ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Дискретна математика

Методичні вказівки

до вивчення дисципліни

Частина II

Чернівці - 2020

УДК 510.6; 519.7

Рекомендовано до друку методичною радою
факультету математики та інформатики
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича

Видається в електронному вигляді

Дискретна математика: методичні вказівки до вивчення дисципліни. Частина II / Укл.: Філіпчук М.П. – Чернівці, 2020. – 72 с.

Укладач:

Філіпчук М.П., кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри прикладної математики та
інформаційних технологій

Методичні вказівки охоплюють розділи "Основи теорії булевих функцій", "Функціонально замкнуті та повні системи булевих функцій" і "Мінімізація булевих функцій" фундаментального курсу "Дискретна математика". Викладено основні теоретичні поняття та факти, наведено приклади розв'язування типових задач, запропоновано велику кількість задач для самостійної роботи.

УДК 510.6; 519.7

ВСТУП

Дані методичні вказівки є другою частиною вказівок, орієнтованих на студентів першого курсу спеціальностей “Прикладна математика”, “Комп’ютерні науки”, “Системний аналіз” факультету математики та інформатики ([1]).

Охоплено такі традиційні теми, як основи теорії булевих функцій, функціонально замкнуті та повні системи булевих функцій, мінімізація булевих функцій. При розгляді кожної теми викладено відповідні теоретичні поняття та факти, наведено приклади розв’язування ретельно підібраних типових задач. Для кращого засвоєння матеріалу запропоновано велику кількість задач для самостійної роботи.

У списку рекомендованої літератури подано джерела, де студент може знайти детальний виклад теоретичного матеріалу та додаткові задачі для самостійного розв’язування.

Методичні вказівки повністю узгоджено з тематикою та матеріалом відповідних лекційних і практичних занять.

ТЕМА 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

1.1. Булеві функції та способи їх задання

*Змінна x, що набуває значень із множини $E_2 = \{0,1\}$, називається **логічною змінною** або **булевою змінною**.*

*Впорядкований набір $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, де $x_i \in E_2$, $i = \overline{1,n}$, називається **двійковим набором** і позначається $\widetilde{x}^n$.*

Кількість всеможливих двійкових наборів $\widetilde{x}^n$ дорівнює 2^n, причому вони, по суті, є зображенням десяткових чисел $0,1,2,\ldots,2^n-1$ у двійковій системі числення.

Нехай, наприклад, $n=2$, тоді існує $2^2=4$ двійкових набори, які, по суті, зображають у двійковій системі числення десяткові числа $0,1,2,3$:

x_1	x_2	
0	0	$00_2 = 0_{10}$
0	1	$01_2 = 1_{10}$
1	0	$10_2 = 2_{10}$
1	1	$11_2 = 3_{10}$

Нагадаємо, що формула переводу двійкового числа в десяткове має вигляд:

$$(a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n)_2 = (a_n \cdot 2^0 + a_{n-1} \cdot 2^1 + \ldots + a_2 \cdot 2^{n-2} + a_1 \cdot 2^{n-1})_{10}.$$

Булева функція $y = f(\widetilde{x}^n)$ *– правило або закон, за яким кожному двійковому набору* $\widetilde{x}^n$ *ставиться у відповідність одне цілком визначене значення* $y \in E_2$.

Кількість всеможливих булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *дорівнює* 2^{2^n}.

Найпростіший спосіб задання булевої функції – **табличний** (так званою **таблицею істинності**). При цьому в таблиці спочатку послідовно виписують всеможливі двійкові набори (в порядку зростання відповідних десяткових чисел, котрі вони зображають), а потім навпроти кожного двійкового набору вказують відповідне значення булевої функції.

Приклад таблиці істинності:

x_1	x_2	x_3	$f(\widetilde{x}^3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Оскільки двійкові набори завжди виписуються єдиним чином – в порядку зростання відповідних десяткових чисел, то, очевидно, для задання булевої функції достатньо вказати її стовпчик значень. Такий спосіб задання булевої функції називається **векторним заданням**. Наприклад, векторне задання вищенаведеної булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$ має вигляд: $f(\widetilde{x}^3) = (10111001)$.

Найважливіший спосіб задання булевої функції – **аналітичний** (**формулою**). Як і в звичайній математиці, формули будуються на основі деякого набору елементарних функцій.

Булеві функції однієї та двох змінних, що задаються наступними таблицями істинності, вважаються ***елементарними****:*

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

x_1	x_2	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Позначення і назви цих функцій:

1) $f_1(x) \equiv 0$ – ***функція тотожний нуль***

2) $f_2(x) \equiv 1$ – ***функція тотожна одиниця***

3) $f_3(x) = x$ – ***тотожна функція***

4) $f_4(x) = \overline{x}$ – ***функція заперечення*** x

5) $f_5(x_1, x_2) = x_1 \wedge x_2 = x_1 \,\&\, x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$ – ***кон'юнкція*** x_1 ***і*** x_2

► **Як запам'ятати:** $x_1 \wedge x_2 = \min\{x_1, x_2\}$.

Для компактності записів кон'юнкцію змінних x_1 і x_2, як правило, записуватимемо у вигляді $x_1 x_2$ або $x_1 \cdot x_2$.

6) $f_6(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ – ***диз'юнкція*** x_1 ***і*** x_2

► **Як запам'ятати:** $x_1 \vee x_2 = \max\{x_1, x_2\}$.

7) $f_7(x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2$ – ***додавання за модулем 2*** x_1 ***і*** x_2

► **Як запам'ятати:** *функція набуває значення 1 лише тоді, коли значення аргументів різні.*

8) $f_8(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ – ***еквіваленція*** x_1 ***і*** x_2

► **Як запам'ятати:** *функція набуває значення 1 лише тоді, коли значення аргументів однакові.*

9) $f_9(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$ – ***імплікація*** x_1 ***і*** x_2 **(**x_1 ***імплікує*** x_2**)**

► **Як запам'ятати:** $1 \to 0 = 0$, *в решті випадків результатом є 1.*

10) $f_{10}(x_1, x_2) = x_1 / x_2$ – ***штрих Шефера*** x_1 ***і*** x_2

► **Як запам'ятати:** $x_1 / x_2 = \overline{x_1 x_2} = \overline{\min\{x_1, x_2\}}$.

11) $f_{11}(x_1, x_2) = x_1 \downarrow x_2$ – ***стрілка Пірса*** x_1 ***і*** x_2

► **Як запам'ятати:** $x_1 \downarrow x_2 = \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{\max\{x_1, x_2\}}$.

Індуктивне ***означення формули****:*

1) $0, 1$, *будь-який символ змінної є формулою;*

2) *якщо* U *і* V – *формули, то вирази* $(\overline{U})$, $(\overline{V})$, $(U \wedge V)$, $(U \vee V)$, $(U \oplus V)$, $(U \sim V)$, $(U \to V)$, (U / V), $(U \downarrow V)$ *теж є формулами;*

3) *не існує інших формул, окрім побудованих згідно з 1) та 2).*

Множина операцій $\{\overline{}, \wedge, \vee, \oplus, \sim, \to, /, \downarrow\}$, що використовуються в позначеннях елементарних функцій, називається множиною **логічних зв'язок**.

Для спрощення запису формул, зокрема, зменшення кількості дужок, приймають наступні домовленості:

1) зовнішні дужки у формулах опускаються;

2) зв'язка $\overline{}$ (заперечення) вважається найсильнішою;

3) зв'язка $\wedge$ (кон'юнкція) вважається сильнішою за будь-яку іншу двомісну зв'язку.

Кожна формула реалізує (задає) деяку булеву функцію.

Формули U і V називаються ***еквівалентними*** *($U = V$), якщо вони реалізують одну і ту ж булеву функцію.*

Нехай задано деякі булеві функції $f_0(\tilde{x}^m)$, $f_1(\tilde{x}^n)$, ..., $f_m(\tilde{x}^n)$, тоді вираз $\Phi(\tilde{x}^n) = f_0(f_1(\tilde{x}^n), f_2(\tilde{x}^n), \ldots, f_m(\tilde{x}^n))$ називається ***суперпозицією*** *булевих функцій $f_0(\tilde{x}^m)$, $f_1(\tilde{x}^n)$, ..., $f_m(\tilde{x}^n)$.*

Булеві функції $f_1(\tilde{x}^n)$ і $f_2(\tilde{x}^n)$ називаються ***рівними*** *($f_1(\tilde{x}^n) = f_2(\tilde{x}^n)$), якщо на всеможливих двійкових наборах $\tilde{x}^n$ значення цих функцій співпадають.*

При роботі з булевими функціями часто користуються наступними **основними еквівалентностями**:

1) $x \circ y = y \circ x$, де $\circ \in \{\wedge, \vee, \oplus, \sim, /, \downarrow\}$ – *комутативність* зв'язки $\circ$;

2) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, де $\circ \in \{\wedge, \vee, \oplus, \sim\}$ – *асоціативність* зв'язки $\circ$;

3) $x(y \vee z) = xy \vee xz$ – *дистрибутивність* $\wedge$ відносно $\vee$;

4) $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ – *дистрибутивність* $\wedge$ відносно $\oplus$;

5) $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$ – *дистрибутивність* $\vee$ відносно $\wedge$;

6) $\overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}$, $\overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}$ – *правила де Моргана*;

7) $x \vee xy = x$, $x(x \vee y) = x$ – *правила поглинання*;

8) $\bar{\bar{x}} = x$;

9) $x \vee \bar{x}y = x \vee y$, $x(\bar{x} \vee y) = xy$;

10) $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot 1 = x$, $x \cdot x = x$, $x \cdot \bar{x} = 0$;

11) $x \vee 0 = x$, $x \vee 1 = 1$, $x \vee x = x$, $x \vee \bar{x} = 1$;

12) $x \oplus y = \bar{x}y \vee x\bar{y}$, $x \oplus y = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$;
$x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = \bar{x}$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus \bar{x} = 1$;

13) $x \sim y = \bar{x}\bar{y} \vee xy$, $x \sim y = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})$,
$x \sim y = (x \to y)(y \to x)$,

$x \sim y = \overline{x \oplus y}$, $x \sim y = (x \oplus y) \oplus 1$;

$x \sim 0 = \bar{x}$, $x \sim 1 = x$, $x \sim x = 1$, $x \sim \bar{x} = 0$;

14) $x \to y = \bar{x} \vee y$;

$x \to 0 = \bar{x}$, $x \to 1 = 1$, $x \to x = 1$, $x \to \bar{x} = \bar{x}$;

15) $x / y = \overline{xy}$, $x / y = \bar{x} \vee \bar{y}$;

$x / 0 = 1$, $x / 1 = \bar{x}$, $x / x = \bar{x}$, $x / \bar{x} = 1$;

16) $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$, $x \downarrow y = \bar{x}\bar{y}$;

$x \downarrow 0 = \bar{x}$, $x \downarrow 1 = 0$, $x \downarrow x = \bar{x}$, $x \downarrow \bar{x} = 0$.

В правильності цих еквівалентностей можна переконатися шляхом порівняння таблиць істинності відповідних функцій.

Задача 1.1.1. Побудувати таблицю істинності булевої функції, що реалізується наступною формулою:

$$f = (x \to \bar{y}) \sim (y \downarrow \bar{z}).$$

Розв'язання. Дана формула реалізує булеву функцію трьох змінних $f(x, y, z)$. Для підрахунку стовпчика значень цієї функції необхідно послідовно обчислювати стовпчики значень підформул $\bar{y}$, $A = x \to \bar{y}$, $\bar{z}$, $B = y \downarrow \bar{z}$ та $A \sim B$:

x	y	z	$\bar{y}$	$A = x \to \bar{y}$	$\bar{z}$	$B = y \downarrow \bar{z}$	$f(x,y,z) = A \sim B$
0	**0**	**0**	1	1	1	0	**0**
0	**0**	**1**	1	1	0	1	**1**
0	**1**	**0**	0	1	1	0	**0**
0	**1**	**1**	0	1	0	0	**0**
1	**0**	**0**	1	1	1	0	**0**
1	**0**	**1**	1	1	0	1	**1**
1	**1**	**0**	0	0	1	0	**1**
1	**1**	**1**	0	0	0	0	**1**

■

Задача 1.1.2. З'ясувати, чи справедливе співвідношення:

$$x \oplus (y \to z) = (x \oplus y) \to (x \oplus z).$$

Розв'язання. По суті, необхідно перевірити рівність двох булевих функцій: $f(x,y,z) = x \oplus (y \to z)$ і $g(x,y,z) = = (x \oplus y) \to (x \oplus z)$. Позначимо підформули – $A = y \to z$, $B = x \oplus y$, $C = x \oplus z$ – і побудуємо таблиці істинності цих функцій:

x	y	z	A	$f(x,y,z) = x \oplus A$	B	C	$g(x,y,z) = B \to C$
0	**0**	**0**	1	**1**	0	0	**1**
0	**0**	**1**	1	**1**	0	1	**1**
0	**1**	**0**	0	**0**	1	0	**0**
0	**1**	**1**	1	**1**	1	1	**1**
1	**0**	**0**	1	**0**	1	1	**1**
1	**0**	**1**	1	**0**	1	0	**0**
1	**1**	**0**	0	**1**	0	1	**1**
1	**1**	**1**	1	**0**	0	0	**1**

Оскільки стовпчики значень функцій $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$ не співпадають, то $f(x,y,z) \neq g(x,y,z)$, тобто

$$x \oplus (y \to z) \neq (x \oplus y) \to (x \oplus z). \ \blacksquare$$

Задача 1.1.3. За функціями $f(x_1,x_2)$ і $g(x_3,x_4)$, які задані векторно, побудувати векторне задання функції h:

$$f(x_1,x_2) = (1011),\ g(x_3,x_4) = (1001),$$

$$h(x_2,x_3,x_4) = f(g(x_4,x_2),x_3).$$

Розв'язання. Побудуємо таблиці істинності функцій $f(x_1,x_2)$ і $g(x_3,x_4)$:

x_1	x_2	$f(x_1,x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

x_3	x_4	$g(x_3,x_4)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$h(x_2, x_3, x_4)$ – функція трьох змінних, яка, за умовою, є суперпозицією функцій $f(x_1, x_2)$ і $g(x_3, x_4)$. Обчислимо значення функції $h(x_2, x_3, x_4)$ на всеможливих двійкових наборах (x_2, x_3, x_4), використовуючи формулу, якою вона задана, та таблиці істинності функцій $f(x_1, x_2)$ і $g(x_3, x_4)$, і заповнимо таблицю істинності функції $h(x_2, x_3, x_4)$:

x_2	x_3	x_4	$h(x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$h(0,0,0) = f(g(0,0),0) = f(1,0) = 1$
$h(0,0,1) = f(g(1,0),0) = f(0,0) = 1$
$h(0,1,0) = f(g(0,0),1) = f(1,1) = 1$
$h(0,1,1) = f(g(1,0),1) = f(0,1) = 0$
$h(1,0,0) = f(g(0,1),0) = f(0,0) = 1$
$h(1,0,1) = f(g(1,1),0) = f(1,0) = 1$
$h(1,1,0) = f(g(0,1),1) = f(0,1) = 0$
$h(1,1,1) = f(g(1,1),1) = f(1,1) = 1$

Таким чином, векторне задання фунції $h(x_2, x_3, x_4)$ має вигляд:

$$h(x_2, x_3, x_4) = (11101101). \ \blacksquare$$

Задача 1.1.4. Використовуючи основні еквівалентності, довести еквівалентність формул U і V:

1) $U = \bar{x}\bar{z} \vee xy \vee x\bar{z}$, $V = xy \vee \bar{z}$;
2) $U = (x \to y) \to ((x\bar{y}) \oplus (x \sim \bar{y}))$, $V = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$.

Розв'язання. Необхідно показати, що еквівалентними перетвореннями одну формулу можна звести до іншої або кожну з них можна звести до одного і того ж виразу.

