УДК 517.984.54

І. Д. Пукальський, Б. О. Яшан

ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ ДЛЯ 2B-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Для параболічного рівняння порядку 2b розглянуто задачу з імпульсною дією. Коефіцієнти рівняння мають степеневі особливості довільного порядку за часовою і просторовими змінними на деякій множині точок. Знайдено оцінки розв'язку поставленої задачі та його похідних в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається через величини порядків степеневих особливостей і вироджень коефіцієнтів 2b-параболічного рівняння.

Ключові слова: *степеневі особливості, імпульсний вплив, інтерполяційні нерівності, апріорні оцінки, гельдерові простори, теорема Арчела, борелівська міра, теорема Рісса.*

Вступ. Задачі з імпульсною дією для диференціальних рівнянь є тим математичним апаратом, за допомогою якого вдалося описати чимало нових ефектів та явищ в багатьох прикладних задачах. Дослідження задач теорії ядерних реакторів, динамічних систем приводять до розв'язання задач для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Імпульсні системи виникають також в багатьох задачах природознавства, при вивченні яких математичні моделі містять умови, що описують вплив зовнішніх сил імпульсної природи. Всебічне вивчення розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією наведено у монографіях [8, 9]. Існування періодичних розв'язків рівнянь гіперболічного типу з імпульсною дією присвячено працю [2]. Класичним розв'язком крайових задач з імпульсною дією для параболічних рівнянь другого порядку, коефіцієнти яких мають степеневі особливості за просторовими змінними, присвячені праці [3, 7]. Для параболічних рівнянь за Шиловим з неперервними коефіцієнтами та імпульсною дією присвячена праця [11]. У роботі [12] досліджується нульова наближена керованість вироджених сингулярних параболічних рівнянь під дією імпульсного керування.

У монографії [5] досліджено класичні розв'язки задачі Коші і задачі з імпульсною дією параболічних задач з інтегральними операторами і ваговими крайовими умовами. Задачі Коші і крайовій задачі для $2b$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок присвячено [4, 6]. Дослідження крайових задач з розривними умовами рівняння змішаного гіперболо-параболічного типу з виродженням порядку в області гіперболічності присвячено праці [13, 14].

У цій статті розглядається задача з імпульсною дією для $2b$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок. У гельдерових просторах зі степеневою вагою одержано оцінки розв'язку поставленої задачі.

Постановка задачі і основний результат. Нехай η, t_0, t_1, …, t_{N+1} – фіксовані числа, $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, $\eta \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1, \ldots, N\}$, Ω – обмежена область, $\dim \Omega \le n-1$, $D = \{(t,x) | t \in [t_0, t_{N+1}), x \in \overline{\Omega}\} \cup \{(t,x) | t = \eta, x \in R^n\}$.

Розглянемо в області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times R^n$ задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x) \in \Pi \setminus D$, $t \ne t_\lambda$ рівняння

$$(Lu) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x) \partial_x^k - \sum_{|p| \le 2b-1} A_p(t,x) \partial_x^p \right] u(t,x) = f(t,x) \tag{1}$$

і умови за змінною t

$$u(t_0 + 0, x) = \varphi_0(x), \quad x \in R^n \setminus \overline{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(t_\lambda+0,x)-u(t_\lambda-0,x)=b_\lambda(x)u(t_\lambda-0,x)+\varphi_\lambda(x)\,,\quad x\in\left((\Pi\setminus D)\cap\left(t=t_\lambda\right)\right), \qquad (3)$$

$$\partial_x^k=\partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}\,,\ \ |k|=k_1+\ldots+k_n\,.$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціального виразу L у точці $P(t,x)\in\Pi\setminus D$ характеризуватимуть функції $s_1\left(\beta_i^{(1)},t\right)$ і $s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)$: $s_1\left(\beta_i^{(1)},t\right)=|t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\eta|\le 1$; $s_1\left(\beta_i^{(1)},t\right)=1$ при $|t-\eta|\ge 1$; $s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)=\rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x)\le 1$, $s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)=1$ при $\rho(x)\ge 1$, $\rho(x)=\inf\limits_{z\in\Omega}|x-z|$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\nu\in\{1,2\}$, $\beta^{(\nu)}=\left(\beta_1^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)}\right)$, $\beta=\left(\beta^{(1)},\beta^{(2)}\right)$.

