Літовченко В.А.

ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР ПОСТА В ПРОСТОРАХ ТИПУ S

Упродовж останніх кількох десятиліть бурхливо розвивається теорія дробового диференціювання та псевдодиференціальних операторів, які природним способом узагальнюють та розширюють поняття класичної похідної та диференціальних операцій. Причиною такого розвитку є насамперед факт тісного зв'язку псевдодиференціальних операторів і дробового диференціювання з важливими задачами аналізу й сучасної математичної фізики. З'ясувалось, що такі оператори відіграють важливу роль у теорії аналітичних крайових задач (при дослідженні індексу задачі, при зведенні на межу області і т.д.), в мікролокальному аналізі, в теорії випадкових процесів, за допомогою операторів фрактального диференціювання описуються тепло-дифузійні процеси в пористих середовищах тощо.

Існують різні підходи до узагальнення класичної похідної, реалізація яких породила різномаїття операцій дробового диференціювання та псевдодиференціювання. У зв'язку з цим виникає природна необхідність у порівняльній характеристиці цих узагальнень, яку зручно проводити крізь призму класичної форми дробового диференціювання на елементах з "достатньо хорошими" властивостями. Крім цього, зображення тої чи іншої операції псевдодиференціювання в такій класичній формі дає змогу задіювати досить зручний апарат перетворення Фур'є для аналізу задач з цими операціями.

У даній роботі досліджується питання про можливість зображення в просторах типу S Гельфанда І.М. і Шилова Г.Є. псевдодиференціального оператора Е.Поста $a(D_x)$ в класичній формі дробового диференціювання за умови, що його символ $a(\cdot)$ є згортувачем у вихідному просторі.

Ключові слова і фрази: класична форма дробового диференціювання, псевдодиференціальний оператор Поста, простори типу S, критерій мультиплікатора.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine
e-mail: *v.litovchenko@chnu.edu.ua*

Вступ

Думка про поширення операції диференціювання $\frac{d^p}{dx^p}$ на неціле значення p виникла фактично на початку зародження диференціального числення. Перша, зафіксована історією спроба обговорення такої ідеї міститься серед кореспонденції Г.Лейбніца [1]. В одному з листів Г.Лейбніцу з приводу його теореми про диференціювання добутку

УДК 517.956
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35S05, 47G30.

функцій, Я.Бернуллі цікавився про значення цієї теореми у випадку нецілого порядку диференціювання. Листуючись з Г.Лопіталем (1695 р.), а також з Уоллісом (1697 р.), Г.Лейбніц зробив кілька зауважень про можливість розгляду диференціалів і похідних порядку 1/2.

У 1738 р. Л.Ейлер робить припущення про те, що результату обчислення похідної $\frac{d^p x^\alpha}{dx^p}$ можна надати зміст при нецілому p [2]. Майже через століття (1812 р.) П.Лаплас висловив ідею про можливість диференціювання нецілого порядку функцій, які допускають зображення інтегралом $\int p(\xi)\xi^{-x}d\xi$. У трактаті С.Лякруа (1820 р.) повторено думку Л.Ейлера та наведено явну формулу обчислення похідної $\frac{d^{1/2}x^\alpha}{dx^{1/2}}$ [1].

Відчутний прорив у цьому напрямку зробив Ж.Фур'є в 1822 р., який запропонував використати рівність

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^p \int\limits_{\mathbb{R}} f(\eta)\cos\big(\eta(x-\xi)+p\pi/2\big)d\eta d\xi \tag{1}$$

для означення похідної нецілого порядку. Це було перше означення похідної довільного додатного порядку від "довільної"функції [1].

Згодом з'явилися праці Н.Абеля [1, 3], пов'язані з розв'язанням проблеми про таутохрону, в яких прослідковується ідея введення поняття дробового інтегрування як оберненої операції до диференціювання. А відтак, була серія праць Ж.Ліувілля [4, 5, 6, 7, 8], яка зробила його по праву творцем уже достатньо повноцінної на сьогодні теорії дробового інтегро-диференціювання.

Аналізуючи праву частину рівності (1) та зважаючи на наявність у ній невласних інтегралів, приходимо до висновку, що операцію дробового диференціювання в розумінні Фур'є можна визначити лише для тих функцій f, які забезпечують коректність правої частини цієї рівності. Такими функціями можуть бути, наприклад, елементи простору S Л.Шварца [12].