1) $U = \bar{x}\bar{z} \vee xy \vee x\bar{z} = \bar{x}\bar{z} \vee x\bar{z} \vee xy = \bar{z}\bar{x} \vee \bar{z}x \vee xy =$
$= \bar{z}(\bar{x} \vee x) \vee xy = \bar{z}(x \vee \bar{x}) \vee xy = \bar{z} \cdot 1 \vee xy = \bar{z} \vee xy =$
$= xy \vee \bar{z} = V$, тобто $U = V$. $\blacksquare$

2) $U = (x \to y) \to ((x\bar{y}) \oplus (x \sim \bar{y})) =$

$$= (\bar{x} \vee y) \to ((x\bar{y}) \oplus (x \sim \bar{y})) = \overline{(\bar{x} \vee y)} \vee ((x\bar{y}) \oplus (x \sim \bar{y})) =$$
$$= (\bar{\bar{x}}\,\bar{y}) \vee ((x\bar{y}) \oplus (x \sim \bar{y})) = x\bar{y} \vee ((x\bar{y}) \oplus (x \sim \bar{y})) =$$
$$= x\bar{y} \vee ((x\bar{y}) \oplus (\overline{x \oplus \bar{y}})) = x\bar{y} \vee ((x\bar{y}) \oplus ((x \oplus \bar{y}) \oplus 1)) =$$
$$= x\bar{y} \vee (x\bar{y} \oplus x \oplus \bar{y} \oplus 1) = x\bar{y} \vee (x\bar{y} \oplus \bar{y} \oplus x \oplus 1) =$$
$$= x\bar{y} \vee (\bar{y}x \oplus \bar{y} \oplus x \oplus 1) = x\bar{y} \vee (\bar{y}(x \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)) =$$
$$= x\bar{y} \vee ((x \oplus 1)(\bar{y} \oplus 1)) = x\bar{y} \vee (\bar{x}\bar{\bar{y}}) = x\bar{y} \vee \bar{x}y,$$

$$V = (x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y}) = (x \vee y)\bar{x} \vee (x \vee y)\bar{y} =$$
$$= (x\bar{x} \vee y\bar{x}) \vee (x\bar{y} \vee y\bar{y}) = 0 \vee y\bar{x} \vee x\bar{y} \vee 0 = y\bar{x} \vee x\bar{y} =$$
$$= x\bar{y} \vee y\bar{x} = x\bar{y} \vee \bar{x}y,$$ тому $U = V$. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 1.1.5. Побудувати таблиці істинності булевих функцій, що реалізуються наступними формулами:

1) $f = (x \sim \bar{y}) \oplus (\bar{y} \vee z)$;
2) $f = \overline{(\bar{x}_1 / x_2)} \downarrow x_3$;
3) $f = \bar{x}\bar{z} \to (y \oplus xz)$;
4) $f = ((x / y) \downarrow z) \to \bar{x}$;
5) $f = \overline{(\bar{x} \oplus y) \vee (x / \bar{z})} \downarrow (x \sim y)$.

Задача 1.1.6. З'ясувати, чи справедливі співвідношення:

1) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
2) $x \vee (y \oplus z) = (x \vee y) \oplus (x \vee z)$;
3) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
4) $x \downarrow (y / z) = (x \downarrow y)/(x \downarrow z)$;
5) $x/(y \downarrow z) = (x / y) \downarrow (x / z)$.

Задача 1.1.7. За функціями $f(x_1, x_2)$ і $g(x_3, x_4)$, які задані векторно, побудувати векторне задання функції h:

1) $f(x_1, x_2) = (1011)$, $g(x_3, x_4) = (0111)$,
$$h(x_1, x_2, x_3) = g(x_3, f(x_1, g(\bar{x}_3, x_2)));$$

2) $f(x_1, x_2) = (0110)$, $g(x_3, x_4) = (1101)$,
$$h(x_1, x_2, x_3) = g(x_2 \sim x_3, f(x_3, x_1 \oplus 1)).$$

Задача 1.1.8. Булева функція $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 = (00010111)$ називається **функцією голосування** або **мажоритарною функцією** (оскільки значення цієї функції на кожному двійковому наборі дорівнює значенню, котре мають більшість аргументів набору). Використовуючи основні еквівалентності, довести, що виконуються співвідношення:

1) $m(x_1, x_1, x_2) = x_1$;
2) $m(x_1, \bar{x}_1, x_2) = x_2$;
3) $\overline{m(x_1, x_2, x_3)} = m(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$.

Задача 1.1.9. Використовуючи основні еквівалентності, довести еквівалентність формул U і V:

1) $U = (x \downarrow y)(x \sim y)$, $V = y \downarrow x$;
2) $U = x \to (xy \to ((x \to y) \to y)z)$, $V = y \to (x \to z)$.

1.2. Істотні та фіктивні змінні булевих функцій

Раніше введене означення рівності булевих функцій не дає змоги порівнювати булеві функції, що залежать від різної кількості змінних. Вказаний недолік можна усунути, ввівши поняття істотних і фіктивних змінних.

Двійкові набори вигляду
$$\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n),$$

$$\tilde{\tilde{\alpha}}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n)$$

*називаються **сусідніми за і-тою координатою**.*

Наприклад, (0,0,1) і (1,0,1) – сусідні за першою координатою, (1,0,0) і (1,1,0) – за другою, (1,0,0) і (1,0,1) – за третьою.

*Змінна x_i називається **істотною** змінною булевої функції $f(\tilde{x}^n)$, якщо існують два сусідні за і-тою координатою двійкові набори $\tilde{\alpha}^n$ і $\tilde{\tilde{\alpha}}^n$, такі, що $f(\tilde{\alpha}^n) \neq f(\tilde{\tilde{\alpha}}^n)$.*

*Змінна, що не є істотною, називається **фіктивною**.*

*Дві булеві функції називаються **рівними**, якщо кожну з них можна отримати з іншої шляхом вилучення чи введення фіктивних змінних.*

Наступне твердження дає ефективний метод знаходження фіктивних змінних за допомогою еквівалентних перетворень.

Якщо булева функція $f(\tilde{x}^n)$ задається деякою формулою і в результаті еквівалентних перетворень у цій формулі зникає змінна x_i, то змінна x_i є фіктивною змінною булевої функції $f(\tilde{x}^n)$.

Задача 1.2.1. Вказати істотні та фіктивні змінні булевої функції

$$f(\tilde{x}^3) = (11111010).$$

Розв'язання. Будуємо таблицю істинності заданої функції:

x_1	x_2	x_3	$f(\tilde{x}^3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

1) Досліджуємо змінну x_1. Порівнюємо значення функції на

кожній парі сусідніх за першою координатою двійкових наборів:

$(0,0,0)$ і $(1,0,0)$: $f(0,0,0)=f(1,0,0)$;

$(0,0,1)$ і $(1,0,1)$: $f(0,0,1)\neq f(1,0,1) \;\Rightarrow\; x_1$ – <u>істотна</u> <u>змінна</u>.

2) Досліджуємо змінну x_2. Порівнюємо значення функції на кожній парі сусідніх за другою координатою двійкових наборів:

$(0,0,0)$ і $(0,1,0)$: $f(0,0,0)=f(0,1,0)$;

$(0,0,1)$ і $(0,1,1)$: $f(0,0,1)=f(0,1,1)$;

$(1,0,0)$ і $(1,1,0)$: $f(1,0,0)=f(1,1,0)$;

$(1,0,1)$ і $(1,1,1)$: $f(1,0,1)=f(1,1,1)$.

Таким чином, x_2 – <u>фіктивна</u> <u>змінна</u>.

3) Досліджуємо змінну x_3. Порівнюємо значення функції на кожній парі сусідніх за третьою координатою двійкових наборів:

$(0,0,0)$ і $(0,0,1)$: $f(0,0,0)=f(0,0,1)$;

$(0,1,0)$ і $(0,1,1)$: $f(0,1,0)=f(0,1,1)$;

$(1,0,0)$ і $(1,0,1)$: $f(1,0,0)\neq f(1,0,1) \;\Rightarrow\; x_3$ – <u>істотна</u> <u>змінна</u>.

Виконаємо тепер процедуру **вилучення фіктивної змінної** x_2. Для цього в таблиці істинності функції $f(\widetilde{x}^3)$ викреслимо стовпчик фіктивної змінної x_2 і всі ті рядки, що містять у цьому стовпчику одиниці. Отримаємо таблицю істинності деякої функції двох змінних $g(x_1,x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$f(\widetilde{x}^3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

x_1	x_3	$g(x_1,x_3)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Функція $g(x_1, x_3)$ отримується із функції $f(\widetilde{x}^3)$ шляхом вилучення фіктивної змінної x_2, і навпаки, функція $f(\widetilde{x}^3)$ отримуватиметься із функції $g(x_1, x_3)$ шляхом введення фіктивної змінної x_2. Тоді, за означенням, $f(\widetilde{x}^3) = g(x_1, x_3)$.

Очевидно, $g(x_1, x_3) = x_1 / x_3$. Таким чином, $f(\widetilde{x}^3) = x_1 / x_3$.

Відповідь: x_1, x_3 – істотні змінні, x_2 – фіктивна змінна, $f(\widetilde{x}^3) = x_1 / x_3$. ■

Задача 1.2.2. За допомогою еквівалентних перетворень визначити фіктивні змінні наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2))x_3 \to x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (((x_3 \to x_2) \vee x_1)(x_2 \to x_1)x_3\overline{x}_1) \oplus x_3$.

Розв'язання.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to (x_1 \vee x_2))x_3 \to x_3 = (\overline{x}_1 \vee (x_1 \vee x_2))x_3 \to$
$\to x_3 = ((\overline{x}_1 \vee x_1) \vee x_2)x_3 \to x_3 = (1 \vee x_2)x_3 \to x_3 =$
$= 1 \cdot x_3 \to x_3 = x_3 \to x_3 = 1$.

Отже, x_1, x_2, x_3 – фіктивні змінні булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$. ■

2) $f(\widetilde{x}^3) = (((x_3 \to x_2) \vee x_1)(x_2 \to x_1)x_3\overline{x}_1) \oplus x_3 =$
$= (((\overline{x}_3 \vee x_2) \vee x_1)(\overline{x}_2 \vee x_1)x_3\overline{x}_1) \oplus x_3 =$
$= ((\overline{x}_3 \vee x_2 \vee x_1)(\overline{x}_2 x_3 \overline{x}_1 \vee x_1 x_3 \overline{x}_1)) \oplus x_3 =$
$= (\overline{x}_3 \vee x_2 \vee x_1)(\overline{x}_2 x_3 \overline{x}_1 \vee 0) \oplus x_3 = (\overline{x}_3 \vee x_2 \vee x_1)\overline{x}_2 x_3 \overline{x}_1 \oplus x_3 =$
$= (\overline{x}_3 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_1 \vee x_2 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_1 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_1) \oplus x_3 = (0 \vee 0 \vee 0) \oplus x_3 =$
$= 0 \oplus x_3 = x_3$.

Отже, x_1 і x_2 – фіктивні змінні булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 1.2.3. Вказати істотні та фіктивні змінні наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^2) = (x_1 \vee x_2) \to \overline{x}_2$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \downarrow x_2)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (00111100)$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (10111011)$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (11110000)$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (11001100)$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = (0011110011000011)$.

Задача 1.2.4. За допомогою еквівалентних перетворень визначити фіктивні змінні наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^2) = (x_1 \vee x_2) \to \overline{x}_2$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \downarrow x_2)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x}_3) \to (\overline{x}_1 \to x_2\overline{x}_3))x_2$.

1.3. Розклад булевих функцій за частиною змінних

Вираз x^σ, *де* $\sigma \in E_2$, *називається* ***первинним термом*** *змінної* x. *Вираз* x^σ *обчислюється наступним чином:* $x^0 = \overline{x}$, $x^1 = x$.

Теорема про розклад булевої функції за частиною змінних. *Кожну булеву функцію* $f(\widetilde{x}^n)$ *при будь-якому* m *(*$1 \le m \le n$*) можна розкласти за змінними* $x_1, x_2, \dots, x_m$ *наступним чином:*

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_m^{\sigma_m} f(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m, x_{m+1}, \dots, x_n),$$

де диз'юнкція береться за всеможливими двійковими наборами $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ *змінних* $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Задача 1.3.1. Розкласти булеву функцію за змінними x_1, x_2:

$$f(\tilde{x}^4) = (x_1 / \bar{x}_3)\bar{x}_2 \oplus ((\bar{x}_1 \downarrow x_4) \to x_3).$$

Розв'язання. Покладаючи у формулі розкладу $n = 4$, $m = 2$, маємо:

$$f(\tilde{x}^4) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} f(\sigma_1, \sigma_2, x_3, x_4) =$$

$$= x_1^0 x_2^0 f(0,0,x_3,x_4) \vee x_1^0 x_2^1 f(0,1,x_3,x_4) \vee x_1^1 x_2^0 f(1,0,x_3,x_4) \vee$$

$$\vee x_1^1 x_2^1 f(1,1,x_3,x_4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 f(0,0,x_3,x_4) \vee \bar{x}_1 x_2 f(0,1,x_3,x_4) \vee$$

$$\vee x_1\bar{x}_2 f(1,0,x_3,x_4) \vee x_1 x_2 f(1,1,x_3,x_4). \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

Обчислимо коефіцієнти розкладу, використовуючи формулу, якою задається функція, та основні еквівалентності:

$$f(0,0,x_3,x_4) = (0/\bar{x}_3)\bar{0} \oplus ((\bar{0} \downarrow x_4) \to x_3) = 1 \cdot 1 \oplus (0 \to x_3) =$$
$$= 1 \oplus 1 = 0,$$

$$f(0,1,x_3,x_4) = (0/\bar{x}_3)\bar{1} \oplus ((\bar{0} \downarrow x_4) \to x_3) = 1 \cdot 0 \oplus (0 \to x_3) =$$
$$= 0 \oplus 1 = 1,$$

$$f(1,0,x_3,x_4) = (1/\bar{x}_3)\bar{0} \oplus ((\bar{1} \downarrow x_4) \to x_3) = x_3 \cdot 1 \oplus (\bar{x}_4 \to x_3) =$$
$$= x_3 \oplus (x_4 \vee x_3) = \bar{x}_3(x_4 \vee x_3) \vee x_3\overline{(x_4 \vee x_3)} = \bar{x}_3 x_4 \vee x_3\bar{x}_4\bar{x}_3 =$$
$$= \bar{x}_3 x_4 \vee 0 = \bar{x}_3 x_4,$$

$$f(1,1,x_3,x_4) = (1/\bar{x}_3)\bar{1} \oplus ((\bar{1} \downarrow x_4) \to x_3) = x_3 \cdot 0 \oplus (\bar{x}_4 \to x_3) =$$
$$= 0 \oplus (x_4 \vee x_3) = x_4 \vee x_3 = x_3 \vee x_4.$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у формулу (1.3.1), остаточно знаходимо:

$$f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1\bar{x}_2 \cdot 0 \vee \bar{x}_1 x_2 \cdot 1 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2(x_3 \vee x_4) =$$
$$= \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2(x_3 \vee x_4).$$

Відповідь: $f(\tilde{x}^4) = \bar{x}_1 x_2 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2(x_3 \vee x_4)$. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 1.3.2. Розкласти за змінними x_1, x_2 наступні булеві функції:

1) $f(\widetilde{x}^4) = (\bar{x}_3 \to x_1\bar{x}_2) \sim ((x_4 / \bar{x}_2\bar{x}_3) \oplus \bar{x}_1 x_3)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (\bar{x}_2 \sim x_3) \downarrow (\bar{x}_1 \to \bar{x}_3)$;
3) $f(\widetilde{x}^4) = (\bar{x}_1 x_2 \sim \bar{x}_3) \to (\bar{x}_2 x_4 \downarrow \bar{x}_1 x_3)$.

1.4. Диз'юнктивні нормальні форми, досконала ДНФ

Кон'юнкція первинних термів деяких різних змінних, тобто вираз вигляду $K = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_m}^{\sigma_m}$, *де* $\sigma_i \in E_2$ $(i = \overline{1,m})$, $x_{i_k} \neq x_{i_j}$ *при* $k \neq j$, *називається* ***елементарною кон'юнкцією (ЕК)***.

Кількість різних змінних в елементарній кон'юнкції називається ***рангом*** *елементарної кон'юнкції.*

Наприклад, $\bar{x}_1$ і x_2 – ЕК рангу 1, $\bar{x}_2 x_3$ – ЕК рангу 2, $x_2\bar{x}_4\bar{x}_6$ – ЕК рангу 3.

Елементарною кон'юнкцією рангу 0 *є константа* 1.

Диз'юнкція деяких різних елементарних кон'юнкцій, тобто вираз вигляду $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m$, *де* K_i *– елементарні кон'юнкції* $(i = \overline{1,m})$, $K_i \neq K_j$ *при* $i \neq j$, *називається* ***диз'юнктивною нормальною формою (ДНФ)***.

Наприклад, $\bar{x}_1 x_3 \vee \bar{x}_2$, $x_1\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1$ – ДНФ.

ДНФ від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *у якій* <u>*всі*</u> *елементарні кон'юнкції мають ранг* n, *називається* ***досконалою ДНФ (ДДНФ)***.

Наприклад, $\bar{x}_1 x_2 \vee x_1 x_2$ – ДДНФ від змінних x_1, x_2, $x_1\bar{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ – ДДНФ від змінних x_1, x_2, x_3.

Елементарні кон'юнкції, що містяться у ДДНФ, називаються ***конституентами одиниці***.

Теорема про зображення булевої функції у вигляді ДДНФ. *Кожну булеву функцію* $f(\widetilde{x}^n) \neq 0$ *можна зобразити у вигляді ДДНФ наступним єдиним чином:*

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n): \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma_n},$$

де диз'юнкція береться за всеможливими двійковими наборами $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$*, на яких* $f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1$.

Задача 1.4.1. Еквівалентними перетвореннями побудувати диз'юнктивні нормальні форми для наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(x_1 \vee x_3)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_2 \sim x_1x_3) \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3$.