Позначимо через $\Pi^{(r)}=[t_r,t_{r+1})\times R^n$, $r\in\{0,1,...,N\}$, $q^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\mu_0^{(\nu)}$ – дійсні невід'ємні числа, $[l]$ – ціла частина числа l, $l>0$, $\{l\}=l-[l]$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)},x^{(1)}\right)$, $H_i\left(t^{(1)},x^{(2)}\right)$ – довільні точки із Π, $x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, $x^{(2)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, Q_r – довільна замкнена область, $\bar{Q}_r\subset\Pi^{(r)}$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)-(3).

$C^l(\gamma;\beta;q;\Pi)$ – множина функцій $u:(t,x)\in\Pi$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q_r\setminus D$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2bj+|k|\le[l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l=\sup_r\left\|u;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_l=\sup_r\left(\sum_{2bj+|k|\le[l]}\left\|u;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{2bj+|k|}+\left\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\rangle_l\right)$$

де, наприклад,

$$\left\|u;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\|_0=\sup_{P\in\bar{Q}_r}|u(P)|\equiv\left\|u;\Pi^{(r)}\right\|_0,$$

$$\left\|u;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{2bj+|k|}=\sup_{P\in\bar{Q}_r}S\left(q;s_1,s_2;2bj+|k|;t,x\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P)\right|,$$

$$\left\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\rangle_l=\sum_{2bj+|k|=[l]}\Bigg\{\sum_{i=1}^n\sup_{(P_1,H_i)\subset\bar{Q}_r}\left[S\left(q;s_1,s_2;[l];t^{(1)},\tilde{x}\right)\cdot s_1\left(\{l\}\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}\right),t^{(1)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times s_2\left(\{l\}\left(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\{l\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_i)\right|\right]+$$

$$+\sup_{(P_1,P_2)\subset\bar{Q}_r}\left[S\left(q;s_1,s_2;[l];\tilde{t},x^{(1)}\right)s_1\left(\{l\}\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)s_2\left(\{l\}\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\left\{\frac{l}{2b}\right\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u(P_2)\right|\right]\Bigg\}.$$

Тут позначено: $s_1(a,\tilde{t})=min\left(s_1\left(a,t^{(1)}\right),s_1\left(a,t^{(2)}\right)\right)$, $S\left(q;s_1,s_2;[l];t,x\right)=$ $=s_1\left(q^{(1)}+[l]\gamma^{(1)},t\right)s_2\left(q^{(2)}+[l]\gamma^{(2)},x\right)\prod\limits_{i=1}^n s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x\right)$, $s_2(a,\tilde{x})=\min\left(s_2\left(a,x^{(1)}\right),s_2\left(a,x^{(2)}\right)\right)$.

Щодо задачі (1)-(3), вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t,x)\prod\limits_{i=1}^n s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$,

$A_p(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(p_i\mu_{p_i}^{(1)},t\right)s_2\left(p_i\mu_{p_i}^{(2)},x\right)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $1\le|p|\le 2b-1$, $A_0(t,x)s_1\left(\mu_0^{(1)},t\right)\times$ $\times s_2\left(\mu_0^{(2)},x\right)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$, $A_0(t,x)\le K<\infty$ і виконується умова рівномірної параболічності [5] для рівняння

$$\left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\partial_x^k\right]u(t,x)=\tilde f(t,x);$$

б) $f\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi)$, $\varphi_0\in C^{2b+\alpha}\left(\tilde\gamma;\tilde\beta;0;R^n\right)$, $\tilde\gamma=\left(0,\gamma^{(2)}\right)$, $\tilde\beta\in\left(0,\beta^{(2)}\right)$, $\varphi_\lambda\in C^{2b+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_\lambda)\right)$, $b_\lambda\in C^{2b+\alpha}\left(\Pi\cap(t=t_\lambda)\right)$,

$$\gamma^{\nu}=\max\left\{\max_i \beta_i^{(\nu)}, \max_{p_i}\frac{p_i\left(\mu_{p_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right)}{2b-|p|}, \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b}\right\},\ \nu\in\{1,2\}.$$

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі (1)-(3) виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (1)-(3) із простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}\le C\left\{\sum_{r=1}^{N}\left[\sum_{\lambda=r}^{N}\left(\|1+b_\lambda\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi\cap(t=t_\lambda))}\right)\left(\left\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r-1)}\right\|_{\alpha}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left\|\varphi_{r-1};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap(t=t_{r-1})\right\|_{2b+\alpha}\right)\right]+\left\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(N)}\right\|_{\alpha}+$$
$$\left.+\left\|\varphi_N;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap(t=t_N)\right\|_{2b+\alpha}\right\}. \tag{4}$$

Для доведення теореми 1 встановимо розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)-(3).

