Bukovinian Math. Journal. 2024, **12**, 1, 94–106 Буковинський матем. журнал 2024, Т.12, №1, 94–106

Пукальський І.Д., Яшан Б.О.

БАГАТОТОЧКОВА ЗА ЧАСОМ КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ $2B$-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Досліджується загальна багатоточкова крайова задача для нерівномірно $2b$-параболічних рівнянь з виродженням. Коефіцієнти параболічних рівнянь і крайових умов допускають степеневі виродження довільного порядку за часовою змінною та просторовими змінними на деякій множині точок. Для розв'язання поставленої багатоточкової крайової задачі вивчаються розв'язки задач з гладкими коефіцієнтами в гельдерових просторах з відповідною нормою. За допомогою інтерполяційних нерівностей та апріорних оцінок встановлюються оцінки розв'язку допоміжних задач та їх похідних у спеціальних гельдерових просторах. Використовуючи теореми Рісса й Арчела з компактної послідовності розв'язків допоміжних задач виділяється збіжна послідовність, граничне значення якої є розв'язком багатоточкової за часом крайової задачі для $2b$-параболічного рівняння з виродженням. Оцінки розв'язку поставленої задачі встановлені в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається порядком особливостей коефіцієнтів рівнянь і крайових умов. При певних обмеженнях на праві частини рівняння і крайових умов одержано інтегральне зображення поставленої задачі.

Ключові слова і фрази: крайова задача, степеневі особливості, апріорні оцінки, інтерполяційні нерівності, борелівська міра, теорема Арчела, норма елементів простору, умова параболічності.

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна
e-mail: *i.pukalsky@chnu.edu.ua (Пукальський І.Д.), b.yashan@chnu.edu.ua (Яшан Б.О.)*

Вступ

Одним з найважливіших питань загальної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними є встановлення розв'язності крайових задач. Серед крайових задач для рівнянь з частинними похідними важливе місце посідають задачі з нелокальними крайовими умовами. Такий інтерес до таких задач зумовлений як багатим їх практичним застосуванням (процес дифузії, вологоперекосу в грунтах, фізика плазми тощо), так і потребами загальної теорії крайових задач. У роботах школи Б.Й. Пташкина та його учнів [1], [2], [3] використано метричний підхід для дослідження умовно коректних задач з багатоточковими умовами за виділеною змінною для лінійних гіперболічних та

УДК .....
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35k35, 35k20.
Information on some grant ...

безтипових рівнянь, а також деяких класів параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

У монографії [4] досліджено розв'язки задачі Коші і крайових задач для лінійних і квазілінійних параболічних систем, коефіцієнти яких мають степеневі особливості певного порядку, та побудовано фундаментальні розв'язки еліптичних систем у просторах Діні.

У роботах [5], [6] вивчено задачі з нелокальними та імпульсними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайових умов за будь-якими змінними на деякій множині точок.

Задачі Коші для $2b$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок присвячено праці [7], [8].

У даній статті розглядається загальна багатоточкова задача для параболічного рівняння порядку $2b$ $(b > 1)$ зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння і крайових умов довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині. За допомогою теорем Арчела і Рісса встановлено існування, інтегральне зображення єдиного розв'язку поставленої задачі та оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

1 Постановка задачі та основний результат

Нехай D обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область $\overline{\Omega} \subset D$, $\dim \Omega \leq n-1$, $t_0, t_1, ..., t_{N+1}, \tau$ фіксовані додатні числа, $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_{N+1}$, $\tau \in (t_0, t_{N+1})$, $Q_0 = \left\{(t,x)|\ \ t \in (t_0, t_{N+1}), x \in \overline{\Omega}\right\} \cup \left\{(t,x), t = \tau, x \in \overline{D}\right\}$.

В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x) \in Q \setminus Q_0$ рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\leq 2b-1} A_p(t,x)\partial_x^p\right] u(t,x) = f_0(t,x), \tag{1}$$

умови за змінною t

$$u(t_\lambda + 0, x) = \varphi_\lambda(x), \quad x \in D \setminus \overline{\Omega}, \tag{2}$$

а на межі області $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$ крайові умови

$$\lim_{x \to \xi \in \partial D} \left[\sum_{|k|=r_\mu} B_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k u + \sum_{|p|\leq r_\mu - 1} B_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p u - f_\mu(t,x)\right] = 0, \tag{3}$$

$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$, $\lambda \in \{0, ..., N\}$, $0 \leq r_\mu \leq 2b-1$, $\mu \in \{1, ..., b\}$.

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) і крайових умов (3) у точці $P(t,x) \in Q \setminus Q_0$ характеризуватимуть функції $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right)$ і $s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right)$: $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right) = |t-\tau|^{\beta_i^{(1)}}$ при $|t-\tau| \leq 1$, $s_1\left(\beta_i^{(1)}, t\right) = 1$ при $|t-\tau| \geq 1$; $s_2\left(\beta_i^{(2)}, x\right) = \rho^{\beta_i^{(2)}}(x)$ при $\rho(x) \leq 1$,

$s_2\left(\beta_i^{(2)},x\right)=1$ при $\rho(x)\geq 1$, $\rho(x)=\inf\limits_{z\in\partial\Omega}|x-z|$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $\nu\in\{1,2\}$, $\beta^{(\nu)}=\left(\beta_1^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)}\right)$, $\beta=\left(\beta^{(1)},\beta^{(2)}\right)$, $Q^{(\lambda)}=[t_\lambda,t_{\lambda+1})\times D$, $\alpha\in(0,1)$, $\Gamma^{(\lambda)}=[t_\lambda,t_{\lambda+1})\times\partial D$.

