат.

Для подолання цих проблем автором був проведений аналіз поточного процесу навчання та запропоновано розробку власної навчальної онлайн платформи для ЧРЦПК. В розробленій пропозиції та проєкті технічного завдання на розробку програмного продукту було показано оптимальність запропонованого варіанту розробки нового програмного продукту, що вирішив би основні проблеми центру, зробив обслуговування комплексу централізованим та швидким, а в перспективі надав би можливість розширення експлуатаційних можливостей комплексу.

В результаті було розроблено систему [2], якимістить такі основні частини:

1. Вітальна частина – головна сторінка та сторінки з презентаціями курсів і можливістю їх адміністрування (рис. 1).
2. Адміністративна частина включає:
 - (a) Керування групами користувачів та їх користувачами - дозволяє проводити редагування персональних даних, призначення курсів для навчання, тощо.
 - (b) Керування курсами (асинхронне, онлайн та оф-лайн навчання) надає можливість гнучкого управління контентом курсів - створення навчальних матеріалів та їх вмісту різних типів:
 - форматований текст;
 - прикріплені файли;
 - інтеграція відео навчань;
 - тестування різних типів і характеристик (рис.5), з можливістю різної алгоритмізації (навігація по матеріалах та присвоєння навчальних балів) при вірних/невірних відповідях на тестування;
 - практичні завдання з перевіркою адміністратором (зі сповіщеннями для останнього) та аналогічною алгоритмізацією, призначення слухачів курсів та календарних обмежень на проведення навчання, тощо.
 - (c) Керування сертифікатами – функціонал генерації сертифікатів для користувачів, які успішно завершили навчання.

- (d) Пошукові системи та оптимізація навігації по курсах та користувачах.
- (e) Аналітична система – дозволяє в деталях відслідковувати поведінку кожного слухача при проходженні курсу (дата, час та тривалість ознайомлення з матеріалами або проходження тестів/практичних завдань, надані відповіді та інша повна деталізація).

3. Користувачька частина – дозволяє авторизованим користувачам проходити призначені адміністратором курси згідно описаного вище алгоритму та отримувати електронні сертифікати про проходження навчання.

Розроблена навчальна онлайн платформа була передана в експлуатацію ЧР-ЦПК та активно використовується для організації навчального процесу та супутніх потреб Центру. Здійснюється постійна підтримка щодо розширення можливостей програмного комплексу та формуються подальші плани з розвитку ПЗ.

Висновок: сучасні засоби дозволяють якісно проектувати, алгоритмізувати та вирішувати актуальні завдання, з врахуванням викликів сьогодення. Головне – до процесу потрібно підходити з ініціативою та творчо, повністю віддаватися цьому процесу, що забезпечить результати, які вирішують поставлені завдання та професійну насолоду розробнику та зручність користувачам.

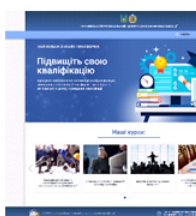


Рис. 1. Вітальна частина



Рис. 2. Призначення курсів користувачам

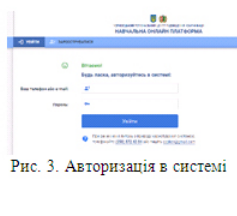


Рис. 3. Авторизація в системі



Рис. 4. Аналітична система

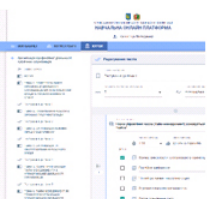


Рис. 5. Керування тестуваннями



Рис. 6. Керування матеріалами

1. Чернівецький регіональний центр підвищення кваліфікації. URL: <http://cpprk.cv.ua/>.
2. Чернівецький регіональний центр підвищення кваліфікації. Навчальна онлайн платформа. URL: <https://study.cpprk.cv.ua/>.

**Задача оптимального керування для систем
інтегро-диференціальних рівнянь**

Ляхва Роксолана, Халецька Зоя

roksolanalahva@knu.ua, khaletskazoya@gmail.com

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
Центральноукраїнський державний університет імені Володимира
Винниченка*

Розглядається задача оптимального керування системою інтегро-диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = \begin{cases} f_1(t, x) + f_2(t, x)u(t) + \int_0^t f_3(t, s, x)u(s)ds, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1)$$

з критерієм якості

$$J(u) = \int_0^\tau L(t, x(t), u(t))dt \rightarrow \inf, \quad (2)$$

на відрізку $[0, T]$, де $x_0 \in D$ - фіксований вектор, $x \in D$ - фазовий вектор, D - деяка область в \mathbb{R}^d , ∂D - межа D , $\bar{D} = D \cup \partial D$, $\tau = \tau(u)$ - момент першого виходу розв'язку, $x(t) = x(t, u)$ на ∂D , $u \in U \subset \mathbb{R}^m$ - вектор керування, U - опукла, замкнена множина в \mathbb{R}^m і $0 \in U$. Нехай виконуються наступні умови:

А) вектор-функція $f_1(t, x) : [0, T] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^d$, матриця $f_2(t, x) : [0, T] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ і матриця $f_3(t, s, x) : [0, T] \times [0, T] \times \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ - неперервні за сукупністю змінних.

В) окрім того, у випадку необмеженої області D виконуються ще й наступні умови для функцій $f_1(t, x)$, $f_2(t, x)$, $f_3(t, s, x)$, а саме $C > 0$ таке, що для довільних $t, s \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$:

$$|f_1(t, x)| \leq C(1 + |x|), \quad (3)$$

$$\|f_2(t, x)\| \leq C(1 + |x|), \quad (4)$$

$$\|f_3(t, s, x)\| \leq C(1 + |x|). \quad (5)$$

Функції $L(t, x, u)$, $L_x(t, x, u)$ і $L_u(t, x, u)$ є неперервними за сукупністю змінних для будь-яких $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$, $u \in U$ і задовольняють наступні умови:

1) існують такі $k > 0$, $p > 1$, що виконується нерівність

$$L(t, x, u) \geq k|u|^p, \quad (6)$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$, $u \in U$;

2) існують такі $K > 0$ та $\alpha > 0$, що

$$|L_x(t, x, u)| + |L_u(t, x, u)| \leq K(1 + |u|^{p-1} + |x|^\alpha), \quad (7)$$

для $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$, $u \in U$.

3) $L(t, x, u)$ опукла по u для будь-яких фіксованих $t \in [0, T]$, $x \in \bar{D}$.

Керування $u(t)$ вважають допустимим, якщо:

a1) $u(t) \in L_p([0, T])$, $\|u(\cdot)\|_p = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$,

a2) $u(t) \in U$, при $t \in [0, T]$.

Множину допустимих керувань позначатимемо через V .

Теорема. *Нехай для системи (1) з критерієм якості (2) виконуються умови A) у випадку обмеженості області D , а також B) у випадку необмеженої області, а також умови 1)-3). Тоді задача (1), (2) має розв'язок в класі допустимих керувань V , тобто існує оптимальне керування $u^*(t)$, що мінімізує критерій якості (2).*

Отже, основним результатом роботи є отримання достатніх умов оптимальності у термінах правих частин системи та функції L із критерія якості. При цьому момент закінчення процесу (момент виходу розв'язку на межу області) також залежить від керування, що суттєво ускладнює дослідження.

Ідея доведення існування оптимального керування у задачі (1)-(2) більш-менш стандартна і складається із трьох етапів:

- 1) виділення слабко збіжної мінімізуючої послідовності допустимих керувань;
- 2) доведення компактності множини відповідних траєкторій;
- 3) обґрунтування граничного переходу в рівняння і функціоналі якості.

Однак, на відміну від задач із фіксованим моментом закінчення процесу T тут виникає принципова складність: задача розглядається до моменту виходу τ розв'язку на межу розглядуваної області. При цьому даний момент виходу залежить від керування $\tau = \tau(u)$. Тому, фактично розв'язком задачі є трійка (u^*, x^*, τ^*) - оптимальне керування, оптимальна траєкторія та оптимальний момент виходу. Зазначимо, що частинним випадком даної задачі є задача найшвидшого виходу розв'язку на межу області $\tau \rightarrow \inf$ (якщо $L \equiv 1$).

Оскільки момент виходу $\tau = \tau(u)$ залежить від керування, то для доведення існування оптимального керування доводиться ще робити і граничний перехід у моменті виходу $\tau = \tau(u^{(n)})$, що є нетривіальною задачею.

Оптимальне керування еволюційними функціонально-диференціальними рівняннями на півосі

Латись Андрій, Кічмаренко Ольга

andrii.latysh@gmail.com, olga.kichmarenko@gmail.com

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

Розглянемо задачу оптимального керування еволюційним функціонально-диференціальним рівнянням в банаховому просторі на півосі:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= Au + f_1(t, u_t) + f_2(t, x_t)z(t), \\ u(t) &= \varphi_0(t), t \in (-h, 0] \end{aligned} \quad (1)$$

із критерієм якості

$$J[u] = \int_0^\tau (e^{-jt}G(t, u_t) + B(t, z(t))) dt \rightarrow \inf \quad (2)$$

або

$$J[u] = \int_0^\tau (e^{-jt}G(t, u_t) + \|z(t)\|^2 dt) \rightarrow \inf \quad (3)$$

Задача розглядається до моменту виходу розв'язку із деякої області банахового простору. Тут $h > 0$ – інтервал залізнення, $t \geq 0$, A – лінійний необмежений оператор в банаховому просторі $X (A : X \rightarrow X)$ з нормою $\|\cdot\|$, $u_t = u(t + \theta)$, $\theta \in [-h, 0]$ і всі $t \geq 0$, u_t належать простору $C = C([-h, 0], X)$ неперервних функцій із стандартною нормою $\|\varphi\|_C = \max_{\theta \in [-h, 0]} \|\varphi(\theta)\|$, D – деяка область в $[-h, \infty) \times C$, ∂D – межа цієї області і $\bar{D} = D \cup \partial D$. τ – момент першого виходу розв'язок (t, u_t) на ∂D . Відображення f_1 і f_2 визначені в D і $f_1 : D \rightarrow X$, $f_2 : D \rightarrow \mathcal{L}(X, X)$, де $\mathcal{L}(X, X)$ – простір лінійних обмежених операторів, які діють із X в X , з нормою $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, $z(t) \in X$ – параметр керування.

Розв'язок початкової задачі (1) будемо розуміти в сенсі м'якого розв'язку.

Доведено існування оптимальної пари для задач (1),(2) і (1),(3). Достатні умови носять коефіцієнтний характер, що робить їх зручними для перевірки.

В роботі [2] розглядалася аналогічна задача на скінченному інтервалі.

Встановлено варіаційні співвідношення, а саме, доведена слабка збіжність оптимальних керувань, сильна збіжність оптимальних траєкторій, збіжність критеріїв якості задач на скінченних інтервалах до відповідних оптимальних керувань, оптимальних траєкторій та критерія якості задачі на півосі при збільшенні довжини інтервала, на якому розглядається задача.

1. Hale J.K., *Theory of functional differential equations*, - New-York : Springer-Verlag, 1977 - 365 p.
2. Латиш А., Кічмаренко О. Оптимальне керування функціонально-диференціальними рівняннями параболічного типу в Банаховому просторі // Нелінійні коливання. 2023. - Т.26, № 1. - С. 95-112.
3. Kichmarenko O. and Stanzhytskyi O. Sufficient Conditions for the Existence of Optimal Controls for Some Classes of Functional-Differential Equations // Nonlinear dynamics and systems theory. 2018. – V.18, No 2. – P.196 211.

Розв'язування задач математичної фізики методом гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера на сегменті

Ленюк Олег¹, Нікітіна Ольга², Шинкарик Микола³

O.Lenjuk@chnu.edu.ua, o.nikitina.chv@gmail.com,
shynkaryk_m@ukr.net

¹ Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

² Чернівецький ліцей №1 математичного та економічного профілів

³ Західноукраїнський національний університет

На сучасному етапі науково-технічного прогресу, особливо у зв'язку з широким використанням композитних матеріалів, існує нагальна потреба у вивченні фізико-технічних характеристик таких матеріалів, що знаходяться в різних умовах експлуатації, що математично призводить до задач розв'язування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами.

Одним із ефективних методів побудови інтегральних зображень аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру задач математичної фізики неоднорідних середовищ є метод гібридних інтегральних перетворень [1].

Розглянемо задачу побудови обмеженого в області

$$D_2 = \{(t, r) : t > 0, r \in I_2\}, \quad I_2 = (0; R_1) \cup (R_1; R_2) \cup (R_2; R_3)$$

розв'язку сепаратної системи трьох диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\begin{aligned} L_t[u_1] + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\alpha_1}^*[u_1] &= f_1(t, r), \quad r \in (0; R_1), \\ L_t[u_2] + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{d^2}{dt^2}[u_2] &= f_2(t, r), \quad r \in (R_1; R_2), \\ L_t[u_3] + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 B_{\alpha_2}^*[u_3] &= f_3(t, r), \quad r \in (R_2; R_3), \end{aligned} \quad (1)$$

з відповідними початковими умовами, крайовими умовами та умовами спряження [2-3].

Тут беруть участь диференціальні оператори другого порядку Фур'є $\frac{d^2}{dt^2}$ Ейлера B_{α}^* [1-3].

Якщо $L_t = \frac{d}{dt}$, то ми маємо задачу теплопровідності або дифузії, якщо $L_t = \frac{d^2}{dt^2}$, то маємо задачу динаміки.

Усі параметри та оператори, які беруть участь у постановці крайової задачі для системи (1), описані у працях [1-3].

У статті [2] побудовані пряме та обернене гібридні інтегральні перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера, породжені на множині I_2 гібридним ди-

ференціальним оператором

$$M_{(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1-r)a_1^2 B_{\alpha_1}^* + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)a_2^2 \frac{d^2}{dr^2} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)a_3^2 B_{\alpha_2}^*,$$

доведена теорема про основну тотожність цього оператора.

Пряме гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера на трискладовому сегменті з двома точками спряження записується у вигляді операторної матриці-рядка. Вихідна система та початкові умови записуються в матричній формі, і ми застосовуємо операторну матрицю-рядок до заданої задачі за правилом множення матриць. При цьому використовуємо крайові умови та умови спряження.

В результаті отримуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого (для задачі дифузії) або другого (для задачі динаміки) порядку. Розв'язок такої задачі будується стандартним чином.

Обернене гібридне інтегральне перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера записується у вигляді операторної матриці-стовпця, і ми застосовуємо його до побудованого розв'язку задачі Коші. Після здійснення певних елементарних перетворень ми отримуємо єдиний розв'язок вихідної задачі.

Побудовані розв'язки крайових задач мають алгоритмічний характер, що дозволяє використовувати їх як у теоретичних дослідженнях, так і в числових розрахунках.

У праці [2] побудовано розв'язок задачі дифузії на трискладовому сегменті $[0; R_3]$ з двома точками спряження методом гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера.

У праці [3] побудовано розв'язок задачі динаміки на трискладовому сегменті $[0; R_3]$ з двома точками спряження методом гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера.

1. Ленюк М.П., Шинкарик М.І. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. Тернопіль: Економ. Думка, 2004. 368 с.
2. Нікітіна О.М. Інтегральне перетворення, породжене на сегменті $[0; R_3]$ гібридним диференціальним оператором Ейлера-Фур'є-Ейлера. Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. Чернівці: Прут, 2012. Вип. 21. С. 233-239.
3. Ленюк О.М., Нікітіна О.М., Шинкарик М.І. Моделювання динамічних процесів методом гібридного інтегрального перетворення типу Ейлера-Фур'є-Ейлера на сегменті // Прикладні питання математичного моделювання. Т.5, № 2. – Херсон: ХНТУ, 2022. – С. 27-32.

Об'ємний потенціал задачі Коші для параболічних рівнянь з від'ємним родом і змінними коефіцієнтами

Літовченко Владислав, Харина Денис

v.litovchenko@chnu.edu.ua, KhD01214@outlook.com

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\partial_t u(t; x) = \{A_0(t; i\partial_x) + A_1(t, x; i\partial_x)\}u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0; T]}, \quad (1)$$

в якому u – невідома функція, $\Pi_Q = \{(t; x) : t \in Q, x \in \mathbb{R}^n\}$, а

$$A_0(t; i\partial_x) = \sum_{|k| \leq p} a_{0,k}(t) i^{|k|} \partial_x^k, \quad A_1(t, x; i\partial_x) = \sum_{|k| \leq p_1} a_{1,k}(t; x) i^{|k|} \partial_x^k$$

– диференціальні вирази порядків відповідно p і p_1 . При цьому вважатимемо, що рівняння

$$\partial_t u(t; x) = A_0(t; i\partial_x)u(t; x), \quad (t; x) \in \Pi_{(0; T]}, \quad (2)$$

– параболічне за Шиловим на множині $\Pi_{[0; T]}$ з показником параболічності h , $0 < h \leq p$, і родом $\mu < 0$, а порядок p_1 групи молодших членів рівняння (1) менший за h : $0 \leq p_1 < h$.

Крім цього, припускатимемо, що коефіцієнти $a_{0,k}(t)$ і $a_{1,k}(t; x)$ рівняння (1) на множині $\Pi_{[0; T]}$ неперервні за змінною t , нескінченно диференційовні за змінною x і обмежені разом зі своїми похідними комплекснозначні функції.

Нагадаємо, що рівняння (2) на множині $\Pi_{[0; T]}$ називається параболічним за Шиловим, або $\{p, h\}$ -параболічним, якщо

$$\exists \delta_0 > 0 \exists \delta \geq 0 \forall (t; \xi) \in \Pi_{[0; T]} : \operatorname{Re} A_0(t; \xi) \leq -\delta_0 \|\xi\|^h + \delta.$$

Функцією Гріна задачі Коші для $\{p, h\}$ -параболічного рівняння (2) позначимо через G :

$$G(t, \tau; x) = F^{-1}[\theta_\tau^t(\xi)](t, \tau; x),$$

де $\theta_\tau^t(\xi) = \exp\{\int_\tau^t A_0(\beta; \xi) d\beta\}$.

Властивості функції G досліджені в [3], зокрема там обґрунтовано правильність наступного твердження: для $\{p, h\}$ -параболічного рівняння (2) з родом $\mu < 0$ існують додатні сталі c , B і δ такі, що для всіх $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in [0; T)$ і $t \in (\tau; T]$ виконується оцінка

$$|\partial_x^k G(t, \tau; x)| \leq c B^{|k|} k^{\frac{k}{h}} (t - \tau)^{-\frac{n+|k|}{h}} e^{-\delta \frac{|x|^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}} \quad (3)$$

(*mut* $\widetilde{|x|^\lambda} := |x_1|^\lambda + \dots + |x_n|^\lambda$, $\lambda := \frac{1}{1-\mu/h}$ і $\gamma := \frac{1}{h-\mu}$).

Розглянемо об'ємний потенціал

$$W(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t, \beta; x - y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy,$$

з густиною

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = \sum_{l=1}^{\infty} K_l(t, x; \tau, \xi),$$

де

$$K_1 = A_1(t, x; i\partial_x)G(t, \tau; x - \xi),$$

$$K_l(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \beta, y) K_{l-1}(\beta, y; \tau, \xi) dy, \quad l > 1.$$

Гладкість та обмеженість коефіцієнтів рівняння (1) разом з оцінками (3) забезпечують на множині $\Pi_T^2 := \{(t, x; \tau, \xi) \mid 0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n\}$ нескінченну диференційовність за просторовими змінними повторних ядер K_l та їх експоненціальне спадання на нескінченності (деталі див. у [2]). Цей факт дозволяє обґрунтувати правильність такого твердження.

Теорема. *На множині Π_T^2 функція $W(t, x; \tau, \xi)$ нескінченно диференційовна за кожною просторовою змінною x і ξ , причому*

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \{r, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \quad \exists c > 0 \quad \forall (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2 :$$

$$|\partial_x^r \partial_x^q W(t, x; \tau, \xi)| \leq c(t - \tau)^{\gamma_0 - \frac{n+|r+q|}{h}} e^{-\delta \frac{\widetilde{|x-\xi|}^\lambda}{(t-\tau)^\gamma}}, \quad \gamma_0 := 1 - \frac{p_1}{h} > 0.$$

Ця функція також диференційовна за змінною t і є такою, що

$$\partial_t W(t, x; \tau, \xi) = \Phi(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t, \beta; x - y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy.$$

Подібні результати для рівнянь (1) з додатним родом μ одержано в [3].

1. Litovchenko V.A. Peculiarities of the Fundamental Solution of Parabolic Systems with a Negative Genus: Chapter of the monograph // Advances in the Solution of Nonlinear Differential Equations: IntelOpen-London, 2021.
2. Літовченко В.А., Харина Д.Д. Повторні ядра функції Гріна параболічних рівнянь типу Шилова зі змінними коефіцієнтами та від'ємним родом // Бук. мат. журн. - 2022. - 10, № 1. - С. 71-84.
3. Літовченко В.А. Системи Шилова у просторах типу S і S' : Монографія. - Чернівці: ЧНУ, 2019. - 280 с.

Обернена задача про визначення багатьох невідомих із розподілів типу Шварца

Лопушанська Галина, М'яус Ольга, Пасічник Олена

lhp@ukr.net, myausolya2016@gmail.com,

olena.pasichnyk@lnu.edu.ua

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,

Національний університет "Львівська політехніка", Львів, Україна

Нехай $Q = \mathbb{R}^n \times (0, T]$, $S(\mathbb{R}^n)$ – простір швидко спадаючих на безмежності нескінченно диференційовних функцій, $\gamma > 0$, $S_\gamma(\mathbb{R}^n)$ є простором типу $S(\mathbb{R}^n)$:

$$S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \leq C_\alpha e^{-a|x|^\frac{1}{\gamma}}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha\}$$

зі сталими $C_\alpha = C_\alpha(v) > 0$, $a = a(v) > 0$, $S_\gamma(\mathbb{R}^n) = \cup_{a>0} S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, де

$$S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in S(\mathbb{R}^n) : |D^\alpha v(x)| \leq C_{\alpha,\delta} e^{-(a-\delta)|x|^\frac{1}{\gamma}}, \forall \alpha, x \in \mathbb{R}^n, \delta > 0\}$$

зі сталими $C_{\alpha,\delta} = C_{\alpha,\delta}(v) > 0$, а також $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) = \{v \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|v\|_{k,(a)} = \sup_{|\alpha| \leq k, x \in \mathbb{R}^n} e^{a(1-\frac{1}{k})|x|^\frac{1}{\gamma}} |D^\alpha v(x)| < +\infty \forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2\}$, $S_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) = \{v \in C[0, T] : v|_{t=T} = 0, v(\cdot, t) \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n) \forall t \in [0, T]\}$.

Через E' позначаємо простір лінійних неперервних функціоналів на E , а через (f, φ) – значення розподілу $f \in E'$ на основній функції $\varphi \in E$,

$$S'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}) = \{f \in S'_{\gamma,(a)}(\bar{Q}) : (f(x, \cdot), \varphi(x)) \in C[0, T] \forall \varphi \in S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)\},$$

$f * g$ – згортка функцій f і g , $f_\lambda(t) = \begin{cases} \frac{\theta(t)t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, & \lambda > 0 \\ f'_{1+\lambda}(t), & \lambda \leq 0 \end{cases}$, де $\Gamma(\lambda)$ – гамма-функція, $\theta(t)$ – функція Хевісайда.

Похідну Рімана-Ліувіля $v^{(\beta)}(t)$ порядку $\beta > 0$ визначають формулою

$$v^{(\beta)}(t) = f_{-\beta}(t) * v(t),$$

а похідну Джрбашяна-Нерсесяна-Капуто дробового порядку порядку $\beta \in (0, 1)$ як

$$D^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{-\beta} v'(\tau) d\tau, \quad D^1 v = \frac{dv}{dt}.$$

Нехай $A(x, D)$ – лінійний еліптичний диференціальний вираз другого порядку, і далі вважаємо, що його коефіцієнти є мультиплікаторами у просторі $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ (добутки їх і всіх їхніх похідних із функціями з $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$ належать $S_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$), $\hat{A}(x, D)$ формально спряжений до $A(x, D)$ оператор,

$$C_{2,\beta}(\bar{Q}) = \{v \in C(\bar{Q}) : Av, D_t^\beta v \in C(Q)\}.$$

При $\beta \in (0, 1]$ вивчаємо обернену задачу

$$D_t^\beta u - A(x, D)u = \sum_{l=1}^m R_l(x)g_l(t) + F(x, t), \quad (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = F_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(x, t)\eta_l(t)dt = \Phi_l(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad l \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

про визначення набору функцій (u, R_1, \dots, R_m) , де g_l, Φ_l, η_l ($l \in \{1, \dots, m\}$), F, F_1 – задані функції.

Позначаємо $k_{l,j} = k_{l,j}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T g_l(s)\eta_j(s)ds$, $k_{l,j}^d$ – алгебричне доповнення до елемента $k_{l,j}$ матриці $(k_{l,j})_{l,j \in \{1, \dots, m\}}$.

Використовуємо властивості компонент вектор-функції Гріна задачі Коші [1], зокрема, оцінки, що містять множники $e^{-c(|x-y|(t-\tau)^{-\frac{\beta}{2}})^{\frac{2}{2-\beta}}}$, де, наприклад, $c < (2 - \beta) \left(\frac{\beta^\beta}{4}\right)^{\frac{1}{2-\beta}}$ у випадку оператора Лапласа.

Припущення (A):

$$\gamma \geq 1, \quad 0 < aT^{\frac{\beta}{2\gamma}} \leq c, \quad F \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}), \quad F_1, \Phi, A\Phi \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n),$$

$$g_j \in C[0, T], \quad \eta_j \in C^1[0, T], \quad j \in \{1, \dots, m\},$$

$$d(T) = \det(k_{l,j})_{l,j \in \{1, \dots, m\}} \neq 0,$$

функція $\frac{T}{d(T)} \sum_{l,j=1}^m \max_{\tau \in [0, T]} |g_j(\tau)| |k_{l,j}^d| \max_{s \in [0, T]} |\eta_l'(s)|$ обмежена монотонно

зростаючою функцією $D(T)$ на $[0, T_0]$ при деякому $T_0 < \left(\frac{c}{a}\right)^{2\gamma/\beta}$.

Теорема. *За припущення (A) існує таке число $T_1 \in [0, T_0]$, при якому обернена задача (1)-(3) однозначно розв'язна у просторі $\mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q}) \times [\mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)]^m$.*

Задача зводиться до розв'язування лінійного операторного рівняння другого роду стосовно невідомого розподілу $u \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a),C}(\bar{Q})$ і лінійної не-однорідної алгебричної системи рівнянь для знаходження виразів невідомих розподілів $R_j \in \mathcal{S}'_{\gamma,(a)}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \{1, \dots, m\}$ через нього.

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004.

Про загальні мішані задачі для параболічних за Петровським систем в узагальнених просторах Соболева

Лось Валерій

v_los@yahoo.com

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”

Останніми роками активно досліджуються параболічні крайові задачі в узагальнених анізотропних просторах Соболева $H^{s,s/(2b);\varphi}$. Регулярність розподілів, належних цим прострам, задається парою дійсних чисел $s, s/(2b)$ та функціональним параметром φ , який повільно змінюється на нескінченності за Карамата. Отримано теореми про ізоморфізми та глобальну і локальну регулярність узагальнених розв’язків задач. Результати у випадку крайової задачі для одного параболічного рівняння опубліковано в монографії [1]. Випадок параболічних систем диференціальних рівнянь другого порядку розглянуто в [2, 3]. Крайову задачу для загальних параболічних систем з однорідними початковими умовами досліджено в [4]. Доповідь присвячено теоремі про ізоморфізми для параболічних за Петровським систем довільного порядку з довільними крайовими умовами та неоднорідними початковими даними Коші. Ця теорема дає можливість дослідити властивості глобальної та локальної регулярності, встановити нові умови класичності узагальненого розв’язку задачі (1)–(3). Такі властивості розв’язків систем рівнянь другого порядку отримано в [3].

В циліндрі $\Omega := G \times (0, \tau)$ ($\tau > 0$) з основою $G \subset \mathbb{R}^n$ та бічною поверхнею $S := \Gamma \times (0, \tau)$ ($\Gamma := \partial G$) розглянемо початково–крайову параболічну за Петровським задачу для системи N диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{|\alpha|+2b\beta \leq 2b\kappa_k} a_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t) D_x^\alpha \partial_t^\beta u_k(x,t) = f_j(x,t) \quad (1)$$

в Ω для всіх $j \in \{1, \dots, N\}$,

$$\sum_{k=1}^N \sum_{\substack{|\alpha|+2b\beta \leq l_j+2b\kappa_k \\ l_j+2b\kappa_k \geq 0}} b_{j,k}^{\alpha,\beta}(x,t) D_x^\alpha \partial_t^\beta u_k(x,t)|_S = g_j(x,t) \quad (2)$$

при $x \in \Gamma, 0 < t < \tau$ для всіх $j \in \{1, \dots, m\}$,

$$\partial_t^r u_k(x,t)|_{t=0} = h_{r,k}(x) \quad \text{при } x \in G \quad (3)$$

для всіх $k \in \{1, \dots, N\}, r \in \{0, \dots, \kappa_k - 1\}$.

В цій задачі ми довільним чином вибрали натуральні числа $N \geq 2, b$ і $\kappa_1, \dots, \kappa_N$, поклали $m := b(\kappa_1 + \dots + \kappa_N)$ і вибрали ще m цілих чисел

l_1, \dots, l_m . Число $2b$ називається параболічною вагою даної задачі. Всі коефіцієнти $a_{j,k}^{\alpha,\beta}$ та $b_{j,k}^{\alpha,\beta}$ диференціальних виразів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями.

Покладемо $u := (u_1, \dots, u_N)$, $f := (f_1, \dots, f_N)$, $g := (g_1, \dots, g_m)$, $h := (h_{0,1}, \dots, h_{\varkappa_N-1,N})$, $\sigma_0 := \max\{0, l_1 + 1, \dots, l_m + 1\}$. Нехай $s > \sigma_0$ і

$$s \notin E := \{(2l + 1)b + l_j + 1/2 : j, l \in \mathbb{Z}, 1 \leq j \leq m, l \geq 0\} \cap (\sigma_0, \infty).$$

Через $\mathcal{G}^{s,s/(2b);\varphi}$ позначимо підпростір гільбертового простору

$$\begin{aligned} & (H^{s,s/(2b);\varphi}(\Omega))^N \oplus \bigoplus_{j=1}^m H^{s-l_j-1/2,(s-l_j-1/2)/(2b);\varphi}(S) \oplus \\ & \oplus \bigoplus_{k=1}^N \bigoplus_{r=0}^{\varkappa_k-1} H^{s+2b\varkappa_k-2br-b;\varphi}(G) \end{aligned}$$

елементів (f, g, h) , які задовольняють природні умови узгодження правих частин задачі (1)–(3). Якщо $s \in E$, простір $\mathcal{G}^{s,s/(2b);\varphi}$ означається за допомогою інтерполяції.

Теорема. Для довільних $s > \sigma_0$ і φ відображення

$$(C^\infty(\overline{\Omega}))^N \ni u \mapsto (f, g, h),$$

де f, g та h визначені рівностями (1)–(3), продовжується єдиним чином (за неперервністю) до ізоморфізму

$$\bigoplus_{k=1}^N H^{s+2b\varkappa_k,(s+2b\varkappa_k)/(2b);\varphi}(\Omega) \leftrightarrow \mathcal{G}^{s,s/(2b);\varphi}.$$

1. Лось В. М., Михайлець В. А., Мурач О. О. Параболічні граничні задачі та узагальнені простори Соболева. – Київ: Наукова думка, 2023. – 162 с. (препринт arXiv:2109.03566)
2. Diachenko O., Los V. Some problems for Petrovskii parabolic systems in generalized Sobolev spaces // J. Elliptic Parabol. Equ. – 2022. – 8. – P. 313–329.
3. Diachenko O., Los V. Regular conditions for the solutions to some parabolic systems // Ukrainian Math. Journal. - 2023. - 74, no. 8. - P. 1263-1274.
4. Los V. Systems parabolic in Petrovskii's sense in Hörmander Spaces // Ukrainian Math. Journal. - 2017. - 69, no. 3. - P. 426–443.

Методичні рекомендації по використанню платформ при змішаному та дистанційному навчанні

Лучко Володимир, Божагора Іванна, Коновалюк Марина

v.luchko@chnu.edu.ua, bozhahora@gmail.com,
marinacon1126@gmail.com

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Суспільство вступило у період всесвітньої інформатизації. Почалося масове використання різних електронних обчислювальних машин у сфері безпосереднього виробництва. Для вирішення складних як теоретичних, так і практичних задач, які виникають при діяльності людини у різних галузях науки, техніки та виробництва ставлять за мету звільнення людини від надмірного навантаження дає великий ефект використання обчислювальної техніки за умови достатнього програмного забезпечення й його ефективного використання. Учні та студенти все частіше користуються у повсякденному житті мобільними телефонами, планшетами та іншими гаджетами, головне призначення яких на сьогоднішній день для них полягає у розвагах та іграх, причому можливості у використанні цих гаджетів набагато ширші. Тому перед кожним педагогом загальної середньої та вищої освіти постає завдання забезпечити навчально-виховний процес якісними електронними засобами навчання, не лише які можна використовувати на комп'ютерах, а й для всіх інших сучасних пристроїв, які можна було б використовувати для навчального процесу як у загальноосвітніх та вищих навчальних закладах, не залежно в якому місці, чи в громадському чи вдома перебуває учасник освітнього процесу. Ось чому одним із актуальних питань залишається ефективне використання ресурсів мережі Інтернет у навчальному процесі. Новітні технології, такі як віртуальні, веб, хмарні допомагають змінити підхід до вибору навчального середовища, а також зробити освіту (чи то вищу, чи то загальну середню) більш доступною. Для будь-якого навчання комунікація є невід'ємним складником педагогічного процесу. Від рівня комунікації залежить її ефективність, а дистанційне навчання тут не виняток. Очевидною потребою дистанційного навчання та роботи стало проведення синхронних сесій відеозв'язку. Існує багато технологій і програм, які можна використовувати для проведення онлайн - зустрічей і віддаленої роботи через Інтернет.

Актуальність обраної теми полягає в тому, що внаслідок пандемії COVID-19 багато навчальних закладів були змушені перейти на дистанційне навчання, що викликає значні виклики та труднощі у забезпеченні якості освіти. Змішане навчання може бути одним зі способів розв'язання цієї проблеми, оскільки воно поєднує в собі елементи традиційного та дистанційного навчання. Однак, для досягнення максимальної ефективності

змішаного та дистанційного навчання, необхідно правильно використовувати різні платформи та інструменти, які можуть забезпечити якісний та ефективний навчальний процес. Тому розробка методичних вказівок для використання різних платформ при змішаному та дистанційному навчанні є важливою задачею для забезпечення якості навчання та збереження навчального процесу. *Об'єкт дослідження* - процес змішаного та дистанційного навчання в освітньому процесі з використанням різних платформ. *Предмет дослідження* даної роботи є методичні вказівки для використання різних платформ при змішаному та дистанційному навчанні. Основна *мета дослідження* полягає у розробці та описі оптимальних підходів до використання платформ для забезпечення ефективності змішаного та дистанційного навчання. Мета роботи полягає у розробці методичних вказівок для використання різних платформ при змішаному та дистанційному навчанні. Гіпотезою дослідження може бути припущення про те, що використання різних платформ для здійснення змішаного та дистанційного навчання є ефективним засобом забезпечення якісної освіти та збереження навчального процесу. Теоретичною основою дослідження є сучасні теорії та підходи до змішаного та дистанційного навчання, а також теорії та методики використання різних платформ для навчання. Науковою новизною та теоретичною значущістю дослідження є розробка методичних вказівок для використання різних платформ при змішаному та дистанційному навчанні, які базуються на сучасних теоріях та підходах до навчання та використання цифрових технологій. Ці вказівки допоможуть вчителям та викладачам з підготовки та проведення ефективних занять з використанням різних платформ, забезпечуючи якісне навчання та збереження мотивації учнів під час змішаного та дистанційного навчання.

1. Методи навчання та їх класифікація [Електронний ресурс]. URL: <https://osvita.ua/school/method/780/>
2. Рекомендації щодо впровадження змішаного навчання у закладах фахової передвищої та вищої освіти. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/vishcha-osvita/2020/zmyshene>
3. Як працювати й поводитися в Zoom: поради для учнів та вчителів. URL: <https://osvita.ua/school/method/85398/>
4. Google Meet. URL: <https://workspace.google.com/products/meet/>

Інтегровані завдання з математики та інформатики – ефективний засіб навчання математики у старшій школі

Лучко Вікторія, Лучко Володимир

viktoria.luchko@chnu.edu.ua, v.luchko@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Однією з найважливіших умов модернізації сучасної освіти є те, щоб розкрити потенційні можливості кожного учня, для досягнення яких застосовується принцип міжпредметних зв'язків або ж процес інтеграції навчальних предметів, основою котрих є інтегровані завдання. На уроках математики та інформатики здійснюються міжпредметні зв'язки математики - інформатики. Основним завданням педагога на таких уроках є формування в учнів інформаційної компетентності та вміння перетворювати на практиці математичні об'єкти за допомогою засобів інформаційних технологій.

Практика роботи нами в ЗЗСО показує, що в учнів, які добре знають математичний матеріал і методи розв'язування, виникають труднощі у побудові самого ходу розв'язання, у виробленні алгоритму розв'язання конкретної задачі. Інформатика, зокрема програмування, заснована власне на побудові алгоритму. А тому математика та інформатика є тими важливими предметами, успішність засвоєння яких часто залежить від рівня розвитку алгоритмічного мислення.

Інтеграція інформатики та інформаційних технологій з математикою є важливою практичною необхідністю. Математика пропонує учням низку математичних методів, що дозволяють не лише отримати числові характеристики досліджуваного об'єкта, а й змоделювати його поведінку під впливом різних факторів. Інформатика ж надає інструментарій, який дозволяє підвищити точність та скоротити трудомісткість складних процесів, які не є доступними для "ручної" техніки.

У старшій школі вивчення учнями питань, пов'язаних з похідною, викликає певні труднощі, однією з них є та, що учні повинні засвоїти досить абстрактний матеріал за незначну кількість годин. Крім того, запам'ятати усі формули та правила знаходження похідних, знаходити екстремуми функцій, не спираючись на певний наочний матеріал, складно. У цьому випадку можуть допомогти інтегровані завдання, введення яких на уроках математики сприяє стимулюванню аналітико-синтетичної діяльності учнів, розвитку потреби у системному підході до об'єкта пізнання, формуванню вміння аналізувати та порівнювати складні процеси та явища.

Наприклад, при розгляді теми "Застосування похідної при вивченні властивостей функцій" учням можна запропонувати виконати таке завдання: побудувати в Excel графіки функцій, заданих формулами $y = x^2 + 2x - 1$, $y = -x^2 + 2x + 2$, при $x \in [-3; 3]$, а також графіки похі-

дних даних функцій та зробити відповідні висновки.

Використовуючи наочне представлення, дати відповідь на такі запитання:

1. Як пов'язані координати вершин парабол з графіками похідних заданих функцій?

2. Які значення прийматимуть похідні функцій при зростанні (спаданні) графіків функцій, у точках їх екстремумів функцій?

Зауважимо, що одним з важливих елементів побудови графіків функцій є вибір діапазону зміни незалежної змінної, щоб було б добре видно екстремуми функції та зміну значень похідної.

Зазначимо, що використання інтегрованих завдань для розвитку алгоритмічного мислення підтверджується тим, що процес розв'язання довільної математичної задачі є певною послідовністю дій, тобто деяким алгоритмом, програмуванням, а це також деталізація дій щодо розв'язання, власне складання алгоритму. Отже, інтегровані завдання з математики та інформатики ефективно впливатимуть на розвиток алгоритмічного мислення учнів старшої школи.

