Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Кафедра математичних проблем управління і кібернетики

Філіпчук О.І., Кириченко О.Л., Антонюк С.В.

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ: ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

У двох частинах

Частина 2

Чернівці
2024

УДК 004(075.8)

Ф 537

Друкується за ухвалою вченої ради Навчально-наукового інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (протокол № 6 від 13.06.2024)

Рецензенти:
Нестеренко В.В., д.ф.-м-н., доцент кафедри математичного аналізу ЧНУ імені Юрія Федьковича;
Мартинюк О.В., декан факультету математики та інформатики ЧНУ імені Юрія Федьковича, д.ф.-м-н., професор кафедри математики та інформатики ЧНУ імені Юрія Федьковича

Ф 537 **Філіпчук О.І., Кириченко О.Л., Антонюк С.В.** Математичні основи інформаційних технологій : лабораторний практикум у 2 ч., Ч. 2. Чернівці : Чернів. нац. ун-т ім. Ю.Федьковича, 2024. 80 с.

У навчальному посібнику висвітлено питання розв'язування інженерних та прикладних задач, що стосуються інтегрального числення функції однієї змінної, диференціальних рівнянь та теорії рядів засобами комп'ютерної математики, зокрема із використанням пакета MathCad. Наведено приклади розв'язування типових задач і варіанти завдань для самостійного виконання під час лабораторних робіт із цієї дисципліни.

Для студентів галузі 12 - Інформаційні технології, зокрема, спеціальностей 121 – Інженерія програмного забезпечення (дисципліна "Математичні основи ІТ"), 122 – Комп'ютерні науки (дисципліна "Теоретичні основи кібернетики"), 123 – Комп'ютерна інженерія (дисципліна "Вища математика").

Зміст

Вступ……………………………………………………………………………………………….. **4**

1. *Комплексні числа, дії над ними та їх зображення на комплексній площині.* ……………………………...……………………………………………………….. **5**

2. *Первісна. Невизначений інтеграл.*…………………………………………...……………..... **21**

3. *Визначений інтеграл та його застосування. Невласні інтеграли* ……….. **34**

4. *Диференціальні рівняння*…………………………………………………………… …. **44**

5. *Числові та функціональні ряди*……………………………………………………….. **63**

Список літератури……………………….……………………………………………….. **80**

Вступ

Прикладна підготовка майбутніх фахівців для IT-галузі передбачає формування компетентностей розв’язання прикладних математичних задач, зокрема, з використанням сучасних математичних пакетів та систем комп’ютерної математики. У технічних ЗВО України при вивченні математичних дисциплін найбільш популярними системами комп’ютерної математики є: Mathematica, Mathcad, Maple, Matlab, R. Кожна з них має свої особливості та прикладні задачі, до розв’язання яких система є найбільш придатною. Mathcad поєднує у собі простоту, візуальність та широкий спектр прикладних задач, які можна розв’язувати з допомогою цієї системи.

Навчальний посібник побудований таким чином, щоби студенти ознайомились з основними можливостями Mathcad та їх прикладними аспектами, набули компетентностей аналізу та розв’язування із використанням цього пакета основних типів прикладних математичних задач інтегрального числення, диференціальних рівнянь та теорії рядів.

Пропонований посібник (друга частина) містить п’ять лабораторних робіт, які охоплюють розділи “Комплексні числа”, “Інтеграли функції однієї змінної та їх застосування”, “Основи теорії рядів”. У кожній лабораторній роботі наявні варіанти завдань для самостійного виконання, наведено основні математичні факти та теоретичні положення, необхідні для розв’язання типових задач та опис особливостей реалізації конкретної задачі у Mathcad.

При виконанні лабораторних робіт студентам рекомендується дотримуватися таких правил:

1) номер варіанта індивідуального завдання на лабораторну роботу – це порядковий номер студента у списку академічної групи;

2) для успішного виконання роботи потрібно попередньо ознайомитися з наведеним теоретичним матеріалом до лабораторної роботи;

3) ознайомитись із прикладами розв’язування типових задач, наведених в описі роботи;

4) виконати лабораторну роботу відповідно до свого варіанта і вчасно здати на перевірку викладачу.

Лабораторна робота №1

Тема: ***Комплексні числа, дії над ними та їх зображення на комплексній площині***

Мета: *ознайомлення студентів із поняттям комплексної площини, основними поняттями теорії комплексних чисел та правилами дій над комплексними числами; набуття практичних навичок зображення чисел на комплексній площині та виконання різних дій над комплексними числами у пакеті MathCad.*

Завдання для самостійного виконання (лабораторна робота №1)

1. *Дано комплексні числа* z_1, z_2 *та натуральне число* m *(див. таблицю). Зобразити ці числа у вигляді векторів на комплексній площині. Знайти*:

а) $z_1 - z_2$ **(непарні варіанти),** $z_2 - z_1$ **(парні варіанти)**;

б) $z_1 + z_2$;

в) $\overline{z}_1 \cdot z_2$ **(непарні варіанти),** $z_1 \cdot \overline{z}_2$ **(парні варіанти);**

г) $\dfrac{z_1}{z_2}$ **(непарні варіанти),** $\dfrac{z_2}{z_1}$ **(парні варіанти);**

г) z_1^m **(непарні варіанти),** z_2^m **(парні варіанти);**

д) записати в тригонометричній та показниковій формі число z_1 **(непарні варіанти)**, z_2 **(парні варіанти)**.

№	*вхідні дані*			№	*вхідні дані*		
	z_1	z_2	m		z_1	z_2	m
1	-2	$-2+2i$	28	***11***	$-3+i\sqrt{3}$	$3-i\sqrt{3}$	18
2	$-1+i$	$1-i$	26	***12***	$3+2i$	$3-2i$	24
3	$8i$	$2-8i$	10	***13***	$5-i\sqrt{2}$	$1+i\sqrt{2}$	11
4	$-\sqrt{3}+i$	$-i$	23	***14***	$-4-4i$	$3+4i$	25
5	i	$-1-i$	12	***15***	$-\sqrt{3}-i$	$\sqrt{3}+i$	30
6	$-(5\sqrt{3})i$	$5-(5\sqrt{3})i$	17	***16***	$-3i$	$6+3i$	22
7	-10	$3-3i$	20	***17***	$-2\sqrt{3}+6i$	$\sqrt{3}-i$	16
8	$5i$	$7+7i$	14	***18***	$-2+2i$	$6-8i$	27
9	$-\sqrt{3}+3i$	$\sqrt{3}-i$	19	***19***	$7-i$	$7+i$	35
10	$-7i$	$5-5i$	13	***20***	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}-3i$	15

2. *Задано комплексне число* z *та натуральне число* n. *Знайти всі значення* $\omega_k = \sqrt[n]{z}$ *та зобразити їх у вигляді точок на відповідному колі.*