Позначимо через l, q, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\delta_{p_i,\mu}^{(\nu)}$, $i\in\{1,...,n\}$, $\mu_0^{(\nu)}$, $\delta_\mu^{(\nu)}$ – дійсні додатні числа, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\}=l-[l]$, $P(t,x)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)},x^{(1)}\right)$, $R_r\left(t^{(2)},x^{(2)}\right)$ – довільні точки із Q, $x^{(1)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$, $x^{(2)}=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)},x_{r+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)}\right)$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3). $H^l(\gamma;\beta;q;Q)$ – множина функцій $u(t,x)$, які мають неперервні частинні похідні в $Q^{(\lambda)}\backslash Q_0$ при $t\neq t_\lambda$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2bj+|k|\leq[l]$, для яких скінченна норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l=\sup_\lambda\left\{\sum_{2bj+|k|\leq[l]}\left\|u;\gamma;\beta;q;Q^{(\lambda)}\right\|_{2bj+|k|}+\langle u;\gamma;\beta;q;Q^{(\lambda)}\rangle_l\right\},$$

де

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|=\sup_\lambda\left\{\sup_{\overline{Q}^{(\lambda)}}|u|\right\}\equiv\sup_\lambda\left\|u;Q^{(\lambda)}\right\|_0,$$

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{2bj+|k|}=\sup_\lambda\left\{\sup_{P\in\overline{Q}^{(\lambda)}}S\left(q;s_1,s_2;2bj+|k|;t,x\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P)\right|\right\},$$

$$\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_l=\sup_\lambda\left\{\sum_{2bj+|k|=[l]}\left\{\sum_{i=1}^n\sup_{P_1,R_i\in\overline{Q}^{(\lambda)}}\left[S\left(q;s_1,s_2;[l],t^{(1)},\tilde{x}\right)\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\{l\}}\times\right.\right.\right.$$

$$\times s_1\left(\{l\}\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}\right),t^{(1)}\right)s_2\left(\{l\}\left(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\times$$

$$\left.\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u\left(R_i\right)\right|\right]+\sup_{P_1,P_2\in\overline{Q}^{(\lambda)}}\left[S\left(q;s_1,s_2;[l],\tilde{t},x^{(1)}\right)s_1\left(\{l\}\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\left.\times s_2\left(\{l\}\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)|t^{(1)}-t^{(2)}|^{-\left\{\frac{l}{2b}\right\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u\left(P_2\right)\right|\right]\right\}\right\}.$$

Тут позначено $s_1\left(a,\tilde{t}\right)=\min\left(s_1\left(a,t^{(1)}\right),s_1\left(a,t^{(2)}\right)\right)$, $S\left(q;s_1,s_2;[l];t,x\right)\equiv s_1\left(q^{(1)}+[l]\gamma^{(1)},t\right)\times$ $\times s_2\left(q^{(2)}+[l]\gamma^{(2)},x\right)\prod\limits_{i=1}^n s_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x\right)$, $s_2(a,\tilde{x})=\min\left(s_2\left(a,x^{(1)}\right),s_2\left(a,x^{(2)}\right)\right)$.

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:

а) коефіцієнти рівняння (1) $A_k(t,x)\prod\limits_{i=1}^n s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $A_p(t,x)\prod\limits_{i=1}^n s_1\left(\rho_i\mu_{p_i}^{(1)},t\right)s_2\left(\rho_i\mu_{p_i}^{(2)},x\right)\in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $1\leq|p|\leq 2b-1$, $A_0(t,x)s_1\left(\mu_0^{(1)},t\right)\times$ $\times s_2\left(\mu_0^{(2)},x\right)\in H^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $A_0(t,x)\leq K<\infty$ і задачі

$$\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}A_k(t,x)\prod_{i=1}^n s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\partial_x^k\right]u(t,x)=\tilde{f}(t,x),$$

$$u(t_\lambda+0,x)=\tilde{\varphi}_\lambda(x),$$

$$\lim_{x\to\xi\in\partial D}\left[\sum_{|k|=r_\mu} B_k^{(\mu)}(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\partial_x^k u(t,x)-\tilde{f}_\mu(t,x)\right]=0$$

задовольняють в областях $Q^{(\lambda)}$ рівномірну умову параболічності та умову Я.Б. Лопатинського [4];

б) коефіцієнти крайових умов $B_k^{(\mu)}(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t\right)s_2\left(k_i\beta_i^{(2)},x\right)\in H^{2b-r_\mu+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $B_p^{(\mu)}(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1\left(\rho_i\delta_{p_i,\mu}^{(1)},t\right)s_2\left(\rho_i\delta_{p_i,\mu}^{(2)},x\right)\in H^{2b-r_\mu+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, $B_0^{(\mu)}(t,x)s_1\left(\delta_\mu^{(1)},t\right)\times$ $\times s_2\left(\delta_\mu^{(2)},x\right)\in H^{2b-r_i+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$;

в) функції $f_0(t,x)\in H^{\alpha}(\gamma;\beta;2b\gamma;Q)$, $f_\lambda(t,x)\in H^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;r_\lambda\gamma;Q)$, $\partial D\in C^{2b+\alpha}$, $\varphi_\lambda(x)\in H^{2b+\alpha}\left(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;Q^{(\lambda)}\cap\{t=t_\lambda\}\right)$, $\tilde{\beta}=\left(0,\beta^{(2)}\right)$, $\tilde{\gamma}=\left(0,\gamma^{(2)}\right)$, $\gamma^{(\nu)}=\max\left\{\max_i\beta_i^{(\nu)},\right.$ $\left.\max_{i,p_i}\frac{p_i\left(\mu_{p_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right)}{2b-|p|},\max_{i,\mu,p_i}\frac{p_i\left(\delta_{p_i,\mu}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)}\right)}{r_\mu-|p|},\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b},\max_\mu\frac{\delta_\mu^{(\nu)}}{r_\mu},\right\}$, $\nu\in\{1,2\}$.