1. Блінова Т.Л., Безматерних Є.В. Реалізація міжпредметних зв'язків у процесі навчання математики в 10-11 класах фізико-математичного профіля // Математика в школі. – 2016. – № 7. – С. 28–35.
2. Раков С.А. Пакет DG та дослідницький підхід у курсі алгебри та початків аналізу // Комп'ютер в школі та сім'ї. – 2005. – № 4. – С. 29.
3. Серанова Н.С. Інтегративно-компетентісний підхід до викладання математики в основній та старшій школі. Методичний посібник для вчителів математики шкіл, гімназій, ліцеїв. – Балта, 2020. – 50 с.

Асимптотична поведінка перетворення Фур'є-Стільтєса одного розподілу типу Джессена-Вінтнера

Макарчук Олег¹, Халецький Богдан²

makolpet@gmail.com, aushukun@gmail.com

¹Інститут математики НАН України

²Центральноукраїнський державний університет імені Володимира
Винниченка

Нехай $F(x)$ — функція розподілу. Для перетворення Фур'є-Стільтєса функції $F(x)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x)$$

розглянемо величину

$$L(F) = \lim_{|t| \rightarrow +\infty} \sup |f(t)|.$$

Якщо $F(x)$ є функцією стрибків, то відомо [3], що $L(F) = 1$, адже $f(t)$ є майже-періодичною функцією. Якщо $F(x)$ абсолютно неперевна, то $L(F) = 0$. Якщо функція $F(x)$ є сингулярною, то $L(F)$ може набувати довільного значення з відрізка $[0; 1]$.

Приклад сингулярної функції $G(x)$ для якої $L(G) = 0$ був наведений в роботі [5]. Приклади сингулярних функцій $G(x)$ таких, що $L(G) = 1$ були наведені в роботах [4] та [7]. В роботі [6] для кожного заданого $a \in [0; 1]$ було побудовано сингулярну функцію $G(x)$ таку, що $L(G) = a$.

Нехай s — натуральне число більше одиниці, (ψ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \dots, s-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{(s-1)k}$ відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k s^{-k}.$$

За теоремою Джессена-Вінтнера розподіл ψ є чистим.

Необхідні та достатні умови того, що $L(F_\psi) = 0$ були знайдені в роботах [1] і [2] для випадків $s = 2$, $s = 3$ відповідно.

Теорема 1. Рівність $L(F_\psi) = 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли для кожного $j \in \{0; 1; \dots; s-1\}$ виконується умова:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{jn} = \frac{1}{s}.$$

1. Гончаренко Я. В. Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величин з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів // Наукові записки НПУ імені Драгоманова. Фізико-математичні науки. – 2002. – №3.– С. 376-390.
2. Гончаренко Я. В., Микитюк І. О. Поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини з незалежними s -адичними цифрами на нескінченності. // Наукові записки НПУ імені Драгоманова. Фізико-математичні науки. – 2008. – №9.– С. 121-127.
3. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения.— Киев: Наук. думка, 1992. — 208 с.
4. Eseen C.G. Fourier analysis of distribution functions // Acta Mathematica. – 1945. – №77. – P. 11-25.
5. Girault M. Les fonctions caracteristiques el leurs transformations // Publ.Inst.Statist.Univ. Paris. – 1954. – №4. — P. 223-239.
6. Schvartz L. Sur le module de la fonction caracteristicue du calcul des probabiles // C.R.Acad.Sci.Paris. – 1941. – P.418-421.
7. Jessen B., Wintner A. Distribution function and Riemann Zeta-function // Trans.Amer.Math.Soc. – 1935. – №38 – P.48-88.

Стійкість інваріантного тора одного класу імпульсних систем

Мамса Катерина, Перестюк Микола

Ekaterinamamsa@gmail.com, perestyuk@gmail.com

КІІ імені Ігоря Сікорського, Київ, Україна

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = P(\varphi)x, \quad \varphi \in T_m, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$\Delta x|_{\varphi \in \Gamma} = B(\varphi)x|_{\varphi \in \Gamma},$$

в якій векторна функція $a(\varphi)$ та матричні функції $P(\varphi)$ і $B(\varphi)$ визначені для всіх $\varphi \in T_m$ неперервні і 2π -періодичні по кожній змінній φ_ν . Щодо $B(\varphi)$, то достатньо, щоб вона була визначена на множині Γ .

Щодо множини Γ вважаємо, що вона є підмножиною тора T_m і задається рівнянням

$$\Phi(\varphi) = 0, \quad (2)$$

де $\Phi(\varphi)$ - скалярна, неперервно диференційовна 2π -періодична по кожній змінній φ_ν , $\nu = \overline{1, m}$, функція. Вважатимемо також, що кожна з траєкторій системи $\dot{\varphi} = a(\varphi)$ перетинає множину Γ трансверсально. Для цього достатньо виконання умови $\langle \text{grad}\Phi(\varphi), a(\varphi) \rangle \neq 0$, $\varphi \in \Gamma$. Позначимо через $G \subseteq T_m$ множину точок всіх траєкторій, що починаються в Γ :

$$G = \{\varphi \in T_m : \varphi = \varphi_t(\varphi_0), \varphi_0 \in \Gamma, t \in R\}, \quad (3)$$

де R - дійсна числова вісь.

Позначимо через $t = t_i(\varphi)$ розв'язки рівняння (2) для яких рівномірно по $t \in R$: $\varphi \in T_m$ існує

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{i(t, t+T)}{T} = p, \quad (4)$$

де $i(t, t+T)$ - кількість розв'язків рівняння (3) $t = \tau_i(\varphi)$, що знаходяться між t і $t+T$.

Така границя існує, коли послідовність $\{\tau_{i+1}(\varphi) - \tau_i(\varphi)\}$, $i \in Z$, $\varphi \in T_m$ є періодичною або майже періодичною.

Умова існування границі (4) рівносильна такій: можна вказати такі числа додатне l і натуральне q , що будь-який проміжок довжини l $[t, t+l]$ містить не більше, ніж q членів послідовності $\{\tau_i(\varphi)\}$.

Теорема. Нехай в системі рівнянь (1) матриці $P(\varphi)$ і $B(\varphi)$ такі, що для деяких $\gamma(\varphi), \alpha(\varphi)$ і $x \in R^n$

$$\begin{aligned} \langle P(\varphi)x, x \rangle &\leq \gamma(\varphi) \langle x, x \rangle, & \varphi \in T_m, \\ \langle (E + B^T(\varphi))(E + B(\varphi))x, x \rangle &\leq \alpha^2(\varphi) \langle x, x \rangle, & \varphi \in \Gamma. \end{aligned} \tag{5}$$

Якщо

$$\gamma_0 + \vartheta \ln \alpha_0 < 0, \tag{6}$$

де $\gamma_0 = \max_{\varphi \in T_m} \gamma(\varphi)$, $\alpha_0 = \max_{\varphi \in G} \alpha(\varphi)$, то тривіальний тор системи рівнянь (1) асимптотично стійкий.

1. Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. *Impulsive Differential equations* – Singapore: World Scientific, 1995. – 462 p.
2. Капустян О.В., Перестюк Ю.М. *Якісна поведінка траєкторій розривних динамічних систем* – монографія – К. ВПЦ "Київський університет" 2021. – 182 с.

Використання Т-критерію Вілкоксона для оцінки якісних змін виконання командних дій на основі математичної моделі

Мартинюк Сергій, Цуркан Вячеслав

s.martyniuk@chnu.edu.ua, vi.tsurkan@gmail.com

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

У роботі досліджується математична модель командної гри, яка охоплює всі ігрові дії команди. Більшість методів обробки статистичних даних базуються на тому, що продуктивність гри напряму залежить від результатів ігрових командних дій. Результати дій можна розрахувати і оцінити шляхом аналізу [1], побудованої математичної моделі гри.

Вибір тренувальних вправ, їх комбінування відбувається постійно і необхідно мати чітку оцінку якісних змін результатів тренувань при виконанні кожної ігрової дії та періодичності їх використання. Т-критерій Вілкоксона при аналізі математичної моделі командної гри дає змогу підтвердити, чи заперечити гіпотезу про покращення, чи погіршення якості виконання ігрової дії. Для збору даних використовувалися дані волейбольної статистики проведених офіційних матчів жіночих волейбольних команд майстрів Першої ліги України.

В International Journal of Performance Analysis in Sport опубліковані результати досліджень [2], метою яких було представити ігрові характеристики команди та визначити, які з цих характеристик призвели до перемоги та до покращення підсумкового рейтингу команди. Ці результати показали, що одна індивідуальна дія і одна командна дія є головними факторами, які впливають на виграш, чи програш команди. Тому тренери повинні використовувати різноманітні індивідуальні та командні комплексні вправи, які моделюють можливі типові та змагальні ситуації [3].

У дослідженні на основі побудованої математичної моделі гри розглянуті зміни якості подачі у двох турах Чемпіонату України. Для вибірки брався відсоток помилок при подачі та відсоток подач на виліт і досліджувалася гіпотеза, що тренувальний процес вплинув на зміну якісних показників здійснених подач. Вибіралося ігри з рівнозначними суперниками в різних турах, а дані вибірки формувалися за трьома матчами туру.

1. Eom H. J. Computer-aided recording and mathematical analysis of team performance in volleyball. Un published masters' thesis, University of British Columbia, Vancouver, B. C., Canada. (1989).
2. Eleni Zetou, Nikolaos Tsigilis. Playing characteristics of men's Olympic Volleyball teams in complex II. International Journal of Performance Analysis in Sport 6(1). (2006).
3. Eom H. J., Schutz R. W. Statistical Analyses of Volleyball Team Performance. Research Quarterly for Exercise and Sport, 1992. Vol. 63, N1, 11–18.

Дослідження нестационарної задачі фільтрації та теплопереносу в осесиметричній постановці в неоднорідних за структурою середовищах

Марченко Ольга, Самойленко Тетяна

march64@ukr.net, tsamoil@i.ua

*Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України,
Національний технічний університет України "Київський
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"*

Пропонується алгоритм розрахунку динаміки неізотермічного процесу фільтрації в осесиметричній постановці, яка є суттєвою при дослідженні стану водонасичених ґрунтів навколо вертикальних дрен, свердловин, паль і т.д. В роботі сформульовано початково-крайову задачу для системи нестационарних рівнянь фільтрації та теплопереносу для ізотропного середовища в циліндричній системі координат з неоднорідними змішаними крайовими умовами, в тому числі з умовами теплообміну з зовнішнім середовищем, а також за наявності тонких слабопроникних включень. В кожній з підобластей Ω_1, Ω_2 області $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ($\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$) розглядається початково-крайова задача для системи рівнянь [1]:

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_i r \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r K_i(T) \frac{\partial h}{\partial r} \right) - r \frac{\partial}{\partial z} \left(K_i(T) \frac{\partial h}{\partial z} \right) = 0, \\ c_{T,i} r \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \tilde{\lambda}_i \frac{\partial T}{\partial r} - r c_{w,i} v_r T \right) - r \frac{\partial}{\partial z} \left(\tilde{\lambda}_i \frac{\partial T}{\partial z} - c_{w,i} v_z T \right) = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

де $(r, z, t) \in \Omega_{i, \tilde{T}} = \Omega_i \times (0, \tilde{T}]$, $i = 1, 2$; $0 < r_0 \leq r \leq r_1 < \infty$, $0 < z_0 \leq z \leq z_1 < \infty$; $h(r, z, t)$ – п'єзометричний напір, $T(r, z, t)$ – температура, $K_i(T)$ – коефіцієнт фільтрації, $\tilde{\lambda}_i$ – коефіцієнт теплопровідності, v_r, v_z – проєкції швидкості фільтрації на осі or і oz відповідно, $\bar{\mu}_i$ – вологоємність, $c_{T,i}, c_{w,i}$ – об'ємні теплоємності ґрунту і рідини в порах.

Умови спряження на ділянці контакту γ ($\gamma = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$, $\gamma = \{(r, z) : r = r_2, r_0 < r_2 < r_1, z_0 \leq z \leq z_1\}$):

$$\begin{aligned} \left[K_i(T) \frac{\partial h}{\partial r} \right] = 0, \quad \left\{ K_i(T) \frac{\partial h}{\partial r} \right\}^{\pm} = R_1(z) [h], \\ \left[\tilde{\lambda}_i \frac{\partial T}{\partial r} - c_{w,i} v_r T \right] = 0, \quad \left\{ \tilde{\lambda}_i \frac{\partial T}{\partial r} - c_{w,i} v_r T \right\}^{\pm} = R_2(z) [T], \end{aligned}$$

де $(r, z, t) \in \gamma_{\tilde{T}} = \gamma \times (0, \tilde{T}]$, n – зовнішня нормаль до $\partial\Omega_1$ на γ ; $[\cdot]$ – стрибок функції, $R_i(z) \geq 0$, $i = \overline{1, 2}$; припускаємо, що задані функції

достатньо гладкі на $\Omega_{i, \tilde{T}}$, $i = \overline{1, 2}$, обмежені, $K_i(T)$, $i = \overline{1, 2}$ задовольняють умові Ліпшиця.

Крайові умови – неоднорідні змішані:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (r, z, t) \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times (0, \tilde{T}], \\ \frac{\partial h}{\partial z} = 0, \quad (r, z, t) \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \times (0, \tilde{T}], \\ \tilde{\lambda}_i \frac{\partial T}{\partial z} = -\alpha_i(T(r, z, t) - T_{cp}), \quad (r, z, t) \in \Gamma_2 \times (0, \tilde{T}], \\ \tilde{\lambda}_i \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (r, z, t) \in \Gamma_4 \times (0, \tilde{T}], \end{aligned}$$

де $\partial\Omega \setminus \gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, $\Gamma_1 = \{(r, z) : r = r_0, z_0 \leq z \leq z_1\}$, $\Gamma_2 = \{(r, z) : r_0 \leq r \leq r_1, z = z_1\}$, $\Gamma_3 = \{(r, z) : r = r_1, z_0 \leq z \leq z_1\}$, $\Gamma_4 = \{(r, z) : r_0 \leq r \leq r_1, z = z_0\}$, T_{cp} – температура зовнішнього середовища, $\alpha_i = const > 0$, $i = \overline{1, 2}$.

Початкові умови – неоднорідні.

Узагальненим розв'язком Гальоркіна початково-крайової задачі для системи (1) є вектор-функція $w(r, z, t) = (h(r, z, t), T(r, z, t))^T \in Z$, яка задовольняє головним крайовим умовам та інтегральним співвідношенням [2]

$$\begin{aligned} m \left(\frac{\partial w}{\partial t}, v \right) + a(w; w, v) = (F, v) \quad \forall t \in (0, \tilde{T}], \\ (w(\cdot, \cdot, 0), v) = (w_0, v) \quad \forall v \in Z_0, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} m \left(\frac{\partial w}{\partial t}, v \right) &= \iint_{\Omega} \left(\bar{\mu} r \frac{\partial h}{\partial t} v_1 + c_T r \frac{\partial T}{\partial t} v_2 \right) d\Omega, \\ a(w; w, v) &= \iint_{\Omega} r \left(K(T) \left(\frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + \tilde{\lambda} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \right. \\ &\quad \left. + c_w v_r T \frac{\partial v_1}{\partial r} + c_w v_z T \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_2} r \alpha T v_2 d\Gamma_2 + \\ &\quad + r_2 \int_{\gamma} (R_1(z) [h] [v_1] + R_2(z) [T] [v_2]) d\gamma, \\ (F, v) &= \int_{\Gamma_2} r \alpha T_{cp} v_2 d\Gamma_2, \end{aligned}$$

вектор-функція $v(r, z) = (v_1(r, z), v_2(r, z))^T$ задовольняє однорідним головним крайовим умовам; Z, Z_0 – простори методу Гальборкіна; $\bar{\mu} \equiv \bar{\mu}_i$, $c_T \equiv c_{T,i}$, $\bar{\lambda} \equiv \bar{\lambda}_i$, $K(T) \equiv K_i(T)$, $c_w \equiv c_{w,i}$, $\alpha \equiv \alpha_i$ на кожній з областей $\Omega_{i, \tilde{T}}$, $i = 1, 2$; $w_0 = (h_0, T_0)^T$ – вектор-функція початкових умов.

Наближений узагальнений розв’язок даної задачі Коші шукаємо в скінченновимірному підпросторі $Z^N \subset Z$ МСЕ у наступному вигляді:

$$w^N(r, z, t) = \sum_{i=1}^{2N} \alpha_i(t) \Phi_i(r, z),$$

де $\alpha_i(t)$, $i = \overline{1, 2N}$ – функції, інтегровані разом з другою похідною на $[0, \tilde{T}]$,

$$\Phi_i = \begin{pmatrix} \varphi_i \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_{N+i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_i \end{pmatrix}, i = \overline{1, N},$$

– базис простору Z_t^N , який отримується з Z^N фіксуванням $\forall t \in [0, \tilde{T}]$, $\{\varphi_i(r, z)\}$, $i = \overline{1, N}$ – сукупність лінійно незалежних функцій, що відповідають вузловим точкам МСЕ, які побудовані на повних поліномах степеня k ($k = 1, 2, 3$), що допускають розрив першого роду на γ та мають в Ω обмежений носій.

Теорема. *Нехай класичний розв’язок*

$$w(r, z, t) = (h(r, z, t), T(r, z, t))^T = (w_1(r, z, t), w_2(r, z, t))^T$$

сформульованої початково-крайової задачі для системи (1) має обмежені неперервні частинні похідні $\frac{\partial^{k+1} w_i}{\partial r^{\nu_1} \partial z^{\nu_2} \partial t} (\nu_1 + \nu_2 = k + 1)$ на $\Omega_{i, \tilde{T}}$, $i = \overline{1, 2}$.

Тоді для наближеного узагальненого розв’язку задачі (2)

$$w^N(r, z, t) = (w_1^N(r, z, t), w_2^N(r, z, t))^T \in Z^N$$

існує константа $C > 0$ така, що має місце оцінка

$$\|w - w^N\|_{W_2^1 \times L_2}^2 + \|w_2 - w_2^N\|_{L_2(\Gamma_2) \times L_2}^2 \leq C s^{2k},$$

де s – максимальна довжина сторін трикутників, $k = 1, 2, 3$ – степінь многочленів методу скінчених елементів.

Для оцінки швидкості збіжності дискретного за часом наближеного узагальненого розв’язку та його розрахунку використовується схема Кранка-Ніколсон [2].

1. Дейнека В.С., Сергиенко И.В., Скопецкий В.В. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями. – К.: Наукова думка, 1995. – 262 с.
2. Марченко О.О., Самойленко Т.А. Побудова наближеного розв'язку осесиметричної задачі динаміки неізотермічного вологопереносу // Кібернетика та комп'ютерні технології. – 2020. – No 1. – С. 41–52.

Рюкзачна криптосистема та її модифікації

Марчук Катерина

marchuk@stud.onu.edu.ua

ОНУ ім. І.І. Мечникова

Одним з різновидом криптографії є криптосистеми з відкритим ключем, які використовують два різних ключа (відкритий і закритий) для шифрування і дешифрування даних. У 1978 році Ральф Меркле і Мартін Хеллман розробили одну з найперших криптосистем такого виду, яка отримала назву рюкзачна криптосистема Меркле-Хеллмана. Вона заснована на застосуванні проблеми суми підмножини, де для пошуку розв'язку необхідний певний час для обчислення, оскільки він належить до класу складності NP.

Перевагою цієї криптосистеми є складність процесу генерації відкритих і закритих ключів, адже він вимагає наявності надзростаючої послідовності, яку важко відтворити або вгадати без знання правильної суми підмножини. Кожне повідомлення має свій випадковий закритий ключ, що додає захисту, оскільки запобігає використанню атак відкритого тексту.

Проте, одним зі слабких місць криптосистеми є те, що визначення підмножини послідовності, яка використовується для генерації відкритого ключа, надає шлях для злому системи шифрування. Окрім цього, система вразлива до певних типів атак. Так, у 1982 році Аді Шамір розробив швидкий алгоритм для злому. Пізніше з'ясували, що стандартну рюкзачну криптосистему можна легко зламати за допомогою алгоритму LLL, для якого достатньо знати лише відкриті ключі та зашифрований текст [2].

Для усунення вразливостей і слабких сторін було проведено чимало досліджень з метою вдосконалення системи. Одна з таких вдосконалених версій заснована на поєднанні стандартної рюкзачної криптосистеми з символом Лежандра. Оскільки символ Лежандра може бути 1 або -1, то для генерації ключів використовується два процеси замість одного. Алгоритм LLL не може бути застосований, адже ці процеси використовують дві різні надзростаючі послідовності. Атака Шаміра не становить загрози для такої системи, оскільки використовується два різні відкриті ключі.

1. A. Menezes, P. van Oorschot, and S. Vanstone, "Handbook of Applied Cryptography CRC Press, 1996.
2. Hamza B. Habib, Wadhah Abdulelah Hussein, Diana Saleh Mahd, "Improving the security of the Knapsack Cryptosystem by using Legendre Symbol Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 2021.
3. Ming Kin Lai, "Knapsack Cryptosystems: The Past and the Future", 2001.

Аналіз дискретних моделей динаміки популяцій зі збором урожаю

Маценко Василь

v.matsenko@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Сучасні досягнення в екології стали можливими завдяки використанню математичних методів. Найбільш широко методи математичного моделювання проникли в дослідження динаміки біологічних систем.

Значна частина математичних моделей екологічних систем формулюється у вигляді різницевих рівнянь. Вони дозволяють вивчати динаміку чисельності популяції з неперервними поколіннями у режимі реального часу.

Такі моделі пов'язують чисельність N_{t+1} у момент часу $t + 1$ із чисельністю в попередні моменти часу. В простішому випадку це різницеві рівняння вигляду

$$N_{t+1} = F(N_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots, N_t \in [0, \infty), \quad (1)$$

де F – гладка дійсна функція дійсного аргументу.

В аналітичному вигляді знайти розв'язок N_t рівняння (1) не вдається, можна лише чисельно шляхом ітерування визначати кількості наступних поколінь при заданих N_0 .

Аналітично можна знаходити стаціонарні та періодичні розв'язки і досліджувати їх на стійкість.

В даній праці розглядаються моделі збору врожаю у популяціях, оскільки в своїй діяльності людина використовує різні природні ресурси і при цьому важливо не знищити біологічну популяцію.

Якщо з деякої популяції відловлюється певна кількість особин, то рівняння (1) з урахуванням процесів збору врожаю набуває вигляду

$$N_{t+1} = F(N_t) - C(N_t, \alpha), \quad (2)$$

де $C(N_t, \alpha)$ – інтенсивність відлову особин, α – параметр, що характеризує цю інтенсивність.

Серед рівнянь (2) розглянемо дискретну логістичну модель, моделі Рікера та Скеллама. Саме ці динамічні системи найчастіше використовуються на практиці. Вони демонструють складну динаміку чисельності популяції і дозволяють добре описувати її для багатьох біологічних процесів.

Більш детально проаналізуємо тільки дискретну логістичну модель зі збором урожаю. Вона має вигляд [1]

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t) - c, \quad r > 0, \quad (3)$$

де c – постійна інтенсивність збору врожаю.

Рівняння (3) має дві точки рівноваги $N_{1,2}^* > 0$ при умові, що $r > 1$ і $c < (r - 1)^2/4r$. Одна з них нестійка, друга стійка при умові, що $r^2 - 2r - 4rc < 3$.

При $r < 1$ додатних стаціонарних станів не існує і при будь-якій інтенсивності відлову популяція вимре за скінченний час.

При зростанні r , а саме, при $r > 1 + 2c + \sqrt{(1 + 2c)^2 + 3}$ стаціонарні стани $N_{1,2}^* > 0$ стають нестійкими і з'являються періодичні розв'язки з періодом $T = 2$, які є стійкими при умові $|4 + 2r + 4rc - r^2| < 1$.

Існування періодичних розв'язків з періодом $T = 3$ рівняння (3) вдається встановити лише в результаті комп'ютерних обчислень.

У цьому випадку за теоремою Шарковського впливає існування періодичних розв'язків будь-якого періоду, а за теоремою Йорк Лі – існування хаотичних розв'язків [2, 3].

Аналогічно проведені дослідження моделі Рікера вигляду

$$N_{t+1} = N_t \exp\left(r\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right) - c, \quad r, k > 0$$

та моделей Скеллама

$$N_{t+1} = \frac{aN_t}{1 + bN_t} - c, \quad N_{t+1} = \frac{aN_t}{1 + bN_t^2} - c, \quad N_{t+1} = \frac{aN_t^2}{1 + bN_t^2}, \quad a, b > 0.$$

Проведені комп'ютерні експерименти підтверджують одержані теоретичні результати та демонструють різні поведінки розв'язків.

1. Маценко В. Г. Моделювання процесів збору врожаю для популяцій з неперекривними поколіннями // Буковинський мат. журнал. – 2022. – Т. 10, № 2. – С. 165-175.
2. Шарковський А. Н., Майстренко Ю. Н., Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их применения. – Киев : Наук. думка, 1986. – 280 с.
3. Li T., Yorke I. Period three implies chaos // The American Mathematical Monthly. – 1975. – Vol. 82, N 10. – Pp. 985-992.

**Про властивості розв’язків одного рівняння
типу Колмогорова, коефіцієнти якого
в групі молодших членів є зростаючими функціями**

Мединський Ігор¹, Пасічник Галина²

ihor.p.medynskiy@lpnu.ua, pasichnyk.gs@gmail.com

¹Національний університет “Львівська політехніка”

²Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Конференція присвячена 55 річниці факультету математики та інформатики Чернівецького університету, випускником 1959 року якого, а потім пройшовши шлях від асистента до завідувача кафедри диференціальних рівнянь (1964–1969), організатором та першим завідувачем кафедри математичного моделювання (1988–2003) був професор С.Д. Івасишен. Дослідження рівнянь типу Колмогорова розпочалось авторами спільно з С.Д. Івасишеним.

Доповідь присвячена дослідженню розв’язності задачі Коші для одного класу рівнянь типу Колмогорова, коефіцієнти якого при молодшій похідній є зростаючими за просторовою змінною.

В шарі $\Pi_{(0,T]} := (0, T] \times \mathbb{R}^n$ скінченної товщини $T > 0$ розглядаємо рівняння

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}} - \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1s}} - b \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \partial_{x_{1j}} \right) u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \quad (1)$$

де a_{js} і b – дійсні сталі, причому $a_{js} = a_{sj}$, $\{j, s\} \subset \{1, \dots, n_1\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \sigma_1 := (\sigma_{11}, \dots, \sigma_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1} : \sum_{j,s=1}^{n_1} a_{js} \sigma_{1j} \sigma_{1s} \geq \delta |\sigma_1|^2.$$

Тут $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ – задані натуральні числа, $n := n_1 + n_2 + n_3$ – їх сума; просторова змінна $x \in \mathbb{R}^n$ складається з трьох груп змінних $x_l := (x_{l1}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, так що $x := (x_1, x_2, x_3)$.

Маючи інформацію про фундаментальний розв’язок задачі Коші [1] для рівняння (1), ми реалізуємо підхід Ейдельмана–Івасишена [2, 5], довівши теореми про інтегральне зображення розв’язків та коректну розв’язність задачі Коші в класах швидко зростаючих функцій. При цьому розв’язок є сумою інтегралів Пуассона [3, 4, 5] відповідно початкової функції φ та узагальненої міри μ і об’ємного потенціалу, породжених фунда-

ментальними розв'язками задачі Коші G ,

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi,$$
$$(t, x) \in \Pi_{(0, T]},$$

та

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; 0, \xi) d\mu(\xi) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi,$$
$$(t, x) \in \Pi_{(0, T]}.$$

Початкова функція φ належить до спеціального простору $L_p^{\vec{a}}$, $p \in [1, \infty]$, і $\mu \in M^{\vec{a}}$, функція f неперервна і є гельдеровою за просторовими змінними в певному сенсі та належить до простору $L_p^{\vec{k}(\tau, \vec{a})}$. Розглянуті розв'язки, як функції x , при цьому можуть необмежено зростати при $|x| \rightarrow \infty$.

Для класів обмежених функцій в аналогічні результати були анонсовані в [6].

1. Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2014. — Т.11, № 2. — С. 126–153.
2. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2004. — **152**. — 390 p.
3. Івасишен С., Пасічник Г. Задача Коші для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів.— *Мат. вісн. Наук. тов. ім. Т. Шевченка.* — 2014. — Т. 11 — С. 73–87.
4. *Івасишен С.Д., Пасічник Г.С.* Інтегральне зображення розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — 2015. — Т.12, № 2. — С. 205–229.
5. Івасишен С.Д., Пасічник Г.С. Про характеризацію розв'язків одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів // *Буковинський мат. журн.* — 2015. — Т.3, № 3–4. — С. 87–91.
6. Мединський І., Пасічник Г. Про властивості об'ємного потенціалу для одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів. // Зб. наук. праць. — Ін-т прикл.пробл. мех. і математики ім Я.С.Підстригача НАН України. — 2023.— С. 349–350. — URL: <http://iapmm.lviv.ua/mpmm2023/materials/proceedings.mpmm2023.pdf>.

Технології та прийоми навчання програмування у середовищі Скретч майбутніх вчителів інформатики

Мельничук Лілія

l.melnuchuk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Згідно з концепцією Нової української школи, однією з ключових компетентностей учнів є інформаційно-цифрова компетентність, яка серед іншого передбачає знання основ програмування та розвиток алгоритмічного мислення. Тому розділи, присвячені алгоритмізації та програмуванню, є в кожній навчальній програмі з інформатики у всіх класах, і на їх вивчення виділяється подекуди більше 20 відсотків навчального часу.

Методисти рекомендують вивчення програмування у 2-6 класах здійснювати у середовищі Скретч, яке має динамічний, привабливий та простий графічний інтерфейс, дозволяє вико-нувати анімацію, ігри, діалоги, симуляції, різноманітні дії та інтерактивні комікси чи інші програми, які часто є результатом власної творчості учня, і ними можна поділитися з іншими.

Тому майбутні вчителі інформатики повинні досконало зна-ти це се-редовище та вправно володіти методами програмування у ньому та мето-дикою навчання дітей у Скретчі. Саме тому студенти ЧНУ спеціальності "Середня освіта (інформатика)" на першому курсі вивчають обов'язкову дисципліну "Інтерпретова-на візуальна мова програмування" ("ІДВМП"), де здобувають зазначені вміння.

Слід відзначити, що у зарубіжних країнах програмування у середови-щі Скретч поширене не лише у школах чи коледжах. Часто й у вищих навчальних закладах початкові курси програму-вання вивчають у Скре-тчі [1]. Вважається, що програмування у блочних середовищах є найпро-стішим способом вивчення склад-них концепцій програмування (викори-стання змінних, умов, циклів тощо) та переведення після цього блоків у рядки коду на мовах вищого рівня.

У результаті вивчення дисципліни "ІДВМП" студент повинен знати: інтерфейс середовища Скретч; командні блоки; принципи програмуван-ня на мові Скретч; методи реалізації лінійних, циклічних алгоритмів та алгоритмів розгалуження; методи роботи із змінними та списками; вбу-дований графічний редактор; методи створення об'єктів та організації їх руху; основні прийоми створення анімації, звуку; прийоми організації взаємодії спрайтів; модифікації Scratch.

Зміст дисципліни відображений у силабусі на сайті кафедри диферен-ціальних рівнянь ЧНУ. Розроблено тематику і завдання лабораторних робіт, виконання яких дозволить студентам навчитися впевнено програ-мувати, враховувати багато прийомів та можливостей Скретчу. Курс ле-

кцій та завдання містить виданий навчальний посібник [1]. Особливості дистанційного вивчення Скретчу описані в [3].

При навчанні програмуванню у Скретчі використовуються різні традиційні та інноваційні технології: пояснювально-ілюстративного навчання (презентації на лекціях, використання середовища для ілюстрації прийомів), проблемного навчання (самостійне вивчення інструментів різних версій чи інших блочних середовищ, формулювання завдань лабораторних робіт), технологія особисто орієнтованого навчання (індивідуальне виконання завдань у власному темпі), колективно-групового навчання (прилюдний захист робіт із спільним виправленням помилок), технологія розвивального навчання (творче застосування знань в нестандартних умовах, створення моделей задач), технологія розвитку пізнавального інтересу студентів (розгляд практичних задач та задач зі шкільної інформатики), формування творчої особистості (пошук реалізації алгоритмів, вибір і створення графічних об'єктів, пошук цікавих задач), дослідницькі технології (самостійне дослідження середовища, пошук оптимальних алгоритмів), технологія проєктного навчання (кожна задача у Скретчі - повноцінний проєкт), технологія тренінгів (створені тестові завдання для перевірки знань), мережеві технології (робота у онлайн-середовищі, участь у Скретч-спільноті).

Окремо зауважимо, що студенти вчаться реалізовувати інтеграційний підхід у майбутній професійній діяльності, розв'язуючи засобами Скретчу математичні та економічні задачі.

Таким чином, вивчення ІДВМП сприяє професійному зростанню студентів як педагогів та як програмістів.

1. Cárdenas-Cobo, J.; Puris, A.; Novoa-Hernández, P.; Parra-Jimenez, A.; Moreno-León, J.; Benavides, D. Using Scratch to Improve Learning Programming in College Students: A Positive Experience from a Non-WEIRD Country. *Electronics* 2021, 10, 1180. URL: <https://doi.org/10.3390/electronics10101180>
2. Мельничук Л.М. Інтерпретована динамічна візуальна мова програмування (Scratch): навч. посібник/ Л.М. Мельничук, В.М. Лучко, Г.М. Перун. - Чернівці: Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. - 128 с.
3. Мельничук Л.М. Методичні особливості дистанційного навчання при вивченні середовища програмування Скретч // Міжнародна наукова конференція, присвячена 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження Михайла Павловича Ленюка, 28 - 30 жовтня 2021 р., Чернівці: матеріали конференції. - Чернівці, 2021. - С. 116-117. URL: <https://drive.google.com/file/d/1zBh4tgaRH82fZmygefKaF79RnLhqr4X/view>

Впровадження інтегративного підходу до навчання фінансової грамотності на уроках інформатики в основній школі

Мельничук Лілія, Тоненький Ілля

l.melnuchuk@chnu.edu.ua, tonenkyi.illia@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Сьогодні в Україні особливо гостро постає проблема неготовності населення до компетентного вирішення сучасних фінансових завдань. Тому питання фінансової грамотності молодого покоління визнане одним із ключових життєвих компетентностей, і його розв'язання знайшло відображення в Концепції НУШ. В освітньому процесі з інформатики у сучасній школі формування та розвиток фінансової грамотності учнів впроваджено через реалізацію наскрізної лінії "Підприємливість та фінансова грамотність" котра спрямована на забезпечення умов для розуміння учнями аспектів фінансових питань.

Для економічного виховання учнів важливо використовувати можливості різних освітніх галузей - математичної, історичної, соціальної, інформатичної та інших, а найкраще використовувати інтегративний підхід та міжпредметні зв'язки економіки, математики, інформатики для реалізації знань та вмінь з економічних наук засобами ІКТ. Так, Т.М. Засекіною в монографії [1] на засадах інтегративного підходу розроблено концепцію навчання природничих предметів. Основою цієї концепції є проектування інтегрованих результатів навчання учнів, реалізація міжпредметної, міжгалузевої та внутрішньопредметної інтеграції у навчанні окремих природничих предметів та інтегрованих курсів. Питанням теорії інтеграції в освіті займалися багато інших науковців-педагогів (С. Клепо, І. Козловська, В. Ільченко, О. Дудка та ін.).

Метою даної роботи є вивчення інтеграції економіки, математики та інноваційних технологій на уроках інформатики у 5-9 класах, а саме впровадження у навчальний процес вивчення економічних понять та задач. Зокрема, переглянуто навчальні програми з інформатики з метою вивчення можливостей розв'язання економічних задач засобами шкільної інформатики; виділено типи завдань економічного змісту, які можна виконувати при вивченні кожної теми у певному класі; складено банк завдань; обґрунтовано застосування програмних засобів для виконання вказаних завдань; визначено ефективні технології навчання для засвоєння нових знань.

Аналіз навчальних програм та методичного забезпечення середньої школи приводить до висновку, що задачі економічного змісту на уроках інформатики особливо доцільно розв'язувати при вивченні тем "Моделі. Моделювання "Алгоритми та програми" у всіх класах, "Опрацювання табличних даних" у 6 (НУШ), 7, 9 класах, а елементами фінансової

грамотності можна ілюструвати будь-який розділ інформатики. Також завдання з економічним змістом доцільно давати у рамках інтегрованих проєктів у 5-9 класах.

Як приклад, наведемо завдання для 5 класу, які забезпечують реалізацію компетентності фінансової грамотності: 1) створення карт фінансових знань; 2) виконання проєктів про економічні поняття, принципи роботи фінансових установ тощо при вивченні тем "Пошук в інтернеті" "Робота у текстовому редакторі" "Робота у редакторі презентацій"; 3) створення блок-схем економічних задач у графічному або у текстовому редакторі чи на папері; 4) ілюстрування умови та розв'язання задачі у текстовому редакторі чи редакторі презентацій з використанням графічних об'єктів, таблиць та анімації; 5) розв'язання задач з економічним змістом та створення анімаційних історій про розв'язання цих задач у програмному середовищі.

Виділено такі типи задач з економічним змістом для 5 класу: 1) задачі про вартість товару, 2) задачі на роботу, 3) задачі, пов'язані з бюджетом сім'ї, можливості здійснення масштабних покупок, 4) задачі на податки, роботу банків, ведення фермерського господарства, використання природних ресурсів рідного краю тощо.

Таке ж дослідження проведено і для 6-9 класів. У публікації [2] наведено розв'язання задачі про одержання планового прибутку від банківського вкладу засобами табличного процесора Microsoft Office Excel у 9 класі.

1. Засекіна Т.М. Інтеграція в шкільній природничій освіті: теорія і практика: монографія. - Київ: Пед. думка, 2020. - 400 с.
2. Тоненький І. Моделювання економічних задач на уроках інформатики середньої школи // Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ імені Юрія Федьковича (25-27 квітня 2023 року). Факультет математики та інформатики. - С. 107-108.

Елементи оригаметрії на факультативних заняттях з математики у ЗЗСО

Миرونюк Вадим, Мирониак Оксана

v.myronyk@chnu.edu.ua, myroniak.oksana@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

У середині XIX ст. німецький педагог Ф. Фребель запропонував ввести оригамі як навчальний предмет у школі. Наприклад, основи геометрії він пропонував вивчати не за допомогою циркуля, лінійки та деяких понять, а на прикладі фігур, що складаються з паперу. Цей предмет здобув назву «оригаметрія».

У 1992 році японський математик Хуміані Хузита на слуханнях першої міжнародної конференції Origami Science and Technology запропонував 7 аксіом, які стали першим кроком до математичного обґрунтування побудов, виконаних шляхом згину аркуша паперу.

Аксіома 1. Існує єдиний згин, що проходить через дві дані точки.

Аксіома 2. Існує єдиний згин, що суміщає дві дані точки.

Аксіома 3. Існує згин, що суміщає дві дані прямі.

Аксіома 4. Існує єдиний згин, що проходить через дану точку і перпендикулярний до даної прямої.

Аксіома 5. Існує єдиний згин, що проходить через дану точку і переміщує іншу точку на дану пряму.

Аксіома 6. Існує єдиний згин, що переміщує кожну з двох даних точок на одну із двох даних прямих, що перетинаються.

Аксіома 7. Для двох даних прямих і точки існує лінія згину, що перпендикулярна першій прямій і поміщає дану точку на другу пряму.

Ця система аксіом є незалежною, сумісною і повною. Дана система аксіом еквівалентна системі аксіом конструктивної геометрії, де як основний інструмент використовують креслярський трикутник.

