math_2020_033

Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича

Факультет математики та інформатики
(повна назва інституту/факультету)

Кафедра математичного моделювання
(повна назва кафедри)

СИСТЕМИ МАТРИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ВИНИКАЮТЬ ПРИ ДІЇ МАРКОВСЬКИХ ПЕРЕМИКАНЬ І ПАРАМЕТРІВ НА ЛІНІЙНІ СТОХАСТИЧНІ СИСТЕМИ

Дипломна робота

Рівень вищої освіти - другий (магістерський)

Виконав:
студент 6 курсу, групи 607
спеціальності
122 – Системний аналіз
(назва спеціальності)
Крижний Владислав Сергійович
(прізвище, ім'я та по-батькові)
Керівник к.ф.-м.н. Лукашів Т.О.
(науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

До захисту допущено:

Протокол засідання кафедри № 6

від „ 3” грудня 2019 р.

зав. кафедри _________ доц. Піддубна Л.А.

Чернівці – 2019

Анотація

Вперше строго обґрунтовано умови розв’язності задачі оптимального керування для стохастичної динамічної системи випадкової структури з марковськими перемиканнями.

Результати також є правильними для задачі оптимальної стабілізації вказаних систем.

Зміст

Вступ

Кілька проблем, що стосуються властивостей розв'язків матричних диференціальних рівнянь Ріккаті досліджувались дослідниками як в теорії керування, так і галузі диференціальних рівнянь. Існування глобальних розв'язків рівнянь Ріккаті давно пов'язані з достатніми умовами Якобі варіаційному численні.

У 1960 р. Р. Калман [27] отримав умови існування глобального розв'язку системи матричних диференціальних рівнянь Ріккаті в так званих умовах керованості та спостережливості в теорії керування; результат був пов'язаний з так званою лінійно-квадратичною задачею оптимізації.

У розділі 1 роботі розглянемо клас зв'язних матричних нелінійних диференціальних рівнянь, включаючи частиниий випадок матричних диференціальних рівнянь.

Наша увага зосереджена на проблемі існування та єдиності стабілізуючих та обмежених розв'язків та існування максимального розв'язку (або мінімального розв'язку) стосовно деякої сім'ї глобальних розв'язків рівнянь, які розглядаються.

Показано, що якщо коефіцієнти рівнянь є періодичними функціями, то як стабілізуючі, так і обмежені розв'язки, максимальні та мінімальні розв'язки теж є періодичними функціями.

Результати цього розділу пропонують новий погляд на відомі результати, що стосуються розв'язків матричних диференціальних рівнянь Ріккаті.

Також наводиться детальний перелік посилань на основні праці, де розглядаються результати існування та інші властивості розв'язків для диференціальних рівнянь Ріккаті як у детермінованому, так і в стохастичному випадках [1–3,13,14,22,25,28,34,36,42].

Розділ 1. Системи матричних диференціальних рівнянь, які виникають при дії марковських перемикань

1. Постановка задачі

1.1. Позначення та попередні зауваження

Використовуватимемо наступні позначення

А. R_+ – це множина невід'ємних дійсних чисел. $R^{n\times m}$ – множина усіх дійсних $n\times m$ – матриць. I^n – одинична $n\times n$ – матриця.

Якщо X – матриця (або вектор), то X^T – це транспонована X; якщо A – матриця, то $|A|$ є операторною нормою A, тобто $|A| = \left[\lambda_{\max}(A^*A)\right]^{1/2}$, TrA є слід матриці A.

Також $D = \{1,2,...,d\}$

Якщо H матриця, тоді $H \geqslant 0$ означає, що H є симетричною додатно визначеною матрицею.

Б. Позначимо через S_n простір усіх $n\times n$ симетричних матриць і $S_n^d = S_n \oplus S_n \oplus \cdots \oplus S_n$ (d разів). S_n^d це простір Гільберта зі скалярним добутком

$$\langle H, G\rangle = \sum_{i=1}^{d} \operatorname{Tr}(H(i)G(i))\,. \tag{1.1}$$

Норма, породжена цим скалярним добутком, є $\|H\| = \langle H, H\rangle^{1/2}$ для всіх $H\in S_n^d$. На S_n^d ми вважаємо також нормою

$$|H| = \max\{\,|H(i)|\,; 1 \leqslant i \leqslant d\},\quad H\in S_n^d\,.$$

Маємо, що

$$|H| \leqslant \|H\| \leqslant \sqrt{nd}\,|H|\,.$$

Якщо $T{:}\,S^d_n \to S_n^d$ є лінійним оператором, тоді $||T||$ є оператором норми T, індукований нормою $|\cdot|$ на S_n^d. Якщо T – лінійний оператор на S_n^d, то T^* позначає його спряжений оператор.

Якщо $H\in S_n^d$, то H є невід'ємно визначеною $H \geqslant 0$, якщо $H(i) \geqslant 0$

для всіх $i \in D$. $T: S^{d}_{n} \to S_{n}^{d}$ називається додатним оператором, якщо $H \geqslant 0$ означає$TH \geqslant 0$.

Для $H: I \to S_{n}^{d}$, H є рівномірно додатною, і запишемо $H(t) \gg 0$, якщо існує $\delta > 0$ таке, що $H(t) \geqslant \delta J_n$ для всіх $t \in I$, де $J_n = (I_n I_n \dots I_n) \in S_n^d$.

B. $M_{n,m}^d$ позначає лінійний простір $A = (A(1), A(2), \dots, A(d))$ де $A(i) \in R^{n\times m}$. На $M_{n,m}^d$ розглянемо норму$|A| = max_{i\in D}\{|A(i)|\}$. Таким чином $(M_{n,m}^d, |\cdot|)$ є скінченовимірним простором Банаха. Часто будемо позначати M_n^d. Очевидно, що $S_n^d \subset M_n^d$.

Якщо $C \in M_{p,n}^d, B \in M_{n,m}^d, C = (C(1)C(2)\cdots C(d))$,

$B = (B(1)B(2)\cdots B(d))$, тоді через $D = CB$ ми розуміємо наступний елемент

$$M_{p,m}^d, D = (D(1), D(2), \dots, D(d)), D(i) = C(i)B(i), i \in D.$$

Якщо $A \in M_n^d, A = (A(1), A(2), \dots, A(d))$, то через A^{-1} позначимо елемент M_n^d, визначений так: $A^{-1} = (A^{-1}(1), A^{-1}(2), \dots, A^{-1}(d))$ якщо всі матриці $A(i), i \in D$ оборотними. Якщо $B \in M_{n,m}^d, B = (B(1), B(2), \dots, B(d))$ тоді $B^* \in M_{m,n}^d$ визначається як $B^* = (B^*(1), B^*(2), \dots, B^*(d))$.

1.2. Системи раціональних матричних диференціальних рівнянь

У цьому розділі досліджується декілька властивостей класу розв’язків для систем матричних диференціальних рівнянь виду

$$\frac{d}{dt}X(t,i) + A_0^*(t,i)X(t,i) + X(t,i)A_0(t,i) + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(t,i)X(t,i)A_k(t,i) +$$

$$+\sum_{j=1}^{d} q_{ij}X(t,j) + M(t,i) - \left[X(t,i)B_0(t,i) + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(t,i)X(t,i)B_k(t,i) + \right.$$

$$+L(t,i)]\left[R(t,i)+\sum_{k=1}^{r}B_k^*(t,i)X(t,i)B_k(t,i)\right]^{-1}\left[B_0^*(t,i)X(t,i)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{r}B_k^*(t,i)X(t,i)A_k(t,i)+L^*(t,i)\right]=0, \qquad (1.2)$$

де $i \in D, t \in I, A_k : I \to M_n^d, B_k : I \to M_{n,m}^d, k = 0,1,\ldots,r,$

$L : I \to M_{n,m}^d, M : I \to S_n^d\ R : I \to S_m^d$ є обмеженими та неперервними функціями на *I*. Системи матричних диференціальних рівнянь типу (1.2) з'являються у зв'язку з декількома проблемами надійного керування лінійними стохастичними системами з марковськими стрибками, які описуються системою

$$dx(t)=\left[A_0(t,\eta(t))x(t)+B_0(t,\eta(t))u(t)\right]dt+$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\left[A_k(t,\eta(t))x(t)+B_k(t,\eta(t))u(t)\right]dw_k(t) \qquad (1.3)$$

з функціоналом якості

$$J(u)=E\int_{t_0}^{\infty}\left[x^*(t)M(t,\eta(t))x(t)+2x^*(t)L(t,\eta(t))u(t)+\right.$$

$$\left.+u^*(t)R(t,\eta(t))u(t)\right]dt, \qquad (1.4)$$

де $E[\,\cdot\,]$– математичне сподівання, $x(t) \in R^n$ – вектор стану, $u(t) \in R^m$ – вектор керуанння, $w(t)=\left(w_1(t),\ldots,w_r(t)\right)^*, t \in R_+$ є стандартним r-вимірним процесом Вінера на заданому ймовірнісному просторі [19]. $\eta(t), t \geq 0$ – неперервний справа рівномірний ланцюг Маркова з простором станів D і матрицею перехідних ймовірностей $P(t)=\left[p_{ij}(t)\right]=e^{Qt}, t>0$ тут $Q=[q_{i,j}]$ і

$$\sum_{j=1}^{d}q_{ij}=0, \quad i \in D \qquad (1.5)$$

$q_{ij} \geq 0$, якщо $i \neq j$ [9].

Припустимо, що $P\{\eta(0)=i\}>0$ для всіх $i\in D$ і процеси $\{w(t),t\geq 0\}$ та $\{\eta(t),t\geq 0\}$ є незалежними.

Система (1.2) містить, зокрема, кілька типів матричних диференціальних рівнянь Ріккаті, які досліджуються у зв'язку з деякими задачами керування як у детермінованому, так і в стохастичному випадках.

Таким чином, якщо $D=\{1\},q_{11}=0,A_k(t)=0,B_k(t)=0,1\leq k\leq r$, то (1.2) є відомою системою матричних диференціальних рівнянь Ріккаті, широко дослідженою в детермінованому випадку. Якщо *D={1}* і $R(t,1)>0$, то система (1.2) стає системою матричних диференціальних рівнянь, яка виникає у зв'язку з лінійною-квадратичною задачею оптимізації для стохастичної системи Вінера-Іто [23], [44], [46].

В працях [4], [40], [41] розглядається лінійна задача квадратичної оптимізації з невизначеним знаком $R(t,1)$, пов'язана з лінійною стохастичною системою, залежного від стану шуму, та від регульованого шуму. У вищезгаданих роботах було показано, що максимальний розв’язок матричного диференціального рівняння Ріккаті (1.2) з $d=1$ відіграє вирішальну роль для розв’язування задачі лінійно-квадратичної оптимізації з невизначеним знаком.

Для $D=\{1\},q_{11}=0$ і $R=D^{*}D-\gamma^2 I$, (1.2) стає раціональним диференціальним рівнянням, дослідженим в [7], [24], і пов’язане з проблемою загасання збурень для лінійних стохастичних систем Вінера-Іто.

У випадку $B_k=0,k\geq 1,R(t,i)>0$, система (1.2) вивчалася в [35] у зв’язку з лінійно-квадратичною задачею для лінійної стохастичної системи з марковськими стрибками; для $R(t,i)=y^2 I$ система (1.2) була розглянута в [15] у зв’язку з проблемою надійоної стабілізації для лінійної стохастичної системи з марковським стрибками.

Якщо $A_k(t,i)=0,B_k(t,i)=0,k=1,...,r$, система (1.2) була вивчена у зв'язку з декількома проблемами надійного керування, пов'язаними з лінійною системою, на яку впливають марковські стрибки ([26], [30], [31], [32] та посилання у них).

Наша мета – вказати на деякі якісні властивості деяких спеціальних розв'язків систем диференціальних рівнянь типу (1.2). У пункті 1.4 наведено необхідні та достатні умови існування максимального розв'язку, необхідні та достатні умови для існування обмеженого та стабілізуючого розв'язку та достатніх умов для існування мінімального невід'ємного розв'язку. Доведення єдиності обмеженого та стабілізуючого розв'язку.

У пункті 1.5 наведемо періодичний випадок. Метою цього розділу є вивчення систем (1.2) у більш загальних умовах, ніж якщо б вони відповідали системам (1.3) та функціональним за витратами (1.4). Точніше ми розглянемо випадок, коли елементи матриці Q задовольняють лише умову $q_{ij} \geq 0; i = j$. Умова (1.5) потрібна лише для доведення леми 1.5 та теореми 1.7, де задіяні деякі методи стохастичних систем.

1.3. Деякі попередні результати

У цьому пункті наведемо деякі означення та допоміжні результати, які будуть використані в подальших викладках.

A. Оператор $L(t) : S_n^d \to S_n^d$ визначемо як

$$[L(t)H](i) = A_0(t,i)H(i) + H(i)A_0^T(t,i) + \\ + \sum_{k=1}^{r} A_k(t,i)H(i)A_k^T(t,i) + \sum_{j=1}^{d} q_{ji}H, \qquad (1.6)$$

$i \in D$ для всіх $H = (H(1), H(2), \ldots, H(d)) \in S_n^d$ де $A_k : I \to M_n^d$ є неперервними та обмеженими, а для елементів матриці $Q = \left\{ q_{ij} \right\}_{i,j \in \{1,2,\ldots,d\}}$ виконується умова

$$q_{ij} \geq 0 \text{ для } i \neq j. \qquad (1.7)$$

Очевидно, що $t \to L(t)$ є неперервною функцією на I і $H \to (L(t)H)$ є лінійним обмеженим оператором на S_n^d.

Оператор $L(t)$ є оператором типу Ляпунова, визначеним на $(A_0, A_1, \ldots, A_r; Q)$. Зауважимо, що якщо $A_k = 0, k \geq 1$ і $D = \{1\}, q_{11} = 0$, то (1.6) набуває відомого оператора Ляпунова для детермінованованої системи.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння на S_n^d:

$$\frac{d}{dt}S(t) = L(t)S(t), \quad t \in I. \tag{1.8}$$

Нехай $S(t, t_0, H)$ є розв'язком рівняння (1.8) з початковою умовою

$$S\left(t_0, t_0, H\right) = H \in S_n^d.$$

Через $T(t, t_0)$ позначимо лінійний оператор на S_n^d у силу системи (1.8)

$$T\left(t, t_0\right) H = S\left(t, t_0, H\right), \quad H \in S_n^d, t, t_0 \in I.$$

Очевидно, $T(t, s)T\left(s, t_0\right) = T\left(t, t_0\right)$ для всіх $t, s, t_0 \in I$

Якщо оператор $T^*(t, s)$ є спряженим до оператора $T(t, s)$ відносно скалярного добутку (1.1), то

$$\frac{d}{ds}T^*(t, s) + L^*(s)T^*(t, s) = 0, \tag{1.9}$$

де $L^*(s)$ є спряженим оператором оператора L(s). Це легко перевірити:

$$\left[L^*(s)H\right](i) = A_0^*(s, i)H(i) + H(i)A_0(s, i) + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(s, i)H(i)A_k(s, i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} q_{ij}H_j \quad i \in D,$$

$$H = (H(1), H(2), \ldots, H(d)) \in S_n^d.$$

Наступний результат доведений у роботі [15].

Лема 1.1. *Для кожного $t, t_0 \in I, t \geqslant t_0$ оператори $T(t, t_0)$та $T^*(t, t_0)$ є доданими операторами на S_n^d.*

Означення 1.1. Ми говоритимемо, що рівняння (1.8) визначає експоненціально стійку еволюцію або що система $(A_0, A_1, \ldots, A_r; Q)$ стійка, якщо існують $\beta \geqslant 1, \quad \alpha > 0$ такі, що

$$\left\| T\left(t, t_0\right) \right\| \leqslant \beta e^{-\alpha\left(t - t_0\right)}, \quad (\forall) t \geqslant t_0, t, t_0 \in I.$$

Необхідні та достатні умови для експоненціальної стійкості для системи (1.8) встановлено в [15]. Тут ми наведемо лише деякі окремі результати.

Твердження 1.1. *Якщо система* $(A_0, A_1, \ldots, A_r; Q)$ *стійка, то для кожного* $H : I \to S_n^d$ *неперервного та обмеженого, лінійне диференціальне рівняння*

$$\frac{d}{dt}K(t) + L^*(t)K(t) + H(t) = 0 \tag{1.9}$$

має єдиний обмежений розв'язок, який задається формулою

$$K(t) = \int_t^\infty T^*(s,t)H(s)ds, \quad t \in I,$$

причому, якщо всі коефіцієнти рівняння (1.9) є періодичними функціями з періодом θ*, тоді його єдиний обмежений розв'язок є також* θ*-періодичною функцією.*

Нехай $A_{k,j} : I \to M_n^d, k = 0,1,\ldots,r; j = 1,2$ є неперервними та обмеженими функціями. Ми можемо визначити лінійні оператори на S_n^d у вигляді

$$\Big(L_j(t)H\Big)(i) = A_{0,j}(t,i)H(i) + H(i)A_{0,j}^*(t,i) + \sum_{k=1}^r A_{k,j}(t,i)H(i)A_{k,j}^*(t,i) +$$

$$+ \sum_{p=1}^d q_{pi}H(p),$$

де $i \in D, H \in S_n^d, j = 1,2; Q = \Big(q_{ij}\Big)$ виконується нерівність (1.7).