Правильна така теорема.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконані умови а)–в). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *із простору* $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le C\sup_\lambda\left(\left\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\left\|\varphi_\lambda;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;Q^{(\lambda)}\cap\{t=t_\lambda\}\right\|_{2b+\alpha}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\right).\qquad(4)$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку роз'язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(3).

2 Оцінка розв'язків допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами

Нехай $Q_m^{(\lambda)}=Q^{(\lambda)}\cap\left\{(t,x)\in Q^{(\lambda)}\mid s_1(1,t)\ge m_1^{-1},s_2(1,x)\ge m_2^{-1}\right\}$, $m_1\ge1$, $m_2\ge1$, $m=(m_1,m_2)$ послідовність областей, яка при $m_1\to\infty$, $m_2\to\infty$ збігається до $Q^{(\lambda)}$.

Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}a_k(t,x)\partial_x^k+\sum_{|p|\le 2b-1}a_p(t,x)\partial_x^p\right]u_m(t,x)=F_m(t,x),\qquad(5)$$

які задовольняють умови за змінною t

$$u_m(t_\lambda+0,x)=\varphi_m^{(\lambda)}(x),\qquad(6)$$

а на межі області Γ крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|=r_\mu} b_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k u_m+\sum_{|p|\le r_\mu-1} b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p u_m-f_m^{(\mu)}(t,x)\right]=0. \tag{7}$$

Тут коефіцієнти a_k, a_p, $b_k^{(\mu)}$, $b_p^{(\mu)}$, функції F_m, $\varphi_m^{(\lambda)}$, $f_m^{(\mu)}$ в області $Q_m^{(\lambda)}$ співпадають з A_k, A_p, $B_k^{(\mu)}$, $B_p^{(\mu)}$, f, φ_λ, f_μ відповідно, а в області $Q\backslash Q_m^{(\lambda)}$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_k, A_p, $B_k^{(\mu)}$, $B_p^{(\mu)}$, функцій f, φ_λ, f_μ із області $Q_m^{(\lambda)}$ в область $Q\backslash Q_m^{(\lambda)}$ із збереженням гладкості і норм ([9], с. 82).

Позначимо через $C^l(\gamma;\beta;q;Q)$ сукупність функцій простору $C^l(Q)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_l$, еквівалентну при кожному m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_l$, тільки замість функцій $s_1\left(a^{(1)},t\right)$, $s_2\left(a^{(2)},x\right)$ беремо відповідно $e_1\left(a^{(1)},t\right)$, $e_2\left(a^{(2)},x\right)$, де $e_1\left(a^{(1)},t\right)=\max\left(s_1\left(a^{(1)},t\right),m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)}\ge 0$ і $e_1\left(a^{(1)},t\right)=\min\left(s_1\left(a^{(1)},t\right),m_1^{-a^{(1)}}\right)$ при $a^{(1)}\le 0$; $e_2\left(a^{(2)},x\right)=\max\left(s_2\left(a^{(2)},x\right),m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)}\ge 0$ і $e_2\left(a^{(2)},x\right)=\min\left(s_2\left(a^{(2)},x\right),m_2^{-a^{(2)}}\right)$ при $a^{(2)}\le 0$.

Для норм $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_l$ правильні інтерполяційні нерівності [7].

Встановимо оцінку норми $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_{2b+\alpha}$.

Правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконані умови а)–в), то для розв'язку задачі* (5)–(7) *правильна оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le\sup_\lambda\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}, \tag{8}$$

де

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}=c\left(\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha}+\left\|u_m;Q^{(\lambda)}\right\|_0+\right.$$

$$\left.+\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|f_m^{(\mu)};\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\right).$$

Стала c не залежить від m.

Доведення. В області $Q^{(\lambda)}$ розглянемо задачу

$$(L_1u_m)(t,x)=F_m(t,x),\quad u_m(t_\lambda+0,x)=\varphi_m^{(\lambda)}(x),$$

$$\left[\sum_{|k|=r_\mu} b_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k u_m+\sum_{|p|\le r_\mu-1} b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p u_m-f_m^{(\mu)}(t,x)\right]_{\Gamma^{(\lambda)}}=0. \tag{9}$$

При виконанні умов а)–в) існує єдиний класичний розв'язок задачі (9) в просторі $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)})$ [4]. Знайдемо його оцінку. Використовуючи інтерполяційні нерівності [7], маємо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}\le(1+\varepsilon^\alpha)\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\rangle_{2b+\alpha}+c(\varepsilon)\left\|u_m;Q^{(\lambda)}\right\|_0.$$

Тому досить оцінити півнорму $\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\rangle_{2b+\alpha}$. Із визначення $\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\rangle_{2b+\alpha}$ випливає існування в $Q^{(\lambda)}$ точок P_1, P_2, R_i, для яких правильна нерівність

$$\frac{1}{2}\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}\leq E_1+E_2, \tag{10}$$

де

$$E_1=\sum_{2bj+|k|=2b}\sum_{r=1}^{n}\Big[e_1\left(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)S_1\left(e_1,e_2;t^{(1)},\tilde{x}\right)\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\alpha}\times$$

$$\times e_1\left(\alpha\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}\right),t^{(1)}\right)e_2\left(\alpha\left(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}\right),\tilde{x}\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(R_i\right)\right|\Big],$$

$$E_2=\sum_{2bj+|k|=2b}e_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(2)}\right)S_1\left(e_1,e_2;\tilde{t},x^{(2)}\right)\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2b}}\times$$

$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_2\right)-\partial_t^j\partial_x^k u_m\left(P_1\right)\right|;$$

де $S_1(e_1,e_2;t,x)\equiv\prod\limits_{i=1}^{n}e_1\left(-k_i\beta_i^{(1)},t\right)e_2\left(-k_i\beta_i^{(2)},x\right)$.

