Мироник В.І., Михайлюк В.В.

РІЗНІ ТИПИ КВАЗІМЕТРИЧНИХ І ЧАСТКОВО МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

Одержано топологічні характеризації різних типів квазіметричних просторів, які були уведені в [5]. У класі метризовних частково метричних просторів побудовано приклади, які описують зв'язки між всіма типами цих просторів.

Ключові слова і фрази: частково метричні простори, квазіметричні простори.

[1] Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Україна;
[2] Університет Яна Кохановського в Кельцах, Польща
e-mail: *vadmyron@gmail.com (Vadym Myronyk); v.mykhaylyuk@chnu.edu.ua (Volodymyr Mykhaylyuk)*

1 Вступ

Поняття часткової метрики і частково метричного простору увів С.Метьюс у 1992 році. Це поняття виникло як певне послаблення поняття метричного простору і застосовувалось в дослідженнях семантики мов програмування (дивись [4], [9]), де виникають негаусдорфові топологічні моделі [10].

Функція $p : X^2 \to [0, +\infty)$ називається *частковою метрикою* на множині X (дивись [2], [3]), якщо

(p_1) $x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$;

(p_2) $p(x, x) \leq p(x, y)$;

(p_3) $p(x, y) = p(y, x)$;

(p_4) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y)$

для довільних $x, y, z \in X$.

Ясно, що часткова метрика p є метрикою на X тоді і тільки тоді, коли $p(x, x) = 0$ на X. Крім того, для часткової метрики p функція $q_p : X^2 \to [0, +\infty)$,

$$q_p(x, y) = p(x, y) - p(x, x),$$

є квазіметрикою на X, тобто

УДК 517.51
2010 *Mathematics Subject Classification:* 54D10, 54E35.

(q_1) $q_p(x,x) = 0$;

(q_2) $q_p(x,z) \le q_p(x,y) + q_p(y,z)$;

(q_3) $x = y \Leftrightarrow q_p(x,y) = q_p(y,x) = 0$

для довільних $x, y, z \in X$. Крім того, функція $d_p : X^2 \to [0, +\infty)$,

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y),$$

є метрикою на X.

Топологія частково метричного простору (X,p) – це топологія квазіметричного простору (X, q_p) (дивись [3, теорема 4.1]), у якій базу околів довільної точки $x \in X$ утворюють кулі $B(x,\varepsilon) = \{y \in X : q_p(x,y) < \varepsilon\}$. У зв'язку з уведенням частково метричних просторів природно постало питання про вивчення топологічних і тополого-метричних властивостей цих просторів, яке, зокрема, досліджувалось у роботах [7], [5], [8], [6].

Наступні поняття для частково метричних просторів були уведені в [5], але ми тут розглянемо їх у загальнішій ситуації квазіметричних просторів.

Означення 1. *Квазіметричний простір (X,q) називається*

- *секвенціально рівнобедреним, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} q(y,x_n) = q(y,x)$ для довільних $y \in X$ і збіжної до точки $x \in X$ послідовності точок $x_n \in X$;*

- *секвенціально рівностороннім, якщо послідовність точок $y_n \in X$ збігається до точки $x \in X$, як тільки існує така збіжна до x послідовність точок $x_n \in X$, що $\lim\limits_{n\to\infty} q(y_n, x_n) = 0$;*

- *секвенціально симетричним, якщо послідовність точок $x_n \in X$ збігається до точки $x \in X$, як тільки $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, x) = 0$;*

- *метрикоподібним, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, x) = 0$ для довільної збіжної до точки $x \in X$ послідовності точок $x_n \in X$.*

Як зауважили автори в [5], поклавши $x_n = x$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ в означенні секвенціально рівностороннього простору (X,q), ми одержимо, що послідовність точок $y_n \in X$ збігається до точки $x \in X$, як тільки $\lim\limits_{n\to\infty} q(y_n, x) = 0$, тобто має місце наступна імплікація.

Твердження 1. *Кожний секвенціально рівносторонній квазіметричний простір є секвенціально симетричним.*

Разом з тим, автори в [5, Question 8.5] сформулювали таке питання.

Питання 1. *Якими є подальші зв'язки між поняттями з означення 1 для частково метричних просторів?*

У роботі [6] фактично одержано наступний результат, хоча він і сформульований для частково метричних просторів, але його доведення залишається вірним і для квазіметричних просторів.

Теорема 1. *Нехай (X, q) – квазіметричний простір. Тоді*

(1) якщо X метрикоподібний, то X секвенціально рівнобедрений;

(2) якщо X метрикоподібний і секвенціально симетричний, то X секвенціально рівносторонній.

У даній роботі ми подамо топологічну характеризацію уведених в означенні 1 різних типів квазіметричних просторів і наведемо приклади, які вказують на відсутність інших, відмінних від поданих у твердженні 1 і теоремі 1, імплікацій між цими типами просторів у класі метризовних частково метричних просторів.