№	*вхідні дані*		№	*вхідні дані*	
	z	n		z	n
1	-169	4	**11**	$-4+3i$	4
2	$2\sqrt{12}-4i$	3	**12**	$\sqrt{3}-i$	3
3	$-16i$	4	**13**	$-3-3i$	4
4	$9-(3\sqrt{3})i$	3	**14**	$8+6i$	3
5	-144	4	**15**	$3-4i$	4
6	$6-8i$	3	**16**	$1+(\sqrt{3})i$	3
7	$-2+2i$	4	**17**	-256	4
8	$-(3\sqrt{3})i$	3	**18**	$27i$	3
9	$12-(4\sqrt{3})i$	4	**19**	$-\sqrt{2}-(\sqrt{2})i$	4
10	$-2\sqrt{3}+6i$	3	**20**	$\sqrt{5}-2i$	3

3. *Знайти усі корені рівнянь, використовуючи дві різні MathCad-функції (***solve** *та* **polyroots***).*

№	***Рівняння***	
	а)	***б)***
1	$(-1+i)z^2+(3+2i)z+2-i=0$	$z^2+6z+10=0$
2	$2z^2-6z+7=0$	$z^2+(3-2i)z-(4-2i)=0$
3	$z^2+(1-3i)z-(3-3i)=0$	$3z^2-2z+1=0$
4	$5z^2+2z+2=0$	$z^2+(1+3i)z-(3+3i)=0$
5	$z^2+(1+3i)z+3i=0$	$3z^2-2z+8=0$
6	$3z^2-2z+4=0$	$z^2+(1-2i)z-(3-2i)=0$
7	$z^2-(1+2i)z+2i=0$	$4z^2-2z+5=0$
8	$5z^2-4z+8=0$	$z^2+(2-3i)z-(4-3i)=0$
9	$z^2+(1-3i)z-3i=0$	$3z^2-6z+4=0$
10	$3z^2-2z+3=0$	$z^2-(1-2i)z-2i=0$
11	$z^2+(4-2i)z-(6-2i)=0$	$2z^2-z+1=0$
12	$3z^2-2z+6=0$	$z^2+(2+3i)z-(4+3i)=0$
13	$z^2-(2+3i)z+(1-3i)=0$	$-3z^2+12z-16=0$
14	$3z^2-8z+9=0$	$z^2+(5-2i)z+5(1-i)=0$
15	$z^2+(1-2i)z-2i=0$	$2z^2+4z+7=0$
16	$z^2-2z+5=0$	$(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$

17	$z^2-(2+4i)z-(7-4i)=0$	$3z^2+z+1=0$
18	$z^2+4z+12=0$	$(-1+i)z^2+(3+2i)z+2-i=0$
19	$z^2+(2-2i)z-(4-2i)=0$	$5z^2-4z+2=0$
20	$z^2-4z+8=0$	$(2-3i)z^2-2\sqrt{5}\cdot z+1+i=0$

Методичні вказівки
та приклади виконання завдань у MathCad

До завдання 1. ***Комплексне число*** – це число вигляду $z=a+bi$, де $a,b\in\mathbf{R}$, $i^2=-1$. Така форма запису називається ***алгебраїчною формою*** комплексного числа. При цьому $a=\operatorname{Re}z$ – дійсна частина числа z, $b=\operatorname{Im}z$ – уявна частина числа z, i – уявна одиниця.

Для запису комплексного числа в алгебраїчній формі в *MathCad 15* уявна одиниця i записується як $1i$ або $1j$ (без знака множення). Наприклад, для введення числа $z_1=2+3i$ на робочому листі *MathCad* слід зробити запис

$$z1 := 2 + 3\cdot 1i$$

(між 3 та $1i$ ставиться знак множення з панелі ***Калькулятор (Calculator)*** або Shift 8), який після виходу з формули набуває вигляду

$$z1 := 2 + 3\cdot i$$

Можна також записати

$$z1 := 2 + 3\cdot 1j$$

У *MathCad Prime* уявна одиниця i записується як i або j (на відміну від *MathCad 15*, у *MathCad Prime* перед i або j не записується одиниця). Тобто для введення числа $z_1=2+3i$ на робочому листі *MathCad Prime* слід зробити запис

$$z1 := 2 + 3i$$

або

$$z1 := 2 + 3j$$

Звертаємо увагу, що ***між уявною частиною числа та*** i ***або*** j ***знак множення не ставиться*** "3i" або "3j" (без знака множення) – для *Mathcad Prime* це дійсно 3i, що визначає i (або j) як уявну одиницю, а не 3*i (3*j), що сприйметься як число 3, помножене на змінну i (або j).

Спряженим до числа $z = a + bi$ називається число $\bar{z} = a - bi$, тобто у спряжених чисел дійсні частини однакові, а уявні – протилежні. Для знаходження спряженого числа $\bar{z}$ до заданого числа z, у *Mathcad 15* треба ввести $z := a + bi$, а нижче або правіше записати z, а після нього набрати символ ” (подвійна лапка, Shift Э на англійській розкладці) та натиснути =. Наприклад,

$$z1 := 2 + 3 \cdot i \qquad \overline{z1} = 2 - 3i$$

У *Mathcad Prime* для знаходження комплексного спряженого передбачено спеціальний оператор (рис. 1.1).

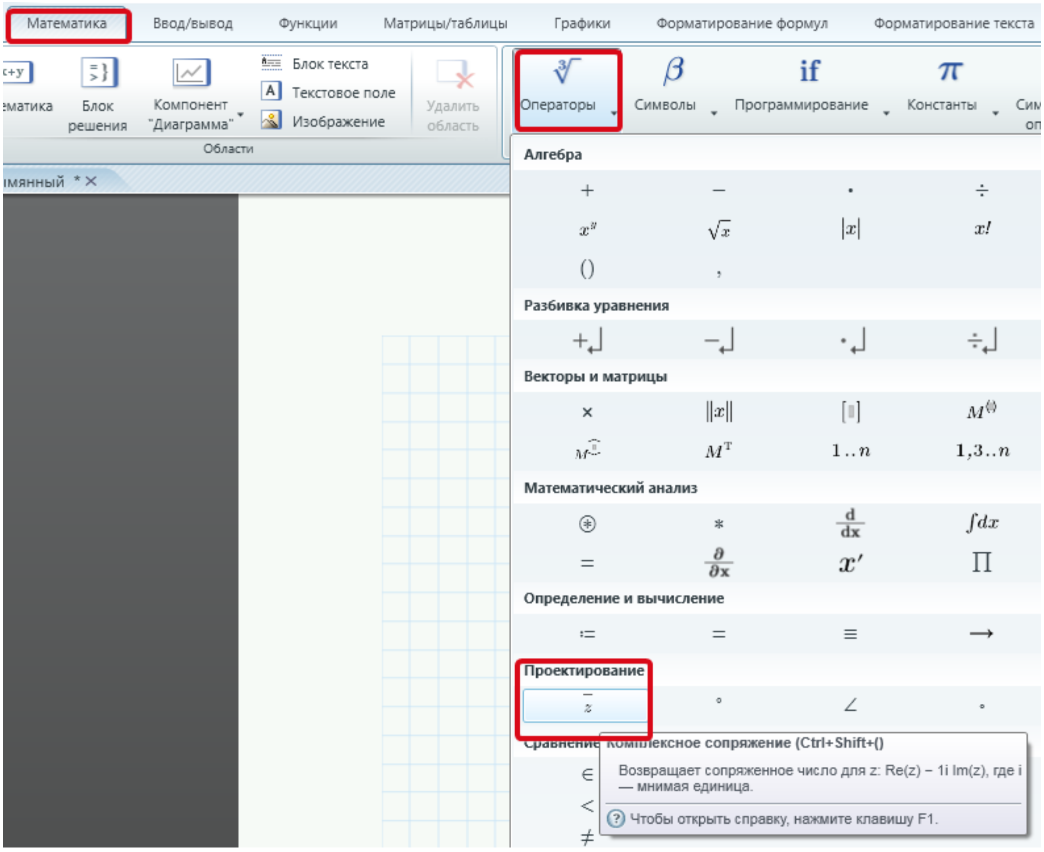

Рис. 1.1. *Оператор для знаходження комплексного спряженого у MathCad Prime*

Для знаходження спряженого числа у *Mathcad Prime* спочатку треба задати число, для якого потрібно знайти спряжене, далі вставити шаблон оператора комплексного спряженого (рис. 1.1) та під рискою, яка з’явиться $\overline{\blacksquare}$, записати число і натиснути знак рівності:

$$z1 := 2+3i \qquad \overline{z1} = 2-3i$$

Комплексні числа зображаються на комплексній площині у вигляді точок або векторів, зокрема, число $z = a + bi$ можна мислити як точку $(a;b)$ або вектор з координатами $(a;b)$, тобто вектор, початок якого знаходиться у початку координат, а кінець – у точці з координатами $(a;b)$ (рис. 1.2). На осі Ox відкладаються дійсні частини комплексних чисел, а на осі Oy – уявні.

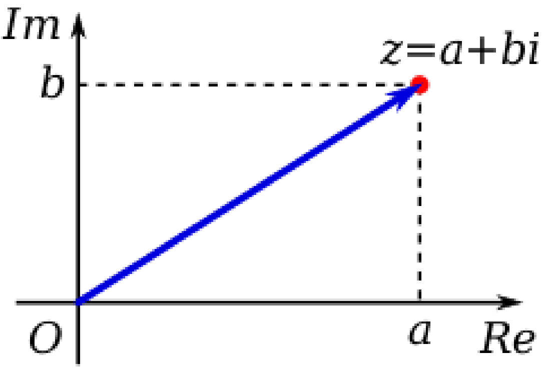

Рис. 1.2. *Зображення комплексного числа у вигляді вектора на комплексній площині*

З метою зображення у *MathCad* комплексного числа $z = a + bi$ вектором на комплексній площині слід задати два масиви

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} \text{ та } Y := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Im}(z) \end{pmatrix},$$

де першими координатами є нулі, а другими $\mathrm{Re}(z) = a$ та $\mathrm{Im}(z) = b$.

Зобразимо, наприклад, число $z = 2 + 3i$. Задаємо число та вводимо масиви X, Y:

$$z := 2 + 3 \cdot i$$

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Re}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Im}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Далі у *MathCad 15* поміщаємо на робочий лист графік (***Графік X-Y/ X-Y Plot***) (рис. 1.3). Після цього з’являється область графіка (рис. 1.4), де у місцезаповнювачі під віссю Ox (у центрі) запишемо X, а у місцезаповнювачі зліва від Oy (у центрі) – Y.

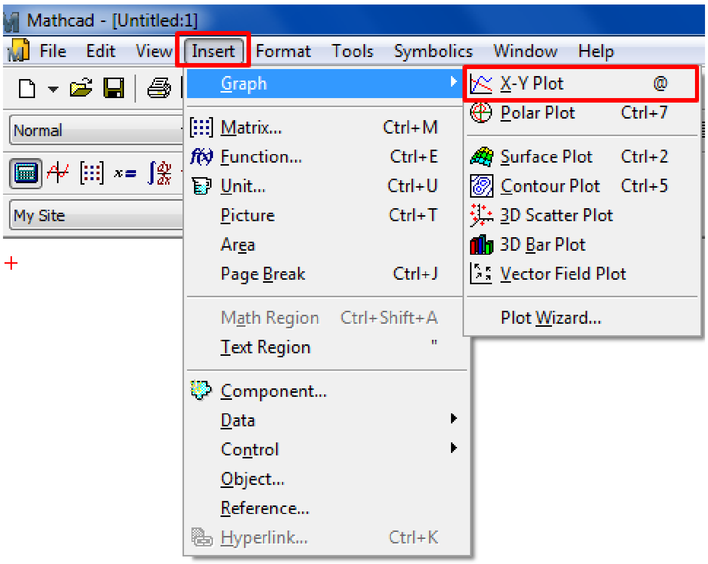

Рис. 1.3. *Вставка 2D-графіка у MathCad 15*

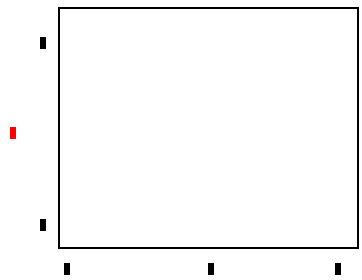

Рис. 1.4. *Область 2D-графіка у MathCad 15*

При цьому в області графіка з'явиться відрізок прямої, що з'єднує точки $(0;0)$ та $(a;b)$, який і є зображенням комплексного числа $z = a + bi$ (рис. 1.5). У нашому прикладі $a = \mathrm{Re}(z) = 2$, $b = \mathrm{Im}(z) = 3$.

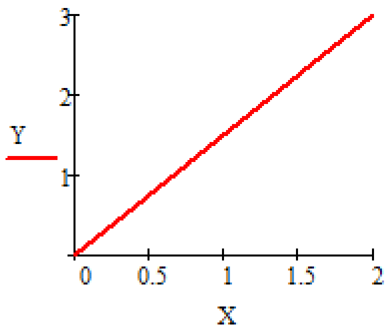

Рис. 1.5. *Зображення комплексного числа вектором на площині у MathCad 15*

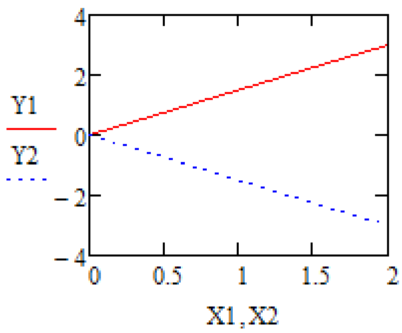

Рис. 1.6. *MathCad-реалізація зображення двох комплексних чисел на комплексній площині*

Якщо на одному графіку (комплексній площині) потрібно зобразити два комплексні числа одночасно, то ми подібним способом уводимо дві пари масивів $X1, Y1$ та $X2, Y2$ і після вставки поля графіка (рис. 1.4) у місцезаповнювачі під віссю Ox записуємо через кому $X1, X2$, а у місцезаповнювачі зліва від Oy запишемо (через кому) $Y1, Y2$ (кома, поставлена після $Y1$, переводить курсор на наступний рядок).

Далі клацаємо двічі лівою кнопкою миші по полю графіка, і з'являється вікно форматування та налаштувань графіка (рис. 1.7).