Оцінка розв'язків допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами. Нерівність (4) одержується тією ж схемою, що і встановлення оцінок для розв'язків задачі Коші із [6].

Нехай $\Pi_m=\Pi\cap\left\{(t,x)\in\Pi\left|s_1(1,t)\ge m_1^{-1}, s_2(1,x)\ge m_2^{-1}\right.\right\}$, $m=(m_1,m_2)$, $m_1\ge 1$, $m_2\ge 1$, послідовність областей, яка при $m_1\to\infty$, $m_2\to\infty$ збігається до Π.

Розглянемо в області Π задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}a_k(t,x)\partial_x^k-\sum_{|p|\le 2b-1}a_p(t,x)\partial_x^p\right]u_m(t,x)=f_m(t,x), \tag{5}$$

які задовольняють умови за змінною t:

$$u_m(t_0+0,x)=\varphi_m^{(0)}(x). \tag{6}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x)-u_m(t_\lambda-0,x)=b_\lambda(x)u_m(t_\lambda-0,x)+\varphi_m^{(\lambda)}(x). \tag{7}$$

Тут коефіцієнти a_k, a_p, функції $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, f_m в області Π_m співпадають з A_k, A_p, φ_0, φ_λ, f відповідно, а в області $\Pi\setminus\Pi_m$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_k, A_p і функцій φ_0, φ_λ, f із області Π_m в область $\Pi\setminus\Pi_m$ із збереженням гладкості і норми [10, с. 82].

Позначимо через $H^l(\gamma;\beta;q;\Pi)$ сукупність функцій простору $C^l(\Pi)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$, еквівалентну при кожному m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l$, тільки замість функцій $s_1\left(a^{(1)},t\right)$, $s_2\left(a^{(2)},x\right)$ беремо відповідно $d_1\left(a^{(1)},t\right)$, $d_2\left(a^{(2)},x\right)$, де $d_1\left(a^{(1)},t\right)=\max\left(s_1\left(a^{(1)},t\right),m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)}\ge 0$

і $d_1\left(a^{(1)},t\right)=\min\left(s_1\left(a^{(1)},t\right),m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)}\le 0$; $d_2\left(a^{(2)},x\right)=\max\left(s_2\left(a^{(2)},x\right),\right.$ $\left.m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)}\ge 0$ і $d_2\left(a^{(2)},x\right)=\min\left(s_2\left(a^{(2)},x\right),m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)}\le 0$.

Для норми

$$\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_l=\sup_r\left\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_l$$

правильні інтерполяційні нерівності.

Лема. *Нехай* $u_m\in H^{[l]+\alpha}(\gamma;\beta;q;\Pi)$. *Тоді для* ε, $0<\varepsilon<1$, *існує стала* $C(\varepsilon)$, *що виконуються нерівності*

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{[l]}\le\varepsilon^\alpha\left\langle u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\rangle_{[l]+\alpha}+C(\varepsilon)\left\|u_m;\Pi^{(r)}\right\|_0,$$

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{|k|}\le\varepsilon\left\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{|k|+1}+\frac{C}{\varepsilon}\left\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{|k|-1},\quad |k|\le[l]-1. \tag{8}$$

Нерівності (8) одержуються за схемою доведення леми із [6].

В області $\Pi^{(r)}$ розглянемо задачу

$$(L_1u_m)(t,x)=f_m(t,x),\quad u_m(t_r+0,x)=g_m^{(r)}(t_r,x), \tag{9}$$

де $g_m^{(0)}(t_0,x)=\varphi_m^{(0)}(x)$, $x\in R^n$, $g_m^{(r)}(t_r,x)=(1+b_r(x))u_m(t_r-0,x)+\varphi_m^{(r)}(x)$, $x\in\Pi\cap(t=t_r)$, $r\in\{1,2,\dots,N\}$.