Нехай $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|\leq\dfrac{\varepsilon}{2n}e_1\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_1$, ε – довільне дійсне число із $(0,1)$, або $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\leq\left(\dfrac{1}{2}\varepsilon_1\right)^{2b}e_1\left(2b\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)e_2\left(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)\equiv N_2$. Будемо вважати, що $e_1\left(\gamma^{(1)},\tilde{t}\right)=e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)=\min\left(e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right),e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(2)}\right)\right)$, $e_2\left(\gamma^{(2)},\tilde{x}\right)=e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)=\min\left(e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right),e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(2)}\right)\right)$, $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)\in Q^{(\lambda)}$. Нехай $\left|x_n^{(1)}-\xi_n\right|\leq 2N_1$, $\xi\in\partial D$, або $\left|x^{(1)}-\xi\right|\leq 2N_1 n$. Розглянемо кулю $K(a,P)$ радіуса a, $a>\max(8N_1 n, 4N_2)$, що містить точки P_1, P_2, R_i з центром в деякій точці $P\in\Gamma^{(\lambda)}$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D\cap K(a,P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x=\Psi(y)$ ([9, с.55]), в результаті якого область $\Pi_{(0)}^{(\lambda)}=Q^{(\lambda)}\cap K(a,P)$ переходить в область $\Pi^{(\lambda)}$, для точок якої $y_n\geq 0$, $t\geq t_\lambda$.

Покладемо $u_m(t,x)=v_m(t,y)$. Вважаємо, що P_1, P_2, R_i, E_1, E_2, $e_1\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right)$ переходять при цьому перетворенні в H_1, H_2, M_i, $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $h_2\left(\gamma^{(2)},y^{(1)}\right)$. Позначимо коефіцієнти рівняння (6) і крайових умов (7) в області $\Pi^{(\lambda)}$ через d_k, d_p, $l_k^{(\mu)}$, $l_p^{(\mu)}$. Тоді $v_m(t,y)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t v_m-\sum_{|k|=2b}d_k\left(H_1\right)\partial_y^k v_m=\sum_{|k|=2b}\left[d_k(t,y)-d_k\left(H_1\right)\right]\partial_y^k v_m+$$

$$+\sum_{|p|\leq 2b-1}d_p(t,y)\partial_y^p v_m+F_m\left(t,\psi(y)\right)\equiv F_m^{(0)}\left(t,y;v_m\right), \tag{11}$$

$$v_m(t_\lambda+0,y)=\varphi_m^\lambda\left(\psi(y)\right)=\Phi_m^\lambda(y), \tag{12}$$

$$\sum_{|k|=r_\mu}l_k^\mu\left(H_1\right)\partial_y^k v_m\Big|_{y_n=0}=\Bigg\{\sum_{|k|=r_\mu}\left[l_k^\mu\left(H_1\right)-l_k^\mu\left(t,y\right)\right]\partial_y^k v_m-$$

$$- \sum_{|p|\le r_\mu -1} l_p^\mu(t,y)\partial_y^p v_m + f_m\left(t,\psi(y)\right)\Bigg\}\Bigg|_{y_n=0} \equiv \Psi_m^\mu\left(t,y;v_m\right)\big|_{y_n=0}. \quad (13)$$

У задачі (11)–(13) зробимо заміну $v_m(t,y)=\omega_m(t,z)$, де $z_i = e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(\beta_i^{(2)},y^{(1)}\right)y_i$. Позначимо через Π_1^λ область визначення $\omega_m(t,z)$. Тоді $\omega_m(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t\omega_m - \sum_{|k|=2b} d_k\left(H_1\right)S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k\omega_m = F_m^{(0)}(t,\tilde z;\omega_m), \quad (14)$$

$$\omega_m(t_\lambda+0,z)=\Phi_m^{(\lambda)}(\tilde z), \quad (15)$$

$$\sum_{|k|=r_\mu} l_k^{(\mu)}\left(H_1\right)S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k\omega_m\Big|_{z_n=0} = \Psi_m^{(\mu)}(t,\tilde z;\omega_m)\big|_{z_n=0}, \quad (16)$$

де $S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)=\prod_{i=1}^n e_1\left(k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(k_i\beta_i^{(2)},y^{(1)}\right)$,
$\tilde z = \left(e_1^{-1}\left(\beta_1^{(1)},t^{(1)}\right)h_2^{-1}\left(\beta_1^{(2)},y^{(1)}\right)z_1,\dots,e_1^{-1}\left(\beta_n^{(1)},t^{(1)}\right)h_2^{-1}\left(\beta_n^{(2)},y^{(1)}\right)z_n\right)$.