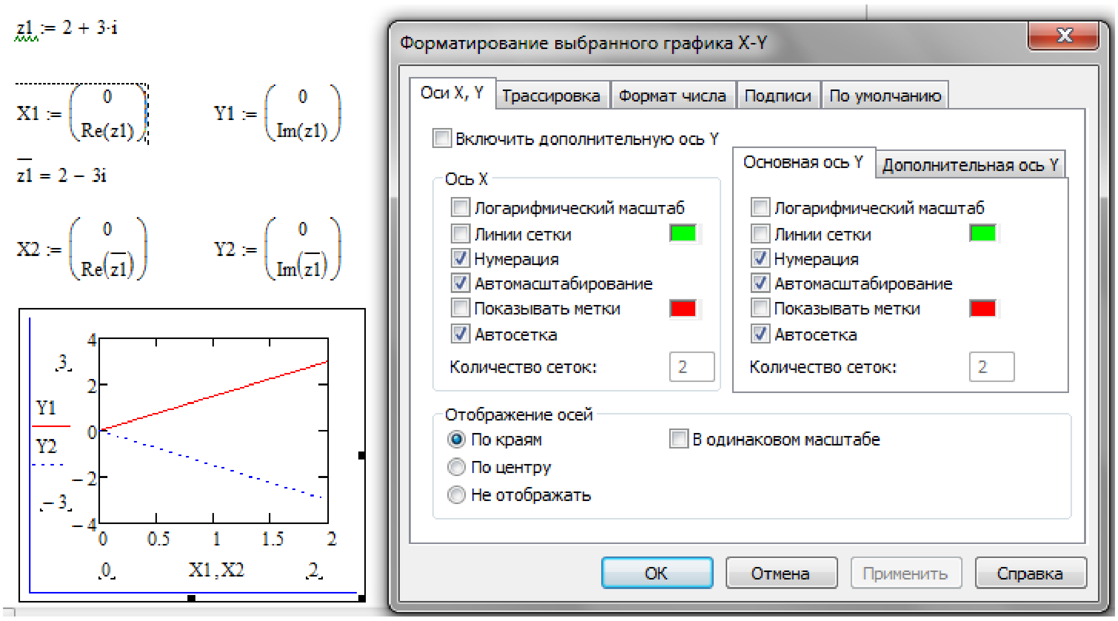

Рис. 1.7. *Вікно форматування та налаштувань графіка у MathCad 15*

Обираємо, наприклад, звичне для нас відображення осей по центру (рис. 1.8.1).

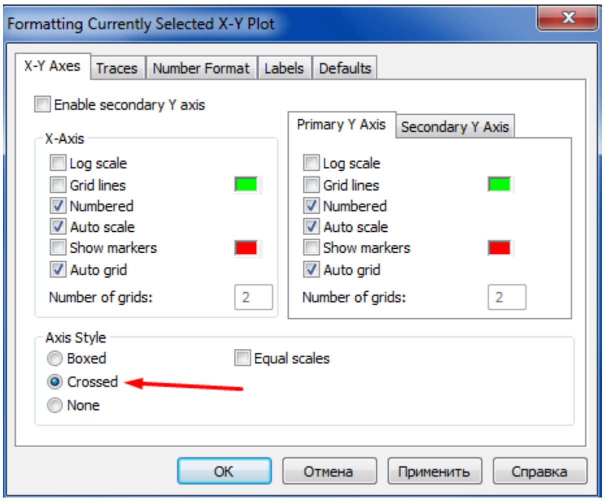

Рис. 1.8.1. *Налаштування відображення координатних осей у MathCad 15*

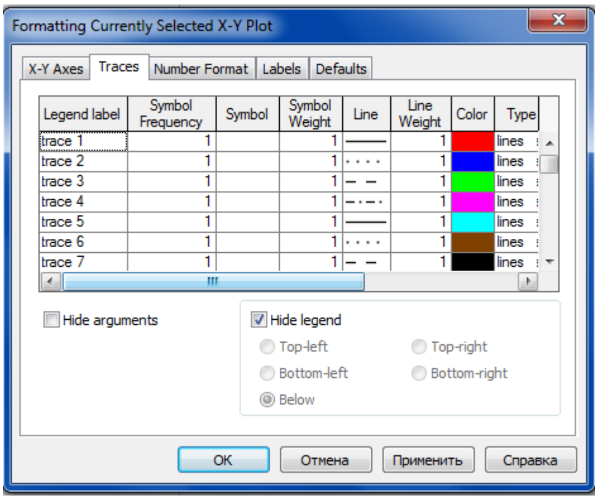

Рис. 1.8.2. *Налаштування відображення ліній графіків у MathCad 15*

Далі переходимо на вкладку ***Трасування (Traces)***, де налаштовуємо вигляд, товщину та колір кожної лінії (рис. 1.8.2).

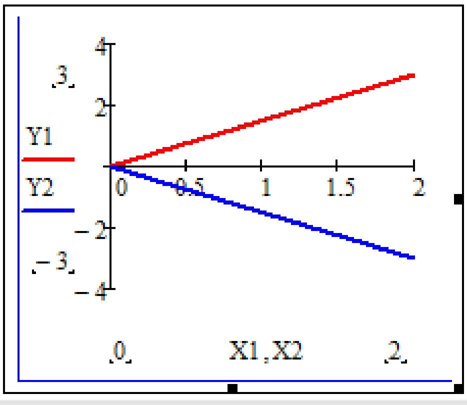

Рис. 1.9. *Зображення двох комплексних чисел векторами на комплексній площині у MathCad 15 після зміни налаштувань графіка*

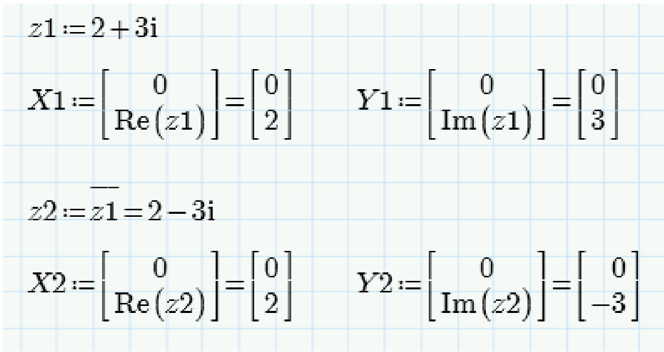

Рис. 1.10. *Задання комплексних чисел у MathCad Prime та формування масивів, необхідних для зображення даних чисел на комплексній площині*

У *MathCad Prime* все виконується аналогічно, лише з врахуванням особливостей вставки та налаштування графіків.