Оскільки $F[S] = S$, де F - оператор перетворення Фур'є, і в S визначена операція множення на многочлен довільного степеня, то для похідних функції $f \in S$ справджується наступна формула:

$$\frac{d^p f(x)}{dx^p} = F^{-1}\big[(i\xi)^p F[f](\xi)\big](x), \quad p \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Якщо тепер у (2) замість $p \in \mathbb{Z}_+$ покласти $\alpha \geq 0$, а вираз $(i\xi)^\alpha$ розуміти як $|\xi|^\alpha e^{(\alpha\pi i/2)\mathrm{sign}\xi}$, то одержимо оператор A_α дробового диференціювання порядку α у просторі S:

$$(A_\alpha f)(\cdot) = F^{-1}\big[(i\xi)^\alpha F[f](\xi)\big](\cdot), \quad f \in S, \tag{3}$$

при цьому $(i\xi)^\alpha$ називають символом оператора A_α, а саму рівність (3) - *класичною формою* дробового диференціювання.

У 1867 р. А.Грюнвальд [9], а в 1868 р. - А.В.Летніков [10] розвивають ідею Ж.Ліувілля означення дробового інтегро-диференціювання, яка полягає в розширенні формули Б.Рімана

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(\Delta_h^n f)(x)}{h^n}, \quad n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R},$$

на випадок нецілих n (тут $\Delta_h^n f = (E-\tau_h)^n f$ - скінченна різниця порядку n функції f з кроком h). Замінивши в цій рівності натуральне n на довільне $\alpha > 0$, одержимо дробову похідну Грюнвальда-Летнікова:

$$f_{\pm}^{\alpha)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(\Delta_{\pm h}^{\alpha} f)(x)}{h^{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Тут

$$(\Delta_h^{\alpha} f)(x) = ((E-\tau_h)^{\alpha} f)(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_{\alpha}^k f(x-kh),$$

де $C_{\alpha}^k = \frac{(-1)^{k-1}\alpha\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}$ - узагальнений біноміальний коефіцієнт, а $\Gamma(\cdot)$ - гамма-функція Ейлера.

Для елементів $f \in L_1(\mathbb{R})$ виконується рівність [1]

$$F[\Delta_h^{\alpha} f](\xi) = (1 - e^{i\xi h})^{\alpha} F[f](\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Звідси, врахувавши

$$\lim_{h\to 0} (1 - e^{\pm i\xi h})/h = \mp i\xi,$$

для всіх $f \in S$ одержуємо формулу

$$f_{\pm}^{\alpha)}(x) = F^{-1}\big[(\mp i\xi)^{\alpha} F[f](\xi)\big](x), \quad x \in \mathbb{R},$$

тобто в просторі S дістаємо зображення фрактальної похідної Грюнвальда-Летнікова в класичній формі дробового диференціювання.

У 1930 р. Е.Пост узагальнює похідну Грюнвальда-Летнікова [11]. Він зауважив, що $(E-\tau_h)^{\alpha}$ - узагальнена різниця, породжена степеневою функцією $(\cdot)^{\alpha}$, і запропонував у конструкції Грюнвальда-Летнікова розглядати узагальнену різницю $a(E-\tau_h)$, яка відповідає аналітичній функції $a(\cdot)$:

$$a(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\xi - 1)^k, \quad a_k := a^{(k)}(1)/k!. \tag{4}$$

Псевдодиференціальний оператор $a(D_x)$ Поста означується рівністю

$$a(D_x) f = \lim_{h\to 0} a\big((E-\tau_h)/h\big) f, \quad D_x := d/dx, \tag{5}$$

де

$$a\big((E-\tau_h)/h\big) f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \big((E-\tau_h)/h - E\big)^k f. \tag{6}$$

Дана робота присвячена дослідженню можливості зображання в просторах типу S псевдодиференціального оператора $a(D_x)$ в класичній формі дробового диференціювання.

1 Попередні відомості

Нехай $C^\infty(\mathbb{R})$ – клас нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, а S – простір Л.Шварца швидко спадних на нескінченності елементів $C^\infty(\mathbb{R})$ [12]. Для $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ покладемо

$$S_\alpha^\beta = \{\varphi \in S | \ \exists B > 0 \, \exists c > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall k \in \mathbb{Z}_+ \, \forall x \in \mathbb{R} : \, |D_x^k \varphi(x)| \le c B^k k^{\beta k} e^{-\delta |x|^{1/\alpha}} \}.$$

З відповідною топологією сукупність S_α^β – зліченно-нормований повний досконалий простір, який називається простором типу S Гельфанда і Шилова [12].