Розглянемо наступне розширення лінійного оператора

$$L_e(t) : S_{2n}^d \to S_{2n}^d:$$

$$\Big(L_e(t)H\Big)(i) = A_{0,e}(t,i)H(i) + H(i)A_{0,e}^*(t,i) + \sum_{k=1}^r A_{k,e}(t,i)H(i)A_{k,e}^*(t,i) +$$

$$+\sum_{j=1}^{d} q_{ji}H(j), \quad i \in D, \quad H \in S_{2n}^d,$$

де $A_{k,e}(t,i) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(t,i) & 0 \\ 0 & A_{k,2}(t,i) \end{pmatrix}$, *k=0,1,...,r.*

Твердження 1.2 *За розглянутими припущеннями наступні твердження еквівалентні:*

(i) Системи $\left(A_{0,j}, A_{1,j}, \ldots, A_{r,j}; Q\right), j = 1{,}2$ *є стійкі.*

(ii) Розширена система $\left(A_{0,e}, A_{1,e}, \ldots, A_{r,e}; Q\right)$*є стійкою.*

Доведення.

(i) $\rightarrow$ (ii) З твердження 4.6 в [15] робимо висновок, що існують C^{-1} – функції$K_j : I \rightarrow S_n^d, K_j(t) \gg 0$ які обмежені і задовольняють лінійні

(ii) диференціальні рівняння

$$\frac{d}{dt}K_j(t) + L_j^*(t)K_j(t) + J_n = 0, \quad j = 1{,}2.$$

Покладемо $K_e(t) = \begin{pmatrix} K_1(t) & 0 \\ 0 & K_2(t) \end{pmatrix}$. Неважко помітити, що $K_e(t)$ є розв’язком лінійного диференціального рівняння на S_{2n}^d,

$$\frac{d}{dt}K_j(t) + L_j^*(t)K_j(t) + J_n = 0, \quad j = 1{,}2. \tag{1.10}$$

Застосовуючи знову твердження 4.6 з [15], робимо висновок, що розширена система $\left(A_{0,e}, A_{1,e}, \ldots, A_{r,e}; Q\right)$ є стійкою.

(ii) → (i) Якщо розширена система $\left(A_{0,e}, A_{1,e}, \ldots, A_{r,e}; Q\right)$ стійка, то існує C^{-1} – функція $K_e : I \rightarrow S_{2n}^d$, яка є обмеженою та рівномірно додатною, яка задовільняє лінійне диференціальне рівняння (1.9).

Нехай $K_e(t,i) = \begin{pmatrix} K_{11}(t,i) & K_{12}(t,i) \\ K_{12}^*(t,i) & K_{22}(t,i) \end{pmatrix}$ є розбиттям, породженим розбиттям матриці $A_{k,e}(t,i)$.

Покладемо $K_j(t) = \left(K_{jj}(t,1), K_{jj}(t,2), \dots, K_{jj}(t,d)\right), j = 1,2.$

Прямим підрахунком отримуємо, що $t \to K_j(t)$ є обмеженим і рівномірним додатним розв'язком рівняння

$$\frac{d}{dt}K_j(t) + L_j^*(t)K_j(t) + J_n = 0, \quad t \in I, j = 1,2.$$

Таким чином, із твердження 4.6 з [15] можна зробити висновок, що системи стійкі. □

Б. Нехай $A = (A_0, A_1, ..., A_r), (B_0, B_1, ..., B_r)$,
$(C_0, C_1, ..., C_r), A_k : I \to M_n^d B_k : I \to M_{n,m}^d, \quad C_k : I \to M_{p,n}^d$ є неперервними та обмеженими функціями. $Q = (q_{ij})$ – матриця, для якої виконується (1.7).

Означення 1.2. (а) Трійка $(A; B; Q)$ стабілізується, якщо існує неперервна обмежена функція $F : I \to M_{m,n}^d$, така, що система $(A_0 + B_0F, A_1 + B_1F, \dots, A_r + B_rF; Q)$ є стійкою.

(б) Ми говоримо, що трійку $(C; A; Q)$ можна визначити, якщо існує неперервна обмежена функція $L : I \to M_{n,p}^d$, така, що система $(A_0 + LC_0, A_1 + LC_1, \dots, A_r + LC_r; Q)$ є стійкою.

Функцію $F : I \to M_{m,n}^d$з попередніми властивостями будемо називатимемо "стабілізуючим посиленням зворотного зв'язку", а функцію $L : I \to M_{n,p}^d$ називатимемо "стабілізуючою ін'єкцією".

Ми припускаємо, що якщо $A_k(\cdot), B_k(\cdot), C_k(\cdot)$ є періодичними функціями з періодом θ, а якщо $(A, B; Q)$ стабілізується ((C, A, Q) визначена відповідно), то існує стабілізуюче посилення зворотного зв'язку, яке є періодичною функцією з періодом θ (існує стабілізуюча ін'єкція, яка є періодичною функцією з періодом θ). Крім того, якщо
$A_k(t) = A_k, B_k(t) = B_k, C_k(t) = C_k, \quad t \in R$ і $(A, B; Q)$ стабілізується (можна виявити), то існує стабілізуюче посилення зворотного зв'язку, яке є сталим (існує стабілізуюча ін'єкція, яка є сталою).

Визначимо $L_F(t) : S_n^d \to S_n^d$, де

$$\big(L_F(t)H\big)(i) = \big[A_0(t,i) + B_0(t,i)F(t,i)\big]\, H(i) + H(i)\big[A_0(t,i) + B_0(t,i)F(t,i)\big]^*$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \big[A_k(t,i) + B_k(t,i)F(t,i)\big]\, H(i)\big[A_k(t,i) + B_k(t,i)F(t,i)\big]^*$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} q_{ji} H(j), \quad i \in D, \quad H \in S_n^d \tag{1.11}$$

Нехай $T_F(t, t_0)$ є лінійним еволюційним або, іншими словами, слабким інфінітезимальним оператором у силу системи

$$\frac{d}{dt} S(t) = L_F(t) S(t)$$

Очевидно, що трійка $(A, B; Q)$ стабілізується, якщо існує неперервна і обмежена функція $F : I \to M_{m,n}^d$, така, що

$\left\| T_F\left(t, t_0\right) \right\| \leqslant \beta e^{-\alpha\left(t - t_0\right)}, \quad \forall t \geqslant t_0, \quad t, t_0 \in I$, і для деяких

$$\beta \geq 1, \alpha > 0.$$

B. У випадку, коли матриця Q задовольняє (1.5) і (1.7), то із системою (1.2), ми можемо пов'язати таке лінійне стохастичне диференціальне рівняння:

$$dx(t) = A_0(t, \eta(t))x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} A_k(t, \eta(t))x(t)dw_k(t), \quad t \geqslant 0. \tag{1.12}$$

Позначимо через $\Phi\left(t, t_0\right)$ – фундаментальний (випадковий) матричний розв'язок, пов'язаний з рівнянням (1.12).

Наведемо результат, доведений в роботі [15], який встановлює формулу представлення оператора $T^*(t,t_0)$ в термінах розв'язку рівняння (1.12).

Лема 1.2. *Якщо I=[0,∞) й елементи матриці Q задовольняють (1.5) і (1.7), то*

$(T^*(t,t_0)H)(i)=E[\Phi^*(t,t_0)H(\eta(t))\Phi(t,t_0)|\eta(t_0)=i], i\in D, H\in S_n^d, t\geqslant t_0\geqslant s.$

Висновок 1.1. *Якщо виконуються умови леми 1.2, то наступні твердження є еквівалентними*

(а) *Система* $(A_0, A_1, \ldots, A_r; Q)$ *стійка;*

(б) *нульовий розв'язок системи (1.12) є експоненціально стійким у середньому квадратичному, тобто існуть α>0,β≥1 такі, що*

$$E\left[\left|\Phi\left(t,t_0\right)x_0\right|^2 | \eta\left(t_0\right)=i\right] \leqslant \beta e^{-\alpha\left(t-t_0\right)}\left|x_0\right|^2$$

для всіх $t \geqslant t_0 \geqslant 0, i \in D, x_0 \in R^n$. $E[x \mid \eta(t_0)=i]$ – умовне математичне сподівання х, за умови що $\eta(t_0)=i$. Необхідні та достатні умови експоненціальної стійковсті в середньому квадратичному тривіального розв'язку рівнянь типу (1.12) можна знайти в [15], [29].

В останній частині цього розділу ми розглянемо керовану стохастичну систему вигляду

$$\begin{aligned} dx(t) &= \left[A_0(t,\eta(t))x(t) + B_0(t,\eta(t))u(t)\right]dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{r}\left[A_k(t,\eta(t))x(t) + B_k(t,\eta(t))u(t)\right]dw_k(t) \\ dy(t) &= C_0(t,\eta(t))x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} C_k(t,\eta(t))x(t)dw_k(t) \end{aligned} \tag{1.13}$$

$t \geqslant 0$, що мають входи $u \in R^m$ та виходи $y \in R^p$.

Означення 1.3. (а) Ми говоримо, що система (1.13) стохастично стабілізується, якщо існує обмежена і неперервна функція $F : [0,\infty) \to M^d_{m,n}$, така, що нульовий розв'язок системи

$$\begin{aligned} dx(t) &= \left[A_0(t,\eta(t)) + B_0(t,\eta(t))F(t,\eta(t))\right]x(t)dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^{r}\left[A_k(t,\eta(t)) + B_k(t,\eta(t))F(t,\eta(t))\right]x(t)dw_k(t), \quad t \geqslant 0 \end{aligned}$$

є стійким у середньому квадратичному.

(б) Ми говоримо, що система (1.13) є стохастично стійкою, якщо існує обмежена і неперервна функція $L : I \to M_{n,p}^d$, така, що нульовий розв'язок системи

$$dx(t) = [A_0(t,\eta(t)) + L(t,\eta(t))C_0(t,\eta(t))x(t)dt$$
$$+\sum_{k=1}^{r}\left[A_k(t,\eta(t)) + L(t,\eta(t))C_k(t,\eta(t))\right]x(t)dw_k(t),$$

є стійким у середньому квадратичному.

Зауваження 1.1. З леми 1.2 та твердження 1.3 у [15] випливає, що система (1.13) є стохастично стійкою, тоді і тільки тоді, коли трійка $(A, B; Q)$ стабілізується, а система (1.13) є стохастично визначеною, тоді і тільки тоді, якщо трійку $(C, A; Q)$можна визначити.

1.4. Глобальні розв'язки систем матричних раціональних диференціальних рівнянь

Систему нелінійних матричних диференціальних рівнянь (1.2) можна переписати як нелінійне диференціальне рівняння S_n^d у вигляді

$$\frac{dX(t)}{dt} + L^*(t)X(t) + M(t) - P^*(t,X(t))B^{-1}(t,X(t))P(t,X(t)) = 0, \quad (1.14)$$

де $L^*(t) : S_n^d \to S_n^d$ спряжений оператор оператора $L(t)$, визначений у (1.6) за умови (3.2) $X \to P(t,X) : S_n^d \to M_{m,n}^d$, є афінним оператором, визначеним

$$(P(t,X))(i) = B_0^*(t,i)X(i) + \sum_{k=1}^{r} B_k^*(t,i)X(i)A_k(t,i) + L^*(t,i),$$

$i \in D$ і $X \to R(t,X) : S_n^d \to S_m^d$ – афінний оператор, визначений

$$(A(t,X))(i) = R(t,i) + \sum_{k=1}^{r} B_k^*(t,i)X(i)B_k(t,i),$$

$i \in D, M(t) = (M(t,1), M(t,2), \ldots, M(t,d)) \in S_n^d$

Означення 1.4. Функція C^1, $X : I_1 \to S_n^d \left(I_1 \subseteq I\right.$, що є інтервалом), $X(t) = (X(t,1), \ldots, X(t,d))$ є розв'язком рівняння (1.14), якщо для кожного $t \in I_1$ та $i \in D$ матриця $R(t, X(t))(i)$ обернена і відношення (1.2) виконується для всіх $t \in I_1$ і $i \in D$. У цьому пункті ми дослідимо декілька властивостей розв'язків рівняння (1.14), які визначаються у всьому просторі та мають деякі додаткові властивості.

Означення 1.5. Розв'язок рівняння $\tilde{X} : I \to S_n^d$ (1.14) називається "стабілізуючим розв'язком", якщо він має такі властивості:

(a)

$$\inf_{t\in H} \left| \det \left[R(t,i) + \sum_{k=1}^{r} B_k^*(t,i)\tilde{X}(t,i)B_k(t,i) \right] \right| > 0, \quad i \in D. \tag{1.15}$$

(б) Система $\left(A_0 + B_0\tilde{F}, A_1 + B_1\tilde{F}, \ldots, A_r + B_r\tilde{F}; Q\right)$ є стійкою де

$$\tilde{F}(t) = (\tilde{F}(t,1), \tilde{F}(t,2), \ldots, \tilde{F}(t,d))$$

$$\tilde{F}(t,i) = - \left[R(t,i) + \sum_{k=1}^{r} B_k^*(t,i)\tilde{X}(t,i)B_k(t,i) \right]^{-1} \Big[B_0(t,i)\tilde{X}(t,i) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} B_k^*(t,i)\tilde{X}(t,i)A_k(t,i) + L^*(t,i) \Big]. \tag{1.16}$$

Зауваження 1.2. (а) Умова (1.15) накладається для того, щоб бути впевненим, що стійкість посилення зворотного зв'язку в (1.16) є обмеженим.

(б) Якщо в (1.14) ((1.2) відповідно) беремо $B_k(t,i) = 0, \quad k = 0,1,\ldots r, L(t,i) = 0$ тоді рівняння (1.14) зводиться до лінійного диференціального рівняння на S_n^d;

$$\frac{dX(t)}{dt} + L^*(t)X(t) + M(t) = 0,$$

яке будемо називати диференціальним рівнянням типу Ляпунова на S_n^d. У цьому випадку стабілізуючий розв’язок означає, що система $(A_0, A_1, \dots A_r; Q)$ є стійкою.

Теорема 1.1. *Диференціальне рівняння (1.14) має максимум один стабілізуючий та обмежений розв’язок на I.*

Доведення. Припустимо, що диференціальне рівняння (1.14) має два обмежених та стабілізуючих розв’язки; отже, системи стійкі, стабілізуючий коефіцієнт посилення зворотного зв'язку визначається як у (1.16). Шляхом прямого обчислення ми отримуємо, що:

$$\frac{d}{dt}X_l(t,i) + \left[A_0(t,i) + B_0(t,i)F_1(t,i)\right]^* X_l(t,i) + X_l(t,i)\left[A_0(t,i) + B_0(t,i)F_2(t,i)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \left[A_k(t,i) + B_k(t,i)F_1(t,i)\right]^* X_l(t,i)\left[A_k(t,i) + B_k(t,i)F_2(t,i)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} q_{ij}X_l(t,j) + F_1^*(t,i)R(t,i)F_2(t,i) + M(t,i) + L(t,i)F_2(t,i) + F_1^*(t,i)L^*(t,i) = 0,$$

$l = 1{,}2, i \in D, t \in I.$

Покладемо $\hat{X}(t,i) = X_1(t,i) - X_2(t,i), i \in D, t \in I$ і отримаємо, що $\hat{X}(t) = (\hat{X}(t,1), \dots, \hat{X}(t,d))$ є обмеженим розв’язоком системи

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t,i) + \left[A_0(t,i) + B_0(t,i)F_1(t,i)\right]^* \hat{X}(t,i) + \hat{X}(t,i)\left[A_0(t,i) + B_0(t,i)F_2(t,i)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \left[A_k(t,i) + B_k(t,i)F_1(t,i)\right]^* \hat{X}(t,i)\left[A_k(t,i) + B_k(t,i)F_2(t,i)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} q_{ij}\hat{X}(t,j) = 0, \quad i \in D, \quad t \in I. \qquad (1.17)$$

Неважко помітити, що (1.17) еквівалентне наступному лінійному рівнянню на S_{2n}^d:

$$\frac{d}{dt}\hat{X}_e(t) + L_e^*(t)\hat{X}_e(t) = 0, \qquad (1.18)$$

де $L_e(t) : S_{2n}^d \to S_{2n}^d$

$$\left[L_e(t)X\right](i) = A_{0,e}(t,i)X(i) + X(i)A_{0,e}^*(t,i) + \sum_{k=1}^{r} A_{k,e}(t,i)X(i)A_{k,e}^*(t,i) +$$

$$+\sum_{j=1}^{d} q_{ji}X(j)$$

$i \in D, t \in I,$

$$A_{k,e}(t,i) = \begin{pmatrix} A_{k,1}(t,i) + B_k(t,i)F_1(t,i) & 0 \\ 0 & A_{k,1}(t,i) + B_k(t,i)F_2(t,i) \end{pmatrix},$$

$k = 0,1,\dots r$.

$$\hat{X}_e(t,i) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{X}(t,i) \\ \hat{X}(t,i) & 0 \end{pmatrix}.$$

Застосовуючи твердження 1.2, отримаємо, що система $\left(A_{0,e}, A_{1,e}, \dots, A_{r,e}; Q\right)$ є стійкою і з твердження 1.1 отримуємо, що рівняння (1.18) має єдиний обмежений розв'язок. Тому $\hat{X}_e(t) = 0$, а, отже, $X_1(t,i) = X_2(t,i)$ для всіх $(t,i) \in I \times D$. □

Проблема існування стабілізуючого та обмеженого розв'язку для системи (1.2), або рівнозначно для рівняння. (1.4) є складною проблемою.