В областях $\Pi^{(r)}$ розв'язок задачі (9) існує і єдиний в просторі $C^{2b+\alpha}\left(\Pi^{(r)}\right)$ ([5] теорема 1, ст. 31). Знайдемо оцінку його норми $\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}$.

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо для задачі (5)-(7) виконані умови а), б), то для розв'язку задачі (5)-(7) правильна оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}\le C\left\{\sum_{r=1}^{N}\left[\sum_{\lambda=r}^{N}\left(\|1+b_\lambda\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi\cap(t=t_\lambda))}\right)\left(\left\|\varphi_m^{(r-1)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap(t=t_{r-1})\right\|_{2b+\alpha}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r-1)}\right\|_\alpha\right]+\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(N)}\right\|_\alpha+\left\|\varphi_m^{(N)};\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_N)\right\|_{2b+\alpha}\right\}. \tag{10}$$

Стала C не залежить від m.

Доведення. Знайдемо оцінку норми $\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\|_{2b+\alpha}$. Використовуючи інтерполяційні нерівності (8), маємо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\|_{2b+\alpha}\le\left(1+\varepsilon^\alpha\right)\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\rangle_{2b+\alpha}+C(\varepsilon)\left\|u_m;\Pi^{(r)}\right\|_0.$$

Тому досить оцінити півнорму $\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\rangle_{2b+\alpha}$.

Із визначення $\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\rangle_{2b+\alpha}$ випливає існування в $\Pi^{(r)}$ точок $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)},x^{(1)}\right)$, $H_i\left(t^{(1)},x^{(2)}\right)$, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\|_{2b+\alpha}\le E_1+E_2, \tag{11}$$

де

$$E_1=\sum_{2bj+|k|=2b}\left[\sum_{i=1}^{n}S\left(q;d_1,d_2;2b;t^{(1)};\tilde x\right)d_1\left(\alpha\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}\right),t^{(1)}\right)d_2\left(\alpha\left(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}\right),\tilde x\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u_m(H_i)\right|\right],$$

$$E_2=\sum_{2bj+|k|=2b}S\left(q;d_1,d_2;2b;\tilde t;x^{(1)}\right)d_1\left(\alpha\gamma^{(1)},\tilde t\right)d_2\left(\alpha\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2b}}\times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_2)\right|.$$

Якщо $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|\ge\frac{\varepsilon_1}{2n}d_1\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},\tilde{x}\right)d_2\left(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_1$, ε_1 – довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1\le c_1\varepsilon_1^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\|_{2b}. \tag{12}$$

Якщо $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\ge\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^{2b}d_1\left(2b\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)d_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_2$, то

$$E_2\le c_2\varepsilon_1^{-\alpha}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\|_{2b}. \tag{13}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності (8) до (12), (13), знаходимо

$$E_1+E_2\le\varepsilon^{\alpha}\left\|u_m;\gamma;0;0;\Pi^{(r)}\right\|_{2b+\alpha}+C(\varepsilon)\left\|u_m;\Pi^{(r)}\right\|_0. \tag{14}$$

Розглянемо випадок $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|\le N_1$, $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\le N_2$. Будемо вважати, що $d_1\left(\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)\equiv d_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)=\min\left(d_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right),d_1\left(\gamma^{(1)},t^{(2)}\right)\right)$, $d_2\left(\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv d\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)=$ $=\min\left(d_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right),d_2\left(\gamma^{(2)},x^{(2)}\right)\right)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)\in\Pi^{(r)}$. Запишемо задачу (9) у вигляді

$$\partial_t u_m-\sum_{|k|=2b}a_k(P_1)\partial_x^k u_m=f_m(t,x)+\sum_{|p|\le 2b-1}a_p(t,x)\partial_x^p u_m+$$
$$+\sum_{|k|=2b}\left[a_k(t,x)-a_k(P_1)\right]\partial_x^k u_m\equiv F_m(t,x;u_m), \tag{15}$$