Простір S_α^β нетривіальний при $\alpha + \beta \ge 1$; його елементи продовжуються у комплексний простір $\mathbb{C}$ до цілих функцій при $\beta < 1$. У цьому просторі визначені й неперервні операції додавання, множення, згортки та зсуву τ_h, а також, оператор F перетворення Фур'є, причому виконується топологічна рівність $F[S_\alpha^\beta] = S_\beta^\alpha$.

Означення 1. *Функція $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ називається мультиплікатором у просторі S_α^β, якщо:*
1) $af \in S_\alpha^\beta \quad (\forall f \in S_\alpha^\beta)$;
2) операція множення на a неперервна в просторі S_α^β.

Правильне таке твердження.

Теорема 1. *[13] Елемент $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ – мультиплікатор у просторі S_α^β тоді й лише тоді, коли*

$$\forall \delta > 0 \, \exists c > 0 \, \exists B > 0 \, \forall k \in \mathbb{Z}_+ \, \forall \xi \in \mathbb{R} : \ |D_\xi^k a(\xi)| \le c B^k k^{\beta k} e^{\delta |\xi|^{1/\alpha}}.$$

З огляду на це твердження, стає очевидним наступний наслідок.

Наслідок 1. *Кожен мультиплікатор a у просторі S_α^β при $\beta < 1$ допускає розвинення на $\mathbb{R}$ у ряд Тейлора* (4).

У наступному пункті дослідимо умови зображення пседодиференціального оператора $a(D_x)$ Поста у класичній формі дробового диференціювання.

2 Оператор Поста в просторах S_α^β

Надалі розглядатимемо простір S_α^β з $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$, і вважатимемо, що функція $a(\cdot)$ – мультиплікатор у S_α^β. Завдання полягає в тому, щоб довести можливість зображення в просторі S_β^α пседодиференціального оператора $a(D_x)$, що визначається рівністю (5), у відповідній класичній формі дробового диференціювання (3).

Для цього нам знадобляться наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Функція $\varphi_h(x) = \frac{1 - e^{ihx}}{h}$ при $h \ne 0$ на $\mathbb{R}$ має такі властивості:*

1) $\varphi_h(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R})$, причому

$$(\varphi_h(x))_x^{(k)} = -i^k h^{k-1} e^{ihx} \quad (\forall k \in \mathbb{N}); \tag{7}$$

2) виконується гранична рівність

$$\lim_{h\to 0}\varphi_h(x) = -ix; \tag{8}$$

3) правильні співвідношення:

$$|\varphi_h(x)| \le 2/|h|; \quad |\varphi_h(x)| = |x|. \tag{9}$$

Доведення. Властивості 1), 2) очевидні. Нерівність з (9) також стає очевидною, якщо зважити на те, що $|e^{ihx}| = 1$.

Обгрунтуємо виконання другого співвідношення з (9). Для цього, скористаємось зображенням

$$\varphi_h(x) = -ixe^{i\theta hx}, \quad \theta \in (0;1),$$

яке справджується згідно з теоремою Лагранжа про скінченні прирости. Звідси вже знаходимо:

$$|\varphi_h(x)| = |-ixe^{i\theta hx}| = |x|.$$

□

Лема 2. *Нехай $f \in S_\beta^\alpha$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, тоді для $k \in \mathbb{Z}_+$, $h \ne 0$ і $\xi \in \mathbb{R}$ виконується зображення*

$$\big((E-\tau_h)/h - E\big)^k f = F^{-1}\big[\big(\varphi_h(\xi)-1\big)^k F[f](\xi)\big]. \tag{10}$$

Доведення. Дійсно, оскільки

$$\Big(\big((E-\tau_h)/h-E\big)^k f\Big)(x) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \Big(\Big(\big((E-\tau_h)/h\big)^l (-E)^{k-l}\Big) f\Big)(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l \frac{(-1)^{k-l}}{h^l}\Big(\big((E-\tau_h)^l\big) f\Big)(x) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \frac{(-1)^{k-l}}{h^l}\sum_{m=0}^{l} C_l^m (-1)^m f(x-mh), \tag{11}$$

то для $f \in S_\beta^\alpha$ маємо:

$$F\big[\big((E-\tau_h)/h-E\big)^k f\big](\xi) = \sum_{l=0}^{k} C_k^l \frac{(-1)^{k-l}}{h^l}\sum_{m=0}^{l} C_l^m (-1)^m F[f(x-mh)](\xi) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k} C_k^l \frac{(-1)^{k-l}}{h^l}\sum_{m=0}^{l} C_l^m (-1)^m e^{imh\xi} F[f](\xi) = \big(\varphi_h(\xi)-1\big)^k F[f](\xi). \tag{12}$$