Наступний допоміжний результат, який буде неодноразово використаний у наступних пунктах, легко отримується алгебраїчними обчисленнями:

Лема 1.3. *Функція $t \to X(t) : I_1 \subset I \to S_n^d$ є розв'язком рівняння (1.14), тоді і тільки тоді, якщо вона є розв'язком модифікованого рівняння*

$$\frac{d}{dt}X(t,i) + \left[A_0(t,i) + B_0(t,i)F(t,i)\right]^* X(t,i) + X(t,i)\left[A_0(t,i) + B_0(t,i)F(t,i)\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\left[A_k(t,i)+B_k(t,i)F(t,i)\right]^* X(t,i)\left[A_k(t,i)+B_k(t,i)F(t,i)\right]+$$

$$+\sum_{j=1}^{d} q_{ij}X(t,j)-\left\{X(t,i)B_0(t,i)+\sum_{k=1}^{r}\left[A_k(t,i)+B_k(t,i)F(t,i)\right]^* X(t,i)B_k(t,i)+\right.$$

$$\left.+L(t,i)+F^*(t,i)R(t,i)\right\}\left\{R(t,i)+\sum_{k=1}^{r}B_k^*(t,i)X(t,i)B_k(t,i)\right\}^{-1}\left\{B_0^*(t,i)X(t,i)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{r}B_k^*(t,i)X(t,i)\left[A_k(t,i)+B_k(t,i)F(t,i)\right]+L^*(t,i)+R(t,i)F(t,i)\right\}+$$

$$+M(t,i)+F^*(t,i)L^*(t,i)+L(t,i)F(t,i)+F^*(t,i)R(t,i)F(t,i)=0,$$

$i\in D, t\in I$ для кожного підсилення зворотного зв'язку $F: I_1\to M_{m,n}^d$.

Тепер ми представляємо результат, що стосується існування обмеженого та максимального розв'язку рівняння (1.14). Доведення ґрунтується на деяких ідеях Пандольфі [37].

Теорема 1.2. *Припустимо, що:*

(а) $(A,B;Q)$ *є стабілізуєчим* $A=\left(A_0,A_1,\ldots,A_r\right), B=\left(B_0,B_1,\ldots,B_r\right)$*;*

(б) *диференціальна нерівність*

$$\frac{d}{dt}X(t)+L^*(t)X(t)-P^*(t,X(t))R^{-1}(t,X(t))P(t,X(t))+M(t)\geqslant 0 \quad (1.19)$$

з обмеженою похідною $\hat{X}: I\to G_n^d$*, для якого*

$$R(t,\hat{X}(t))\geqslant 0 \quad (1.20)$$

Тоді диференціальне рівняння (1.14) має обмежений розв'язок $\tilde{X}: I\to S_n^d$*, такий, що* $\tilde{X}(t)\geqslant\hat{X}(t)$ *для кожного розв'язку* $\hat{X}: I\to S_n^d$ *нерівності (1.19), який задовольняє (1.20).*

Доведення. Оскільки $(A,B;Q)$ стабілізується, існує посилення зворотнього зв'язку $\tilde{F}: I\to M_{m,n}^d$ обмежена та неперервна функція, така що система $\left(A_0+B_0\tilde{F}, A_1+B_1\tilde{F},\ldots,A_r+B_r\tilde{F};Q\right)$ є стійкою. Нехай $\hat{X}$ буде обмежений розвязок із обмеженою похідною (1.19), який підтверджує (1.20). Встановлено, що

$$\hat{M}(t) = P^*(t, \hat{X}(t))R^{-1}(t, \hat{X}(t))P(t, \hat{X}(t)) - M(t) - L^*(t)\hat{X}(t) - \frac{d}{dt}\hat{X}(t).$$

Очевидно $\hat{M}(t) \leqslant 0, t \in I$ і $\hat{X}(\cdot)$ є розв'язком нелінійного рівняння

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t) + L^*(t)\hat{X}(t) -$$

$$-P^*(t, \hat{X}(t))R^{-1}(t, \hat{X}(t))P(t, \hat{X}(t)) + M(t) + \hat{M}(t) = 0 \qquad (1.21)$$

Нехай $\varepsilon > 0$ буде фіксовано і визначимо $X_0^\varepsilon(t) = (X_0^\varepsilon(t,1), \ldots, X_0^\varepsilon(t,d))$ – єдиний обмежений розв'язок лінійного рівняння на:

$$\frac{d}{dt}X(t) + L_{\tilde{F}}^*(t)X(t) + M_{\tilde{F}}(t) + \varepsilon J_n = 0 \qquad (1.22)$$

$t \in I$ де $M_{\tilde{F}}(t) = \left(M_{\tilde{F}}(t,1), \ldots, M_{\tilde{F}}(t,d)\right)$

$$M_{\tilde{F}}(t,i) = (I_n \tilde{F}^*(t,i))\begin{pmatrix} M(t,i) & L(t,i) \\ L^*(t,i) & R(t,i) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n \\ \tilde{F}(t,i) \end{pmatrix},$$

і $L_{\tilde{F}}(t)$ визначається як у (1.11). Покажемо, що існує $\mu > 0$ таких, що:

$$X_0^\varepsilon(t) - \hat{X}(t) \geqslant \mu J_n$$

для всіх $(t,i) \in I \times D$.

Дійсно, за лемою 1.3 екв. (1.21) буде записано:

$$l\frac{d}{dt}\hat{X}(t) + Q_{\tilde{F}}^*(t)\hat{X}(t) + M_{\tilde{F}}(t) - (\tilde{F}(t) - \hat{F}(t))^* R(t, \hat{X}(t))(\tilde{F}(t)$$

$$-\hat{F}(t)) + \hat{M}(t) = 0, \qquad (1.23)$$

де $\hat{F}(t) = (\hat{F}(t,1), \ldots, \hat{F}(t,d))$ з

$$\hat{F}(t,i) = -[R(t, \hat{X}(t))(i)]^{-1}P(t, \hat{X}(t))(i), \quad i \in D, \quad t \in I.$$

Віднімаючи (1.23) від (1.22), отримуємо, що $t \to X_0^\varepsilon(t) - \hat{X}(t)$ задовольняє наступне лінійне диференціальне рівняння на S_n^d:

$$\frac{d}{dt}\left[X_0^\varepsilon(t) - \hat{X}(t)\right] + L_{\tilde{F}}^*(t)\left[X_0^\varepsilon(t) - \hat{X}(t)\right] +$$

$$+\varepsilon J_n + \Delta_0(t) = 0, \quad t \in J \qquad (1.24)$$

де $\Delta_0(t) = \left(\Delta_0(t,1), \ldots, \Delta_0(t,d)\right)$,

$$\Delta_0(t,i) = (\tilde{F}(t,i) - \hat{F}(t,i))^* R(t, \hat{X}(t))(i)(\tilde{F}(t,i) - \hat{F}(t,i)) - \hat{M}(t,i) \geqslant 0,$$

$i \in D, t \in I.$

Нехай $T_{\tilde{F}}(t,t_0)$ буде оператор лінійної еволюції на S_n^d пов'язаної з диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt} S(t) = L_{\tilde{F}}(t) S(t)$$

Оскільки $\tilde{F}$ – стабілізуючий коефіцієнт зворотного зв'язку, ми маємо $\| T^*_{\tilde{F}}\left(t, t_0\right) \| \leqslant \beta e^{-\alpha\left(t - t_0\right)}, \quad \forall t \geqslant t_0$ це (для деяких $\beta \geqslant 1, \alpha > 0$).

З (1.24) і (1.9) ми отримуємо формулу представлення

$$X_0^\varepsilon(t) - \hat{X}(t) = \int_t^\infty T^*_{\tilde{F}}(s,t)\left[\varepsilon J_n + \Delta_0(s)\right] ds.$$

Оскільки $T^*_{\tilde{F}}(s,t)$ лінійний додатний оператор ми отримуємо

$$X_0^\varepsilon(t) - \hat{X}(t) \geqslant \varepsilon \int_t^\infty T^*_{\tilde{F}}(s,t) J_n ds, \quad t \in I.$$

З твердження 1.6 в [15] виводимо, що існує $\gamma > 0$ таких, що

$$T^*_{\tilde{F}}(s,t) J_n \geqslant e^{-\gamma(s-t)} J_n.$$

Тому

$$X_0^\varepsilon(t) - \hat{X}(t) \geqslant \frac{\varepsilon}{\gamma} J_n, \quad \forall t \in I. \tag{1.25}$$

Об'єднуючи (1.25) з (1.20), робимо висновок, що

$$R\left(t, X_0^\varepsilon(t)\right)(i) \geqslant \nu I_n > 0, \quad \forall t \in I, \quad i \in D$$

для деякої додатної константи ν.

Покладемо

$$F_0^\varepsilon(t,i) = -\left(R\left(t, X_0^\varepsilon(t)\right)(i)\right)^{-1} P\left(t, X_0^\varepsilon(t)\right)(i), \quad t \in I, \quad i \in D.$$

Доведемо, що $F_0^\varepsilon(t) = \left(F_0^\varepsilon(t,1), F_0^\varepsilon(t,2), \ldots, F_0^\varepsilon(t,d)\right)$ є стабілізуючим коефіцієнтом зворотнього зв'язку.

Переписуємо (1.22) і (1.21) як

$$\frac{d}{dt}X_0^{\varepsilon}(t)+L_{F_0^{\varepsilon}}^{*}(t)X_0^{\varepsilon}(t)+M_{F_0^{\varepsilon}}(t)+\varepsilon J_n+\left(F_0^{\varepsilon}(t)-\tilde{F}(t)\right)^{*}R\left(t,X_0^{\varepsilon}(t)\right)\left(F_0^{\varepsilon}(t)-\right.$$

$$\left.-\tilde{F}(t)\right)=0,$$

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t)+L_{F_0^{*}}^{*}(t)\hat{X}(t)+M_{F_0^{\varepsilon}}(t)-\left(F_0^{\varepsilon}(t)-\hat{F}(t)\right)^{*}R(t,\hat{X}(t))\big(F_0^{\varepsilon}(t)-$$

$$-\hat{F}(t))+\hat{M}(t)=0.$$

Ми отримуємо

$$\frac{d}{dt}\left(X_0^{\varepsilon}(t)-\hat{X}(t)\right)+L_{F_0^{\varepsilon}}^{*}(t)\Big(X_0^{\varepsilon}(t)-\hat{X}(t)\Big)+\varepsilon J_n-\hat{M}(t)+$$

$$+\big(F_0^{\varepsilon}(t)-\tilde{F}(t)\big)^{*}R\left(t,X_0^{\varepsilon}(t)\right)\left(F_0^{\varepsilon}(t)-\tilde{F}(t)\right)+$$

$$+\left(F_0^{\varepsilon}(t)-\hat{F}(t)\right)^{*}\mathfrak{R}(t,\hat{X}(t))\Big(F_0^{\varepsilon}(t)-\hat{F}(t)\Big)=0 \quad (1.26)$$

З (1.25) та (1.26) виводимо, що $t\rightarrow X_0^{\varepsilon}(t)-\hat{X}(t)$ це обмежений і рівномірно додатний розв'язок диференціальної нерівності на S_n^d:

$$\frac{d}{dt}X(t)+L_{F_0^{*}}^{*}(t)X(t)+\varepsilon J_n\leqslant 0.$$

$L_{F_0^{\varepsilon}}(t)$ таке ж як у (1.11) з F, заміненим на F_0^{ε}.

Застосовуючи твердження 1.3 з [15], приходимо до висновку, що система $\left(A_0+B_0F_0^{\varepsilon},A_1+B_1F_0^{\varepsilon},\ldots,A_r+B_rF_0^{\varepsilon};Q\right)$ є стійкою.

Використовуючи $\left(X_0^{\varepsilon}(t),F_0^{\varepsilon}(t)\right)$ в якості початкового кроку, ми побудуємо ітеративно обмежені функції

$$X_p^{\varepsilon}(t)=\Big(X_p^{\varepsilon}(t,1),\ldots,X_p^{\varepsilon}(t,d)\Big),\quad F_p^{\varepsilon}(t)=\Big(F_p^{\varepsilon}(t,1),\ldots,F_p^{\varepsilon}(t,d)\Big),\quad p=0,1,$$

із властивостями:

(а) $X_p^{\varepsilon}(t)\gg\hat{X}(t),\quad t\in X,$

для довільного $\hat{X}(t)$, яка задовольняє (1.19), (1.20).

(б) Система $\Big(A_0+B_0F_{p-1}^{\varepsilon},A_1+B_1F_{p-1}^{\varepsilon},\ldots,A_r+B_rF_{p-1}^{\varepsilon};Q\Big)$ є стійкою $\forall$p=0,1,2…

(в) $X_{p-1}^{\varepsilon}(t)\geqslant X_p^{\varepsilon}(t),\quad t\in I.$

Якщо система $\left(A_0 + B_0 F^{\varepsilon}_{p-1}, A_1 + B_1 F^{\varepsilon}_{p-1}, \ldots, A_r + B_r F^{\varepsilon}_{p-1}; Q\right)$ – стійка, то побудуємо $X^{\varepsilon}_p(t) = \left(X^{\varepsilon}_p(t,1), X^{\varepsilon}_p(t,2), \ldots, X^{\varepsilon}_p(t,d)\right)$ як єдиний обмежений

розв'язок на I наступного лінійного диференціального рівняння на S^d_n:

$$\frac{d}{dt} X^{\varepsilon}_p(t) + L^*_{F^2_{p-1}}(t) X^{\varepsilon}_p(t) + M_{F^*_{p-1}}(t) + \varepsilon J_n = 0 \qquad (1.27)$$

$t \in I$. Покажемо, що $X^{\varepsilon}_p(t) - \hat{X}(t) \geqslant \mu_p J_n$ для додатної константи μ_p

рівняння (1.21) може бути переписане у вигляді

$$\frac{d}{dt} \hat{X}(t) + L^*_{F^s_{p-1}}(t) \hat{X}(t) + M_{F^e_{p-1}}(t) - \left(F^{\varepsilon}_{p-1}(t)\right.$$

$$\left. - \hat{F}(t)\right)^* R(t, \hat{X}(t)) \left(F^{\varepsilon}_{p-1}(t) - \hat{F}(t)\right) + \hat{M}(t) = 0. \qquad (1.28)$$

Віднімаючи (1.28) від (1.27), отримуємо, що $t \to X^{\varepsilon}_p(t) - \hat{X}(t)$ є обмеженим на I розв'язком лінійного рівняння на S^d_n:

$$\frac{d}{dt} X(t) + L^*_{F^c_{p-1}}(t) X(t) + \varepsilon J_n + \Delta_{p-1}(t) = 0, \qquad (1.29)$$

де $L_{F^{\varepsilon}_{p-1}}(t)$ визначено як у (1.11), F замінюється на F^{ε}_{p-1}і

$$\Delta_{p-1}(t) = \left(\Delta_{p-1}(t,1), \ldots, \Delta_{p-1}(t,d)\right),$$

$$\Delta_{p-1}(t,i) = -\hat{M}(t,i) + \left(F^{\varepsilon}_{p-1}(t,i) - \hat{F}(t,i)\right)^* R(t, \hat{X}(t))(i) \left(F^{\varepsilon}_{p-1}(t,i) - \hat{F}(t,i)\right),$$

$$\Delta_{p-1}(t,i) \geqslant 0, \forall i \in D, t \in I.$$

Нехай $T_{p-1}(t, t_0)$ є лінійний еволюційний оператором на S^d_n визначений лінійним диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt} S(t) = L_{F^{\varepsilon}_{p-1}}(t) S(t)$$

Оскільки система $\left(A_0 + B_0 F^{\varepsilon}_{p-1}, A_1 + B_1 F^{\varepsilon}_{p-1}, \ldots, A_r + B_r F^{\varepsilon}_{p-1}; Q\right)$ є стійкою, маємо

$$\left\| T_{p-1}\left(t, t_0\right) \right\| \leqslant \beta e^{-\alpha\left(t - t_0\right)},$$

$\forall t \geqslant t_0, \quad t, t_0 \in S$ (для деяких $\beta \geq 1, \alpha > 0$, можливо залежних від p).