Позначимо через $z_i^{(1)} = e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(\beta_i^{(2)},y^{(1)}\right)y_i^{(1)}$, $K_\delta = \Big\{(t,z)\in\Pi_1^{(\lambda)}\,\Big|z_i-z_i^{(1)}\Big| \le$ $\le \frac{\delta\varepsilon_1}{n}e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(\gamma^{(2)},y^{(1)}\right), i\in\{1,\dots,n\}, \left|t^{(1)}-t\right| \le (\delta\varepsilon_1)^{2b}e_1\left(2b\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)h_2\left(2b\gamma^{(2)},y^{(1)}\right)\Big\}$. Візьмемо функцію $\eta(t,z)$, яка має другі неперервні частинні похідні за змінною t і неперервні частинні похідні порядку $(2b+1)$ за змінним z_i, $i\in\{1,\dots,n\}$ і задовольняє умови

$$\eta(t,z)=\begin{cases} 1,(t,z)\in K_{1/2},\ 0\le\eta(t,z)\le 1; \\ 0,(t,z)\notin K_{3/4},\ \left|\partial_t^j\partial_z^k\eta\right| \le c_{kj}e_1^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)h_2^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},y^{(1)}\right). \end{cases}$$

Тоді функція $V_m(t,z)=\omega_m(t,z)\eta(t,z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\partial_t V_m - \sum_{|k|=2b} d_k\left(H_1\right)S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k V_m = \omega_m\partial_t\eta + \eta F_m^{(0)}(t,\tilde z;\omega_m)+$$

$$+\sum_{|k|=2b} d_k\left(H_1\right)S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}\omega_m\partial_z^p\eta\right) \equiv F_m^{(1)}(t,z;\omega_m), \quad (17)$$

$$V_m(t_\lambda+0,z)=\eta(t_\lambda+0,z)\Phi_m^{(\lambda)}(\tilde z), \quad (18)$$

$$\sum_{|k|=r_\mu} l_k^{(\mu)}\left(H_1\right)S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\partial_z^k V_m\Big|_{z_n=0} = \Bigg\{\eta\Psi_m^{(\mu)}(t,\tilde z;\omega_m)+\sum_{|k|=r_\mu} l_k^\mu\left(H_1\right)\times$$

$$\times S_2\left(k;e_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}\omega_m\partial_z^p\eta\right)\Bigg\}\Bigg|_{z_n=0} \equiv G_m^{(\mu)}(t,z;\omega_m)\big|_{z_n=0}. \quad (19)$$

Зазначимо, що коефіцієнти рівняння (17) і крайових умов (19) обмежені сталими, незалежними від точки $H_1\left(t^{(1)}, y^{(1)}\right)$. Тому, використовуючи теорему 7.1 [10, с. 83], для довільних точок $M_1 \in K_{1/2}$, $M_2 \in K_{1/2}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}\left(M_1, M_2\right)\left|\partial_t^j \partial_z^k \omega_m\left(M_1\right)-\partial_t^j \partial_z^k \omega_m\left(M_2\right)\right| \leq c\left(\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^\alpha\left(K_{3/4}\right)}+\right.$$

$$\left.+\left\|\eta \Phi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(K_{3/4} \cap\left(t=t_\lambda\right)\right)}+\sum_{\mu=1}^b\left\|G_m^{(\mu)}\right\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}\left(K_{3/4}\right)}\right), \tag{20}$$

$d\left(M_1, M_2\right)$ – параболічна відстань між M_1, M_2, $2bj+|k|=2b$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t, z)$, інтерполяційні нерівності [7], одержимо

$$\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^\alpha\left(K_{3/4}\right)} \leq cW\left(e_1, h_2\right)\left(\left\|\omega_m ; K_{3/4}\right\|_0+\left\|F_m^{(0)} ; \gamma ; 0 ; 2b\gamma ; K_{3/4}\right\|_\alpha+\right.$$

$$\left.+\left\|\omega_m ; \gamma ; 0 ; 0 ; K_{3/4}\right\|_{2b}\right); \tag{21}$$

$$\left\|\eta \Phi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(K_{3/4} \cap\left(t=t_\lambda\right)\right)} \leq cW\left(e_1, h_2\right)\left\|\Phi_m^{(\lambda)} ; \tilde{\gamma} ; 0 ; 0 ; K_{3/4} \cap\left(t=t_\lambda\right)\right\|_{2b+\alpha}, \tag{22}$$

$$\left\|G_m^{(\mu)}\right\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}\left(K_{3/4}\right)} \leq cW\left(e_1, h_2\right)\left(\left\|\omega_m ; K_{3/4}\right\|_0+\left\|\omega_m ; \gamma ; 0 ; 0 ; K_{3/4}\right\|_{2b}+\right.$$

$$\left.+\left\|\Psi_m^{(\mu)} ; \gamma ; 0 ; r_\mu \gamma ; K_{3/4}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\right), \tag{23}$$

де $W\left(e_1, h_2\right)=e_1\left((2b+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}\right) h_2\left((2b+\alpha)\gamma^{(2)}, y^{(1)}\right)$.

Із визначення простору $C^l\left(\gamma ; \beta ; q ; Q^{(\lambda)}\right)$ випливає справедливість нерівностей

$$c_1\left\|\omega_m ; \gamma ; 0 ; q ; K_{3/4}\right\|_l \leq\left\|v_m ; \gamma ; \beta ; q ; T_{3/4}\right\|_l \leq c_2\left\|\omega_m ; \gamma ; 0 ; q ; K_{3/4}\right\|_l,$$

$$T_\delta=\left\{(t, y) \in \Pi^{(\lambda)},\left|y_i-y_i^{(1)}\right| \leq \delta \frac{\varepsilon_1}{2n} e_1\left(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}, t^{(1)}\right) h_2\left(\gamma^{(2)}-\beta^{(2)}, y^{(1)}\right), i \in\{1, \ldots, n\},\right.$$

$$\left.\left|t-t^{(1)}\right| \leq \delta\left(\frac{1}{2} \varepsilon_1\right)^{2b} e_1\left(2b\gamma^{(1)}, t^{(1)}\right) h_2\left(2b\gamma^{(2)}, y^{(1)}\right)\right\}.$$