Розв'язання.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)(x_1 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)x_1 \vee (x_1 \vee x_2\bar{x}_3)x_3 =$

$= x_1x_1 \vee x_2\bar{x}_3x_1 \vee x_1x_3 \vee x_2\bar{x}_3x_3 = x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3 \vee 0 =$

$= x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1x_3$ – ДНФ.

Зауважимо, що, використовуючи правило поглинання $x \vee xy = x$, далі можна було б отримати більш прості ДНФ: або $x_1 \vee x_1x_2\bar{x}_3$, або $x_1 \vee x_1x_3$, або навіть просто x_1.

Цей приклад ілюструє, що для кожної булевої функції існує, взагалі кажучи, не одна ДНФ, а певна множина ДНФ. ■

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_2 \sim x_1x_3) \oplus \bar{x}_2\bar{x}_3 = \overline{(x_2 \sim x_1x_3)}\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee (x_2 \sim x_1x_3)\overline{\bar{x}_2\bar{x}_3} =$

$= (x_2 \oplus x_1x_3)\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee (\bar{x}_2\overline{x_1x_3} \vee x_2x_1x_3)(x_2 \vee x_3) =$

$= (x_2\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus x_1x_3\bar{x}_2\bar{x}_3) \vee (\bar{x}_2(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3) \vee x_1x_2x_3)(x_2 \vee x_3) =$

$= (0 \oplus 0) \vee (\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2x_3)(x_2 \vee x_3) =$

$= \bar{x}_1\bar{x}_2x_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_2 \vee x_1x_2x_3x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3x_3 \vee x_1x_2x_3x_3 =$

$= 0 \vee 0 \vee x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee 0 \vee x_1x_2x_3 = x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3 =$

$= x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ – ДНФ, яка є досконалою ДНФ (ДДНФ). ■

Задача 1.4.2. За допомогою перетворень вигляду $A = Ax \vee A\bar{x}$ (операція введення змінної) і $A \vee A = A$ (операція приведення однакових доданків) перейти від заданої ДНФ булевої функції до ДДНФ цієї булевої функції:

$$f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 .$$

Розв'язання. Оскільки задана функція залежить від трьох змінних, то на першому етапі, вводячи у кон'юнкції відсутні змінні, потрібно перейти до кон'юнкцій виключно рангу 3, а на другому – здійснити приведення однакових доданків:

$$f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 = x_1(x_2 \vee \bar{x}_2) \vee \bar{x}_2 x_3 (x_1 \vee \bar{x}_1) \vee \bar{x}_1 x_3 (x_2 \vee \bar{x}_2) =$$

$$= x_1 x_2 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 =$$

$$= x_1 x_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 \bar{x}_2 (x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 =$$

$$= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 =$$

$$= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 \bar{x}_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3$$ – ДДНФ. ■

Задача 1.4.3. Зобразити у вигляді ДДНФ булеву функцію

$$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \bar{x}_1 x_3 .$$

Розв'язання. Будуємо таблицю істинності заданої функції:

x_1	x_2	x_3	$A = x_1 \oplus x_2$	$B = \bar{x}_1 x_3$	$f(\tilde{x}^3) = A \sim B$	
0	**0**	**0**	0	0	**1**	$x_1^0 x_2^0 x_3^0 = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$
0	0	1	0	1	0	
0	1	0	1	0	0	
0	**1**	**1**	1	1	**1**	$x_1^0 x_2^1 x_3^1 = \bar{x}_1 x_2 x_3$
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	0	
1	**1**	**0**	0	0	**1**	$x_1^1 x_2^1 x_3^0 = x_1 x_2 \bar{x}_3$
1	**1**	**1**	0	0	**1**	$x_1^1 x_2^1 x_3^1 = x_1 x_2 x_3$

Знаходимо всеможливі двійкові набори $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, на яких функція набуває значення 1: $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$. За кожним знайденим набором $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ будуємо елементарну кон'юнкцію вигляду $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$ (результати наведено біля таблиці істинності навпроти кожного із знайдених двійкових наборів). Поєднуючи між собою всі побудовані елементарні кон'юнкції операцією диз'юнкції, отримуємо шукану ДДНФ:

$$f(\widetilde{x}^3) = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \text{ – ДДНФ. } \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 1.4.4. Еквівалентними перетвореннями побудувати диз'юнктивні нормальні форми для наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \sim \bar{x}_2) \to x_2 x_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_3 \downarrow \bar{x}_1) \sim x_2 \bar{x}_3$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_2 / \bar{x}_3) \downarrow (\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2)$;
4) $f(\widetilde{x}^4) = ((x_1 \to x_2 x_3)(x_2 x_4 \oplus x_3) \to x_1 \bar{x}_4) \vee \bar{x}_1$.

Задача 1.4.5. За допомогою перетворень вигляду $A = Ax \vee A\bar{x}$ і $A \vee A = A$ перейти від заданої ДНФ булевої функції до ДДНФ цієї булевої функції:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1 x_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = \bar{x}_1 \vee x_1 \bar{x}_2 \vee x_2 \bar{x}_3$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = \bar{x}_1 \vee x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_2$.

Задача 1.4.6. Зобразити у вигляді ДДНФ наступні булеві функції:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{\bar{x}_1 / x_2}) \downarrow x_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (01011001)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = ((\bar{x}_1 \to x_3) \vee \bar{x}_2) / x_1$;

4) $f(\tilde{x}^3) = (x_3 \downarrow \bar{x}_1) \sim x_2\bar{x}_3$;

5) $m(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$.

1.5. Кон'юнктивні нормальні форми, досконала КНФ

Диз'юнкція первинних термів деяких різних змінних, тобто вираз вигляду $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_{i_m}^{\sigma_m}$*, де* $\sigma_i \in E_2$ $(i = \overline{1,m})$*,* $x_{i_k} \neq x_{i_j}$ *при* $k \neq j$*, називається* ***елементарною диз'юнкцією (ЕД)***.

Кількість різних змінних в елементарній диз'юнкції називається ***рангом*** *елементарної диз'юнкції.*

Наприклад, $\bar{x}_1$ і x_2 – ЕД рангу 1, $\bar{x}_2 \vee x_3$ – ЕД рангу 2, $x_2 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_6$ – ЕД рангу 3.

Елементарною диз'юнкцією рангу 0 *є константа* 0.

Кон'юнкція деяких різних елементарних диз'юнкцій, тобто вираз вигляду $D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_m$*, де* D_i *– елементарні диз'юнкції* $(i = \overline{1,m})$*,* $D_i \neq D_j$ *при* $i \neq j$*, називається* ***кон'юнктивною нормальною формою (КНФ)***.

Наприклад, $(\bar{x}_1 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_2)$, $(x_1 \vee \bar{x}_2)(x_2 \vee \bar{x}_3)\bar{x}_1$ – КНФ.

КНФ від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$*, у якій* *<u>всі</u>* *елементарні диз'юнкції мають ранг* n*, називається* ***досконалою КНФ (ДКНФ)***.

Наприклад, $(\bar{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2)$ – ДКНФ від змінних x_1, x_2, $(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$ – ДКНФ від змінних x_1, x_2, x_3.

Елементарні диз'юнкції, що містяться у ДКНФ, називаються ***конституентами нуля***.

Теорема про зображення булевої функції у вигляді ДКНФ. *Кожну булеву функцію* $f(\tilde{x}^n) \neq 1$ *можна зобразити у вигляді ДКНФ наступним єдиним чином:*

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigwedge_{\substack{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n):\\ f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=0}} (x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}),$$

де кон'юнкція береться за всеможливими двійковими наборами $(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$*, на яких* $f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)=0$.

Задача 1.5.1. Зобразити у вигляді ДКНФ булеву функцію

$$f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \overline{x}_1 x_3 .$$

Розв'язання. Таблиця істинності цієї булевої функції має вигляд (дивись задачу 1.4.3):

x_1	x_2	x_3	$f(\widetilde{x}^3)$	
0	0	0	1	
0	**0**	**1**	**0**	$x_1^{\overline{0}} \vee x_2^{\overline{0}} \vee x_3^{\overline{1}} = x_1^1 \vee x_2^1 \vee x_3^0 = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$
0	**1**	**0**	**0**	$x_1^{\overline{0}} \vee x_2^{\overline{1}} \vee x_3^{\overline{0}} = x_1^1 \vee x_2^0 \vee x_3^1 = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3$
0	1	1	1	
1	**0**	**0**	**0**	$x_1^{\overline{1}} \vee x_2^{\overline{0}} \vee x_3^{\overline{0}} = x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_3^1 = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3$
1	**0**	**1**	**0**	$x_1^{\overline{1}} \vee x_2^{\overline{0}} \vee x_3^{\overline{1}} = x_1^0 \vee x_2^1 \vee x_3^0 = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$
1	1	0	1	
1	1	1	1	

Знаходимо всеможливі двійкові набори $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$, на яких функція набуває значення 0: $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$. За кожним знайденим набором $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ будуємо елементарну диз'юнкцію вигляду $x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee x_3^{\overline{\sigma}_3}$ (результати наведено біля таблиці істинності навпроти кожного із знайдених двійкових наборів). Поєднуючи між собою всі побудовані елементарні диз'юнкції операцією кон'юнкції, отримуємо шукану ДКНФ:

$f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$ – ДКНФ. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 1.5.2. Зобразити у вигляді ДКНФ наступні булеві функції:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_3 \downarrow \bar{x}_1) \sim x_2\bar{x}_3$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (01011001)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = ((\bar{x}_1 \to x_3) \vee \bar{x}_2) / x_1$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (\overline{\bar{x}_1 / x_2}) \downarrow x_3$;
5) $m(\tilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$.

1.6. Поліном Жегалкіна

Поліномом Жегалкіна від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *називається вираз вигляду*

$$a_0 \oplus \bigoplus_{\substack{\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \\ 1 \le k \le n}} a_{i_1 i_2 \cdots i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdot \ldots \cdot x_{i_k},$$

де сума за модулем 2 береться при $k = 1, 2, \ldots, n$ *за всеможливими невпорядкованими* k*-вибірками без повторень* $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ *із множини індексів* $\{1, 2, \ldots, n\}$, *а* a_0 *і* $a_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ $(k = \overline{1, n})$ *– коефіцієнти полінома, що належать множині* $E_2 = \{0, 1\}$.

Інакше кажучи, поліном Жегалкіна від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – сума за модулем 2 всеможливих кон'юнкцій (що не містять заперечень змінних) рангів 0, 1, 2, ..., *n*, кожна з яких береться з деяким коефіцієнтом із множини $E_2 = \{0, 1\}$.

Явний вигляд поліному Жегалкіна:

- від однієї змінної x_1 –

$$a_0 \oplus a_1x_1, \text{ де } a_0, a_1 \in E_2;$$

- від двох змінних x_1, x_2 –

$$a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_{12}x_1x_2, \text{ де } a_0, a_1, a_2, a_{12} \in E_2;$$

- від трьох змінних x_1, x_2, x_3 –

$$a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{123}x_1x_2x_3,$$

$$\text{де } a_0, a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{123} \in E_2.$$

Теорема. *Кожну булеву функцію $f(\widetilde{x}^n)$ можна єдиним чином зобразити у вигляді поліному Жегалкіна.*

Універсальним методом побудови поліному Жегалкіна для булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ є **метод невизначених коефіцієнтів**.

Задача 1.6.1. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати поліном Жегалкіна для булевої функції

$$f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \bar{x}_1x_3.$$

Розв'язання. Таблиця істинності цієї булевої функції має вигляд (дивись задачу 1.4.3):

x_1	x_2	x_3	$f(\widetilde{x}^3)$	
0	0	0	1	$a_0 = 1$
0	0	1	0	$a_3 = 1$
0	1	0	0	$a_2 = 1$
0	1	1	1	$a_{23} = 0$
1	0	0	0	$a_1 = 1$
1	0	1	0	$a_{13} = 1$
1	1	0	1	$a_{12} = 0$
1	1	1	1	$a_{123} = 0$

Випишемо для булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$ загальний вигляд поліному Жегалкіна від змінних x_1, x_2, x_3 з невідомими (невизначеними) коефіцієнтами:

$$f(\widetilde{x}^3) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus$$

$$\oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{123}x_1x_2x_3 . \qquad \mathbf{(1.6.1)}$$

По черзі підставляючи в цю рівність всеможливі двійкові набори та використовуючи основні еквівалентності, послідовно знаходимо значення невідомих коефіцієнтів (для зручності знайдені значення записуємо біля таблиці істинності навпроти відповідних двійкових наборів):

1) $(0,0,0)$: $f(0,0,0) = a_0$; $1 = a_0$; $a_0 = 1$.

2) $(0,0,1)$: $f(0,0,1) = a_0 \oplus a_3$; $0 = 1 \oplus a_3$; $0 = \overline{a}_3$; $a_3 = 1$.

3) $(0,1,0)$: $f(0,1,0) = a_0 \oplus a_2$; $0 = 1 \oplus a_2$; $0 = \overline{a}_2$; $a_2 = 1$.

4) $(0,1,1)$: $f(0,1,1) = a_0 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{23}$; $1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{23}$;
$1 = 1 \oplus a_{23}$; $1 = \overline{a}_{23}$; $a_{23} = 0$.

5) $(1,0,0)$: $f(1,0,0) = a_0 \oplus a_1$; $0 = 1 \oplus a_1$; $0 = \overline{a}_1$; $a_1 = 1$.

6) $(1,0,1)$: $f(1,0,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_3 \oplus a_{13}$; $0 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{13}$;
$0 = 1 \oplus a_{13}$; $0 = \overline{a}_{13}$; $a_{13} = 1$.

7) $(1,1,0)$: $f(1,1,0) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_{12}$; $1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus a_{12}$;
$1 = 1 \oplus a_{12}$; $1 = \overline{a}_{12}$; $a_{12} = 0$.

8) $(1,1,1)$: $f(1,1,1) = a_0 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_{12} \oplus a_{13} \oplus a_{23} \oplus a_{123}$;
$1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus a_{123}$;
$1 = 1 \oplus a_{123}$; $1 = \overline{a}_{123}$; $a_{123} = 0$.

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів у формулу (1.6.1), отримуємо шуканий поліном Жегалкіна:

$$f(\widetilde{x}^3) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_3 . \quad \blacksquare$$

Якщо булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ задається деякою формулою, то поліном Жегалкіна для цієї функції можна побудувати за допомогою **еквівалентних перетворень**. Алгоритм цього методу:

1) звести формулу до формули з операціями $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$;
2) використовуючи еквівалентні перетворення вигляду $\overline{A \vee B} = \overline{A}\,\overline{B}$, $A \vee B = \overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}$, позбутись у формулі

всіх диз’юнкцій;

3) використовуючи еквівалентні перетворення вигляду $\overline{A} = A \oplus 1$, позбутись у формулі всіх заперечень;
4) використовуючи еквівалентні перетворення вигляду $A(B \oplus C) = AB \oplus AC$, розкрити у формулі всі дужки;
5) використовуючи рівності $A \cdot A = A$, $A \cdot 1 = A$, $A \oplus A = 0$, $A \oplus 0 = A$, здійснити спрощення та приведення однакових доданків.

Зауваження 1. Якщо початкова формула містить операції $\oplus$, їх позбуватися недоцільно, оскільки операції $\oplus$ будуть присутні і в поліномі Жегалкіна.

Зауваження 2. Якщо початкова формула містить операції $\sim$, доцільно виразити їх через операції $\oplus$ ($A \sim B = \overline{A \oplus B}$) і скористатися зауваженням 1.

Задача 1.6.2. Еквівалентними перетвореннями побудувати поліноми Жегалкіна для наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 / \overline{x}_2) \downarrow x_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \to x_3$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \overline{x}_1 x_3$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3) \to (\overline{x}_2 \sim x_3)$.