Ураховуючи властивості функції $\varphi_h(\cdot)$ (*див.* лему 1) згідно з теоремою 1 переконуємось у тому, що при кожному фіксованому $k \in \mathbb{N}$ і $h \ne 0$ функція $\mu_{k,h}(\cdot) = \big(\varphi_h(\cdot)-1\big)^k$ – мультиплікатор у кожному просторі S_α^β, тоді $\big(\mu_{k,h}F[f]\big)(\cdot) \in S_\alpha^\beta$, тобто для $\big(\mu_{k,h}F[f]\big)(\cdot)$ існує обернене перетворення Фур'є. Зважаючи на це, безпосередньо з рівності (12) приходимо до зображення (10). □

Основний результат сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 2. *Нехай $0 < \alpha$, $0 < \beta < 1$ і $a(\cdot)$ – мультиплікатор у відповідному просторі S_α^β, тоді псевдодиференціальний оператор Поста $a(D_x)$ неперервно відображає простір S_β^α у себе, причому виконується рівність*

$$\big(a(D_x)f\big)(x) = F^{-1}\big[a(-i\xi)F[f](\xi)\big](x) \quad (\forall f \in S_\beta^\alpha \ \forall x \in \mathbb{R}). \tag{13}$$

Доведення. З огляду на властивості оператора перетворення Фур'є F у просторах типу S, а також на те, що $a(\cdot)$ мультиплікатор, доведення цієї теореми потребує лише обгрунтування правильності формули (13).

Передусім установимо рівність

$$F\big[a\big((E-\tau_h)/h\big)f\big](\xi) = a\big(\varphi_h(\xi)\big)F[f](\xi), \quad h \neq 0,\, \xi \in \mathbb{R},\, f \in S_\beta^\alpha, \tag{14}$$

тобто покажемо, що

$$F\Big[\sum_{k=0}^{\infty} a_k\big((E-\tau_h)/h - E\big)^k f\Big] = \sum_{k=0}^{\infty} a_k F\big[\big((E-\tau_h)/h - E\big)^k f\big].$$

Згідно з лемою 2 попередня рівність набуває вигляду

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big(\big((E-\tau_h)/h - E\big)^k f\Big)(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\big(\varphi_h(\xi) - 1\big)^k F[f](\xi). \tag{15}$$

Доведення рівності (15) зводиться до обгрунтуваня можливості внесення інтегралу під знак суми, що в лівій частині цієї рівності.

Дослідимо на збіжність функційний ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\Big(\big((E-\tau_h)/h - E\big)^k f\Big)(x)$. Для цього оцінимо його загальний член. Скориставшись зображенням (10), нерівністю (9) і твердженням теореми 1, знаходимо:

$$|a_k\Big(\big((E-\tau_h)/h - E\big)^k f\Big)(x)| = |a_k||F^{-1}\big[\big(\varphi_h(\xi) - 1\big)^k F[f](\xi)\big]| \leq$$

$$\leq \frac{|a_k|}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} |F[f](\xi)|\big(|\varphi_h(\xi)| + 1\big)^k d\xi \leq \frac{|a_k|}{2\pi}\left(1 + \frac{2}{|h|}\right)^k \int\limits_{\mathbb{R}} |F[f](\xi)|d\xi =$$

$$= \frac{|a^{(k)}(1)|}{2\pi k!}\left(1 + \frac{2}{|h|}\right)^k \int\limits_{\mathbb{R}} |F[f](\xi)|d\xi \leq \frac{cB^k k^{\beta k} e^\delta}{2\pi k!}\left(1 + \frac{2}{|h|}\right)^k \int\limits_{\mathbb{R}} |F[f](\xi)|d\xi =$$

$$= c_0\frac{A_h^k k^{\beta k}}{k!} \equiv b_k(h), \quad h \neq 0,\, x \in \mathbb{R},\, k \in \mathbb{Z}_+,\, f \in S_\beta^\alpha.$$

Оскільки $\beta \in (0;1)$, то числовий ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(h)$ збігається при кожному $h \neq 0$. Тоді, згідно з теоремою Вейєрштрасса про мажорантний ряд, функційний ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\Big(\big((E-\tau_h)/h - E\big)^k f\Big)(x)$ збігається рівномірно щодо x на $\mathbb{R}$ при $h \neq 0$. Отже, правильною є рівність

$$\int\limits_{-A}^{A} e^{ix\xi} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\Big(\big((E-\tau_h)/h - E\big)^k f\Big)(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int\limits_{-A}^{A} e^{ix\xi}\Big(\big((E-\tau_h)/h - E\big)^k f\Big)(x)dx, \tag{16}$$

для всіх $A>0$, $\xi\in\mathbb{R}$ та $h\neq 0$.