Наведемо приклади практичного застосування оригамі при навчанні геометрії, зокрема, при доведенні теорем та розв'язуванні задач.

Теорема 1. *Внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих, перетнутих січною, рівні.*

Для доведення даної теореми використовуємо заготовку паперу у вигляді прямокутника. Його сторони виконуватимуть демонстрацію паралельних прямих. Перегинаємо прямокутник по січній. Склавши відповідним чином, показуємо, що різносторонні кути рівні. Теорему доведено.

Формули площі. *Площа ромба.* Початкова фігура – прямокутник. Робимо перегини через середини протилежних сторін. Відрізаємо і отримуємо ромб. Суміщаємо вершини ромба до центру фігури, тобто до точки перетину діагоналей. Отримали два рівні прямокутники зі сторонами $\frac{d_1}{2}$

та $\frac{d_2}{2}$. Маємо, що

$$S_P = 2S_n = 2 \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} = \frac{1}{2}d_1d_2.$$

Задача про трисекцію кута, яка не розв'язується в класичному розумінні за допомогою циркуля і лінійки розв'язується способом оригамі за наступною схемою.

- Беремо аркуш папери квадратної форми і позначаємо його як $ABCD$. На стороні AD позначаємо довільну точку P і проводимо відрізок BP . Потрібно розділити кут PBC на три рівні кути.
- На сторонах AB і DC позначаємо точки E, F так, щоб лінія EF була паралельною до AD . E, F позначаємо за допомогою перегину.
- Далі суміщаємо сторону BC з лінією EF . Лінію, отриману в результаті перегину, позначаємо GH .
- Робимо такий перегин, щоб точка E дотикалася до лінії BP і точка B дотикалась до лінії GH .
- Перегинаємо аркуш перпендикулярно до лінії BE , що проходить через точку G . На стороні AD позначаємо точку J .
- Сторону BC суміщаємо з лінією BJ .

Таким чином лінії BJ і BK ділять кут PBC на три рівні частини.

1. Захарійченко Ю. О. Застосування японського мистецтва «орігамі» під час навчання геометрії / Ю. О. Захарійченко, О. М. Лозинська // Постметодика. – 2021. – № 1. – С. 32-36.
2. Геометрія та мистецтво паперопластики. URL: <https://naurok.com.ua/prezentaciya-geometriya-ta-mistectvo-paperoplastiki-99551.html>.

Про фредгольмові числа неоднорідних крайових задач в дробових просторах Слободецького

Михайлець Володимир^{1,2}, Атласюк Олена^{1,2,3}, Маслюк Ганна³

mikhailets@math.cas.cz, atlasjuk@math.cas.cz,
masliuk.hanna@l11.kpi.ua

Інститут математики Чеської академії наук¹,
Інститут математики Національної академії наук України², НТУ
України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"³

Нехай задано відрізок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ та числові параметри

$$\{m, r, q\} \subset \mathbb{N}, \quad s \in (1, \infty) \setminus \mathbb{N}, \quad p \in [1, \infty).$$

Розглянемо на відрізку $[a, b]$ лінійну крайову задачу для системи m диференціальних рівнянь порядку r

$$(Ly)(t) := y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t)y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

$$By = c, \quad (2)$$

де матриці-функції $A_{r-j}(\cdot)$ належать простору $(W_p^{s-r})^{m \times m}$, вектор-функція $f(\cdot)$ — простору $(W_p^{s-r})^m$, вектор c — простору \mathbb{C}^q , а $B \in$ лінійним неперервним оператором

$$B: (W_p^s)^m \rightarrow \mathbb{C}^q.$$

Крайова умова (2) задає q скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь порядку r . Вектори і вектор-функції записуються у вигляді стовпців. У випадку $q > m$ крайова задача (1), (2) *перевизначена*, а при $q < m$ — *недовизначена*. Під розв'язком крайової задачі (1), (2) розуміємо вектор-функцію $y(\cdot) \in (W_p^s)^m$, яка задовольняє рівняння (1) при $s > r + 1/p$ скрізь, а при $s \leq r + 1/p$ — майже скрізь на $[a, b]$, та рівність (2), яка задає q скалярних крайових умов.

Розв'язок рівняння (1) заповнює простір $(W_p^s)^m$, якщо його права частина $f(\cdot)$ перебігає простір $(W_p^{s-r})^m$. Тому гранична умова (2) є найбільш загальною умовою для цього рівняння. Вона включає всі відомі типи класичних граничних умов (а саме задачу Коші, дво- та багаточовкові задачі, інтегральні та мішані задачі), а також численні неklasичні задачі. Останній клас задач може містити похідні цілого або дробового порядку β шуканої вектор-функції, де $\beta \in [0; s - \frac{1}{p}]$.

Мета даної роботи — встановити фредгольмовість крайової задачі (1), (2) для системи m диференціальних рівнянь порядку r у просторах Слободецького; знайти її індекс, вимірність ядра та ядра оператора неоднорідної крайової задачі через аналогічні властивості спеціальної прямокутної числової матриці.

Зауважимо, що випадок дробових просторів Соболева для системи m диференціальних рівнянь першого порядку було досліджено в роботі [1].

Запишемо неоднорідну крайову задачу (1), (2) у вигляді лінійного операторного рівняння $(L, B)y = (f, c)$, де (L, B) — лінійний оператор у парі банахових просторів

$$(L, B): (W_p^s)^m \rightarrow (W_p^{s-r})^m \times \mathbb{C}^q. \quad (3)$$

Нагадаємо, що лінійний неперервний оператор $T: X \rightarrow Y$, де X і Y — банахові простори, називають фредгольмовим, якщо його ядро $\ker T$ і коядро $Y/T(X)$ є скінченновимірні. Якщо цей оператор фредгольмовий, то його область значень $T(X)$ замкнена в Y , а індекс є скінченним

$$\text{ind } T := \dim \ker T - \dim(Y/T(X)) \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 1. *Лінійний оператор (3) є обмеженим і фредгольмовим з індексом $mr - q$.*

Позначимо через $Y_k(\cdot)$ єдиний розв'язок кожної із матричних задач Коші, де $k, j \in \{1, \dots, r\}$:

$$Y_k^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^r A_{r-j}(t) Y_k^{(r-j)}(t) = O_m, \quad t \in [a, b], \quad Y_k^{(j-1)}(a) = \delta_{k,j} I_m.$$

Означення. *Блочна прямокутна числова матриця*

$$M(L, B) := ([BY_0], \dots, [BY_{r-1}]) \in \mathbb{C}^{mr \times q} \quad (4)$$

є характеристичною матрицею для неоднорідної крайової задачі (1), (2). Вона утворена з r прямокутних блоків стовпців $[BY_k] \in \mathbb{C}^{m \times q}$. Її j -й стовпчик є результатом дії оператора B на j -й стовпчик матриці-функції $Y_k(\cdot)$.

Тут mr — кількість скалярних диференціальних рівнянь системи (1), q — кількість скалярних крайових умов.

Теорема 2. *Вимірності ядра і коядра оператора (3) дорівнюють відповідно вимірностям ядра і коядра характеристичної матриці (4)*

$$\dim \ker(L, B) = \dim \ker(M(L, B)),$$

$$\dim \text{coker}(L, B) = \dim \text{coker}(M(L, B)).$$

Наслідок. *[Критерій оборотності оператора (3)]. Оператор (L, B) є оборотним тоді і тільки тоді, коли $q = mr$ і матриця $M(L, B)$ є не-виродженою.*

1. Mikhailets V. A., Atlasiuk O. M., Skorobohach T. B. On the Solvability of Fredholm Boundary-Value Problems in Fractional Sobolev Spaces // Ukrainian Math. — 2023. — V. 75, № 1. — P. 107 – 117.

Деякі інструменти візуалізації і аналізу складних мереж та графів

Міхалевський Віталій

cezar_mv@ukr.net

Хмельницький національний університет

Розглядається один з напрямків аналізу складних мереж – їх візуалізація, яка дозволяє отримати важливу інформацію про структуру і властивості мережі без точних розрахунків. Основні інструменти візуалізації, у переважній більшості, вільно поширювані, безкоштовні програми.

Для аналізу мережі в цілому використовують такі параметри, як [2]: а) кількість вузлів; б) кількість ребер; в) середня відстань між вузлами; г) щільність – відношення кількості ребер в мережі до можливої максимальної кількості ребер $n(n-1)/2$ при даній кількості вузлів n ; д) кількість симетричних, транзитивних і циклічних тріад; е) діаметр мережі – найбільша геодезична відстань у мережі і т.д.

Важливою характеристикою мережі є функція розподілу степенів вузлів $P(k)$, яка визначається як ймовірність того, що довільний вузол мережі і має степінь $k_i = k$. Мережі, які характеризуються різними $P(k)$, демонструють різну поведінку. $P(k)$ в деяких випадках може бути розподілом Пуассона ($P(k) = e^{-m} m^k / k!$, де m – математичне сподівання), експоненціальним ($P(k) = e^{-k/m}$) або степеневим ($P(k) \sim 1/k^\gamma$, $k \neq 0$, $\gamma > 0$).

Відстань між вузлами визначається як кількість ребер, через які можна добратися від одного вузла до іншого. Найкоротшим шляхом d_{ij} між вузлами i та j називається найменша відстань між ними. Для усієї мережі можна ввести поняття середнього шляху, як середнього по усіх парах вузлів найкоротшої відстані між ними: $l = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i>j} d_{ij}$, де n – кількість вузлів, d_{ij} – найкоротша відстань між вузлами i та j . Угорськими математиками П. Ердешем і А. Реньї було показано, що середня відстань між двома вершинами у випадковому графові (модель Ердеша–Реньї) росте як логарифм від числа його вузлів [2, 3].

Мережа може виявитися незв'язною, тобто знайдуться вузли, відстань між якими виявиться нескінченною. Відповідно, середній шлях, згідно приведеної вище формули, буде також нескінченним. Для врахування таких випадків вводиться поняття середнього інверсного шляху між вузлами (його ще називають "глобальною ефективністю мережі"), що розраховується за формулою [2, 3]:

$$il = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i>j} \frac{1}{d_{ij}}.$$

До того ж, потрібно аналізувати різні мережеві параметри, такі як коефіцієнт кластерності [1], модулярність [3] та інші.

Для аналізу складних мереж виникає необхідність використання інструментів візуалізації, у переважній більшості, вільно поширюваних, безкоштовних програм [1, 3]. Для практичної роботи з графовими структурами користувачу не обов'язково потрібно встановлювати програмне забезпечення на своєму комп'ютері. Серед багатьох мережевих сервісів виділено *GraphOnline* (<https://graphonline.en>) – простий і функціональний інструмент для створення, дослідження і візуалізації невеликих графів в режимі онлайн. Забезпечує експорт файлів в формати *GraphML*, *CSV*, вивід інформації у вигляді матриць, визначення різних параметрів графу, а також реалізацію таких алгоритмів, як пошук найкоротшого шляху, компонент зв'язності, діаметру графу і т.п.

Серед нинішніх програм візуалізації і аналізу мереж та графів виділено *Gephi* (<https://gephi.org/>) [1, 3], яка забезпечує швидку компоновку, ефективну фільтрацію та інтерактивне дослідження даних, а також є одним з кращих варіантів для візуалізації великомасштабних мереж. Програма включає в себе множину різних алгоритмів компоновання (укладання графів на площині) і дозволяє налаштовувати кольори, розміри і мітки в графах. Звичайно, правильна параметризація будь-якого алгоритму компоновки може впливати як на час роботи, так і на результат візуалізації.

Отже, сучасне дослідження мереж змінилося від аналізу невеликих графів та властивостей окремих вершин і ребер до розгляду статистичних властивостей графів (мереж). У поведінці сучасних мереж провідну роль відіграє топологія, а такі об'єкти часто називають складними мережами (complex networks). Зазвичай ці мережі не статичні, а такі, що розвиваються, і для розуміння їхньої структури необхідно знати принципи їх еволюції.

1. Аналіз соціальних мереж [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.lib.mdpu.org.ua/e-book/analiz_soc/official/index.htm
2. Зубок В.Ю. Огляд використання математичних параметрів складної мережі для аналізу топології Інтернет / В.Ю. Зубок, О.Т. Дармохвал // Збірник наукових праць Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України. – К. : ПІМЕ ім. Г.Є. Пухова НАН України, 2010. – Вип. 55. – С. 19-29.
3. Ланде Д.В. Візуалізація та аналіз мережевих структур : навчальний посібник / Д.В. Ланде, І.Ю. Субач; ІСЗЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського. – К. : КПІ ім. Ігоря Сікорського, Вид-во "Політехніка", 2021. – 80 с.

Матричні крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном

Несмелова Ольга

star-o@ukr.net

Інститут прикладної математики і механіки НАН України

Досліджено задачу про побудову розв'язків [1, 2, 3]

$$Z(t) \in \mathbb{C}_{\alpha \times \beta}^2[a, b] := \mathbb{C}^2[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$$

лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\mathcal{P}Z(t) = A(t)Z(t) + F(t) \quad (1)$$

підпорядкованих крайовій умові

$$\mathcal{L}Z(\cdot) = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A} \in \mathbb{R}^{\lambda \times \mu} \quad (2)$$

з матричним p -Лапласіаном

$$\mathcal{P}Z(t) := ((R(t)Z(t))'S(t))'.$$

Тут

$$R(t) \in \mathbb{C}_{\gamma \times \alpha}^2[a, b] := \mathbb{C}^2[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\gamma \times \alpha},$$

$$S(t) \in \mathbb{C}_{\beta \times \delta}^2[a, b] := \mathbb{C}^2[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\beta \times \delta},$$

$$F(t) \in \mathbb{C}_{\gamma \times \delta}[a, b] := \mathbb{C}^1[a, b] \otimes \mathbb{R}^{\gamma \times \delta},$$

$\mathcal{L}Z(\cdot)$ — лінійний обмежений матричний функціонал:

$$\mathcal{L}Z(\cdot) : \mathbb{C}^2[a; b] \rightarrow \mathbb{R}^{\lambda \times \mu}.$$

Взагалі кажучи, припускаємо $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta \neq \lambda \neq \mu$ — довільні натуральні числа.

Крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном виникають при вивченні радіальних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Особливістю різноманітних крайових задач для звичайних диференціальних та різницевих рівнянь з p -Лапласіаном є відсутність єдиного розв'язку. Актуальність вивчення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном пов'язана з численними застосуваннями подібних задач у теорії еластичності, теорії плазми та астрофізиці [4].

Задача про знаходження розв'язків рівняння (1) приводить до задачі про знаходження розв'язків традиційного диференціально-алгебраїчного рівняння [1, 2, 3, 5, 6].

Нами побудовано вдосконалену класифікацію лінійних матричних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном. Знайдено конструктивні умови розв'язності та схему побудови розв'язків матричних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном [7].

Запропонована схема дослідження матричних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном (1), (2) може бути перенесена на нелінійні матричні крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з p -Лапласіаном [7, 8].

1. Campbell S.L. Singular Systems of differential equations. — San Francisco — London — Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. — 1980. — 178 p.
2. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. — К.: Вища школа, 2000. — 296 с.
3. Chuiko S.M. A generalized matrix differential-algebraic equation // Journal of Mathematical Sciences (N.Y.). — 2015. — **210**, № 1. — P. 9 — 21.
4. Li C., Ge W. Existence of positive solutions for p -Laplacian singular boundary value problems // Indian J. pure and appl. Math. — 2003. — **34**, № 1. — P. 187 — 203.
5. Бойчук А.А., Покутний А.А., Чистяков В.Ф. О применении теории возмущений к исследованию разрешимости дифференциально-алгебраических уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2013. — **53**, № 6. — С. 958 — 969.
6. Chuiko S.M. On a reduction of the order in a differential-algebraic system // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — **235**, № 1. — P. 2 — 14.
7. есмелова О.В. Матричные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с p -Лапласианом // Український математичний вісник. — Т. 17, №1. — С. 49 — 65.
8. Chuiko S.M., Starkova O.V. Autonomous Noether boundary-value problems not solved with respect to the derivative // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — **230**. — № 5. — P. 799 — 803.

Усереднення в багаточастотних системах першого наближення із запізненням та залежністю частот від повільних змінних

Пастула Михайло

`pastula.mykhailo@chnu.edu.ua`

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Метод усереднення для багаточастотних диференціальних рівнянь обґрунтовано в працях В.М. Самойленка і Р.І. Петришина [1] та інших вчених. Багаточастотні системи із запізненням аргументу методом усереднення досліджувалися в працях Я.Й. Бігуна, І.В. Краснокутської, І.Д. Скутаря в працях [2], [3] та ін.

У даній роботі метод усереднення обґрунтований для багаточастотної системи першого наближення

$$\begin{aligned}\frac{da}{d\tau} &= X_0(\tau, a) + \varepsilon X_1(\tau, a, \varphi), \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= \frac{\omega(\tau, a)}{\varepsilon} + Y_1(\tau, a, \varphi),\end{aligned}\tag{1}$$

де $\tau \geq 0$, вектор-функції X_0, X_1, Y_1 і ω визначені при $\tau \in [0, L]$, $a \in D$ - обмежена область в \mathbb{R}^n , $\varphi \in \mathbb{T}^m$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$. Для розв'язку системи рівнянь задані крайові умови

$$\alpha_0 a|_{\tau=0} + \alpha_1 a|_{\tau=L} = d_1, \quad \beta_0 \varphi|_{\tau=0} + \beta_1 \varphi|_{\tau=L} = d_2,\tag{2}$$

де α_i, β_i - задані числа, $d_1 \in \mathbb{R}^n, d_2 \in \mathbb{R}^m$.

Відповідна (1) усереднена система рівнянь за швидкими змінними $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ набуває вигляду

$$\frac{d\bar{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \bar{a}) + \varepsilon X_{10}(\tau, \bar{a}), \quad \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau, \bar{a})}{\varepsilon} + Y_{10}(\tau, \bar{a}),\tag{3}$$

із крайовими умовами вигляду (2).

Зауважимо, що усереднена задача значно простіше, ніж (1), (2), оскільки повільні змінні \bar{a} визначаються незалежно від швидких змінних $\bar{\varphi}$.

Складністю обґрунтування методу усереднення є наявність резонансів, умова яких

$$k_1 \omega_1(\tau, a) + \dots + k_m \omega_m(\tau, a) \cong 0, \quad |k_1| + \dots + |k_m| \neq 0.\tag{4}$$

Як і в [1], умову виходу із малої резонансної зони запишемо у вигляді

$$W(\tau, a) \neq 0,\tag{5}$$

для всіх $\tau \in [0, L]$ і $a \in D_\rho$ - ρ -окіл розв'язку системи рівнянь

$$\frac{d\tilde{a}}{d\tau} = X_0(\tau, \tilde{a}) \quad (6)$$

із крайовою умовою

$$\alpha_0 \tilde{a}|_{\tau=0} + \alpha_1 \tilde{a}|_{\tau=L} = d_1. \quad (7)$$

Тут $W(\tau, a)$ – визначник Вронського за системою функцій w_1, \dots, w_m .

Основним результатом роботи є теорема

Теорема. *Нехай виконуються умови*

1) вектор-функції X_0, X_1, Y_1 визначені і неперервні разом із частинними похідними до порядку $m + 1$ в області $[0, L] \times D \times \mathbb{T}^m$

2) вектор-функція ω визначена і неперервна разом із частинними похідними в області $[0, L] \times D$ до порядку m

3) існує єдиний розв'язок задачі (6), (7), який лежить в D разом із ρ -околом

4) Виконується умова (5)

5) Матриця $Q(\bar{y}) = \alpha_0 I + \alpha_1 \frac{d\bar{a}(L, \bar{y})}{d\bar{y}}$ не вироджена і $\beta_0 + \beta_1 \neq 0$.

Тоді для досить малого $\varepsilon^* > 0$ існує єдиний розв'язок усередненої задачі для будь-якого $\tau \in (0, L]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*]$, $\varepsilon^* \leq \varepsilon_0$, і одержується оцінка

$$\|a(\tau; \bar{y} + \mu, \psi + \zeta, \varepsilon) - \bar{a}(\tau; \bar{y}, \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{1+1/m}, \quad (8)$$

де $c > 0$ і не залежить від ε .

Зауваження. У такий же спосіб, як для умов (2), встановлюється оцінка для багатоточкових умов

$$\sum_{\nu=1}^r \alpha_\nu a|_{\tau=\tau_\nu} = d_1, \quad \sum_{\nu=1}^r \beta_\nu \varphi|_{\tau=\tau_\nu} = d_2, \quad (9)$$

де $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_r \leq L$.

На мові JavaScript створено програму числового моделювання системи (1) з умовами (9).

1. Samoilenko A., Petryshyn R. Multifrequency Oscillations of Nonlinear Systems. Dordrecht: Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2004. 317 p.
2. Бігун Я. Й., Скутар І. Д. Усереднення в багаточастотних системах із запізненням та локально-інтегральними умовами. Буковинський математичний журнал. 2020. Т. 8, № 2. С. 14–23.
3. Bihun Yaroslav, Petryshyn Roman, Inessa. Averaging method in multifrequency systems with linearly transformed arguments and with point and integral conditions. Acta et Commentationes, Exact and Natural Sciences, 2018, Nr. 2(6). P. 20–27.

Дослідження поведінки розв'язків системи двох спряжених стохастичних осциляторів

Перегуда Олег, Асроров Фарход

perol@ukr.net, far@ukr.net

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Розглядається система двох гармонічних осциляторів з тертям, що описується системою двох лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + 2h_1\dot{u}_1(t) + k_1^2u_1(t) = 0, \\ \ddot{u}_2(t) + 2h_2\dot{u}_2(t) + k_2^2u_2(t) = 0, \\ u_1(0) = u_{10}, \dot{u}_1(0) = \dot{u}_{10}, \\ u_2(0) = u_{20}, \dot{u}_2(0) = \dot{u}_{20} \end{cases} \quad (1)$$

де u_{0i}, \dot{u}_{0i} – початкові положення і швидкості осциляторів ($u_{i0}^2 + \dot{u}_{i0}^2 > 0$); $k_i > 0, h_i$ – коефіцієнти тертя осциляторів; $u_i(t), \dot{u}_i(t)$ – положення і швидкість осциляторів в момент часу $t > 0$; $i = 1, 2$.

Через $w_k(t), k = \overline{1, 2}$ позначимо незалежні одновимірні вінерівські процеси, що визначені на ймовірністному просторі (Ω, \mathcal{F}, P) .

При випадковому збуренні вінерівськими процесами вздовж вектора фазової швидкості

$$(x_2(t), -k_1^2x_1(t) - 2h_1x_2(t), x_4(t), -k_2^2x_3(t) - 2h_2x_4(t))$$

початкова система (1) перетворюється у систему стохастичних рівнянь Іто.

При заданих випадкових збуреннях розглядається загальна система рівнянь вигляду:

$$\dot{x}(t) = Bx(t)\dot{\xi}(t) \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= g_{11}(t) + g_{12}(t)\dot{w}_1(t); \quad \dot{\xi}_2(t) = g_{21}(t) + g_{22}(t)\dot{w}_1(t); \\ \dot{\xi}_3(t) &= g_{31}(t) + g_{32}(t)\dot{w}_2(t); \quad \dot{\xi}_4(t) = g_{41}(t) + g_{42}(t)\dot{w}_2(t); \end{aligned}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1^2 & -2h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_2^2 & -2h_2 \end{pmatrix}$$

$g_i(t)$ – не випадкові функції, $\dot{\xi}_i(t)$ – "похідна" від вінерівського процесу ("білий шум" у формі Іто), крім того, вводиться додатково керуючий

вектор переносу, при якому фазові траєкторії рівняння (1) будуть інваріантними множинами збуреної системи (2).

Надалі будемо притримуватися наступних позначень:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sqrt{h_1^2 - k_1^2}, \quad \mu_2 = \sqrt{h_2^2 - k_2^2}, \\ \lambda_{11} &= -h_1 + \mu_1, \quad \lambda_{12} = -h_1 - \mu_1, \quad \lambda_{21} = -h_2 + \mu_2, \quad \lambda_{22} = -h_2 - \mu_2, \\ \alpha_{i1}(t) &= \int_0^t g_{i1}(s) ds, \quad \alpha_{2i}(t) = \int_0^t g_{2i}^2(s) ds, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Має місце наступна теорема:

Теорема. *Нехай $x(t)$ – розв’язок рівняння (2), тоді з ймовірністю 1 для всіх $t \geq 0$ мають місце рівності:*

$$x_1(t) = A_1(t)\sqrt{2} \cos(\phi_1(t) + \frac{\pi}{4}),$$

$$x_2(t) = A_1(t)(\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2) \sin(\phi_1(t) + \gamma_1),$$

$$x_3(t) = A_2(t)\sqrt{2} \cos(\phi_2(t) + \frac{\pi}{4}),$$

$$x_4(t) = A_2(t)(\lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2)(\sin \phi_2(t) + \gamma_2).$$

де

$$A_1(t) = \frac{1}{\lambda_{11} - \lambda_{12}} \sqrt{(y_{11}^2(t) - y_{12}^2(t))}, \quad A_2(t) = \frac{1}{\lambda_{21} - \lambda_{22}} \sqrt{(y_{21}^2(t) - y_{22}^2(t))},$$

$$y_{ij}(t) = y_{ij}(0) \exp\left\{-\frac{\lambda_{ij}^2}{2} \alpha_{2i}(t) + \lambda_{ij} \xi(t)\right\},$$

$$y_{11}(0) = -\lambda_{12} u_{10} + \dot{u}_{10}, \quad y_{12}(0) = -\lambda_{11} u_{10} + \dot{u}_{10},$$

$$y_{21}(0) = -\lambda_{22} u_{20} + \dot{u}_{20}, \quad y_{22}(0) = -\lambda_{21} u_{20} + \dot{u}_{20},$$

$$tg\phi_1(t) = \frac{y_{12}(0)}{y_{11}(0)} \exp\{-2\mu_1[h_1 \alpha_{2i}(t) + \xi(t)]\},$$

$$tg\phi_2(t) = \frac{y_{21}(0)}{y_{21}(0)} \exp\{-2\mu_2[h_2 \alpha_{2i}(t) + \xi(t)]\},$$

$$tg\gamma_1 = -\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}}, \quad tg\gamma_2 = -\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}}, \quad i = 1, 2, j = 1, 2.$$

Для отриманих розв’язків стохастичної системи рівнянь Іто проведено якісний аналіз поведінки амплітуди та фази розв’язків.

Побудовані та досліджені різні моделі згасаючих стохастичних аперіодичних осциляторів в залежності від коефіцієнтів системи.

1. Кулініч Г.Л., Перегуда О.В. Якісний аналіз систем стохастичних диференціальних рівнянь Іто // Укр. мат. журн. – 2000. – 52, № 9. – С. 1251–1256.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наукова думка, 1968. – 354 с.

Слово про вчителя (світлій пам'яті А.М. Самойленка)

Перестюк Микола, Петришин Роман

perestyukna@gmail.com, r.petryshyn@chnu.edu.ua

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича*

Народився Анатолій Михайлович Самойленко 2 січня 1938 року у селі Потіївка на Житомирщині. Після закінчення середньої школи в м. Малин він вступив на геологічний факультет Київського державного університету ім.Т.Г.Шевченка, але через палке захоплення математикою продовжив навчання на механіко-математичному факультеті, який з відзнакою закінчив у 1960 році і на запрошення академіка Юрія Митропольського вступив до аспірантури Інституту математики АН УРСР. Успішно захистивши кандидатську дисертацію “Застосування асимптотичних методів для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь із “нерегулярною” правою частиною” А.М.Самойленко протягом 11 років після закінчення аспірантури працював в Інституті математики АН УРСР. У 1967 році він захистив докторську дисертацію “Деякі питання теорії періодичних і квазіперіодичних систем”, ставши наймолодшим в Україні доктором наук. У період з 1974 по 1987 рік Анатолій Михайлович очолював кафедру інтегральних та диференціальних рівнянь Київського державного університету ім. Т.Г. Шевченка. З його приходом на кафедрі істотно активізувалася науково-дослідна робота. У 1978 році Анатолія Михайловича обрали членом-кореспондентом АН УРСР. Невдовзі після повернення в 1987 році до Інституту математики АН УРСР А.М. Самойленко став його директором та впродовж 30 років очолював інститут. За цей час за ініціативи Анатолія Михайловича було проведено велику кількість авторитетних міжнародних конференцій, у тому числі два Українських математичних конгреси (2001, 2009). Математичний талант і неабиякі організаторські здібності Анатолія Михайловича забезпечили йому заслужений авторитет і повагу наукової спільноти. Його обрано академіком НАН України (1995), дійсним членом Європейської академії наук (2002), членом-кореспондентом Accademia Peloritana dei Pericolanti (Мессіна, Сицилія, 2006), іноземним членом АН Республіки Таджикистан (2011). З 2006 року до останнього подиху (4 грудня 2020 року) А.М. Самойленко обіймав посаду академіка-секретаря Відділення математики НАН України.

Наукові досягнення Анатолія Михайловича широко відомі спеціалістам у галузі диференціальних рівнянь, математичної фізики, теорії нелінійних коливань. Він по праву вважається основоположником цілого ряду важливих напрямів досліджень у цих галузях. Так, у 1965 р. він запропонував і обґрунтував новий ефективний метод відшукання періодичних розв'язків суттєво нелінійних диференціальних рівнянь, який сьогодні ві-

домий як “чисельно-аналітичний метод Самойленка”. Важливе місце в наукових пошуках А.М. Самойленка займали питання теорії інваріантних тороїдальних многовидів нелінійних динамічних систем. Йому належить розроблення ефективного методу дослідження задачі про збереження інваріантних торів при збуреннях. В основу свого підходу Анатолій Михайлович поклав введене ним же поняття функції Гріна лінійного розширення динамічної системи на торі (у сучасній математичній літературі це поняття відоме як функція Гріна-Самойленка). Ще один загальновизнаний напрям досліджень Анатолія Михайловича пов’язаний з теорією систем з імпульсною дією. Талант і досвід Анатолія Михайловича як ученого й організатора науки, лідера київської математичної школи яскраво проявився у його вмінні керувати дослідницькою роботою відразу в кількох напрямках. Так, разом з учнями було розроблено теорію знакозмінних функцій Ляпунова для вивчення дихотомії, глобально обмежених розв’язків та інваріантних многовидів лінійних розширень динамічних систем на торі, розвинуто теорію нетерових крайових задач для систем із запізненням, рівнянь з імпульсною дією, сингулярно збурених систем. Ще один напрям досліджень А.М. Самойленка стосувався вивчення резонансних явищ у багаточастотних системах, включаючи системи з повільно змінними параметрами. Наукові досягнення Анатолія Михайловича стали фундаментальним вкладом у математику. Він – автор понад 600 наукових праць, у тому числі трьох десятків монографій, більше двох десятків підручників і навчальних посібників. Більшість робіт А.М. Самойленка перекладено та видано за кордоном.

Анатолій Михайлович приділяв велику увагу підготовці висококваліфікованих наукових кадрів. Серед його учнів – 36 докторів та 89 кандидатів фізико-математичних наук, які успішно працюють у багатьох математичних центрах ряду країн. На особливу увагу також заслуговує педагогічна діяльність професора А.М. Самойленка в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка, Національному технічному університеті України “КПІ імені Ігоря Сікорського” та інших вищих навчальних закладах, зокрема і Чернівецькому університеті. Яскравий лекторський талант Анатолія Михайловича, його вміння чітко, ясно та емоційно викладати матеріал на основі розроблених ним оригінальних лекційних курсів завжди справляв незабутнє враження на слухачів. Багаторічну наукову, педагогічну і громадську діяльність А.М. Самойленка відзначено низкою високих нагород і звань, але жодна відзнака не може бути важливішою за світлий, добрий спомин про Анатолія Михайловича – НАУКОВЦЯ, ВЧИТЕЛЯ, ЛЮДИНИ.

Існування розв'язку задачі Коші для стохастичного рівняння з частинними похідними та вінеровими збуреннями

Перун Галина¹, Ясинський Володимир²

g.perun@chnu.edu.ua, vkyasynskyu@ukr.net

¹ Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

² Канада

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P)$ задано потік неспадних σ -алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $F_t \subset F$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$ при $t_1 < t_2$. Випадкова функція $u(t, x, \omega)$, $(t, x) \in \Pi$, $\Pi \equiv R^1 \times R^1$, $\omega \in \Omega$ вимірна стосовно σ -алгебри F_t із ймовірністю 1 є розв'язком задачі Коші для лінійного диференціального рівняння спеціальної конструкції

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [Q(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})u(t, x, \omega)] + [Q(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})u(t, x, \omega)] = \\ = [Q(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})u(t, x, \omega)]dw(t, \omega), \end{aligned} \quad (1)$$

$$[Q(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})u(t, x, \omega)]|_{t=0} = [Qu]_0. \quad (2)$$

Тут $w(t, \omega)$ – стандартний скалярний вінерів процес. Під розв'язком задачі (1), (2) розуміємо функцію $u(t, x, \omega)$, яка з ймовірністю 1 при кожному (t, x) задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} Q(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})u(t, x, \omega) = [Qu]_0 + \int_0^t Q(B, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x})u(s, x, \omega)ds + \\ + \int_0^t Q(C, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x})u(s, x, \omega)dw(s, \omega) \end{aligned} \quad (3)$$

Питання існування розв'язку задачі (1), (2) вивчатимемо у просторі m_T функцій зі скінченною нормою

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T E \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx \right)^2 dt \equiv \int_0^T \|u\|_{L_2, E}^2 dt. \quad (4)$$

де E - операція математичного сподівання.

Задачу розв'язуватимемо методом інтегрального перетворення Фур'є.

При цьому скористаємось

Лема. Перетворення Фур'є за змінною x для функції $u(t, x, \omega)$

$$v(t, \sigma, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \quad (5)$$

не виводить її за межі простору m_T при довільному скінченному T .

На основі цього сформулюємо теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

а) корені многочлена $P(\lambda, i\sigma) = \lambda Q(A, \lambda, i\sigma) + Q(B, \lambda, i\sigma)$ при всіх $\sigma \neq 0$ задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} \lambda \leq \varphi(\sigma) < 0, \quad \varphi(0) = 0;$$

б) задача Коші для рівняння (1) за умови, що $C = 0$ має розв'язки при кожному $t \in [0, T]$ в $L_{2,E}$.

Тоді існує з імовірністю 1 розв'язок задачі (1), (2) в просторі m_T .

Доведення твердження ґрунтується на припущенні про існування фундаментального розв'язку [1]

$$H(t, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{P(\lambda, i\sigma)} \quad (6)$$

відповідного детермінованого рівняння, яке отримане в образах Фур'є для рівняння (1) та теоремі Планшерера. Тут Γ – контур, що охоплює нулі многочлена $P(\lambda, i\sigma)$.

1. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир. 1992. – 301 с.

Методичні аспекти розв'язування задач на геометричні перетворення для майбутніх учителів математики

Правицька Наталія

n.pravitska@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Розв'язування задач на геометричні перетворення є важливою складовою математичної освіти майбутніх учителів математики. Вміння використовувати різні методичні підходи при розв'язуванні задач з використанням геометричних перетворень, обґрунтовувати педагогічні принципи, розробляти та впроваджувати нові методи навчання та форми організації освітнього процесу у закладі загальної середньої освіти свідчить про володіння методичною компетентністю. Основними методичними аспектами розв'язування завдань на геометричні перетворення для учителів математики під час їх професійного становлення є теоретична підготовка, візуалізація, практичні вправи, дослідницький підхід, практичне застосування, зворотний зв'язок і обговорення, застосування інтерактивних засобів, робота з колективами, оцінка та підсумкові роботи. Зупинимось на кожному з них.

1. Теоретична підготовка.

Майбутнім учителям математики слід вивчити теоретичний матеріал з геометричних перетворень, включаючи особливості кожного виду перетворення, та правила їх застосування. Розглядати основні теореми і властивості геометричних перетворень.

2. Візуалізація.

Використовувати графічні засоби, такі як дошки для малювання, геометричні програми або динамічні геометричні середовища (DG, GeoGebra, GRAN), щоб візуалізувати геометричні перетворення.

Використання цього типу програм дозволяє розв'язувати певні задачі, не знаючи відповідних аналітичних інструментів, методів і формул, правил. Завдяки можливості графічного супроводу комп'ютерного розв'язування задач, можливо чітко і легко розв'язувати досить складні задачі, впевнено володіти відповідними поняттями і системами правил.

Показувати, як виглядають геометричні об'єкти після застосування різних перетворень.

3. Практичні вправи.

Надавати можливість вирішувати практичні завдання на геометричні перетворення, включаючи завдання різної складності.

Робити акценти на розв'язанні завдань за допомогою логічних розмірковувань і аналітичних навичок.

4. Дослідницький підхід.

Спонукаати до проведення досліджень та дослідів з використанням гео-

метричних перетворень. Демонструвати переваги перевагу того чи іншого методу.

5. Практичне застосування.

Пояснювати практичне застосування геометричних перетворень у реальному житті, наприклад, у графіці, комп'ютерному моделюванні чи архітектурному дизайні.

6. Зворотний зв'язок і обговорення.

Постійно спілкуватися, допомагати вирішувати труднощі та надавати зворотний зв'язок щодо розвитку навичок розв'язування завдань.

7. Застосування інтерактивних засобів.

Використовувати інтерактивні вправи, веб-сайти та програми для навчання геометричним перетворенням.

8. Робота з колективами.

Заохочувати спільну роботу у групах, де можна обмінюватися ідеями та розв'язувати завдання разом.

9. Оцінка та підсумкові роботи.

Проводити систематичну оцінку навчальних досягнень при вивченні геометричних перетворень і надавати зворотний зв'язок для подальшого розвитку.

Врахування цих аспектів надає можливість розробити відповідну ефективну систему методів, прийомів, засобів навчання. Загалом, навчання учнів геометричних перетворень у майбутніх учителів математики вимагає поєднання теоретичних знань, практичних вмінь і педагогічних методів для забезпечення ефективного розвитку їхніх навичок та компетенцій у цій області.

Для сучасної педагогічної науки актуальною є проблема розробки вдосконаленої методики навчання геометричних перетворень школярів і майбутніх вчителів математики на основі систематичного збагачення змісту дисциплін за рахунок нових досягнень математичної науки, оновлення практичної бази завдань різного рівня складності для учнів з різним стилем мислення, а також ефективного використання сучасних засобів ІКТ, які не лише полегшують сприймання школярами геометричних об'єктів (зокрема, просторових), але й сприяють розвитку самостійного геометричного мислення учнів.

1. Працьовитий М.В. До концепції розвитку математичної освіти // Сучасна математика і математична освіта. Матеріали Місячника Інституту математики НАН України в НПУ імені М.П. Драгоманова (1 березня - 2 квітня 2004 р.). – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. – С. 116 - 121.
2. Працьовитий М.В. Геометричні перетворення. Теоретико-груповий погляд на геометрію. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. – 18 с.