Підставляючи (21)–(23) в (20), знаходимо, що

$$E_1+E_2 \leq C_2\left(\left\|F_m ; \gamma ; \beta ; 2b\gamma ; \Pi_{(0)}^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\sum_{i=1}^b\left\|f_m^{(\mu)} ; \gamma ; \beta ; r_\mu \gamma ; \Pi_{(0)}^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_{\mu+\alpha}}+\left\|u_m ; \Pi_{(0)}^{(\lambda)}\right\|_0+\right.$$

$$\left.+\left\|\varphi_m^{(\lambda)} ; \tilde{\gamma} ; \tilde{\beta} ; 0 ; \Pi_{(0)}^{(\lambda)} \cap\left(t=t_\lambda\right)\right\|_{2b+\alpha}\right)+\varepsilon_2\left\|u_m ; \gamma ; \beta ; 0 ; \Pi_{(0)}^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}. \tag{24}$$

Розглянемо випадок, коли $\left|x_n^{(1)}-\xi_n\right|>2N_1$, або $\left|x^{(1)}-\xi\right|>2N_1 n$, $\xi \in \partial D$.

Запишемо задачу (9) у вигляді

$$\partial_t u_m-\sum_{|k|=2b} a_k\left(P_1\right) \partial_x^k u_m=F_m(t, x)+\sum_{|p|=2b-1} a_p(t, x) \partial_x^p u_m+$$

$$+\sum_{|k|=2b}\left[a_k(t, x)-a_k\left(P_1\right)\right] \partial_x^k u_m \equiv F_m^{(2)}\left(t, x ; u_m\right), \tag{25}$$

$$u_m\left(t_\lambda+0,x\right)=\varphi_m^{(\lambda)}(x), \tag{26}$$

$$\sum_{|k|=r_\mu} b_k^{(\mu)}\left(P_1\right)\partial_x^k u_m\Big|_{\Gamma^{(\lambda)}}=\Bigg\{\sum_{|k|=r_\mu}\left[b_k^{(\mu)}\left(P_1\right)-b_k^{(\mu)}(t,x)\right]\partial_x^k u_m-$$

$$-\sum_{|p|=r_\mu-1} b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p u_m+f_m^{(\mu)}(t,x)\Bigg\}\Bigg|_{\Gamma^{(\lambda)}}\equiv G_{m,1}^{(\mu)}\left(t,x;u_m\right)\Big|_{\Gamma^{(\lambda)}}. \tag{27}$$

В задачі (25)–(27) зробимо заміну $u_m(t,x)=v_m^{(1)}(t,z)$, де $z_i=e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i$, $i=\{1,\ldots,n\}$. Тоді функція $V_m^{(1)}(t,z)=\eta_1(t,z)v_m(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t V_m^{(1)}-\sum_{|k|=2b} a_k\left(P_1\right)S_2\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\partial_z^k V_m^{(1)}=v_m^{(1)}\partial_t\eta_1+\eta_1 F_m^{(2)}\left(t,\tilde z;v_m^{(1)}\right)+$$

$$+\sum_{|k|=2b} a_k\left(P_1\right)S_2\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}v_m^{(1)}\partial_z^p\eta_1\right)\equiv F_m^{(3)}\left(t,z;v_m^{(1)}\right), \tag{28}$$

$$V_m^{(1)}(t_\lambda+0,z)=\eta_1(t_\lambda+0,z)\varphi_m^{(\lambda)}(\tilde z), \tag{29}$$

$$\sum_{|k|=r_\mu} b_k^{(\mu)}\left(P_1\right)S_2\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\partial_z^k V_m^{(1)}\Big|_{\Gamma^{(\lambda)}}=\Bigg\{\sum_{|k|=r_\mu} b_k^{\mu}\left(P_1\right)S_2\left(k;e_1,e_2;t^{(1)},x^{(1)}\right)\times$$

$$\times\left(\sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\partial_z^{k-p}v_m^{(1)}\partial_z^p\eta_1\right)+\eta_1 G_{m,1}^{(\mu)}\left(t,\tilde z;v_m^{(1)}\right)\Bigg\}\Bigg|_{\Gamma^{(\lambda)}}\equiv G_{m,2}^{(\mu)}\left(t,z;v_m^{(1)}\right)\Big|_{\Gamma^{(\lambda)}}, \tag{30}$$

де $\tilde z=\left(e_1^{-1}\left(\beta_1^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left(\beta_1^{(2)},x^{(1)}\right)z_1,\ldots,e_1^{-1}\left(\beta_n^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left(\beta_n^{(2)},x^{(1)}\right)z_n\right)$;

$$\eta_1(t,z)=\begin{cases}1,(t,z)\in T_{1/2}^{(1)},\ 0\le\eta_1(t,z)\le 1;\\ 0,(t,z)\notin T_{3/4}^{(1)},\ \left|\partial_t^j\partial_x^k\eta_1\right|\le c_{kj}e_1^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2^{-1}\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x^{(1)}\right);\end{cases}$$

$$T_\delta^{(1)}=\Big\{(t,z)\big|\left|t^{(1)}-t\right|\le 2\delta N_2,\left|z_i-z_i^{(1)}\right|\le 2\delta e_1\left(\gamma^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(\gamma^{(2)},x^{(1)}\right),$$

$$z_i^{(1)}=e_1\left(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\right)e_2\left(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\right)x_i^{(1)}\Big\}.$$

Коефіцієнти рівняння (28) і крайових умов (30) обмежені сталими, незалежними від точки $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)$. Тому, використовуючи теорему 4.1 із [10, с. 41], для довільних точок $M_1\in T_{1/2}^{(1)}$, $M_2\in T_{1/2}^{(1)}$ правильна нерівність

$$d^{-\alpha}\left(M_1,M_2\right)\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m^{(1)}\left(M_1\right)-\partial_t^j\partial_x^k v_m^{(1)}\left(M_2\right)\right|\le C_3\Bigg(\left\|F_m^{(3)}\right\|_{C^\alpha\left(T_{3/4}^{(1)}\right)}+$$

$$+\left\|\eta_1\varphi_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b+\alpha}\left(T_{3/4}^{(1)}\cap(t=t_\lambda)\right)}+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|G_{m,2}^{(\mu)}\right\|_{C^{2b-r_\mu+\alpha}\left(T_{3/4}^{(1)}\right)}\Bigg).$$