$$u_m(t_r+0,x)=g_m^{(r)}(t_r,x). \tag{16}$$

В задачі (15), (16) зробимо заміну $u_m(t,x)=v_m(t,y)$, де $y_i=d_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)\times$ $\times d_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i$, $i\in\{1,\dots,n\}$. Тоді $\omega_m(t,y)=\eta(t,y)v_m(t,y)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t\omega_m-\sum_{|k|=2b}a_k(P_1)S_1\left(k;d_1,d_2;t^{(1)};x^{(1)}\right)\partial_y^k\omega_m=v_m\partial_t\eta+\eta F_m(t,\tilde{y};v_m)+$$

$$+\sum_{|k|=2b}a_k(P_1)S_1\left(k;d_1,d_2;t^{(1)};x^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|<|k|}C_{|k|}^{|p|}\partial_y^{k-p}v_m\partial_y^p\eta\right)\equiv F_m^{(1)}(t,y;v_m), \tag{17}$$

$$\omega_m(t_r+0,y)=\eta(t_r+0,y)g_m^{(r)}(t_r,\tilde{y}). \tag{18}$$

Тут позначено

$$\tilde{y}=\left(d_1^{-1}\left(\beta_1^{(1)},t^{(1)}\right),d_2^{-1}\left(\beta_2^{(1)},x^{(1)}\right)x_1,\dots,d_1^{-1}\left(\beta_n^{(1)},t^{(1)}\right),d_2^{-1}\left(\beta_n^{(2)},x^{(1)}\right)x_n\right);$$

$$\eta(t,y)=\begin{cases}1,\ (t,y)\in T_{1/2},\ 0\le\eta(t,y)\le 1;\\ 0,\ (t,y)\notin T_{3/4},\ \left|\partial_t^j\partial_x^k\eta\right|\le C_{kj}d_1^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)d_2^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right);\end{cases}$$

$$T_\delta=\left\{(t,y),\left|t-t^{(1)}\right|\le 2\delta N_2,\left|y_i-y_i^{(1)}\right|\le\frac{\delta}{n}d_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right),d_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)\right\};$$

$$S_1\left(k;d_1,d_2;t^{(1)};x^{(1)}\right)=\prod_{i=1}^{n}d_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)d_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right);$$

$$y_i^{(1)}=d_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)d_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i^{(1)},\ \ i\in\{1,2,\dots,n\}.$$

Зазначимо, що коефіцієнти рівняння (17) обмежені сталими, незалежними від точки $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$. Тому, використовуючи теорему 1 із ([5], с. 31), для довільних точок $M_1\in T_{1/2}$, $M_2\in T_{1/2}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^j\partial_x^k v_m(M_1)-\partial_t^j\partial_x^k u_m(M_2)\right|\le$$

$$\le c\left(\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^{\alpha}(T_{3/4})}+\left\|\eta g_m^{(r)}\right\|_{C^{2b+\alpha}(T_{3/4}\cap(t=t_r))}\right), \qquad (25)$$

$d(M_1, M_2)$ – параболічна відстань між M_1, M_2, $2bj+|k|=2b$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$ і нерівності (8), одержимо

$$\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^{\alpha}(T_{3/4})}\le cW(d_1,d_2)\left(\|v_m;\gamma;0;0;T_{3/4}\|_{2b}+\|F_m;\gamma;0;2b\gamma;T_{3/4}\|_{\alpha}+\|v_m;T_{3/4}\|_0\right), \qquad (20)$$

$$\left\|\eta g_m^{(r)}\right\|_{C^{2b+\alpha}(T_{3/4}\cap(t=t_r))}\le cW(d_1,d_2)\left\|g_m^{(r)};\tilde{\gamma};0;0;T_{3/4}\cap(t=t_r)\right\|_{2b+\alpha},$$

де $W(d_1,d_2)=d_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)d_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)$.

Із визначення простору $H^l(\gamma;\beta;q;\Pi)$ випливає справедливість нерівностей

$$c_3\|v_m;\gamma;0;q;T_{3/4}\|_l\le\|u_m;\gamma;\beta;q;K_{3/4}\|_l\le c_4\|v_m;\gamma;0;q;T_{3/4}\|_l,$$

$$K_\delta=\left\{(t,x)\in\Pi^{(r)}\,\left|x_i-x_i^{(1)}\right|\le\delta N_1,\left|t-t^{(1)}\right|\le\delta N_2\right\}.$$