Застосування у метричній теорії чисел, фрактальному аналізі та теорії розподілів випадкових величин B -зображення чисел

Працьовитий Микола, Бондаренко Ольга,
Гончаренко Яніна, Лисенко Ірина

prats4444@gmail.com, o.i.bondarenko@udu.edu.ua,
goncharenko.ya.v@gmail.com, i.m.lysenko@npu.edu.ua
Український державний університет імені Михайла Драгоманова,
Інститут математики НАН України

Нехай $A = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — алфавіт (набір цифр), $L = A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту; (Θ_n) — довільна послідовність додатних дійсних чисел ($n \in Z$) така, що

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{-n} \equiv u < 1, \quad 0 < \sum_{n=0}^{+\infty} \Theta_n \equiv v < 1, \quad u + v = 1.$$

Прикладом такої послідовності є двостороння послідовність (Θ_n) : $\Theta_0 = \frac{1-3a}{1-a}$, $\Theta_{-n} = \Theta_n = a^n$, де параметр a задовольняє нерівності $0 < a < \frac{1}{3}$, $n \in N$, зокрема $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Сформуємо іншу двосторонню послідовність (b_n) , визначену послідовністю (Θ_n) , а саме:

$$b_n \equiv \sum_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i = b_{n-1} + \Theta_{n-1}.$$

Теорема 1. Для будь-якого числа $x \in (0; 1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що виконується одна з рівностей

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^m b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^B, \quad (1)$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^B. \quad (2)$$

Символічні записи x рівностями (1) або (2) називатимемо B -зображенням цього числа, а $\alpha_n = \alpha_n(x)$ — n -ою його цифрою. Із-за єдиності B -зображення числа, $\alpha_n(x)$ є коректно означеною функцією числа x .

Числа, для яких виконується рівність (1), називаються B -скінченними, а ті, для яких виконується рівність (2), — B -нескінченними.

Теорема 2. Множина чисел інтервалу $[0; 1]$, цифри B -зображення якої є обмеженими, має нульову міру Лебега.

Нехай $\nu_n(x)$ — частота цифри $n \in Z$ у B -зображенні числа $x \in (0; 1)$.

Теорема 3. Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел інтервалу $(0; 1)$ частота довільної цифри $i \in Z$ алфавіту дорівнює Θ_i .

Числа, для яких виконуються умови теореми 3, називаються B -нормальними, а решта чисел — B -ненормальними.

Наслідок. Множина B -ненормальних чисел є суперфрактальною множиною нульової міри Лебега.

Теорема 4. Якщо H_B^α — міра Гаусдорфа множини $E \subset (0; 1)$, що ґрунтується на покриттях множини E B -циліндрами, а H^α — класична α -міра Гаусдорфа, то $H^\alpha(E) \leq H_B^\alpha(E) \leq 6H^\alpha(E)$.

Наслідок. При обчисленні розмірності Гаусдорфа-Безиковича довільної множини $E \subset (0; 1)$ можна обмежуватись покриттями B -циліндрами.

Теорема 5. Множина чисел $C[B; V] = \{x : \alpha_n(x) \in X\}$ має розмірність Гаусдорфа-Безиковича, що є розв'язком рівняння $\sum_{i \in V} \theta_i^x = 1$.

Теорема 6. Множина $M \equiv M[B, \bar{p}] = \{x : x \in [0; 1], \nu_i(x) = p_i, i \in Z\}$ є 1) щільною в $[0; 1]$; 2) всюди розривною; 3) множиною, розмірність Гаусдорфа-Безиковича якої обчислюється за формулою

$$\alpha_0(M) = \frac{\ln \prod_{i \in Z} p_i^{\theta_i}}{\ln \prod_{i \in Z} \theta_i^{\theta_i}};$$

4) N -самоподібною множиною з самоподібною розмірністю 1.

Теорема 7. Розподіл випадкової величини $\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n}^B$, де (ξ_n) — послідовність незалежних випадкових величин таких, що $P\{\xi_n = i\} = p_{in} \geq 0$ має чистий лебегівський тип (дискретний, абсолютно неперервний або сингулярний).

У доповіді будуть висвітлені критерії належності розподілу кожному з чистих типів. У випадку сингулярності розподілу буде деталізовано його фрактальні властивості.

1. Pratsovytyi M. V., Baranovskyi O. M., Bondarenko O.I., Ratushniak S.P. One class of continuous locally complicated functions related to infinite-symbol Φ -representation of numbers. *Matematychni Studii*, 59(2), 123-131. <https://doi.org/10.30970/ms.59.2.123-131>

Задача з імпульсним впливом для параболічного рівняння з виродженням

Пукальський Іван, Яшан Богдан

i.pukalsky@chnu.edu.ua, b.yashan@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Нехай $\eta, t_0, t_1, \dots, t_{N+1}$ – фіксовані числа, $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, $\eta \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{1, \dots, N\}$, Ω – деяка обмежена область $\dim \Omega \leq n - 1$, $D = \{(t, x) | t \in [t_0, t_{N+1}), x \in \bar{\Omega}\} \cup \{(t, x) | t = \eta, x \in R^n\}$.

Розглянемо в області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times R^n$ задачу знаходження функції $u(t, x)$, яка задовольняє при $(t, x) \in \Pi \setminus D$, $t \neq t_\lambda$ рівняння

$$[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t, x) \partial_x^k - \sum_{|p| \leq 2b-1} a_p(t, x) \partial_x^p] u(t, x) = f(t, x) \quad (1)$$

і умови за змінною t :

$$u(t_0 + 0, x) = \varphi_0(x), \quad x \in R^n \setminus \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$u(t_\lambda + 0, x) - u(t_\lambda - 0, x) = b_\lambda(x)u(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(x), \quad x \in ((\Pi \setminus D) \cap (t = t_\lambda)), \quad (3)$$

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) у точці $P(t, x) \in \Pi \setminus D$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)}, t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)}, x)$: $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = |t - \eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t - \eta| \leq 1$, $s_1(\beta_i^{(1)}, t) = 1$ при $|t - \eta| \geq 1$; $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = \rho(x)^{\beta_i^{(2)}}$ при $\rho(x) \leq 1$, $s_2(\beta_i^{(2)}, x) = 1$ при $\rho(x) \geq 1$, $\rho(x) = \inf_{z \in \bar{\Omega}} |x - z|$, $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta_i^{(\nu)} \in (-\infty, \infty)$, $\nu \in \{1, 2\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)}, \dots, \beta_n^{(\nu)})$, $\beta = \{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\}$.

Позначимо через $\Pi_r = [t_r, t_{r+1}) \times R^n$, $r \in \{0, 1, \dots, N\}$, $q^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\mu_0^{(\nu)}$ – дійсні невід'ємні числа, $[l]$ – ціла частина числа l , $l > 0$, $\{l\} = l - [l]$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(2)})$, $H_i(t^{(1)}, x^{(2)})$ – довільні точки із Π , $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)}, \dots, x_{i-1}^{(1)}, x_i^{(2)}, x_{i+1}^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$, Q_r – довільна замкнена область, $\bar{Q}_r \subset \Pi_r$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1) – (3). $C^l(\gamma; \beta; q; \Pi)$ – множина функцій $u : (t, x) \in \Pi$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q_r \setminus D$ вигляду $\partial_t^j \partial_x^k u$, $2bj + |k| \leq [l]$, для яких скінченна норма

$$\begin{aligned} \|u; \gamma; \beta; q; \Pi\|_l = & \sup_r \sum_{2bj+|k| \leq [l]} \left[\sup_{P \in \bar{Q}_r} S(q; s_1; s_2; 2bj + |k|; t, x) |\partial_t^j \partial_x^k u(P)| \right] + \\ & + \sup_r \left\{ \sum_{2bj+|k|=[l]} \left[\sum_{i=1}^n \sup_{(P_1, H_i) \in \bar{Q}_r} \left(S(q; s_1; s_2; |l|; t^{(1)}, \tilde{x}) s_1(\{l\}(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}), t^{(1)}) \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \times s_2(\{l\}(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}), \tilde{x}) |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^{-\{l\}} |\partial_t^j \partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u(H_i)| \right) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \sup_{(P_1, P_2) \in \bar{Q}_r} \left(S(q; s_1; s_2; |l|; \tilde{t}; x^{(1)}) s_1(\{l\} \gamma^{(1)}, t^{(1)}) s_2(\{l\} \gamma^{(2)}, x^{(1)}) \times \right. \\ \left. \times |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\{\frac{l}{2b}\}} |\partial_t^j \partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u(P_2)| \right) \Big].$$

Тут позначено: $s_1(a, \tilde{t}) = \min\{s_1(a, t^{(1)}), s_1(a, t^{(2)})\}$,
 $s_2(a, \tilde{x}) = \min\{s_2(a, x^{(1)}), s_2(a, x^{(2)})\}$,
 $S(q; s_1, s_2; |l|; t, x) = s_1(q^{(1)} + [l] \gamma^{(1)}, t) s_2(q^{(2)} + [l] \gamma^{(2)}, x) \times$
 $\times \prod_{i=1}^n s_1(-k_i \beta_i^{(1)}, t) s_2(-k_i \beta_i^{(2)}, x)$.

Щодо задачі (1)–(3), вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $a_k(t, x) \prod_{i=1}^n s_1(k_i \beta_i^{(1)}, t) s_2(k_i \beta_i^{(2)}, x) \in$

$$\in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; \Pi), a_p(t, x) \prod_{i=1}^n s_1(p_i \mu_{p_i}^{(1)}, t) s_2(p_i \mu_{p_i}^{(2)}, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; \Pi),$$

$1 \leq |p| \leq 2b - 1$, $a_0(t, x) s_1(\mu_0^{(1)}, t) s_2(\mu_0^{(2)}, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 0; \Pi)$, $a_0(t, x) \leq K < \infty$ і виконується умова рівномірної параболічності для рівняння

$$[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t, x) \prod_{i=1}^n s_1(k_i \beta_i^{(1)}, t) s_2(k_i \beta_i^{(2)}, x) \partial_x^k] u(t, x) = \tilde{f}(t, x),$$

б) функції $f(t, x) \in C^\alpha(\gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi)$, $\varphi_0 \in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; R^n)$, $\tilde{\gamma} = (0, \gamma^{(2)})$,
 $\tilde{\beta} = (0, \beta^{(2)})$, $b_\lambda \in C^{2b+\alpha}(\Pi \cap \{t = t_\lambda\})$, $\varphi_\lambda \in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi \cap \{t = t_\lambda\})$,
 $\gamma^{(\nu)} = \max\{\max_i \beta_i^{(\nu)}, \max_{p_i} \frac{p_i(\mu_{p_i}^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)})}{2b - |p|}, \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b}\}$, $\nu \in \{1, 2\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1)–(3) виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3) із простору $C^{2b+\alpha}(\gamma; \beta; 0; \Pi)$ і справджується нерівність*

$$\|u; \gamma; \beta; 0; \Pi\|_{2b+\alpha} \leq c \left\{ \sum_{r=1}^N \left[\prod_{\lambda=r}^N (\|1 + b_\lambda\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi \cap \{t=t_\lambda\})}) \times \right. \right. \\ \left. \times (\|f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_{r-1}\|_\alpha + \|\varphi_{r-1}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi \cap \{t = t_{r-1}\}\|_{2b+\alpha}) \right] + \\ \left. + \|f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi_N\|_\alpha + \|\varphi_N; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi \cap \{t = t_N\}\|_{2b+\alpha} \right\} \quad (4)$$

Для доведення теореми встановлюється розв'язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділяється збіжна послідовність, граничне значення якої є розв'язком задачі (1)–(3).

Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгового зображення чисел

Ратушняк Софія, Працьовитий Микола

ratush404@gmail.com, prats4444@gmail.com

Інститут математики НАН України,

Український державний університет імені Михайла Драгоманова

Нехай $A \equiv \{0; 1\}$ — алфавіт, $L \equiv A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту (нулів та одиниць); $A_2 = \{\frac{1}{2}; 1\}$, $L_2 \equiv A_2 \times A_2 \times \dots$

Відомо [1], що для будь-якого числа $x \in [\frac{1}{2}; 1]$ існує $(a_k) \in L_2$ така, що

$$x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} \equiv [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]. \quad (1)$$

Ланцюговий дріб (1) називається *нескінченим ланцюговим A_2 -дробом*, а його символічний запис $[0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots]$ — A_2 -зображенням числа x , при цьому число a_k називається k -ою цифрою цього зображення. Нескінчений ланцюговий A_2 -дріб є збіжним, а його значення належить $[\frac{1}{2}; 1]$. Існують числа, що мають два A_2 -зображення: $[0; a_1, a_2, \dots, a_m, \frac{1}{2}, (\frac{1}{2}, 1)] = [0; a_1, a_2, \dots, a_m, 1, (1, \frac{1}{2})]$. Вони називаються A_2 -*бінарними*. Множина таких чисел є зліченною і всюди щільною у відрізку $[\frac{1}{2}; 1]$. Решта чисел відрізка $[\frac{1}{2}; 1]$ мають єдине A_2 -зображення і називаються A_2 -*унарними*.

A_2 -зображення чисел легко перекодується засобами алфавіту A , а саме: $x = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, \dots] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^A$, де $\alpha_k = 2a_k - 1$, $k \in \mathbb{N}$. Останнє називається A -*зображенням числа x* .

Нехай (e_0, e_1, e_2) — фіксована упорядкована трійка елементів алфавіту A . Означимо функцію f рівностями

$$f(\Delta_{a_1 a_2 \dots a_{2n} \dots}^A) = \Delta_{b_1 b_2 \dots b_n \dots}^A, \text{ де}$$

$$b_1 = \begin{cases} e_0 & \text{при } (a_1, a_2) = (e_1, e_2), \\ 1 - e_0 & \text{при } (a_1, a_2) \neq (e_1, e_2), \end{cases} \text{ де } e_0, e_1, e_2 \in A, \quad (2)$$

$$b_{k+1} = \begin{cases} b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) \neq (a_{2k-1}, a_{2k}), \\ 1 - b_k & \text{при } (a_{2k+1}, a_{2k+2}) = (a_{2k-1}, a_{2k}). \end{cases} \quad (3)$$

Означення функції рівностями (2) і (3) є коректним, якщо $(e_1, e_2) = (1, 0)$.

Теорема 1. *Функція f , означена рівностями (2) і (3), при $(e_1, e_2) = (1, 0)$ є неперервною, ніде не монотонною і має необмежену варіацію.*

1. Dmytrenko S. O., Kyurchev D. V., Prats'ovytyi M. V. A_2 -continued fraction representation of real numbers and its geometry // Ukrainian Mathematical Journal. — 2009. — №4. — P. 541-555.

Побудова областей стійкості для керованих систем з невизначеностями

Савранська Алла

savranskaya-alla@ukr.net

Національний університет "Запорізька політехніка"

В більшості систем керування поряд з "повільними" (програмними) рухами присутні, так звані "швидкі" рухи ("паразитні" динаміки). Такі системи мають назву сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь. Існуючі методи теорії сингулярних збурень дозволяють здійснити декомпозицію на дві підсистеми більш низького порядку. Це, в свою чергу, дозволяє розділити синтез повної системи керування на дві частини.

При вивченні поведінки розв'язків систем керування важливо не тільки дослідити стійкість цих розв'язків, але і оцінити розміри областей їх тяжіння. Побудова областей стійкості полягає у знаходженні верхньої границі малого параметру, такої що для всіх значень цього параметру, менших ніж отримана оцінка, незбурений розв'язок сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь є асимптотично стійким. Ця задача розв'язується за допомогою векторних функцій Ляпунова. Доводиться теорема, в якій сформульовані достатні умови рівномірної асимптотичної стійкості розв'язків такої системи. Дається оцінка верхньої границі малого параметру.

Практична цінність полягає у тому, що розширюється клас систем, які можна досліджувати на стійкість. Зроблено необхідні дослідження та отримано формули, що дозволяють аналізувати стійкість систем навіть за умов неповної інформації про збурення, що діють на них.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, z, t) + \varepsilon f_1(x, z, t), \\ \varepsilon \dot{z} &= g(x, z, t) + \varepsilon g_1(x, z, t),\end{aligned}\tag{1}$$

де f та f_1 – n -вимірні вектор-функції, g та g_1 – m -вимірні вектор-функції, ε – малий параметр, $\varepsilon > 0$, f_1 та g_1 невідомі та задовольняють лише деяким обмеженням, про які буде сказано нижче. Члени $\varepsilon f_1(x, z, t)$ і $\varepsilon g_1(x, z, t)$ складають *параметричну невизначеність* системи, друге рівняння системи (1) містить малий параметр при похідній визначає *динамічну невизначеність*.

Задаємо початкові умови:

$$z(0, \varepsilon) = z^0,\tag{2}$$

$$x(0, \varepsilon) = x^0.\tag{3}$$

Дослідимо розв'язок $(x(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ задачі (1)–(3) на інтервалі $0 \leq t \leq$

Г. Поклавши в (1) $\varepsilon = 0$, отримаємо *вироджену* систему

$$\dot{x}^s = f(x^s, z^s, t), \quad (4)$$

$$0 = g(x^s, z^s, t). \quad (5)$$

Для системи (4)–(5) задається менша кількість початкових умов

$$x^s(0) = x^0. \quad (6)$$

Розв'яжемо рівняння (5) відносно $z^s(t)$, якщо така операція можлива

$$z^s = \varphi(x^s, t). \quad (7)$$

В силу нелінійності функції $g(x^s, z^s, t)$, ця операція неоднозначна та постає питання про вибір розв'язку.

Підстановка (7) в (3) дає

$$\dot{x}^s = f(x^s, \varphi(x^s, t), t), \quad (8)$$

$$x^s(0) = x^0, \quad (9)$$

$z^s = \varphi(x^s, t)$, в загальному випадку не задовольняє початковій умові (2) для z , тобто $z^s(0) \neq z^0$, і тому в деякому околі початкової точки $t = 0$ розв'язок $z^s(t)$ виродженої системи не буде близьким до розв'язку $z(x, t)$ вихідної системи (1).

Введемо нову змінну

$$\eta = z - \varphi(x, t). \quad (10)$$

Нехай виконуються наступні умови:

а) Функції $f(x, z, t)$ та $g(x, z, t)$ неперервні та задовольняють умові Ліпшиця по x та z в деякій області G простору змінних (x, z, t) , тобто для деяких додатних N_1, N_2, N_3, N_4 виконуються нерівності

$$\|f(x, z, t) - f(\tilde{x}, z, t)\| \leq N_1 \|x - \tilde{x}\|, \quad (11)$$

$$\|f(x, z, t) - f(x, \tilde{z}, t)\| \leq N_2 \|z - \tilde{z}\|, \quad (12)$$

$$\|g(x, z, t) - g(x, \tilde{z}, t)\| \leq N_3 \|x - \tilde{x}\|, \quad (13)$$

$$\|g(x, z, t) - g(x, \tilde{z}, t)\| \leq N_4 \|z - \tilde{z}\|, \quad (14)$$

де $\|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$ – евклідова норма.

б) Розв'язок (7) має в деякій замкнутій області \bar{D} такі властивості:

1. $\varphi(x^s, t)$ – неперервна функція в \bar{D} .
2. $(x^s, \varphi(x^s, t), t) \in G$ для всіх $(x^s, t) \in \bar{D}$.

3. Корінь $z^s = \varphi(x^s, t)$ є ізольованим в D , тобто існує таке $\eta > 0$, що $g(x^s, z^s, t) \neq 0$ при

$$\|z^s - \varphi(x^s, t)\| < \eta, \quad (x^s, t) \in \bar{D}.$$

в) Система (8), (9) має єдиний розв'язок $x^s(t)$ на інтервалі $0 \leq t \leq T$, до того ж у цьому інтервалі точки $(x^s, t) \in D$, де D – множина внутрішніх точок \bar{D} . Крім того, припустимо, що $f(x^s, \varphi(x^s, t), t)$ задовольняє умові Ліпшиця при $x^s \in \bar{D}$.

Тобто існує така стала $L > 0$, що для будь-яких y_1 і y_2 , виконується нерівність

$$\|f(x^s, y_1, t) - f(x^s, y_2, t)\| \leq L \|y_1 - y_2\|.$$

Введемо тепер приєднану систему

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = g(x^s, \tilde{z}, t)|_{t=\tau\varepsilon}, \quad (15)$$

в якій x^s і t розглядаються як параметри, $\tau = \varepsilon^{-1}t$ (розтягнутий час).

Очевидно, що $\tau \geq 0$. Згідно з умовою б) 3, $\tilde{z}(\tau) = \varphi(x^s, t)$ є ізольованою точкою спокою системи (15) при $(x^s, t) \in \bar{D}$.

Крім того, нехай

г) Точка спокою $\tilde{z}(\tau) = \varphi(x^s, t)$ системи (15) є асимптотично стійкою за Ляпуновим рівномірно відносно $(x^s, t) \in \bar{D}$. Це означає, що $\forall \mu > 0 \exists \delta(\mu) > 0$ (загальне для всіх $(x^s, t) \in \bar{D}$), таке що для всіх розв'язків $\tilde{z}(\tau)$ рівняння (15), для яких

$$\|\tilde{z}(\tau) - \varphi(x^s, t)\| < \mu, \quad (x^s, t) \in \bar{D}$$

при $\tau \geq 0$ і $\tilde{z}(\tau) \rightarrow \varphi(x^s, t)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Розглянемо приєднану систему (15) при $x^s = x^0, t = 0$:

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau} = g(x^0, \tilde{z}, t) \quad (16)$$

з початковою умовою

$$\tilde{z}(0) = z^0. \quad (17)$$

Оскільки початкове значення z^0 , в загальному випадку, не є близьким до точки спокою $\varphi(x^0, 0)$, то розв'язок $\tilde{z}(\tau)$ задачі (16), (17) може не прямувати до $\varphi(x^0, 0)$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Нехай

д) Розв'язок $\tilde{z}(\tau)$ задачі (16) з початковими умовами (17) задовольняє умовам

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{z}(\tau) = \varphi(x^0, 0)$,
2. точки $(x^0, \tilde{z}(\tau), t) \in G$, при $\tau \geq 0$.

е) Функції $f_1(x, z, t)$, $g_1(x, z, t)$ неперервні та задовольняють умові Ліпшиця за змінними x і z , та існують сумовані функції $M_1(t)$ та $M_2(t)$ зі сталими M_1^0 та M_2^0 такі, що в області G мають місце нерівності

$$\|f_1(x, z, t)\| \leq M_1, \quad \|g_1(x, z, t)\| \leq M_2, \quad (18)$$

$$\int_0^T M_1(t) dt \leq M_1^0 T, \quad \int_0^T M_2(t) dt \leq M_2^0 T. \quad (19)$$

Теорема. *Нехай виконуються наступні припущення:*

а) Для систем (4) та (16) існують додатньо визначені функції Ляпунова $V(x, t)$ та $W(x, z, t)$ відповідно, що задовольняють оцінкам, які є властивими для квадратичних форм, такі що

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x^s, \varphi(x^s, t), t) \leq -\alpha_1 \psi^2(x), \quad (20)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} g(x, \tilde{z}, t) \leq -\alpha_2 \theta^2(\eta), \quad (21)$$

де $\psi(x)$ та $\theta(\eta)$ – функції, які дорівнюють нулю в точці 0 і відмінні від нуля для інших значень аргументів.

б) Умови взаємозв'язку V та W задовольняють нерівностям

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(x, z, t) \leq c\psi(x)\theta(\eta), \quad (22)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} (f(x, z, t) - f(x^s, \varphi(x^s, t), t)) \leq \beta\psi(x)\theta(\eta), \quad (23)$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} (g(x, z, t) - g(x, \tilde{z}, t)) \leq \varepsilon k\psi(x)\theta(\eta), \quad (24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} f_1(x, z, t) \leq \gamma_1 \psi^2(x), \quad (25)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} f_1(x, z, t) \leq \gamma_2 \psi^2(x), \quad (26)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial z} g_1(x, z, t) \leq \gamma_3 \psi(x)\theta(\eta), \quad (27)$$

де $c, \beta, k, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – позитивні сталі.

Тоді для будь-якого $0 < d < 1$ лінійна комбінація

$$U(x, z, t) = (1 - d)V(x, t) + dW(x, z, t) \quad (28)$$

є функцією Ляпунова системи (1) та існує

$$\varepsilon^*(d) = \frac{\alpha_1}{\gamma_1 + \frac{d}{1-d}\gamma_2 + \frac{((1-d)\beta + d(c+k+\gamma_3))^2}{4d(1-d)\alpha_2}} \quad (29)$$

таке, що для усіх $\varepsilon < \varepsilon^*(d)$ розв'язок $x = x^s(t)$, $\eta = 0$ системи (1) є стійким до збурень, що діють постійно.

Про скінченну ліпшицевість розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі

Салімов Руслан, Стефанчук Марія

ruslan.salimov1@gmail.com, stefanmv43@gmail.com

Інститут математики НАН України

Нехай D — область у комплексній площині \mathbb{C} , тобто зв'язна та відкрита підмножина \mathbb{C} , і нехай $\mu : D \rightarrow \mathbb{C}$ — вимірна функція з $|\mu(z)| < 1$ м.с. (майже скрізь) в D . Рівнянням Бельтрамі називається рівняння вигляду

$$f_{\bar{z}} = \mu(z) f_z, \quad (1)$$

де $f_{\bar{z}} = (f_x + if_y)/2$, $f_z = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x і f_y — частинні похідні відображення f по x та y , відповідно. Функція μ називається *комплексним коефіцієнтом*, а

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}$$

дилатаційним співвідношенням рівняння (1). Рівняння Бельтрамі (1) називається *виродженим*, якщо $\text{ess sup } K_\mu(z) = \infty$.

Нехай $\sigma : D \rightarrow \mathbb{C}$ — вимірна функція та $m \geq 0$. Розглянемо наступне рівняння, записане у полярних координатах (r, θ) , $z = z_0 + re^{i\theta}$, $z_0 \in D$:

$$f_r = \sigma(re^{i\theta}) |f_\theta|^m f_\theta, \quad (2)$$

де f_r і f_θ — частинні похідні відображення f по r і θ , відповідно. Використовуючи співвідношення між цими похідними та формальні похідні

$$rf_r = (z - z_0)f_z + \overline{(z - z_0)}f_{\bar{z}}, \quad f_\theta = i((z - z_0)f_z - \overline{(z - z_0)}f_{\bar{z}}),$$

рівняння (2) можна записати у комплексній формі:

$$f_{\bar{z}} = \left(\frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right)^2 \frac{\sigma(z) N_m(f, z, z_0) - 1}{\sigma(z) N_m(f, z, z_0) + 1} f_z, \quad (3)$$

де $N_m(f, z, z_0) = i|z - z_0| |(z - z_0)f_z - \overline{(z - z_0)}f_{\bar{z}}|^m$.

При $m = 0$ рівняння (3) зводиться до звичайного рівняння Бельтрамі (1) з комплексним коефіцієнтом

$$\mu(z) = \left(\frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right)^2 \frac{i\sigma(z)|z - z_0| - 1}{i\sigma(z)|z - z_0| + 1}.$$

Поклавши $m = 0$ і $\sigma = -i/|z - z_0|$ у (3), ми приходимо до класичної системи Коші-Рімана. Всюди далі будемо вважати, що $m > 0$.

Теорема 1. Нехай $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ – регулярний гомеоморфний розв’язок нелінійного рівняння (3) класу Соболева $W_{\text{loc}}^{1,1}$. Якщо

$$\sigma_0 = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \int_{B(z_0, \varepsilon)} \frac{dm(z)}{|z - z_0| \left(\text{Im } \overline{\sigma(z)} \right)^{\frac{1}{m+1}}} < \infty,$$

то

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leq \nu_0 \sigma_0^{\frac{m+1}{m}},$$

де ν_0 – додатна стала, що залежить тільки від m .

Наслідок 1. Якщо $\sigma_0 > 0$ і

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{|z - z_0| = r} \frac{|dz|}{\left(\text{Im } \overline{\sigma(z)} \right)^{\frac{1}{m+1}}} \leq \sigma_0 r$$

для м.в. (майже всіх) $r \in (0, r_0)$, $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, то

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leq \nu_0 \sigma_0^{\frac{m+1}{m}},$$

де ν_0 – додатна стала, що залежить тільки від m .

Наслідок 2. Якщо $k_0 > 0$ і

$$\text{Im } \overline{\sigma(z)} \geq \frac{k_0}{|z - z_0|^{m+1}}$$

для м.в. $z \in B(z_0, r_0)$, $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \text{dist}(z_0, \partial D)$, то

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \leq \nu_0 k_0^{-\frac{1}{m}},$$

де ν_0 – додатна стала, що залежить тільки від m .

1. R. Salimov, M. Stefanchuk. Finite Lipschitzness of regular solutions to nonlinear Beltrami equation // Complex Variables and Elliptic Equations. — Published online 12.01.2023. — DOI: 10.1080/17476933.2023.2166498

Побудова асимптотичних розв'язків крайових задач для сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем

Самусенко Петро

psamusenko@ukr.net

Національний технічний університет України "КПІ імені Ігоря Сікорського"

У роботі розглядається двоточкова крайова задача

$$\varepsilon^2 A(t, \varepsilon) \frac{d^2 x}{dt^2} = f(x, t, \varepsilon), \quad t \in [0; T], \quad (1)$$

$$x(0, \varepsilon) = x_0, \quad x(T, \varepsilon) = x_T, \quad (2)$$

де $x(t, \varepsilon)$ – шуканий n -вимірний вектор, $A(t, \varepsilon)$ – квадратна матриця n -го порядку, $f(x, t, \varepsilon)$, x_0 , x_T – n -вимірні вектори, компонентами яких є дійсні або комплекснозначні функції, ε – малий параметр.

Формальний розв'язок задачі (1), (2) шукається у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t, \varepsilon) + Px(\tau, \varepsilon) + Qx(\xi, \varepsilon), \quad (3)$$

де $\bar{x}(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \bar{x}_s(t)$ – регулярна частина асимптотики, $Px(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s P_s x(\tau)$, $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, та $Qx(\xi, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q_s x(\xi)$, $\xi = \frac{t-T}{\varepsilon}$, – сингулярна частина асимптотики.

Функції $\bar{x}(t, \varepsilon)$, $Px(\tau, \varepsilon)$, $Qx(\xi, \varepsilon)$ знаходяться стандартним чином, а саме: підставляємо (3) у систему (1) і зрівнюємо члени, що залежать від t , τ та ξ .

При цьому члени регулярної частини асимптотики визначаються з алгебраїчних систем, а члени сингулярної частини – з відповідних автономних диференціально-алгебраїчних систем зі сталою матрицею при похідних.

Доведено асимптотичний характер формального розв'язку (3) крайової задачі (1), (2).

1. Chang K.W., Howes F.A. Nonlinear singular perturbation problems: theory and applications. – New York: Springer-Verlag, 1984. – 180 p.
2. A. B. Vasil'eva. Two-point boundary value problem for a singularly perturbed equation with a reduced equation having multiple roots // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2009. – 49, № 6. – P. 1021–1032.
3. Samusenko P., Vira M. Asymptotic Solutions of Boundary Value Problem for Singularly Perturbed System of Differential-Algebraic Equations // Carpathian Math. Publ. – 2022. – 14 № 1. – P. 49-60.

Лінійна швидкість збіжності алгоритмів екстраполяції з минулого та операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей

Семенов Володимир, Харьков Олег

semenov.volodya@gmail.com, olehharek@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Нехай H – дійсний гільбертовий простір з скалярним добутком (\cdot, \cdot) та породженою нормою $\|\cdot\|$. Розглянемо варіаційну нерівність:

$$\text{знайти } x \in C : (Ax, y - x) \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (1)$$

де C – непорожня опукла та замкнена підмножина простору H , A – оператор, що діє з простору H в H . Будемо вважати, що оператор $A \in$ ліпшицевим на множині C (з константою $L > 0$), тобто

$$\|Ax - Ay\| \leq L \|x - y\| \quad \forall x, y \in C.$$

Задача (1) – зручна загальна форма запису різних задач, що виникають в математичній фізиці, дослідженні операцій та машинному навчанні [1, 2]. Популярними методами апроксимації розв'язків варіаційних нерівностей (1) є алгоритм екстраполяції з минулого [1, 2] та алгоритм операторної екстраполяції [3, 4].

Мета повідомлення – ознайомити з результатами про лінійну швидкість збіжності алгоритмів для задач з операторами, що задовольняють умову типу узагальненої сильної монотонності. Для сильно монотонних та ліпшицевих операторів подібні результати отримано в [2, 5].

Припустимо, що існує єдиний розв'язок $z \in C$ варіаційної нерівності (1), а оператор A задовольняє умову

$$(Ax, x - z) \geq \mu \|x - z\|^2 \quad \forall x \in C \quad (2)$$

для деякого $\mu > 0$.

Умова (2) впливає з сильної монотонності A . Але існують немонотонні оператори з (2). Наприклад,

$$Ax = (2 - \|x\|)x, \quad x \in C = \left\{x \in \ell_2 : \|x\| \leq \frac{3}{2}\right\}.$$

Розглянемо такий варіант алгоритму екстраполяції з минулого. Для $x_1 = y_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів x_n, y_n :

$$\begin{cases} y_n = P_C \left(x_n - \frac{1}{4L} A y_{n-1}\right), \\ x_{n+1} = P_C \left(x_n - \frac{1}{4L} A y_n\right), \end{cases} \quad (3)$$

де P_C – оператор метричного проектування на C .

Має місце

Теорема 1. *Нехай C – непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $A : H \rightarrow H$ – L -ліпшицевий на множині C оператор, існує єдиний розв’язок $z \in C$ варіаційної нерівності (1) та виконується умова (2). Тоді для породжених алгоритмом (3) послідовностей (x_n) , (y_n) виконується оцінка*

$$\|x_{n+1} - z\|^2 + \frac{1}{4} \|y_n - x_{n+1}\|^2 \leq \left(1 - \frac{\mu}{4L}\right)^n \|x_1 - z\|^2, \quad n \geq 1.$$

Розглянемо тепер варіант алгоритму операторної екстраполяції. Для $x_1 = x_0 \in C$ генеруємо послідовність елементів x_n :

$$x_{n+1} = P_C \left(x_n - \frac{1}{2L} A x_n - \frac{1}{2(L+\mu)} (A x_n - A x_{n-1}) \right). \quad (4)$$

Теорема 2. *Нехай C – непорожня опукла замкнена підмножина гільбертового простору H , $A : H \rightarrow H$ – L -ліпшицевий на множині C оператор, існує єдиний розв’язок $z \in C$ задачі (1) та виконується (2). Тоді для породженої алгоритмом (4) послідовності (x_n) виконується оцінка*

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \left(1 - \frac{\mu}{L + \mu}\right)^n 2 \|x_1 - z\|^2, \quad n \geq 1.$$

Зауважимо, що для задачі пошуку нуля μ -сильно монотонного та L -ліпшицевого оператора A в [5] для алгоритму

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{8L} A x_n - \frac{1}{8L} (A x_n - A x_{n-1})$$

отримана оцінка

$$\|x_{n+1} - z\|^2 \leq \left(1 - \frac{\mu}{8L}\right)^n 16384 \frac{L^2}{\mu^2} \|x_1 - z\|^2, \quad n \geq 1.$$

1. Семенов В. В. Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2021. – 167 с.
2. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A Variational Inequality Perspective on Generative Adversarial Networks. arXiv preprint arXiv:1802.10551. 2018.
3. Malitsky Y., Tam M. K. A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity. SIAM J. on Optim. 2020. Vol. 30. P. 1451–1472.
4. Semenov V. V., Denisov S. V., Sandrakov G. V., Kharkov O. S. Convergence of the Operator Extrapolation Method for Variational Inequalities in Banach Spaces. Cybernetics and Systems Analysis. 2022. Vol. 58. Issue 6. P. 740–753.
5. Mokhtari A., Ozdaglar A., Pattathil S. A unified analysis of extra-gradient and optimistic gradient methods for saddle point problems: proximal point approach. arXiv preprint arXiv:1901.08511. 2019.

Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах диференційовних у сенсі Вейля–Надя функцій з високим показником гладкості

Сердюк Анатолій, Соколенко Ігор

serdyuk@imath.kiev.ua, sokol@imath.kiev.ua

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

Нехай C і L_p , $1 \leq p \leq \infty$, — простори 2π -періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$. Нехай, далі, $W_{\beta,p}^r$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, — класи 2π -періодичних функцій f , що зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t) B_{r,\beta}(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

з ядрами Вейля–Надя $B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right)$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, функцій φ , що задовольняють умову $\varphi \in B_p^0 = \left\{h \in L_p : \|h\|_p \leq 1, \int_{-\pi}^{\pi} h(t) dt = 0\right\}$.

Класи $W_{\beta,p}^r$ називають класами Вейля–Надя, а функцію φ в зображенні (1) позначають через f_{β}^r і називають (r, β) -похідною в сенсі Вейля–Надя функції f .

При довільних $1 \leq p \leq \infty$, $r > 1/p$, $\beta \in \mathbb{R}$ мають місце вкладення $W_{\beta,p}^r \subset C$.

Якщо $r \in \mathbb{N}$ і $\beta = r$, то функції $B_{r,\beta}(t)$ є відомими ядрами Бернуллі, а відповідні класи $W_{\beta,p}^r$ збігаються з відомими класами W_p^r 2π -періодичних функцій f , які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$ -го порядку включно і такі, що $\|f^{(r)}\|_p \leq 1$. При цьому майже скрізь виконується рівність $f^{(r)}(\cdot) = f_{\beta}^r(\cdot)$.

Нехай $f \in C$. Через $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$ позначатимемо тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у рівномірно розподілених вузлах $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Розглядається задача про дослідження поведінки величин

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W_{\beta,p}^r; x) = \sup_{f \in W_{\beta,p}^r} \left| f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x) \right|,$$

для довільних $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, при високих показниках гладкості r ($r-1 \geq \sqrt{n}$).

Має місце таке твердження.

Теорема 1. Нехай $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Тоді для всіх $r \in \mathbb{R}$ таких, що

$$r - 1 \geq \sqrt{n},$$

при $p = 1$ має місце формула

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(W_{\beta,1}^r; x) = \left| \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right| n^{-r} \left(\frac{2}{\pi(1 - e^{-r/n})} + O(1)\delta_{r,n} \right),$$

а при $1 < p \leq \infty$ — формула

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_n(W_{\beta,p}^r; x) &= \left| \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right| n^{-r} \times \\ &\times \left(\frac{2 \|\cos t\|_{p'}}{\pi} F_{p'}^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{p'}{2}, \frac{p'}{2}; 1; e^{-2r/n} \right) + O(1)\delta_{r,n} \right), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \end{aligned}$$

де $F(a, b; c; z)$ — гіпергеометрична функція Гауса:

$$F(a, b; c; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}, \quad (x)_k := x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1),$$

$$\delta_{r,n} = \begin{cases} \frac{n}{r^2}, & \sqrt{n} + 1 \leq r \leq n + 1, \\ \frac{n^2}{r^2} e^{-r/n}, & n + 1 \leq r \leq n^2, \\ e^{-r/n} & r \geq n^2. \end{cases}$$

а $O(1)$ — величини, рівномірно обмежені відносно всіх розглядуваних параметрів.

Теорема 1 є інтерполяційним аналогом теореми 1 з [1] та теорем 1 і 2 з [2] для наближення сумами Фур'є функцій з класів $W_{\beta,p}^r$ в рівномірній метриці.

Виконано за часткової фінансової підтримки за проектами H2020-MSCA-RISE-2019, project number 873071 (SOMPATY: Spectral Optimization: From Mathematics to Physics and Advanced Technology) та VolkswagenStiftung project "From Modeling and Analysis to Approximation".

1. Serdyuk A.S., Sokolenko I.V., Approximation by Fourier sums in classes of differentiable functions with high exponents of smoothness // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2019. — Vol. 25, №4. — P. 381–387.
2. Сердюк А.С., Соколенко І.В. Наближення сумами Фур'є на класах диференційованих у сенсі Вейля—Надя функцій із високим показником гладкості // Український математичний журнал. — 2022. — Т. 74, № 5. — С. 685–700.