2 Допоміжні поняття і твердження

Нехай (X, q) – квазіметричний простір. Легко бачити, що функція $q^{-1} : X^2 \to \mathbb{R}$, $q^{-1}(x, y) = q(y, x)$, також є квазіметрикою на X, яка називається *спряженою* до квазіметрики q. Крім того, сума $d_q = q + q^{-1}$ є метрикою на X, яку ми називатимемо *метрикою, породженою квазіметрикою* q. Разом з метрикою d_q розглядають також метрику $\varrho_q(x, y) = \max\{q(x, y), q(y, x)\}$ на X, яка еквівалентна до метрики d_q, адже $\varrho_q \leq d_p \leq 2\varrho_q$.

Для квазіметричного простору (X, q) через τ_q ми позначатимемо топологію на X, яка породжена квазіметрикою q. При цьому базу околів точки $x \in X$ утворюють *відкриті кулі* $B_q(x, \varepsilon) = \{y \in X : q_p(x, y) < \varepsilon\}$ або *замкнені кулі* $\mathrm{B}[x, \varepsilon] = \{y \in X : q_p(x, y) \leq \varepsilon\}$. Топологію, породжену спряженою квазіметрикою, ми позначаємо символом $\tau_{q^{-1}}$, а топологію, породжену метрикою d_q (чи ϱ_q) – символом τ_{d_q}.

Ми будемо використовувати наступні добре відомі властивості квазіметричних просторів.

Твердження 2 (Proposition 1.5, [1]). *Нехай (X, q) – квазіметричний простір. Тоді*

(1) *довільна відкрита куля $B_q(x, r)$ є τ_q-відкритою множиною;*

(2) *довільна замкнена куля $B_q[x, r]$ є $\tau_{q^{-1}}$-замкненою множиною, але не обов'язково є τ_q-замкненою множиною;*

(3) *топологія τ_{d_q} є сильнішою, ніж топології τ_q і $\tau_{q^{-1}}$;*

(4) *послідовність точок $x_n \in X$ збігається до деякої точки $x \in X$ в топології τ_{d_q} тоді і тільки тоді, коли послідовність точок x_n збігається до точки $x \in X$ в топологіях τ_q і $\tau_{q^{-1}}$;*

(5) *для кожного $x \in X$ функція $f : X \to \mathbb{R}$, $f(y) = q(x, y)$, є τ_q-напівнеперервною зверху і $\tau_{q^{-1}}$-напівнеперервною знизу;*

(6) *для кожного $y \in X$ функція $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x) = q(x, y)$, є τ_q-напівнеперервною знизу і $\tau_{q^{-1}}$-напівнеперервною зверху.*

З вищесформульованих властивостей (3) – (6) випливає, що квазіметика q є нарізно неперервною відносно метричної топології τ_{d_q}. Наступне твердження уточнює цю властивість.

Твердження 3. *Нехай (X, q) – квазіметричний простір. Тоді функція $f : X^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = q(x, y)$, є неперервною відносно топології добутку двох метричних просторів (X, d_q).*

Доведення. Для довільних $x, y, u, v \in X$ маємо

$$f(x,y) - f(u,v) = q(x,y) - q(u,v) \le q(x,u) + q(u,v) + q(v,y) - q(u,v) \le d_q(x,u) + d_q(y,v),$$

і, аналогічно,

$$f(u,v) - f(x,y) \le d_q(u,x) + d_q(v,y) = d_q(x,u) + d_q(y,v).$$

Отже, $|f(u,v) - f(x,y)| \le d_q(x,u) + d_q(y,v)$ для довільних $x, y, u, v \in X$ і функція f неперервна відносно топології добутку двох метричних просторів (X, d_q). □

Нагадаємо, що топологія частково метричного простору (X, p) – це топологія квазіметричного простору (X, q_p), і, крім того, $d_p = d_{q_p}$. Топологічні властивості часткової метрики дає наступне твердження.

Твердження 4 (Lemma 3 [1], Твердження 2.3 [7])**.** *Нехай (X, p) – частково метричний простір. Тоді функція $f : X^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = p(x, y)$, є сукупно напівнеперервною зверху і нарізно неперервною в кожній точці діагоналі $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$.*

Наступне твердження показує, що часткова метрика також є неперервною відносно відповідної метрики.

Твердження 5. *Нехай (X, p) – частково метричний простір. Тоді функція $f : X^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = p(x, y)$, є сукупно неперервною відносно метрики d_p.*

Доведення. Оскільки $f(x, y) = p(x, y) = q_p(x, y) + p(x, x)$, то згідно з твердженням 4 достатньо перевірити неперервність відносно метрики d_p функції $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x) = p(x, x)$.

Для довільних $x, y \in X$ маємо

$$g(y) - g(x) = p(y,y) - p(x,x) \le p(x,y) - p(x,x) = q_p(x,y) \le d_p(x,y).$$

Аналогічно, $g(x) - g(y) \le d_p(x, y)$, і тому функція g неперервна відносно метрики d_p. □

Для топологічного простору X з топологією τ і множини $A \subseteq X$ символом $\overline{A}^{\tau}$ ми позначаємо замикання множини A в топології τ.