На основі твердження 1.1 отримаємо, що рівняння (1.29) має єдиний обмежений на I розв'язок, тобто

$$X_p^\varepsilon(t) - \hat{X}(t) = \int_t^\infty T_{p-1}^*(s, t)\left[\varepsilon J_n + \Delta_{p-1}(s)\right] ds$$

Застосовуючи знову твердження 4.4 з [15], ми робимо висновок, що існує $\gamma > 0$ (можливо залежне від p) таке, що:

$$X_p^\varepsilon(t) - \hat{X}(t) \geqslant \frac{\varepsilon}{\gamma} J_n \tag{1.30}$$

Таким чином ми довели, що $X_p(t)$ задовольняє умову (a).

З (1.30) та (1.20) випливає, що

$$R\left(t, X_p^\varepsilon(t)\right) \geqslant \hat{\gamma} J_n,$$

$\forall t \in I$, для деяких $\hat{\gamma} > 0$.

Визначимо $F_p^\varepsilon(t) = \left(F_p^\varepsilon(t,1), \ldots, F_p^\varepsilon(t, d)\right)(i)$ за

$F_p^\varepsilon(t, i) = -\left[R(t, X_p^\varepsilon(t))(i)\right]^{-1} P(t, X_p^\varepsilon(t)$.

Ми показуємо, що $F_p^\varepsilon(t,1)$ є стабілізуючим посиленням зворотнього зв'язку.

Дійсно, ми повинні перевірити, що система $\left(A_0 + B_0 F_p^\varepsilon, \ldots, A_r + B_r F_p^\varepsilon; Q\right)$ є стійкою. З цією метою ми переписуємо (1.27) та (1.28) у вигляді

$$\frac{d}{dt} X_p^\varepsilon(t) + L_{F_p^\varepsilon}^*(t) X_p^\varepsilon(t) + \varepsilon J_n + M_{F_p^\varepsilon}(t) + \left(F_p^\varepsilon(t) - F_{p-1}^\varepsilon(t)\right)^*$$

$$\times R\left(t, X_p^\varepsilon(t)\right)\left(F_p^\varepsilon(t) - F_{p-1}^\varepsilon(t)\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t) + L_{F_p^i}^*(t)\hat{X}(t) + M_{F_p^i}(t) - \left(F_p^\varepsilon(t) - \hat{F}(t)\right)^* R(t, \hat{X}(t))\Big(F_p^\varepsilon(t)$$

$$-\hat{F}(t)) + \hat{M}(t) = 0.$$

Звідси,

$$\frac{d}{dt}\left[X_p^\varepsilon(t)-\hat{X}(t)\right]+L^*_{F_p^s}(t)\Big(X_p^\varepsilon(t)-\hat{X}(t)\Big)+\varepsilon J_n+\Big(F_p^\varepsilon(t)-F_{p-1}^\varepsilon(t)\Big)^*R\left(t,X_p^\varepsilon(t)\right)\times$$

$$\times\Big(F_p^\varepsilon(t)-F_{p-1}^\varepsilon(t)\Big)+\Big(F_p^\varepsilon(t)-\hat{F}(t)\Big)^*R(t,\hat{X}(t))\Big(F_p^\varepsilon(t)-\hat{F}(t)\Big)-\hat{M}(t)=0.$$

Тоді $t\to X_p^\varepsilon(t)-\hat{X}(t)$ є обмеженим розв'язком лінійної

диференціальної нерівності:

$$\frac{d}{dt}X(t)+L^*_{F_p^\varepsilon}(t)X(t)+\varepsilon J_n\leqslant 0.$$

Враховуючи (1.30) та положення 1.3 у [15], ми отримуємо, що система $\left(A_0+B_0F_p^\varepsilon,A_1+B_1F_p^\varepsilon,\ldots,A_r+B_rF_p^\varepsilon;Q\right)$ є стійкою. Таким чином ми

показали, що (б) виконується.

Запис лінійного диференціального рівняння (1.27), що відповідає $X_{p-1}^\varepsilon(t)$, у формі

$$\frac{d}{dt}X_{p-1}^\varepsilon(t)+L^*_{F_{p-1}^\varepsilon}(t)X_{p-1}^\varepsilon(t)+M_{F_{p-1}^\varepsilon}(t)+\varepsilon J_n+\Big(F_{p-1}^\varepsilon(t)$$

$$-F_{p-2}^\varepsilon(t)\Big)^*R\left(t,X_{p-1}^\varepsilon(t)\right)\left(F_{p-1}^\varepsilon(t)-F_{p-2}^\varepsilon(t)\right)=0.$$

ми виводимо

$$\frac{d}{dt}\left(X_{p-1}^\varepsilon(t)-X_p^\varepsilon(t)\right)+L^*_{F_{p-1}^\varepsilon}(t)\Big(X_{p-1}^\varepsilon(t)-X_p^\varepsilon(t)\Big)$$

$$+\Big(F_{p-1}^\varepsilon(t)-F_{p-2}^\varepsilon(t)\Big)^*R\left(t,X_{p-1}^\varepsilon(t)\right)\left(F_{p-1}^\varepsilon(t)-F_{p-2}^\varepsilon(t)\right)=0$$

Оскільки система $\left(A_0+B_0F_{p-1}^\varepsilon,A_1+B_1F_{p-1}^\varepsilon,\ldots,A_r+B_rF_{p-1}^\varepsilon;Q\right)$ є стійкою, випливає, що і (в) виконується.

З (а) і (в) випливає, що послідовність $\left\{X_p^\varepsilon(t)\right\}$ є збіжною.

Встановимо $X^\varepsilon(t)=\lim\limits_{p\to\infty}X_p^\varepsilon(t)$.

За допомогою стандартних аргументів ми отримуємо, що

$t \to X^{\varepsilon}(t) = \left(X^{\varepsilon}(t,1), \ldots, X^{\varepsilon}(t,d)\right)$ є обмеженим розв'язком системи раціональних диференціальних рівнянь:

$$\frac{d}{dt}X(t,i) + A_0(t,i)X(t,i) + X(t,i)A_0(t,i) + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(t,i)X(t,i)A_k(t,i) \times$$

$$+\sum_{j=1}^{d} q_{ij}X(t,j) - \left[X(t,i)B_0(t,i) + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(t,i)X(t,i)B_k(t,i) + L(t,i)\right] \times$$

$$\times \left[R(t,i) + \sum_{k=1}^{r} B_k^*(t,i)X(t,i)B_k(t,i)\right]^{-1} \left[B_0^*(t,i)X(t,i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{r} B_k^*(t,i)X(t,i)A_k(t,i) + L^*(t,i)\right] + M(t,i) + \varepsilon I_n = 0 \qquad (1.31)$$

$i \in D$. Більше того,

$$X^{\varepsilon}(t,i) \geqslant \hat{X}(t,i), \quad i \in D, \quad t \in I, \quad \varepsilon > 0. \qquad (1.32)$$

Оскільки побудова $X_p^{\varepsilon}(t,i)$ не залежить від вибору $\hat{X}$, ми робимо висновок, що (1.32) виконується, якщо $\hat{X}(t)$ замінити будь-яким обмеженим розв'язком (1.19), який підтверджує (1.20).

З (1.32) отримуємо $R\left(t, X^{\varepsilon}(t)\right)(i) \gg 0$ і тому добре визначено посилення зворотного зв'язку $F^{\varepsilon}(t) = \left(F^{\varepsilon}(t,1), \ldots, F^{\varepsilon}(t,d)\right)$, по

$$F^{\varepsilon}(t,i) = -\left[\left[R\left(t, X^{\varepsilon}(t)\right)\right](i)\right]^{-1} P\left(t, X^{\varepsilon}(t)\right)(i)$$

Тепер ми покажемо, що $\varepsilon \to X^{\varepsilon}(t)$ – це зростаюча функція. Візьмемо $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Прямим розрахунком ми отримуємо, що система (1.31) для $\varepsilon = \varepsilon_1$ може бути записана

$$\frac{d}{dt}X^{\varepsilon_1}(t) + L^*_{F^{\varepsilon_2}_{p-1}}(t)X^{\varepsilon_1}(t) + M_{F^{\varepsilon_2}_{p-1}}(t) + \left(F^{\varepsilon_2}_{p-1}(t) - F^{\varepsilon_1}(t)\right)^* R\left(t, X^{\varepsilon_1}(t)\right)$$

$$\times \left(F^{\varepsilon_2}_{p-1}(t) - F^{\varepsilon_1}(t)\right) + \varepsilon_1 J_n = 0 \qquad (1.33)$$

З (1.33) та (1.27) для $\varepsilon = \varepsilon_2$ ми отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(X_p^{\varepsilon_2}(t) - X^{\varepsilon_1}(t)\right) + L^*_{F^{\varepsilon_2}_{p-1}}(t)\left(X_p^{\varepsilon_2}(t) - X^{\varepsilon_1}(t)\right) + \left(F^{\varepsilon_2}_{p-1}(t) - F^{\varepsilon_1}(t)\right)^*$$

$$\times R\left(t, X^{\varepsilon_1}(t)\right)\left(F^{\varepsilon_2}_{p-1}(t) - F^{\varepsilon_1}(t)\right) + \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right) J_n = 0,$$

що призводить до $X_p^{\varepsilon_2}(t) - X^{\varepsilon_1}(t) \geqslant 0, t \in I, p \in N$. Взявши межу для $p \to \infty$, отримаємо, що

$$X^{\varepsilon_2}(t) \geqslant X^{\varepsilon_1}(t), \quad \forall t \in I \tag{1.34}$$

Нехай $\varepsilon_k, k \in N$ буде послідовністю додатних дійсних чисел, $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}$ та

$\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0.$

З (1.32) та (1.34) маємо, що $X^{\varepsilon_k}(t) \geqslant X^{\varepsilon_{k+1}}(t) \geqslant \hat{X}(t), \quad \forall t \in I, \quad k \in N.$

Тому функція $\tilde{X}(t)$ є визначена $\tilde{X}(t) = \lim\limits_{k\to\infty} X^{\varepsilon_k}(t), t \in I.$

Очевидно, що

$\tilde{X}(t) = (\tilde{X}(t,1), \tilde{X}(t,2), \ldots, \tilde{X}(t, d))$ є обмеженим розв'язком рівняння (1.14), і доведення теореми 1.2 є повним. □

Висновок 1.2. *Припустимо:*

(а) $(A, B; Q)$ *є стабілізуючою.*

(б) $R(t, i) \geqslant \rho^2 I_n, \quad (t, i) \in I \times D.$

(в) $M(t, i) - L(t, i)R^{-1}(t, i)L^*(t, i) \geqslant 0, \quad (t, i) \in I \times D.$

За цих умов рівняння (4.1) має обмежений розв'язок $\tilde{X}(t) \geqslant 0$. *Більше того* $\tilde{X}(t) \geqslant \hat{X}(t)$, *для будь-якого обмеженого і невід'ємного розв'язку* $\hat{X}(t)$ *рівняння (1.14).*

Доведення. Згідно з розглянутими припущеннями $\hat{X}(t) = 0$ розв'язується диференціальна нерівність (1.19) та умова (1.20), і таким чином твердження теореми 1.2 виконуються. □

За допомогою тієї ж методики, що і в доведенні теореми 1.2, ми можемо довести такий результат:

Теорема 1.3. *Припустимо, що:*

(а) $(A, B; Q)$ *є стабілізуючою;*

(б) *диференціальна нерівність*

$$\frac{d}{dt}X(t) + L^*(t)X(t) - P^*(t, X(t))R^{-1}(t, X(t))P(t, X(t)) + M(t) \leqslant 0 \quad (1.35)$$

має обмежений (з обмеженою похідною) розв'язком $\hat{X}(t)$, *для якого*

$$R(t, \hat{X}(t)) \ll 0. \quad (1.36)$$

За цих умов диференціальне рівняння (4.1) має обмежений розв'язок $\tilde{X}(t)$, *для якого справедлива нерівність* $\tilde{X}(t) \leqslant \hat{X}(t)$ *для всіх обмежених розв'яків* $\check{X}(t)$ *нерівності (1.35), для яких виконується (1.36).*

Теорема 1.4. *Наступні твердження є еквівалентними:*

(i) Трійка $(A, B; Q)$ *є стабілізуючою і диференціальна нерівність*

$$\frac{d}{dt}X(t) + L^*(t, X(t)) - P^*(t, X(t))R^{-1}(t, X(t))P(t, X(t)) + M(t) \gg 0,$$

$$t \in I, \quad (1.37)$$

має обмежений на I розв'язок X, для якого виконується (1.20).

(ii) Диференціальне рівняння на S_n^d *(1.14) має обмежений та стабілізуючий розв'язок* $\tilde{X}(t)$, *для якого виконується* $R(t, \tilde{X}(t)) \gg 0, t \in I$

Доведення. (i) $\rightarrow$ (ii) Нехай $\hat{X}$ буде обмежений на I розвязок з обмеженою похідною (4.11), яка підтверджує (1.20). На підставі теореми 1.2 виводимо, що рівняння (1.14) має обмежений розв'язок $\tilde{X} : I \rightarrow S_n^d$, яке підтверджує $\tilde{X}(t) \geqslant \hat{X}(t)$. Покажемо, що $\tilde{X}(t)$ це стабілізуючий розв'язок рівняння (1.14).

Покладемо

$$\hat{M}(t) = P^*(t, \hat{X}(t))R^{-1}(t, \hat{X}(t))P(t, \hat{X}(t)) - M(t) - L^*(t)\hat{X}(t) - \frac{d}{dt}\hat{X}(t)$$

та $\tilde{F}(t) = -R^{-1}(t, \tilde{X}(t))P(t, \tilde{X}(t))$

Очевидно, що $\hat{M}(t) \ll 0$

Прямим розрахунком отримуємо, що

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}(t) + L_{\tilde{F}}^*(t)\tilde{X}(t) + M_{\tilde{F}}(t) = 0.$$

Оскільки $\hat{X}$ задовольняє (1.23), отримується

$$\frac{d}{dt}[\tilde{X}(t)-\hat{X}(t)]+L^*_{\tilde{F}}(t)(\tilde{X}(t)-\hat{X}(t))+(\tilde{F}(t)-\hat{F}(t))^*\tilde{R}(t,\hat{X}(t))(\tilde{F}(t)-$$

$$-\hat{F}(t))-\hat{M}(t)=0 \qquad (1.38)$$

Оскільки $(\tilde{F}(t)-\hat{F}(t))^*R(t,\hat{X}(t))(\tilde{F}(t)-\hat{F}(t))-\hat{M}(t)\gg 0$, то за результатами розділу 4 у [15] ми робимо висновок про стійкість системи $\left(A_0+B_0\tilde{F},A_1+B_1\tilde{F},\ldots,A_r+B_r\tilde{F};Q\right)$. Отже, $\tilde{X}(t)$ є стабілізуючим розв'язком рівняння (1.14).

(ii) → (i) Якщо рівняння (1.14) має стабілізуючий розв'язок $\tilde{X}(t)$, тоді трійка $(A,B;Q)$ є стабілізуючою. Нехай $\tilde{X}:I\to S_n^d$ буде обмежений стабілізуючий розв'язок (1.14), який задовольняє $R(t,\tilde{X}(t)\gg 0,t\in I$. Нехай $F(t)$ – стабілізуючий коефіцієнт посилення зворотного зв'язку, визначений $F(t)=-R^{-1}(t,\tilde{X}(t))P(t,\tilde{X}(t))$.

Визначимо

$$P_F(t,X):S_n^d\to M_{m,n}^d \text{ по } P_F(t,X)(i)=B_0^*(t,i)X(i)+\sum_{k=1}^{r}B_k^*(t,i)X(i)$$

$$\left(A_k(t,i)+B_k(t,i)F(t,i)\right)+L^*(t,i)+R(t,i)F(t,i),i\in D \text{ і } M_F(t)=\left(M_F(t,1),\ldots\right.$$

$$\left.M_F(t,d)\right),$$

$$M_F(t,i)=M(t,i)+L(t,i)F(t,i)+F^*(t,i)L^*(t,i)+F^*(t,i)R(t,i)F(t,i)$$

$i\in D,t\in I$, де $F(t,i)=F(t)(i)$

Нехай $T_F(t,t_0)$ – лінійний еволюційний оператор, визначений рівнянням

$$\frac{d}{dt}S(t)=L_F(t)S(t)$$

Оскільки F – стабілізуючий коефіцієнт зворотного зв'язку, то для всіх, з деякими, маємо $\left\| T_F\left(t,t_0\right)\right\| \leqslant \beta e^{-\alpha(t-t_0)}$, для всіх $t\geqslant t_0,\quad t_0\in I$ та деяких $\alpha>0,\beta\geqslant 1$.