Підставимо (20) у (19) і повернемось до змінних (t,x), знаходимо

$$E_1+E_2\le c\left(\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\|_{\alpha}+\left\|g_m^{(r)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;K_{3/4}\cap(t=t_r)\right\|_{2b+\alpha}+\|u_m;K_{3/4}\|_0\right). \qquad (21)$$

Для знаходження норми $\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\|_{\alpha}$ досить оцінити півнорми кожного доданка виразу $F_m(t,x;u_m)$. Скориставшись нерівностями (8), одержимо

$$\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\|_{\alpha}\le c_5\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\|_{\alpha}+c_6\|u_m;K_{3/4}\|_0+$$
$$+\varepsilon_2\|u_m;\gamma;\beta;0;K_{3/4}\|_{2b+\alpha}. \qquad (22)$$

Підставляючи (22) у (21), знаходимо

$$E_1+E_2\le c_7\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\|_{\alpha}+c_8\left\|g_m^{(r)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;K_{3/4}\cap(t=t_r)\right\|_{2b+\alpha}+$$
$$+\varepsilon_2\|u_m;\gamma;\beta;0;K_{3/4}\|_{2b+\alpha}+c_9\|u_m;K_{3/4}\|_0. \qquad (23)$$

Використовуючи нерівності (11), (14), (23) і вибираючи ε, ε_2 досить малими, одержимо нерівність

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\|_{2b+\alpha}\le C\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r)}\right\|_{\alpha}+\left\|u_m;\Pi^{(r)}\right\|_0+\right.$$
$$\left.+\left\|g_m^{(r)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi^{(r)}\cap(t=t_r)\right\|_{2b+\alpha}\right). \qquad (24)$$

Знайдемо оцінку норми $\left\|u_m;\Pi^{(r)}\right\|_0$.

В областях $\Pi^{(r)}$ розв'язок задачі (9) існує і єдиний в просторі $C^{2b+\alpha}\left(\Pi^{(r)}\right)$ ([5] теорема 1, ст. 31) і має при кожному фіксованому m_1, m_2 скінченну норму [5, ст. 56]. Скориставшись методом доведення зауваження 2 [1, ст. 79] і теоремою 3 із [6] встановлюємо оцінку

$$\left\|u_m;\Pi^{(r)}\right\|_0\le c_{10}\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r)}\right\|_{\alpha}+\left\|g_m^{(r)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi^{(r)}\cap(t=t_r)\right\|_{2b+\alpha}\right). \qquad (25)$$

Враховуючи нерівності (24), (25) при $r=0$, маємо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(0)}\right\|_{2b+\alpha}\le c_{11}\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(0)}\right\|_{\alpha}+\left\|\varphi_m^{(0)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\right\|_{2b+\alpha}\right).$$

Знайдемо оцінку розв'язку $u_m(t,x)$ в області $\Pi^{(0)}\cup\Pi^{(1)}$. Враховуючи умову (7), маємо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(0)}\cup\Pi^{(1)}\right\|_{2b+\alpha}\le c_{12}\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(1)}\right\|_{\alpha}+\left\|\varphi_m^{(1)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\cap(t=t_1)\right\|_{2b+\alpha}\right)+$$
$$+c_{11}\left(\|1+b_1\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi\cap(t=t_1))}\right)\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(0)}\right\|_{\alpha}+\left\|\varphi_m^{(0)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;R^n\right\|_{2b+\alpha}\right).$$

Продовжуючи вищенаведені міркування і враховуючи умову (7), одержимо нерівність (10).

Доведення теореми 1. Оскільки

$$\left\| f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r-1)} \right\|_\alpha \le C\left\| f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r-1)} \right\|_\alpha ,$$

$$\left\| f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(N)} \right\|_\alpha \le C\left\| f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(N)} \right\|_\alpha ,$$

$$\left\| \varphi_m^{(r-1)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap(t=t_{r-1}) \right\|_{2b+\alpha} \le C\left\| \varphi_{r-1};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap(t=t_{r-1}) \right\|_{2b+\alpha} ,$$

$$\left\| \varphi_m^{(N)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap(t=t_N) \right\|_{2b+\alpha} \le C\left\| \varphi_N;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap(t=t_N) \right\|_{2b+\alpha} ,$$