Операторне рівняння з дводіагональними операторами у просторах послідовностей комплексних чисел

Симотюк Михайло

mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України*

Нехай $(n_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ – неспадна послідовність, $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ – така послідовність, що $N_k := n_1 + \dots + n_k$, $k \in \mathbb{N}$. Через $(\lambda_{j,k})_{k=1}^{\infty}$, $j = 1, \dots, p$, $p \geq 2$, позначимо такі послідовності комплексних чисел, що виконуються оцінки

$$C_1 k^{\omega} \leq |\lambda_{j,k}| \leq C_2 k^{\omega}, \quad j = 1, \dots, p, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

де C_1, C_2, ω – додатні сталі, що не залежать від k . Нехай l' – простір усе-можливих послідовностей $u = (u_{k_1, \dots, k_p}) \subset \mathbb{C}$, занумерованих p натуральними індексами k_1, \dots, k_p . Для кожного $j = 1, \dots, p$ через A_j позначимо лінійний оператор $A_j : l' \rightarrow l'$, який діє на $u \in l'$ за j -компонентою і ця дія визначається рівностями

$$A_j u_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_p} = \begin{cases} \lambda_{j, m(k_j)} u_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_p} + u_{k_1, \dots, k_j+1, \dots, k_p}, & \text{якщо } N_{m(k_j)-1} < k_j < N_{m(k_j)}, \\ \lambda_{j, m(k_j)} u_{k_1, \dots, k_j, \dots, k_p}, & \text{якщо } k_j = N_{m(k_j)}, \end{cases}$$

де $m(k_j) \in \mathbb{N}$ – єдине число таке, що $k_j \in (N_{m(k_j)-1}; N_{m(k_j)}]$ (тут $N_0 := 1$).

Доповідь присвячено викладу результатів, отриманих при дослідженні розв'язності рівняння

$$L(A_1, \dots, A_p)u \equiv \sum_{|s| \leq n} a_s A_1^{s_1} \dots A_p^{s_p} u = f + \varepsilon \Phi(u), \quad (2)$$

у якому $a_s \in \mathbb{C}$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \dots + s_p \leq n$, $f \in l'$, $\Phi : l' \rightarrow l'$ – деяке нелінійне відображення, ε – досить мале число. На підставі принципу стискуючих відображень [1] встановлено існування розв'язку рівняння (2), якщо нелінійний оператор Φ є обмеженим, має обмежену похідну; існують сталі $C_3 > 0, \gamma \geq 0$ такі, що $n_k \leq C_3 k^{\gamma}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$; модулі визначників матриць, породжених тензорними добутками степенів жорданових кліток $J(\lambda_{j,k_j}, n_{k_j})$ порядку n_{k_j} , $j = 1, \dots, p$, та лівою частиною рівняння (2), допускають степеневу (стосовно $k_1 + \dots + k_p$) оцінку знизу; виконуються оцінки (1); ε – досить мале число.

1. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

Методика навчання розв'язування систем ірраціональних рівнянь на факультативних заняттях в ЗЗСО

Сікора Віра, Зозуляк Ірина

v.sikora@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Вивчення ірраціональностей в ЗЗСО розпочинається у 8 класі після введення поняття квадратного кореня та продовжується в 10-11 класах під час вивчення ірраціональних рівнянь, нерівностей та їх систем [1], [2]. Проте ця тема настільки велика, що під час уроків вчителю математики в ЗЗСО з академічним рівнем вивчення математики не завжди вистачає часу розглянути всі можливі види таких рівнянь та способи їх розв'язування. Часто цього й не потрібно – основна частина учнів такого класу засвоює знання на базовому рівні. Проте з учнями, котрі цікавляться математикою та мають достатній та високий рівні навчальних досягнень, варто запропонувати більш глибоке вивчення даної теми під час факультативних занять з математики в 10 чи 11 класі. Насамперед, на наш погляд, це варто робити, оскільки в тестах ЗНО та НМТ останніх років є досить багато завдань, пов'язаних з ірраціональними рівняннями чи нерівностями. При цьому вони часто зустрічаються в третій та четвертій (тобто найскладніших) частинах ЗНО та НМТ останніх років [3].

При підготовці молодого вчителя до таких занять радимо користуватися наступними методичними порадами. Насамперед доцільно обов'язково нагадати учням визначення ірраціонального числа та ірраціонального виразу, розв'язати кілька прикладів на обчислення та перетворення ірраціональних виразів, звернути увагу на особливості роботи з ними. Далі переходимо до розгляду найпростіших ірраціональних рівнянь та їх систем. До прикладу,

$$\begin{cases} \sqrt{x} + y = 2023, \\ 2x - \sqrt{y} = 2024. \end{cases}$$

При цьому обов'язково звертаємо увагу на різні методи розв'язування ірраціональних рівнянь та їх систем (метод заміни змінної, метод піднесення до квадрата, метод ділення, метод виділення множників, використання властивостей функцій, які присутні у рівняннях, графічний метод тощо), практикуючи поступове ускладнення завдань: поступово розглядаємо складніші завдання – системи ірраціональних рівнянь не тільки від однієї, але й від декількох змінних; з трьома та більше ірраціональностями різного степеня; рівняння та їх системи, у яких присутні не тільки радикали, але й інші трансцендентні вирази.

Наприклад, цікавою та досить складною з першого погляду для учнів

може виявитися система з параметром

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} = 1968, \\ \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x} = 2023, \\ \sqrt{z+x} + \sqrt{x+y} = 55 + a, \end{cases}$$

до якої поставлене завдання знайти найменше ціле значення параметра a , коли така система матиме розв'язки. Проте заміна змінних $\sqrt{x+y} = u$, $\sqrt{y+z} = v$, $\sqrt{z+x} = w$ дозволить звести цю систему до лінійної від трьох змінних. Аналізуючи з учнями отримані результати, одержуємо потрібне значення параметра $a = 0$.

Незважаючи на те, що факультативні заняття не передбачають домашнього завдання, ми практикуємо завдання для самостійного опрацювання вдома для тих, хто зацікавився вказаною тематикою. При цьому досвід показує, що задачі з реального життя, які вимагають розв'язування ірраціонального рівняння чи системи, зацікавлюють учнів, сприяють розвитку їх мислення та удосконалюють навички роботи з подібними завданнями.

Досить часто, при наявності достатньої кількості учнів, які відвідують факультативні заняття, зручним є розподіл учнів на групи та надання їм спільного завдання. Це сприяє співпраці та обміну ідеями, вчить їх дослухатися до іншої точки зору, знаходити правильні алгоритми.

Цікавим на наш погляд є використання різних математичних програм (наприклад, MATLAB, Wolfram Mathematica, онлайн-калькулятори) для розв'язування складних систем ірраціональних рівнянь.

Також слід періодично проводити тести або давати оцінювальні завдання для перевірки рівня засвоєння матеріалу учнями, а після завершення вивчення певного методу обговорити всі важливі моменти, звернути увагу учнів на допущені помилки. Загалом, ірраціональні рівняння та їх системи – це досить об'ємна, цікава і важлива тема в курсі математики ЗЗСО. Кожен вид таких рівнянь чи їх систем можна розв'язувати за допомогою використання та поєднання різних методів.

1. Мерзляк А.Г. Алгебра: підручник для 8-го класу ЗНЗ з поглибленим вивченням математики / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Харків: Гімназія, 2021. – 384 с. – URL: <https://cutt.ly/18CX1za>
2. Істер О.С. Алгебра і початки аналізу: (профіль. рівень): підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер, О.В. Єрміна. – Київ: Генеза, 2018. – 448 с. – URL: <https://cutt.ly/c8BSyzi>
3. Офіційні звіти / Український центр оцінювання якості освіти. – URL: <https://testportal.gov.ua/ofzvit/>

Про одну сингулярну функцію з складною локальною будовою

Скакун Дмитро

skakund2020@gmail.com

Український державний університет імені Михайла Драгоманова

Нехай s — натуральне число більше одиниці, (ξ_n) — послідовність незалежних дискретно розподілених випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \dots, s-1$ з ймовірностями $p_{0n}, p_{1n}, \dots, p_{(s-1)n}$ відповідно, (a_n) — спадна послідовність додатних чисел така, що $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$. Розглянемо випадкову величину $\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} \xi_n a_n$. За теоремою Джессена-Вінтнера [2] розподіл ξ є чистим, тобто дискретним або абсолютно неперервним або сингулярним. За теоремою Леві [3] розподіл ξ є дискретним тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \max\{p_{0n}, p_{1n}, \dots, p_{(s-1)n}\} > 0.$$

Теорема 1. Для довільної послідовності (a_n) , що задовольняє вище вказані умови існує послідовність стохастичних векторів $(p_{0n}, p_{1n}, \dots, p_{(s-1)n})$ така, що функція $F_\xi(x)$ є сингулярною та строго зростаючою на відрізку $[0; \sum_{n=1}^{+\infty} a_n]$.

Якщо $a_n = \lambda^n$ для кожного натурального n , причому $\lambda < \frac{1}{s}$, то добре відомо [1], що розподіл ξ є або дискретним або сингулярним розподілом канторівського типу.

Теорема 2. Якщо $a_n = \frac{1}{m^n}$ для кожного натурального n , причому $m > s, m \in N$, то існує послідовність стохастичних векторів $(p_{0n}, p_{1n}, \dots, p_{(s-1)n})$ така, що функція $F_\xi(x)$ є абсолютно неперервною та строго зростаючою на відрізку $[0; \sum_{n=1}^{+\infty} a_n]$.

1. Турбин А. Ф., Працевитый Н. В. Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев: Наук. думка, 1992. – 208 с.
2. Jessen B., Wintner A. Distribution function and Riemann Zeta-function. Trans.Amer.Math.Soc. – 1935. – №38. – P.48–88.
3. Levy P. Sur les sries don't les termes sont des variables independantes // Studia math. – 1931. – №3. – P.119–155.
4. Peres Y., Schlag W., Solomyak B. Sixty years of Bernoulli convolutions. Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability. – 2000. – №46. – P.39–65.

STEM-освіта: професійний розвиток педагога

Скоролітня Аліна

skorolitnia.alina@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Перехід до інноваційної освіти європейського рівня передбачає підготовку педагога нової інтеграції, здатного до сучасних умов організації навчально-виховного процесу, соціальної мобільності, використання сучасних інноваційних технологій навчання. Суспільство соціально замовляє випускників, які оберуть професії IT-фахівців, програмістів, інженерів. Вони, в майбутньому, мають стати професіоналами високо технологічних виробництв, фахівцями нанотехнологій. Це покликана зробити STEM-освіта, головна мета якої полягає в реалізації державної політики з урахуванням нових вимог Закону України "Про освіту" щодо посилення розвитку науково-технічного напрямку в навчально-методичній діяльності на всіх освітніх рівнях.

STEM-освіта - категорія, яка визначає відповідний педагогічний процес (технологію) формування і розвитку розумово-пізнавальних і творчих якостей майбутніх фахівців, рівень яких визначає конкурентну спрямованість на сучасному ринку праці.

STEM-навчання реалізується шляхом STEM-компетентностей. У контексті підготовки майбутніх педагогів STEM-компетентності розглядають як динамічну систему знань, цінностей та особистісних якостей, які визначають здатність до інноваційної діяльності. Готовність до розв'язання комплексних завдань, критичне мислення, креативність, організаційні здібності, уміння працювати в команді, емоційний інтелект. Оцінювання і прийняття рішень, здатність до ефективної взаємодії, уміння домовлятися, когнітивна гнучкість [1].

Дослідження питань професійної компетентності вчителя не є новим у науково-методичній літературі. Загальні аспекти даної проблеми розглядали В. Адольф, В. Бєлий, І. Зимня, В. Кремень, Н. Кузьміна, В. Саюк, А. Шуканова та ін.

Завданням вчителя виступають взаємодії за лініями: учитель - учень (співпраця вчителя і учнів на уроці та в позаурочний час); учитель - адміністрація навчального закладу; учитель - батьки (включення батьків у позаурочні форми роботи з учнями, зокрема спостереження за трудовою діяльністю батьків, соціологічні дослідження родини як суб'єкта ринкової економіки, допомога у виконанні домашніх завдань тощо). Невід'ємною складовою професійної компетентності є взаємодія вчителів-предметників (фізика, математика, інформатика, хімія, біологія тощо) через побудову міжпредметних зв'язків [2].

Серед різних видів компетенцій, якими повинні володіти вчителі мо-

жна виділити саме ті, що характеризують їх готовність до інноваційних перетворень: вміння використовувати нові ідеї та інновації для досягнення мети; знання щодо використання всього нового (наприклад, сучасних засобів і обладнання); впевненість у позитивному ставленні суспільства до нововведень; наполегливість; ініціативність у прийнятті рішень; персональна відповідальність; здатність до командної роботи; спроможність йти на компроміс та до розв'язання конфліктів.

Отже, професійна компетентність вчителя у системі навчання STEM є якістю особистості, яка характеризує рівень його інтеграції у інноваційне науково-технічне середовище; передбачає певний відхід від традиційного процесу формування вузького спеціаліста та визначається необхідністю розвитку багатопрофільного фахівця. Таким чином, в умовах впровадження STEM - освіти в Україні все більше зростає потреба у підготовці висококваліфікованого, креативного, творчого вчителя, котрий володіє своїм предметом, готовий підвищувати рівень своїх професійних знань, обізнаний з питань функціонування педагогічної системи загальноосвітнього навчального закладу, може забезпечити умови для інтеграції передових ідей та інноваційних технологій; організувати науководослідну діяльність учнів, шляхом створення динамічної системи взаємозв'язків з оточуючим середовищем, що сприяє поглибленню знань, формуванню соціального досвіду дитини, розширенню та розвитку її інтелектуальних пізнавальних інтересів та творчих здібностей.

1. Гончарова Н.О. Професійна компетентність учителя в системі навчання STEM // Наукові записки Малої академії наук України: зб. наук праць. – К. : Інститут обдарованої дитини НАПН України, 2015. – Вип. 7. – С. 141–148.
2. Шуканова А.А. Функціональна структура професійної компетентності вчителя географії в системі неперервної освіти // Проблеми сучасного підручника: зб. наук. праць. – К.: Педагогічна думка, 2011. – Вип. 11. – С. 740-746.

Інноваційна компетентність як професійно важлива риса сучасного вчителя математики

Скоролітня Аліна, Тимчук Людмила

skorolitnia.alina@chnu.edu.ua, l.tymchuk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

В умовах модернізації української освіти діяльність сучасного вчителя постійно змінюється та наповнюється новим змістом. Реформи в освіті ставлять перед вчителями нові вимоги - ефективно виконувати професійні функції в умовах інноваційного режиму. Компетентність є результатом освіти, самоосвіти і саморозвитку педагога. Вона визначається досвідом та індивідуальною здатністю людини, її прагненням до безперервної самоосвіти й самовдосконалення, творчим ставленням до праці.

Математика і математична освіта в сучасних умовах відіграють особливу роль у формуванні компетентної особистості, здатної до самовдосконалення та самоосвіти протягом життя. Формувати таку особистість може лише компетентний учитель математики.

Більшість проблем, що постають перед вчителями, які працюють в інноваційному режимі, пов'язані з низькою інноваційною компетентністю. Як один із важливих компонентів професійної готовності, інноваційна компетентність є передумовою ефективної діяльності вчителя, максимальної його реалізації та розкриття творчого потенціалу.

Поняття "інноваційна компетентність" трактується крізь систему мотивів, знань, умінь, навичок, особистісних якостей педагога, що забезпечує здійснення ним усіх етапів інноваційної професійної діяльності: від моделювання і прогнозування до впровадження нововведення. Аналіз сутності цього поняття передбачає наявність інноваційного сприйняття суб'єкта: сприйняття власних інновацій і взагалі новацій або відкриттів, здатність побачити елементи нового у відносно сталому та запропонувати принципово нове вирішення проблеми. Інноваційна компетентність педагога структурно повинна охоплювати зовнішні (мета, засоби, об'єкт, суб'єкт, результат) і внутрішні (мотивація, зміст, операції) компоненти здійснення інноваційної діяльності.

С. Раков увів поняття математичної компетентності вчителя математики як "уміння бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і метод математичного моделювання, вміння будувати математичну модель, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень".

О. Проценко та С. Юрочко виокремили найбільш характерні ознаки інноваційної компетентності педагога, до яких, на думку авторів, належать: 1) особистісна спрямованість фахівця на освоєння нового, готовність до змін в способах професійної діяльності; 2) суб'єктність цілепокладання,

цілездійснення і самореалізації; 3) чіткість професійної позиції, усвідомлення соціальної значимості інновацій, включення у соціальну творчість; 4) відповідність складу компетентності структурі інноваційної діяльності; 5) ефективність способів реалізації системи знань, умінь, навичок на всіх етапах інноваційного процесу; 6) здатність до творчого підходу у вирішенні професійних задач; 7) цілісність всієї сукупності компетенцій у складі інноваційної компетентності фахівця як системного утворення; 8) високий рівень професіоналізму фахівця, що ґрунтується на осмисленні та самовдосконаленні його професійного досвіду [4].

Таким чином інноваційна компетентність вчителя проявляється в оновлених, більш ефективних формах, способах, методах й, відповідно, якісно нових результатах навчально-виховної діяльності, які отримані внаслідок реалізації інновацій.

Досліджуючи природу формування інноваційної компетентності сучасного вчителя математики, можна дійти до висновку, що до чинників такого формування належать: готовність вчителя до інновації, критичність мислення, наявність ресурсів для реалізації нововведень, творча уява, здатність до рефлексії та мотиваційно-ціннісне ставлення до професійної діяльності.

1. Венцева Н.О., Карапетрова О.В. Інноваційна компетентність як складова професійної діяльності сучасного педагога. Вісник університету імені Альфреда Нобеля. Серія "Педагогіка і психологія". педагогічні науки. 2022. № 1 (23).
2. Ціпан, Т. С. (2016). Професійна компетентність сучасного вчителя. Інноватика у вихованні, 3, 174-184.
3. Дзюбенко Ю. Л. Інноваційна компетентність учителя як складова його професійної компетентності// Модернізація управління в контексті вимог Закону України "Про освіту": матеріали Всеукр. наук.-практ. онлайн-конф., Харків, 20 трав. 2020 р. – Харків : ХНПУ, 2020. - Ч. 1. – С. 110-114.
4. Проценко О., Юрочко С. Інноваційна компетентність педагога: зміст і структура. Молодь і ринок. 2015. № 5 (124). С. 51-55.
5. В. В. Ачкан. Інноваційна компетентність учителя математики// Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології – Суми : Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2014. - № 5 (39). - С.199-207.

Дослідження збіжності операторних рядів

Слюсарчук Василь

v.e.slyusarchuk@gmail.com

Національний університет водного господарства та природокористування, Рівне

Нехай E – довільний банаховий простір і $L(E, E)$ – банаховий простір лінійних неперервних операторів, що діють у просторі E .

Однією з основних задач теорії операторних рядів є задача про збіжність рядів вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad (1)$$

де $A_n \in L(E, E)$, $n \in \mathbb{N}$.

Цій задачі приділено увагу в монографіях [1], [2], статтях [3]–[9] та інших працях.

Навіть з'ясування умов збіжності простих операторних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} A^n \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-A},$$

$A \in L(E, E)$ (ці ряди збігаються лише у випадках $r(A) < 1$ і $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 1\}$ відповідно, де $r(A)$ і $\sigma(A)$ – спектральний радіус і спектр оператора A), не є тривіальною задачею [2].

Множина всіх лінійних неперервних операторів немає природної впорядкованості, як множина дійсних чисел. Тому для операторних рядів відсутні ознаки, аналогічні ознакам порівняння, що суттєво ускладнює дослідження збіжності цих рядів і вимагає розробки таких методів дослідження збіжності рядів, яких немає в теорії числових рядів.

Для дослідження операторних рядів в [1]–[9] застосовуються методи функціонального аналізу та теорії стійкості розв'язків різницевих рівнянь у банаховому просторі.

Навіть отримання операторних аналогів ознак д'Аламбера і Коші є не тривіальною задачею. Не використовуючи основні поняття і методи теорії лінійних операторів та теорії стійкості розв'язків еволюційних рівнянь, неможливо сформулювати ці аналоги й обґрунтувати їх [3], [4]. Побудова цих аналогів для (1) у випадку нескінченновимірних банахових просторів супроводжується отриманням нових результатів, яких немає у випадку числових рядів [2]–[4]. Складніше отримуються операторні аналоги ознак Раабе, Бертрана [5], Абеля та Діріхле [6].

Відсутність у банаховому просторі в загальному випадку властивості впорядкованої множини не дозволяє використовувати умову монотонності функцій, що в ознаках Абеля та Діріхле є суттєвою. Замість таких

функцій можна використовувати функції з обмеженою зміною, що розширює множину застосовності тверджень типу теорем Абеля та Діріхле [6].

Вагоме місце в [2] займають загальна інтегральна ознака збіжності числових рядів, члени яких можуть бути комплексними, векторних рядів і, зокрема, операторних рядів, що застосовна до дослідження на збіжність довільних рядів [7], [8], а також диференціальна ознака збіжності операторних рядів [9], що в багатьох випадках простіше застосовується до рядів, ніж інші ознаки.

Наведено застосування операторних рядів до розв'язання задач, пов'язаних із встановленням загальної теореми про дихотомію розв'язків лінійних різницевих рівнянь [10], із знаходженням загального вигляду лінійних s -неперервних різницевих операторів та зображення обмежених розв'язків відповідних лінійних рівнянь [11] та побудовою одного класу квазі-нільтпотентних операторів [12].

1. Слюсарчук В.Ю. Загальні теореми про збіжність числових рядів. – Рівне: Рівненський держ. техн. ун-т, 2001. – 240 с.
2. Слюсарчук В.Ю. Операторні ряди. – Рівне: Вид-во Нац. ун-ту вод. госп-ва та природокористування, 2023. – 229 с.
3. Слюсарчук В. Е. Операторный аналог признака д'Аламбера // Математика сьогодні '09. – Київ: Вид-во „Освіта України“, 2009. – С. 101–115.
4. Слюсарчук В. Ю. Операторний аналог ознаки Коші // Математичні студії. – 2010. – **33**, № 1. – С. 97–100.
5. Слюсарчук В. Ю. Операторний аналог ознаки Бертрана // Математичні студії. – 2011. – **35**, № 2. – С. 181–195.
6. Слюсарчук В. Ю. Узагальнення ознак Абеля та Діріхле // Укр. матем. журн. – 2020. – **72**, № 4. – С. 527–539.
7. Слюсарчук В. Ю. Нова інтегральна ознака збіжності рядів // Математичні студії. – 2014. – **41**, № 2. – С. 198–200.
8. Слюсарчук В. Ю. Інтегральні ознаки збіжності рядів // Буковинський матем. журн. – 2014. – **2**, № 2–3. – С. 208–213.
9. Слюсарчук В. Ю. Диференціальні ознаки збіжності операторних невластних інтегралів та рядів // Укр. матем. журн. – 2021. – **73**, № 9. – С. 1245–1259.
10. Слюсарчук В. Е. Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. матем. журн. – 1983. – **35**, № 1. – С. 109–115.
11. Слюсарчук В. Е. О представлении ограниченных решений линейных дискретных систем // Укр. матем. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 210–215.
12. Слюсарчук В. Е. Одно свойство абсолютно сходящихся числовых рядов // Математика сьогодні '97, Научно-метод. сб. – Киев: Научное изд-во „ТВиМС“, 1997. – С. 28–42.

Особливості структури розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь для побудови рівномірної асимптотики

Собчук Валентин, Зеленська Ірина

Korchuk@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Рівняння типу Орра-Зоммерфельда відіграють важливу роль у різних областях фізики, хімії та математики, сприяючи розвитку теоретичних моделей та розумінню властивостей фізичних систем у квантовій механіці, квантовій хімії, гідродинаміці при вивченні особливості ламінарних течій рідин тощо. Аналіз сучасної наукової літератури, присвяченої дослідженням систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту [1] вказує на те, що фундаментальні результати у побудові рівномірної асимптотики розв'язку для задач такого типу наразі не отримані.

Постановка задачі

Для системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь

$$\varepsilon Y'(x, \varepsilon) - A(x, \varepsilon)Y(x, \varepsilon) = H(x), \quad (1)$$

де $A(x, \varepsilon)$ має таку структуру

$$A(x, \varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1,$$

а $A_0(x)$ і A_1 матриці вигляду

$$A_0(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

методом істотно особливих функцій [2] побудуємо рівномірну асимптотику розв'язку на відрізку $[0, l]$, включаючи і точку звороту $x = 0$.

Сингулярно збурена задача (1) досліджувалась за таких умов:

С 1. $A_0(x), H(x) \in C^\infty[0, l]$.

С 2. $a(x) = x\tilde{a}(x)$, $\tilde{a}(x) \neq 0$, $b(x) \neq 0$.

Дослідження показали, що структура розв'язку при побудові рівномірної асимптотики істотно залежить від знаків коефіцієнтів. Тому необхідно розрізняти 4 випадки розташування знаків цих функцій:

$$\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) < 0, \quad x \in [0, 1].$$

$$\tilde{a}(x) > 0, \quad b(x) > 0, \quad x \in [0, 1].$$

$$\tilde{a}(x) < 0, \quad b(x) > 0, \quad x \in [0, 1].$$

$$\tilde{a}(x) < 0, \quad b(x) < 0, \quad x \in [0, 1].$$

Згідно методу істотно особливих функцій, необхідною умовою розширення задачі є справедливність співвідношення

$$\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y_k(x, \varepsilon). \quad (2)$$

Виділимо таку множину функцій, в якій розширена задача (2) буде регулярно збуреною відносно малого параметра. Для цього розглянемо множини (підпростори) функцій

$$\tilde{Y}(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^2 D_{ik}(x, t, \varepsilon) + f_k(x, \varepsilon)\psi(t) + \varepsilon^\gamma g_k(x, \varepsilon)\psi'(t) + \omega_k(x, \varepsilon)$$

$$\sum_{i=1}^2 D_{ik}(x, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \alpha_{i1}(x, \varepsilon) \\ \alpha_{i2}(x, \varepsilon) \\ \alpha_{i3}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} U_k(t) + \varepsilon^\gamma \begin{pmatrix} \beta_{i1}(x, \varepsilon) \\ \beta_{i2}(x, \varepsilon) \\ \beta_{i3}(x, \varepsilon) \end{pmatrix} U_k'(t)$$

$$U''(t) \pm tU(t) = 0, \quad \psi''(t) + t\psi(t) = 1.$$

Формальний розв'язок системи (1) має вигляд

$$\tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) = \tilde{Y}_{hom}(x, t, \varepsilon) + \tilde{Y}^{part.}(x, t, \varepsilon), \quad (3)$$

де $\tilde{Y}_{hom}(x, t, \varepsilon)$ – розв'язок однорідної системи, а $\tilde{Y}^{part.}(x, t, \varepsilon)$ – частинний розв'язок, відповідно, неоднорідної системи, тобто

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_k(x, t, \varepsilon) = & \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[\sum_{i=1}^2 \left[\alpha_{ikr}(x)U_i(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x)U_i'(t) \right] + \omega_{kr}(x) \right] + \\ & + \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r \left[f_{kr}(x)\zeta(t) + \varepsilon^{\frac{1}{3}}g_{kr}(x)\zeta'(t) \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \bar{\omega}_{kr}(x), \end{aligned} \quad (4)$$

де $\zeta(t) = \psi(t)$ у випадку $\tilde{a}(x) > 0$.

1. Бобочко В.М., М.О. Перестюк М.О. Асимптотичне інтегрування рівняння Ліувілля з точками звороту. – К.: Наукова думка, 2002. – 310 с.
2. Valentyn Sobchuk V., Laptiev O., Zelenska I. Algorithm for solution of systems of singularly perturbed differential equations with a differential turning point // Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences. – 2023 – 71, №3. – P. Article number: e145682 DOI: 10.24425/bpasts.2023.145682

**Про оцінки похибки апроксимації розв'язків
одновимірних крайових задач широкого класу**

Солдатов Віталій

soldatovvo@ukr.net, soldatov@imath.kiev.ua

Інститут математики НАН України

Доповідь присвячена оцінкам похибок, які виникають при апроксимації розв'язків крайової задачі вигляду

$$Ly(t) \equiv y^{(r)}(t) + \sum_{l=1}^r A_{r-l}(t) y^{(r-l)}(t) = f(t) \quad \text{для м.в. } t \in [a, b], \quad (1)$$

$$By = q. \quad (2)$$

Тут довільно вибрано числа $r, m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, де $a < b$, праві частини $A_{r-l} \in (L_1)^{m \times m}$, $f \in (L_1)^m$, $q \in \mathbb{C}^{rm}$ і лінійний неперервний оператор $B: (C^{(r-1)})^m \rightarrow \mathbb{C}^{rm}$. Розв'язок y розглядається як вектор-функція з простору Соболева $(W_1^r)^m$. Таку крайову задачу називаємо загальною з огляду на широке використання цього терміну у випадку $r = 1$. Усі функціональні простори є комплексними і заданими на $[a, b]$.

Припускаємо, що крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок y класу $(W_1^r)^m$ для будь-яких $f \in (L_1)^m$ і $q \in \mathbb{C}^{rm}$.

Розглянемо послідовність загальних крайових задач вигляду

$$L_k y_k(t) \equiv y_k^{(r)}(t) + \sum_{l=1}^r A_{r-l,k}(t) y_k^{(r-l)}(t) = f(t) \quad \text{для м.в. } t \in [a, b], \quad (3)$$

$$B_k y_k = q, \quad (4)$$

залежних від $k \in \mathbb{N}$ і таких, що для довільних правих частин $f \in (L_1)^m$ і $q \in \mathbb{C}^{rm}$ кожна задача має єдиний розв'язок $y_k \in (W_1^r)^m$, причому $y_k \rightarrow y$ в $(W_1^r)^m$ при $k \rightarrow \infty$. Отже, тут усі $A_{r-l,k} \in (L_1)^{m \times m}$, а кожне B_k є лінійним неперервним оператором на парі просторів $(C^{(r-1)})^m$ і \mathbb{C}^{rm} .

Явний приклад такої послідовності у класі багатоточкових крайових задач побудовано в [1, Теорема 1].

Нехай праві частини крайових задач (3), (4) залежать від параметра k , тобто

$$L_k x_k(t) = f_k(t) \quad \text{для м.в. } t \in [a, b], \quad B_k x_k = q_k, \quad (5)$$

де $f_k \in (L_1)^m$, $q_k \in \mathbb{C}^{rm}$, а $x_k \in (W_1^r)^m$. Дамо оцінки похибки x_k – у апроксимації розв'язку стартової крайової задачі (1), (2) у нормованих просторах $(W_1^r)^m$ і $(C^{(r-1)})^m$.

Теорема 1. Нехай $\varepsilon > 0$ і $\widehat{\varrho} \in \mathbb{N}$. Припустимо, що праві частини крайових задач задовольняють умови

$$\|f_k - f, (L_1)^m\| < \varepsilon \text{ і } \|q_k - q, \mathbb{C}^{rm}\| < \varepsilon \text{ при } k \geq \widehat{\varrho}. \quad (6)$$

Тоді існують числа $\varkappa > 0$ і $\varrho \geq \widehat{\varrho}$ такі, що

$$\|x_k - y, (W_1^r)^m\| < \varkappa \varepsilon \text{ при } k \geq \varrho.$$

Число \varkappa можна вибрати незалежним від ε , $\widehat{\varrho}$, f , q , f_k , і q_k , а число ϱ — від f_k and q_k .

Позначимо через F і F_k первісні функцій f і f_k на відрізку $[a, b]$, підпорядковані умовам $F(a) = 0$ і $F_k(a) = 0$.

Теорема 2. Нехай $\varepsilon > 0$ і $\widehat{\varrho} \in \mathbb{N}$. Припустимо, що

$$\|F_k - F, (C^{(0)})^m\| < \varepsilon \text{ і } \|q_k - q, \mathbb{C}^{rm}\| < \varepsilon \text{ при } k \geq \widehat{\varrho}. \quad (7)$$

Крім того, припустимо, що

$$\sigma := \sup\{\|B_k: (C^{(r-1)})^m \rightarrow \mathbb{C}^{rm}\|: k \geq \widehat{\varrho}\} < \infty.$$

Тоді існують числа $\varkappa > 0$ і $\varrho \geq \widehat{\varrho}$ такі, що

$$\|x_k - y, (C^{(r-1)})^m\| < \varkappa \sigma \varepsilon \text{ при } k \geq \varrho. \quad (8)$$

Число \varkappa можна вибрати незалежним від ε , $\widehat{\varrho}$, σ , f , q , і крайових задач (5) (тобто \varkappa залежить тільки від L і B), а ϱ — від f_k та q_k .

Зауважимо, що умова (7) слабша, ніж (6), а норма в $C^{(r-1)}$ слабша за норму в W_1^r .

Число \varkappa в (8) можна подати явно. Якщо $r = 1$, то можна взяти

$$\varkappa := (c_1 + c_2)\lambda + c_1 c_2 + 1, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} c_1 &:= 1 + \|Y, (C^{(0)})^{m \times m}\| \cdot \|[BY]^{-1}, \mathbb{C}^{m \times m}\|, \\ c_2 &:= 2 + \|Y, (C^{(0)})^{m \times m}\| \cdot \|Y^{-1}, (C^{(0)})^{m \times m}\| \cdot \|A, (L_1)^{m \times m}\|, \\ \lambda &:= \|B: (C^{(0)})^m \rightarrow \mathbb{C}^m\|^{-1}. \end{aligned}$$

Тут Y позначає матрицант диференціальної системи

$$Ly(t) \equiv y'(t) + A(t)y(t) = f(t),$$

віднесений до точки $t = a$, а $[BY]$ — квадратна матриця порядку m , кожний стовпець якої є результатом дії оператора B на стовпець матриці Y з тим же номером. При цьому норми вектор-функцій дорівнюють сумі норм їх компонентів, а норми матричних функцій — сумі норм їх стовпців.

Якщо $r \geq 2$, то число \varkappa можна означити за формулою (9), де

$$\begin{aligned} c_1 &:= 1 + \|V, (C^{(0)})^{rm \times rm}\| \cdot \|[BV^\circ]^{-1}, \mathbb{C}^{rm \times rm}\|, \\ c_2 &:= 2 + \|V, (C^{(0)})^{rm \times rm}\| \cdot \|V^{-1}, (C^{(0)})^{rm \times rm}\| \times \\ &\quad \times (b - a + \|A_{r-1}, (L_1)^{m \times m}\|), \\ \lambda &:= \|B : (C^{(r-1)})^m \rightarrow \mathbb{C}^{rm}\|^{-1}. \end{aligned}$$

Тут, V позначає матрицант системи (1), зведеної до першого порядку, віднесений до точки $t = a$. Крім того, V° — матриця-функція розмірності $m \times rm$, утворена першими m рядками V , а $[BV^\circ]$ означається аналогічно $[BY]$.

Для випадку, коли кожна задача (5) є багатоточковою, ці теореми доведено в [1].

Для іншого класу одновимірних крайових задач, розв'язних у просторі $(C^{(n)})^m$, оцінки похибки апроксимації розв'язків отримані в [2].

1. Murach A.A., Pelekhata O.B., Soldatov V.O. Approximation properties of solutions to multipoint boundary-value problems // Ukrainian Math. J. – 2021. – V. 73, no. 3. – P. 399–413. (arXiv:2012.15604)
2. Masliuk H., Pelekhata O., Soldatov V. Approximation properties of multipoint boundary-value problems // Methods Funct. Anal. Topology – 2020. – V. 26, no. 2. – P. 119–125.

Створення GUI для власної .NET-мови програмування Vlang

Сопронюк Тетяна, Дробот Андрій

t.sopronyuk@chnu.edu.ua, drobot.andrii@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імні Юрія Федьковича

У даній роботі розглядається процес створення мовного процесора та GUI для власної мови програмування Vlang. В ході розробки нами було використано наступні інструменти: генератор синтаксичних аналізаторів - Antlr та протокол взаємодії редакторів вихідного коду і серверів мовного аналізу - LSP (Language Server Protocol).

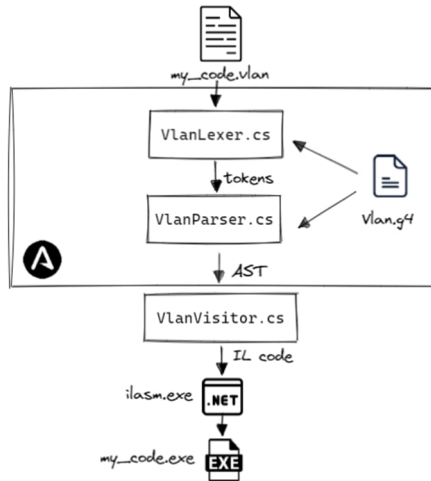


Рис 1. Програмна модель мовного аналізатору

Приклад коду мовою Vlang для обчислення чисел Фібоначчі:

```
print "Введіть кількість чисел: ";
scl count;
read count;
vec result {count + 2};
result:0 = 0;
result:1 = 1;
scl i;
i = 2;
loop (count) {
  result:i = (result:(i-1)) + (result:(i-2));
  i = i + 1;
}
print "Результат:", result;
```


У середовищі Antlr нами створено граматику, яка описує синтаксис мови Vlang:

```
grammar Vlang;
program: codeblock EOF;
codeblock: statement*;
statement: declaration | assignment | if_block |
          loop_block | print_statement | read_statement;

declaration: scalar_dec SCOL | vector_dec SCOL;
scalar_dec: SCALAR_TYPE ID;
vector_dec: VECTOR_TYPE ID LCBRACKET expression RCBRACKET;

assignment: (vector_element | ID) ASSIGN expression SCOL;

expression: ID | digit | vector | STRING
           | LBRACE expression RBRACE
           | vector_element
           | vector_product
           | expression (MULT | DIV ) expression
           | expression (PLUS | MINUS) expression;

          vector: ID | LSBRACKET digit (COMMA digit)* RSBRACKET;
          vector_element: vector COL expression;
          vector_product: vector DOT expression;

if_block: IF LBRACE DENIAL? expression RBRACE LCBRACKET statement* RCBRACKET;
loop_block: LOOP expression LCBRACKET statement* RCBRACKET;

print_statement : PRINT expression (COMMA expression)* SCOL;
read_statement: READ ID SCOL;

digit: MINUS? POSITIVE_DIGIT | ZERO;

SCALAR_TYPE: 'scl';           LCBRACKET: '{';
VECTOR_TYPE: 'vec';          RCBRACKET: '}';
IF: 'if';                    LSBRACKET: '[';
LOOP: 'loop';                RSBRACKET: ']';
PRINT: 'print';              LBRACE: '(';
READ: 'read';                RBRACE: ')';
POSITIVE_DIGIT: [1-9][0-9]*; SCOL: ',';
ID: [a-zA-Z][0-9]*;         ZERO: '0';
DOT: '.';                    COMMA: ',';
COL: ':';                     MINUS: '-';
PLUS: '+';                   MULT: '*';
DIV: '/';                    ASSIGN: '=';
DOUBLEQUOTE: '"';           DENIAL: '!';

SPACE: [ \t\r\n] -> skip;
COMMENT: '//' ~[\r\n]* -> skip;
```

Antlr використовується на двох етапах компіляції програми: лексичний аналіз і

синтаксичний аналіз [1]. Відповідно для кожного з цих етапів було задіяно окремі класи VlangLexer та VlangParser. Дані класи генеруються засобами Antlr на основі вищеприписаної граматики.

На етапі лексичного аналізу генерується послідовність лексем - токенів [2]. Токен - найменша змістована одиниця.

Приклад деяких лексем заданих для мови Vlang: ключові слова (scl, vec, loop), числові операції (+, -, *), фігурні та круглі дужки. Крім розпізнавання лексем, завданням класу VlangLexer є пошук лексичних помилок, наприклад, недопустимих символів.

Результатом роботи класу VlangParser є синтаксичне і абстрактне дерева розбору (Рис. 2). Конструктор класу приймає набір токенів, згенерованих за допомогою класу VlangParser.