Наприклад, як і вище, зобразимо числа $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = \overline{z_1} = 2 - 3i$:

1) задаємо числа та формуємо відповідні масиви (рис. 1.10);

2) вставляємо область графіка (рис. 1.11)

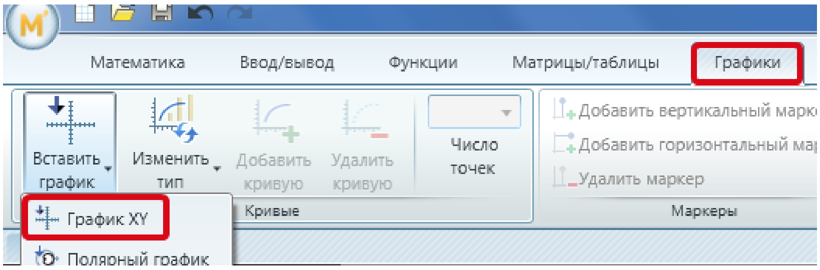

Рис. 1.11. *Вставка області графіка у MathCad Prime*

та зображаємо на ньому число z_1 (рис. 12 а)):

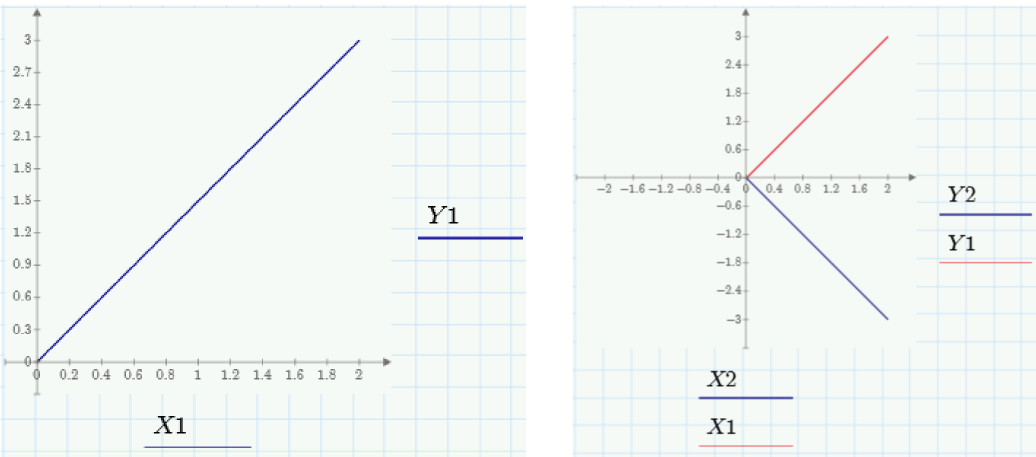

Рис. 1.12. *Зображення комплексних чисел векторами на площині у MathCad Prime*

а) ***б)***

3) встановлюємо курсор у нижню область графіка (лівіше вже вставленого X1) та натискаємо ***Додати криву*** на панелі графіків (рис. 1.13), у місцезаповнювач, що з'явився, вводимо X2; аналогічно встановлюємо курсор у праву область графіка (лівіше вже вставленого Y1) та натискаємо ***Додати криву*** на панелі графіків і у місцезаповнювач, що з'явився, вводимо Y2;

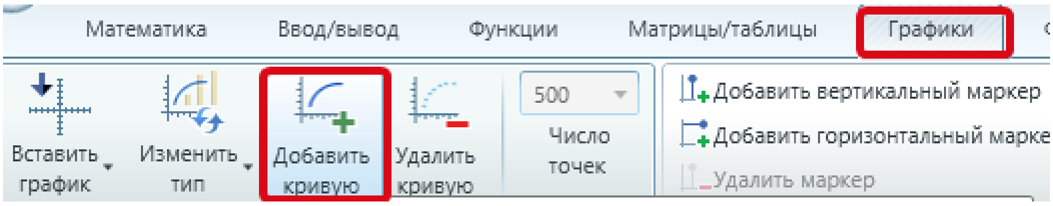

Рис. 1. 13. *Додавання графіка у MathCad Prime*

4) налаштовуємо для кожного графіка тип ліній та кольори, можна також налаштувати фон графіка та відображення осей (рис. 1.14).

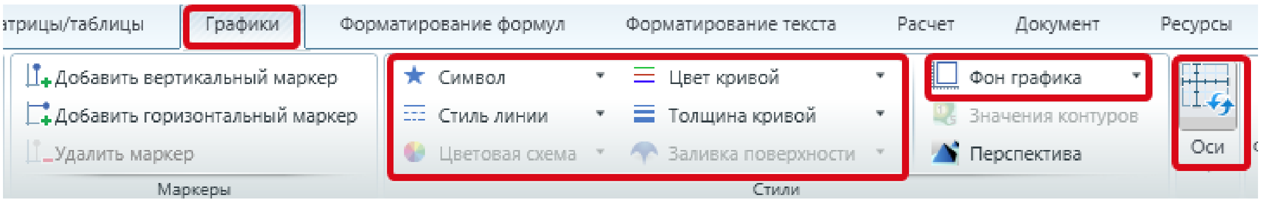

Рис. 1.14. *Налаштування графіка у MathCad Prime*

Результат наведено на рис. 1.12 б).

Якщо задано два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$, то

$$|z_1| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\ , \ z_1 \cdot \overline{z_1} = |z_1^2|,$$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (b_1 a_2 - a_1 b_2)i}{a_2^2 + b_2^2},$$

$$z_1^n = (a_1 + b_1 i)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_1^{n-k} b_1^k i^k .$$

Для виконання завдань 1а)-г) виконуємо задані дії над уже введеними комплексними числами (в нашому прикладі це $z_1 = 2 + 3i$ та $z_2 = \overline{z_1} = 2 - 3i$):

$z1 - \overline{z1} = 6i$ $\quad z1 \cdot \overline{z1} = 13$ $\quad m := 4$

$z1 + \overline{z1} = 4$ $\quad \dfrac{z1}{\overline{z1}} = -0.385 + 0.923i$ $\quad z1^{m} = -119 - 120i$

Якщо замість звичайного знака рівності у формулах використати знак символьної рівності (стрілку), то отримаємо результати в алгебраїчній формі зі звичайними дробами, наприклад:

$$\frac{\mathbf{z1}}{\overline{\mathbf{z1}}} \rightarrow -\frac{5}{13} + \frac{12}{13} \cdot i$$

Комплексне число $z = a + bi$ можна записати у ***тригонометричній формі***

$$z = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$$

та у ***показниковій формі***

$$z = |z|\, e^{i\varphi},$$

де $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль числа z, а $\varphi = \arg(z)$ – аргумент числа z $(-\pi < \varphi \le \pi)$, який обчислюється за формулою

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \textit{ якщо } \ a > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \textit{ якщо } \ a < 0, b \ge 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, \textit{ якщо } \ a < 0, b < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, \textit{ якщо } \ a > 0, b = 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, \textit{ якщо } \ a < 0, b = 0. \end{cases}$$

Для знаходження модуля комплексного числа у *Mathcad* використовується звичайний знак модуля з панелі ***Калькулятор*** у *Mathcad 15* та з панелі ***Оператори*** вкладки ***Математика*** у *Mathcad Prime*. Аргумент комплексного числа в обох версіях *Mathcad* знаходиться з допомогою функції $\arg(z)$.