то, використовуючи нерівність (10), одержимо

$$\left\| u_m;\gamma;\beta;0;\Pi \right\|_{2b+\alpha} \le C\left\{ \sum_{r=1}^{N}\left[\sum_{\lambda=r}^{N}\left(\left\| 1+b_\lambda \right\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi\cap(t=t_\lambda))} \right)\left(\left\| f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r-1)} \right\|_\alpha + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. +\left\| \varphi_{r-1};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap(t=t_{r-1}) \right\|_{2b+\alpha} \right] + \left\| \varphi_N;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap(t=t_N) \right\|_{2b+\alpha} + $$

$$\left. +\left\| f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(N)} \right\|_\alpha \right\}. \qquad (26)$$

Права частина нерівності (26) не залежить від m_1, m_2 і послідовності

$$\left\{ W_m^{(j,k)} \right\} = \left\{ d_1\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t \right) d_2\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x \right)\times\right.$$

$$\left.\times\prod_{i=1}^{n} d_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t \right) d_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x \right)\partial_t^j\partial_x^k u(t,x) \right\}, \quad 2bj+|k|\le 2b ,$$

компактні в довільній замкнутій області $\bar Q_r \subset \Pi^{(r)}$. За теоремою Арчела існують підпослідовності $\left\{ W_{m(l)}^{(j,k)} \right\}$ рівномірно збіжні при $m(l)\to\infty$ до $W^{(j,k)}$. Переходячи до границі при $m(l)\to\infty$ в задачі (5)-(7) одержимо, що $u(t,x)=W^{(0,0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1)-(3) і правильна оцінка (4).

Теорема 3. *Нехай для задачі (1)-(3) виконані умови а), б) і* $f\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$. *Тоді єдиний задачі (1)-(3) в областях* $\Pi^{(r)}$ *визначається формулами*

$$u(t,x)=u_r(t,x),\ (t,x)\in\Pi^{(r)}, \quad r\in\{0,1,...,N\},$$

$$u_0(t,x)=\iint_{\Pi^{(0)}} Z_0(t,x;d\tau,d\xi)\, f(\tau,\xi) + \int_{R^n} Z_0(t,x;0,d\xi)\varphi_0(\xi), \qquad (27)$$

$$u_r(t,x)=\iint_{\Pi^{(r)}} Z_r(t,x;d\tau,d\xi)\, f(\tau,\xi) +$$

$$+\int_{\Pi^{(r)}\cap(t=t_r)} Z_r(t,x;0,d\xi)(1+b_r(\xi))\left(u_{r-1}(t_r-0,\xi)+\varphi_r(\xi)\right).$$

Доведення. Оскільки $C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)\subset C^\alpha(\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi)$, то для $f\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)$ виконується нерівність

$$\left\| f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r)} \right\|_\alpha \le c\left\| f;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_\alpha, \quad r\in\{0,1,...,N\}.$$

Тому, враховуючи теорему (1) для розв'язку задачі (1)-(3) в областях $\Pi^{(r)}$ має місце нерівність: при $r\ge 1$

$$\left\| u;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_{2b+\alpha} \le C\left[\left(\left\| 1+b_r \right\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi\cap(t=t_r))} \right)\left\| u;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r-1)} \right\|_{2b+\alpha} + \right.$$

$$\left. +\left\| \varphi_r;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;\Pi\cap(t=t_r) \right\|_{2b+\alpha} + \left\| f;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_\alpha \right];$$

при $r=0$

$$\left\| u;\gamma;\beta;0;\Pi^{(0)} \right\|_{2b+\alpha} \le C\left(\left\| f;\gamma;\beta;0;\Pi^{(0)} \right\|_\alpha + \left\| \varphi_0;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;R^n \right\|_{2b+\alpha} \right).$$

Зазначимо, що простір $C_\alpha \equiv C^\alpha(\gamma;\beta;0;\Pi)\times C^{2b+\alpha}\left(\tilde\gamma;\tilde\beta;0;R^n\right)\times$

$\times C^{2b+\alpha}\left(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\cap\left(t=t_1\right)\right)\times\ldots\times C^{2b+\alpha}\left(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\cap\left(t=t_N\right)\right)$ вкладається в простір $C(\Pi)$, $C_\alpha\subset C(\Pi)$. Тому, використовуючи теорему Рісса, можна вважати, що при фіксованих $(t,x)\in\Pi^{(r)}$ лінійний неперервний функціонал $u_r(t,x)$ породжує борелівську міру $Z_r\left(t,x;G_r\right)$, яка визначається на σ-алгебрі підмножин $G_r\subset\Pi^{(r)}$, включаючи $\Pi^{(r)}$ і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулами (27).