Розв’язання.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 / \overline{x}_2) \downarrow x_3 = (\overline{x_1 \overline{x}_2}) \downarrow x_3 = \overline{\overline{x_1 \overline{x}_2} \vee x_3} = \overline{\overline{x_1 \overline{x}_2}}\, \overline{x}_3 =$

$= x_1 \overline{x}_2\, \overline{x}_3 = x_1 (x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) = (x_1 x_2 \oplus x_1)(x_3 \oplus 1) =$

$= x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1$. ■

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \to x_3 = (\overline{x}_1 \vee x_2) \to x_3 = (\overline{\overline{x}_1 \vee x_2}) \vee x_3 =$

$= x_1 \overline{x}_2 \vee x_3 = \overline{\overline{x_1 \overline{x}_2 \vee x_3}} = \overline{\overline{x_1 \overline{x}_2}\, \overline{x}_3} = ((x_1 \overline{x}_2 \oplus 1)\, \overline{x}_3) \oplus 1 =$

$= (x_1 (x_2 \oplus 1) \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1 = (x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1 =$

$$= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_3 \oplus 1 \oplus 1 =$$

$$= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_3 . \ \blacksquare$$

3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \bar{x}_1 x_3 = \overline{(x_1 \oplus x_2) \oplus \bar{x}_1 x_3} =$

$$= (x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1 \oplus 1)x_3) \oplus 1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_3 \oplus 1 . \ \blacksquare$$

4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3) \to (\bar{x}_2 \sim x_3) = \overline{(x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3)} \vee (\bar{x}_2 \sim x_3) =$

$$= \bar{x}_1 \overline{\bar{x}_2\bar{x}_3} \vee \overline{(\bar{x}_2 \oplus x_3)} = \overline{\overline{\bar{x}_1 \overline{\bar{x}_2\bar{x}_3} \vee \overline{(\bar{x}_2 \oplus x_3)}}} =$$

$$= \overline{\overline{\bar{x}_1 \overline{\bar{x}_2\bar{x}_3}}\, (\bar{x}_2 \oplus x_3)} = (\bar{x}_1 \overline{\bar{x}_2\bar{x}_3} \oplus 1)(\bar{x}_2 \oplus x_3) \oplus 1 =$$

$$= (\bar{x}_1 (\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus 1) \oplus 1)((x_2 \oplus 1) \oplus x_3) \oplus 1 =$$

$$= (\bar{x}_1 (\bar{x}_2\bar{x}_3 \oplus 1) \oplus 1)(x_2 \oplus 1 \oplus x_3) \oplus 1 =$$

$$= ((x_1 \oplus 1)((x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1) \oplus 1)(x_2 \oplus 1 \oplus x_3) \oplus 1 =$$

$$= ((x_1 \oplus 1)(x_2x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1 \oplus 1) \oplus 1)(x_2 \oplus 1 \oplus x_3) \oplus 1 =$$

$$= ((x_1 \oplus 1)(x_2x_3 \oplus x_2 \oplus x_3) \oplus 1)(x_2 \oplus 1 \oplus x_3) \oplus 1 =$$

$$= (x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1)(x_2 \oplus 1 \oplus x_3) \oplus 1 =$$

$$= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus$$

$$\oplus x_1x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus$$

$$\oplus x_2x_3 \oplus x_3 \oplus x_3 \oplus x_2 \oplus 1 \oplus x_3 \oplus 1 =$$

$$= x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 . \ \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 1.6.3. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати поліноми Жегалкіна для наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{\bar{x}_1 / x_2}) \downarrow x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_3 \downarrow \bar{x}_1) \sim x_2\bar{x}_3$;

3) $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = (10110110)$.

Задача 1.6.4. Еквівалентними перетвореннями побудувати поліноми Жегалкіна для наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{\bar{x}_1 / x_2}) \downarrow x_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_2 \downarrow x_3)$;

3) $m(\widetilde{x}^3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \to x_2) \vee \bar{x}_3) / x_1$;

5) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus \bar{x}_2 \bar{x}_3) \to x_1 x_2$;

6) $f(\widetilde{x}^3) = (x_3 \downarrow \bar{x}_1) \sim x_2 \bar{x}_3$;

7) $f(\widetilde{x}^3) = (\bar{x}_2 \sim x_1) \downarrow (\bar{x}_1 x_3)$.

ТЕМА 2. ФУНКЦІОНАЛЬНО ЗАМКНУТІ ТА ПОВНІ СИСТЕМИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

2.1. Поняття замикання та повноти системи булевих функцій. Теорема зведення

Нехай задано деяку множину (систему) булевих функцій $M = \{f_1(\widetilde{x}^n), f_2(\widetilde{x}^n), \ldots\}$.

*Індуктивне **означення формули над множиною** M:*

1) *кожна функція $f_i(\widetilde{x}^n)$ із множини M називається формулою над M;*
2) *якщо $f_j(\widetilde{x}^n)$ – функція із множини M, а $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – вирази, кожен з яких є формулою над M або символом змінної із множини $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то вираз вигляду $f_j(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ називається формулою над M.*

Замиканням *множини* M *(позначається* $[M]$*) називається множина всіх тих булевих функцій, що можуть бути подані у вигляді формули над* M *.*

Властивості операції замикання:

1) $[\varnothing]=\varnothing$;
2) $M \subseteq [M]$;
3) $[[M]]=[M]$;
4) Якщо $M_1 \subseteq M_2$, то $[M_1] \subseteq [M_2]$;
5) $[M_1] \cup [M_2] \subseteq [M_1 \cup M_2]$.

Множина (система) булевих функцій M *називається* ***замкнутою****, якщо* $[M]=M$ *.*

Множину всіх існуючих булевих функцій позначимо через P_2 .

Множина (система) булевих функцій M *називається* ***повною****, якщо будь-яку булеву функцію з множини* P_2 *можна подати у вигляді формули над* M *.*

Основні повні системи функцій: P_2, $B=\{\bar{x}_1, x_1x_2, x_1 \vee x_2\}$, $B_1=\{\bar{x}_1, x_1x_2\}$, $B_2=\{\bar{x}_1, x_1 \vee x_2\}$.

Використовуючи поняття замикання, можна дати інше означення повноти системи булевих функцій: *множина (система) булевих функцій* M *називається* ***повною****, якщо* $[M]=P_2$.

Теорема зведення. *Нехай задано* 2 *системи булевих функцій –* $F=\{f_1, f_2, \ldots\}$ *і* $G=\{g_1, g_2, \ldots\}$, *причому система* F *повна і кожну її функцію можна подати у вигляді формули над* G. *Тоді система* G *теж є повною.*

Задача 2.1.1. Використовуючи теорему зведення, довести, що множина H є повною системою:

1) $H=\{0, m(x,y,z), x^y \oplus z\}$;
2) $H=\{x \to y, \overline{x \oplus y \oplus z}\}$;
3) $H=\{x_1x_2 \oplus x_3, (x_1 \sim x_2) \oplus x_3\}$.

Розв'язання.

1) Як відомо, $m(x,y,z)=xy\vee xz\vee yz$ – функція голосування. Позначимо інші функції системи H: $f_1=0$, $f_2(x,y,z)=x^y\oplus z$.

Візьмемо повну систему $B_1=\{\overline{x},\ xy\}$ і покажемо, що кожну її функцію можна подати у вигляді формули над H. Маємо:

$$\overline{x}=x^0\oplus 0=f_2(x,0,0)=f_2(x,f_1,f_1) \text{ – формула над } H,$$

$$xy=m(x,y,0)=m(x,y,f_1) \text{ – формула над } H.$$

Отже, за теоремою зведення, система H є повною. ■

2) Позначимо: $f_1(x,y)=x\to y$, $f_2(x,y,z)=\overline{x\oplus y\oplus z}$.

$B_2=\{\overline{x},\ x\vee y\}$ – повна система.

$$\overline{x}=\overline{x\oplus x\oplus x}=f_2(x,x,x) \text{ – формула над } H,$$

$$x\vee y=\overline{x}\to y=f_1(\overline{x},y)=f_1(f_2(x,x,x),y) \text{ – формула над } H.$$

За теоремою зведення, H – повна система. ■

3) Позначимо: $f_1(\widetilde{x}^3)=x_1x_2\oplus x_3$, $f_2(\widetilde{x}^3)=(x_1\sim x_2)\oplus x_3$.

$B_1=\{\overline{x}_1,\ x_1x_2\}$ – повна система.

$$\overline{x}_1=1\oplus x_1=(x_1\sim x_1)\oplus x_1=f_2(x_1,x_1,x_1) \text{ – формула над } H.$$

$x_1x_2=x_1x_2\oplus 0=f_1(x_1,x_2,0)$. Цей вираз буде формулою над H лише у випадку, якщо 0 є формулою над H. Покажемо, що 0 справді є формулою над H:

$$0=x_1x_1\oplus x_1=f_1(x_1,x_1,x_1) \text{ – формула над } H.$$

Отже, $x_1x_2=f_1(x_1,x_2,0)=f_1(x_1,x_2,f_1(x_1,x_1,x_1))$ – формула над H. За теоремою зведення, H – повна система. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.1.2. Використовуючи теорему зведення, довести, що множина H є повною системою:

1) $H=\{x_1\downarrow x_2\}$;

2) $H=\{x_1 / x_2\}$;

3) $H=\{x \sim y,\ x / y\}$;

4) $H=\{x \sim y,\ x \oplus y,\ xy \oplus z\}$;

5) $H=\{x \to y,\ (10110110)\}$;

6) $H=\{\bar{x}\bar{y} \vee z,\ (01111110)\}$.

2.2. Класи булевих функцій, що зберігають константи (класи T_0 і T_1)

Під класом розуміють множину булевих функцій, що мають спільну властивість.

Булева функція $f(\tilde{x}^n)$ ***зберігає константу*** **0**, *тобто належить до класу* T_0, *якщо* $f(0,0,\ldots,0)=0$.

Позначимо через $T_0(n)$ множину тих функцій класу T_0, що залежать від n змінних.

Кількість всеможливих булевих функцій від n *змінних, що належать класу* T_0, *обчислюється за формулою:*

$$|T_0(n)| = 2^{2^n-1} = \frac{1}{2}2^{2^n}.$$

Клас T_0 – *замкнутий* ($[T_0]=T_0$), *але не є повним* ($[T_0] \neq P_2$).

Булева функція $f(\tilde{x}^n)$ ***зберігає константу*** **1**, *тобто належить до класу* T_1, *якщо* $f(1,1,\ldots,1)=1$.

Позначимо через $T_1(n)$ множину тих функцій класу T_1, що залежать від n змінних.

Кількість всеможливих булевих функцій від n *змінних, що належать класу* T_1, *обчислюється за формулою:*

$$|T_1(n)| = 2^{2^n-1} = \frac{1}{2}2^{2^n}.$$

Клас T_1 – *замкнутий* ($[T_1]=T_1$), *але не є повним* ($[T_1] \neq P_2$).

Задача 2.2.1. З'ясувати, чи належить множинам $T_0 \cup T_1$, $T_0 \cap T_1$, $T_0 \setminus T_1$, $T_1 \setminus T_0$, $T_0 \, \Delta \, T_1$ булева функція

$$f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2) \to (x_1 / x_2 x_3)) \downarrow ((x_2 \sim x_3) \to x_1).$$

Розв'язання. З'ясуємо належність булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$ до класів T_0 і T_1:

$$f(0,0,0) = ((0 \vee 0) \to (0 / 0 \cdot 0)) \downarrow ((0 \sim 0) \to 0) =$$
$$= (0 \to 1) \downarrow (1 \to 0) = 1 \downarrow 0 = 0 \;\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^3) \in T_0,$$
$$f(1,1,1) = ((1 \vee 1) \to (1 / 1 \cdot 1)) \downarrow ((1 \sim 1) \to 1) =$$
$$= (1 \to 0) \downarrow (1 \to 1) = 0 \downarrow 1 = 0 \;\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^3) \notin T_1.$$

Оскільки $f(\widetilde{x}^3) \in T_0$ і $f(\widetilde{x}^3) \notin T_1$, отримуємо, що $f(\widetilde{x}^3) \in T_0 \cup T_1$, $f(\widetilde{x}^3) \notin T_0 \cap T_1$, $f(\widetilde{x}^3) \in T_0 \setminus T_1$, $f(\widetilde{x}^3) \notin T_1 \setminus T_0$, $f(\widetilde{x}^3) \in T_0 \, \Delta \, T_1$. ■

Задача 2.2.2. Знайти булеву функцію $f(x, x, \ldots, x)$, якщо $f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \setminus T_0$.

Розв'язання. За умовою, маємо:

$$f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \setminus T_0 \;\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \text{ і } f(\widetilde{x}^n) \notin T_0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(1,1,\ldots,1) = 1 \text{ і } f(0,0,\ldots,0) = 1.$$

$f(x, x, \ldots, x)$ – функція однієї змінної, тому введемо позначення:

$$\Phi(x) = f(x, x, \ldots, x).$$

Обчислимо стовпчик значень функції $\Phi(x)$:

$$\Phi(0) = f(0,0,\ldots,0) = 1, \; \Phi(1) = f(1,1,\ldots,1) = 1.$$

Звідси слідує, що $\Phi(x) \equiv 1$. Таким чином, $f(x, x, \ldots, x) \equiv 1$. ■

Задача 2.2.3. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у кожній із наступних множин:

1) $T_0 \cap T_1$;

2) $T_0 \cup T_1$.

Розв'язання.

1) Візьмемо довільну булеву функцію $f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \cap T_1$. Маємо:

$$f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \cap T_1 \;\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \text{ і } f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(0,0,\dots,0) = 0 \text{ і } f(1,1,\dots,1) = 1.$$

Таким чином, на двох двійкових наборах значення булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ відомі. На решті $2^n - 2$ двійкових наборах функція може набувати будь-яких значень. Всеможливими способами задаючи значення функції на цих двійкових наборах, отримаємо всеможливі шукані функції із множини $T_0 \cap T_1$. Отже,

$$|T_0(n) \cap T_1(n)| = \overline{R}_2^{\,2^n - 2} = 2^{2^n - 2} = \frac{1}{4} 2^{2^n}. \; \blacksquare$$

2) Скориставшись формулою включення-виключення для двох множин, з врахуванням 1) отримуємо:

$$|T_0(n) \cup T_1(n)| = |T_0(n)| + |T_1(n)| - |T_0(n) \cap T_1(n)| =$$
$$= \frac{1}{2} 2^{2^n} + \frac{1}{2} 2^{2^n} - \frac{1}{4} 2^{2^n} = \frac{3}{4} 2^{2^n} = 3 \cdot 2^{2^n - 2}. \; \blacksquare$$

Задача 2.2.4. З'ясувати, чи можна отримати функцію f за допомогою операцій суперпозиції над множиною Φ:

$$f = x \to y, \; \Phi = \{xy, x \vee y\}.$$

Розв'язання. Обидві функції системи Φ, очевидно, належать класу T_0. Тоді, внаслідок замкнутості класу T_0, будь-яка суперпозиція над Φ (формула над Φ) також буде належати класу T_0. А оскільки функція $f \notin T_0$, то її **не можна** буде отримати за допомогою операцій суперпозиції над множиною Φ.

($\Phi \subseteq T_0 \;\Rightarrow\; [\Phi] \subseteq [T_0] \;\Rightarrow\; [\Phi] \subseteq T_0$, а оскільки $f \notin T_0 \Rightarrow f \notin [\Phi]$).

Зауважимо також, що хоча $\Phi \subseteq T_1$ і $f \in T_1$, ніякий висновок на підставі цього зробити не вдасться. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.2.5. З'ясувати, чи належить множинам $T_0 \cup T_1$, $T_0 \cap T_1$, $T_0 \setminus T_1$, $T_1 \setminus T_0$, $T_0 \,\Delta\, T_1$ булева функція:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 x_2 \to x_3)/((x_1 \to x_2) \downarrow (x_3 \oplus \bar{x}_1 x_2))$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (10110110)$.

Задача 2.2.6. Знайти булеву функцію $f(x, x, \ldots, x)$, якщо:

1) $f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \setminus T_1$;

2) $f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \cap T_1$;

3) $f(\widetilde{x}^n) \notin T_0 \cup T_1$.

Задача 2.2.7. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у кожній із наступних множин:

1) $T_0 \setminus T_1$;

2) $T_1 \setminus T_0$.

Задача 2.2.8. З'ясувати, чи можна отримати функцію f за допомогою операцій суперпозиції над множиною Φ:

$$f = x \oplus y, \quad \Phi = \{x \to y\}.$$

2.3. Клас лінійних булевих функцій (клас L)

*Булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ називається **лінійною**, тобто належить до класу L, якщо її поліном Жегалкіна має вигляд:*

$$f(\widetilde{x}^n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n, \quad \text{де } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in E_2.$$

Позначимо через $L(n)$ множину тих функцій класу L, що залежать від n змінних.

Кількість всеможливих булевих функцій від n змінних, що *належать класу L, обчислюється за формулою:*

$$|L(n)| = 2^{n+1}.$$

Клас L – замкнутий ($[L] = L$), але не є повним ($[L] \neq P_2$).

Лема про нелінійну функцію. *Якщо булева функція $f(\widetilde{x}^n) \notin L$, то, підставляючи на місце її змінних лінійні функції 0, 1, x_1, $\overline{x}_1$, x_2, $\overline{x}_2$ та, при потребі, навішуючи заперечення над усією функцією, можна отримати нелінійну функцію $x_1 x_2$.*

Якщо булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ – лінійна, то отримати з неї вказаними в умові леми діями нелінійну функцію $x_1 x_2$ неможливо. Це випливає із замкнутості класу L.

Задача 2.3.1. З'ясувати, чи є лінійною булева функція

$$f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \downarrow \overline{x}_2) \sim (x_3 \vee \overline{x}_1).$$

Розв'язання. Побудувавши поліном Жегалкіна для цієї функції (див. п.1.6), отримаємо:

$$f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_3.$$

Поліном Жегалкіна містить кон'юнкції змінних ($x_1 x_2$ і $x_1 x_3$), тому дана функція не є лінійною: $f(\widetilde{x}^3) \notin L$. ■

Задача 2.3.2. Довести, що функцію $x \to y$ не можна отримати з функцій $f_1 = x \oplus y \oplus z$, $f_2 = x \oplus 1$, $f_1 = x \oplus y$ за допомогою операцій суперпозиції.