Враховуючи властивості функції $\eta_1(t,z)$, означення простору $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;q;Q)$ і повторюючи міркування при встановленні оцінки (24), знаходимо

$$E_1+E_2\le C_4\left(\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|f_m^{(\mu)};\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}+\right.$$

$$\left.+\left\|u_m;Q^{(\lambda)}\right\|_0+\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha}\right). \tag{31}$$

У випадках $\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|\ge N_2$, або $\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|\ge N_1$, маємо

$$E_1+E_2\le\varepsilon^\alpha\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}+c(\varepsilon)\left\|u_m;Q^{(\lambda)}\right\|_0. \tag{32}$$

Враховуючи нерівності (24), (31), (32), (10) і вибираючи ε_1, ε, ε_2 достатньо малими, одержимо оцінку (8). □

Знайдемо оцінку норми $\left\|u_m;Q^{(\lambda)}\right\|_0$.

В задачі (9) зробимо заміну $u_m(t,x)=\varphi_m^{(\lambda)}(x)+\omega_m^{(1)}(t,x)$. Одержимо крайову задачу

$$\left(L\omega_m^{(1)}\right)(t,x)=F_m(t,x)-\left(L_1\varphi_m^{(\lambda)}\right)(x),\quad \omega_m^{(1)}(t_\lambda+0,x)=0,$$

$$\left[\sum_{|k|=r_\mu}b_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k\omega_m^{(1)}+\sum_{|p|\le r_\mu-1}b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p\omega_m^{(1)}+\sum_{|k|=r_\mu}b_k^{(\mu)}(t,x)\partial_x^k\varphi_m^{(\lambda)}+\right.$$

$$\left.+\sum_{|p|\le r_\mu-1}b_p^{(\mu)}(t,x)\partial_x^p\varphi_m^{(\lambda)}-f_m^{(\mu)}(t,x)\right]_{\Gamma^{(\lambda)}}=0. \tag{33}$$

Правильна така теорема.

Теорема 3. *Якщо $\omega_m^{(1)}(t,x)$ – єдиний класичний розв'язок задачі* (33) *і виконані умови а) – в), то для $\omega_m^{(1)}(t,x)$ справджується нерівність*

$$\left\|\omega_m^{(1)};Q^{(\lambda)}\right\|_0\le C_5\left(\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{b}\left\|f_m^{(\mu)};\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\right), \tag{34}$$

де стала C_5 не залежить від m.

За умов накладених на гладкість коефіцієнтів рівняння (5), крайових умов (7) і функцій F_m, $\varphi_m^{(\lambda)}$, $f_m^{(\mu)}$ існує єдиний розв'язок задачі (33), який належить простору $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)})$ і має при кожному фіксованому m_1, m_2 скінченну норму [10].

Скориставшись методикою доведення зауваження 2 ([11, с. 79]), встановлюємо нерівність (34).

Доведення теореми 1. Оскільки

$$\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha\le c\left\|f_0;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha,$$

$$\left\| f_m^{(\mu)};\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha} \le c\left\| f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha},$$

$$\left\|\varphi_m^{(\lambda)};\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha} \le c\left\|\varphi_\lambda;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)\right\|_{2b+\alpha},$$

то, використовуючи нерівності (8), (34), одержимо

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha} \le c\Bigg(\left\|f_0;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha + \left\|\varphi_\lambda;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap\{t=t_\lambda\}\right\|_{2b+\alpha} +$$

$$+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\Bigg). \tag{35}$$

Права частина (35) не залежить від m_1, m_2 і послідовності

$$\left\{W_m^{(j,k)}\right\} = \left\{e_1\left((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t\right)e_2\left((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x\right)\partial_t^j\partial_x^k u_m(t,x)S_1(e_1,e_2;t,x)\right\},$$

$$2bj+|k|\le 2b,$$

рівномірно обмежені і рівносторонньо неперервні в $Q^{(\lambda)}$. За теоремою Арчела існують послідовності $\left\{W_{m(l)}^{(j,k)}\right\}$ рівномірно збіжні при $m(l)\to\infty$ до $W^{(j,k)}$. Переходячи до границі при $m(l)\to\infty$ в задачі (5)–(7), одержимо, що $u(t,x)=W^{(j,k)}$ єдиний розв'язок задачі (1)–(3), $u\in H^{2b+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right)$ і правильна оцінка (4).

Теорема 4. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконані умови а)–в) і* $f_0\in H^\alpha\left(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right)$, $f_\mu\in H^{2b-r_\mu+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right)$. *Тоді єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *в областях* $Q^{(\lambda)}$ *визначається формулою*

$$u(t,x)=\iint\limits_{Q^{(\lambda)}} G_0(t,x;d\tau;d\xi)f_0(\tau,\xi)+\iint\limits_{Q^{(\lambda)}\cap(t=t_\lambda)} G_0(t,x;0;d\xi)\varphi_\lambda(\xi)+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{b}\iint\limits_{\Gamma^{(\lambda)}} G_\mu(t,x;d\tau;d\xi)f_\mu(\tau,\xi). \tag{36}$$