Доведемо тепер рівномірну збіжність щодо $A>0$ ряду з правої частини попередньої рівності. Це забезпечить виконання при $h\neq 0$ граничного співвідношення

$$\lim_{A\to+\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-A}^{A} e^{ix\xi}a_k\Big(\big((E-\tau_h)/h-E\big)^k f\Big)(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}a_k F\big[\big((E-\tau_h)/h-E\big)^k f\big],$$

а відтак, і виконання рівності (14).

Згідно із зображенням (11), для $A>0$, $\xi\in\mathbb{R}$ і $h\neq 0$ маємо:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big|a_k\int_{-A}^{A} e^{ix\xi}\Big(\big((E-\tau_h)/h-E\big)^k f\Big)(x)dx\Big|\le\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\int_{-A}^{A}\Big|\Big(\big((E-\tau_h)/h-E\big)^k f\Big)(x)\Big|dx\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\int_{\mathbb{R}}\Big|\Big(\big((E-\tau_h)/h-E\big)^k f\Big)(x)\Big|dx\le\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\sum_{l=0}^{k}\frac{C_k^l}{|h|^l}\sum_{m=0}^{l}C_l^m\int_{\mathbb{R}}|f(x-mh)|dx=$$

$$=\int_{\mathbb{R}}|f(z)|dz\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\sum_{l=0}^{k}\frac{C_k^l}{|h|^l}\sum_{m=0}^{l}C_l^m=\int_{\mathbb{R}}|f(z)|dz\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\Big(1+\frac{2}{|h|}\Big)^k.$$

Звідси, враховуючи те, що $a(\cdot)$ – мультиплікатор у просторі S_α^β при $\beta\in(0;1)$, приходимо до рівномірної стосовно $A>0$ збіжності ряду з (16).

Далі, звачаючи на рівність (7) та на те, що $a(\cdot)$ – мультиплікатор у просторі S_α^β, згідно з твердженням теореми 1 переконуємось у тому, що при кожному $h\neq 0$ функція $a\big(\varphi_h(\cdot)\big)$ – також мультиплікатор у S_α^β. Тоді $a\big(\varphi_h(\cdot)\big)F[f](\cdot)\in S_\alpha^\beta$, $h\neq 0$. Враховуючи цей факт, з рівності (14) знаходимо, що

$$\big(a\big((E-\tau_h)/h\big)f\big)(\cdot)=F^{-1}\big[a\big(\varphi_h(\xi)\big)F[f](\xi)\big](\cdot),\quad h\neq 0,\ f\in S_\beta^\alpha.$$

Залишилось обґрунтувати граничний перехід у наступній рівності:

$$\lim_{h\to 0}F^{-1}\big[a\big(\varphi_h(\xi)\big)F[f](\xi)\big](\cdot)=F^{-1}\big[\lim_{h\to 0}a\big(\varphi_h(\xi)\big)F[f](\xi)\big](\cdot).\tag{17}$$

Для цього потрібно встановити рівномірну щодо $h\in[-1;1]$ збіжність інтеграла

$$I_h(x)=\int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}a\big(\varphi_h(\xi)\big)F[f](\xi)d\xi,\quad x\in\mathbb{R}.\tag{18}$$

Оскільки $F[f](\cdot)\in S_\alpha^\beta$, то

$$\exists\delta_0>0\,\exists c>0\,\forall\xi\in\mathbb{R}:\quad |F[f](\xi)|\le c_0e^{-\delta_0|\xi|^{1/\alpha}}.$$

Згідно з теоремою 1, для числа $\delta_1=\delta_0/2$ існує константа $c_0>0$ така, що для всіх $\{\xi,h\}\subset\mathbb{R}$ виконується оцінка

$$\big|a\big(\varphi_h(\xi)\big)\big|\le c_0e^{\delta_1|\varphi_h(\xi)|^{1/\alpha}}=c_0e^{\delta_1|\xi|^{1/\alpha}}$$

(тут ми скористалися рівністю (9)). Тоді

$$|I_h(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left|a\big(\varphi_h(\xi)\big)F[f](\xi)\right| d\xi \leq cc_0 \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\delta_1|\xi|^{1/\alpha}} d\xi, \quad \{x, h\} \subset \mathbb{R}.$$

Звідси вже стає очевидною зазначена рівноміжна збіжність інтегралу (18).