Розв'язання. Функції f_1, f_2, f_3, очевидно, є лінійними. Тоді, внаслідок замкнутості класу L, будь-яка суперпозиція цих функцій обов'язково належатиме класу L.

З'ясуємо, чи є лінійною функція $x \to y$. Побудуємо для неї поліном Жегалкіна методом еквівалентних перетворень:

$$x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{\overline{\overline{x} \vee y}} = \overline{x\,\overline{y}} = x\overline{y} \oplus 1 = x(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus 1.$$

Таким чином, функція $x \to y$ є нелінійною, а тому її **не можна** отримати з функцій f_1, f_2, f_3 за допомогою операцій суперпозиції. ■

Задача 2.3.3. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у кожній із наступних множин:

1) $T_0 \cap L$;

2) $T_0 \cup L$.

Розв'язання.

1) Розглянемо довільну функцію $f(\tilde{x}^n) \in T_0 \cap L$. Маємо:

$$f(\tilde{x}^n) \in T_0 \cap L \Rightarrow f(\tilde{x}^n) \in T_0 \text{ і } f(\tilde{x}^n) \in L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(0,0,\ldots,0) = 0 \text{ і } f(\tilde{x}^n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\tilde{x}^n) = a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n, \text{ де } a_1, a_2, \ldots, a_n \in E_2 = \{0,1\}.$$

Тоді всеможливими способами задаючи значення коефіцієнтів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, отримаємо всеможливі шукані функції із множини $T_0 \cap L$. Отже,

$$|T_0(n) \cap L(n)| = \overline{R}_2{}^n = 2^n. \; ■$$

2) Скориставшись формулою включення-виключення для двох множин, з врахуванням 1) отримуємо:

$$|T_0(n) \cup L(n)| = |T_0(n)| + |L(n)| - |T_0(n) \cap L(n)| =$$

$$= \frac{1}{2} 2^{2^n} + 2^{n+1} - 2^n = 2^{2^n - 1} + 2^n. \; ■$$

Задача 2.3.4. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних 0, 1, x_1, $\overline{x}_1$, x_2, $\overline{x}_2$ та, при потребі, навішуючи заперечення над усією функцією, отримати кон'юнкцію $x_1 x_2$? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

$$f(\tilde{x}^3) = (01111111).$$

Розв'язання. З'ясуємо, чи є функція $f(\widetilde{x}^3)$ лінійною. Будуємо поліном Жегалкіна методом еквівалентних перетворень, попередньо зобразивши булеву функцію у вигляді ДКНФ:

$$f(\widetilde{x}^3) \overset{ДКНФ}{====} x_1^{\bar{0}} \vee x_2^{\bar{0}} \vee x_3^{\bar{0}} = x_1 \vee x_2 \vee x_3 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3}} =$$

$$= \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1 = \ldots =$$

$$= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 .$$

Отже, $f(\widetilde{x}^3) \notin L$, тому, за лемою про нелінійну функцію, вказаними в умові діями з функції $f(\widetilde{x}^3)$ **можна** отримати кон'юнкцію x_1x_2. Знайдемо відповідну підстановку, використовуючи конструктивне доведення леми.

1) Групуємо доданки в поліномі:

$$f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2\underbrace{(x_3 \oplus 1)}_{f_1(x_3)} \oplus x_1\underbrace{(x_3 \oplus 1)}_{f_2(x_3)} \oplus x_2\underbrace{(x_3 \oplus 1)}_{f_3(x_3)} \oplus \underbrace{x_3}_{f_4(x_3)} .$$

2) Знаходимо набір, на якому функція $f_1(x_3)$ набуває значення 1. Очевидно, це набір $(\alpha_3) = (0)$.

3) Вводимо функцію $\Phi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, \alpha_3)$:

$$\Phi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, 0) = x_1x_2 \oplus \alpha x_1 \oplus \beta x_2 \oplus \gamma ,$$

де $\alpha = f_2(0) = 1,\ \beta = f_3(0) = 1,\ \gamma = f_4(0) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2}.$$

4) Вводимо функцію $\Psi(x_1, x_2) = \Phi(x_1 \oplus \beta, x_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha\beta \oplus \gamma$:

$$\Psi(x_1, x_2) = \Phi(x_1 \oplus 1, x_2 \oplus 1) \oplus 1 \oplus 0 = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1) \oplus$$

$$\oplus (x_1 \oplus 1) \oplus (x_2 \oplus 1) \oplus 1 = \ldots = x_1x_2 .$$

Отже,

$$x_1x_2 = \Psi(x_1, x_2) = \Phi(x_1 \oplus 1, x_2 \oplus 1) \oplus 1 = \Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \oplus 1 =$$

$$= f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0) \oplus 1 = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)},$$

тобто $x_1x_2 = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0)}$. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.3.5. З'ясувати, чи є лінійними наступні булеві функції:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2) \oplus x_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \sim \overline{x}_1 x_3$;
3) $m(\widetilde{x}^3) = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (00111100)$.

Задача 2.3.6. Довести, що функцію $x_1 \downarrow x_2$ не можна отримати з функцій $f_1 = \overline{x}_1$, $f_2 = x_2 \oplus x_3$, $f_3 = 1$ за допомогою операцій суперпозиції.

Задача 2.3.7. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у множині $L \setminus T_0$.

Задача 2.3.8. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних 0, 1, x_1, $\overline{x}_1$, x_2, $\overline{x}_2$ та, при потребі, навішуючи заперечення над усією функцією, отримати кон'юнкцію $x_1 x_2$? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (10011001)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3) \to (\overline{x}_2 \sim x_3)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 x_2 x_3 \oplus x_1 x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$.

2.4. Двоїсті функції. Клас самодвоїстих булевих функцій (клас S)

Двоїстою *до булевої функції* $f(\widetilde{x}^n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *називається булева функція* $f^*(\widetilde{x}^n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}$.

Із означення слідує, що якщо функція $f(\widetilde{x}^n)$ задається векторно, то для отримання векторного задання функції $f^*(\widetilde{x}^n)$ необхідно заперечити стовпчик значень функції $f(\widetilde{x}^n)$ і відобразити його симетрично відносно середини ("перевернути").

Має місце **властивість взаємності**: $f^{**}(\widetilde{x}^n) = f(\widetilde{x}^n)$.

Двійкові набори $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *і* $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ *називаються* ***протилежними***.

Протилежні двійкові набори розташовані в таблиці істинності симетрично відносно середини: протилежним до першого буде останній, до другого – передостанній, і т.д.

Булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ *називається* ***самодвоїстою****, тобто належить до класу* S*, якщо* $f(\widetilde{x}^n) = f^*(\widetilde{x}^n)$*, або, що те саме, якщо* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)}$.

З цього означення випливає **критерій самодвоїстості**: *булева функція є самодвоїстою тоді і тільки тоді, коли на всіх протилежних двійкових наборах вона набуває протилежних значень.*

Позначимо через $S(n)$ множину тих функцій класу S, що залежать від n змінних.

Кількість всеможливих булевих функцій від n *змінних, що належать класу* S*, обчислюється за формулою:*

$$|S(n)| = 2^{2^{n-1}} = \sqrt{2^{2^n}}\,.$$

Клас S *– замкнутий* ($[S] = S$)*, але не є повним* ($[S] \neq P_2$)*.*

Лема про несамодвоїсту функцію. *Якщо булева функція* $f(\widetilde{x}^n) \notin S$*, то, підставляючи на місце її змінних самодвоїсті функції* x *та* $\overline{x}$*, можна отримати несамодвоїсту функцію-константу, тобто* 0 *або* 1.

Якщо булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ – самодвоїста, то отримати з неї вказаними в умові леми діями константу неможливо. Це випливає із замкнутості класу S.

Задача 2.4.1. Побудувати двоїсті до наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \to x_2 x_3$

2) $f(\widetilde{x}^3) = (01011110)$;

3) $m(\widetilde{x}^3) = (00010111)$.

З'ясувати, чи є серед цих функцій самодвоїсті функції.

Розв'язання.

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \to x_2 x_3$. Тоді, за означенням,

$$f^*(\widetilde{x}^3) = \overline{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)} = \overline{\overline{x}_1 \to \overline{x}_2 \overline{x}_3} = \overline{x_1 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3} = \overline{x}_1 \overline{\overline{x}_2 \overline{x}_3} =$$
$$= \overline{x}_1 (x_2 \vee x_3).$$

Оскільки $f(0{,}0{,}0) = 0 \to 0 \cdot 0 = 1$, а $f^*(0{,}0{,}0) = \overline{0} \cdot (0 \vee 0) = 0$, то $f(\widetilde{x}^3) \neq f^*(\widetilde{x}^3)$, тобто функція $f(\widetilde{x}^3)$ не є самодвоїстою. ■

2) $f(\widetilde{x}^3) = (01011110)$. Заперечуємо стовпчик значень функції $f(\widetilde{x}^3)$: $\overline{f(\widetilde{x}^3)} = (10100001)$. Відобразивши стовпчик значень функції $\overline{f(\widetilde{x}^3)}$ симетрично відносно середини, отримуємо векторне задання двоїстої функції $f^*(\widetilde{x}^3)$: $f^*(\widetilde{x}^3) = (10000101)$.

Очевидно, $f(\widetilde{x}^3) \neq f^*(\widetilde{x}^3)$, тобто функція $f(\widetilde{x}^3)$ не є самодвоїстою. ■

3) $m(\widetilde{x}^3) = (00010111)$. Маємо:

$$\overline{m(\widetilde{x}^3)} = (11101000), \quad m^*(\widetilde{x}^3) = (00010111).$$

Очевидно, $m(\widetilde{x}^3) = m^*(\widetilde{x}^3)$, тобто функція голосування $m(\widetilde{x}^3)$ є самодвоїстою. ■

Задача 2.4.2. З'ясувати, чи є функція g двоїстою до функції f:

$$f(x, y) = x \to y, \; g(x, y) = y \to x.$$

Розв'язання. Необхідно з'ясувати, чи $g(x, y) = f^*(x, y)$.

Векторні задання функцій f і g мають вигляд: $f(x, y) = (1101)$, $g(x, y) = (1011)$.

Знаходимо двоїсту до f: $\overline{f(x,y)} = (0010)$, $f^*(x,y) = (0100)$.

Очевидно, $f^*(x,y) \neq g(x,y)$ ($(0100) \neq (1011)$), отже, функція $g(x,y)$ не є двоїстою до функції $f(x,y)$. ■

Задача 2.4.3. З'ясувати, чи є самодвоїстою булева функція $f(\tilde{x}^4) = (0001001001100111)$.

Розв'язання. Скористаємось критерієм самодвоїстості. Оскільки $f(0,1,0,0) = f(1,0,1,1) = 0$ ($f(\tilde{x}^4) = (0001\underline{0}01001\underline{0}0111)$), то дана функція не є самодвоїстою: $f(\tilde{x}^4) \notin S$. ■

Задача 2.4.4. Знайти функцію $f(x,x,\ldots,x)$, якщо $f(\tilde{x}^n) \in S$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(\tilde{x}^n)$ – самодвоїста, то

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \overline{f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)}. \qquad \textbf{(2.4.1)}$$

$f(x,x,\ldots,x)$ – функція однієї змінної, тому введемо позначення:

$$\Phi(x) = f(x,x,\ldots,x).$$

Тоді $\Phi(0) = f(0,0,\ldots,0)$, $\Phi(1) = f(1,1,\ldots,1) \overset{(2.4.1)}{=} \overline{f(0,0,\ldots,0)}$.

Позначивши $f(0,0,\ldots,0) = \alpha$, маємо:

$$\Phi(0) = \alpha,\ \Phi(1) = \bar{\alpha}.$$

Оскільки $\alpha \in E_2 = \{0,1\}$, можливі 2 випадки.

1) $\alpha = 0$. В цьому випадку $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$, звідки слідує, що $\Phi(x) = x$, тобто $f(x,x,\ldots,x) = x$.
2) $\alpha = 1$. В цьому випадку $\Phi(0) = 1$, $\Phi(1) = 0$, звідки слідує, що $\Phi(x) = \bar{x}$, тобто $f(x,x,\ldots,x) = \bar{x}$.

Отже, $f(x,x,\ldots,x) = x$ або $f(x,x,\ldots,x) = \bar{x}$. ■

Задача 2.4.5. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1,x_2,\ldots,x_n$ у кожній із наступних множин:

1) $T_1 \cap S$;

2) $S \setminus T_1$;

3) $T_1 \setminus S$.

Розв'язання.

1) Розглянемо довільну функцію $f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \cap S_1$. Маємо:

$$f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \cap S \;\Rightarrow\; f(\widetilde{x}^n) \in T_1 \text{ і } f(\widetilde{x}^n) \in S \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(1,1,\ldots,1) = 1 \text{ і } f(\widetilde{x}^n) \in S .$$

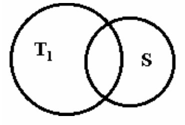
Оскільки самодвоїста функція на всіх протилежних двійкових наборах набуває протилежних значень, додатково отримуємо, що $f(0,0,\ldots,0) = 0$. Таким чином, значення функції $f(\widetilde{x}^n)$ на $2^n - 2$ двійкових наборах невідомі, але на протилежних двійкових наборах значення цієї функції обов'язково повинні бути протилежними. Тому функцію $f(\widetilde{x}^n)$ слід довизначити лише на половині цих наборів. Всеможливими способами задаючи значення функції на цих $(2^n - 2)/2$ двійкових наборах, отримаємо всеможливі шукані функції із множини $T_1 \cap S$. Отже,

$$| T_1(n) \cap S(n) | = \overline{R}_2^{(2^n - 2)/2} = 2^{2^{n-1} - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}} . \;\blacksquare$$

2) Міркуючи аналогічно випадку 1), отримуємо:

$$| S(n) \setminus T_1(n) | = \overline{R}_2^{(2^n - 2)/2} = 2^{2^{n-1} - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}} . \;\blacksquare$$

3) Оскільки $x \in T_1$ і $x \in S$, $1 \in T_1$ і $1 \notin S$, $\overline{x} \notin T_1$ і $\overline{x} \in S$, то взаємне розташування множин T_1 і S має вигляд:



Тоді, очевидно,

$$| T_1(n) \setminus S(n) | = | T_1(n) | - | T_1(n) \cap S(n) | = \frac{1}{2} 2^{2^n} - \frac{1}{2}\sqrt{2^{2^n}} =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ 2^{2^n}-\sqrt{2^{2^n}}\ \right).\ \blacksquare$$

Задача 2.4.6. З’ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних x та $\bar{x}$, отримати константу? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

$$f(\widetilde{x}^3)=(00110111).$$

Розв’язання. Оскільки $f(0,1,0)=f(1,0,1)=1$, то $f(\widetilde{x}^3)\notin S$. Отже, за лемою про несамодвоїсту функцію, вказаними в умові діями з функції $f(\widetilde{x}^3)$ **можна** отримати константу **1**. Відповідні підстановки, побудовані на основі знайдених двійкових наборів, мають вигляд:

$$f(x^0,x^1,x^0)=f(\bar{x},x,\bar{x}) \text{ і } f(x^1,x^0,x^1)=f(x,\bar{x},x).$$

Таким чином, $f(\bar{x},x,\bar{x})\equiv 1$ і $f(x,\bar{x},x)\equiv 1$. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.4.7. Побудувати двоїсті до наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3)=(x_1\oplus x_2)\downarrow \bar{x}_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3)=(01101110)$.

Задача 2.4.8. З’ясувати, чи є функція g двоїстою до функції f:

1) $f(x,y)=x\oplus y$, $g(x,y)=x\sim y$;

2) $f(x,y,z)=(10000111)$, $g(x,y,z)=(00011100)$;

3) $f(x,y,z)=xy\vee xz\vee yz$, $g(x,y,z)=xy\oplus xz\oplus yz$;

4) $f(x,y,z)=\bar{x}\bar{y}z\vee x(y\sim z)$, $g(x,y,z)=(01101101)$.

Задача 2.4.9. З’ясувати, чи є самодвоїстими наступні булеві функції:

1) $f(\widetilde{x}^4)=(\bar{x}_1\vee x_2\vee \bar{x}_3)x_4\vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (00011111)$;

3) $f(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$.

Задача 2.4.10. Знайти функцію $f(x, x, \ldots, x)$, якщо:

1) $f(\widetilde{x}^n) \in S \cap T_0$;

2) $f(\widetilde{x}^n) \in S \cap T_1$;

3) $f(\widetilde{x}^n) \in S \setminus T_0$;

4) $f(\widetilde{x}^n) \in S \setminus T_1$;

5) $f(\widetilde{x}^n) \in S \setminus (T_0 \cup T_1)$;

6) $f(\widetilde{x}^n) \in S \setminus (T_0 \cap T_1)$.

Задача 2.4.11. Обчислити кількість булевих функцій від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ у кожній із наступних множин:

1) $S \cap T_0$;

2) $S \setminus T_0$;

3) $T_0 \setminus S$;

4) $S \cap T_0 \cap T_1$;

5) $S \setminus (T_0 \cap T_1)$;

6) $S \cup (T_0 \cap T_1)$.