Нехай $C(I,S_n^d)$ буде простір Банаха всіх обмежених і неперервних функцій, визначених на I значеннях в S_n^d. З тих пір $R(t,\tilde{X}(t))\gg 0,t\in I$ існує відкритий набір $U \subset C\left(I, S_n^d\right)$, такий, що $\tilde{X} \in U$ та $R(t, X(t)) \geqslant 0, t \in I$ для всіх $X \in U$

Розглянемо оператора $\Psi : U \times R \to C\left(I, S_n^d\right)$, визначеного у вигляді

$$\Psi(X, \delta)(t) = \int_t^\infty T_F^*(s, t)\Big[M_F(s) + \delta J_n - P_F^*(s, X(s))R^{-1}(s, X(s))P_F(s, X(s))\Big]\, ds - X(t)$$

Ми застосуємо теорему про неявну функцію до рівняння

$$\Psi(X, \delta) = 0 \tag{1.39}$$

щоб показати, що існує така функція $X_\delta \in U$, що

$$X_\delta(t) = \int_t^\infty T_F^*(s, t)\Big[M_F(s) + \delta J_n - P_F^*\left(s, X_\delta(s)\right) R^{-1}\left(s, X_\delta(s)\right) P_F\left(s, X_\delta(s)\right)\Big]\, ds,$$

для досить малого $|\delta|$.

Неважко переконатися, що $(\hat{X}, 0)$ є розв'язком (1.39).

Покажемо, що $D_1\Psi(\tilde{X}, 0) : C\left(I, S_n^d\right) \to C\left(I, S_n^d\right)$ ізоморфізм, $D_1\Psi$ є похідною Ψ за першим аргументом.

Тоді

$$D_1\Psi(\tilde{X}, 0)Y = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}(\Psi(\tilde{X} + \varepsilon Y, 0) - \Psi(\tilde{X}, 0)) \text{ і } P_F(t, \tilde{X}(t)) = 0.$$

Можна легко перевірити $D_1\Psi(\tilde{X}, 0)Y = -Y$ і тому $D_1\Psi(\tilde{X}, 0) = -\tilde{I}_C, \tilde{I}_C$ будучи оператором ідентифікації на $C\left(I, S_n^d\right.$. Також $D_1\Psi(X, \delta)$ є неперервним. Застосовуючи теорему неявної функції, виводимо, що існує $\tilde{\delta} > 0$ і неперервна функція $\delta \to X_\delta : (-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}) \to U$, яка розв'язує $\Psi\left(X_\delta, \delta\right) = 0$. Легко помітити, що для $\delta \in (-\tilde{\delta}, 0), X_\delta(t)$ буде розв'язком нерівності (1.37) з необхідними властивостями.

Наслідок 1.1. *Якщо рівняння (1.14) має стабілізуючий і обмежений на I розв'язок $\tilde{X}$, для якого (1.20), то $\tilde{X}(t) \geqslant \hat{X}(t)$ для кожного розв'язку $\hat{X}(t)$ нерівності (1.19), для якого справедлива (1.20).*

Доведення. Припустимо, що (1.14) має стабілізуючий і обмежений на I розв'язок $\tilde{X}$. Тоді з теореми 1.4 випливає, що умови теореми 1.2 виконані. Тому існує обмежений розв'язок з властивістю максимальності $\hat{X}$

(1.14). З доведення теореми 1.4 випливає, що є $\hat{X}$ стабілізуючим. Звідси, за теоремою 1.1 ми маємо $\tilde{X} = \hat{X}$, що і треба було довести. □

В останній частині цього пункту ми звернемо увагу на випадок, коли коефіцієнти системи (1.2) (і, що еквівалентно, рівняння (1.14)) задовольняють додаткові умови:

$$R(t,i) \geqslant \rho I_n > 0$$
$$M(t,i) - L(t,i)R^{-1}(t,i)L^*(t,i) \geqslant 0 \tag{1.40}$$

для всіх $(t,i) \in I \times D, \rho > 0$ не залежить від (t,i).

Умови (1.40) виконуються, коли система (1.2) пов'язана з лінійно-квадратичною задачею з певним знаком, пов'язаним з лінійною стохастичною системою (1.3) і функціоналом вартості (1.4).

Розглянемо більш загальну ситуацію, коли елементи матриці Q задовольняють умову (1.7).

Лема 1.4. *Припустимо, що нерівності (1.40) мають місце. Тоді*

(а) Нехай $X : I_1 \subset I \to S_n^d$ є розв'язком рівняння (1.14). Якщо існує $\tau \in I_1$ таке, що $X(\tau,i) \geqslant 0$, $i \in D$, тоді $X(t,i) \geqslant 0$ для всіх $t \in I_1 \cap (-\infty, \tau]$.

(б) Нехай $\hat{X} : I_1 \subset I \to S_n^d$, $\check{X} : I_1 \subset I \to S_n^d$ – два розв'язки рівняння (1.14).

Якщо існує $\tau \in I_1$ таке $\check{X}(\tau) \geqslant \hat{X}(\tau) \geqslant 0$, тоді $\tilde{X}(t) \geqslant \hat{X}(t)$ для всіх $t \in I_1 \cap (-\infty, \tau]$.

Доведення. а) Нехай $F(t) = (F(t,1), F(t,2), \ldots, F(t,d))$,

$$F(t,i) = -(R(t,X(t))(i))^{-1}P(t,X(t))(i), \quad t \in I_1, \quad i \in D$$

З леми 1.3 випливає, що рівняння (1.14), відносно $X(t)$ може бути записане наступним чином:

$$\frac{d}{dt}X(t) + L_F^*(t)X(t) + \tilde{M}(t) = 0 \tag{1.41}$$

$t \in I_1$, де $\tilde{M}(t) = (\tilde{M}(t,1), \ldots \tilde{M}(t,d))$

$$\tilde{M}(t,i) = M(t,i) - L(t,i)R^{-1}(t,i)L^*(t,i) + [R(t,i)F(t,i)$$

$$+L^*(t,i)\big]^* R^{-1}(t,i)\big[R(t,i)F(t,i)+L^*(t,i)\big], \quad (t,i)\in I_1\times D$$

З (1.41) випливає, що $\tilde{M}(t)\geqslant 0$, $t\in I_1$. Якщо $T_F(t,t_0)$ – лінійний еволюційний оператор на S_n^d, визначений лінійним диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt}S(t)=L_F(t)S(t),$$

то з (1.41) і (1.9) отримуємо

$$X(t)=T_F^*(\tau,t)X(\tau)+\int_t^\tau T_F^*(s,t)\tilde{M}(s)ds,$$

$(\forall)t\in I_1\cap(-\infty,\tau]$ Оскільки $T_F^*(s,t):S_n^d\to S_n^d$ є додатним оператором, то робимо висновок, що $X(t)\geqslant 0$.

б) Покладемо $\check{F}(t)=(\check{F}(t,1),\check{F}(t,2),\ldots,\check{F}(t,d))$ і
$\hat{F}(t)=(\hat{F}(t,1),\hat{F}(t,2),\ldots,\hat{F}(t,d))$, де

$$\check{F}(t,i)=-(R(t,\check{X}(t))(i))^{-1}P(t,\check{X}(t))(i)$$

та

$$\hat{F}(t,i)=-(R(t,\hat{X}(t))(i))^{-1}P(t,\hat{X}(t))(i)$$

Нехай $Y(t)$ визначено як $Y(t)=\check{X}(t)-\hat{X}(t), t\in I_1$.

З леми 1.3 випливає, що $Y(t)$ є розв'язком афінного диференціального рівняння на S_n^d

$$\frac{d}{dt}Y(t)+L_{\check{F}}^*(t)Y(t)+\check{M}(t)=0, \quad t\in I_1 \tag{1.42}$$

де $L_{\check{F}}(t)$ визначено у (1.11) з F, заміненим на $\check{F}$, $\check{M}(t)=(\check{M}(t,1),\ldots,\check{M}(t,d))$

$$\tilde{M}(t,i)=[\tilde{F}(t,i)-\hat{F}(t,i)]^*R(t,\hat{X}(t))(i)[\check{F}(t,i)-\hat{F}(t,i)], \quad (t,i)\in I_1\times D.$$

Грунтуючись на частині (а) цієї леми, отримуємо, що $\hat{X}(t)\geqslant 0$.

Оскільки $R(t,\hat{X}(t))(i)\geqslant 0, t\in I_1\cap(-\infty,\tau], \quad i\in D$. Нехай $T(t,t_0)$ є лінійним
еволюційним оператором на S_n^d, визначеним лінійним диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt}S(t) = L_{\check{F}}(t)S(t).$$

Отримуємо формулу

$$Y(t) = \check{T}^*(\tau, t)Y(\tau) + \int_t^\tau \check{T}(s,t)\check{M}(s)ds.$$

Висновок випливає з урахуванням того, що $\check{T}^*(s,t)$ додатним оператором на S_n^d. □

Для кожного $\tau \in I$ позначимо через $X_\tau(\cdot)$ розв'язок рівняння (1.14), для якого виконується умова $X_\tau(\tau, i) = 0, \quad i \in D$.

Твердження 1.4. Припустимо, що $(A, B; Q)$ є стабілізуючою і (1.40) виконується. Тоді:

(i) для кожного $\tau \in I$ розв'язок $X_\tau(\cdot)$ визначено на $I \cap (-\infty, \tau]$. Більш того, існує $c > 0$, таке що $0 \leqslant X_\tau(t) \leqslant cJ_n, \quad \forall t \leqslant \tau, \quad t \in I$.

(ii) $X_{\tau_1}(t) \leqslant X_{\tau_2}(t) \forall t \leqslant \tau_1 < \tau_2, \quad t \in I$.

Доведення. (i) Нехай $I_\tau \subset (-\infty, \tau] \cap I$ буде максимальний інтервал, на якому визначено $X_\tau(\cdot)$.

З частини (a) леми 1.4 маємо, що $X_\tau(t) \geq 0, t \in I_\tau$. Оскільки $(A, B; Q)$ є стабілізуючою, то існує неперервна і обмежена функція $F^0: I \to M_{m,n}^d$, така що система $\left(A_0 + B_0F^0, A_1 + B_1F^0, \ldots, A_r + B_rF^0; Q\right)$ є стійкою. Нехай $X^0(t)$ – єдиний обмежений на I розв'язок афінного диференціального рівняння типу Ляпунова:

$$\frac{d}{dt}X^0(t) + L^*_{F^0}(t)X^0(t) + M^0(t) = 0,$$

де $M^0(t) = \left(M^0(t,1), M^0(t,2) \ldots M^0(t,d)\right)$,

$$M^0(t,i) = M(t,i) + L(t,i)F^0(t,i) + \left(F^0(t,i)\right)^* L^*(t,i) + \left(F^0(t,i)\right)^* R(t,i)F^0(t,i)$$

Оскільки (1.40) виконується, то отримуємо, що $M^0(t) \geqslant 0, \quad t \in I$.

Отже, існує $c > 0$таке, що $0 \leqslant X^0(t) \leqslant cJ_n$ для всіх $t \in T$. Прямими обчисленнями отримаємо, що $X^0(t) - X_\tau(t)$ задовольняє афінне диференціальне рівняння типу Ляпунова

$$\frac{d}{dt}\left(X^0(t) - X_\tau(t)\right) + L^*_{F^0}(t)\left(X^0(t) - X_\tau(t)\right) + \tilde{M}^0(t) = 0, \qquad (1.43)$$

$$t \in I_\tau, \text{ де } \tilde{M}^0(t) = \left(\tilde{M}^0(t,1), \tilde{M}^0(t,2), \ldots, \tilde{M}^0(t,d)\right)$$

$$\tilde{M}^0(t,i) = \left(F^0(t,i) - F_\tau(t,i)\right)^* R\left(t, X_\tau(t)\right)(i)\left(F^0(t,i) - F_\tau(t,i)\right),$$

$(t,i) \in J_\tau \times D$ Оскільки $X_\tau(t) \geqslant 0$ отримуємо $\tilde{M}^0(t) \geqslant 0, t \in I_\tau$.

З (1.43) отримуємо

$$X^0(t) - X_\tau(t) \geqslant 0, \qquad (1.44)$$

$\forall t \in I_\tau$, звідки $0 \leqslant X_\tau(t) \leqslant X^0(t) \leqslant cJ_n, \quad \forall t \in I_\tau$.

Тому $t \to X_\tau(t)$ обмежений і, таким чином, робимо висновок про те, що $I_\tau=(-\infty,\tau]\cap I$.

(ii) випливає з леми 1.4 □

Тепер ми можемо довести наступне твердження:

Теорема 1.5. *Припустимо, що $(A, B; Q)$ є стабілізуючою і умова (1.40) виконується. За цими припущеннями рівняння (1.14) має два обмежених розв'язки $\tilde{X} : I \to S_n^d, \tilde{\tilde{X}} : I \to S_n^d$ з властивістю $\tilde{X}(t) \geqslant \hat{X}(t) \geqslant \tilde{\tilde{X}}(t) \geqslant 0$ для будь-якого обмеженого та невід'ємного розв'язку рівняння (1.14).*

Доведення. Існування максимального розв'язку $\tilde{X}(t)$ гарантується наслідком 1.19. Залишається довести існування мінімального розв'язку $\tilde{\tilde{X}}(t)$. Для цього ми використаємо результати твердження 1.4. Визначимо $\tilde{\tilde{X}}(t) = \lim\limits_{\tau\to\infty} X_\tau(t), \quad t \in I$. Звертаючись до результату твердження 1.4, отримуємо, що ця межа існує.

Оскільки $X_\tau(t)$ – обмежений розв'язок (1.14) за теоремою Лебега, робимо висновок, що $\tilde{\tilde{X}}$ є розв'язком рівняння (1.14).

Перевіряти мінімальність $\tilde{\tilde{X}}$ в класі невід'ємних розв'язків рівняння (1.14) ми будемо використовуючи лему 1.4. Якщо $\hat{X}(\cdot)$ є невід'ємним і обмеженим розв'язком рівняння (1.14), то для кожного $\tau \in I$ маємо, що

$$\hat{X}(\tau) \geqslant 0 = X_\tau(\tau).$$

Тому $X_\tau \leqslant \hat{X}(t)$ для всіх $t \leqslant \tau, t \in I$.

Розглянувши границю при $\tau \to \infty$, робимо висновок, що $\tilde{\tilde{X}}(t) \leqslant \hat{X}(t)$ □

З теореми 1.4 (i) → (ii) легко виводимо:

Твердження 1.5. *Якщо існує* $\mu > 0$ *така, що*

$$\begin{pmatrix} M(t,i) & L(t,i) \\ L^*(t,i) & R(t,i) \end{pmatrix} \geqslant \mu I_{n+m}, \quad (\forall)(t,i) \in I \times D \quad (1.45)$$

то будь-який невід'ємний і обмежений розв'язок рівняння (1.14) рівномірно дотатним і стабілізуючим.

Доведення. Нехай $\tilde{X} : I \to S_n^d$ буде невід'ємним і обмеженим розв'язком рівняння (1.14). На основі леми 1.3 рівн. (1.14) на $\tilde{X}$ може бути переписане у формі (1.41). Якщо (1.45) виконується, то $\tilde{M}(t)$ в (1.41) рівномірно додатним. Тепер, застосовуючи твердження 1.3 в [15] до рівняння (1.41) ми робимо висновок, що $\tilde{X}$ рівномірно додадтним, а система

$(A_0 + B_0\tilde{F}, A_1 + B_1\tilde{F}, \ldots, A_r + B_r\tilde{F}; Q)$ стійка. □

Теорема 1.6. *Припустимо, що* $(A, B; Q)$ *є стабілізуючою і (1.45) виконується. Тоді рівняння (1.14) має стабілізуючий і обмежений на* I *розв'язок* $\tilde{X}(t)$*, який є рівномірно додадтним.*

Доведення. Якщо (1.45) виконується, то рівність (1.14) є правильною □

З теореми 1.5 отримуємо, що рівняння (1.14) має два обмежених та невід'ємних розв'язків $\tilde{X}(t)$ та $\tilde{\tilde{X}}(t)$.