Доведення. Оскільки $H^\alpha\left(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right)\subset H^\alpha\left(\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right)$, $H^{2b-r_\mu+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right)\subset H^{2b-r_\mu+\alpha}\left(\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right)$, то для $f_0\in H^\alpha\left(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right)$ і $f_\mu\in H^{2b-r_\mu+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right)$ виконуються нерівності

$$\left\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha\le c\left\|f;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha,\quad \left\|f_\mu;\gamma;\beta;r_\mu\gamma;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}\le$$

$$\le c\left\|f_\mu;\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha},\ \mu\in\{1,\dots,b\},\lambda\in\{0,1,\dots,N\}.$$

Тому, враховуючи теорему 1, для розв'язку задачі (1)–(3) в областях $Q^{(\lambda)}$ має місце нерівність

$$\left\|u;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_{2b+\alpha}\le c\Bigg(\left\|f_0;\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right\|_\alpha+\sum_{\mu=1}^{b}\left\|f_\mu;\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right\|_{2b-r_\mu+\alpha}+$$

$$+\left\|\varphi_\lambda;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;Q^{(\lambda)}\cap\{t=t_\lambda\}\right\|_{2b+\alpha}\Bigg). \tag{37}$$

□

Зазначимо, що простір $H_\alpha = H^\alpha\left(\gamma;\beta;0;Q^{(\lambda)}\right) \times H^{2b+\alpha}\left(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;Q^{(\lambda)} \cap (t=t_\lambda)\right) \times$ $\times H^{2b-r_1+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right) \times \ldots \times H^{2b-r_b+\alpha}\left(\gamma;\beta;0;\Gamma^{(\lambda)}\right)$ вкладається в простір $C\left(Q^{(\lambda)}\right)$. $H_\alpha \subset C\left(Q^{(\lambda)}\right)$. Тому, використовуючи теорему Рісса, можна вважати, що при $(t,x) \in Q^{(\lambda)}$ лінійний неперервний функціонал $u(t,x)$ породжує борелівську міру $G_\mu\left(t,x;Z_\lambda\right)$, яка визначена на σ-алгебрі підмножин $Z_\lambda \subset Q^{(\lambda)}$ включаючи $Q^{(\lambda)}$ і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціоналу визначається формулою (36).

Список літератури

[1] Ptashnyk B. Y., Il'kiv V. S., Kmit' I. Y., Polishchuk V. M. Nonlocal boundary value problems for equations with partial derivatives. Kyiv : Scientific thought, 2002. 416 p.

[2] Ptashnyk B. Y., Tymkiv I. R. *A multipoint problem for a parabolic equation with variable coefficients.* Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. 2008. № 12. P. 42-48.

[3] Klyus I. S., Ptashnyk B. Y. *A multipoint problem for equations with partial derivatives that are not solvable with respect to the highest time derivative.* Ukrainian Mathematical Journal 1999. **51**, № 12. P. 1604-1613.

[4] Matiychuk M. I. Parabolic and elliptic boundary value problems with singularities. Chernivtsi : Prut, 2003. 248 p.

[5] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *A boundary value problem with impulse action for a parabolic equation with degeneration.* Ukrainian Mathematical Journal 2019. **71**, № 5. P. 645-655.

[6] Pukal'skii I.D., Yashan B.O. *A nonlocal multipoint time problem for parabolic equations with degeneration.* Mathematical methods and physical and mechanical fields, 2017. **60**, № 2. P. 32-40.

[7] Pukal'skii I.D. *The Cauchy problem for non-uniformly parabolic equations with power singularities.* Mathematical methods and physical and mechanical fields, 2021. **64**, № 2. P. 31-41.

[8] PukalskyyI.D.,YashanB.O. A multipoint in-time problem for the $2b$-parabolic equation with degeneration. Bukovinian Math. Journal. **10**, №2 (2022), 229-239.

[9] Friedman A. Partial differential equations of paraboloc type. Englewood Clifts; Prentice Hall, 1964. 347 p.

[10] Matiychuk M. I. Parabolic singular boundary value problems. Kyiv : Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 1999. 176 p.

[11] Agmon S., Douglas A., Nirenberg L. Estimates noar the boundary of solutions of elliptic equations in partial derivatives under common boundary conditions. M.: JL, 1962. 205 p.

Надійшло 13.02.2024

Pukalskyy I.D., Yashan B.O. *A multipoint boundary value problem in time for a $2b$-parabolic equation with degeneracy*, Bukovinian Math. Journal. **12**, 1 (2024), 94–106.

One of the most important issues in the general theory of differential equations with partial derivatives is establishing the solvability of boundary value problems. Among the boundary value problems for equations with partial derivatives, problems with nonlocal boundary conditions occupy an important place. Such interest in such problems is caused both by their rich practical application (the process of diffusion, moisture distortion in soils, plasma physics, etc.), and by the needs of the general theory of boundary value problems.

A general multipoint boundary value problem for nonuniformly $2b$-parabolic equations with degeneracy is studied. The coefficients of parabolic equations and boundary conditions allow power degeneracy of arbitrary order in terms of time variable and spatial variables at some set of points. To solve the given multipoint boundary value problem, solutions of problems with smooth coefficients in Hölder spaces with the appropriate norm are studied. With the help of interpolation inequalities and a priori estimates, estimates of the solution of auxiliary problems and their derivatives in special Gelder spaces are established. Using the theorems of Ross and Archel, a convergent sequence is distinguished from the compact sequence of solutions of the auxiliary problems, the limiting value of which is the solution of the multipoint boundary value problem in time for the $2b$-parabolic equation with degeneracy. Estimates of the solution of the given problem are established in Helder spaces with power-law weights. The order of the power weight is determined by the order of features of the coefficients of the equations and the boundary conditions. With certain restrictions on the right-hand side of the equation and boundary conditions, an integral image of the given problem is obtained.