Нехай (X, q) частково метричний простір. Для кожної непорожньої множини $A \subseteq X$ розглянемо функції $q_A : X \to \mathbb{R}$ і $q^A : X \to \mathbb{R}$, які визначаються формулами

$$q_A(x) = \inf\{q(a, x) : a \in A\} \quad \text{і} \quad q^A(x) = \inf\{q(x, a) : a \in A\}.$$

Наступні властивості функції q_A значною мірою були одержані у [1, твердження 1.5], а для частково метричних просторів у [6, лема 2.3].

Твердження 6. *Нехай (X, q) – квазіметричний простір, і $A \subseteq X$ – непорожня множина. Тоді*

(1) $q_A = q_B$ *на* X, *де* $B = \overline{A}^{\tau_{q^{-1}}}$;

(2) $q_A(x) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $x \in \overline{A}^{\tau_{q^{-1}}}$;

(3) $q_A(x) - q_A(y) \le q(y, x)$ *для довільних* $x, y \in X$;

(4) *функція* q_A *є напівнеперервною зверху відносно топології* τ_q;

(5) *функція* q_A *є напівнеперервною знизу відносно топології* $\tau_{q^{-1}}$;

(6) *функція* q_A *є неперервною відносно топології* τ_{d_q}.

Доведення. (1). Оскільки $A \subseteq B$, то $q_B \le q_A$. Тепер нехай $b \in B$, $x \in X$ і $\varepsilon > 0$. Існує така точка $a \in A$, що $q(a, b) < \varepsilon$. Тоді

$$q(b, x) \ge q(a, x) - q(a, b) \ge q_A(x) - \varepsilon,$$

і отже, $q(b, x) \ge q_A(x)$ для кожного $b \in B$, і тому $q_B \ge q_A$.

(2). Зрозуміло, що $q_A(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли існує така послідовність точок $a_n \in A$, що $\lim\limits_{n\to\infty} q(a_n, x) = 0$, а це означає, що $x \in \overline{A}^{\tau_{q^{-1}}}$.

(3). Для довільних $x, y \in X$ маємо

$$q_A(x) = \inf\{q(a, x) : a \in A\} \le \inf\{q(a, y) + q(y, x) : a \in A\} =$$

$$= \inf\{q(a, y) : a \in A\} + q(y, x) = q_A(y) + q(y, x).$$

(4), (5). З умови (2) негайно випливає, що функція q_A є τ_q-напівнеперервна зверху в кожній точці $y \in X$ і $\tau_{q^{-1}}$-напівнеперервна ззнизу в кожній точці $x \in X$.

(6). Для довільних $x, y \in X$, використовуючи умову (2), одержимо

$$|q_A(x) - q_A(y)| = \max\{q_A(x) - q_A(y), q_A(y) - q_A(x)\} \le \max\{q(y, x), q(x, y)\} \le d_q(x, y).$$

$\square$

Зауважимо, що $q^A = q_A^{-1}$, звідки негайно випливають подібні властивості функції q^A.

Твердження 7. *Нехай (X, q) – квазіметричний простір, і $A \subseteq X$ – непорожня множина. Тоді*

(1) $q^A = q^B$ *на* X, *де* $B = \overline{A}^{\tau_q}$;

(2) $q^A(x) = 0$ *тоді і тільки тоді, коли* $x \in \overline{A}^{\tau_q}$;

(3) $q^A(x) - q^A(y) \le q(x,y)$ *для довільних* $x, y \in X$;

(4) *функція* q^A *є напівнеперервною знизу відносно топології* τ_q;

(5) *функція* q^A *є напівнеперервною зверху відносно топології* $\tau_{q^{-1}}$;

(6) *функція* q^A *є неперервною відносно топології* τ_{d_q}.

3 Топологічна характеризація квазіметричних просторів різних типів

Розпочнемо з характеризації секвенціально рівнобедрених квазіметричних просторів.

Теорема 2. *Нехай* (X, q) *– квазіметричний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) простір (X, q) *секвенціально рівнобедрений;*

(ii) квазіметрика q *є* τ_q*-неперервною відносно другої змінної;*

(iii) для довільних $x \in X$ *і* $r > 0$ *замкнена куля* $B[x, r] = \{y \in X : q(x, y) \le r\}$ *є замкненою множиною.*

Якщо квазіметрика q *породжена деякою частковою метрикою* p *на* X, *тобто* $q = q_p$, *то умови* $(i) - (iii)$ *рівносильні також такій умові*

(iv) часткова метрика p *є нарізно* τ_q*-неперервною.*

Доведення. Імплікація $(i) \Leftrightarrow (ii)$ негайно випливає з означення секвенціально рівнобедреного квазіметричного простору і того, що довільний квазіметричний простір задовольняє першу аксіому зліченності.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Зафіксуємо точку $x \in X$ і розглянемо функцію $f : X \to \mathbb{R}$, $f(y) = q(x, y)$. Якщо функція f неперервна, то для кожного $r \ge 0$ множина $B[x, r] = f^{-1}([0, r])$ замкнена, як прообраз замкненої множини при неперервному відображенні.