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. – М.: ИЛ, 1962. – 205 с.
2. *Асанова А.Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 315–328.

   Те саме: Asanova A.T. On a Nonlocal Boundary-Value Problem for Systems of Impulsive Hyperbolic Equations // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 3. – P. 349–365. – https://doi.org/10.1007/s11253-013-0782-x.
3. *Ісарюк І.М., Пукальський І.Д.* Крайові задачі з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, №3. – С. 55-67.

   Те саме: I. M. Isaryuk and I. D. Pukal’skii Boundary-value problems with impulsive conditions for parabolic equations with degeneration // Journal of Mathematical Sciences, vol 236. №1 January. 2019. p. 53-70.
4. *Лусте І.П., Пукальський І.Д.* Загальна крайова задача для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, №2. – С. 109-120.
5. *Матійчук М.І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці, 2010. – 248 с.
6. *Пукальський І.Д.* Задача Коші для нерівномірно параболічних рівнянь з степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, №2. – С. 31-41.
7. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Крайова задача з імпульсною дією для параболічного рівняння з виродженням // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 5. – С. 645–655.

   Те саме: I. D. Pukalskyi, B. O. Yashan Boundary-value problem with impulsive action for a parabolic equation with degeneration. Ukrainian Mathematical Journal., vol 71. №5 2019. p. 735–748.
8. *Samoulenko A.M., Perestyuk N.A.* Impulsive Differential Equations. – Singapore: Word Scientific, 1995. – 462 p.
9. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями. – К.: Вища школа, 1987. – 288 с.

   Те саме: *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – x+462 p.
10. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.

    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
11. Unguryan G. Modified Cauchy Problem with Impulse Action for Parabolic Shilov Equations // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 2021. – 4. Article ID 5539676, DOI: https://doi.org/10.1155/2021/5539676
12. Maarouf H., Maniar L., Ouelddris I., Salhi J. Impulse controllability for degenerate singular parabolic equations via logarithmic convexity method // IMA Journal of Mathematical Control and Information. 2023. – dnad025, DOI: https://doi.org/10.1093/imamci/dnad025
13. Khubiev, K.U. Boundary-Value Problem for a Loaded Hyperbolic-Parabolic Equation with Degeneration of Order. J Math Sci 260, 387–391 (2022). https://doi.org/10.1007/s10958-022-05700-7
14. Ambrosio P., Passarelli di Napoli A. Regularity results for a class of widely degenerate parabolic equations // Advances in Calculus of Variations. – 2023. https://doi.org/10.1515/acv-2022-0062

Для параболического уравнения порядка 2b рассмотрена задача с импульсным действием. Коэффициенты уравнения имеют степенные особенности произвольного порядка по временному и пространственному переменным на некотором множестве точек. Найдены оценки решения поставленной задачи и его производных в гельдеровых пространствах со степенным весом. Порядок степенного веса определяется из-за величин порядков степенных особенностей и вырождений коэффициентов 2b-параболического уравнения.
Ключевые слова: степенные особенности, импульсное влияние, интерполяционные неравенства, априорные оценки, гельдеровые пространства, теорема Арчела, борелевская мера, теорема Рисса.

I. D. Pukal`ski, B. O. Yashan
PROBLEM WITH IMPULSE EFFECT FOR 2B-PARABOLIC EQUATION WITH DEGENERACY

For the parabolic equation of order 2b, the problem with impulse action is considered. The coefficients of the equation have power features of arbitrary order in time and space variables at some set of points. Estimates of the solution of the given problem and its derivatives in Hölder spaces with power-law weight are found. The order of the power weight is determined by the values of the orders of the power singularities and the degeneracies of the coefficients of the 2b-parabolic equation.
Keywords: power singularities, impulse influence, interpolation inequalities, a priori estimates, Hölder spaces, Archel's theorem, Borel measure, Riesz's theorem.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці
Одержано
31.08.23

E-mail: bohdanjaschan94@gmail.com

Тел.: **0994023210,** **(0372) 58-48-64**