$z := 1 - i$

$|z| \rightarrow \sqrt{2}$ $\quad \arg(z) \rightarrow -\dfrac{\pi}{4}$

$z := 1 - 1i$

$|z| \rightarrow \sqrt{2}$ $\quad \arg(z) \rightarrow \dfrac{-\pi}{4}$

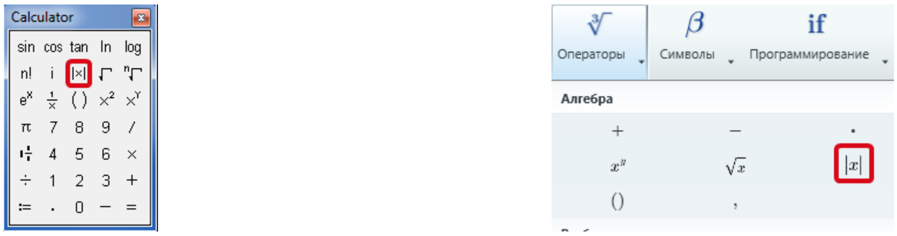

Рис. 1.15. *Знаходження модуля та аргументу комплексного числа*

а) *у MathCad 15* ***б)*** *у MathCad Prime*

Для виконання завдання 1д), тобто для запису числа у тригонометричній $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ та показниковій $z = |z|e^{i\varphi}$ формах, вводимо змінні, наприклад, mz та az, які позначатимуть відповідно модуль та аргумент даного числа (рис. 1.16.1, 1.16.2). Після цього записуємо відповідні формули і використовуємо ключове слово ***explicit*** з панелі ***Символьні (Symbolic)*** (після неї ставимо кому і пишемо **ALL**).

Функція перетворення з ключовим словом ***explicit*** підставляє у формулу обрані числові значення параметрів, не виконуючи арифметичних дій; модифікатор **ALL** означає, що ми підставляємо числові значення замість **усіх** параметрів у формулі. Для перевірки можна після отриманого тригонометричного/показникового вигляду написати знак рівності або символьної рівності (стрілку) й отримати алгебраїчну форму даного числа.

$$\mathbf{z1} := 2 + 3 \cdot i$$

$$\mathbf{mz} := |\mathbf{z1}| \to \sqrt{13} \qquad \mathbf{az} := \mathbf{arg}(\mathbf{z1}) \to \mathbf{atan}\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$\mathbf{trz1} := \mathbf{mz} \cdot (\mathbf{cos}(\mathbf{az}) + i \cdot \mathbf{sin}(\mathbf{az}))$$

$$\mathbf{trz1}\ \mathbf{explicit}, \mathbf{ALL} \ \to \sqrt{13} \cdot \left(\mathbf{cos}\left(\mathbf{atan}\left(\frac{3}{2}\right)\right) + i \cdot \mathbf{sin}\left(\mathbf{atan}\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right) = 2 + 3i$$

$$\mathbf{pz1} := \mathbf{mz} \cdot \mathbf{exp}(i \cdot \mathbf{az}) \qquad \mathbf{pz1}\ \mathbf{explicit}, \mathbf{ALL} \ \to \sqrt{13} \cdot \mathbf{e}^{i \cdot \mathbf{atan}\left(\frac{3}{2}\right)} = 2 + 3i$$

Рис. 1.16.1. *Запис комплексних чисел у тригонометричній та показниковій формах у MathCad 15*

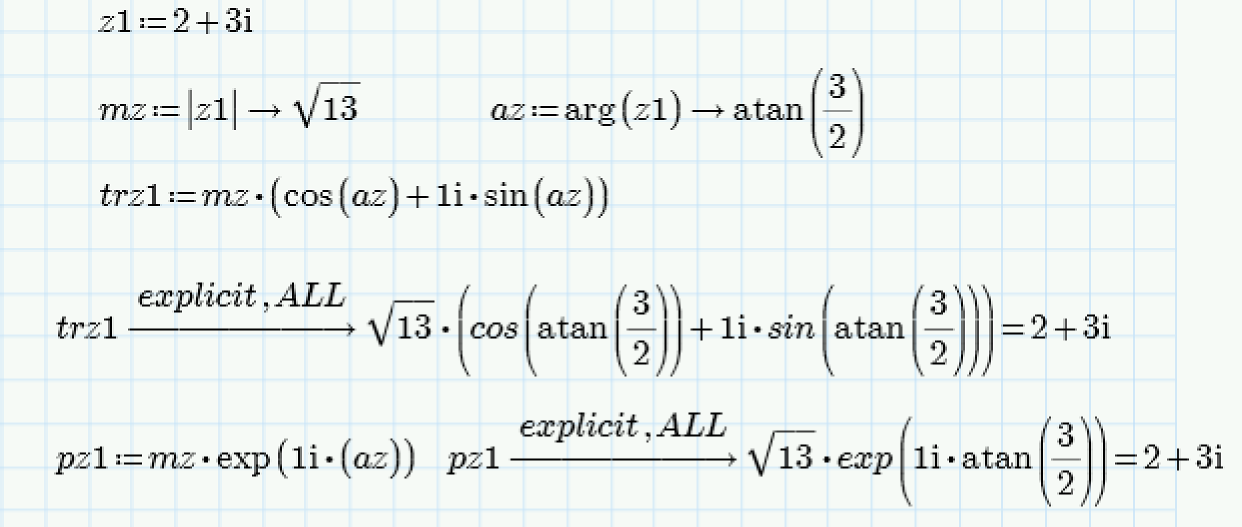

Рис. 1.16.2. *Запис комплексних чисел у тригонометричній та показниковій формах у MathCad Prime*

У *MathCad Prime* ключове слово ***explicit*** та модифікатор **ALL** знаходяться на панелі ***Символьні операції*** вкладки ***Математика*** (рис. 1.17).

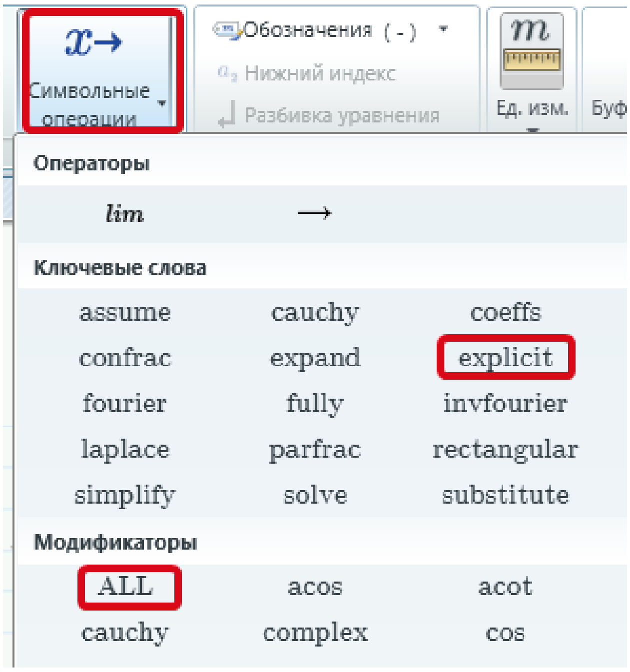

Рис. 1.17. *Розташування панелей ключових слів та модифікаторів у MathCad Prime*

До завдання 2. ***Добування кореня натурального степеня*** з комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ здійснюється за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \omega_k,$$

де $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, тобто $\sqrt[n]{z}$ має n різних значень $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$.