Навпаки, якщо всі кулі $B[x, r]$ є замкненими множинами, то для довільного інтервалу $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ прообраз

$$f^{-1}((a, b)) = \{y \in X : a < q(x, y) < b\} = B_q(x, a) \setminus B_q[x, b]$$

є відкритою множиною, як різниця відкритої і замкненої множини. Тому функція f є неперервною.

$(ii) \Leftrightarrow (iv)$. Оскільки $p(x, y) = q_p(x, y) + p(x, x)$ для довільних $x, y \in X$, то неперервність відносно другої змінної функцій p і q_p рівносильні. Але функція p симетрична, тому неперервність функції p відносно другої змінної означає її нарізну неперервність. □

Нехай (X, q) – частково метричний простір. Для довільних непорожніх множин $A, B \subseteq X$ покладемо

$$q(A, B) = \inf\{q(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Зрозуміло, що

$$q(A, B) = \inf\{q_A(b) : b \in B\} = \inf\{q^B(a) : a \in A\},$$

і, крім того, $q(A, B) = q^{-1}(B, A)$.

Теорема 3. *Нехай (X, q) – квазіметричний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) простір (X, q) секвенціально рівносторонній;

(ii) $q(A, B) > 0$ для довільних непорожніх неперетинних у квазіметричному просторі (X, q) замкненої множини A і зліченно компактної множини B.

Доведення. $(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай $A \subseteq X$ – τ_q-замкнена множина і $B \subseteq X$ – τ_q-зліченно компактна множина такі, що $A \cap B = \varnothing$. Припустимо, що $q(A, B) = 0$, тобто існують послідовності точок $a_n \in A$ і $b_n \in B$ такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} q(a_n, b_n) = 0$. За зліченною компактністю множини B виберемо підпослідовність $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, яка збігається до деякої точки $b \in B$. З умови (i) випливає, що послідовність $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ також збігається до точки b. Тому $b \in A$, адже множина A замкнена. Отже, $b \in A \cap B$, що дає нам суперечність.

$(ii) \Leftrightarrow (i)$. Нехай послідовності точок $x_n \in X$ і $y_n \in X$ такі, що $\lim\limits_{n\to\infty} q(y_n, x_n) = 0$ і послідовність точок x_n збігається до точки $x \in X$. Покажемо, що послідовність точок y_n також збігається до точки x. Достатньо показати, для кожного $\varepsilon > 0$ множина

$$M_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : q(x, y_n) \geq \varepsilon\}$$

скінченна.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Знайдемо такий номер $n_1 \in \mathbb{N}$, що для кожного $n \geq n_1$ виконується нерівність $q(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Розглянемо замкнену множину $A = X \setminus B_q(x, \varepsilon)$ і зліченно компактну множину $B = \{x_n : n \geq n_1\} \cup \{x\}$. Зрозуміло, що $A \cap B = \varnothing$ і $q(A, B) = \delta > 0$ згідно з умовою (ii). Виберемо такий номер $n_2 \in \mathbb{N}$, що для кожного $n \geq n_2$ виконується нерівність $q(y_n, x_n) < \delta$. Тоді $n \notin M_\varepsilon$ для кожного $n \geq \max\{n_1, n_2\}$, і тому множина M_ε скінченна. □

Тепер перейдемо до характеризації метрикоподібних і секвенціально симетричних квазіметричних просторів.

Теорема 4. *Нехай (X, q) – квазіметричний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) простір (X, q) метрикоподібний;

(ii) топологія τ_q є сильнішою, ніж топологія $\tau_{q^{-1}}$;

(iii) топологія τ_q збігається з топологією τ_{d_q};

(iv) квазіметрика q є неперервною відносно топології добутку двох просторів (X, τ_q);

(v) *квазіметрика* q *є* τ_q*-неперервною відносно першої змінної;*

(vi) *квазіметрика* q *є* τ_q*-неперервною відносно першої змінної у всіх точках діагоналі* $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$*;*

(vii) *для довільної непорожньої множини* $A \subseteq X$ *функція* q_A *є* τ_q*-неперервною;*

(viii) *для довільної непорожньої множини* $A \subseteq X$ *функція* q^A *є* τ_q*-неперервною.*

Доведення. $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Згідно з означенням, квазіметричний простір (X,q) – метрикоподібний тоді і тільки тоді, коли довільна τ_q-збіжна до $x \in X$ послідовність точок $x_n \in X$ також є $\tau_{q^{-1}}$-збіжною до x. А це і означає, що топологія τ_q квазіметричного простору (X,q) є сильнішою, ніж топологія $\tau_{q^{-1}}$, адже обидві ці топології задовольняють першу аксіому зліченності.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$. Згідно з твердженням 2 (4), для довільної послідовності точок $x_n \in X$ її τ_{d_q}-збіжність до деякої точки $x \in X$ рівносильна τ_q-збіжності до x, що і означає рівність $\tau_{d_q} = \tau_q$.