Задача 2.4.12. З'ясувати, чи можна з функції f за допомогою операції суперпозиції отримати функцію g:

$$f = (10110010),\ g = (1000).$$

Задача 2.4.13. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних x та $\bar{x}$, отримати константу? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (10000110)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (10010110)$.

2.5. Клас монотонних булевих функцій (клас M)

Двійковий набір $\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ***передує*** *двійковому набору* $\widetilde{\beta}^n = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ *(позначається* $\widetilde{\alpha}^n << \widetilde{\beta}^n$*), якщо* $\alpha_i \le \beta_i$ *для всіх* $i = \overline{1, n}$.

Булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ *називається* ***монотонною****, тобто належить до класу* M*, якщо для всіх наборів* $\widetilde{\alpha}^n$ *і* $\widetilde{\beta}^n$*, таких, що* $\widetilde{\alpha}^n << \widetilde{\beta}^n$*, виконується нерівність* $f(\widetilde{\alpha}^n) \le f(\widetilde{\beta}^n)$.

Із означення випливає, що $f(\widetilde{x}^n) \notin M$, якщо знайдуться набори $\widetilde{\alpha}^n$ *і* $\widetilde{\beta}^n$, $\widetilde{\alpha}^n << \widetilde{\beta}^n$, для яких $f(\widetilde{\alpha}^n) > f(\widetilde{\beta}^n)$.

Клас M *– замкнутий* ($[M] = M$)*, але не є повним* ($[M] \ne P_2$).

Лема про немонотонну функцію. *Якщо булева функція* $f(\widetilde{x}^n) \notin M$*, то, підставляючи на місце її змінних монотонні функції* 0*,* 1 *та* x*, можна отримати немонотонну функцію* $\overline{x}$.

Якщо булева функція $f(\widetilde{x}^n)$ – монотонна, то отримати з неї вказаними в умові леми діями немонотонну функцію $\overline{x}$ неможливо. Це випливає із замкнутості класу M.

Задача 2.5.1. З’ясувати, чи є монотонною булева функція $f(\widetilde{x}^3) = (01110101)$.

Розв’язання. Будуємо таблицю істинності заданої функції:

x_1	x_2	x_3	$f(\widetilde{x}^3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Послідовно переберемо всеможливі пари двійкових наборів. Якщо для наборів є передування, порівнюємо значення функції.

$(0,0,0) << (0,0,1)$, $f(0,0,0) = 0 \le 1 = f(0,0,1)$;
$(0,0,0) << (0,1,0)$, $f(0,0,0) = 0 \le 1 = f(0,1,0)$;
$(0,0,0) << (0,1,1)$, $f(0,0,0) = 0 \le 1 = f(0,1,1)$;
$(0,0,0) << (1,0,0)$, $f(0,0,0) = 0 \le 0 = f(1,0,0)$;
$(0,0,0) << (1,0,1)$, $f(0,0,0) = 0 \le 1 = f(1,0,1)$;
$(0,0,0) << (1,1,0)$, $f(0,0,0) = 0 \le 0 = f(1,1,0)$;
$(0,0,0) << (1,1,1)$, $f(0,0,0) = 0 \le 1 = f(1,1,1)$;

$(0,0,1)$ не передує $(0,1,0)$;
$(0,0,1) << (0,1,1)$, $f(0,0,1) = 1 \le 1 = f(0,1,1)$;
$(0,0,1)$ не передує $(1,0,0)$;
$(0,0,1) << (1,0,1)$, $f(0,0,1) = 1 \le 1 = f(1,0,1)$;
$(0,0,1)$ не передує $(1,1,0)$;
$(0,0,1) << (1,1,1)$, $f(0,0,1) = 1 \le 1 = f(1,1,1)$;

$(0,1,0) << (0,1,1)$, $f(0,1,0) = 1 \le 1 = f(0,1,1)$;
$(0,1,0)$ не передує $(1,0,0)$;
$(0,1,0)$ не передує $(1,0,1)$;
$\underline{(0,1,0) << (1,1,0)}$, $\underline{f(0,1,0) = 1 > 0 = f(1,1,0)}$.

Оскільки $(0,1,0) << (1,1,0)$, а $f(0,1,0) = 1 > 0 = f(1,1,0)$, звідси слідує, що задана функція не є монотонною: $f(\tilde{x}^3) \notin M$. ■

Задача 2.5.2. Знайти функцію $f(\tilde{x}^n)$, якщо $f(\tilde{x}^n) \in M \setminus T_0$.

Розв'язання. З умови маємо:

$$f(\tilde{x}^n) \in M \setminus T_0 \;\Rightarrow\; f(\tilde{x}^n) \in M \text{ і } f(\tilde{x}^n) \notin T_0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(\tilde{x}^n) \in M \text{ і } f(0,0,\ldots,0) = 1.$$

Оскільки двійковий набір $(0,0,\ldots,0)$ передує всім нижче розташованим двійковим наборам і $f(0,0,\ldots,0) = 1$, з монотонності функції $f(\widetilde{x}^n)$ слідує, що її значення на всіх цих наборах також дорівнюють 1. Таким чином, $f(\widetilde{x}^n) \equiv 1$. ■

Задача 2.5.3. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних 0, 1 та x, отримати функцію $\overline{x}$? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

$$f(\widetilde{x}^3) = (01111011).$$

Розв'язання. Оскільки $(0,0,1) << (1,0,1)$, а $f(0,0,1) = 1 > > 0 = f(1,0,1)$, то $f(\widetilde{x}^3) \notin M$. Отже, за лемою про немонотонну функцію, вказаними в умові діями з функції $f(\widetilde{x}^3)$ **можна** отримати функцію $\overline{x}$. Знайдемо відповідну підстановку, використовуючи конструктивне доведення леми.

Шукаємо двійкові набори $\widetilde{\alpha}^3$ і $\widetilde{\widetilde{\alpha}}^3$, які є **сусідніми** за деякою координатою і на яких порушується умова монотонності, тобто $\widetilde{\alpha}^3 << \widetilde{\widetilde{\alpha}}^3$, але $f(\widetilde{\alpha}^3) > f(\widetilde{\widetilde{\alpha}}^3)$. Цими наборами, очевидно, є набори $(\mathbf{0},0,1)$ і $(\mathbf{1},0,1)$ (або набори $(1,0,\mathbf{0})$ і $(1,0,\mathbf{1})$). Тоді відповідна підстановка матиме вигляд $f(x,0,1)$ (або $f(1,0,x)$).

Таким чином, $\overline{x} = f(x,0,1)$ або $\overline{x} = f(1,0,x)$. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.5.4. З'ясувати, чи є монотонними наступні булеві функції:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (00110111)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (01100111)$;
3) $f(\widetilde{x}^4) = (0001010101010111)$.

Задача 2.5.5. Знайти функцію $f(\widetilde{x}^n)$, якщо $f(\widetilde{x}^n) \in M \setminus T_1$.

Задача 2.5.6. З'ясувати, чи можна з функції f, підставляючи на місце її змінних 0, 1 та x, отримати функцію $\overline{x}$? Якщо так, вказати необхідну підстановку.

1) $f(\widetilde{x}^3) = (01111101)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (01100111)$.

Задача 2.5.6. Знайти всеможливі булеві функції, що задовольняють умови:

1) $f(\widetilde{x}^3) \in M$, $f(1,0,0) = 1$, $f(\widetilde{x}^3) \in S$;

2) $f(\widetilde{x}^3) \in M$, $f(0,0,1) = 1$, $f(0,1,0) = 1$;

3) $f(\widetilde{x}^4) \in M$, $f(1,0,0,0) = 1$, $f(0,1,1,1) = 0$;

4) $f(\widetilde{x}^4) \in M$, $f(1,1,0,1) = 0$, $f(\widetilde{x}^4) \in S$;

5) $f(\widetilde{x}^4) \in M$, $f(1,0,0,0) = 1$, $f(\widetilde{x}^4) \in L$.

2.6. Критерій повноти систем булевих функцій

Теорема Поста (критерій повноти). *Для того, щоб система булевих функцій H була повною, необхідно і досить, щоб вона не містилася повністю в жодному з класів T_0, T_1, L, S, M:*

$$[H] = P_2 \iff H \not\subseteq T_0,\ H \not\subseteq T_1,\ H \not\subseteq L,\ H \not\subseteq S,\ H \not\subseteq M\,.$$

Задача 2.6.1. Використовуючи критерій повноти, з'ясувати, чи є повними наступні системи булевих функцій:

1) $H = \{x_1 \vee x_2,\ x_1 x_2,\ x_1 \to x_2\}$

2) $H = \{x\overline{y},\ x \sim yz\}$;

3) $H = \{(01101001), (10001101), (00011100)\}$.

Розв'язання.

1) Позначимо функції системи H:

$f_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $f_3(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$.

а) З'ясуємо, чи міститься система H в класі T_0. Маємо:

$$f_1(0,0) = 0 \vee 0 = 0 \;\Rightarrow\; f_1(x_1, x_2) \in T_0,$$

$$f_2(0,0) = 0 \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; f_2(x_1, x_2) \in T_0,$$

$$f_3(0,0) = 0 \to 0 = 1 \;\Rightarrow\; f_3(x_1, x_2) \notin T_0 \;\Rightarrow\; \boxed{H \not\subseteq T_0}.$$

б) З'ясуємо, чи міститься система H в класі T_1. Маємо:

$$f_1(1,1) = 1 \vee 1 = 1 \;\Rightarrow\; f_1(x_1, x_2) \in T_1,$$

$$f_2(1,1) = 1 \cdot 1 = 1 \;\Rightarrow\; f_2(x_1, x_2) \in T_1,$$

$$f_3(1,1) = 1 \to 1 = 1 \;\Rightarrow\; f_3(x_1, x_2) \in T_1.$$

Оскільки всі функції системи H належать класу T_1, то система H міститься повністю в класі T_1: $\boxed{H \subseteq T_1}$. Тоді, за теоремою Поста, система H **не є повною**. ■

2) Позначимо функції системи H:

$$f(x, y) = x\overline{y}, \quad g(x, y, z) = x \sim yz.$$

а) $H \subseteq T_0$ – ?

$$f(0,0) = 0 \cdot \overline{0} = 0 \;\Rightarrow\; f(x, y) \in T_0,$$

$$g(0,0,0) = 0 \sim 0 \cdot 0 = 1 \;\Rightarrow\; g(x, y, z) \notin T_0 \;\Rightarrow\; \boxed{H \not\subseteq T_0}.$$

б) $H \subseteq T_1$ – ?

$$f(1,1) = 1 \cdot \overline{1} = 0 \;\Rightarrow\; f(x, y) \notin T_1 \;\Rightarrow\; \boxed{H \not\subseteq T_1}.$$

в) $H \subseteq S$ – ?

x_1	x_2	$f(x,y) = x\overline{y}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

$$f(0,0) = f(1,1) = 0 \;\Rightarrow\; \Rightarrow\; f(x, y) \notin S \;\Rightarrow\; \Rightarrow\; \boxed{H \not\subseteq S}.$$

г) $H \subseteq M$ – ?

$(1,0) << (1,1)$, а $f(1,0) = 1 > 0 = f(1,1) \;\Rightarrow\; f(x, y) \notin M \;\Rightarrow$
$\Rightarrow\; \boxed{H \not\subseteq M}$.

д) $H \subseteq L$ – ?

$$f(x,y) = x\overline{y} = x(y \oplus 1) = xy \oplus x \;\Rightarrow\; f(x,y) \notin L \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H \not\subseteq L}.$$

Отже, за теоремою Поста, система H **є повною**. ■

3) Позначимо функції системи H:

$f_1(\widetilde{x}^3) = (01101001)$, $f_2(\widetilde{x}^3) = (10001101)$, $f_3(\widetilde{x}^3) = (00011100)$.

а) $H \subseteq T_0$ – ?

$$f_1(0,0,0) = 0 \;\Rightarrow\; f_1(\widetilde{x}^3) \in T_0,$$

$$f_2(0,0,0) = 1 \;\Rightarrow\; f_2(\widetilde{x}^3) \notin T_0 \;\Rightarrow\; \boxed{H \not\subseteq T_0}.$$

б) $H \subseteq T_1$ – ?

$$f_1(1,1,1) = 1 \;\Rightarrow\; f_1(\widetilde{x}^3) \in T_1,$$

$$f_2(1,1,1) = 1 \;\Rightarrow\; f_2(\widetilde{x}^3) \in T_1,$$

$$f_3(1,1,1) = 0 \;\Rightarrow\; f_3(\widetilde{x}^3) \notin T_1 \;\Rightarrow\; \boxed{H \not\subseteq T_1}.$$

в) $H \subseteq S$ – ?

$$f_1(\widetilde{x}^3) \in S,$$

$$f_2(0,0,0) = f_2(1,1,1) = 1 \;\Rightarrow\; f_2(\widetilde{x}^3) \notin S \;\Rightarrow\; \boxed{H \not\subseteq S}.$$

г) $H \subseteq M$ – ?

$(0,0,1) << (0,1,1)$, а $f_1(0,0,1) = 1 > 0 = f_1(0,1,1) \;\Rightarrow$

$$\Rightarrow\; f_1(\widetilde{x}^3) \notin M \;\Rightarrow\; \boxed{H \not\subseteq M}.$$

д) $H \subseteq L$ – ?

Будуючи поліноми Жегалкіна методом невизначених коефіцієнтів, отримуємо:

$$f_1(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \;\Rightarrow\; f_1(\widetilde{x}^3) \in L,$$

$$f_2(\widetilde{x}^3) = 1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \;\Rightarrow\; f_2(\widetilde{x}^3) \notin L \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{H \not\subseteq L}.$$

Отже, за теоремою Поста, система H **є повною**. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 2.6.2. Використовуючи критерій повноти, з'ясувати, чи є повними наступні системи булевих функцій:

1) $H = \{\bar{x},\ m(x, y, z)\}$;
2) $H = \{0,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \sim x_2\}$;
3) $H = \{x \to y,\ x \to \bar{y}z\}$;
4) $H = \{0,\ 1,\ x(y \sim z) \vee \bar{x}(y \oplus z)\}$;
5) $H = \{(00111111), (11100110)\}$.

ТЕМА 3. МІНІМІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

3.1. Поняття імпліканти, простої імпліканти, скороченої ДНФ

Функція $f_1(\tilde{x}^n)$ називається ***імплікантою*** *функції $f_2(\tilde{x}^n)$, якщо виконується співвідношення: $f_1(\tilde{x}^n) \to f_2(\tilde{x}^n) \equiv 1$.*

Елементарна кон'юнкція K називається ***простою імплікантою*** *булевої функції $f(\tilde{x}^n)$, якщо:*

1) *вона є імплікантою функції $f(\tilde{x}^n)$;*
2) *при відкиданні з неї будь-якої змінної отримується елементарна кон'юнкція, що вже не є імплікантою функції $f(\tilde{x}^n)$.*

Теорема. *Нехай $K_1, K_2, \ldots, K_p$ – <u>всеможливі</u> прості імпліканти булевої функції $f(\tilde{x}^n)$. Тоді має місце рівність:*

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p.$$

Інакше кажучи, будь-яку булеву функцію можна подати у вигляді диз'юнкції <u>всіх</u> її простих імплікант.

Скороченою ДНФ *(СДНФ) булевої функції $f(\tilde{x}^n)$ називається диз'юнкція <u>всіх</u> простих імплікант цієї булевої функції.*

Для кожної булевої функції існує єдина СДНФ.

Задача 3.1.1. У заданій множині елементарних кон'юнкцій K знайти прості імпліканти булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$:

$$K = \{x_1, \bar{x}_3, x_1x_2, x_2\bar{x}_3\}, \quad f(\widetilde{x}^3) = (00101111).$$

Розв'язання. Позначимо елементарні кон'юнкції системи K:

$$K_1 = x_1,\ K_2 = \bar{x}_3,\ K_3 = x_1x_2,\ K_4 = x_2\bar{x}_3.$$

Побудуємо таблицю істинності булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$ і всі подальші обчислення здійснюватимемо таблично.

1) Дослідимо елементарну кон'юнкцію $K_1 = x_1$.

$K_1 \to f(\widetilde{x}^3) \equiv 1 \ \Rightarrow\ K_1$ **є імплікантою** функції $f(\widetilde{x}^3)$.

Відкинемо в елементарній кон'юнкції K_1 змінну x_1. Отримаємо елементарну кон'юнкцію $K_1^{(1)} = 1$.

$K_1^{(1)} \to f(\widetilde{x}^3) \neq 1 \ \Rightarrow\ K_1^{(1)}$ <u>не є імплікантою</u> функції $f(\widetilde{x}^3)$.

Отже, за означенням, K_1 **є простою імплікантою** функції $f(\widetilde{x}^3)$.

2) Дослідимо елементарну кон'юнкцію $K_2 = \bar{x}_3$.

$K_2 \to f(\widetilde{x}^3) \neq 1 \ \Rightarrow\ K_2$ **не є імплікантою** функції $f(\widetilde{x}^3)$.