Таким чином, правильність рівності (13) обгрунтовано. □

Зауваження. *Як у випадку класичного дробового диференціювання, формулу* (13) *можна покласти в основу для поширення поняття диференціювання за Постом на ширші класи функцій a та f, при яких існуватиме права частина рівності* (13).

3 Висновки

У просторах S_β^α, $\alpha > 0$, $\beta < 1$, встановлено зображення оператора диференціювання Поста $a(D_x)$ в класичній формі дробового диференціювання за умови, що його символ $a(\cdot)$ є згортувачем у вихідному просторі S_β^α. Цей факт відкриває широкі можливості для застосування класичного методу перетворення Фур'є до розв'язування задачі Коші для рівнянь з псевдодиференціальним оператором Поста.

Список літератури

[1] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk : Science and technology, 1987. (in Russian)

[2] Eulero L. *De progressionibvs transcendentibvs, sev qvarvm termini generales algebraice dari neqvevnt* Comment. Acad. Sci. Imperialis petropolitanae. 1738, **5**, 38–57.

[3] Abel N. H. *Solution de quelques problemes a l'aide d'integrales defines* Gesammelte math. werke. Leipzig: Teubner. 1881, **1**, 11–27.

[4] Liouville J. *Memoire sur quelques questions de geometrie et de mecanique, et sur un nouveau genre de calcul pour resoudre ces questions* J. l'Ecol Roy. Polytechn. 1832, **13** (21), 1–69.

[5] Liouville J. *Memoire sur le calcul des differentielles a indices quelconques* Ibid. 1832, 71–162.

[6] Liouville J. *Memoire sur le theoreme des functions complementaires* J. für reine und angew. Math. 1834, **11**, 1–19.

[7] Liouville J. *Memoire sur l'usage que l'on peut faire de la formule de Fourier, dans le calcul des differentielles a indices quelconques* Ibid. 1835, **13** (1 – 3), 219–232.

[8] Liouville J. *Memoire sur l'integration des equations differentielles a indices fractionnaires* Ibid. 1837, **15** (55), 58–84.

[9] Grunvald A. K. *Uber "begrenzte"Derivationen und deren Anwendung* Z. angew. Math. und Phys. 1867, **12**, 441–480.

[10] Letnikov A. V. *The theory of differentiation with arbitrary pointer* Match. sb. 1868, **3**, 1–68. (in Russian)

[11] Post E. L. *Generalized differentiation* Trans. Amer. Math. Soc. 1930, **32**, 732–781.

[12] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov Spaces of Basic and Generalized Functions. Moscow: Gos. Izd. Fiz. Mat. Lit., 1958. (in Russian)

[13] Litovchenko V.A. Shilov systems in spaces of type S and S'. Chernivtsi : ChNU, 2019. (in Ukrainian)

Надійшло 10.12.2023

Litovchenko V.A. *Post's pseudo-differential operator in S-type spaces*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 153–161.

During the last few decades, the theory of fractional differentiation and pseudo-differential operators, which naturally generalize and extend the concepts of classical derivative and differential operations, has been rapidly developing. The reason for this development is primarily the close connection of pseudo-differential operators and fractional differentiation with important problems of analysis and modern mathematical physics. It turned out that such player operators play an important role in the theory of analytical boundary-value problems (in the study of the index of the problem, in reduction to the boundary of the region, etc.), in microlocal analysis, in the theory of random processes, with the help of fractal differentiation operators heat-diffusive processes in porous media, etc.

There are different approaches to the generalization of the classical derivative, the implementation of which gave rise to a variety of fractional differentiation and pseudodifferentiation operations. In this connection, there is a natural need for a comparative characterization of these generalizations, which is convenient to conduct through the prism of the classical form of fractional differentiation on elements with "sufficiently good" properties. In addition, the representation of this or that pseudo-differentiation operation in such a classical form makes it possible to use a rather convenient Fourier transform apparatus for the analysis of problems with these operations.

In this work, the question of the possibility of representation in S type spaces of I.M. Gelfand is investigated. and Shilova G.E. pseudo-differential operator E. Post $a(D_x)$ in the classical form of fractional differentiation, provided that its symbol $a(\cdot)$ is a convolution in the original space.