$(iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (i)$. Імплікація $(iii) \Rightarrow (iv)$ випливає з твердження 5, а імплікації $(iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi)$ є очевидними. Залишилось довести імплікацію $(vi) \Rightarrow (i)$. Нехай послідовності точок $x_n \in X$ збігається до точки $x \in X$ відносно топології τ_q. Тоді за умовою (vi) маємо $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n,x) = q(x,x) = 0$. Отже, (X,q) є метрикоподібним, тобто виконується (i).

$(iii) \Rightarrow (vii) \Rightarrow (ii)$. Імплікація $(iii) \Rightarrow (vii)$ випливає з твердження 6 (6). Доведемо імплікацію $(vi) \Rightarrow (i)$. Нехай $A \subseteq X$ – довільна непорожня $\tau_{q^{-1}}$-замкнена множина. Тоді за твердженням 6 (2) і умовою (vii) множина $A = (q_A)^{-1}(0)$ є τ_q-замкненою. Отже, кожна $\tau_{q^{-1}}$-замкнена множина $A \subseteq X$ є τ_q-замкненою, що і означає умову (ii).

$(iii) \Rightarrow (viii) \Rightarrow (i)$. Імплікація $(iii) \Rightarrow (viii)$ випливає з твердження 7 (6). Доведемо імплікацію $(viii) \Rightarrow (i)$. Нехай послідовності точок $x_n \in X$ збігається до точки $x \in X$ відносно топології τ_q. Згідно з умовою $(viii)$ функція $q^{\{x\}}$ є τ_q-неперервною в точці x. Тому

$$\lim_{n\to\infty} q(x_n,x) = \lim_{n\to\infty} q^{\{x\}}(x_n) = q^{\{x\}}(x) = q(x,x) = 0.$$

Отже, (X,q) є метрикоподібним, тобто виконується (i). □

Зауважимо, що $(q^{-1})^{-1} = q$ і $d_q = d_{q^{-1}}$ для довільної квазіметрики q. Тому, секвенціальна симетричність квазіметричного простору (X,q) рівносильна мектрикоподібності квазіметричного простору (X,q^{-1}) і має місце наступне твердження.

Теорема 5. *Нехай* (X,q) *– квазіметричний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) *простір* (X,q) *секвенціально симетричний;*

(ii) *топологія* $\tau_{q^{-1}}$ *є сильнішою, ніж топологія* τ_q*;*

(iii) *топологія* $\tau_{q^{-1}}$ *збігається з топологією* τ_{d_q}*;*

(iv) *квазіметрика* q *є неперервною відносно топології добутку двох просторів* $(X,\tau_{q^{-1}})$*;*

(v) *квазіметрика q є $\tau_{q^{-1}}$-неперервною відносно другої змінної;*

(vi) *квазіметрика q є $\tau_{q^{-1}}$-неперервною відносно другої змінної у всіх точках діагоналі $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$;*

(vii) *для довільної непорожньої множини $A \subseteq X$ функція q_A є $\tau_{q^{-1}}$-неперервною;*

(viii) *для довільної непорожньої множини $A \subseteq X$ функція q^A є $\tau_{q^{-1}}$-неперервною.*

Наслідок 1. *Квазіметричний простір (X,q) метрикоподібний і секвенціально симетричний тоді і тільки тоді, коли на X топології просторів (X,q), (X,q^{-1}) і (X,d_q) збігаються.*

4 Приклади

Твердження 8. *Існує метризовний компактний частково метричний простір (X,p), який є секвенціально рівнобедреним і секвенціально рівностороннім (отже, і секвенціально симетричним), але не є метрикоподібним.*

Доведення. Нехай $X = \{x_n : n = 0, 1, \dots\}$, причому всі елементи x_n різні. Легко бачити, що функція $p : X^2 \to \mathbb{R}$,

$$p(x,y) = p(y,x) = \begin{cases} 1,\ x = y = x_0, \\ 0,\ x = y = x_n, n \in \mathbb{N}, \\ 1 + \frac{1}{n},\ x = x_0, y = x_n, n \in \mathbb{N}, \\ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{k},\ x = x_n, y = x_k, k, n \in \mathbb{N}, k \neq n, \end{cases}$$

є частковою метрикою на X. Справді, аксіоми $(p_1) - (p_3)$ є очевидними, а перевірка умови (p_4) для різних $x, y, z \in X$ (інакше ця аксіома випливає з попередніх) є досить простою.