Для реалізації цього в *MathCad* задаємо z (в алгебраїчній формі), n (показник степеня кореня), діапазон зміни k, записуємо формулу усіх значень ω_k кореня $\sqrt[n]{z}$ та виводимо усі значення кореня як масив ω (рис. 1.18.1, 1.18.2):

$$n := 3 \qquad z := 1 + i \qquad k := 0..n-1$$

$$\sqrt[n]{|z|} = 1.122$$

$$\omega_k := \sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\arg(z) + 2\pi\cdot k}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\arg(z) + 2\pi\cdot k}{n}\right)\right)$$

$$\omega = \begin{pmatrix} 1.084 + 0.291i \\ -0.794 + 0.794i \\ -0.291 - 1.084i \end{pmatrix}$$

Рис. 1.18.1. *Приклад знаходження всіх значень кореня з комплексного числа у MathCad 15*

$$n := 3 \qquad k := 0..n-1$$

$$z := 1 + 1i$$

$$\sqrt[n]{|z|} \to \sqrt[3]{\sqrt{2}} = 1.122$$

$$\omega_k := \sqrt[n]{|z|}\cdot\left(\cos\left(\frac{\arg(z) + 2\cdot\pi\cdot k}{n}\right) + 1i\cdot\sin\left(\frac{\arg(z) + 2\cdot\pi\cdot k}{n}\right)\right)$$

$$\omega_k = \begin{bmatrix} 1.084 + 0.291i \\ -0.794 + 0.794i \\ -0.291 - 1.084i \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad \omega_k \to \begin{bmatrix} \dfrac{\left(1i\cdot\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}}}{2 + 2i} \\ -\dfrac{\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)}{1 + 1i} \\ \dfrac{\left(-\left(1i\cdot\sqrt{6}\right) + \sqrt{2}\right)\cdot\sqrt[3]{\sqrt{2}}}{2 + 2i} \end{bmatrix}$$

Рис. 1.18.2. *Приклад знаходження всіх значень кореня з комплексного числа у MathCad Prime*

Зауваження. *Якщо* $z \neq 0$ *і* $n > 2$ *– натуральне число, то числа* $\omega_k = \sqrt[n]{z}$ $(k = 0, 1, ..., n-1)$ *розташовані у вершинах правильного* n *-кутника, вписаного в коло радіуса* $R = \sqrt[n]{|z|} = \sqrt[n]{\rho}$ *із центром у початку координат, причому одна з вершин цього* n *-кутника розташована на промені, що утворює з додатним напрямком осі* Ox *кут* $\dfrac{1}{n}\arg z$.

Враховуючи вищенаведене зауваження, для зображення усіх значень кореня з числа z на комплексній площині, слід у системі координат зобразити коло з центром у початку координат радіуса $R=\sqrt[n]{|z|}=\sqrt[n]{\rho}$ та точки $\left(\operatorname{Re}(\omega_k);\operatorname{Im}(\omega_k)\right)$ $(k=0,1,\dots,n-1)$ на ньому (рис. 1.19).

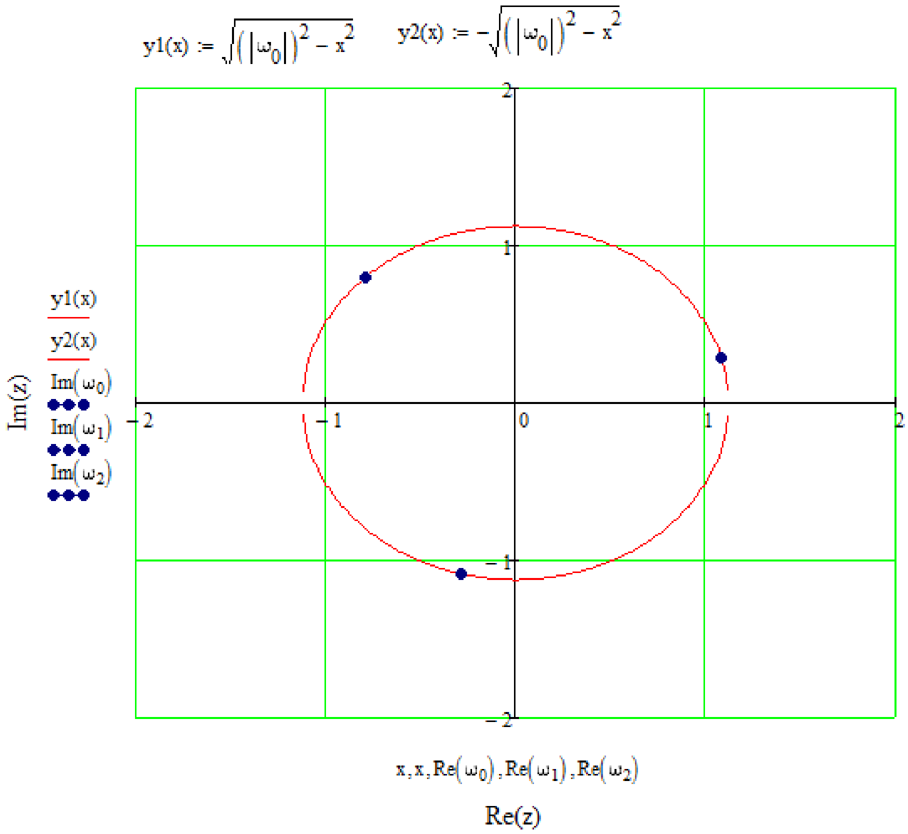

Рис.1.19. *Приклад зображення усіх значень кореня з комплексного числа у MathCad 15*

До завдання 3. Для знаходження коренів алгебраїчних рівнянь (рівнянь вигляду $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$) у *MathCad* є принаймні дві функції ***solve*** (з панелі ***Символьні (Symbolic)***) та ***polyroots*** (вводиться з клавіатури).

Використання функції ***solve*** у *MathCad 15* здійснюється так: на панелі ***Символьні (Symbolic)*** натискається ***solve***, у місцезаповнювач, який з'явиться перед ***solve***, вводиться ліва частина $f(x)$ рівняння $f(x)=0$, а через кому після ***solve*** записується змінна чи функція, відносно якої треба розв'язати рівняння (рис. 20.1). У *MathCad Prime* функція ***solve*** знаходиться на панелі ***Символьні операції*** вкладки ***Математика*** (рис. 1.20.2).