З твердження 1.5 випливає, що $\tilde{X}(t)$ і $\tilde{\tilde{X}}(t)$ є стабілізуючими та рівномірними додатними розв'язками рівняння (1.14) на основі теореми 1.1, $\tilde{X}(t) = \tilde{X}(t), \quad \forall t \in I$. □

Для отримання ще однієї достатньої умови, що забезпечує існування стабілізуючого розв'язку рівняння (1.14), для якого (1.40) виконо, виконаємо факторизацію

$$M(t,i) - L(t,i)R^{-1}(t,i)L^*(t,i) = C_0^*(t,i)C_0(t,i) \tag{1.46}$$

Введемо позначення

$$\overline{A}_k(t,i) = A_k(t,i) - B_k(t,i)R^{-1}(t,i)L^*(t,i) \text{ для всіх } t, i, k.$$

Розглянемо таку лінійну систему:

$$x(t) = \overline{A}_0(t,\eta(t))x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} \overline{A}_k(t,\eta(t))x(t)dw_k(t), \quad t \geqslant 0,$$

$$y(t) = C_0(t,\eta(t))x(t). \tag{1.47}$$

Правильне твердження:

Лема 1.5. *Розглянемо I=R_+ і припустимо:*

(а) *(1.40) виконується;*

(б) *система (1.47) є стохастично визначеною;*

(в) *елементи матриці Q задовольняють (1.5) та (1.7).*

За цими припущеннями будь-який невід'ємний та обмежений розв'язок рівняння (1.14) є стабілізуючим.

Доведення. Нехай $\tilde{X}(t) = (\tilde{X}(t,1), \tilde{X}(t,2), \ldots, \tilde{X}(t,d))$ буде обмеженим і невід'ємним розв'язком рівняння (4.1). Прямим розрахунком ми отримуємо:

$$\frac{d}{dt}\tilde{X}(t,i) + \left[A_0(t,i) + B_0(t,i)\tilde{F}(t,i)\right]^* \tilde{X}(t,i) + \tilde{X}(t,i)\left[A_0(t,i) + B_0(t,i)\tilde{F}(t,i)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \left(A_k(t,i) + B_k(t,i)\tilde{F}(t,i)\right)^* \tilde{X}(t,i)\left(A_k(t,i) + B_k(t,i)\tilde{F}(t,i)\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} q_{ij}\tilde{X}(t,j) + C_0^*(t,i)C_0(t,i) + \left(L^*(t,i) + R(t,i)\tilde{F}(t,i)\right)^* R^{-1}(t,i) +$$

$$\times \left(L^*(t,i) + R(t,i)\tilde{F}(t,i)\right) = 0, \tag{1.48}$$

$$\tilde{F}(t,i) = -R^{-1}(t,\tilde{X}(t))(i)P(t,\tilde{X}(t))(i), \quad (t,i) \in I \times D.$$

Нехай $\left(t_0, x_0\right) \in R_+ \times R^n$ і позначимо $\tilde{x}(t)$ розв'язком задачі:

$$dx(t) = \left[A_0(t,\eta(t)) + B_0(t,\eta(t))\tilde{F}(t,\eta(t))\right] x(t)dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\left[A_k(t,\eta(t))+B_k(t,\eta(t))\tilde{F}(t,\eta(t))\right]x(t)dw_k(t),\quad t\geqslant t_0 \; (1.49)$$

$$x(t_0)=x_0.$$

Розглянемо функцію $v{:}R_+\times R^{\mathrm{n}}\times D\to R$, визначену $v(t,x,i)=x^*\tilde{X}(t,i)x$. Застосування формули типу Іто (див. теорему 1.12 в [15]) до функції v та до системи (1.49), та використання рівняння (1.32) дозволить отримати

$$E\left[\hat{x}^*(\tau)\tilde{X}(\tau,\eta(\tau))\tilde{x}(\tau)\,|\,\eta\left(t_0\right)=i\right]-x_0^*\tilde{X}\left(t_0,i\right)x_0=$$

$$=-E\left[\int_{t_0}^{\tau}\left\{\left|C_0(t,\eta(t))\tilde{x}(t)\right|^2+|R^{\frac{-1}{2}}(t,\eta(t))\big(L^*(t,\eta(t))+\right.\right.$$

$$+R(t,\eta(t))\tilde{F}(t,\eta(t)))\tilde{x}(t)\,|^2\,\}dt\,|\,\eta(t_0)=i],\quad i\in D,$$

для всіх $\tau\geqslant t_0$.

Оскільки $\tilde{X}(t)$ є невід'ємним обмеженим розв'язком, ми отримуємо, що існує $c_1>0$ такий, що:

$$E\left[\int_{t_0}^{\infty}\left\{\left|C_0(t,\eta(t))\tilde{x}(t)\right|^2+|R^{\frac{-1}{2}}(t,\eta(t))\big(L^*(t,\eta(t))+\right.\right.$$

$$+R(t,\eta(t))\tilde{F}(t,\eta(t)))\tilde{x}(t)\,|^{2^2}dt\,|\,\eta(t_0)=i]\leqslant c_1\,|\,x_0\,|^2\;.(1.50)$$

З умови виявлення системи (1.47) виводимо, що існує $H:R_+\to M_{n,p}^d$ обмежена і неперервна функція, така, що нульовий розв'язок системи

$$dx(t)=[\overline{A}_0(t,\eta(t))+H(t,\eta(t))C_0(t,\eta(t))\big]\,x(t)dt$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\overline{A}_k(t,\eta(t))x(t)dw_k(t)$$

є експоненціально стійким у середньому квадратичному.

Легко помітити, що (1.49) може бути записана у вигляді

$$d\tilde{x}(t)=\left[\left(\overline{A}_0(t,\eta(t))+H(t,\eta(t))C_0(t,\eta(t))\right)\tilde{x}(t)+f_0(t)\right]dt$$

$$+\sum_{k=1}^{r}\left(\overline{A}_k(t,\eta(t))\tilde{x}(t)+f_k(t)\right)dw_k(t) ,$$

де

$$f_0(t) = -H(t,\eta(t))C_0(t,\eta(t))\tilde{x}(t)$$
$$+B_0(t,\eta(t))R^{-1}(t,\eta(t))\big(L^*(t,\eta(t)) + R(t,\eta(t))\tilde{F}(t,\eta(t))\big)\,\tilde{x}(t)$$

$$f_k(t) = B_k(t,\eta(t))R^{-1}(t,\eta(t))\big(L^*(t,\eta(t)) + R(t,\eta(t))\tilde{F}(t,\eta(t))\big)\,\tilde{x}(t),$$
$$k = 1,2,\ldots,r$$

Як і в доведенні теореми 1.13 в [15], ми робимо висновок, що нульовий розв’язок системи (1.49) є середньоквадратичним експоненціально стійким у середньому квадратичному. □

Зауваження 1.3. Результат попередньої леми все ще зберігається, якщо результат системи (1.47) замінити на систему вигляду

$$dy(t) = C_0(t,\eta(t))x(t)dt + \sum_{k=1}^{r} C_k(t,\eta(t))x(t)dw_k(t),$$

де матриці $C_k(t,i)$ такі, що:

$$M(t,i) - L(t,i)R^{-1}(t,i)L^*(t,i) = \sum_{k=0}^{r} C_k^*(t,i)C_k(t,i), \quad (t,i) \in R_+ \times D.$$

Теорема 1.7. *Припустимо, що* $(A,B;Q)$ *стабілізується, і твердження леми 1.5 мають місце. Тоді рівняння (1.14) має обмежений стабілізуючий і невід’ємний розв’язок.*

Доведення Доведення безпосередньо випливає з теореми 1.5 та леми 1.5. □

1.5. Періодичний випадок

У цьому пункті наша увага зосереджена на тому випадку, коли коефіцієнти системи (1.2) є θ-періодичними функціями.

Легко перевірити, що в цьому випадку ми маємо

$$L(t+\theta)X = L(t)X,$$
$$P(t+\theta,X) = P(t,X),$$
$$R(t+\theta,X) = R(t,X),$$

для всіх $t \in I, \quad X \in S_n^d$

Тому можна сказати, що коефіцієнти диференціального рівняння на S_n^d (1.14) є θ-періодичними функціями.

Більше того, якщо $F: I \to M_{m,n}^d$ це θ-періодична функція, то $L_F(t+\theta)X = L_F(t)X,\ t \in I, \quad X \in S_n^d.$

Також у нас є $T(t+\theta, t_0+\theta) = T(t, t0)$ для всіх $t_0, t \in I$. Спочатку ми доведемо:

Теорема 1.8 *За розглянутих припущень обмежений і стабілізуючий розв'язок рівняння (1.14) (якщо вона існує) є θ-періодичною функцією.*

Доведення. Нехай $\tilde{X}(t) = (\tilde{X}(t,1), \ldots, \tilde{X}(t,d))$ є обмежений і стабілізуючий розв'язок рівняння (1.14). Нехай $\hat{X}(t) = (\hat{X}(t,1), \ldots, \hat{X}(t,d))$ визначається через $\hat{X}(t) = \tilde{X}(t+\theta, i)$. Неважко помітити, що $t \to \hat{X}(t)$ є обмеженим розв'язком рівняння (1.14).

Нехай $\tilde{F}(t) = (\tilde{F}(t,1), \ldots, \tilde{F}(t,d))\hat{F}(t) = (\hat{F}(t,1), \ldots, \hat{F}(t,d))$ визначається як:

$$\tilde{F}(t,i) = -(R(t, \tilde{X}(t))(i))^{-1}P(t, \tilde{X}(t))(i)$$

$$\hat{F}(t,i) = -(R(t, \hat{X}(t))(i))^{-1}P(t, \hat{X}(t))(i), \quad i \in D, t \in I$$

Позначимо через $\tilde{T}(t, t_0)$ і $\hat{T}(t, t_0)$ відповідно, оператори лінійної еволюції над S_n^d, визначеними лінійними диференціальними рівняннями

$$\frac{d}{dt}S(t) = L_{\tilde{F}}(t)S(t),$$

$$\frac{d}{dt}S(t) = L_{\hat{F}}(t)S(t),$$

відповідно.

З єдиності отримуємо

$$\hat{T}\left(t, t_0\right) = \tilde{T}\left(t+\theta, t_0+\theta\right) \tag{1.51}$$

для усіх $t \geqslant t_0,\ t, t_0 \in I$. Так як $\tilde{X}(t)$ стабілізуючий розв'язок рівняння (1.14) маємо $\left\| \tilde{T}\left(t, t_0\right) \right\| \leqslant \beta e^{-\alpha\left(t-t_0\right)}$ для всіх $t \geqslant t_0$, $t, t_0 \in I$ з деякими $\beta \geqslant 1, \alpha > 0$.

З (1.35) виводимо

$$\left\| \hat{T}\left(t, t_0\right) \right\| \leqslant \beta e^{-\alpha\left(t - t_0\right)}, \quad t \geqslant t_0 ,$$

що показує, що $t \to \hat{X}(t)$, що це також стабілізуючий розв'язок рівняння (1.14).

Застосовуючи теорему 1.4, ми отримуємо $\hat{X}(t) = \tilde{X}(t)$ для всіх $t \in I$. Отже, $\tilde{X}(t+\theta) = \tilde{X}(t)$ □

Висновок 1.3. Припустимо, що $A_k(t,i) = A_k(i)$, $B_k(t,i) = B_k(i)$, $k = 0,1,\ldots,r,$ $M(t,i) = M(i), L(t,i) = L(i)$ і $R(t,i) = R(i), t \in I, i \in D$. Тоді стабілізуючий розвязок системи (1.2), якщо він існує, є сталим розв'язком наступної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A_0^*(i)X_i + X_iA_0(i) + \sum_{k=1}^{r} A_k^*(i)X_iA_k(i) + \sum_{j=1}^{d} q_{ij}X_j - \Big[X_iB_0(i)+$$

$$+\sum_{k=1}^{r} A_k^*(i)X_iB_k(i) + L(i)\Big] \left[R(i) + \sum_{k=1}^{r} B_k^*(i)X_iB_k(i)\right]^{-1} \Big[B_0^*(i)X_i+$$

$$+\sum_{k=1}^{r} B_k^*(i)X_iA_k(i) + L^*(i)\Big] + M(i) = 0, \quad i \in D$$

Щодо існування періодичного розв'язку рівняння. (1.14) маємо:

Теорема 1.9. *Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1.14) є θ-періодичними функціями і твердження теореми 1.2 виконуються. За цих умов рівняння (1.14) має періодичний розв'язок $\tilde{X}(t)$ із властивістю максимальності в теоремі 1.2.*

Доведення. Згідно з твердженням 3.3 випливає, що для кожного $p = 0,1,2,...,t \to X_p^{\varepsilon}(t)$, що розглядається у доведенні теореми 1.2, є θ-періодичними функціями.

Отже $X^{\varepsilon}(t) = \lim\limits_{p\to\infty} X_p^{\varepsilon}(t)$ є θ-періодичною функцією і, нарешті $\tilde{X}(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} X^{\varepsilon}(t)$, є θ-періодичною функцією. □

Результат попередньої теореми поширюється на випадок рівняння (1.14) відповідний результат доведений в роботі [5], де розглянуто матричне диференціальне рівняння Ріккаті у детермінованому випадку.

Зауваження 1.4. Розглянемо афінне диференціальне рівняння

$$\frac{d}{dt}K(t) + L^*(t)K(t) + H(t) = 0, \tag{1.52}$$

$t \in I, H(\cdot)$ та $L(\cdot)$ будучи θ-періодичними функціями.

Нехай $\tilde{K}(t)$ є θ-періодичним розв'язком рівняння (1.52). Нехай $t_0 \in I$ є фіксованим виправлено. Маємо:

$$\tilde{K}(t) = T^*\left(t_0+\theta, t\right)\tilde{K}\left(t_0+\theta\right) + \int_t^{t_0+\theta} T^*(s,t)H(s)ds, \tag{1.53}$$

$t \leq t_0 + \theta, t \in I.$

$T(s,t)$ – оператор лінійної еволюції над S_n^d, визначений лінійним диференціальним рівнянням

$$\frac{d}{dt}S(t) = L(t)S(t)\ , \tag{1.54}$$

Умова періодичності призводить до

$$\left[\tilde{J} - T^*\left(t_0+\theta, t_0\right)\right]\tilde{K}\left(t_0+\theta\right) = \int_{t_0}^{t_0+\theta} T^*\left(s, t_0\right)H(s)ds,$$

де $\tilde{J} : G_n^d \to G_n^d$ є одиничним оператором.

Якщо оператор $\tilde{J} - T^*\left(t_0+\theta, t_0\right)$ має обернений, то

$$\tilde{K}\left(t_0+\theta\right) = \left(\tilde{J} - T^*\left(t_0+\theta, t_0\right)\right)^{-1}\int_{t_0}^{t_0+\theta} T^*\left(s, t_0\right)H(s)ds.$$

Таким чином (1.53) стає $\tilde{K}(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+\theta} \mathbf{G}(t,s)H(s)ds, t_0 \leqslant t \leqslant t_0+\theta,$ де

$$\begin{aligned} &\mathbf{G}(t,s) = T^*\left(t_0+\theta, t\right)\left[\tilde{J} - T^*\left(t_0+\theta, t_0\right)\right]^{-1} T^*\left(s, t_0\right) + T^*(s,t) \\ &t_0 \leqslant t < s \leqslant t_0+\theta \\ &\mathbf{G}(t,s) = T^*\left(t_0+\theta, t\right)\left[\tilde{J} - T^*\left(t_0+\theta, t_0\right)\right]^{-1} T^*\left(s, t_0\right) \end{aligned} \tag{1.55}$$

для $t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t0+\theta$. $G(t,s)$ – функція Гріна, пов'язана з рівнянням (1.52).

Якщо рівняння (1.54) не має θ-періодичного розв'язку, окрім нульового розв'язку, то для кожного $t_0 \in I$ оператора $\tilde{J} - T\left(t_0 + \theta, t_0\right)$ є ін'єкційним, отже, він є зворотнім і тому $\tilde{J} - T^*\left(t_0 + \theta, t_0\right)$ є зворотним. Так відбувається, наприклад, якщо нульовий розв'язок рівняння (1.54) є експоненціально стійким.

Тепер ми доведемо результат теореми 1.4 у періодичному випадку:

Теорема 1.10. *Припустимо, що коефіцієнти рівняння (1.14) є θ-періодичними функціями. Тоді еквівалентні наступні твердження:*

(i) $(A, B; Q)$ *стабілізується, а диференціальна нерівність (1.23) має θ-періодичний розв'язок, який підтверджує (1.20).*

(ii) Рівння (1.14) має стабілізуючий θ-періодичний розв'язок $\tilde{X}(t)$ *, який зодовольняє (1.20).*

Доведення. (i) → (ii) Застосовуючи теорему 1.4, виводимо, що рівняння (1.14) має стабілізуючий і обмежений на I розвязок $\tilde{X}(t)$, який перевіряється (1.20). Використовуючи теорему 1.8, робимо висновок, що $\tilde{X}(t)$ і θ-періодична функція.

(ii) → (i) Якщо рівняння (1.14) має стабілізуючий розвязок $\tilde{X}(t)$, звідси випливає, що трійка $(A, B; Q)$ є стабілізуючою.

Нехай $\tilde{X}$ буде стабілізуючим і θ-періодичним розв'язком (1.14), який зодовольняє (1.20). Ми знаємо, що $F(t) = R^{-1}(t, \tilde{X}(t))P(t, \tilde{X}(t))$ - стабілізуючим і θ-періодичним посиленням зворотного зв'язку.