Зауважимо, що

$$q_p(x,y) = \begin{cases} 0,\ x = y \in X, \\ \frac{1}{n},\ x = x_0, y = x_n, n \in \mathbb{N}, \\ 1 + \frac{1}{n},\ y = x_0, x = x_n, n \in \mathbb{N}, \\ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{k},\ x = x_n, y = x_k, k, n \in \mathbb{N}, k \neq n, \end{cases}$$

Тому в просторі (X,p) всі точки x_n, де $n \in \mathbb{N}$, є ізольованими і $x_n \to x_0$. Отже, (X,p) є метризовним компактом. А в топології τ_{d_p} всі точки є ізольованими, тому $\tau_{q_p} \neq \tau_{d_p}$ і простір (X,p) не є метрикоподібним.

Оскільки
$$\lim_{n\to\infty} q_p(x_k, x_n) = 1 + \tfrac{1}{k} = q_p(x_k, x_0),$$
то функція q_p є неперервною відносно другої змінної, і за теоремою 2 простір (X,p) є секвенціально рівнобедреним.

Залишилось показати, що простір (X,p) є секвенціально рівностороннім. Нехай $A \subseteq X$ – замкнена множина в (X,p) і $B \subseteq X$ – компактна множина в (X,p) такі, що $A \cap B = \varnothing$. Доведемо, що $q_p(A,B) > 0$.

Розглянемо два випадки. Спочатку нехай $x_0 \notin A$. Оскільки $q(x_n, x) \geq 1$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in X \setminus \{x_n\}$, то $q_p(A, B) \geq 1 > 0$. Тепер нехай $x_0 \in A$. Тоді компактна множина B є скінченною, тобто існує скінченна множина $M \subseteq \mathbb{N}$ така, що $B = \{x_n : n \in M\}$. Оскільки $q(x, x_n) \geq \frac{1}{n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільного $x \in X \setminus \{x_n\}$, то

$$q_p(A, B) = \inf\{q_p(a, x_n) : a \in A, n \in M\} \geq \min\{\tfrac{1}{n} : n \in M\} > 0.$$

Отже, згідно з теоремою 3 простір (X, p) є секвенціально рівностороннім. □

Твердження 9. *Існує метризовний секвенціально симетричний і секвенціально рівнобедрений частково метричний простір (X, p), який не є секвенціально рівностороннім, а отже, і метрикоподібним.*

Доведення. Нехай $X = \{x_n : n = 0, 1, \dots\} \cup \{y_k : k \in \mathbb{N}\}$, причому всі елементи x_n і y_k різні. Розглянемо функцію $p : X^2 \to \mathbb{R}$,

$$p(x, y) = p(y, x) = \begin{cases} 1, \; x = y = x_0, \\ 0, \; x = y = x_n, n \in \mathbb{N}, \\ 2, \; x = y = y_n, n \in \mathbb{N}, \\ 1 + \frac{1}{n}, \; x = x_0, y = x_n, n \in \mathbb{N}, \\ 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}, \; x = x_n, y = x_k, k, n \in \mathbb{N}, k \neq n, \\ 2 + \frac{1}{n}, \; x = x_0, y = y_n, n \in \mathbb{N}, \\ 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}, \; x = x_n, y = y_k, k, n \in \mathbb{N}, \\ 2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}, \; x = y_n, y = y_k, k, n \in \mathbb{N}, k \neq n, \end{cases}$$

яка, аналогічно, як у попередньому прикладі є частковою метрикою на X. Крім того, всі точки крім x_0 є ізольованими і $x_n \to x_0$ в просторі (X, p), а в топології $\tau_{q_p^{-1}}$ всі точки є ізольованими. Тому (X, p) є метризовним компактом і секвенціально симетричним.

Для кожного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\lim_{n \to \infty} q_p(x_k, x_n) = 1 + \tfrac{1}{k} = q_p(x_k, x_0)$$

і

$$\lim_{n \to \infty} q_p(y_k, x_n) = 2 + \tfrac{1}{k} = q_p(y_k, x_0).$$

Тому функція q_p є неперервною відносно другої змінної, і за теоремою 2 простір (X, p) є секвенціально рівнобедреним.

Разом з тим, $q_p(y_n, x_n) = \frac{2}{n}$ і $q_p(x_0, y_n) = 1 + \frac{1}{n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, простір (X, p) не є секвенціально рівностороннім. □

Нехай S – довільна множина. Через $l_1^+(S)$ ми позначаємо множину всіх функцій $x : S \to [0, +\infty)$ таких, що носій $\operatorname{supp} x = \{s \in S : x(s) \neq 0\}$ не більш, ніж зліченний і ряд $\sum\limits_{s \in S} x(s) = \sum\limits_{s \in \operatorname{supp} x} x(s)$ збіжний.

Для побудови прикладів частково метричних просторів ми будемо використовувати наступну конструкцію [7, Приклад 2.4].

Твердження 10. *Функція* $p(x,y) = \sum_{s\in S} \max\{x(s), y(s)\}$ *є частковою метрикою на просторі* $X = l_1^+(S)$.