Отже, K_2 **не є простою імплікантою** функції $f(\widetilde{x}^3)$, бо вона взагалі не є імплікантою цієї функції.

3) Дослідимо елементарну кон'юнкцію $K_3 = x_1x_2$.

$K_3 \to f(\widetilde{x}^3) \equiv 1 \ \Rightarrow\ K_3$ **є імплікантою** функції $f(\widetilde{x}^3)$.

а) Відкинемо в елементарній кон'юнкції K_3 змінну x_1. Отримаємо елементарну кон'юнкцію $K_3^{(1)} = x_2$.

$K_3^{(1)} \to f(\widetilde{x}^3) \neq 1 \ \Rightarrow\ K_3^{(1)}$ <u>не є імплікантою</u> функції $f(\widetilde{x}^3)$.

б) Відкинемо в елементарній кон'юнкції K_3 змінну x_2. Отримаємо елементарну кон'юнкцію $K_3^{(2)} = x_1 = K_1$, яка, як було дослiджено вище, <u>є iмплiкантою</u> функцiї $f(\widetilde{x}^3)$.

Отже, iмплiканта K_3 **не є простою iмплiкантою** функцiї $f(\widetilde{x}^3)$ (K_3 **є iмплiкантою,** але ця iмплiканта **не є простою**).

4) Дослiдимо елементарну кон'юнкцiю $K_4 = x_2\bar{x}_3$.

$K_4 \to f(\widetilde{x}^3) \equiv 1 \Rightarrow K_4$ **є iмплiкантою** функцiї $f(\widetilde{x}^3)$.

а) Вiдкинемо в елементарнiй кон'юнкцiї K_4 змiнну x_2. Отримаємо елементарну кон'юнкцiю $K_4^{(1)} = \bar{x}_3 = K_2$, яка, як було дослiджено вище, <u>не є iмплiкантою</u> функцiї $f(\widetilde{x}^3)$.

б) Вiдкинемо в елементарнiй кон'юнкцiї K_4 змiнну x_3. Отримаємо елементарну кон'юнкцiю $K_4^{(2)} = x_2 = K_3^{(1)}$, яка, як було дослiджено вище, <u>не є iмплiкантою</u> функцiї $f(\widetilde{x}^3)$.

Отже, за означенням, K_4 **є простою iмплiкантою** функцiї $f(\widetilde{x}^3)$.

Таблиця з викладками:

x_1	x_2	x_3	$f(\widetilde{x}^3)$	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Тут $A = K_1 \to f(\widetilde{x}^3)$, $B = K_1^{(1)} \to f(\widetilde{x}^3)$, $C = K_2 \to f(\widetilde{x}^3)$, $D = K_3 \to f(\widetilde{x}^3)$, $E = K_3^{(1)} \to f(\widetilde{x}^3)$, $F = K_4 \to f(\widetilde{x}^3)$.

Вiдповiдь: $K_1 = x_1$ i $K_4 = x_2\bar{x}_3$ – простi iмплiканти заданої булевої функцiї $f(\widetilde{x}^3)$. ■

Задачі для самостійної роботи

Задача 3.1.2. У заданій множині елементарних кон’юнкцій K знайти прості імпліканти булевої функції $f(\tilde{x}^n)$:

$$K = \{x_1, x_1\bar{x}_2x_3, x_1\bar{x}_2, \bar{x}_1x_2\}, \quad f(\tilde{x}^3) = (01111110).$$

3.2. Побудова скороченої ДНФ методом Нельсона

Метод Нельсона – найпростіший метод побудови скороченої ДНФ, що базується на наступному твердженні.

Теорема Нельсона. *Якщо в будь-якій КНФ булевої функції* $f(\tilde{x}^n)$ *розкрити всі дужки, використовуючи дистрибутивність кон’юнкції відносно диз’юнкції* $a(b \vee c) = ab \vee ac$, *і виконати всеможливі операції поглинання* $p \vee pq = p$, *отримається скорочена ДНФ цієї булевої функції.*

Для зменшення громіздкості викладок, операції поглинання доцільно виконувати після кожного розкриття дужок.

Задача 3.2.1. Методом Нельсона побудувати скорочені ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;

2) $f(\tilde{x}^3) = (10011101)$.

Розв’язання.

1) Булеву функцію задано у вигляді КНФ. Тоді маємо:

$$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) =$$

$$= (0 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_2 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee 0)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) =$$

$$= (x_1x_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) =$$

$$= x_1\bar{x}_2x_3 \vee 0 \vee 0 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 =$$

$$= x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \ \text{– СДНФ.} \ \blacksquare$$

2) Зобразивши булеву функцію у вигляді ДКНФ, маємо:

$$f(\tilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) =$$
$$= (x_1 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_1x_2 \vee 0 \vee x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee 0) \wedge$$
$$\wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) =$$
$$= 0 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \bar{x}_1x_2x_3 \vee 0 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee 0 =$$
$$= x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \text{ – СДНФ. } \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 3.2.2. Методом Нельсона побудувати скорочені ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \bar{x}_3)(\bar{x}_2 \vee x_3)$;
2) $f(\tilde{x}^4) = (x_1 \vee x_4)(x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4)(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (10001111)$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (10110001)$.

3.3. Побудова скороченої ДНФ методом Квайна

Метод Квайна базується на наступному твердженні.

Теорема Квайна. *Якщо в ДДНФ булевої функції $f(\tilde{x}^n)$ послідовно виконувати всеможливі операції неповного склеювання $px \vee p\bar{x} = p$ та поглинання $p \vee pq = p$, через скінченне число кроків процес завершиться і отримається скорочена ДНФ цієї булевої функції.*

На кожному кроці після виконання всеможливих склеювань (і, відповідно, перед виконанням всеможливих поглинань) до отриманого виразу слід також додавати елементарні кон'юнкції, що не брали участі в жодному склеюванні.

Для полегшення контролю за процесом викладок, на початку кожного кроку кон'юнкції нумерують. Якщо кон'юнкція бере участь хоча б у одному склеюванні, її номер обводять кружечком.

Задача 3.3.1. Методом Квайна побудувати скорочену ДНФ булевої функції $f(\tilde{x}^3) = (11101010)$.

Розв'язання. Зобразивши булеву функцію у вигляді ДДНФ, маємо:

$$f(\tilde{x}^3) = \overset{(1)}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3} \vee \overset{(2)}{\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3} \vee \overset{(3)}{\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3} \vee \overset{(4)}{x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3} \vee \overset{(5)}{x_1 x_2 \bar{x}_3} =$$

$$= \overset{1-2}{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \vee \overset{1-3}{\bar{x}_1 \bar{x}_3} \vee \overset{1-4}{\bar{x}_2 \bar{x}_3} \vee \overset{3-5}{x_2 \bar{x}_3} \vee \overset{4-5}{x_1 \bar{x}_3} =$$

$$= \overset{1}{\bar{x}_1 \bar{x}_2} \vee \overset{(2)}{\bar{x}_1 \bar{x}_3} \vee \overset{(3)}{\bar{x}_2 \bar{x}_3} \vee \overset{(4)}{x_2 \bar{x}_3} \vee \overset{(5)}{x_1 \bar{x}_3} =$$

$$= \overset{2-5}{\bar{x}_3} \vee \overset{3-4}{\bar{x}_3} \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 =$$

$$= \overset{1}{\bar{x}_3} \vee \overset{2}{\bar{x}_1 \bar{x}_2} =$$

$$= \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \text{ – СДНФ. } \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 3.3.2. Методом Квайна побудувати скорочені ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^3) = (10001111)$;
2) $f(\tilde{x}^3) = (00111111)$;
3) $f(\tilde{x}^3) = (11110110)$;
4) $f(\tilde{x}^3) = (11101101)$.

3.4. Побудова скороченої ДНФ методом Мак-Класки

Якщо булева функція залежить від чотирьох чи більше змінних, викладки методу Квайна стають досить громіздкими. Мак-Класки запропонував модифікацію методу Квайна, що базується на зображенні елементарних кон'юнкцій у вигляді двійкових номерів: якщо змінна входить у елементарну кон'юнкцію без заперечення, у відповідному розряді двійкового номера пишеться `1`, якщо з запереченням – `0`, якщо взагалі не входить – прочерк.

Нехай, наприклад, вихідна булева функція залежала від п'яти змінних, тоді кон'юнкції $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4\overline{x}_5$ відповідатиме двійковий номер `10010`, а кон'юнкції $\overline{x}_1x_3x_4$ – двійковий номер `0-11-`.

Очевидно, для конституент одиниці (елементарних кон'юнкцій із ДДНФ) двійкові номери формально співпадатимуть з двійковими наборами, за якими будувалися ці конституенти.

Кількість одиниць у двійковому номері називається ***індексом*** *цього номера*.

У методі Мак-Класки всі двійкові номери розбивають на групи згідно індексу.

Оскільки умовою склеювання в методі Квайна є те, що елементарні кон'юнкції повинні відрізнятися між собою способом входження тільки однієї змінної, **умова склеювання в термінах двійкових номерів** має вигляд: *склеюватися будуть лише ті двійкові номери, у яких співпадають всі значущі розряди, крім одного* (наприклад, двійкові номери `1-100` і `1-110` будуть склеюватися за четвертим розрядом і результатом цього склеювання буде двійковий номер `1-1-0`). Звідси, в свою чергу, випливає, що *склеюватися можуть лише ті двійкові номери, індекси яких відрізняються на* 1.

Метод Мак-Класки – метод Квайна у табличному вигляді. При цьому наявність зірочки біля двійкового номера буде ознакою його участі хоча б у одному склеюванні.

Всеможливі поглинання на кожному кроці слід виконувати як між двійковими номерами однакового індексу, так і між двійковими номерами різних індексів.

Задача 3.4.1. Методом Мак-Класки побудувати скорочену ДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^4) = (1100000011111111)$.

Розв'язання. Побудувавши таблицю істинності булевої функції, знаходимо двійкові номери для конституент одиниці та обчислюємо їх індекси (вказані в дужках): 0000 (0), 0001 (1), 1000 (1), 1001 (2), 1010 (2), 1011 (3), 1100 (2), 1101 (3), 1110 (3), 1111 (4).

Заповнюємо таблицю і виконуємо викладки методу Квайна:

	Двійкові номери						
Індекси	**Початкові (ДДНФ)**	**Крок 1**		**Крок 2**		**Крок 3**	
		Результат всеможл. склеювань	Результат всеможл. поглинань (ДНФ)	Результат всеможл. склеювань	Результат всеможл. поглинань (ДНФ)	Результат всеможл. склеювань	Результат всеможл. поглинань (СДНФ)
0	0000 *	000- -000	000- * -000 *	-00- -00-	-00-	-00-	-00-
1	0001 * 1000 *	-001 100- 10-0 1-00	-001 * 100- * 10-0 * 1-00 *	10-- 1-0- 10-- 1--0 1-0- 1--0	10-- * 1-0- * 1--0 *	1--- 1--- 1---	1---
2	1001 * 1010 * 1100 *	10-1 1-01 101- 1-10 110- 11-0	10-1 * 1-01 * 101- * 1-10 * 110- * 11-0 *	1--1 1--1 1-1- 1-1- 11-- 11--	1--1 * 1-1- * 11-- *		
3	1011 * 1101 * 1110 *	1-11 11-1 111-	1-11 * 11-1 * 111- *				
4	1111 *						

Переходячи від одержаних на останньому кроці двійкових номерів до елементарних кон'юнкцій, отримуємо, що скорочена ДНФ заданої булевої функції має вигляд:

$$f(\widetilde{x}^4) = x_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3. \ \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 3.4.2. Методом Мак-Класки побудувати скорочені ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^4) = (1111111101110101)$;

2) $f(\widetilde{x}^4) = (0000011111111101)$;

3) $f(\widetilde{x}^4) = (1011111110111011)$;

4) $f(\widetilde{x}^4) = (0000001111111101)$;

5) $f(\widetilde{x}^4) = (0001011101111111)$.

3.5. Мінімальні та тупикові ДНФ. Побудова всеможливих мінімальних та тупикових ДНФ методом імлікантних таблиць

Загальна кількість операцій, що містяться в ДНФ, називається ***індексом простоти*** *(або* ***складністю****) цієї ДНФ.*

Індекс простоти ДНФ D позначатимемо $L(D)$.

Нехай, наприклад, $D = \overline{x}_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_2 \overline{x}_3$, тоді $L(D) = 9$.

ДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ називається ***мінімальною****, якщо вона має найменший індекс простоти серед усіх ДНФ, що зображають цю функцію.*

Задача мінімізації полягає у знаходженні для заданої булевої функції мінімальної ДНФ. Оскільки мінімальна ДНФ визначається за індексом простоти, вона може бути, взагалі кажучи, не єдиною.

Теорема про зв'язок між мінімальною і скороченою ДНФ. *Для будь-якої булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ мінімальна ДНФ або повністю співпадає зі скороченою ДНФ, або отримується з неї шляхом відкидання деяких простих імплікант.*

ДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ називається ***тупиковою****, якщо:*

1) *вона складається лише із простих імплікант функції $f(\widetilde{x}^n)$;*

2) *в результаті відкидання з неї будь-якої простої імпліканти отримується ДНФ, що вже не зображає функцію* $f(\widetilde{x}^n)$.

З означення випливає, що будь-яка тупикова ДНФ або повністю співпадає зі скороченою ДНФ, або отримується з неї шляхом відкидання деяких простих імплікант.

Проста імпліканта, яку не можна відкидати зі скороченої ДНФ, називається ***ядровою*** *імплікантою.*

Кожна ядрова імпліканта буде входити до складу всіх тупикових та мінімальних ДНФ.

Теорема про зв'язок між мінімальною і тупиковою ДНФ. *Мінімальна ДНФ булевої функції* $f(\widetilde{x}^n)$ *є тупиковою ДНФ цієї функції.*

З теореми випливає, що мінімальні ДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ слід шукати серед тупикових ДНФ цієї функції.

Для побудови всеможливих тупикових і мінімальних ДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ використовують **метод імплікантних таблиць**.

Суть цього методу полягає у наступному.

1) Будують досконалу ДНФ (ДДНФ) булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$.
2) Будують скорочену ДНФ (СДНФ) булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$.
3) Складають спеціальну імплікантну таблицю, рядками якої є прості імпліканти із СДНФ, а стовпцями – конституенти одиниці із ДДНФ. При цьому в комірці таблиці ставлять зірочку, якщо проста імпліканта поглинає (**покриває**) конституенту. Якщо після завершення побудови таблиці в деякому стовпчику міститься лише одна зірочка, то відповідна їй проста імпліканта є ядровою.
4) Знаходять сукупність ядрових імплікант (вони входитимуть до складу кожної із тупикових та мінімальних ДНФ).
5) В імплікантній таблиці викреслюють усі ядрові імпліканти та всі покриті ними конституенти (для кожної ядрової імпліканти викреслюють її рядок і всі стовпці, що мають в ньому зірочки).
6) Якщо в отриманій після цього таблиці є рядки, що не містять жодної зірочки, повністю їх викреслюють.

7) Будують спрощену імплікантну таблицю, що отрималася після всіх попередніх кроків.
8) Знаходять <u>всеможливі</u> <u>ненадлишкові</u> сукупності простих імплікант, що своїми зірочками покривають усі конституенти (сукупність є **ненадлишковою**, якщо після відкидання з неї будь-якої простої імпліканти з'являється хоча б одна непокрита конституента).
9) Будуючи диз'юнкції всіх ядрових імплікант з імплікантами кожної із знайдених ненадлишкових сукупностей, отримують всеможливі тупикові ДНФ булевої функції $f(\tilde{x}^n)$.
10) Обчислюють індекси простоти отриманих тупикових ДНФ і знаходять серед них мінімальні ДНФ.

Задача 3.5.1. Методом імплікантних таблиць побудувати всеможливі тупикові та мінімальні ДНФ булевої функції

$$f(\tilde{x}^4) = (1110011000010101).$$

Розв'язання. ДДНФ заданої булевої функції має вигляд:

$$f(\tilde{x}^4) = \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4}_{K_1} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 x_4}_{K_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3\bar{x}_4}_{K_3} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 x_4}_{K_4} \vee$$

$$\vee \underbrace{\bar{x}_1 x_2 x_3\bar{x}_4}_{K_5} \vee \underbrace{x_1\bar{x}_2 x_3 x_4}_{K_6} \vee \underbrace{x_1 x_2\bar{x}_3 x_4}_{K_7} \vee \underbrace{x_1 x_2 x_3 x_4}_{K_8}$$

СДНФ заданої булевої функції, побудована методом Мак-Класки, має вигляд:

$$f(\tilde{x}^4) = \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3}_{p_1} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4}_{p_2} \vee \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_3 x_4}_{p_3} \vee \underbrace{\bar{x}_1 x_3\bar{x}_4}_{p_4} \vee \underbrace{x_2\bar{x}_3 x_4}_{p_5} \vee \underbrace{x_1 x_3 x_4}_{p_6} \vee \underbrace{x_1 x_2 x_4}_{p_7}$$

Складаємо імплікантну таблицю (для компактності елементарні кон'юнкції записуємо у вигляді двійкових номерів):

	K_1 0000	K_2 0001	K_3 0010	K_4 0101	K_5 0110	K_6 1011	K_7 1101	K_8 1111
p_1 000-	*	*						

p_2 00-0	*		*					
p_3 0-01		*		*				
p_4 0-10			*		*			
p_5 -101				*			*	
p_6 1-11						*		*
p_7 11-1							*	*

Одну зірочку містять п’ятий і шостий стовпчики, ці зірочки відповідають імплікантам p_4 і p_6 відповідно. Отже, p_4 і p_6 – **ядрові імпліканти**.