Розглянемо $C\left\{\left[t_0, t_0 + \theta\right], S_n^d\right\}$ простір неперервних функцій,

визначений на *[t0, t0 + θ]* із звичайною нормою $\|X\| = \sup\limits_{t \in \left[t_0, t_0 + \theta\right]} |X(t)|$.

Нехай $U \subset C\left\{\left[t_0, t_0 + \theta\right], S_n^d\right\}$ – набір неперервних функцій

$Z : \left[t_0, t_0 + \theta\right] \to S_n^d$, для яких $R(t, Z(t))(i) \gg 0, t \in \left[t_0, t_0 + \theta\right], \quad i \in D.$

Очевидно, що обмеження $\tilde{X}$ інтервалу $[t_0, t_0 + \theta]$ належить U і U є відкритим набором. Розглянемо оператор

$\lambda : U \times (-1,1) \to C\left\{\left[t_0, t_0+\theta\right], S_n^d\right\}$, визначений: $\lambda(X,\delta) = Y$, де

$$Y(t) = \int_{t_0}^{t_0+\theta} \boldsymbol{G}_F(t,s)\left[M_F(s) + \delta J_n - P_F^*(s,X(s))R^{-1}(s,X(s))P_F(s,X(s))\right] ds - X(t)$$

де функція Гріна $G_F(t,s)$ визначена як у (1.55), оператор лінійної еволюції $T(\cdot,\cdot)$ замінюється на $T_F(\cdot,\cdot)$ і M_F і P_F визначаються як у доведенні теореми 1.4.

Грунтуючись на доведенні теореми 1.4, отримуємо, що рівняння $\lambda(X,\delta) = 0$ має розв'язок $X_\delta(t), t \in \left[t_0, t_0+\theta\right], \quad \delta \in (-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}), X_\delta \in U$. Легко перевірити, що $X_\delta\left(t_0\right) = X_\delta\left(t_0+\theta\right), X_\delta(t), t \in \left[t_0, t_0+\delta\right]$ – це розв'язок (1.14), в якому $M(t)$ замінюється $M(t) + \delta J_n$. Взявши $\delta \in (-\tilde{\delta}, 0)$ отримуємо потрібне твердження.

Теорема 1.11. *Припустимо, що:*

(а) коефіцієнти системи (1.2) є θ-періодичними функціями і виконується умова (1.40).

(б) *Трійка $(A,B;Q)$ стабілізується. Тоді система (1.2) має два θ-періодичні розв'язки $\tilde{X} : I \to S_n^d, \tilde{\tilde{X}} : I \to S_n^d$, для яких $\tilde{X}(t) \geqslant \hat{X}(t) \geqslant \tilde{\tilde{X}}(t) \geqslant 0, t \in I$ для будь-якого обмеженого розв'язку $\hat{X}(\cdot)$ системи (1.2).*

Доведення. Існування максимального розв'язку $\tilde{X}(t)$ гарантується теоремою 1.9.

Зараз залишається показати існування періодичного розв'язку $\tilde{\tilde{X}}$, яке є мінімальним у класі обмежених та невід'ємних розв'язків.

З цією метою ми розглянемо для кожного $\tau \in I, X_\tau(t)$ розв'язок системи (1.2), який відповідає термінальній умові $X_\tau(\tau, i) = 0, i \in D$.

Покладемо $\hat{X}_\tau(t) = X_{\tau+\theta}(t+\theta)$.

Ми маємо $\hat{X}_\tau(\tau, i) = 0 = X_\tau(\tau, i), i \in D$.

З єдиності випливає, що $\hat{X}_\tau(t) = X_\tau(t), \quad t \leqslant \tau, \quad t \in I$.

Як і у доведенні теореми 1.5, ми можемо визначити $\tilde{\tilde{X}}(t) = (\tilde{\tilde{X}}(t,1), \quad \tilde{\tilde{X}}(t,2), \ldots, \tilde{\tilde{X}}(t,d))$ за $\tilde{\tilde{X}}(t,i) = \lim_{\tau\to\infty} X_\tau(t,i), \quad (t,i) \in I \times D,$

який є мінімальним невід'ємним розв'язком рівняння (1.14) і еквівалентно системі (1.2). Ми маємо, що

$$\tilde{X}(t,i) = \lim_{\tau\to\infty} X_\tau(t,i) = \lim_{\tau\to\infty} \tilde{X}_\tau(t,i) = \lim_{\tau\to\infty} X_{\tau+\theta}(t+\theta,i) = \tilde{\tilde{X}}(t+\theta,i)$$

з якого видно, що $\tilde{\tilde{X}}$ є θ-періодичним. □

Розділ 2. Синтез оптимального керування стохастичними динамічними системами випадкової структури

2.1. Проблема синтезу оптимального керування

Розглядається стохастична система випадкової структури, яка задана стохастичним диференціальним рівнянням Іто

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), u(t))dt + b(t, \xi(t), x(t), u(t))dw(t), \quad t \in \mathbf{R}_+ \backslash K \quad (2.1)$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)\Big|_{t=t_k} = g\left(t_k - , \xi\left(t_k -\right), \eta_k, x\left(t_k -\right)\right), \quad (2.2)$$

$$t_k \in K = \left\{t_k \Uparrow\right\}, k = 0,1,2,\ldots, \lim_{n\to\infty} t_n = +\infty$$

і початковими умовами

$$x\left(t_0\right) = x_0 \in \mathbf{R}^m, \xi\left(t_0\right) = y \in \mathbf{Y}, \quad \eta_0 = h \in \mathbf{H} \quad (2.3)$$

Тут $\xi(t)$ − марковський процес зі значеннями в просторі

$(\mathbf{Y}, \boldsymbol{y}), \mathbf{Y} := \left\{y_1, \ldots, y_N\right\}$, , з генератором $Q, \left\{\eta_k, k \geq 0\right\}$, − ланцюг Маркова зі значеннями у вимірному просторі $(\mathbf{H}, \mathscr{H})$ і перехідною ймовірністю на k-ому кроці $\boldsymbol{P}_k(h, Z) = \boldsymbol{P}\left(\eta_k \in Z / \boldsymbol{\eta}_{k-1} = h\right)$,

$h \in \mathbf{H}, \quad Z \subset \mathscr{H}$; $x : [0, +\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^m; w(t)$ − m-вимірний стандартний вінерів процес [52]; процеси ξ, η **і** w незалежні.

Траєкторії процесу $x(t), t \geq 0$ належать простору Скорохода $\mathbf{D}$ [57], керування $u(t) := u(t, x(t)) : [0; T] \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ − m-вимірна функція з класу допустимих керувань [48]; коефіцієнти

$a : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m; b : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$ і функція $g : \mathbf{R}_+ \times \mathbf{Y} \times \mathbf{H} \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ вимірні за сукупністю змінних і за фазовою змінною задовольняють умову Ліпшиця.

Розглянемо послдовність функцій

$v_k(t, x) : \left[t_0, T\right] \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^1, \quad k \geq 0$; позначимо

$V := \left\{f(t, x) : f \in C^{1,2}\left(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^m\right)\right\}.$

На функціях $v_k(t,x) \in V$ визначимо слабкий інфінітезимальний оператор (СІО) [51]

$$Lv_k(t,x) = \lim_{\Delta \to 0+} \frac{1}{\Delta} \left\{ \mathbf{E}_{t,x} v_k \left(t + \Delta, x\left(t + \Delta, t_k, y, h, u\right)\right) - v_k(t,x) \right\} \quad (2.4)$$

де $x\left(t, t_k, y, h, u\right)$ – сильний розв'язок (2.1) на $t \in \left[t_k, t_{k+1}\right)$ при керуванні $u = u_k \in U$, яке побудовано на тому ж проміжку

$\left[t_k, t_{k+1}\right), \mathbf{E}_{t,x}\{f\} = \mathbf{E}\{f / x(t) = x\}$.

Задача оптимального керування полягає в знаходженні керування $u_k^0, k \geq 0$ з множини допустимих керувань такого, яке би мінімізувало функціонал якості [48]

$$I\left(u_k\right) := I^{u_k}(t,x) := \sum_{k=0}^{\bar{N}} \mathbf{E}_{t_k, x_k} \left\{ F(x(T)) + \int_t^T G(s, x, u(s,x)) ds \right\} \quad (2.5)$$

де $F(x) \geq 0; G(t,x,u) \geq 0.$

В [53] сформульовані умови існування оптимального керування для задачі керування (2.1)–(2.3), (2.5) у вигляді теореми.

Теорема 2.1 (*достатні умови оптимальності*). *Нехай:*

1) існує єдиний сильний розв'язок задачі (2.1)-(2.3);

2) існують послідовність функцій $v_k \in V, k \geq 0$*, та керування*

$u_k^0 \in U, k \geq 0$*, які задовольняють при всіх* $t \in [t_k, T]$ *і всіх допустимих керуваннях* $u_k \in U, k \geq 0$ *рівняння*

$$Lv_k(t,x) + G\left(t, x, u_k^0(t,x)\right) = 0 \quad (2.6)$$

з крайовою умовою

$$v_k(T,x) = F(x(T)); \quad (2.7)$$

3) $\forall t \in [0,T], \forall u_k \in U, k \geq 0$, правильна нерівність

$$Lv_k(t,x) + G\left(t, x, u_k(t,x)\right) \geq 0$$

де L − СІО (2.4) на розв'язках задачі (2.1)-(2.3). Тоді керування $u_k^0(t,x)$ є оптимальним у розумінні критерія якості $I^{u_k^0}\left(0,x_0\right)$, тобто $\forall t \in [0,T]$ маємо

$$I^{u_k^0}(t,x) = \inf_{u \in U} I^u(t,x) = v_k(t,x)$$

Послідовність функцій $v_k(t,x)$ назвемо ціною керування, або функцією Беллмана, а рівняння (2.6) можна записати у вигляді рівняння Беллмана

$$\inf_{u \in U}\left[\mathscr{L}\left(t,x_k,u\right)v_k\left(t,x_k\right) + G\left(t,x_k,u\right)\right] = 0$$

Далі постає питання про знаходження явного вигляду для оптимального керування $u_k^0 \in U, k \geq 0$ і функцій $v_k^0 \in U, k \geq 0$

2.2. Загальне рішення задачі оптимальної стабілізації

Слідуючи [54, 55], СІО (2.4) в силу системи (2.1)–(2.3) має вигляд

$$Lv_k(t,x) = \frac{\partial v_k(t,x)}{\partial t} + \left(\nabla v_k(t,x), a(t,y,x,h)\right) + \frac{1}{2}Sp\left(b^T(t,y,x,u)\cdot\nabla^2 v_k(t,x)\cdot b(t,y,x,u)\right) +$$

$$+\sum_{j=i}^{N}\left[\int_{\mathbf{R}^m} v_j(t,x)p_{ij}(t,z/x)dz - v_i(t,x)\right]q_{ij} \qquad (2.8)$$

де $(\cdot,\cdot)$ – скалярний добуток $\left(\nabla v_k\right) := \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial v_k}{\partial x_m}\right)^T$,

$\left(\nabla^2 v_k\right) := \left[\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i \partial x_j}\right]_{i,j=1}^m$, $k \geq 0$ – знак транспонування, S_p – слід матриці,

$p_{ij}(t,z/x)$ – умовна щільність

$$\boldsymbol{P}\{x(\tau) \in [z,z+dz]/x(\tau-0) = x\} = p_{ij}(\tau,z/x)dz + o(dz)$$

в припущенні, що в момент τ зміни параметра ξ системи (2.1) відбувається випадкова стрибкоподібна зміна фазового вектора

$$x(\tau-0) = x, x(\tau) = z \text{ і } y_i \to y_j.$$

Перше рівняння для $v_k^0(t,x), k \geq 0$, в точках $\left(t_k,y_i,x,h\right)$, отримується шляхом підстановки (2.8) в (2.6):

$$\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial x}\right)^T \cdot a\left(t,y_i,x,u\right) + \frac{1}{2}Sp\left(b^T\left(t,y_i,x,u\right)\cdot\frac{\partial^2 v_k^0(t,x)}{\partial x^2}\cdot b\left(t,y_i,x,u\right)\right)+$$

$$+\sum_{j\neq i}^{N}\left[\int_{\mathbf{R}^m} v_j^0(t,x)p_{ij}(t,z/x)dz - v_i^0(t,x)\right]q_{ij} + G(t,x,u) = 0 \quad (2.9)$$

з крайовою умовою

$$v_k^0(T,x) = F(x(T))$$

Друге рівняння для оптимального керування $u_k^0(t,x)$ одержується з (9) диференціюванням за змінною u, оскільки $u = u_k^0, \quad k \geq 0$, забезпечує мінімум лівої частини (2.9):

$$\left.\left[\left(\frac{\partial v_k^0(t,x)}{\partial x}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial a\left(t,y_i,x,u\right)}{\partial u}\right) + \left(\frac{\partial G(t,x,u)}{\partial u}\right)^T\right]\right|_{u=u_k^0} = 0 \quad (2.10)$$

де $\dfrac{\partial a}{\partial u} - m \times m$-матриця Якобі, складена з елементів

$$\left\{\frac{\partial a_n}{\partial u_s}, n = \overline{1,m}, s = \overline{1,m}\right\}, \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right) \equiv \left(\frac{\partial G}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial u_r}\right), k \geq 0$$

2.3. Оптимальне керування лінійних стохастичних динамічних систем випадкової структури з марковськими перемиканнями

Розглянуто задачу оптимального керування лінійною стохастичною динамичною системою випадкової структури, заданою стохастичним диференціальним рівнянням

$$dx(t) = [A(t,\xi(t))x(t) + B(t,\xi(t))u(t)]dt + C(t,\xi(t))x(t)dw(t),$$
$$t \in \mathbf{R}_+ \backslash K \quad (2.11)$$

з марковськими перемиканнями

$$\Delta x(t)\Big|_{t=t_k} = g\left(t_k -, \xi\left(t_k-\right), \eta_k, x\left(t_k-\right)\right) \quad (2.12)$$

і початковими умовами

$$x(0) = x_0 \in \mathbf{R}^m, \xi(0) = y \in \mathbf{Y}, \quad \boldsymbol{\eta}_0 = h \in \mathbf{H} \tag{2.13}$$

Тут A, B, C – кусково-неперервні та інтегровні матричні функції.

Задача оптимального керування системою (2.11) – (2.13) полягає в знаходженні керування $u_{ik}^0, i \in \{1,\ldots N\}, k \geq 0$ з множини допустимих керувань U такого, яке б мінімізувало функціонал

$$I\left(u_{ik}\right) := I^{u_k}(t,x) := \sum_{k=0}^{\bar{N}} \mathbf{E}_{t_k,x_k}\left\{x^T(T)M_0\left(\xi(t),\boldsymbol{\eta}_k\right)x(T) + \right.$$

$$\left. + \int_t^T \left[u^T(s)M_1\left(s,\xi(s),\eta_k\right)u(s) + x^T(s)M_2\left(s,\xi(s),\eta_k\right)x(s)\right]ds\right\}, \tag{2.14}$$

де $m \times m$-матриця $M_1\left(t,\xi(t),\eta_k\right)$ рівномірно додатно визначена за $t \in [0,T]$, $m \times m$-матриці $M_0\left(\xi(t),\boldsymbol{\eta}_k\right), M_2\left(t,\xi(t),\boldsymbol{\eta}_k\right)$ – невід'ємно визначені.

Для спрощення записів введено позначення

$$A_i(t) := A\left(t,y_i\right), B_i(t) := B\left(t,y_i\right), C_i(t) := C\left(t,y_i\right)$$

$$M_{0ik} := M_0\left(y_i,\eta_k\right), M_{1ik}(t) := M_1\left(t,y_i,\eta_k\right), M_{2ik}(t) := M_2\left(t,y_i,\eta_k\right)$$

Теорема 2.2. *Оптимальне керування для задачі (2.11)–(2.14) знаходиться за формулою*

$$u_{ik}^0(t,x) = -M_{1ik}^{-1}(t)B_i^T(t)P_{ik}(t)x(t). \tag{2.15}$$

де невід'ємно визначена $m \times m$-матриця $P_{ik}(t) := P\left(t,\xi(t),\boldsymbol{\eta}_k\right)$ входить в функціонал Беллмана

$$\begin{aligned} v_{ik}^0(t,x) &= x^T(t)P_{ik}(t)x(t), \\ v_{ik}^0(T,x) &= x^T\left(t_k\right)M_{0ik}x\left(t_k\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.4. Побудова рівняння Беллмана.