Твердження 11. *Існує метризовний секвенціально рівносторонній частково метричний простір* (X,p)*, який не є секвенціально рівнобедреним.*

Доведення. Розглянемо частково метричний простір з [8, приклад 4.5]. Нехай $S = \{0,1\}$. Покладемо

$$x_0(s) = \begin{cases} 1,\ s = 0, \\ 0,\ s = 1, \end{cases} \qquad \text{і} \qquad x_n(s) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1},\ s = 0, \\ \frac{1}{n+1},\ s = 1, \end{cases}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Функція

$$p(x,y) = \max\{x(0), y(0)\} + \max\{x(1), y(1)\}$$

є частковою метрикою на просторі

$$X = \{x_0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\},$$

в якому всі точки x_n, де $n \in \mathbb{N}$, є ізольованими і $x_n \to x_0$. Отже, (X,p) є метризовним компактом. Крім того, міркуючи аналогічно, як в попередньому прикладі, ми одержуємо, що простір (X,p) є секвенціально рівностороннім.

З іншого боку, для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} p(x_k, x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{\max\{k,n\}+1} + \tfrac{1}{\min\{k,n\}+1}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{k+1} \neq 1 + \tfrac{1}{k+1} = p(x_k, x_0).$$

Тому функція p не є неперервною відносно другої змінної, і за теоремою 2 простір (X,p) не є секвенціально рівнобедреним. □

Твердження 12. *Існує метрикоподібний частково метричний простір* (X,p)*, який не є секвенціально симетричним, а отже, і не є секвенціально рівностороннім.*

Доведення. Нехай $S = \{0,1\}$. Покладемо

$$x_0(s) = \begin{cases} 1,\ s = 0, \\ 0,\ s = 1, \end{cases} \qquad \text{і} \qquad x_n(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n},\ s = 0, \\ 1 + \frac{1}{n},\ s = 1, \end{cases}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Згідно з твердженням 8 функція

$$p(x,y) = \max\{x(0), y(0)\} + \max\{x(1), y(1)\}$$

є частковою метрикою на просторі

$$X = \{x_0\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Зауважимо, що

$$p(x_0, x_0) = 1, \qquad p(x_0, x_n) = 2 + \tfrac{1}{n} \qquad \text{і} \qquad p(x_n, x_k) = 2 - \tfrac{1}{\max\{n,k\}} + \tfrac{1}{\min\{n,k\}},$$

звідки

$$q_p(x_0, x_n) = q_p(x_n, x_0) + 1 = 1 + \tfrac{1}{n} \qquad \text{і} \qquad q_p(x_n, x_k) = \tfrac{1}{\min\{n,k\}} - \tfrac{1}{\max\{n,k\}}$$

для довільних $n, k \in \mathbb{N}$.

Легко бачити, що всі точки є ізольваними в просторі (X, q_p), тому простір (X, p) не є секвенціально рівностороннім. Крім того, $x_n \to x_0$ в просторі $(X, (q_p)^{-1})$. Тому згідно з теоремою 5 простір (X, p) не є секвенціально симетричним. □

Твердження 13. *Існує метризовний секвенціально симетричний частково метричний простір (X, p), який не є секвенціально рівнобедреним (а отже, і метрикоподібним) і не є секвенціально рівностороннім.*

Доведення. Нехай $S = \{0, 1, 2\}$. Покладемо

$$x_n(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n},\ s = 0, \\ \frac{1}{n},\ s = 1, \\ 0,\ s = 2, \end{cases} \qquad \text{і} \qquad y_n(s) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n},\ s = 0, \\ 0,\ s = 1, \\ 1 + \frac{1}{n},\ s = 2, \end{cases}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$, а також

$$x_0(s) = \begin{cases} 2,\ s = 0, \\ 0,\ s \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

Згідно з твердженням 8 функція $p(x, y) = \sum\limits_{s=0}^{2} \max\{x(s), y(s)\}$ є частковою метрикою на просторі

$$X = \{x_0\} \cup \{x_n, y_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Зауважимо, що

$$p(x_0, x_n) = p(x_0, y_n) - 1 = 2 + \tfrac{1}{n}, \qquad p(x_n, y_k) = 2 + \tfrac{1}{\min\{n,k\}}$$

і

$$p(x_n, x_k) = p(y_n, y_k) - 1 = 1 - \tfrac{1}{\max\{n,k\}} + \tfrac{1}{\min\{n,k\}},$$

звідки

$$q_p(x_0, x_n) + 1 = q_p(x_n, x_0) = q_p(y_n, x_0) = q_p(x_0, y_n) = 1 + \tfrac{1}{n},$$

$$q_p(x_n, x_k) = q_p(y_n, y_k) = \tfrac{1}{\min\{n,k\}} - \tfrac{1}{\max\{n,k\}} \quad \text{і} \quad q_p(x_n, y_k) = 1 + q_p(y_k, x_n) = 1 + \tfrac{1}{\min\{n,k\}}$$

для довільних $n, k \in \mathbb{N}$.