Аналогічно класу VlangLexer, обов'язком класу VlangParser є виявлення синтаксичних помилок. Прикладом такої помилки може бути неправильний тип змінної.

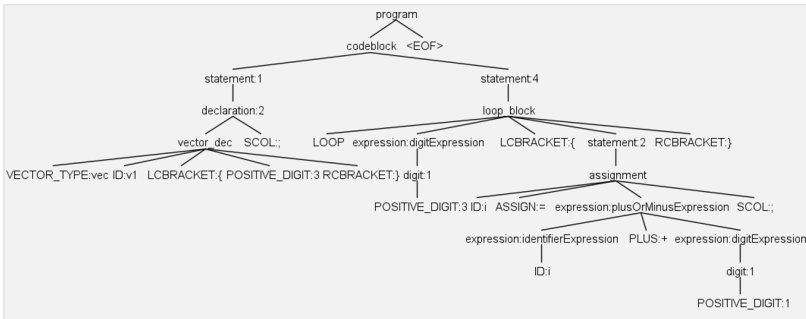


Рис 2. Синтаксичне дерево розбору

Отриманий список лексем програм та абстрактне дерево розбору на попередніх етапах обробляються LSP сервером, за допомогою нього здійснюється підсвітка синтаксису, автодоповнення та валідація. В якості клієнтів LSP серверу виступають IDE, що підтримують LSP протокол, такі як: Visual Studio, VS Code, IDEA, Sublime, Atom (Рис. 3).

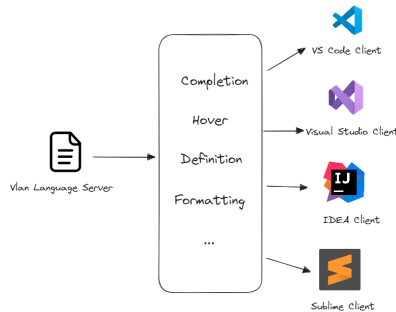


Рис 3. Взаємодія LSP серверу та клієнтів

За допомогою LSP редактори коду та IDE можуть взаємодіяти з різними мовами програмування та отримувати різні функції та послуги без необхідності створювати

окремі плагіни для кожної мови. Це полегшує роботу розробників та забезпечує єдності інтерфейсу користувача для роботи з різними мовами програмування.

Взаємодія між клієнтом і сервером відбувається через текстовий протокол на основі JSON-RPC (JavaScript Object Notation Remote Procedure Call)[3]. Приклад запити клієнта до сервера:

```
{
  "jsonrpc": "2.0",
  "id" : 1,
  "method": "textDocument/definition",
  "params": {
    "textDocument": {
      "uri": "file:///p/mseng/VSCode/Playgrounds/my_code.vlan"
    },
    "position": {
      "line": 3,
      "character": 12
    }
  }
}
```

Отже, у роботі нами було описано процес використання мовного аналізатору Antlr та протокол взаємодії LSP для розробки GUI для власної мови програмування Vlang. Аналогічним чином можна розробити користувацький інтерфейс для будь-якої мови високого рівня.

1. Сопронюк Т.М., Дробот А. В. Інструменти розробки мов програмування для платформи .NET // Матеріали міжнародної наукової конференції «Прикладна математика та інформаційні технології», присвяченій 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, 22-24 вересня 2022 р. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, - С.273 -276
2. Сопронюк Т.М. Системне програмування. Частина II. Елементи теорії компіляції: Навчальний посібник у двох частинах. – Чернівці: ЧНУ, 2008. – 84 с.
3. Understanding the Language Server Protocol – URL: <https://medium.com/@malintha1996/understanding-the-language-server-protocol-5c0ba3ac83d2>

Симетрії Лі та фундаментальні розв'язки лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів

Спічак Станіслав¹, Стогній Валерій², Копась Інна²

stas.math@gmail.com, stogniyvaleriy@gmail.com, innak@net.ua

¹Інститут математики НАН України

²Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

У роботі [1] розглянуто рівняння, яке описує ціноутворення азійського опціону в неперервному часі $\tau \in [0; T]$:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + f(S) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = 0, \quad (1)$$

де T – термін дії контракту; $V = V(\tau, S, A)$ – функція вартості опціону; S – вартість базового активу; A – усереднене значення всіх наявних цін базових активів S до моменту часу τ ; r та σ – сталі, що описують безризикову процентну ставку і волатильність акції відповідно;

$f(S) \neq \text{const}$ є довільною гладкою функцією.

Рівняння (1) містить низку відомих рівнянь азійських опціонів. Так, у роботі [1] розглядається рівняння з $f(S) = S$ та $f(S) = \ln S$, у роботі [2] – рівняння з $f(S) = \frac{1}{S}$.

Широке застосування рівняння (1) в задачах фінансової математики викликає беззаперечний інтерес до отримання його фундаментальних розв'язків. У роботі [3] знайдено з точністю до перетворень еквівалентності усі специфікації функції $f(S)$, за якою рівняння (1) допускає алгебру інваріантності вищої розмірності ніж ядро основних алгебр інваріантності рівнянь класу (1).

Одним із застосувань симетрійних властивостей лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними є побудова в явному вигляді фундаментальних розв'язків.

Фундаментальним розв'язком рівняння (1) називають узагальнену функцію $V = V(\tau, S, A, \tau_0, S_0, A_0)$, яка залежить від τ_0, S_0, A_0 як від параметрів і задовольняє рівняння

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} + f(S) \frac{\partial V}{\partial A} - rV = \delta(\tau - \tau_0, S - S_0, A - A_0), \quad (2)$$

де δ – функція Дірака.

Відомо, що фундаментальні розв'язки зазвичай є інваріантними відносно перетворень, які допускає вихідне рівняння. Зокрема, зазначену властивість мають фундаментальні розв'язки таких класичних рівнянь математичної фізики, як рівняння Лапласа, рівняння теплопровідності, хвильове рівняння. Отже, якщо рівняння має нетривіальні властивості, то для побудови фундаментального розв'язку можна використати теоретико-групові методи. Конструктивний метод знаходження симетрій лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними із δ -функцією у правій частині було запропоновано у роботі [4], в якій було наведено й алгоритм побудови інваріантних фундаментальних розв'язків.

Для деяких функцій $f(S)$, які мають алгебру інваріантності вищої розмірності ніж ядро основних алгебр інваріантності, згідно з цим методом знайдено алгебру інваріантності рівняння (2), яка є підалгеброю алгебри інваріантності рівняння (1), а використовуючи цю підалгебру, можна побудувати фундаментальний розв'язок.

1. Barucci E., Polidoro S., Vespri V. Some Results on Partial Differential Equations and Asian options // *Math. Models and Methods in Appl. Sci.* – 2001. – Vol. 11, No. 3. – P. 475–497.
2. Al-Azemi F., Calin O. Asian Options with Harmonic Average // *Appl. Math. Inf. Sci.* – 2015. – Vol. 9, No. 6. – P. 2803–2811.
3. Спичак С.В., Стогній В.І., Копась І.М. Групова класифікація одного класу $(2+1)$ -вимірних лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів // *Буковинський матем. журн.* – 2022. – Т. 10, № 2. – С. 240–248.
4. Аксенов А.В. Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // *ДАН.* – 1995. – Т. 342, № 2. – С. 151–153.

Про інваріантні тори та коливні розв'язки диференціально-різницевих рівнянь в просторі обмежених числових послідовностей

Теплінський Юрій

teplinsky.yuriy@gmail.com

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Розглянемо систему рівнянь загального виду з 2π -періодичними відносно кутових змінних φ коефіцієнтами

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = a(\varphi(t), x(t)), \quad (1)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\varphi(t), x(t), x(t+Q))x(t) + F(v(\varphi, t), x(t), x(t+\Theta))x(t+\Delta) + c(\varphi, t). \quad (2)$$

Тут $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ та $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ належать простору обмежених послідовностей \mathbf{m} дійсних чисел; $a(\varphi, x) = \{a_1(\varphi, x), a_2(\varphi, x), \dots\}$;

$P(\varphi, x, \chi) = [p_{ij}^1(\varphi, x, \chi)]_{i,j=1}^\infty$ та $F(v, x, \chi) = [f_{ij}(v, x, \chi)]_{i,j=1}^\infty$ — нескінченні матриці;

$v = (v_1, v_2, \dots)$, де $v_i(\psi) = v_i(\psi_1, \psi_2, \dots): \mathcal{T}_\infty \rightarrow R^1$ ($\psi_i \in \mathcal{T}_\infty, i \in N$), \mathcal{T}_∞ — нескінченновимірний тор, а через $v(\varphi, t)$ позначено функцію

$$\{v_1(\psi_1(\varphi, t), \psi_2(\varphi, t), \dots), v_2(\psi_1(\varphi, t), \psi_2(\varphi, t), \dots), \dots\},$$

де $\psi_i(\varphi, t) = (\varphi_{1t+\Theta_{i1}}(\varphi), \varphi_{2t+\Theta_{i2}}(\varphi), \dots)$, $\varphi_t(\varphi)$ — траєкторія на \mathcal{T}_∞ , $\varphi_0(\varphi) = \varphi \in \mathcal{T}_\infty$;

$c(\varphi, t) = \{c_1(z_1(\varphi, t), z_2(\varphi, t), \dots), c_2(z_1(\varphi, t), z_2(\varphi, t), \dots), \dots\}$, $z_i(\varphi, t) =$

$(\varphi_{1t+\Delta_{i1}}(\varphi), \varphi_{2t+\Delta_{i2}}(\varphi), \dots)$; $x(t+\Delta) = (x_1(t+\Delta_1), x_2(t+\Delta_2), \dots)$, $x(t+\Theta) =$

$(x_1(t+\Theta_1), x_2(t+\Theta_2), \dots)$ та $x(t+Q) = (x_1(t+Q_1), x_2(t+Q_2), \dots)$. При цьому

$\forall \{i, j\} \subset N$ Δ_{ij} , Δ_i , Θ_{ij} , Θ_i і Q_i — довільні дійсні числа, що визначають часові відхилення.

Отже, система рівнянь (1), (2) є суттєво нелінійною відносно змінних x та φ і містить нескінченну кількість відхилень. При цьому у випадку наявності додатних відхилень друге рівняння стає рівнянням із випередженням і задача знаходження розв'язків цієї системи потрапляє до класу некоректних задач.

Нагадаємо, що інваріантним тором системи рівнянь (1), (2) називають множину точок $x \in \mathbf{m}$, породжену функцією $x = u(\varphi) = (u_1(\varphi), u_2(\varphi), \dots)$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, якщо вона 2π -періодична відносно φ_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), обмежена за нормою і $\forall \varphi \in \mathcal{T}_\infty, t \in R^1$ задовольняє рівність

$$\begin{aligned} \frac{du(\varphi_t(\varphi))}{dt} &= P(\varphi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi)), u(\varphi, t+Q))u(\varphi_t(\varphi)) + \\ &+ F(v(\varphi, t), u(\varphi_t(\varphi)), u(\varphi, t+\Theta))u(\varphi, t+\Delta) + c(\varphi, t), \end{aligned}$$

де $\varphi_t(\varphi)$ — розв'язок рівняння $\frac{d\varphi_t(\varphi)}{dt} = a(\varphi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi)))$ і $u(\varphi, t+\Delta) = (u_1(\varphi_{t+\Delta_1}(\varphi)), u_2(\varphi_{t+\Delta_2}(\varphi)), \dots)$.

Добре відомо, що існування інваріантного тору вказаної вище системи рівнянь тісно пов'язане з існуванням у неї коливних розв'язків у випадку, якщо рівняння (1) має вигляд

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega, \quad (3)$$

де ω — сталий вектор несумірних частот.

У цій доповіді наводяться достатні умови існування неперервних інваріантних торів у деяких часткових випадках систем виду (1), (2) та (1), (3) причому досліджено випадок, коли інваріантний тор останньої системи рівнянь вкритий траєкторіями її майже-періодичних розв'язків.

Окремо здійснено побудову інваріантного тору лінійної системи методом укорочення її за кутовою змінною. Розглянуто рівняння

$$\frac{dx(t)}{dt} = P(\phi_t(\phi))x(t) + B(\phi, t)x(t + \Delta) + c(\phi, t), \quad (4)$$

де елементи $b_{ij}(y_1(\phi, t), y_2(\phi, t), \dots)$ нескінченної матриці $B(\phi, t)$ та координати $c_i(\phi, t) = c_i(z_1(\phi, t), z_2(\phi, t), \dots)$ векторної функції $c(\phi, t)$ визначаються рівностями $y_i(\phi, t) = \phi_{i+\Gamma_i}(\phi)$ та $z_i(\phi, t) = \phi_{i+\delta_i}(\phi)$ відповідно, Γ_i та δ_i – довільні фіксовані дійсні числа; $\phi \in \mathcal{T}_\infty$, $\{i, j\} \subset N$. При певних умовах кожне укорочене рівняння має інваріантний тор, вкритий траєкторіями його квазіперіодичних розв'язків. Послідовність цих торів (тобто, породжувачих їх функцій) збігається за нормою до інваріантного тору (тобто, породжувачої його функції) рівняння (4). Цей тор вкритий траєкторіями його майже-періодичних розв'язків. Це дає можливість обґрунтувати відомий процес лінеаризації для побудови інваріантного тору системи виду (1), (2).

Про існування коливних розв'язків злічених систем без відхилення аргументу можна почитати в статтях [1–3].

1. Теплінський Ю. В. Про наближення майже-періодичних розв'язків нелінійної зліченної системи диференціальних рівнянь квазіперіодичними розв'язками деякої лінійної системи // Буковинський Математичний Журнал. – 2021. 9, № 2, С. 111–123.
2. Теплінський Ю. В. Наближений метод побудови майже-періодичних розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський. – 2020. Вип. 21, С. 137–144.
3. Теплінський Ю. В. Про інваріантні тори квазілінійних злічених систем диференціальних рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Нелінійні коливання. – 2020. 23, № 4, с. 253–264.

Побудова явних розв'язків двовимірних задач теплопровідності для багат шарових кільцевих областей

Токовий Юрій

tokovyy@iapmm.lviv.ua

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України

Запропоновано підхід до побудови явних аналітичних розв'язків двовимірних задач теплопровідності для кільцевої області, складеної з концентричних кілець з довільною радіальною зміною властивостей матеріалу. Підхід ґрунтується на використанні концепції «єдиного тіла» (single-solid approach), в рамках якого властивості усього складеного кільця подаються у вигляді кусково-змінних функцій, та методу безпосереднього інтегрування ключових рівнянь термомеханіки [2]. При цьому інтегрування рівняння теплопровідності здійснюється при формулюванні у термінах теплового потоку, що дає змогу уникнути застосування апарату узагальненого диференціювання з огляду на умови ідеального теплового контакту шарів кільця. Щоб відокремити змінні у ключовому рівнянні використано розвинення у ряди Фур'є відносно колової координати, що індивідуалізує випадок однорідних граничних умов, та тих, що відповідають за зміну теплових навантажень за коловою координатою. Для останніх використання методу безпосереднього інтегрування до рівняння теплопровідності дало змогу вивести інтегральне рівняння другого роду, яке розв'язано в явному вигляді за допомогою методу резольвентного ядра для довільних радіальних залежностей коефіцієнта теплопровідності від радіальної змінної в межах кожного шару та різних геометричних параметрів шарів. Резольвентне ядро побудовано у вигляді нескінченного ряду повторюваних ядер, який для практичних обчислень можна замінити скінченною початковою сумою внаслідок нульової асимптотики повторних ядер зі збільшенням номера. Слід зазначити, що заміна точного виразу для резольвентного ядра наближеним призводить до того, що розв'язок точно задовольняє граничні умови, а інтегральне рівняння задовольняється за необхідною точністю. Це робить побудований розв'язок вигідним засобом для побудови розв'язків обернених задач теплопровідності [1].

З використанням побудованого розв'язку виконано чисельні розрахунки температурних полів у багат шарових кільцевих областях. Проаналізовано ефективність розв'язку та вплив кількості шарів, їх фізичних і геометричних властивостей, а також радіальної зміни коефіцієнта теплопровідності на застосовність розв'язку. З'ясовано можливість керування тепловим станом багат шарового неоднорідного циліндра за рахунок відповідного поєднання шарів з різною теплопровідністю. Для оптимізації вибору властивостей шару зручно використати отриманий у роботі явний аналітичний розв'язок двовимірної задачі теплопровідності для багат шарового порожнистого циліндра. Завдяки застосовності запропонованого розв'язку для різноманітних товщин шарів і профілів їх неоднорідності, воно є вигідним для верифікації моделей усереднення властивостей матеріалу розглянутих стратифікованих кільцевих областей.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки спільного словацько-українсько-го науково-дослідного проекту "Вплив нано-, мікро-, та мезо-неоднорідностей на макрочарактеристики термомеханічної поведінки композитних елементів конструкцій" (№ д.р. 0123U103235)

1. Tokovyy Y., Ma C.C. The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – Newcastle: Cambridge Scholars Publ., 2021. – 342 p.
2. Kushnir R.M., Yasinskyu A.V., Tokovyy Y.V. Effect of material properties in the direct and inverse thermomechanical analyses of multilayer functionally graded solids // Advanced Engineering Materials. – 2022. – 24, No. 5. – 2100875.

Використання штучного інтелекту у вивченні інформаційних технологій студентами

Унгурян Галина

g.unhurian@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Вивчення інформаційних технологій нерозривно пов'язане з якісною освітою у сучасному світі, адже складно уявити, що в майбутньому будь-який спеціаліст не буде використовувати комп'ютерну грамотність у своїй професії. Інформаційні технології розвивають критичне мислення студентів, оскільки вони навчаються аналізувати, оцінювати та обирати найкращі методи розв'язання проблем з використанням набутих знань.

Особливу роль у вивченні інформаційних технологій відіграє штучний інтелект, що з кожним днем набирає все більшої популярності, найяскравішим його представником, на даний момент є, звичайно, ChatGPT [1].

Розглянемо деякі переваги використання ШІ (штучного інтелекту) у навчанні студентів, а саме - це практично миттєвий доступ до великої кількості інформації та навчальних матеріалів, завдяки чому, студенти легко знаходять відповіді на запитання, досліджують нові ідеї, автоматизовують завдання, які потребують багато часу (обробка даних, аналіз інформації, створення звітів, а навіть в усуненні проблем з програмуванням та у пошуку розв'язання задачі при вивченні технічних наук). Важливим у дослідженні та написанні наукових робіт є те, що ШІ обробляє велику кількість інформації, виявляє закономірності та залежності. ШІ може пропонувати корисні джерела, книги, курси, а також створювати питання та тести з різних предметів, що дозволяють студентам перевірити та поглибити свої знання в будь-якій галузі.

Беззаперечною перевагою є те, що при спілкуванні з роботом, студент задає все більше питань через зацікавленість матеріалом, таким чином, поглиблюючи свої знання та покращуючи самоосвіту. Перевагою використання ШІ є навіть і те, що неймережа помиляється, оскільки, користувачі не покладаються тільки на відповіді робота, але і змушені перевіряти інформацію. Існує так званий ефект "галюцинування" моделей, коли модель генерує відповіді, що можуть здаватися гарними та коректними, але насправді вони вигадані або не спираються на реальні факти. Це відбувається через властивості навчання моделі, коли модель намагається знайти найкращу можливу відповідь на основі шаблонів, виявлених у навчальних даних [2].

Щодо роботи викладачів, то за допомогою ШІ можна формувати запити як донести складну інформацію при цьому, формулюючи запит так, що неймережа детально розписує складні дані, розбиваючи їх на більш прості частини.

ШІ здатний аналізувати великі обсяги даних і засновувати на них рішення, але він обмежений у креативних аспектах навчання, а саме стимулюванні до дослідження, створенні нових ідей та розв'язанні нетипових задач, що сприяє ризику впливу алгоритмів моделі на перекручення вмісту та дезінформацію.

Слід пам'ятати, що при використанні ШІ ви можете стикнутись з проблемами порушення авторських прав і конфіденційності. Не потрібно надавати жодних паролів, ключів API чи подібної важливої інформації, оскільки ці дані не можуть бути загальнодоступними.

Отже, використання ШІ є важливою складовою подальшого навчання студентів, особливо при вивченні інформаційних технологій і цінним доповненням для покращення ефективності та доступності навчання, але слід не забувати, що модель не може замінити людське мислення, приймати рішення замість студентів, вона є тільки невід'ємною складовою подальшого навчання, що з кожним наступним роком буде укорінюватись у повсякденні.

Глобальний атрактор напівпотоків м'яких розв'язків для напівлінійного параболічного рівняння без єдиності

Фекета Петро, Перестюк Юрій, Король Ігор, Капустян Олексій

petro.feketa@vuw.ac.nz, perestyuk@gmail.com, kapustyan@knu.ua

Веллінгтонський університет Вікторії, Нова Зеландія

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Ужгородський національний університет, Ужгород, Україна

Люблінський Католицький Університет Івана Павла II, Люблін, Польща

Розглядається напівлінійна задача

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Au + f(u) + h(x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $u = u(t, x)$ - невідома функція, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$ обмежена область з достатньо гладкою границею $\partial\Omega$, і

$$Au = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{i,j}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

Далі припускається, що

(A1) $-A$ - строго еліптичний самоспряжений оператор з обмеженими коефіцієнтами $a_i, b_i, i = 1, \dots, N$, і c .

(A2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною (але не обов'язково локально Ліпшицевою) функцією, $f(0) = 0$, і для $\epsilon \in (0, \lambda)$, $C > 0$ виконується нерівність

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad f(s) \cdot s \leq \epsilon \cdot s^2 + C, \quad (2)$$

де $\lambda > 0$ додатня константа яка, залежить від A .

Нехай

$$h \in X = C_0(\Omega) = \{v \in C(\bar{\Omega}) | v = 0 \text{ на } \partial\Omega\}. \quad (3)$$

Простір X має норму $\|v\|_X = \sup_{x \in \Omega} |v(x)|$ і є фазовим простором для нашої задачі. В роботі вивчається якісна поведінка м'яких розв'язків задачі (1) в фазовому просторі X .

Означення 1. Функція $u \in C([0, T], X)$ є м'яким розв'язком (1) з початковими даними $u(0) = u_0 \in X$, якщо $\forall t \in [0, T]$

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(u(s))ds + \int_0^t T(t-s)hds,$$

де $F : X \rightarrow X$, $F(u)(x) = f(u(x))$, і $T(t) \in C_0$ -напівгрупою породженою оператором A в просторі X .

В роботі доведено, що $\forall u_0 \in X$ існує принаймні один глобальний м'який розв'язок з $u(0) = u_0$. Також доведено, що відображення $G : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow 2^X$, яке визначається як

$$G(t, u_0) = \{u(t) | u(\cdot) \text{ м'який розв'язок (1) де } u(0) = u_0\}$$

є багатозначною напівгрупою (m -напівпоток,) яка має глобальний атрактор.

Означення 2. Непорожня компактна множина $\Theta \subset X$ називається глобальним аттрактором m -напівпотоків G якщо 1. $\Theta = G(t, \Theta) \forall t \geq 0$;

2. \forall обмеженої $B \subset X$

$$\sup_{u_0 \in B} \text{dist}_X(G(t, u_0), \Theta) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty,$$

де

$$\text{dist}_X(A, B) = \sup_{u \in A} \inf_{v \in B} \|u - v\|_X.$$

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються (A1), (A2). Тоді всі м'які розв'язки (1) в просторі X глобальні.*

Теорема 2. *Припустимо, що виконуються (A1), (A2). Тоді m -напівпотік G має глобальний аттрактор.*

1. J. M. Ball, John M. Global attractors for damped semilinear wave equations. *Discrete & Continuous Dynamical Systems*, 10(1&2):31, 2004.
2. A.V. Kapustyan, V. S. Melnik and J. Valero, Attractors of multivalued dynamical processes generated by phase-field equations. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 13(07):1969–1983, 2003.
3. P. Kalita and G. Lukaszewicz. Global attractors for multivalued semiflows with weak continuity properties. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. Elsevier. 101:124-143, 2014.

Про задачу з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами

Філіпчук Микола, Філіпчук Ольга

m.filipchuk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Розглядається крайова задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із скінченною кількістю перетворених аргументів вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1(t)), \dots, x(\lambda_k(t))), \quad (1)$$

$$\int_0^T x(t) dt = d, \quad (2)$$

де $t \in [0, T]$, $T = \text{const} > 0$; $x, f \in \mathbb{R}^n$; $\lambda_i : [0, T] \rightarrow [0, T]$ ($i = \overline{1, k}$) – довільні неперервні відображення; d – сталий n -вимірний вектор.

Питання дослідження існування та наближеної побудови розв'язку цієї задачі за допомогою чисельно-аналітичного методу А.М. Самойленка [1] раніше вивчалися в [2].

Виявляється, для крайової задачі (1), (2) додатково можна запропонувати модифіковану схему чисельно-аналітичного методу, де взагалі не виникатиме так зване визначальне рівняння, тобто метод матиме лише аналітичну складову.

Як і раніше, функцію $f(t, x, y_1, \dots, y_k)$ вважаємо визначеною та неперервною в області $(t, x, y_1, \dots, y_k) \in [0, T] \times D^{k+1}$, де D – замкнена обмежена область в \mathbb{R}^n , обмеженою вектором $M \in \mathbb{R}^n$, $M_i > 0$ ($i = \overline{1, n}$), і задовольняючою умову Ліпшица по x, y_1, \dots, y_k з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0; i, j = \overline{1, n}\}$:

$$|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| \leq M,$$

$$|f(t, \bar{x}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k) - f(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}_1, \dots, \bar{\bar{y}}_k)| \leq K \left(|\bar{x} - \bar{\bar{x}}| + \sum_{i=1}^k |\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i| \right).$$

Тут $|f(t, x, y_1, \dots, y_k)| = (|f_1(t, x, y_1, \dots, y_k)|, \dots, |f_n(t, x, y_1, \dots, y_k)|)$ і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (2) дає наступне твердження.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

- 1) вектор $w_0 = \frac{1}{T}d$ лежить в області D разом зі своїм $\beta = \frac{3}{2}TK$ -околом;
- 2) найбільше власне значення матриці $Q = \frac{3(k+1)}{2}TK$ не перевищує одиниці:

$$\lambda_{\max}(Q) < 1.$$

Тоді крайова задача (1), (2) має в області D єдиний розв'язок $x^*(t)$, який є рівномірною границею послідовних наближень

$$x_0(t) = w_0,$$

$$x_m(t) = w_0 + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda_1(s)), \dots, x_{m-1}(\lambda_k(s))) ds - \\ - \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^t f(s, x_{m-1}(s), x_{m-1}(\lambda_1(s)), \dots, x_{m-1}(\lambda_k(s))) ds dt, \quad m = 1, 2, \dots,$$

причому

$$|x^*(t) - x_m(t)| \leq Q^m(E - Q)^{-1}\beta$$

для всіх $m = 1, 2, \dots$ і $t \in [0, T]$.

Наведену модифіковану схему чисельно-аналітичного методу проілюстровано на модельних прикладах.

На завершення також зауважимо, що при $k = 1$ (у випадку наявності в системі лише одного перетвореного аргументу) всі наведені результати співпадають з результатами, раніше отриманими в [3, 4].

1. Samoilenko A.M., Ronto M. Numerical-Analytic Methods in the Theory of Boundary-Value Problems. – World Scientific, 2000. – 468 p.
2. Філіпчук М.П. Задача з інтегральними крайовими умовами для системи з багатьма перетвореними аргументами // Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 75-річчю кафедри диференціальних рівнянь та 85-річчю від дня народження М.П. Ленюка. – Чернівці, 2021. – С. 161.
3. Філіпчук М.П. Метод усереднення в крайових задачах для диференціальних рівнянь з відхиленим аргументом: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 1999. – 142 с.
4. Філіпчук М.П. Задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Чернівці: Прут, 2001. – Вип. 7. – С. 243-250.

Аналіз методики вивчення теми “Комп’ютерна графіка. Векторний графічний редактор” на уроках інформатики

Франчук Наталія, Франчук Роксолана

n.p.franchuk@npu.edu.ua, 20fi.r.v.franchuk@std.npu.edu.ua
Український державний університет імені Михайла Драгоманова

У сучасному світі використання комп’ютерної графіки є однією з ключових навичок, необхідних для розвитку інформаційного суспільства. Вона стає все більш важливою в різних сферах, включаючи дизайн, рекламу, веброзробку та ігрову індустрію. Тому вивчення комп’ютерної графіки та векторних графічних редакторів на уроках інформатики має велике значення для підготовки молодого покоління до сучасної реальності. Методика навчання теми “Комп’ютерна графіка. Векторний графічний редактор” на уроках інформатики вимагає належного підходу, щоб забезпечити ефективне засвоєння матеріалу учнями та розвинути їхні навички у галузі комп’ютерної графіки [1]. На це впливають деякі аспекти, зокрема:

– *Добір навчальних матеріалів* є одним із ключових етапів методики. Це можуть бути підручники, електронні посібники, відеоуроки або онлайн-ресурси. Важливо, щоб матеріали були зрозумілими для учнів та мали чітку структуру, що дозволить послідовно ознайомити їх з основами комп’ютерної графіки та векторними редакторами. А це своєю чергою забезпечить дотримання принципів навчання, таких як: принцип науковості; принцип посиленої складності; принцип доступності; принцип послідовності й систематичності навчання; принцип наочності змісту і діяльності; принцип активності й самостійності; принцип свідомості; принцип міцності й системності знань.

– *Практичні завдання та проекти.* Щоб забезпечити практичне застосування знань учнями, методика повинна включати практичні завдання та проекти з обов’язковим врахуванням диференційованого підходу. Практичні завдання стимулюють творче мислення учнів та допомагають закріпити набуті навички.

– *Взаємодія між вчителем та учнями.* Методика повинна сприяти активній взаємодії між вчителем та учнями. Демонстрація екрана, групові проекти або обговорення результатів роботи, допомагають створити сприятливу навчальну атмосферу. Взаємодія з вчителем та однокласниками сприяє обміну знаннями, спільному розв’язуванню проблем та взаємній підтримці.

– *Використання реальних прикладів та застосування.* Щоб підкреслити практичне значення теми, методика повинна включати реальні приклади застосування цих навичок у різних сферах, таких як дизайн, реклама, веброзробка тощо. Застосування реальних прикладів допомагає учням зрозуміти, як комп’ютерна графіка використовується у реальному житті та як її використання може вплинути на їхнє майбутнє.

– *Підтримка вчителя та індивідуальний підхід.* Учителю слід забезпечувати активну навчальну підтримку учнів у процесі навчання. Учителі повинні бути підготовлені та орієнтовані на індивідуальні потреби учнів, надавати додаткову допомогу, якщо це необхідно, і створювати сприятливу атмосферу для навчання та творчого розвитку.

Отже, аналіз методики вивчення теми “Комп’ютерна графіка. Векторний графічний редактор” на уроках інформатики показав, що ця тема має велике значення для розвитку навичок у сфері комп’ютерної графіки. Вибір належних навчальних матеріалів, включення практичних завдань, активна взаємодія між вчителем та учнями, застосування реальних прикладів та підтримка вчителя сприяють ефективному засвоєнню матеріалів та розвитку творчого мислення учнів. Дотримання головних аспектів такої методики готує молоде покоління до вимог сучасного інформаційного суспільства та відкриває їм можливість для подальшого розвитку у галузі комп’ютерної графіки.

На вивчення теми “Комп’ютерна графіка. Векторний графічний редактор” в закладах загальної середньої освіти на уроках інформатики відводиться 6 годин. Розглядають її в 9 класі в другому семестрі, за навчальною програмою 2017 року [2]. Добір певного векторного редактора залежить від досвіду та потреб вчителя.

1. Л. Карташова. Актуальність теми "Комп'ютерна графіка" в школі. URL: http://urok-graphics.ucoz.ua/publ/aktualnist_temi_komp_juterna_grafika_dlja_vivchennja_v_shkoli/1-1-0-1 (дата звернення 04.09.2023).
2. Програма курсу "Інформатика" 5-9 класи. URL: <https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/onovlennya-12-2017/programma-informatika-5-9-traven-2015.pdf> (дата звернення 04.09.2023)

Організація відкритого веборієнтованого освітнього середовища підготовки майбутніх вчителів інформатики та фахівців з інформаційних технологій

Франчук Василь

vfranchuk@udu.edu.ua

Український державний університет імені Михайла Драгоманова

Стрімкий розвиток суспільства в різних галузях ставить нові завдання перед системою вищої освіти. Виявляється недостатнім дати певну базу знань, що можна схарактеризувати в освітніх стандартах, навчальних посібниках тощо. За допомогою веборієнтованих систем можна організувати дистанційне, мобільне та змішане навчання, у зв'язку з чим в закладах вищої освіти створюються відповідні навчальні середовища, через які слухачі отримують доступ до навчальних матеріалів у будь-який час та в будь-якому місці, що робить процес навчання привабливішим, продуктивнішим, комфортнішим, а також стимулює здобувачів освіти до самоосвіти та навчання. Відкритість, розширюваність та швидкий розвиток веборієнтованих систем навчання сприяє їх широкому застосуванню у різних видах навчальної діяльності як викладачів, так і студентів, через що забезпечується гнучкість і задоволення широкого кола освітніх потреб, зокрема під час підготовки майбутніх вчителів інформатики та фахівців з інформаційних технологій [1]. Одним із таких засобів формування веборієнтованого відкритого освітнього середовища є система MOODLE, на основі чого забезпечується всім учасникам освітнього процесу (викладачам, здобувачам освіти) доступ до навчальних курсів. За допомогою цієї системи, використовуючи стандартні модулі (плагіни), можна налаштувати різноманітні ресурси веборієнтованого навчального курсу.

Особливістю веборієнтованого навчального курсу для підтримки освітнього процесу на всіх формах (стаціонарна, заочна, дистанційна, змішана) навчання є те, що такий навчальний засіб призначений для опановування навчальним матеріалом під керівництвом викладача. Викладач має змогу самостійно (або за допомогою методиста, модератора) вносити навчальні матеріали до навчального курсу, надсилати повідомлення студентам, розподіляти, збирати та перевіряти завдання, проводити анкетування та тестування, вести електронні журнали обліку оцінок та відвідування, налаштувати різноманітні ресурси, блоки курсу, зокрема підключати блок OpenAI Chat з елементами штучного інтелекту, тощо [2]. Доступ до ресурсів навчального курсу – персоналізований. Логін та пароль доступу отримується за допомогою облікового запису електронної пошти, який використовується, як елемент технології єдиного входу (SSO, англ. Single Sign-On). Кожен користувач має доступ лише до тих електронних навчальних курсів, на яких він зареєстрований для участі у навчальному процесі. Реєстрація користувачів (студентів) відбувається через обліковий запис, а запис на відповідний курс здійснюється викладачем (методистом або модератором системи).

Таким чином, використання відкритого освітнього середовища дає змогу інтегрувати сучасні освітні ресурси, навчальні програми, інформаційно-комунікаційні технології в єдину систему та автоматизувати управління освітнім процесом підготовки майбутніх вчителів інформатики та фахівців з інформаційних технологій.

1. Сергієнко В.П. Відкрите освітнє середовище як засіб модернізації системи підвищення кваліфікації на засадах концепції нової української школи. Світові освітні тренди: створення творчого середовища STEAM-навчання: матеріали міжнар. наук.-пр. online-конф. Київ, 2021. С. 103-107.
2. Франчук В.М. Методика навчання інформатичних дисциплін в педагогічних університетах з використанням веб-орієнтованих систем: монографія. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2020. 434 с.

Умови існування обмеженого розв'язку динамічного рівняння на часових шкалах

Цань Вікторія, Перестюк Юрій

viktoriia.tsan@knu.ua, perestyuk@gmail.com

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Дослідження диференціальних (динамічних) рівнянь на часових шкалах отримали значний розвиток внаслідок праці [1], де вперше було введено поняття Δ -похідної. Ця інноваційна концепція може бути застосована як на числовій осі, так і на різних замкнених підмножинах \mathbb{R}^1 , включаючи дискретні множини, такі як \mathbb{Z} , ейлерові множини $kh, h > 0$, множини Кантора та канторвали [2]. Такий підхід дозволяє розглядати неперервну та дискретну динаміку з єдиної точки зору, що сприяло розвитку динамічних рівнянь на часових шкалах [3].

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x) \quad (1)$$

де $x \in D$, D - область в просторі \mathbb{R}^n , і відповідну їй систему динамічних рівнянь на множині часових шкал \mathbb{T}_λ

$$x_\lambda^\Delta = X(t, x_\lambda) \quad (2)$$

де $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x_\lambda : \mathbb{T}_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^d$, і $x_\lambda^\Delta(t)$ - дельта-похідна функції $x_\lambda(t)$ на \mathbb{T}_λ . Припустимо, що $\inf \mathbb{T}_\lambda = -\infty$, $\sup \mathbb{T}_\lambda = \infty$, $\lambda \in \Lambda \subset \mathbb{R}$, і $\lambda = 0$ гранична точка множини Λ , причому для всіх $\lambda \in \Lambda$ точка $t = 0$ належить \mathbb{T}_λ . Також припустимо, що функція $X(t, x)$ неперервно диференційовна і обмежена разом зі своїми частинними похідними, тобто $\exists C > 0$ таке, що

$$|X(t, x)| + \left| \frac{\partial X(t, x)}{\partial t} \right| + \left\| \frac{\partial X(t, x)}{\partial x} \right\| \leq C \quad (3)$$

при $t \in \mathbb{T}_\lambda$, $x \in D$, де $\frac{\partial X}{\partial x}$ відповідна матриця Якобі.

Визначимо, що $\mu_\lambda := \sup_{t \in \mathbb{T}_\lambda} \mu_\lambda(t)$, де $\mu_\lambda(t) : \mathbb{T}_\lambda \rightarrow [0, \infty)$ - функція зернистості. Причому, якщо $\mu_\lambda \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, то \mathbb{T}_λ збігається з неперервною шкалою часу $\mathbb{T}_0 = \mathbb{R}$, а система (2) переходить в систему (1). Тому природно сподіватись, що за певних умов існування обмеженого на осі розв'язку рівняння (1) впливає існування обмеженого розв'язку у рівняння (2) на часовій шкалі \mathbb{T}_λ .

Означення. Розв'язок $x_\lambda(t)$ системи (2), визначений на \mathbb{T}_λ , будемо називати експоненціально стійким рівномірно за t_0 , якщо існують $\delta > 0$, $N > 0$ і $\alpha > 0$ такі, що для будь-якого розв'язку $y_\lambda(t)$ системи (2) такого, що $|x_\lambda(t_0) - y_\lambda(t_0)| < \delta$, при $t \geq t_0$ має місце нерівність

$$|x_\lambda(t) - y_\lambda(t)| \leq N e^{-\alpha(t-t_0)} |x_\lambda(t_0) - y_\lambda(t_0)|,$$

де сталі δ , N і α не залежать від t_0 .

Нами визначені наступні умови існування обмеженого на \mathbb{T}_λ розв'язку системи динамічних рівнянь (2).

Теорема 1. Нехай виконуються наступні умови:

- 1) $X(t, x)$ визначена і задовольняє умову (3) та неперервно-диференційована при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, де D -область з простору \mathbb{R}^d .
- 2) Існує таке $\mu_0 > 0$, що система (2) має обмежений на \mathbb{T}_{λ_0} , рівномірно за t_0 експоненційно стійкий розв'язок $x_{\lambda_0}(t)$, що лежить в області D разом з деяким своїм ρ -околом.