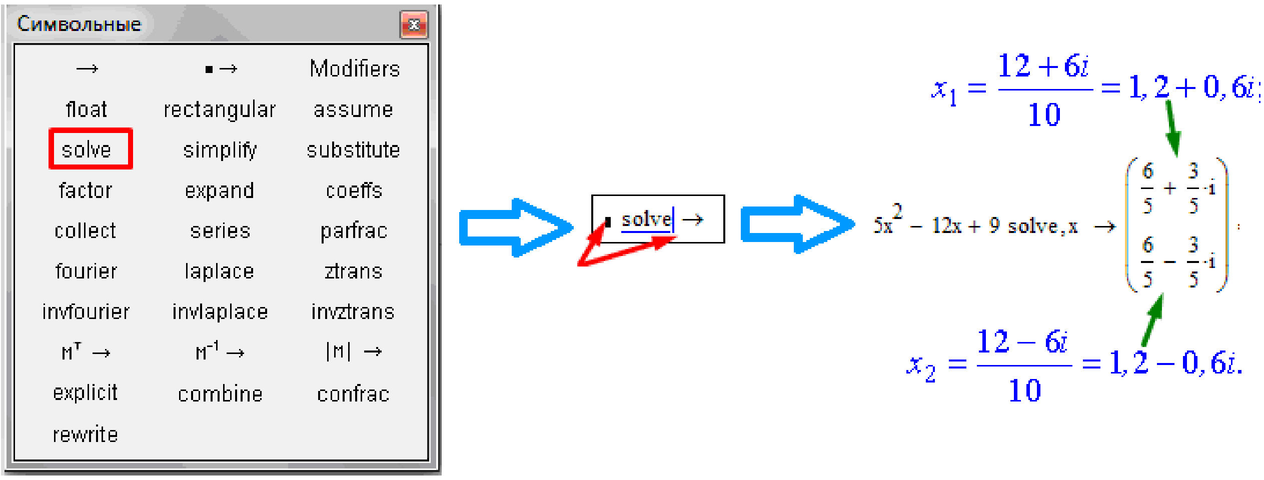

Рис. 1.20.1. *Схема використання функції **solve** у MathCad 15*

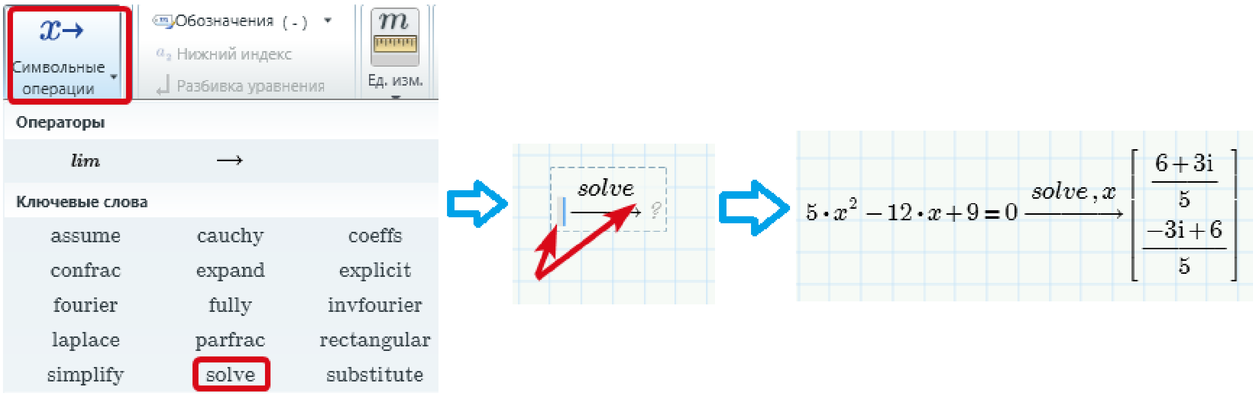

Рис. 1.20.2. *Схема використання функції **solve** у MathCad Prime*

Функція ***polyroots*** призначена для знаходження усіх коренів рівняння вигляду $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$. Для її використання слід попередньо сформувати вектор-стовпець, наприклад, v коефіцієнтів лівої частини рівняння (починаючи від a_0, завершуючи a_n):

$$v = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

а далі ввести з клавіатури ***polyroots(v)=*** і отримати вектор-стовпець, який складається з усіх коренів заданого рівняння (рис. 1.21).

Подібним способом (з допомогою ***solve*** або ***polyroots***) у *MathCad* можна знаходити корені алгебраїчних рівнянь з комплексними коефіцієнтами (рис. 1.22).

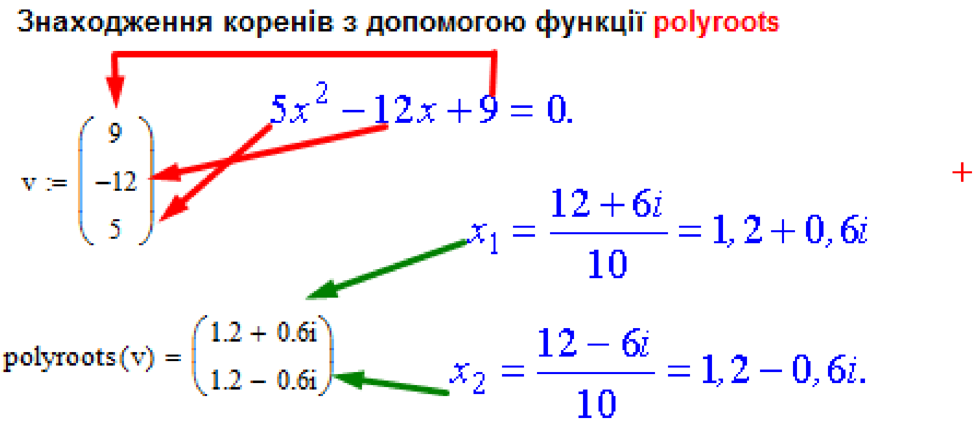

Рис. 1.21. *Схема використання функції* **polyroots** *у MathCad 15 або MathCad Prime*

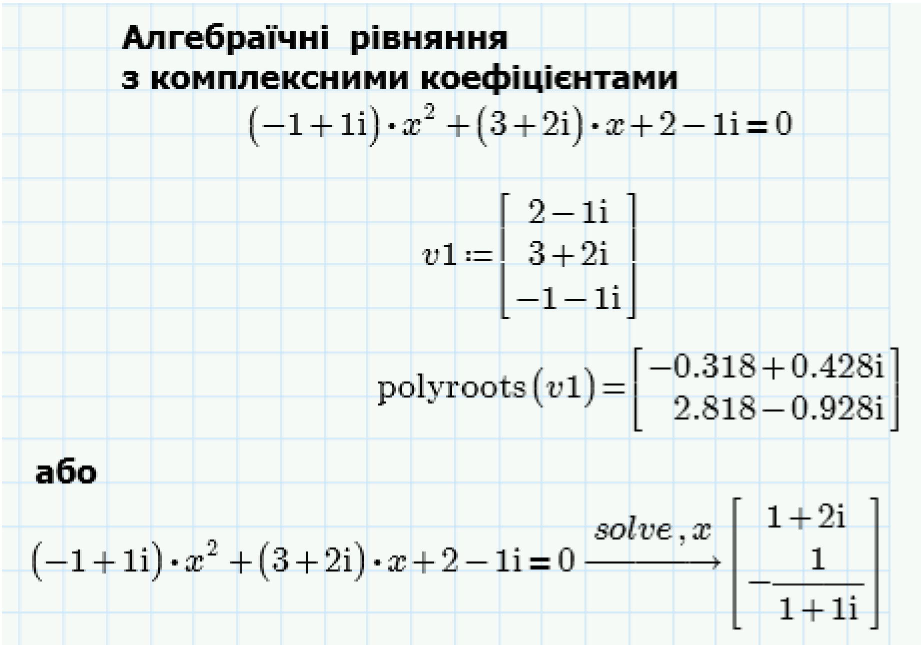

Рис. 1.22. *Розв'язування алгебраїчних рівнянь із комплексними коефіцієнтами у MathCad 15 або MathCad Prime*