Легко бачити, що всі точки є ізольованими в просторі $(X, (q_p)^{-1})$, всі точки $x \in \{x_n, y_n : n \in \mathbb{N}\}$ є ізольованими в просторі (X, q_p) і $x_n \to x_0$ в просторі (X, q_p), причому $q_p(y_n, x_0) \geq 1$ для всіх номерів n. Тому частково метричний простір (X, p) є метризовним і секвенціально симетричним. Крім того, $q_p(y_n, x_n) = \frac{1}{n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $y_n \not\to x_0$ в просторі (X, q_p). Отже, частково метричний простір (X, p) не є секвенціально рівностороннім. Разом з тим, для довільного $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$q_p(y_k, x_n) = \tfrac{1}{\min\{n,k\}} \to \tfrac{1}{k} \neq 1 + \tfrac{1}{k} = q_p(y_k, x_0).$$

(X, p) не є секвенціально рівнобедреним. □

Як випливає з поданих у цьому пункті прикладів, жодних інших імплікацій, крім викладених у вступі в твердженні 1 і теоремі 1, які пов'язують поняття з означення 1, немає навіть у класі метризовних частково метричних просторів.

Список літератури

1. Cobzaş S. *Functional analysis in asymmetric normed spaces*, Birkhäuser, (2010).
2. Matthews S.G. *Partial Metric Space*, 8th British Colloquium for Theoretical Computer Science, March 1992. In Research Report 212, Dept. of Computer Science, University of Warwick.
3. Matthews S.G. *Partial Metric Topology*, Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, Ann. New York Acad. Sci. **728** (1994), 183-197.
4. Matthews S., *An extensional treatment of lazy data flow deadlock*, Theor. Comput. Sci., **151**, 1 (1995), 195–205.
5. S.Han, J.Wu, D.Zhang *Properties and principles on partial metric spaces*, Topology and its Applications, **230** (2017), 77-98.
6. Lu H., Zhang H., He W. *Some remarks on partial metric spaces*, Bull. Malays. Math. Soc. **43 (3)** (2020) 3065-3081.
7. Mykhaylyuk V., Myronyk V. *Topological properties of partial metric spaces*, Proc, Intern. Geometr, Center 3-4 (2016), 37-49 (in Ukrainian).
8. Mykhaylyuk V., Myronyk V. Compactness and complementness in partial metric spaces, Top. Appl. 270 (2020), 106925.
9. Schellekens M. *A characterization of partial metrizability: domains are quantifiable*, Theor. Comput. Sci. **305** (2003) 409–432.
10. Stoy J.E. *Denotational Semantics: The Scott-Strachey Approach to Programming Language Theory*, MIT Press. Cambridge Massachusetts (1977).

Надійшло 21.12.2023

Myronyk V.I.[1], Mykhaylyuk V.V.[1,2] *Different types of quasi-metric and partial metric spaces*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 211–224.

The notion of a partial metric space was introduced by S. Matthews [2] in 1992. This notion arose as a certain extension of the notion of metric spaces and was used in computer science, where there are non-Hausdorff topological models. A function $p : X^2 \to [0, +\infty)$ is called *a partial metric* on X if for all $x, y, z \in X$ the following conditions hold: (p_1) $x = y$ if and only if $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$; (p_2) $p(x,x) \le p(x,y)$; (p_3) $p(x,y) = p(y,x)$; (p_4) $p(x,z) \le p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$.

The topology of a partial metric space (X, p) is generated by the corresponding quasi-metric $q_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x)$. Topological and metrical properties of partial metric spaces have been studied by many mathematicians. According to [5], a quasi-metric space (X, q) is called: *sequentially isosceles* if $\lim\limits_{n\to\infty} q(y, x_n) = q(y, x)$ for any $y \in X$ and every sequence of $x_n \in X$ that converges to $x \in X$; *sequentially equilateral* if a sequence of $y_n \in X$ converges to $x \in X$ while there exists a convergent to x sequence of $x_n \in X$ with $\lim\limits_{n\to\infty} q(y_n, x_n) = 0$; *sequentially symmetric* a sequence of $x_n \in X$ converges to $x \in X$ while $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, x) = 0$; *metric-like* if $\lim\limits_{n\to\infty} q(x_n, x) = 0$ for every convergent to $x \in X$ sequence of $x_n \in X$. It was proved in [5] and [6]

that: (i) every sequentially equilateral quasi-metric space is sequentially symmetric; (ii) every metric-like quasi-metric space is sequentially isosceles; (iii) every metric-like and sequentially symmetric quasi-metric space is sequentially equilateral.

A topological characterization of sequentially isosceles, sequentially equilateral, sequentially symmetric and metric-like quasi-metric spaces were obtained. Moreover, examples which show that there are no other connections between the indicated types of spaces, except for $(i) - (iii)$ even in the class of metrizable partial metric spaces have been constructed.