Тоді якщо виконуються нерівності

$$\mu_0 \left(e^{C \left(\frac{\ln 4N}{\alpha} + \mu_0 + 1 \right)} \left(C + \frac{C^2 \left(\frac{\ln 4N}{\alpha} + \mu_0 \right)}{4} \right) + 3C \right) \leq \frac{\delta}{8}, \quad (4)$$

$$\mu_0 \left(e^{C(\mu_0 + 1)} \left(C + \frac{C^2 \mu_0}{4} \right) + 3C \right) \leq \frac{\rho}{2}, \quad (5)$$

$$\frac{3N\delta}{2} < \rho \quad (6)$$

$$\mu_0 \leq \frac{\rho}{4C} \quad (7)$$

де сталі δ , N і α визначені в означенні та C визначена в умові (3), то при кожному μ_λ такому, що $\mu_\lambda < \mu_0$, система (2) має обмежений на \mathbb{T}_λ розв'язок.

Також справедливі наступні умови існування обмеженого на \mathbb{T}_λ розв'язку системи (2) при наявності такого розв'язку у відповідній системі (1) та їхньої близькості при $\mu_\lambda \rightarrow 0$.

Теорема 2. *Нехай виконуються наступні умови:*

- 1) функція $X(t, x)$ визначена і неперервно-диференційовна при $t \in \mathbb{R}$, $x \in D$, де D – область в \mathbb{R}^d , та задовольняє умову (3).
- 2) система (1) має обмежений на \mathbb{R} , рівномірно по $t_0 \in \mathbb{R}$ експоненційно стійкий розв'язок $x(t)$, який лежить в D разом з деяким ρ -околом.

Тоді, якщо виконуються нерівності (4-7), де C визначена в умові (3), то при кожному μ_λ такому, що $\mu_\lambda < \mu_0$, система (2) має обмежений на \mathbb{T}_λ розв'язок $x_\lambda(t)$. При цьому справедливе відношення

$$\sup_{t \in \mathbb{T}_\lambda} |x_\lambda(t) - x(t)| \rightarrow 0, \quad \mu_\lambda \rightarrow 0. \quad (8)$$

Більше того, зворотний зв'язок також має місце.

Теорема 3. *Нехай виконуються наступні умови:*

- 1) функція $X(t, x)$ задовольняє умови 1) теореми 1;
- 2) існує $\mu_0 > 0$, що система (2) з початковими даними в точці $t_0 = 0$ має обмежений на \mathbb{T}_{λ_0} , рівномірно за t_0 експоненційно стійкий розв'язок, який лежить в області D разом з деяким своїм ρ -околом.

Тоді, якщо виконуються нерівності (4-7), то система (1) має обмежений на \mathbb{R} розв'язок.

Отже, нами встановлено умови існування обмеженого розв'язку системи динамічних рівнянь на часових шкалах, визначено умови, за яких існування обмеженого розв'язку системи диференціальних рівнянь впливає з існування обмеженого розв'язку відповідної системи динамічних рівнянь на часових шкалах та навпаки, а також, проведено аналіз їхньої взаємної близькості.

1. Hilger S., Ein Masskettenkalkul mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten. PhD, Universitat Wurzburg, Wurzburg, Germany, 1988.
2. Pratsiovytyi M.V., Ratuhniak S.P. Properties and distributions of values of fractal functions related to Q_2 -representations of real numbers // Probability theory and mathematical statistics, 2018; 99 (2), 187-202.
3. Bohner M, Peterson A. Dynamical equations on time scales. An introduction with applications. Boston, MA, USA: Birkha"user, 2001.

Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків диференціального рівняння другого порядку зі швидко змінною нелінійністю від похідної невідомої функції

Чепок Ольга

olachepok@ukr.net

Державний заклад «Південноукраїнський національний педагогічний університет
імені К.Д. Ушинського»

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t) \varphi_0(y') \varphi_1(y), \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1; 1\}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ ($-\infty < a < \omega \leq +\infty$), $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \rightarrow]0, +\infty[$ ($i \in \{0, 1\}$) є неперервними функціями, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} — деякий однібічний окіл точки Y_i . Крім того, будемо вважати, що функція $\varphi_1 : \Delta_{Y_0} \rightarrow]0, +\infty[$ є правильно змінною (див. [1], с. 17) порядку σ_1 при прямуванні аргументу до Y_0 , а функція $\varphi_0 : \Delta_{Y_1} \rightarrow]0, +\infty[$ двічі неперервно диференційовна на Δ_{Y_1} та така, що,

$$\lim_{\substack{y \rightarrow Y_1 \\ y \in \Delta_{Y_1}}} \varphi_0(y) \in \{0, +\infty\}, \quad \varphi'_0(y) \neq 0 \text{ при } y \in \Delta_{Y_1}, \quad \lim_{\substack{y \rightarrow Y_1 \\ y \in \Delta_{Y_1}}} \frac{\varphi_0(y) \varphi''_0(y)}{(\varphi'_0(y))^2} = 1. \quad (2)$$

З умов (2) випливає, що функція φ_0 та її похідна першого порядку є швидко змінними при прямуванні аргументу до Y_1 (див. [6], С. 91-92).

У силу властивостей функції φ_0 та теореми 3.10.8 з роботи [1] функція φ_0 та її похідна першого порядку належать класу функцій Γ який був введений Л. Ханом (див., наприклад, [1], С. 75), а також класу $\Gamma_{Y_0}(Z_0)$, який був введений у роботі [3] як узагальнення класу Γ .

Для рівнянь типу (1) розглянемо наступний клас розв'язків.

Розв'язок y рівняння (1), визначений на $[t_0, \omega[$ $[a, \omega[$, називається $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язком ([5]) ($-\infty \leq \lambda_0 \leq +\infty$), якщо справедливими є наступні твердження

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\rightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y^{(i)}(t) = Y_i \quad (i = 0, 1), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

За попередніми результатами, у роботі [2] було встановлено умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків у випадку $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

У даній роботі було встановлено необхідні і достатні умови існування у рівняння (1) $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків, а також асимптотичних зображень при $t \uparrow \omega$ для цих розв'язків та їх похідних першого порядку.

Зауважимо, що у роботі [5] встановлено наступні апріорні асимптотичні співвідношення $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -розв'язків, що розглядаються:

$$\frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = [1 + o(1)], \quad \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = o(1) \quad \text{при } t \uparrow \omega,$$

де

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

Для формулювання основних результатів наведемо наступне означення.

Нехай $Y \in \{0, \infty\}$, Δ_Y — деякий однібічний окіл Y . Говорять, що повільно змінна при $y \rightarrow Y$ ($y \in \Delta_Y$) функція $\theta : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$ задовільняє умову S при прямуванні аргументу до Y (див., наприклад, у [5]), якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $y \rightarrow Y$ ($y \in \Delta_Y$) функції $L : \Delta_Y \rightarrow]0, +\infty[$ ([6], с.2-3) має місце співвідношення

$$\theta(yL(y)) = \theta(y)(1 + o(1)) \quad \text{при } y \rightarrow Y \quad (y \in \Delta_Y).$$

Отримано наступні теореми.

Теорема 1. Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція $\varphi_1(y')|y'|^{-\sigma_1}$ задовольняє умову S при $y' \rightarrow Y_1$ ($y' \in \Delta_{Y_1}$). Тоді, кожесен $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ – розв'язок диференціального рівняння (1) може бути представлений у вигляді

$$y(t) = \pi_\omega(t)L(t), \quad (3)$$

де $L : [t_0, \omega[\rightarrow R$ – двічі неперервно диференційовна функція така, що

$$y_0^0 \pi_\omega(t)L(t) > 0, \quad L'(t) \neq 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \quad (4)$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} L(t) \in \{0; \pm\infty\}, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t)L(t) = Y_0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} = 0. \quad (5)$$

При цьому, у випадку існування скінченної або нескінченної границі

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}, \quad (6)$$

мають місце наступні співвідношення

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)} = -1, \quad \alpha_0 L'(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad (t_0 \leq t_1 < \omega), \quad (7)$$

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0 \left(L(t) \left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right)} [1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \quad (8)$$

Будемо говорити, що виконується умова N , якщо для деякої неперервно диференційовної функції $L(t) : [t_0, \omega[\rightarrow R$ ($t_0 \in [a, \omega]$), яка задовольняє умови (3) – (7) та (8), має місце зображення

$$p(t) = \frac{\alpha_0 L'(t)}{|\pi_\omega(t)L(t)|^{\sigma_1} \theta_1(\pi_\omega(t)) \cdot \varphi_0 \left(L(t) \left[1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} \right] \right)} [1 + r(t)],$$

де $r(t) : [t_0, \omega[\rightarrow] - 1; +\infty[$ – неперервна функція, яка прямує до нуля при $t \uparrow \omega$.

Для формулювання наступної теореми введемо позначення

$$\mu_0 = \text{sign} \varphi_0'(y'), \quad \theta_1(y) = \varphi_1(y)|y|^{-\sigma_1}, \quad X(t) = L(t) \cdot e_1(t),$$

$$H(t) = \frac{L^2(t)\varphi_0'(X(t))}{\pi_\omega(t)L'(t)\varphi_0(X(t))}, \quad q_1(t) = \frac{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)} \right)'}{\left(\frac{\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)} \right)^2} \Bigg|_{y=X(t)},$$

$$e_1(t) = 1 + \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)}, \quad e_2(t) = 2 + \frac{\pi_\omega(t)L''(t)}{L'(t)}.$$

Для цих функцій, у силу (2) виконуються наступні твердження:

1.

$$\lim_{t \uparrow \omega} e_1(t) = \lim_{t \uparrow \omega} e_2(t) = 1 \quad \lim_{t \uparrow \omega} H(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t \uparrow \omega} q_1(t) = 0,$$

2. якщо існує границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}},$$

тоді

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{L(t)}{L'(t)} \cdot \frac{H'(t)}{|H(t)|^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Справедливою є наступна теорема

Теорема 2. Нехай $\sigma_1 \neq 1$, функція θ_1 задовольняє умову S , виконується умова N та

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)L'(t)}{L(t)} |H(t)|^{\frac{1}{2}} = \gamma_0, \quad 0 < \gamma_0 < \infty.$$

Тоді за умови

$$\alpha_0 \mu_0 \gamma_0 > 0$$

диференціальне рівняння (1) має однопараметричну сім'ю $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків, для кожного з яких мають місце наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$:

$$y(t) = \pi_\omega(t) \cdot L(t)(1 + o(1)), \quad (9)$$

$$y'(t) = X(t) + \frac{\varphi_0(X(t))}{\varphi'_0(X(t))} \cdot |H(t)|^{\frac{1}{2}} \cdot o(1). \quad (10)$$

Під час доведення результатів рівняння (1) шляхом спеціального перетворення зводиться до еквівалентної системи квазілінійних диференціальних рівнянь. Гранична матриця коефіцієнтів цієї системи має дійсні власні значення різних знаків, а отже, для цієї системи диференціальних рівнянь виконуються всі умови теореми 2.2 з [4]. Згідно цієї теореми відповідна система має однопараметричну сім'ю розв'язків $\{v_i\}_{i=1}^2 : [t^*, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ ($t^* \geq t_1$), які прямують до нуля при $t \uparrow \omega$. Цим розв'язкам відповідають розв'язки $y : [t^*, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ($t^* \geq t_1$) рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (9)-(10). В силу виду цих зображень маємо, що отримані розв'язки є $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язками рівняння (1).

1. Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L. Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications. // Cambridge university press. Cambridge. – 1987. – 494 p.
2. Chepok, O. (2023). Asymptotic Representations of Regularly Varying $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$ -Solutions of a Differential Equation of the Second Order Containing the Product of Different Types of Nonlinearities of the Unknown Function and its Derivative // Journal of Mathematical Sciences. 1-14. 10.1007/s10958-023-06576-x.
3. Evtukhov, V., Chernikova, A. (2019). Asymptotic Behavior of Slowly Varying Solutions of Second-Order Ordinary Binomial Differential Equations with Rapidly Varying Nonlinearity.// Journal of Mathematical Sciences.– 236. 10.1007/s10958-018-4111-7.
4. Evtukhov, V., Samoilenko, A. (2010). Conditions for the existence of solutions of real nonautonomous systems of quasilinear differential equations vanishing at a singular point.// Ukrainian Mathematical Journal - UKR MATH J. – 62. P. 56-86.
5. Evtukhov, V., Samoilenko, A. (2011). Asymptotic Representations of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations with Regularly Varying Nonlinearities // Differential Equations, Vol. 47, No. 5, pp. 627–649.
6. Maric V. Regular Variation and differential equations // Springer (Lecture notes in mathematics, 1726). – 2000. – 127p.

Положення рівноваги нелінійних періодичних інтегрально-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної

Чуйко Сергій, Кузьміна Влада

chujko-slav@ukr.net

Донбаський державний педагогічний університет

Досліджуємо задачу про побудову T – періодичного розв'язку [1, 2, 3]

$$z(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

нелінійної інтегрально-диференціальної системи

$$A(t)z'(t) = B(t)z(t) + \Phi(t) \int_0^T F(z(s), z'(s), s) ds + f(t), \quad (1)$$

не розв'язаної відносно похідної. Розв'язок періодичної задачі для рівняння (1) шукаємо в околі T – періодичного розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{D}^2[a; b], \quad z'_0(t) \in \mathbb{L}^2[a; b]$$

породжуючої системи

$$z'_0(t) = A(t)z_0(t) + f(t).$$

Тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{L}_{m \times n}^2[a; b] := \mathbb{L}^2[a; b] \otimes \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \Phi(t) \in \mathbb{L}_{m \times q}^2[a; b], \quad f(t) \in \mathbb{L}^2[a; b].$$

Матрицю $A(t)$ припускаємо прямокутною, або ж квадратною, але виродженою. Нелінійну функцію $Z(z, z', t)$ вважаємо двічі неперервно-диференційовною по z та z' у деякій області $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ і неперервною по $t \in [a, b]$, а також неперервною за третім аргументом на відрізьку $[0; T]$.

Називатимемо положенням рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи (1) вектор-функцію, яка задовольняє двом умовам [3]:

$$A(t)z'(t) = 0, \quad B(t)z(t) + f(t) + \Phi(t) \int_0^T F(z(s), z'(s), s) ds = 0. \quad (2)$$

У найпростішому випадку, за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi - \text{const}, \quad F(z, z', t) \equiv Z(z, z')$$

положення рівноваги $z(t) \equiv z - \text{const}$ нелінійної інтегрально-диференціальної системи (1) визначає рівняння

$$\varphi(z) := Bz + f + T\Phi F(z, z') = 0. \quad (3)$$

Функція $\varphi(z)$ двічі неперервно-диференційовна по z в області Ω . Для побудови ітераційної схеми $\{z_k\}$, збіжної до розв'язку рівняння (3) використовуємо узагальнений метод Ньютона [3].

Лема. *Припустимо, що для рівняння (3) виконані наступні умови*

1. *Нелінійна вектор-функція $\varphi(z) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, двічі неперервно-диференційовна в околі точки z_0 , має корінь $z^* \in \mathbb{R}^n$.*
2. *У заданому околі нульового наближення z_0 мають місце нерівності*

$$\left\| J_k^+ \right\| \leq \sigma_1(k), \quad \left\| d^2 \varphi(\xi_k; z^* - z_k) \right\| \leq \sigma_2(k) \cdot \|z^* - z_k\|. \quad (4)$$

3. Існує константа

$$\theta := \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\sigma_1(k)\sigma_2(k)}{2} \right\}$$

Тоді за умов

$$PJ_k^* = 0, \quad J_k := \varphi'(z_k) \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (5)$$

та

$$\theta \cdot |z^* - z_0| < 1 \quad (6)$$

для знаходження розв'язку z^* рівняння (3) може бути використана ітераційна схема

$$z_{k+1} = z_k - J_k^+ \varphi(z_k), \quad (7)$$

при цьому швидкість збіжності послідовності $\{z_k\}$ до розв'язку z^* рівняння (3) квадратична. Вектор-функція z^* за умови

$$B(t) \equiv B, \quad f(t) \equiv f, \quad \Phi(t) \equiv \Phi - \text{const}, \quad F(z, z', t) \equiv Z(z, z')$$

є положенням рівноваги нелінійної інтегрально-диференціальної системи (1). Тут

$$PJ_k^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{N}(J_k^*)$$

— ортопроектор матриці $J_k^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems.— Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
2. Samoilenko A.M., Boichuk A.A., Krivosheya S.A. Boundary value problems for systems of integro-differential equations with Degenerate Kernel // Ukrainian Mathematical Journal. — 1996. — **48**. — № 11. — P. 1785 — 1789.
3. Chuiko S.M., Chuiko O.V., Kuzmina V.O. Nonlinear integrodifferential boundary-value problems unsolvable with respect to the derivative // Journal of Mathematical Sciences. — 2023. — **270**. — № 2. — P. 385 — 395.

Метод декомпозиції Адомяна у теорії нелінійних крайових задач із запізненням

Чуйко Сергій, Попов Микита

chujko-slav@ukr.net

*Донбаський державний педагогічний університет,
Ін-т прикл. математики і механіки НАН України*

Досліджено задачу про побудову наближень до T – періодичного розв’язку

$$z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbb{C}^1[0, T], \quad z(t, \cdot) \in \mathbb{C}[0, \varepsilon_0]$$

системи диференціальних рівнянь з зосередженим запізненням [1]

$$z'(t, \varepsilon) = A(t)z(t, \varepsilon) + B(t)z(t - \Delta, \varepsilon) + f(t) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), z(t - \Delta, \varepsilon), t, \varepsilon). \quad (1)$$

Розв’язок періодичної задачі для рівняння (1) шукаємо в малому околі T – періодичного розв’язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1[0, T]$$

породжуючої системи

$$dz_0/dt = A(t)z_0(t) + B(t)z_0(t - \Delta) + f(t), \quad \Delta \in \mathbb{R}^1. \quad (2)$$

Тут $A(t)$, $B(t)$ – неперервні T – періодичні $(n \times n)$ – вимірні матриці, $f(t)$ – неперервна T – періодична вектор-функція, $Z(z(t, \varepsilon), z(t - \Delta, \varepsilon), t, \varepsilon)$ – нелінійна вектор-функція, аналітична в малому околі розв’язку породжуючої задачі (2), неперервна та T – періодична по t , а також аналітична по малому параметру ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$. Як відомо, у критичному випадку [2, с. 33], а саме, за наявності T – періодичних розв’язків

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r$$

однорідної частини

$$dz_0(t)/dt = A(t)z_0(t) + B(t)z_0(t - \Delta) \quad (3)$$

системи (2), а у випадку сталих матриць $A(t) \equiv A$ та $B(t) \equiv B$, за наявності суто уявних коренів

$$\lambda_j = \pm ik_j T, \quad i = \sqrt{-1}, \quad j \in \mathbb{N}$$

характеристичного рівняння породжуюча періодична задача для рівняння (2) розв’язна не для усіх вектор-функцій $f(t)$. У критичному випадку спряжена система [2, с. 30]

$$dy(t)/dt = -A^*(t)y(t) - B^*(t)y(t + \Delta)$$

має сім’ю T – періодичних розв’язків вигляду

$$y(t, c_r) = H_r(t)c_r, \quad c_r \in \mathbb{R}^r.$$

Періодична задача для рівняння (2) розв’язна за умови [2, с. 33]

$$\int_0^T H_r^*(s) f(s) ds = 0. \quad (4)$$

Тут $H_r(t)$ – $(n \times r)$ – вимірна матриця, утворена з r – лінійно-незалежних T – періодичних розв’язків спряженої системи. Припустимо умову (4) виконану; при цьому загальний розв’язок породжуючої T – періодичної задачі для рівняння (2) має вигляд

$$z_0(t, c_r) = X_r(t)c_r + G[f(s)](t), \quad c_r \in \mathbb{R}^r,$$

де $G[f(s)](t)$ – деякий частинний розв’язок породжуючої T – періодичної задачі для рівняння (2), $X_r(t)$ – $(n \times r)$ – вимірна матриця, утворена з r – лінійно-незалежних T – періодичних розв’язків системи (2). Для побудови частинного розв’язку $G[f(s)](t)$ породжуючої T – періодичної задачі для рівняння (2) за умови її розв’язності застосовний метод декомпозиції Адомяна [3].

Лема. Припустимо, що для породжуючої періодичної задачі для рівняння (2) має місце критичний випадок і виконується умова розв'язності (4), при цьому періодична задача для рівняння (2) має сім'ю T – періодичних розв'язків вигляду $z_0(t, c_r)$. Припустимо також, що T – періодична задача для рівняння (1) має T – періодичний розв'язок, який при $\varepsilon = 0$ перетворюється на породжуючий $z(t, 0) = z_0(t, c_r^*)$. За цих умов вектор $c_r^* \in \mathbb{R}^r$ задовольняє рівнянню для породжуючих амплітуд

$$F(c_r^*) := \int_0^T H_r^*(s) Z(z_0(s, c_r^*), z_0(s - \Delta, c_r^*), s, \varepsilon) ds = 0. \quad (5)$$

Рівняння (5) називають рівнянням для породжуючих амплітуд нелінійної періодичної крайової задачі для рівняння (1).

1. Boichuk A.A., Samoilenko A.M. Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems. — Utrecht; Boston: VSP, 2004. — XIV + 317 pp.
2. Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И. Лекции по теории колебаний систем с запаздыванием. — К.: Изд-во Киев. ун-та, 1969. — 309 с.
3. Чуйко С.М., Чуйко О.С., Попов М.В. Метод декомпозиції Адомяна у теорії нелінійних періодичних крайових задач // Нелінійні коливання. — 2022. — 25. — № 4. — С. 413 — 425.

Метод Ньютона – Канторовича у теорії нелінійних матричних рівнянь

Чуйко Сергій, Шевцова Катерина

chujko-slav@ukr.net, shevtsova19931993@gmail.com

Донбаський державний педагогічний університет,

Інститут прикладної математики і механіки НАН України

Вивчення нелінійних матричних рівнянь [1], зокрема, матричного алгебраїчного рівняння Ріккати, пов'язане з численними застосуваннями таких рівнянь при розв'язанні матричного диференціального рівняння Ріккати [2], теорії нелінійних коливань, у механіці, біології, радіотехніці, теорії керування та стійкості руху. Для знаходження наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь у випадку невідомої квадратної матриці застосовний метод Ньютона. Для знаходження наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь у випадку невідомої прямокутної матриці нами використовується метод Ньютона – Канторовича [3]. Нами досліджено задачу про знаходження розв'язку

$$Z \in \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}, \quad \alpha \neq \beta$$

нелінійного рівняння

$$F(Z) = 0. \tag{1}$$

Матричну функцію $F(Z)$ припускаємо визначеною у відкритій області $D \subset \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$ і двічі неперервно диференційовною по Z на множині $\Omega \subseteq D \subset \mathbb{R}^{\alpha \times \beta}$. Використовується оператор $\mathcal{M}[A] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, як такий, що ставить у відповідність матриці $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ вектор $\mathcal{B} := \mathcal{M}[A] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, утворений з n стовпців матриці A , а також обернений оператор [4, 5]

$$\mathcal{M}^{-1}[\mathcal{B}] : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

який ставить у відповідність вектору $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ матрицю $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Актуальність дослідження задачі про знаходження розв'язку нелінійного матричного рівняння (1) пов'язана з тим фактом, що переважна більшість досліджень умов розв'язності цього рівняння [2], передбачає рівність $\alpha = \beta = \gamma = \delta$. Для знаходження наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь у випадку невідомої квадратної матриці застосовний метод Ньютона [3]. Для знаходження наближень до розв'язків нелінійних матричних рівнянь у випадку невідомої прямокутної матриці нами застосовано метод Ньютона – Канторовича [5].

1. Boichuk A.A. Criterion of the solvability of matrix equations of the Lyapunov type // Ukrainian Mathematical Journal. — 1998. — **50**. — № 8. — P. 1162 — 1169.
2. Boichuk A.A. A Critical Periodic Boundary Value Problem for a Matrix Riccati Equations // Differential Equations. — 2001. — Т. 37, — № 4. — P. 464 — 471.
3. Chuiko S.M. To the generalization of the Newton-Kantorovich theorem // Visnyk of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. mathematics, applied mathematics and mechanics. — 2017. — **85**. — № 1. — P. 62 — 68.
4. Magnus J.R., Neudecker H. Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, 2nd Edition. — Wiley. — 1999. — 424 pp.
5. Чуйко С.М. О решении матричных уравнений Ляпунова // Вестник Харьковского национального университета ім. В.Н. Каразіна. Серія: Математика, прикладна математика и механика. — № 1120. — 2014. — С. 85 — 94.

Асимптотика одного класу розв'язків неавтономного диференціального рівняння третього порядку

Шарай Наталія¹, Шинкаренко Володимир²

rusnat36@gmail.com, shinkarenko.v.n@gmail.com

¹ Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

² Одеський національний економічний університет

Розглянемо диференціальне рівняння

$$y''' = \alpha_0 p(t)y \ln |y|^\sigma, \quad (1)$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $p : [a, \omega[\rightarrow]0, +\infty[$ - неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$.

Розв'язок y рівняння (1), який заданий і відмінний від нуля на проміжку $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, будемо називати $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язком, якщо він задовольняє наступним умовам:

$$\lim_{t \uparrow \omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm \infty \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2), \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y''(t))^2}{y'''(t)y'(t)} = \lambda_0. \quad (2)$$

В роботах [1 – 3] для рівняння (1) було встановлено умови існування $P_\omega(\lambda_0)$ -розв'язків у випадку, якщо $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$, а також було одержано асимптотичні зображення для таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно. При цьому доведено теореми про кількість розв'язків із знайденими асимптотичними зображеннями.

Метою даного дослідження є встановлення необхідних та достатніх умов існування у диференціального рівняння (1) $P_\omega(0)$ -розв'язків, а також асимптотичного зображення при $t \uparrow \omega$ для всіх таких розв'язків та їх похідних до другого порядку включно.

Введемо функцію

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

З леми 10.6., яку наведено у роботі [4] (Р.3, §10, рр. 143-144), безпосередньо випливає наступне твердження

Лема. Для кожного $P_\omega(0)$ -розв'язку диференціального рівняння (1) мають місце при $t \uparrow \omega$ наступні асимптотичні співвідношення

$$y(t) \sim \pi_\omega(t)y'(t), \quad y''(t) = o\left(\frac{y'(t)}{\pi_\omega(t)}\right). \quad (3)$$

а у випадку існування границі $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)y'''(t)}{y''(t)}$ (скінченної або рівної $\pm\infty$), має місце співвідношення $y'''(t) \sim -\frac{y''(t)}{\pi_\omega(t)}$ при $t \uparrow \omega$.

Для формулювання основного результату введемо допоміжні функції $P_1(t) = \int_{A_1}^t p(\tau) d\tau$, $P_2(t)$

$$\int_{A_2}^t P_1(\tau) d\tau, \quad J_A(t) = \int_A^t \pi_\omega(\tau)p(\tau) |\ln|\pi_\omega(\tau)||^\sigma d\tau,$$

$I(t) = \int_a^t J_A(\tau) d\tau$, де границі інтегрування $A, A_1, A_2 \in \{a, \omega\}$ обираються в залежності від збіжності інтегралів.

Теорема 1. Припустимо, що існує (скінченна або рівна $\pm\infty$) границя

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t)J'_A(t)}{J_A(t)}. \quad (4)$$

Тоді диференціальне рівняння (1) має $P_\omega(0)$ -розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконуються умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) J_A(t) = 0, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) J'_A(t)}{J_A(t)} = -1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} I(t) = \pm\infty, \quad (5)$$

де кожен з таких розв'язків допускає наступні асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$:

$$\frac{y(t)}{y'(t)} = \pi_\omega(t)[1 + o(1)], \quad (6)$$

$$\ln |y'(t)| = \alpha_0 I(t)[1 + o(1)] \quad (7)$$

$$\frac{y''(t)}{y'(t)} = \alpha_0 J_A(t)[1 + o(1)]. \quad (8)$$

Більш того, якщо умови (5) виконані, тоді диференціальне рівняння (1) має дво-параметричну сім'ю розв'язків, яка має асимптотичні зображення (6) – (8) при $t \uparrow \omega$ у випадках $\omega = +\infty$, та $\omega < +\infty$.

1. N. V. Sharai and V. N. Shinkarenko, Asymptotic representations for the solutions of third order nonlinear differential equations. J. Math. Sci. (N.Y.) 215 (2016), no. 3, 408–420.
2. N. V. Sharai, Asymptotic behavior of solutions of ordinary differential equations of third order. (Russian) Visnyk Odesk. Nath. University, Mat. i Mech. 15 (2010), no. 18, 88–101.
3. N. V. Sharai and V. N. Shinkarenko, Asymptotic behavior of solutions for one class of third order nonlinear differential equations. Abstracts of the International Workshop on the Qualitative Theory of Differential Equations – QUALITDE-2018, Tbilisi, Georgia, December 1-3, pp. 165–169.
4. V. M. Evtukhov, Asymptotic representations of solutions of non-autonomous ordinary differential equations. Diss. D-ra Fiz.-Mat.Nauk, Kiev, Ukraine, 1998.

Задачі моделювання форм стійких тонких осесиметричних порожнин у вагомій рідині

Шепетьюк Богдан¹, Нестерук Ігор²

shepetyukb@gmail.com, nesteruk@yahoo.com

¹ Чрнівський національний університет імені Юрія Федьковича

² Інститут гідромеханіки НАН України

Опір високошвидкісних підводних транспортних засобів може бути зменшений шляхом зменшення площі, яка змочується водою, тобто за допомогою використання суперкавітації [1, 2, 3]. Для отримання малих значень числа кавітації при малих швидкостях або на великих глибинах руху, використовується піддув каверни газом [4]. Вентиляція також дуже важлива в експериментах, оскільки швидкості в експериментальних установках, як правило, набагато менші, ніж для реальних транспортних засобів. Обмежені швидкості кавітаційних труб суттєво збільшують вплив гравітації на форми і розміри каверни. Теоретичні та чисельні дослідження вентилязованих каверн вельми обмежені. Навіть в тому випадку, коли вплив потоку газу усередині каверни і гравітації незначні, немає повної теорії для форми каверни в залежності від швидкості подачі газу, числа кавітації і форми тіла, розташованого усередині каверни.

Якщо газ рухається у вузькому каналі між поверхнею каверни і корпусом транспортного засобу, то тиск на поверхні каверни не є постійним і змінює її форму в порівнянні з випадком парової кавітації. Це складне явище досліджувалось чисельно з використанням рівнянь в'язкої рідини [5]. Використання моделі ідеальної рідини і теорії тонкого тіла дозволяє отримати прості рівняння для форми осесиметричних вентилязованих суперкаверн, якщо потік газу між поверхнею каверни і тіла обертається є одновимірним, нев'язким і нестисливим. Ряд результатів були отримані в роботах [6, 7, 8] для стаціонарного потоку рідини без гравітаційних ефектів. В роботі [9] результати цих робіт узагальнені для нестаціонарних вертикальних потоків в полі сили тяжіння. Зокрема, було запропоновано рівняння першого наближення для радіуса $R(x)$ стаціонарної осесиметричної вентилязованої каверни

$$\frac{d^2 R^2}{dx^2} = \frac{\sigma_0}{\ln \epsilon} + \frac{2kx}{Fr^2 \ln \epsilon} + \Delta \left[a - \frac{1}{(R^2 - R_b^2)^2} \right], \quad (1)$$

де всі довжини є безрозмірними (віднесені до радіусу каверни в її початку R_0), $k = 1$ відповідає випадку, коли напрямки потоку води на нескінченності і гравітаційного прискорення збігаються; $k = -1$ відповідає випадку, коли напрямки цих векторів протилежні. Значення параметрів σ_0 , Fr , Δ і a визначаються формулами:

$$\sigma_0 = \frac{2(p_\infty - p_v - p_0)}{\rho U^2}, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gR_0}},$$
$$\Delta = -\frac{\rho_g Q^2}{\pi^2 R_b^4 \rho U^2 \ln \epsilon}, \quad a = \left[1 - \frac{R_{b0}^2}{R_0^2} \right]^{-2},$$

де ρ густина води; U стала швидкість потоку води на нескінченності; p_v - тиск водяної пари при температурі навколишнього середовища; p_∞ і p_0 тиски, виміряні в поперечному перерізі каверни далеко в потоці води і газу на початку каверн відповідно; ρ_g постійна густина газу; Q об'ємне витрачання газу; R_b , R_{b0} радіуси корпусу в точках x і $x = 0$; ϵ малий параметр, відношення максимального радіуса системи каверна-кавітатор до його довжини.

В роботі [10] розраховані форми форми тонких стаціонарних осесиметричних вентилязованих каверн для висхідного та низхідного потоків води для різних значень чи-

сла Фруда і радіусів розташованих в каверні циліндричних корпусів. Показано, що вентиляція збільшує розміри каверн за конічним кавітатором і зменшує довжину донних каверн. Коли напрямок потоку води на нескінченності є протилежним до сили тяжіння, інтенсивність піддуву не може перевищувати деяке критичне значення для конічних кавітаторів і не може бути меншою деякого значення для донних каверн.

В роботі [11] було запропоновано аналітичні формули для оцінки стійкості тонких осесиметричних вентилятованих каверн, які дозволяють розрахувати залежності числа критичної кавітації від числа кавітації пари як для диска, так і для тонких кавітаторів.

В даному дослідженні ці формули були використані для розрахунку кривих стійкості для різних радіусів конічних корпусів, розташованих всередині каверни, різних форм кавітатора, числа Фруда та напрямків навколишнього потоку. Показано, що радіус циліндричного корпусу та сили тяжіння може суттєво вплинути на стійкість вентилятованих каверн. Відповідні залежності різні для різних форм кавітатора. Показано, що $\sigma_0(cr)$ -теоретичне достатньо мало відрізняється від $\sigma_0(cr)$ -експериментального, одержаного при дослідженні узагальненого рівняння каверни.

1. Логвинович Г.В. Гидромеханика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка, 1969. – 208 с.
2. Savchenko Yu. N. Perspectives of the Supercavitation Flow Applications // Int. Conf. on Superfast Marine Vehicles Moving Above, Under and in Water Surface (SuperFAST2008), 2–4 July 2008.
3. I. Nesteruk. Drag drop on high-speed supercavitating vehicles and supersonic submarines. Applied Hydromechanics. – 2015. – vol. 17, N 4. – P. 52 – 57.
4. Vlasenko, Yu. D., Savchenko, G. Yu. Study of the parameters of a ventilated supercavity closed on a cylindrical body, I. Nesteruk (ed.). // Supercavitation. – 2012. – Springer, – Pp. 201-214.
5. Zhuravlev, Yu. F., Varyukhin, A.V. Numerical simulation of interaction gas jets flowing into water cavity with its free surfaces simulation // Int. Conf. SuperFAST2008. –2008.
6. Манова З.І., Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. Оцінки впливу вентиляції на форму тонких осесиметричних каверн // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т. 13(85), N 2. – С. 44-50.
7. Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. Особливості форми донних штучних осесиметричних каверн // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – Т.13(85), N 3. – С. 64-75.
8. Нестерук І.Г., Шепетюк Б.Д. Форма штучних осесиметричних каверн при до - та надкритичних значеннях інтенсивності піддуву // Прикладна гідромеханіка. – 2012. – Т.14, N 2. – С. 53-60.
9. Nesteruk, I. Shape of Slender Axisymmetric Ventilated Supercavities // Journal of Computational Engineering. – 2014. – V.2014, – P. 18.
10. I.G Nesteruk, B.D. Shepetyuk. Stability of slender axisymmetric ventilated cavities closing on in ponderable liquid // Hydrodynamics and acoustics. – 2018. – 1.(2). – Pp. 233-244.<https://doi.org/10.15407/lha.2018.02.233>.
11. Liu Pingana, Bogdan Shepetyuk, Igor Nesteruk. Stability of slender axisymmetric ventilated cavities closing on cylindrical hulls // Chinese Journal of Physics. – 2019. – V.61. – P. 29-37.<https://doi.org/10.1016/j.cjph.2019.08.008>.

Застосування сервісів штучного інтелекту Adobe Sensei для задач електронної комерції

Шкільнюк Дмитро

dimonshk@gmail.com

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Електронна комерція, або e-commerce, представляє собою спосіб здійснення торговельних операцій через Інтернет. Вона охоплює продаж товарів і послуг, електронний бізнес, онлайн-торгівлю, цифровий маркетинг і інші аспекти, пов'язані з електронними транзакціями. За останні роки електронна комерція збільшила зростання обсягів та розширення асортименту. Відповідне зростання обсягів, спонукає до застосування сервісів штучного інтелекту, для вирішення задач персоналізованого маркетингу.

Персоналізований маркетинг [1] – це практика використання даних з метою створення індивідуального досвіду для наявних клієнтів чи цільової аудиторії. Штучний інтелект та аналітика допомагають електронним магазинам створювати персоналізовані пропозиції для клієнтів, підвищуючи залученість і конверсію. Вони допомагають передбачити покупкові поведінки і рекомендувати товари.

Розглянемо продукти, які забезпечує компанія Adobe для застосування сервісів штучного інтелекту в галузі електронної комерції, а саме Adobe Commerce і Adobe Sensei.

Adobe Commerce [2] – це платформа для створення і управління електронними комерційними сайтами, яка базується на Magento CMS. Adobe Sensei [3] – це набір інтелектуальних сервісів та технологій штучного інтелекту. Ця платформа використовується для розв'язання різних завдань у сферах графіки, медіа, електронної комерції, маркетингу та інших областях, в яких Adobe має продукти та послуги. Adobe Sensei включає в себе різні технології і можливості, такі як машинне навчання, аналіз даних, обробка природної мови та багато інших.

Adobe Sensei застосовується в Adobe Commerce для оптимізації та поліпшення різних аспектів електронної комерції. А саме:

– **Персоналізація контенту:** Adobe Sensei може аналізувати дані про користувачів, їхні покупки, перегляди і поведінку на сайті. На основі цих даних платформа може створювати персоналізовані рекомендації для кожного користувача, що підвищує конверсію і збільшує обсяги продажів.

– **Аналітика і прогнозування:** Adobe Sensei може аналізувати величезні обсяги даних про продажі, запаси, замовлення та інші параметри електронної комерції. Це дозволяє платформі надавати користувачам цінну інформацію щодо тенденцій в їхніх бізнесах і навіть прогнозувати майбутні попити на товари.

– **Оптимізація процесу оформлення замовлення:** Adobe Sensei допомагає вдосконалити процес оформлення замовлення шляхом аналізу поведінки користувачів під час оформлення покупок. Він може рекомендувати оптимальні кроки та пропонувати оптимізовані шаблони для полегшення процесу оформлення замовлення.

– **Управління запасами і доставкою:** Adobe Sensei допомагає оптимізувати управління запасами, прогнозувати потреби у товарах та планувати доставку. Це допомагає уникнути втрат через недостачу або надмір запасів.

Загалом, Adobe Sensei використовується для різних завдань і допомагає підвищити продуктивність, якість та конкурентоспроможність бізнесу в різних галузях.