Підставивши (2.15) і (2.16) в (2.17), отримаємо наступні рівняння для $\forall t \in \left[t_k,t_{k+1}\right)$:

$$x^T(t)\frac{dP_{ik}(t)}{dt}x(t) + 2\left[A_i(t)x(t) - B_i(t)M_{1ik}^{-1}(t)B_i^T(t)x(t)\right]P_{ik}(t)x(t) +$$

$$+Sp\left(C_i^T(t)P_{ik}(t)C_i(t)\right)+\sum_{j\neq i}^{N}\left(x^T(t)P_{jk}(t)x(t)-x^T(t)P_{ik}(t)x(t)\right)q_{ij}+$$

$$+\left[M_{1ik}^{-1}(t)B_i^T(t)P_{ik}(t)x(t)\right]^T M_{1ik}(t)M_{1ik}^{-1}(t)B_i^T(t)P_{ik}(t)x(t)+x^T(t)M_{2ik}(t)x(t)=0.$$

Прирівнявши до нуля квадратичну форму відносно x і вирази, які не залежатьвід x, враховуючи матричну рівність

$$2x^TP_{ik}A_ix=x^T\left(P_{ik}A_i+A_i^TP_{ik}\right)x,$$

в результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь для знаходження матриць

$$P_{ik}(t),t\in\left[t_k,t_{k+1}\right),i\in\{1,\ldots N\},k\geq 0:$$

$$\frac{dP_{ik}(t)}{dt}+A_i^T(t)P_{ik}(t)+P_{ik}(t)A_i(t)-B_i(t)M_{1ik}^{-1}(t)B_i^T(t)P_{ik}(t)+\sum_{j\neq i}^{N}\left(P_{jk}(t)-P_{ik}(t)\right)q_{ij}+$$

$$+\left[M_{1ik}^{-1}(t)B_i^T(t)P_{ik}(t)\right]^T B_i^T(t)P_{ik}(t)+M_{2ik}(t)=0 \qquad (2.20)$$

$$Sp\left(C_i^T(t)P_{ik}(t)C_i(t)\right)=0 \qquad (2.21)$$

з крайовими умовами

$$P_{ik}(T)=M_{0ik} \qquad (2.22)$$

Таким чином має місце наступне твердження

Теорема 2.3. *Якщо вартість керуванння знаходимо у вигляді (2.14) для системи (2.11)–(2.13), то система диференціальних рівняннь для знаходження матриць* $P_{ik}(t),t\in\left[t_k,t_{k+1}\right),i\in\{1,\ldots N\},k\geq 0$ *має вигляд (2.20)–(2.22).*

Далі слід вирішити питання про існування розв'язку крайової задачі (2.20)–(2.22).

Скористаємось методом ітерацій Беллмана [49].

Для спрощення, розглянемо інтервал $\left[t_k,t_{k+1}\right)$, *на якому* $\xi(t)=y_i$, *а індекси типу «ik» в записах опустимо, ввівши біля* u,v *і* P *індекс, який позначає порядок наближення.*

Спочатку задамо нульове наближення

$$u_0(t,x)=-M_1^{-1}(t)B^T(t)P_0(t)x(t) \qquad (2.23)$$

де матриця $P_0(t) \geq 0$ обмежена і кусково-неперервна. Підставимо (2.23) в (2.10) і для отриманого рівняння обчислимо значення $v_1(t, x)$, що відповідає керуванню (2.23).

Далі, підставляючи $v_1(t, x)$ в рівняння Беллмана (2.17), знайдемо керування $u_1(t, x)$, при якому в (2.17) досягається мінімум. Продовжуючи цей процес, можна побудувати послідовність керувань $u_n(t, x)$ і функціоналів $v_n(t, x)$ вигляду

$$u_n(t, x) = -M_1^{-1}(t)B^T(t)P_n(t)x(t)$$

$$v_n(t, x) = x^T(t)P_n(t)x(t)$$

$$v_n(T, x) = x^T\left(t_k\right)M_0 x\left(t_k\right) \tag{2.24}$$

де $P_n(t), t \in \left[t_k, t_{k+1}\right)$ *– розв'язок крайової задачі (2.20)–(2.22) при* $T := t_{k+1}$.

Для $\forall n \geq 1$ *справедлива очевидна оцінка*

$$v_{n-1}(t, x) \geq v_n(t, x) \geq 0, \quad \forall t \in \left[t_k, t_{k+1}\right) \tag{2.25}$$

З допомогою (2.25) можна довести збіжність функціоналів $v_n(t, x)$ *до* $v^0(t, x)$*, збіжність керувань* $u_n(t, x)$ *до* $u^0(t, x)$*, збіжність послідовності матриць* $P_n(t)$ *до* $P(t)$ *[48]. При цьому має місце оцінка*

$$\max_{i \in t_k, t_{k+1}\}} \| P(t) - P_n(t) \| \leq \frac{C}{n!}, \quad C < \infty, k \geq 1 \tag{2.26}$$

Правильне наступне твердження.

Теорема 2.4. *Наближений розв'язок задачі синтеза оптимального керування для задачі (2.11)–(2.14) здійснюється з допомогою метода послідовних наближень Беллмана, при якому n-е наближення керування і функціонала Беллмана для кожного інтервала* $\left[t_k, t_{k+1}\right), k \geq 0$*, знаходять за формулами (2.24), причому похибка оцінюється нерівністю (2.26).*

Теорема 2.5. *Система (2.20) - (2.21) має єдиний розв'язок, який, крім того, є стабілізуючим.*

Доведення. Рівняння (2.20) відповідає диференціальному рівнянню (1.2), яке вивчене у розділі 1. Згідно з теоремою 1.1 рівняння (2.20) має максимум один розв’язок. Ураховуючи, що згідно з теоремою 2.4 розв’язок (2.20) можна знайти методом послідовних наближень Беллмана, що цей розв’язок є єдиним.

Згідно з теоремою 1.1 цей розв’язок є стабілізуючим.

Зауваження. Теорема 2.5 дає відповідь також на питання існування розв’язку задачі оптимальної стабілізації для системи (2.11) - (2.14), для якої у праці [54] отримано наближений розв’язок.

Висновки

У розділі 1 розглянуто клас нелінійних матричних диференціальних рівнянь, що містить у якості конкретних випадків системи матричних диференціальних рівнянь Ріккаті, що виникають у зв'язку з деякими задачами керування лінійними стохастичними системами, які перебувають під дією збурень типу вінерового процесу і марковських глобальних перемикань.

Метою 1 розділу було дослідити умови, які гарантують існування глобальних розв’язків такого класу диференціальних рівнянь, як: максимальний розв’язок, обмежений та стабілізуючий розв’язок, мінімальний розв’язок.

Розглянуті у розділі 1 системи матричних диференціальних рівнянь були переписані як нелінійне диференціальне рівняння у скінченновимірному просторі Гільберта.

Це представлення дозволяє оперувати властивостями лінійних еволюційних операторів, визначених лінійними диференціальними рівняннями типу Ляпунова.

Найважливішою та найпотужнішою властивістю є додатність операторів лінійної еволюції, пов'язаних з диференціальними рівняннями типу Ляпунова, що дозволяє довести деякі результати порівняння як для розв’язків лінійних диференціальних рівнянь, так і нелінійних диференціальних рівнянь.

Використавши результати розділу 1 та праці Дас А., Лукашив Т.О., Малык И.В. Синтез оптимального управления стохастическими динамическими системами случайной структуры с марковскими переключениями // Проблемы управления и информатики. – 2017. – № 2. – С. 17–26., сформульовано теорему 2.5 про розв’язність задачі оптимального керування для стохастичної динамічної системи випадкової структури з марковськими перемиканнями.

Твердження теореми також є актуальним і для задачі оптимальної стабілізації вказаних систем.

Результат є новим і доповідався на міжнародній науковій конференції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Abou-Kandil H., G. Freiling, Jank G.Solution and asymptotic behaviour of coupled Riccati equations in jump linear systems IEEE Trans. Automat. Control, 39 (1994), pp. 1631-1636
2. Bittanti S., The periodic differential Riccati equation: a miscellaneous of classical and recent results, in: The Riccati Equations in Control Systems and Signals (Bittanti S., Ed.). Pitagora Editrice, Bologna, 1989, pp. 171–176.
3. Bittanti S., Colaneri P., G. De Nicolao The periodic Riccati equation Bittanti S., Laub A.J., Willems J.C. (Eds.), The Riccati Equation, Springer, New York (1991), pp. 706-712
4. Chen S., Li X., Zhou X.Y. Stochastic linear quadratic regulators with indefinite control weight costs SIAM J. Control Optim., 36 (1998), pp. 1685-1702
5. Chen Y.Z., Liu J.Q., Chen S.B. Comparisons and uniqueness theorems for periodic Riccati differential equations Int. Control J., 69 (1998), pp. 467-473
6. Disconjugacy W.A. Coppel, Springer Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin (1971)
7. Damm T., D. Hinrichsen, Newton's method for a rational matrix equation occurring in stochastic control, Report no. 443, April 1999, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen.
8. DaPrato G., Ichikava A. Quadratic control for linear time varying systems SIAM Control J. Optim., 28 (1990), pp. 359-381
9. Doob J.L. Stochastic Processes, Wiley, New York (1967)
10. Dragan V. Global stabilizing solutions to game theoretic Riccati equations and disturbance attenuation problem Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 39 (4) (1994), pp. 303-328
11. Dragan V., Halanay A. General controlled evolutions disturbance attenuation and related topics Stud. Cer. Mat., 46 (2) (1994), pp. 149-280
12. Dragan V., Halanay A. Stabilization of Linear Systems, Birkhäuser, Boston (1999)

13. Dragan V., Morozan T. Global solutions to a game-theoretic Riccati equation of stochastic control J. Differential Equations, 138 (2) (1997), pp. 328-350
14. Dragan V., Morozan T. Game-theoretic coupled Riccati equations associated to controlled linear differential systems with jump Markov perturbations Stochastic Anal. Appl., 19 (5) (2001), pp. 715-751
15. Dragan V., Morozan T. Stability and robust stabilization to linear stochastic systems described by differential equations with Markovian jumping and multiplicative white noise Stochastic Anal. Appl., 24 (1) (2002), pp. 33-92
16. Fragoso M.D., Costa O.L.V., C.E. de Souza A new approach to linearly perturbed Riccati equations arising in stochastic control Appl. Math. Optim., 37 (1998), pp. 99-126
17. Freiling G., Jank G. Existence and comparison theorems for algebraic Riccati equations and Riccati differential and difference equations J. Dyn. Control Systems, 2 (1996), pp. 529-547
18. Freiling G., Jank G., A. Sarychev Non-blow-up conditions for Riccati-type matrix differential and difference equations Results Math., 37 (2000), pp. 84-103
19. Friedman A., Stochastic Differential Equations and Applications, Vol. I, Academic Press, New York, 1975.
20. Halanay A., Stabilizing solution to Riccati inequalities and stabilizing compensators with disturbance attenuation, in: Differential Equations, Dynamical Systems, Control Science, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 152, Springer, Berlin, 1992, pp. 551–567.
21. Halanay A., Rasvan V. Addentum to a theorem of Yakubovich Systems Control Lett., 14 (1990), pp. 177-181
22. Haurie A., Leizarowitz A. Overtaking optimal regulation and tracking of piecewise diffusion linear systems SIAM J. Control Optim., 30 (4) (1992), pp. 816-837
23. Hausmann U.G. Optimal stationary control with state and control dependent noise SIAM J. Control Optim., 9 (1971), pp. 184-198

24. Hinrichsen D., Pritchard A.J. Stochastic H∞ SIAM J. Control Optim., 36 (1998), pp. 1504-1538
25. Juanq J., Lee M.T. Comparison Theorems for the matrix Riccati equationLinear Algebra Appl., 15 (1995), pp. 61-74
26. Ji Y., Chizeck H.J. Controllability, stabilizability, and continuous-time Markovian jump linear quadratic control IEEE Trans. Automat. Control, 35 (7) (1990), pp. 777-788
27. Kalman R. Contributions on the theory of optimal control Bult. Soc. Math. Mexicana Segunda Ser., 5 (1) (1960), pp. 102-119
28. Knobloch H.W., Pohl M. On Riccati matrix differential equations Results Math., 31 (1997), pp. 337-364
29. Mao X. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching Stochastic Process. Appl., 79 (1999), pp. 45-67
30. Mariton M. Robust jump linear quadratic control: a mode stabilizing solution IEEE Trans. Automat. Control, AC-30 (1985), pp. 1145-1147
31. Morozan T. Optimal stationary control for dynamic systems with Markov perturbations Stochastic Anal. Appl., 1 (3) (1983), pp. 299-323
32. Morozan T. Stability and control for linear system with jump Markov perturbation Stochastic Anal. Appl., 13 (1) (1995), pp. 91-110
33. Morozan T. Parametrized Riccati equations for controlled linear differential systems with jump Markov perturbations Stochastic Anal. Appl., 16 (4) (1998), pp. 661-682
34. Morozan T. Parametrized Riccati equation and input–output operators for time-varying stochastic differential equations with state dependent noise Stud. Cer. Mat., 51 (1999), pp. 99-115
35. Morozan T. Linear quadratic control and tracking problems for time-varying stochastic differential systems perturbed by a Markov chain Rev. Roumaine Math. Pure Appl., 46 (6) (2001), pp. 783-804
36. Nashimura T., Kano H. Periodic strong solutions of periodically time-varying matrix Riccati Equations Int. J. Control, 49 (1989), pp. 193-205

37. Pandolfi L. Existence of solutions to the Riccati equation for time-varying distributed systems IMA. J. Control Inform., 9 (1992), pp. 265-273
38. Pastor A., Hernandez V. Differential periodic Riccati equations: existence and uniqueness of nonnegative definite solutions Math. Control Signal Systems, 6 (1993), pp. 341-362
39. Popov V.M. Hyperstability and optimality of automatic systems with several control functions Rev. Roumaine Sci. Techn. Electrotech. Energet., 9 (1) (1964), pp. 913-949
40. Rami M.A., Chen X., Moore J.B., Zhou X.Y. Solvability and asymptotic behavior of generalized Riccati equations arising in indefinite stochastic LQ Controls IEEE Trans. Automat. Control, 46 (3) (2001), pp. 428-440
41. Rami M.A., Zhou X.Y. Linear matrix inequalities, Riccati equations and indefinite stochastic linear quadratic controls IEEE Trans. Automat. Control, 45 (6) (2000), pp. 1131-1143
42. Reid W.T. Riccati Differential Equations, Academic Press, New York (1972)
43. Stefan R., Chain-scattering solution to the disturbance attenuation problem: a Popov–Yakubovich based approach, Doctoral Dissertation, University Polyechnica Bucharest, 1998.
44. Tessitore G. Some remarks on the Riccati equation arising in an optimal control problem with state and control dependent noise SIAM Control Optim., 30 (3) (1982), pp. 717-744
45. Wimmer H.K. Monotonicity of maximal solutions of algebraic Riccati equations System Control Lett., 5 (1985), pp. 317-319
46. Wonham W.H., Random differential equations in control theory in: A.T.Barucha-Reid (Ed.), Probabilistic Methods in Applied Mathematics, Vol. 2, Academic Press, New York, 1970, pp. 131–212.
47. Yakubovich V.A. Linear quadratic optimization problem and frequency theorem for periodic systems I Syb. Mat. J., 27 (4) (1986), pp. 181-200.
48. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием.– М.:Наука, 1992.– 336 с.
49. Беллман *Р.* Динамическое программирование. – М.: ИЛ, 1960. – 324 с

50. Дас А., Лукашив Т.О., Малык И.В. Синтез оптимального управления стохастическими динамическими системами случайной структуры с марковскими переключениями // Проблемы управления и информатики. – 2017. – № 2. – С. 17–26.
51. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. – М.: Физматгиз., 1969. – 859 с
52. Дуб Дж. Вероятностные процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 605 с.
53. Лукашив Т.О., Малык И.В. Достаточные условия оптимальности стохастических динамических систем случайной структуры с марковскими переключениями // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 3. – С. 28–34.
54. Лукашив Т.О., Ясинский В.К., Ясинский Е.В. Стабилизация стохастических динамических систем с импульсными марковскими переключениями и параметрами. Часть 1. Устойчивость стохастических систем с марковскими параметрами // Проблемы управления и информатики. – 2009.– № 1. – С. 5-28.
55. Лукашив Т.О., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Стабилизация стохастических динамических систем с импульсными марковскими переключениями и параметрами. Часть 2. Стабилизация динамических систем случайной структуры с внешними марковскими переключениями // Проблемы управления и информатики. – 2009.– № 2. – С. 14-29.
56. Скороход А.В. Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1987. – 328 с.
57. Лукашів Т.О., Крижний В.С. Про розв’язність системи диференціальних рівнянь Рікатті, породженної стохастичною динамічною системою випадкової структури з марковськими перемиканнями // Праці VIII Міжнародної науково-практичної конференції (ПІКТ – 2019), м.Чернівці, 03 – 06 жовт. 2019. Чернівці: Черн. нац. ун-т., 2019. – с.34-35.