Вилучаємо їх із імплікантної таблиці разом з покритими ними конституентами:

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7	K_8
p_1	*	*						
p_2	*		*					
p_3		*		*				
p_4			*		*			
p_5				*			*	
p_6						*		*
p_7							*	*

Будуємо спрощену імплікантну таблицю:

	K_1	K_2	K_4	K_7
p_1	*	*		
p_2	*			
p_3		*	*	
p_5			*	*
p_7				*

Для знаходження всеможливих ненадлишкових сукупностей простих імплікант, що своїми зірочками покривають усі конституенти (всеможливих ненадлишкових покриттів), скористаємось **методом Петрика**. Попередньо згадаємо, що логічній зв'язці "*або*" відповідає операція диз'юнкції, а логічній зв'язці "*і*" – операція кон'юнкції.

Конституенту K_1 можна покрити імплікантою p_1 або p_2 – $(p_1 \vee p_2)$, K_2 – $(p_1 \vee p_3)$, K_4 – $(p_3 \vee p_5)$, K_7 – $(p_5 \vee p_7)$. Оскільки потрібно одночасно покрити всі конституенти, ці дужки необхідно поєднати між собою операціями кон'юнкції (отримаємо кон'юнктивне покриття спрощеної імплікантної таблиці):

$$(p_1 \vee p_2)(p_1 \vee p_3)(p_3 \vee p_5)(p_5 \vee p_7).$$

Розкриваючи в цьому виразі дужки та виконуючи всеможливі поглинання (метод Нельсона), переходимо до диз'юнктивного покриття спрощеної імплікантної таблиці:

$$(p_1 \vee p_2)(p_1 \vee p_3)(p_3 \vee p_5)(p_5 \vee p_7) = (p_1 \vee p_1 p_3 \vee p_1 p_2 \vee p_2 p_3) \wedge$$
$$\wedge (p_3 p_5 \vee p_3 p_7 \vee p_5 \vee p_5 p_7) = (p_1 \vee p_2 p_3)(p_3 p_7 \vee p_5) =$$
$$= p_1 p_3 p_7 \vee p_1 p_5 \vee p_2 p_3 p_7 \vee p_2 p_3 p_5.$$

Кожен доданок отриманої логічної суми містить сукупність простих імплікант, що утворюють ненадлишкове покриття.

Таким чином, існують 4 ненадлишкові сукупності простих імплікант, що своїми зірочками покривають усі конституенти:

1) p_1, p_3, p_7;

2) $p_1,\ p_5$;

3) $p_2,\ p_3,\ p_7$;

4) $p_2,\ p_3,\ p_5$.

Тоді задана булева функція має 4 тупикові ДНФ:

$$T_1 = \underline{\underline{p_4 \vee p_6}} \vee p_1 \vee p_3 \vee p_7 =$$
$$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4,$$

$$T_2 = \underline{\underline{p_4 \vee p_6}} \vee p_1 \vee p_5 =$$
$$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4,$$

$$T_3 = \underline{\underline{p_4 \vee p_6}} \vee p_2 \vee p_3 \vee p_7 =$$
$$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_1 x_2 x_4,$$

$$T_4 = \underline{\underline{p_4 \vee p_6}} \vee p_2 \vee p_3 \vee p_5 =$$
$$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4.$$

Оскільки $L(T_1) = 21$, $L(T_2) = 17$, $L(T_3) = 21$, $L(T_4) = 22$, то мінімальні ДНФ заданої булевої функції мають вигляд:

$$M_1 = T_2 = \underline{\underline{p_4 \vee p_6}} \vee p_1 \vee p_5 =$$
$$= \bar{x}_1 x_3 \bar{x}_4 \vee x_1 x_3 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 \bar{x}_3 x_4. \ ■$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 3.5.2. Методом імплікантних таблиць побудувати всеможливі тупикові та мінімальні ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\tilde{x}^4) = (1100000001001110)$;

2) $f(\tilde{x}^4) = (0111110001111111)$;

3) $f(\tilde{x}^4) = (1001110100010000)$;

4) $f(\tilde{x}^4) = (1100000001101110)$;

5) $f(\widetilde{x}^3) = (01111110)$;

6) $f(\widetilde{x}^3) = (11010001)$;

7) $f(\widetilde{x}^4) = (0111111111111110)$.

3.6. Побудова мінімальних ДНФ методом невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтів дозволяє побудувати одну з мінімальних ДНФ заданої булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$. При цьому метод не вимагає попередньої побудови скороченої ДНФ.

Суть цього методу полягає у наступному.

1) Для булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$ виписують загальний вигляд ДНФ від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (диз'юнкцію всеможливих кон'юнкцій рангів 1, 2, …, n) із невідомими (невизначеними) коефіцієнтами.
2) Підставляючи у виписану ДНФ всеможливі двійкові набори, складають систему логічних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів.
3) Якщо в правій частині деякого рівняння стоїть нуль, то всі коефіцієнти цього рівняння рівні нулю, тому викреслюють їх у цьому та всіх інших рівняннях системи. Виконавши таку процедуру для всіх рівнянь з нулем у правій частині, отримують спрощену систему логічних рівнянь, у правій частині кожного з яких стоїть одиниця.
4) У кожному рівнянні спрощеної системи знаходять коефіцієнт, що визначає кон'юнкцію найменшого рангу.
5) Покладають знайдені на попередньому кроці коефіцієнти рівними 1, а всі інші – рівними 0.
6) Знаючи значення всіх коефіцієнтів, виписують мінімальну ДНФ булевої функції $f(\widetilde{x}^n)$.

Задача 3.6.1. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати мінімальні ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (10001111)$;

2) $f(\widetilde{x}^3) = (11011001)$.

Розв'язання.

1) Виписуємо для булевої функції $f(\widetilde{x}^3)$ загальний вигляд ДНФ від змінних x_1, x_2, x_3 із невідомими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} f(\widetilde{x}^3) = {} & K_1^0\bar{x}_1 \vee K_1^1 x_1 \vee K_2^0\bar{x}_2 \vee K_2^1 x_2 \vee K_3^0\bar{x}_3 \vee K_3^1 x_3 \vee \\ & \vee K_{12}^{00}\bar{x}_1\bar{x}_2 \vee K_{12}^{01}\bar{x}_1 x_2 \vee K_{12}^{10} x_1\bar{x}_2 \vee K_{12}^{11} x_1 x_2 \vee \\ & \vee K_{13}^{00}\bar{x}_1\bar{x}_3 \vee K_{13}^{01}\bar{x}_1 x_3 \vee K_{13}^{10} x_1\bar{x}_3 \vee K_{13}^{11} x_1 x_3 \vee \\ & \vee K_{23}^{00}\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee K_{23}^{01}\bar{x}_2 x_3 \vee K_{23}^{10} x_2\bar{x}_3 \vee K_{23}^{11} x_2 x_3 \vee \\ & \vee K_{123}^{000}\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee K_{123}^{001}\bar{x}_1\bar{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{010}\bar{x}_1 x_2\bar{x}_3 \vee K_{123}^{011}\bar{x}_1 x_2 x_3 \vee \\ & \vee K_{123}^{100} x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee K_{123}^{101} x_1\bar{x}_2 x_3 \vee K_{123}^{110} x_1 x_2\bar{x}_3 \vee K_{123}^{111} x_1 x_2 x_3 . \end{aligned}$$

Підставляючи у виписану ДНФ всеможливі двійкові набори, отримуємо наступну систему логічних рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \underline{(0,0,0)}: & \left\{ \begin{array}{l} K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\ K_1^0 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{001} = 0 \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{00} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{010} = 0 \\ K_1^0 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{01} \vee K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = 0 \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 1 \\ K_1^1 \vee K_2^0 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} = 1 \\ K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1 \\ K_1^1 \vee K_2^1 \vee K_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1 \end{array} \right. \\ \underline{(0,0,1)}: & \\ \underline{(0,1,0)}: & \\ \underline{(0,1,1)}: & \\ \underline{(1,0,0)}: & \\ \underline{(1,0,1)}: & \\ \underline{(1,1,0)}: & \\ \underline{(1,1,1)}: & \end{array}$$

В правій частині другого, третього та четвертого рівнянь стоїть нуль. Тоді коефіцієнти, що входять у ці рівняння, рівні нулю, а тому викреслюємо їх у всіх рівняннях системи:

$$\begin{cases}
\cancel{K}_1^0 \vee \cancel{K}_2^0 \vee \cancel{K}_3^0 \vee \cancel{K}_{12}^{00} \vee \cancel{K}_{13}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\
\cancel{K}_1^0 \vee \cancel{K}_2^0 \vee \cancel{K}_3^1 \vee \cancel{K}_{12}^{00} \vee \cancel{K}_{13}^{01} \vee \cancel{K}_{23}^{01} \vee \cancel{K}_{123}^{001} = 0 \\
\cancel{K}_1^0 \vee \cancel{K}_2^1 \vee \cancel{K}_3^0 \vee \cancel{K}_{12}^{01} \vee \cancel{K}_{13}^{00} \vee \cancel{K}_{23}^{10} \vee \cancel{K}_{123}^{010} = 0 \\
\cancel{K}_1^0 \vee \cancel{K}_2^1 \vee \cancel{K}_3^1 \vee \cancel{K}_{12}^{01} \vee \cancel{K}_{13}^{01} \vee \cancel{K}_{23}^{11} \vee \cancel{K}_{123}^{011} = 0 \\
K_1^1 \vee \cancel{K}_2^0 \vee \cancel{K}_3^0 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 1 \\
K_1^1 \vee \cancel{K}_2^0 \vee \cancel{K}_3^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee \cancel{K}_{23}^{01} \vee K_{123}^{101} = 1 \\
K_1^1 \vee \cancel{K}_2^1 \vee \cancel{K}_3^0 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee \cancel{K}_{23}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1 \\
K_1^1 \vee \cancel{K}_2^1 \vee \cancel{K}_3^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee \cancel{K}_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1
\end{cases}$$

В результаті отримуємо наступну спрощену систему:

$$\begin{cases}
K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\
K_1^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{10} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 1 \\
K_1^1 \vee K_{12}^{10} \vee K_{13}^{11} \vee K_{123}^{101} = 1 \\
K_1^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{10} \vee K_{123}^{110} = 1 \\
K_1^1 \vee K_{12}^{11} \vee K_{13}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1
\end{cases}$$

У кожному рівнянні спрощеної системи шукаємо коефіцієнт, що визначає кон’юнкцію найменшого рангу. Для першого рівняння це коефіцієнт K_{23}^{00}, а для другого, третього, четвертого та п’ятого рівнянь – коефіцієнт K_1^1.

Тоді покладаємо:

$K_{23}^{00} = 1$, $K_1^1 = 1$, а всі решта коефіцієнтів рівні нулю.

Отже, мінімальна ДНФ заданої булевої функції має вигляд:

$$f(\tilde{x}^3) = x_1 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3 . \ \blacksquare$$

2) Здійснюючи викладки аналогічно випадку 1), отримуємо наступну спрощену систему:

$$\begin{cases} K_{12}^{00} \vee K_{23}^{00} \vee K_{123}^{000} = 1 \\ K_{12}^{00} \vee K_{13}^{01} \vee K_{123}^{001} = 1 \\ K_{13}^{01} \vee K_{23}^{11} \vee K_{123}^{011} = 1 \\ K_{23}^{00} \vee K_{123}^{100} = 1 \\ K_{23}^{11} \vee K_{123}^{111} = 1 \end{cases}$$

Для першого, другого та третього рівнянь неможливо однозначно вказати коефіцієнт, що визначає кон'юнкцію найменшого рангу.

Для четвертого рівняння це коефіцієнт K_{23}^{00}, для п'ятого – K_{23}^{11}.

Оскільки коефіцієнти K_{23}^{00} і K_{23}^{11} ми покладатимемо рівними одиниці, а вони входять до першого та третього рівнянь, то ці рівняння задовольнятимуться за рахунок значень цих коефіцієнтів. Тому перше та третє рівняння з розгляду викидаємо.

В другому рівнянні серед коефіцієнтів K_{12}^{00} і K_{13}^{01} обираємо коефіцієнт K_{13}^{01}, оскільки він визначає елементарну кон'юнкцію з меншою складністю: $L(\bar{x}_1 x_3) = 2 < 3 = L(\bar{x}_1 \bar{x}_2)$.

Таким чином, покладаємо:

$K_{23}^{00} = 1,\ K_{23}^{11} = 1,\ K_{13}^{01} = 1$, а всі решта коефіцієнтів рівні нулю.

Отже, мінімальна ДНФ заданої булевої функції має вигляд:

$$f(\widetilde{x}^3) = \bar{x}_2 \bar{x}_3 \vee x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 . \ \blacksquare$$

Задачі для самостійної роботи

Задача 3.6.2. Методом невизначених коефіцієнтів побудувати мінімальні ДНФ наступних булевих функцій:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (11101101)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (00110001)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (11110100)$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (11001111)$;

5) $f(\widetilde{x}^3) = (11000111)$.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Дискретна математика: методичні вказівки до вивчення дисципліни. Частина І / Укл.: Філіпчук М.П. – Чернівці, 2020. – 60 с.
2. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика. Підручник. – Львів: "Магнолія-2006", 2018. – 432 с.
3. Журавчак Л.М. Дискретна математика для програмістів. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2019. – 420 с.
4. Матвієнко М.П. Дискретна математика. Підручник. – К.: Видавництво "Ліра-К", 2019. – 324 с.
5. Кривий С.Л. Дискретна математика. Підручник. – Чернівці-Київ: Видавничий дім "Букрек", 2017. – 568 с.
6. Борисенко О.А. Дискретна математика. Підручник. – Суми: Університетська книга, 2008. – 255 с.
7. Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є. Дискретна математика. Підручник. – К.: Вища шк., 2007. – 382 с.
8. Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. Комп'ютерна дискретна математика. Підручник. – Харків: "Компанія СМІТ", 2004. – 480 с.
9. Висоцька В.А., Литвин В.В., Лозинська О.В. Дискретна математика. Практикум. – Львів: Видавництво "Новий Світ - 2000", 2020. – 575 с.
10. Кривий С.Л. Збірник задач з дискретної математики. – Чернівці-Київ: Видавничий дім "Букрек", 2018. – 456 с.
11. Манзій О.С., Тесак І.Є., Кавалець І.І., Чарковська Н.В. Дискретна математика. Практикум. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2016. – 212 с.
12. Базилевич Л.Є. Дискретна математика у прикладах і задачах. Підручник. – Львів: Видавець І.Е. Чижиков, 2013. – 487 с.

ЗМІСТ

ВСТУП 3

ТЕМА 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ 3
1.1. Булеві функції та способи їх задання 3
1.2. Істотні та фіктивні змінні булевих функцій 12
1.3. Розклад булевих функцій за частиною змінних 16
1.4. Диз'юнктивні нормальні форми, досконала ДНФ 18
1.5. Кон'юнктивні нормальні форми, досконала КНФ 22
1.6. Поліном Жегалкіна 24

ТЕМА 2. ФУНКЦІОНАЛЬНО ЗАМКНУТІ ТА ПОВНІ СИСТЕМИ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ 29
2.1. Поняття замикання та повноти системи булевих функцій. Теорема зведення 29
2.2. Класи булевих функцій, що зберігають константи (класи T_0 і T_1) 32
2.3. Клас лінійних булевих функцій (клас L) 35
2.4. Двоїсті функції. Клас самодвоїстих булевих функцій (клас S) 39
2.5. Клас монотонних булевих функцій (клас M) 46
2.6. Критерій повноти систем булевих функцій 49

ТЕМА 3. МІНІМІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ 52
3.1. Поняття імпліканти, простої імпліканти, скороченої ДНФ . 52
3.2. Побудова скороченої ДНФ методом Нельсона 55
3.3. Побудова скороченої ДНФ методом Квайна 56
3.4. Побудова скороченої ДНФ методом Мак-Класки 58
3.5. Мінімальні та тупикові ДНФ. Побудова всеможливих мінімальних та тупикових ДНФ методом імлікантних таблиць 60
3.6. Побудова мінімальних ДНФ методом невизначених коефіцієнтів 66

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА 70

Навчальне видання

Дискретна математика

Методичні вказівки
до вивчення дисципліни

Частина ІІ

Укладач*: Філіпчук Микола Петрович*

Літературне та технічне редагування автора

Електронне видання