1. <https://apix-drive.com/ua/blog/marketing/sho-take-personalizovanij-marketing-top-5-trendiv-ta-prikladiv>
2. <https://business.adobe.com/solutions/commerce.html>
3. <https://www.adobe.com/sensei.html>

Відокремлення змінних в ключових інтегро-диференціальних рівняннях задач теорії пружності та термопружності для областей з кутовими точками

Юзв'яз Микола, Токочий Юрій

yuzvyaky@ukr.net, tokovyuy@iapmm.lviv.ua

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України*

Сучасні тенденції розвитку техніки та технологій, зокрема, щодо мініатюризації технічних та електронних пристроїв і потреб якісної оцінки їх міцнісних властивостей, сприяють відновленню інтересу до класичних задач механіки, постановка та методи розв'язування яких переосмислюються з урахуванням сучасних потреб. Особливу увагу привертають задачі для тіл з концентраторами напружень, наявність яких зумовлена дефектами структури матеріалу або ж особливостями геометрії тіл. До такого класу належать задачі теорії пружності та термопружності для обмежених тіл з кутовими точками, найпростішими з яких є призматичні тіла, наприклад, прямокутного поперечного перерізу, конусо- та клиноподібні елементи тощо. Попри довготривалу історію розроблення методів аналізу таких задач, багато з них залишаються нерозв'язаними, або ж побудовані розв'язки є недостатньо ефективними для сучасних теоретичних та прикладних застосувань. Основна складність при побудові точних аналітичних розв'язків таких задач полягає в одночасному задоволенні вихідних рівнянь та повного набору межових умов, заданих на всіх гранях досліджуваного тіла. Остання обставина суттєво обмежує можливості побудови систем власних функцій для відокремлення змінних у ключових рівняннях, сформульованих для визначальних функцій (часто у цій якості використовують гармонічні чи бігармонічні потенціальні функції). Це обумовлює, зокрема, нестійкість побудованих розв'язків у кутових точках межі та інші ускладнення теоретичного та обчислювального характеру. Недарма сформульовану Г. Ляме задачу про пружну рівновагу куба при довільному нормальному силовому навантаженні граней (плоским аналогом якої є задача для прямокутної області у зрівноваженому полі сил) порівняно за складністю зі значенитою задачею трьох тіл небесної механіки і досі не розв'язано в явному вигляді.

Якщо аналіз напруженого стану не є кінцевою метою досліджень, а розв'язання задач здійснюється з метою отримати явні залежності компонент тензора напружень чи вектора переміщень від силових чи теплових факторів навантаження межі тіла для подальшого використання, наприклад для відтворення певних чинників навантажень чи оптимального керування компонентами напруженого стану, використання методу безпосереднього інтегрування, запропонованого проф. В. М. Вігаком [1], забезпечує певні переваги. Застосування цього методу ґрунтується на використанні рівнянь рівноваги в напруженнях для подання всіх компонент тензора напружень через визначальні функції, за які вибрано певні напруження чи їх лінійні комбінації. У такий спосіб вдається уникнути фізично необґрунтованого підвищення порядку ключових рівнянь для визначальних функцій. Ефективність числової реалізації такого підходу залежить від вибору визначальних функцій, що обумовлює актуальність даної роботи.

У роботі використано базові співвідношення лінійної теорії пружності й термопружності та засадничу концепцію методу безпосереднього інтегрування [1, 2]. Для побудови розв'язків отриманих ключових інтегро-диференціальних рівнянь застосовано аналітично-числовий підхід, основою якого є метод відокремлення змінних та розвинення заданих і шуканих функцій у відповідні ряди за побудованими повними ортогональними системами власних та приєднаних функцій.

Для реалізації методу запропоновано способи вираження шуканих компонент тензора напружень через введені визначальні функції Вігака (одну у випадку двовимірних формувань, три – у просторовому випадку). Отримано інтегро-диференціальні

рівняння суцільності для визначальних функцій Вігака та відповідні інтегральні умови, еквівалентні вихідним межовим умовам для різних компонент тензора напружень. Встановлено інтегральні умови рівноваги для силових навантажень та умови погодження межових умов у кутових точках і на гранях розглянутих тіл, необхідні для коректності розв'язків сформульованих задач у термінах напружень. Досліджено поля напружень у тілах з кутовими точками та виявлено певні закономірності їх розподілу в околах цих точок, впливу характеристик матеріалу та пропорцій між навантаженими сторонами і гранями.

Роботу виконано за часткової фінансової підтримки спільного польсько-українського науково-дослідного проекту "Ідентифікація термомеханічних параметрів неоднорідних композитних матеріалів та захисних покриттів" (№ д.р. 0123U103240)

1. Калиняк Б.М., Токовий Ю.В., Ясінський А.В. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – 59, № 3. – С. 28–42.
2. Tokovyy Y., Ma C.C. The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – Newcastle: Cambridge Scholars Publ., 2021. – 342 p.

Вебдоступність та її роль в освіті

Юрійчук Анастасія

a.yuriyuchuk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

У сучасному освітньому контексті тематика вебдоступності набуває особливої важливості. Інклюзивна освіта, яка спрямована на створення рівних можливостей для всіх студентів, незалежно від їхніх потреб та обмежень, стає невід'ємною частиною сучасної освітньої парадигми. Тому забезпечення доступності освітніх інформаційних ресурсів, електронних підручників та мультимедійних навчальних матеріалів через вебдоступність відіграє ключову роль.

Останні дослідження підтверджують зростання зацікавленості до проблеми вебдоступності в закладах освіти. Ця тема досліджується з різних перспектив та напрямів. Проблеми доступності активно вивчаються такою організацією, як ПРООН, а також вченими Г. Давиденко, І. Бородкіною, І. Гевко, Ю. Носенко та ін.. Зарубіжні дослідники, такі як О. Sawettrattanasatian, А. Parker, С. Velasco, також зробили свій внесок у розвиток даної теми. Всі ці вчені роблять акцент на важливості розробки та впровадження вебдоступності для забезпечення рівних можливостей навчання та розвитку для всіх студентів.

Вебдоступність включає в себе різні аспекти та практики, спрямовані на забезпечення того, щоб вебсайти та вебресурси були доступними та використовувались різними користувачами, включаючи тих, у кого є фізичні, сенсорні, когнітивні, аудіальні чи інші обмеження. Вона базується на технологічних стандартах та рекомендаціях, розроблених Міжнародною організацією World Wide Web Consortium (W3C). Один з найважливіших документів, пов'язаних із вебдоступністю, це "Web Content Accessibility Guidelines" (WCAG) - Керівництво з доступності вебконтенту. WCAG містить набір рекомендацій і критеріїв успіху, які описують, як забезпечити доступність вебсайтів і вебдодатків для різних категорій користувачів. Згідно цим стандартам, вебдоступність включає чотири основні принципи: сприймання, керування, зрозумілість і сумісність [1].

20 лютого 2023 року опублікований перший авторизований переклад українською мовою Міжнародних настанов WCAG 2.1 [2].

Впровадження вебдоступності в освітніх закладах має численні переваги, які позитивно впливають на навчальний процес та усіх його учасників. Основні з них включають:

1. Підвищена ефективність навчання. Доступ до візуальних, аудіо та інших видів матеріалів різних форматів дозволяє студентам вибирати той, який найбільше відповідає їхньому способу навчання.
2. Підтримка студентів з особливими потребами. Вебдоступність допомагає студентам з обмеженими можливостями активно брати участь у навчальному процесі, забезпечуючи їм необхідні адаптивні інструменти.
3. Відповідність законодавству. Багато країн мають законодавство, яке зобов'язує освітні заклади забезпечити доступність навчальних матеріалів для всіх студентів. Дотримання вебдоступності допомагає відповідати цим вимогам.
4. Покращена репутація закладу. Впровадження вебдоступності свідчить про соціальну відповідальність закладу освіти та його зобов'язання забезпечити рівний доступ до освіти.
5. Зниження бар'єрів. Вебдоступність допомагає знизити бар'єри, які можуть виникнути через технічні обмеження або відсутність адаптивних засобів.

Всі ці переваги роблять вебдоступність необхідною складовою для покращення якості навчання та забезпечення рівних можливостей для всіх студентів. Станом на 2021 рік низка українських університетів запропонували програми та ініціативи, які втілюють цифрову інклюзію [3].

У сукупності, вебдоступність є фундаментальною складовою сучасного освітнього та цифрового середовища. Вона підкреслює значення врахування різноманітності користувачів у процесі розробки та дизайну вебресурсів. Забезпечення вебдоступності впливає на залученість усіх в освітній процес, гарантує рівні можливості, сприяючи розвитку інклюзивної освіти та суспільства загалом.

Забезпечення вебдоступності в закладах освіти вимагає комплексного підходу та ретельної організації, враховуючи різні аспекти технічних, організаційних та педагогічних змін.

1. Савіцький Р.С. Безбар'єрність вебпорталів освітніх навчальних закладів України. Технічна інженерія. 2023. № 1 (91). С. 172-177.
2. Web Content Accessibility Guidelines (WCAG) 2.1. Авторизований переклад українською мовою. URL: <https://www.w3.org/Translations/WCAG21-ua/> (дата звернення: 19.08.2023).
3. Давиденко Г. Цифрова інклюзія та доступність: соціальна діджиталізація: монографія. Вінниця: ТВОРИ, 2023. 240 с. URL: <https://doi.org/10.58521/978-617-552-348-3-2023-236>

Властивості розв'язків стохастичних рівнянь у частинних похідних з марковськими параметрами

Юрченко Ігор, Ясинський Володимир

i.yurchenko@chnu.edu.ua, v.yasynskyy@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння у відомих монографіях [1, 2] та їх подальше розповсюдження на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь [3] (див. бібліографію в цих роботах) стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними (СДРЧП) з урахуванням випадкових параметрів (див. [4], [5], [6] та ін.).

Розглянемо стохастичний експеримент з базовим імовірнісним простором $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbb{P})$, $F \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ - фільтрація, $\mathbb{E}\{\cdot\}$ - математичне сподівання, $T \subset [0, \infty)$. Простір функцій $u(t, x, \omega) : [0, T] \times \mathbb{R}^1 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, вимірних за t та x з імовірністю одиниця відносно σ -алгебри борелевих множин фазового простору $\mathcal{B}([0, T], \mathbb{R}^1)$, для яких існує невластий інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\{|u(t, x, \omega)|^2\} dx < \infty$, позначимо \mathfrak{M}_T і введемо для нього відповідні норми. Позначимо через

$$Q(A(\cdot), q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj}(t, \xi(t)) q^k p^j, \quad Q(B(\cdot), q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m b_{kj}(t, \xi(t)) q^k p^j,$$

$$Q(C(\cdot), q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m c_{kj}(t, \xi(t)) q^k p^j, \text{ де } A(\cdot), B(\cdot), C(\cdot) - \text{матриці розмірності } n \times m,$$

що містять відповідні берові функції, які залежать від t . Розглядаємо на $(\Omega, \mathcal{F}, F, \mathbb{P})$ задачу Коші для СДРЧП вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(A(t, \xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] &= f(\beta(\omega)) \left[Q \left(B(t, \xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \right. \\ &\times u(t, x, \omega) + \left. \frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(C(t, \xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] \frac{dw(t, \omega)}{dt} \right], \\ Q \left(A(t, \xi(t)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \Big|_{t=0} &= [Qu]_0, \end{aligned}$$

$f(\cdot)$ - берова функція з областю значень \mathbb{R}^1 , $\beta(\omega)$ - випадкова величина, задана щільністю $p_\beta(x)$ (або функцією розподілу), $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \in \mathbb{Y}$ для довільного $t \geq t_0$, $\omega \in \Omega$ - стохастично неперервний феллерів марковський процес з неперервними справа реалізаціями на компактному фазовому просторі \mathbb{Y} , $w(t, \omega)$ - одновимірний стандартний вінерів процес.

Отримані результати щодо поведінки в середньому квадратичному сильного розв'язку даного рівняння (див. [7] - [11]).

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. - Київ: Наук. думка, 1980. - 612 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. - Київ: Ін-т математики АН УРСР. - 1981. - С.25-59.
3. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. - Рига: Ориентир, 1992. - 301 с.

4. Перун Г.М., Ясинський В.К. Дослідження задачі Коші для стохастичних рівнянь у частинних похідних // Укр. мат. журн. – 1993. – Т.45, № 9. – С.1773 – 1781.
5. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Asymptotics of the State Vector of Delayed Impulsive Diffusion Systems with Markov Parameters // Cybernetics and Systems Analysis. – 2011. – Vol.47, №4. – P.571–585.
6. Yasinsky V.K. Stability in the First Approximation of Random-Structure Diffusion Systems with Aftereffect and External Markov Switchings // Cybernetics and Systems Analysis. – 2014. – Vol.50, №2. – P.248–259.
7. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side // Cybernetics and Systems Analysis. – 2015. – Vol.51, №1. – P.56–63.
8. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Existence of Lyapunov–Krasovskii Functionals for Stochastic Functional Ito–Skorokhod Equations under the Condition of Solutions’ Stability on Probability with Finite Aftereffect // Cybernetics and Systems Analysis. – 2018. – Vol.54, №6. – P.957–970.
9. Lukashiv T.O., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Necessary and Sufficient Conditions of Stability in the Quadratic Mean of Linear Stochastic Partial Differential-Difference Equations Subject to External Perturbations of the Type of Random Variables // Cybernetics and Systems Analysis. – 2020. – Vol.56, №2. – P.303–311.
10. Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V. Existence of the Solution to the Cauchy Problem for Nonlinear Stochastic Partial Differential-Difference Equations of Neutral Type // Cybernetics and Systems Analysis. – 2021. – Vol.57, №5. – P.764–774.
11. Yasynskyy V.K., Yurchenko I.V. Mean-Square Stability and Instability Criteria for the Gikhman–Ito Stochastic Diffusion Functional Differential Systems Subject to External Disturbances of the Type of Random Variables // Cybernetics and Systems Analysis. – 2023. – Vol.59, №2. – P.283–295.

Платформи для вивчення робототехніки в сучасній школі

Яшан Богдан

b.yashan@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Сьогодні диктує світову епоху розбудови інформаційного суспільства, розвиток IT-галузі, нанотехнологій, в якому головним ресурсом економіки стають знання, а освіта стає не лише головною умовою самореалізації та самоактуалізації особистості, але і важливим фактором соціально-економічного та духовного піднесення держави та забезпечує її конкурентоспроможність на світовій арені. Таким чином, система освіти має забезпечити хорошими умовами життєдіяльність громадян та виховати інтелектуальну еліту нації. На сучасному етапі розвитку в США та європейських країнах виховання інтелектуально здібних та обдарованих дітей та молоді вважається одним із найважливіших напрямів державної політики.

STEM-освіта (англійською - Science, Technology, Engineering, Math, що в перекладі означає наука, технологія, інженерія та математика) - це низка чи послідовність курсів або програм навчання, яка готує учнів до успішного працевлаштування, до освіти після школи, вимагає різних і більш технічно складних навичок, зокрема із застосуванням математичних знань і наукових понять [1].

Одним із напрямків впровадження STEM-освіти є робототехніка. Вона дозволяє використовувати моделі, які ми зустрічаємо в реальному світі, та створювати ігрове середовище для навчання та розвитку дітей завдяки використанню конструкторів.

Сьогодні найбільш популярними наборами для вивчення робототехніки є плата micro:bit та конструктор Lego Mindstorms Education EV3.

Мікробіт (BBC micro bit або micro:bit) - компактний комп'ютер на основі однієї плати, розроблений з ініціативи BBC спільно з великими технологічними компаніями та навчальними організаціями для стимулювання прогресу у сфері інформаційних технологій та робототехніки. За допомогою Micro Bit можна вивчати різні мови програмування, а також створювати роботизовані пристрої та прилади Smart House. Це зручна інтерактивна плата, яка має безліч можливостей для використання та розширення кругозору, у тому числі й для навчання дітей.

Конструктор Lego Mindstorms Education EV3 це основа для початку конструювання та програмування роботів на EV3. Містить все необхідне для побудови базових моделей популярних моделей роботів. Може використовуватися незалежно та поєднуватися з іншими наборами серії LEGO MINDSTORMS Education.

Дані види робототехнічних наборів допоможуть учням розвинути здібності до дослідницької, аналітичної роботи, експериментування, критичного мислення, а також розвине в учнів відповідальність, терпіння, організованість, посидючість та інші позитивні якості особистості.

Однак не кожен ЗЗСО дозволить собі покупку даних робототехнічних наборів. Тому ці компанії врахували цей момент та створили онлайн середовища для програмування та відтворення дій руху роботів без використання наборів. Сайт <https://makecode.microbit.org/> [2] містить платформу, яка дозволяє учню написати код програми для плати micro:bit, не маючи її в наявності та побачити симуляцію плати. На запропонованій платформі передбачено писати код програми блоками, мовою Python та мовою JavaScript. Сайт <https://makecode.mindstorms.com/> [3] містить платформу, яка дозволяє програмувати роботи на базі конструктора Lego Mindstorms Education EV3 та завантажувати код на плату або також побачити симуляцію, не маючи плати. При роботі на платформі сайту передбачено використання блочної мови програмування та мову JavaScript.

Таким чином, запропоновані сервіси дозволять вивчати робототехніку всім учням різних вікових категорій, як за наявності плати так і за її відсутності.

1. Збірник тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції. Методична система навчання основам технології та робототехніки як складової STEM-освіти: збірник тез за матеріалами Всеукраїнської науково-практичної конференції, 25 листопада 2021 р. – Чернівці, 2021. - 149 с.
2. Офіційний сайт Micro:Bit - URL: <https://makecode.microbit.org/>
3. Офіційний сайт Lego Mindstorms Education EV3 - URL: <https://makecode.mindstorms.com/>

<i>Мартинюк О., Житарюк І.</i> Факультет математики та інформатики: історія та сьогодення	3
<i>Adegoke K., Frontczak R., Goy T.</i> On binomial sum relations involving Fibonacci and Lucas numbers	7
<i>Assanova A., Imanchiyev A.</i> A nonlocal problem for hyperbolic equations with impulse discrete memory	11
<i>Banakh T.</i> Automatic continuity of measurable homomorphisms on Čech-complete topological groups	13
<i>Bandura A., Baksa V.</i> On concept of bounded index for Fueter regular functions of quaternionic variable	15
<i>Bandura A., Salo T.</i> \mathbf{L} -Index in Joint Variables: Composition of an Entire Function with a Function Having a Vanished Gradient	17
<i>Bezushchak O.</i> Derivations of finitary Mackey algebras	19
<i>Bilanyk I., Bodnar D., Voznyak O.</i> On Parabolic Convergence Regions for Branched Continued Fractions of the Special Form	20
<i>Bilichenko R., Doroshenko D.</i> On one modern method for teaching differential equations	21
<i>Bondar I.</i> Control conditions for not always solvable impulse systems of integro-differential equations	23
<i>Chabanyuk Ya., Khimka U., Nikitin A.</i> Control Problem For The Diffusion Transfer Process With Semi-Markov Switchings	25
<i>Chepurukhina I., Murach A.</i> On applications of Nikolskii spaces of low regularity to elliptic boundary problems	27
<i>Cherevko I., Tuzyk I.</i> Schemes of approximation of linear systems with delay and analysis of their stability	29
<i>Chikrii A.</i> Principle of measurable choice in game problems of motion control	31
<i>Cozma D.</i> Integrability conditions for a cubic system with two invariant straight lines and exponential factors	33
<i>Dolishniak D.</i> Dynamic of a nonlinear backward shift on a semiring of multisets	35
<i>Dorosh A., Haiuk I., Pertsov A.</i> Approximation of Boundary Value Problem Solutions for Integro-Differential Equations of the Neutral Type Using a Spline Function Method	37
<i>Drin Ya., Drin I., Drin S.</i> A two-pointed problem by t for diffusion equation	39
<i>Dron V., Medynskiy I.</i> On fundamental solution of the Cauchy problem for a class of ultraparabolic Kolmogorov-type equations with block structure	42
<i>Dudko A., Grigorchuk R.</i> On invariant random subgroups and characters of branch groups	44
<i>Dzhaliuk N.</i> Linear solutions to the bilateral matrix polynomial equations	47

<i>Eidelman Yu.</i> Numerical solution of biharmonic equations via rank structured matrices	49
<i>Filipkowska M.</i> Combined numerical methods for the solution of nonautonomous degenerate differential equations with the use of spectral projectors	50
<i>Gefter S., Piven' A.</i> Linear differential operators of infinite order in the module of copolynomials	52
<i>Gorbachuk V.</i> On solutions of the $(n + 1)$ -times integrated Cauchy problem	56
<i>Grigorchuk R., Savchuk D.</i> On Groups of Isometries and Dilations of Local Fields and Their Actions on Regular Trees	58
<i>Huzyk N.</i> Coefficient inverse problem for parabolic equation with strong power degeneration	61
<i>Ivasiuk R., Maslyuchenko O.</i> Characterization of compact subspaces of the space of separately continuous functions with the cross-uniform topology	62
<i>Karvatskyi D.</i> Fractal analysis of the Guthrie-Nymann's set	64
<i>Klevchuk I., Hrytchuk M.</i> Existence and stability of cycles in parabolic systems with small diffusion	66
<i>Klimchuk T., Lavrenyuk M., Shovkoplias T.</i> A linear Noetherian boundary value problem for a system of dynamic equations on a time scale	68
<i>Konarovskyi V.</i> Stochastic Modified Flows, Mean-Field Limits and Dynamics of Stochastic Gradient Descent	71
<i>Koshmanenko V., Karataieva T.</i> About compromise states in the battle of opponents with various external support	73
<i>Kozlovskiyi M.</i> Separately continuous functions for the space with the regular subset	77
<i>Kravtsiv V.</i> Block-supersymmetric polynomials	79
<i>Kuduk G.</i> Problem with integral conditions for nonhomogeneous system of partial differential equations third order	81
<i>Kuryliak A., Sheremeta M.</i> On Banach spaces of Laplace-Stieltjes integrals	83
<i>Kuryliak A., Skaskiv O.</i> Entire Gaussian functions: probability of zeros absence	84
<i>Kuryliak M., Skaskiv O.</i> The domain of existence of the maximum term of Dirichlet series with complex exponents	85
<i>Kushnirenko S.</i> On conditions of ergodicity of the solutions to Itô's stochastic differential equations	87
<i>Leshchenko D., Kozachenko T.</i> Perturbed motions of a dynamically symmetric rigid body with cavity filled with a viscous fluid subject to constant body-fixed torques	89
<i>Lianha A., Maslyuchenko O.</i> Scattered spaces and pairs of Hahn related with separately continuous functions	91
<i>Maksymenko S.</i> Homotopy types of diffeomorphism groups of Morse-Bott foliations ...	93
<i>Martyniuk O., Stanzhytskyi O.</i> Thin Film Equations with Nonlinear Deterministic and Stochastic Perturbations	94

<i>Melnyk H.</i> Streamlining Practical Labs: Using Decorators to Automate Code Testing in Google Colab	96
<i>Melnyk V.</i> Using github classroom for student education	98
<i>Mogylova V., Koval'chuk T., Kravets V.</i> Asymptotic Behavior of Stochastic Functional Differential Evolution Equations	99
<i>Misiats O.</i> Patterns in Shape Memory Alloys: Variational Perspective	101
<i>Mykhaylyuk V.</i> Dependence on \aleph coordinates of separately continuous functions of many variables	102
<i>Nazarenko O., Stekhun A.</i> Stationary Wave Diffraction Problems on Spherical Defects	104
<i>Onyia D., Maslyuchenko O.</i> Construction of continuous functions with the given cluster set in a point with finite local rank	106
<i>Petryk M., Boyko I., Petryk O.</i> Mathematical modeling and parameters identification of nonlinear competitive adsorption in nanoporous particles media	108
<i>Petryna G.</i> Investigations into the Asymptotic Equivalence between Stochastic Functional Differential Equations and Ordinary Differential Equations	110
<i>Pokutnyi O., Panasenko Ye.</i> Conditions of the input-to-state stability for the impulse boundary-value problem	112
<i>Rovenska O.</i> Approximation of classes of Poisson integrals by Fejer means	113
<i>Rybalko V.</i> Bifurcation and stability of traveling waves in free boundary models of active gels	115
<i>Samoilenko I., Samoilenko T.</i> Analytic method for solution Schrödinger-type equation	119
<i>Satur O.</i> Dynamics of conflict interaction in terms of minimal players	123
<i>Slyvka-Tylyshchak G., Kuchinka K.</i> Simulation a solution of a parabolic equation with random factors	125
<i>Taistra Yu., Pelykh V.</i> Decoupling method for the maxwell equations in the case of null field	127
<i>Trokhimchuck P.</i> Problem of convergence mathematics and information theory and methods of their modeling	128
<i>Yeromina T., Povarova (Sivak) O.</i> Continuous solutions of the systems of nonlinear difference-functional equations in the hyperbolic case	130
<i>Yuzefovych R., Lychak O., Javorskyj I., Varyvoda M.</i> Model of the diagnostic signals in the form of bi-periodically non-stationary random process	131
<i>Zhumatov S.</i> Absolute stability of control systems with rigid feedback taking into account external load	133
<i>Андрух Ю., Шакун Ж., Взнікова Л.</i> Організація роботи з учнями на уроках математики з метою подолання освітніх прогалин	136
<i>Барановський О.</i> Використання \LaTeX для підготовки дисертацій в Україні	138

<i>Бардан А.</i> Програмний комплекс моделювання диференціальної гри переслідування	140
<i>Бєбія М.</i> Синтез обмежених керувань для нелінійних систем зі степеневою головною частиною	143
<i>Безущак Д., Капустян Д., Сукретна А., Федоренко Ю.</i> ω -граничні множини імпульсної динамічної системи для гіперболічної еволюційної задачі	145
<i>Бирка М., Чепишко О.</i> Основні акценти викладання математики та інформатики в 5-9 класах Нової української школи	149
<i>Бігун Я., Скутар І.</i> Усереднення в багаточастотних системах із малими параметрами і лінійно перетвореними аргументами	151
<i>Білозерова М.</i> Асимптотичні зображення розв'язків диференціальних рівнянь з нелінійностями, що є композиціями правильно та швидко змінних функцій	153
<i>Білокурський Р., Черевко І., Шкільнюк Д.</i> Про співпрацю IT Cluster "Chernivtsi IT Community" та IT освіти в регіоні	155
<i>Бобилев Д.</i> Метод парних рівнянь для дослідження напружено-деформованого стану циліндра з тріщиною	157
<i>Бойчук О., Ферук В.</i> Слабкозбурена лінійна крайова задача для системи диференціальних рівнянь дробового порядку	159
<i>Бомба А., Барановський С.</i> Модифікація моделі інфекційного захворювання для урахування дифузійних збурень в умовах адсорбційної терапії	161
<i>Бугрій О., Бугрій Н., Доманська О.</i> Параболічне рівняння з випадковим збуренням та змінним показником нелінійності	164
<i>Буйновський В., Пасічник Г.</i> Синхронізація каналів на основі методу графічної оцінки та аналізу програм	165
<i>Буртняк І., Малицька Г.</i> Один клас вироджених параболічних систем	166
<i>Венгрин Ю., Боднарук С.</i> Методичні особливості використання інтерактивних методів при проведенні уроків та оцінюванні знань учнів з математики в старшій школі ЗЗСО	167
<i>Вербіцький В., Максимов А., Черноморець В.</i> Паралельна реалізація скінченно-елементної апроксимації крайової задачі для FADE	169
<i>Гаврильчик Л.</i> Оцінка ефективності SIRV моделі для дослідження епідемії в контексті пандемії COVID-19 у Рівненській області	170
<i>Гентош О., Прикарпатський А.</i> Бігамільтонова структура раціонально-факторизованих потоків Лакса, пов'язаних з алгеброю Лі дробових інтегро-диференціальних операторів	172
<i>Городецький В., Мартинюк С.</i> Перетворення Абеля–Пуассона формальних рядів Ерміта та його властивості	174
<i>Горошкевич С., Карлова О.</i> Зліченні криві Пеано	175
<i>Готинчан Т.</i> Застосування воркшопів та методу проектів при вивченні інформаційних технологій	176
<i>Грод І., Грод І.</i> Дослідження динаміки чисельності окремої популяції в рамках моделі Ферхюльста	178

<i>Грудей Я., Лучко В.</i> Проектна діяльність на уроках математики у 6 класі	180
<i>Грушка Я.</i> Необхідна і достатня ознака існування внутрішнього часу на орієнтованій множині	182
<i>Довгей Ж.</i> Активізація пізнавальної діяльності учнів при вивченні математики за допомогою мобільних додатків	185
<i>Дорошенко І.</i> Усереднення для стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з врахуванням зовнішніх збурень типу випадкових величин	187
<i>Дяченко О.</i> Про класичність узагальнених розв'язків неоднорідних крайових задач для параболічних систем другого порядку	189
<i>Євтухов В., Голубев С.</i> Асимптотична поведінка розв'язків одного класу нелінійних диференціальних рівнянь четвертого порядку	191
<i>Єгошкін Д., Гук Н.</i> Аналіз коректності нечіткої бази правил в системах логічного виведення	193
<i>Житарюк І., Колісник Р., Шевчук Н.</i> Сторітелінг — ефективний метод комунікації на уроках математики в основній і старшій школі	195
<i>Журавльов В.</i> Критерій керованості крайових задач для операторних рівнянь у банахових просторах	198
<i>Зозуля Є.</i> Поточкові оцінки розв'язків вагового параболічного рівняння р-Лапласа з використанням потенціалів Вольфа	202
<i>Івасюк Г., Процак Н., Фратавчан Т.</i> Про властивості операторів Гріна і спряжених з ними операторів, породжених задачею Коші для параболічних за Ейделманом систем довільного порядку	206
<i>Іліка С., Матвій О., Піддубна Л.</i> Схеми апроксимації диференціально-різницьових рівнянь та їх застосування	208
<i>Ільків В.</i> Про умову Лопатинського	210
<i>Ільків В., Симотюк М., Слоньовський Я.</i> Задача Ніколетті для безтипного рівняння із частинними похідними	212
<i>Ільків В., Страп Н., Волянська І.</i> Умови коректної розв'язності неоднорідної крайової задачі з нелокальними умовами для диференціального рівняння з оператором узагальненого диференціювання	213
<i>Капустян О., Юсипів Т.</i> Стійкість від входу до стану для атракторів еволюційних систем без єдиності	215
<i>Карпетров В.</i> Асимптотичні властивості розв'язків одного виду диференціальних рівнянь n -го порядку	217
<i>Колісник Р., Усатюк І.</i> Онлайн-сервіси для створення інтерактивних вправ, тестувань та опитувань	219
<i>Коробов В., Ресіна Т.</i> Керування рухом матеріальної точки з урахуванням невідомого тертя	221
<i>Косован В.</i> Про впровадження проекту “Оновлена інформатика – ІТ-студії” у загальноосвітніх закладах України	223
<i>Косович І., Щур Т., Щур О.</i> Моделювання SIR моделей для прогнозування поширення COVID-19	225

<i>Кривошія Р.</i> Про один критерій рівномірного розподілу послідовностей заданий в термінах Q_s -представлення дійсних чисел	227
<i>Кузь А.</i> Задача з інтегральними умовами для одного узагальненого рівняння Трікомі в смугі	229
<i>Кулик В., Кулик Г., Степаненко Н.</i> Регулярність лінійних розширень динамічних систем на торі з виродженою матрицею	230
<i>Кусік Л.</i> Про необхідні умови існування та асимптотику одного класу розв'язків деякого диференціального рівняння другого порядку	232
<i>Кушнірчук В., Кушнірчук В.</i> Онлайн калькулятор розрахунку необхідної товщини теплової ізоляції для будівельних конструкцій та трубопроводів	234
<i>Кушнірчук В.</i> Розробка навчальної онлайн платформи для Чернівецького регіонального центру підвищення кваліфікації	235
<i>Лахва Р., Халецька З.</i> Задача оптимального керування для систем інтегро-диференціальних рівнянь	237
<i>Латиш А., Кічмаренко О.</i> Оптимальне керування еволюційними функціонально-диференціальними рівняннями на півосі	239
<i>Ленюк О., Нікітіна О., Шинкарик М.</i> Розв'язування задач математичної фізики методом гібридного інтегрального перетворення Ейлера-Фур'є-Ейлера на сегменті	241
<i>Літовченко В., Харина Д.</i> Об'ємний потенціал задачі Коші для параболічних рівнянь з від'ємним родом і змінними коефіцієнтами	243
<i>Лопушанська Г., М'яус О., Пасічник О.</i> Обернена задача про визначення багатьох невідомих із розподілів типу Шварца	245
<i>Лось В.</i> Про загальні мішані задачі для параболічних за Петровським систем в узагальнених просторах Соболева	247
<i>Лучко В., Божягора І., Коновалюк М.</i> Методичні рекомендації по використанню платформ при змішаному та дистанційному навчанні	249
<i>Лучко В., Лучко В.</i> Інтегровані завдання з математики та інформатики – ефективний засіб навчання математики у старшій школі	251
<i>Макарчук О., Халецький Б.</i> Асимптотична поведінка перетворення Фур'є-Стільтьєса одного розподілу типу Джессена-Вінгнера	253
<i>Мамса К., Перестюк М.</i> Стійкість інваріантного тора одного класу імпульсних систем	255
<i>Мартинюк С., Цуркан В.</i> Використання Т-критерію Віллоксона для оцінки якісних змін виконання командних дій на основі математичної моделі ...	257
<i>Марченко О., Самойленко Т.</i> Дослідження нестационарної задачі фільтрації та теплопереносу в осесиметричній постановці в неоднорідних за структурою середовищах	258
<i>Марчук К.</i> Рюкзачна криптосистема та її модифікації	262
<i>Маценко В.</i> Аналіз дискретних моделей динаміки популяцій зі збором урожаю ...	263
<i>Мединський І., Пасічник Г.</i> Про властивості розв'язків одного рівняння типу Колмогорова, коефіцієнти якого в групі молодших членів є зростаючими функціями	265

<i>Мельничук Л.</i> Технології та прийоми навчання програмування у середовищі Скретч майбутніх вчителів інформатики	267
<i>Мельничук Л., Тоненький І.</i> Впровадження інтегративного підходу до навчання фінансової грамотності на уроках інформатики в основній школі	269
<i>Миرونюк В., Миронюк О.</i> Елементи оригаметрії на факультативних заняттях з математики у ЗЗСО	271
<i>Михайлець В., Атласюк О., Маслюк Г.</i> Про фредгольмові числа неоднорідних крайових задач в дробових просторах Слободецького	273
<i>Міхалевський В.</i> Деякі інструменти візуалізації і аналізу складних мереж та графів	275
<i>Несмелова О.</i> Матричні крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь з r -Лапласіаном	277
<i>Пастула М.</i> Усереднення в багаточастотних системах першого наближення із запізненням та залежністю частот від повільних змінних	279
<i>Перегуда О., Асроров Ф.</i> Дослідження поведінки розв'язків системи двохспряжених стохастичних осциляторів	281
<i>Перестюк М., Петришин Р.</i> Слово про вчителя (світлій пам'яті А.М. Самойленка)	283
<i>Перун Г., Ясинський В.</i> Існування розв'язку задачі Коші для стохастичного рівняння з частинними похідними та вінеровими збуреннями	285
<i>Правіцка Н.</i> Методичні аспекти розв'язування задач на геометричні перетворення для майбутніх учителів математики	287
<i>Працьовитий М., Бондаренко О., Гончаренко Я., Лисенко І.</i> Застосування у метричній теорії чисел, фрактальному аналізі та теорії розподілів випадкових величин B -зображення чисел	289
<i>Пукальський І., Яшан Б.</i> Задача з імпульсним впливом для параболічного рівняння з виродженням	291
<i>Ратушняк С., Працьовитий М.</i> Неперервна ніде не монотонна функція, означена в термінах ланцюгового зображення чисел	293
<i>Савранська А.</i> Побудова областей стійкості для керованих систем з невизначеностями	294
<i>Салімов Р., Стефанчук М.</i> Про скінченну ліпшицевість розв'язків нелінійного рівняння Бельтрамі	298
<i>Самусенко П.</i> Побудова асимптотичних розв'язків крайових задач для сингулярно збурених диференціально-алгебраїчних систем	300
<i>Семенов В., Харьков О.</i> Лінійна швидкість збіжності алгоритмів екстраполяції з минулого та операторної екстраполяції для варіаційних нерівностей	301
<i>Сердюк А., Соколенко І.</i> Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами на класах диференційовних у сенсі Вейля–Надя функцій з високим показником гладкості	303
<i>Симотюк М.</i> Операторне рівняння з дводіагональними операторами у просторах послідовностей комплексних чисел	305

<i>Сікора В., Зозуляк І.</i> Методика навчання розв'язування систем ірраціональних рівнянь на факультативних заняттях в ЗЗСО	306
<i>Скакун Д.</i> Про одну сингулярну функцію з складною локальною будовою	308
<i>Скоролітня А.</i> STEM-освіта: професійний розвиток педагога	309
<i>Скоролітня А., Тимчук Л.</i> Інноваційна компетентність як професійно важлива риса сучасного вчителя математики	311
<i>Слюсарчук В.</i> Дослідження збіжності операторних рядів	313
<i>Собчук В., Зеленська І.</i> Особливості структури розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь для побудови рівномірної асимптотики	315
<i>Солдатов В.</i> Про оцінки похибки апроксимації розв'язків одновимірних крайових задач широкого класу	317
<i>Сопронюк Т., Дробот А.</i> творення GUI для власної .NET-мови програмування Vlang	320
<i>Спічак С., Стогній В., Копась І.</i> Симетрії Лі та фундаментальні розв'язки лінійних рівнянь ціноутворення азійських опціонів	324
<i>Тепліньський Ю.</i> Про інваріантні тори та коливні розв'язки диференціально-різницьових рівнянь в просторі обмежених числових послідовностей	326
<i>Токовий Ю.</i> Побудова явних розв'язків двовимірних задач теплопровідності для багатопарових кільцевих областей	328
<i>Унгурян Г.</i> Використання штучного інтелекту у вивченні інформаційних технологій студентами	329
<i>Фекета П., Перестюк Ю., Король І., Капустян О.</i> Глобальний атрактор напівпотoku м'яких розв'язків для напівлінійного параболічного рівняння без єдиності	330
<i>Філіпчук М., Філіпчук О.</i> Про задачу з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із багатьма перетвореними аргументами ..	332
<i>Франчук Н., Франчук Р.</i> Аналіз методики вивчення теми “Комп'ютерна графіка. Векторний графічний редактор” на уроках інформатики	334
<i>Франчук В.</i> Організація відкритого веборієнтованого освітнього середовища підготовки майбутніх вчителів інформатики та фахівців з інформаційних технологій	336
<i>Цань В., Перестюк Ю.</i> Умови існування обмеженого розв'язку динамічного рівняння на часових шкалах	337
<i>Чепок О.</i> Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, \pm\infty)$ -розв'язків диференціального рівняння другого порядку зі швидко змінною нелінійністю від похідної невідомої функції	339
<i>Чуйко С, Кузьміна В.</i> Положення рівноваги нелінійних періодичних інтегрально-диференціальних крайових задач, не розв'язаних відносно похідної	342
<i>Чуйко С., Попов М.</i> Метод декомпозиції Адомяна у теорії нелінійних крайових задач із запізненням	344
<i>Чуйко С., Шевцова К.</i> Метод Ньютона – Канторовича у теорії нелінійних матричних рівнянь	346

<i>Шарай Н., Шинкаренко В.</i> Асимптотика одного класу розв'язків неавтономного диференціального рівняння третього порядку	347
<i>Шепетюк Б., Нестерук І.</i> Задачі моделювання форм стійких тонких осесиметричних порожнин у вагомій рідині	349
<i>Шкільнюк Д.</i> Застосування сервісів штучного інтелекту Adobe Sensei для задач електронної комерції	351
<i>Юзв'як М., Токовий Ю.</i> Відокремлення змінних в ключових інтегро-диференціальних рівняннях задач теорії пружності та термопружності для областей з кутовими точками	352
<i>Юрійчук А.</i> Вебдоступність та її роль в освіті	354
<i>Юрченко І., Ясинський В.</i> Властивості розв'язків стохастичних рівнянь у частинних похідних з марковськими параметрами	356
<i>Яшан Б.</i> Платформи для вивчення робототехніки в сучасній школі	358

Наукове видання

Міжнародна наукова конференція
МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ,
присвячена 55-річчю факультету математики та інформатики

Матеріали конференції
Чернівці, 28–30 вересня 2023 року

Відповідальна за видання

Мартинюк Ольга Василівна

Комп'ютерна верстка та редагування

Пасічник Галини Савеліївни

Підписано до друку 19.09.2023.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
58000, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2