І.В. ЖИТАРЮК

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА І МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

Частина 1
ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА І МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ
І.В. ЖИТАРЮК

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

І.В. ЖИТАРЮК

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
І МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
Ч. 1. ВИБРАНІ ПИТАННЯ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

КИЇВ
Видавництво «Людмила»
2019

УДК 51(075.8)
Ж 74

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів

Лист Міністерства освіти і науки України
№ 1/11-6454 від 30.04.2014 року

Рецензенти:

Кінащук Н.Л., вчитель математики, вчитель-методист, заслужений вчитель України, директор Чернівецького ліцею № 1 математичного та економічного профілів Чернівецької міської ради,

Конет І.М., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри і математичного аналізу, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,

Никифорчин О.Р., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри алгебри та геометрії, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника.

Житарюк І.В.

Ж 74 Елементарна математика і методика викладання математики. Конспект лекцій. Ч. 1. Вибрані питання елементарної математики: Навч. посібник. 2-ге вид. випр. і доп. – Київ: Видавництво «Людмила», 2019. – 448 с.

ISBN 978-617-7974-43-6

Пропонований посібник присвячено поглибленому розгляду окремих питань загальноосвітнього курсу математики: планіметрії, тригонометрії та стереометрії. Його зміст відповідає програмі курсу «Елементарна математика і методика викладання математики» для спеціальності «Середня освіта. Математика», галузевому стандарту вищої освіти, державному стандарту базової і повної середньої освіти.

Посібник адресовано учням ЗНЗ, студентам ВНЗ спеціальності «Середня освіта. Математика», учителям ЗНЗ і викладачам ВНЗ.

ISBN 978-617-7974-43-6

З М І С Т

ЛЕКЦІЯ 1
ВСТУП

Погляд на старі проблеми під іншим кутом зору потребує творчої уяви і дає великі переваги.
Альберт Ейнштейн

Сучасні потреби суспільства вимагають переходу на нову, значно гнучкішу стратегію математичної освіти, що потребує на різних ступенях навчання здійснювати рівневу і профільну диференціацію навчально-виховного процесу на основі державного стандарту і базового змісту математичної освіти. Навчання математики на всіх ступенях має бути розвивальним і мати прикладну спрямованість: розвиток інтелекту, алгоритмічної культури, математичної інтуїції, вміння й бажання вчитися та застосовувати отримані знання для розв’язування практичних і прикладних задач.

Провідною особою у реалізації поставлених завдань є вчитель (викладач) математики. Від його математичної, психолого-педагогічної і методичної підготовки, особистих якостей залежать професійна компетентність і здатність організувати навчально-виховний процес на рівні сучасних вимог.

Основною дисципліною з методичної підготовки майбутнього вчителя математики у ВНЗ (спеціальність «Середня освіта. Математика») є «Елементарна математика і методика викладання математики». Семестровий курс лекцій з «Елементарної математики і методики викладання математики. Ч. 1. Вибрані питання елементарної математики» присвячено питанням, що стосуються окремих питань планіметрії, тригонометрії та стереометрії й адресовано усім, хто бажає поглибити знання з елементарної математики – учням ЗНЗ, студентам ВНЗ спеціальності «Середня освіта. Математика», учителям ЗНЗ і викладачам ВНЗ.

Тригонометрію і геометрію вважають «важкими» розділами елементарної математики. Трудність їх полягає в тому, що порівняно з алгеброю вони мало алгоритмізовані. Майже кожну змістовну задачу можна розв’язати кількома способами, використовуючи різні методи. Тому тригонометрія і геометрія містять у собі великий потенціал для розвитку гнучкості розуму, конструктивних здібностей суб'єктів навчання, для виховання у них почуття прекрасного.

Більшість розділів математики, зокрема і тригонометрія виникла в стародавні часи з потреб людей при веденні розрахунків, пов'язаних із земельними роботами (для визначення відстані до недоступних предметів, складання географічних карт тощо) та ін. Деякі відомості з науки, що пізніше одержала назву тригонометрії, були ще у стародавніх єгиптян. У папірусі Ахмеса є п'ять задач, що стосуються вимірювання пірамід, у яких згадується певна функція кута – «сект». Є думка, що «сект» відповідає котангенсу кута. Застосування цієї функції мало суто практичну причину: єгипетські архітектори будували піраміди, строго дотримуючись одного й того самого значення кута нахилу бічної грані до основи (52°) і кута між ребром та діагоналлю основи (42°). А для цього треба було знати відповідні відношення між лінійними елементами чотирикутної піраміди.

Вавилоняни теж мали деякі знання з цього розділу математики: вони запровадили поділ кола на 360° та поділ градуса на 60 частин, що відповідало прийнятій у стародавній Месопотамії шістдесяткової системи числення. Для вимірювання кутів вавилоняни використовували примітивну астролябію (*Астролябія* (англ. – *astrolabe*, нім. – *Astrolabium*) – кутовимірювальний прилад, яким до XVIII ст. користувалися для визначення широти і довготи в астрономії та навігації).

Тригонометрія (від грец. *τρίγονο* – трикутник та *μετρειν* – вимірюю, тобто у буквальному перекладі означає *вимірювання трикутників*) – розділ елементарної математики, що лежить на перетині алгебри та геометрії і вивчає співвідношення між сторонами й кутами трикутників, дозволяючи проводити кутові обчислення через спеціально визначені функції кутів.

Зазначимо, що вимірювання трикутників варто розуміти як розв'язування трикутників, тобто знаходження сторін, кутів та інших елементів трикутника, якщо задано деякі з них. Значна кількість практичних задач, а також задачі планіметрії, стереометрії, астрономії та інших дисциплін зводяться до задачі розв'язування трикутників.

Співвідношення між сторонами в прямокутних трикутниках, що за своєю суттю є тригонометричними функціями, розглядалися вже у III ст. до н.е. у працях Евкліда, Архімеда, Аполлонія та інших учених.

Вперше способи розв'язування трикутників, які засновані на залежностях між сторонами і кутами трикутника, були знайдені давньогрецькими астрономами Гіппархом (II ст. до н.е.) і Клавдієм Птолемеєм (II ст. н.е.). Пізніше залежності між відношеннями сторін трикутника і його кутами стали називати *тригонометричними функціями*, які відіграють значну роль в математиці та її застосуваннях.

Давньогрецькі учені створили «тригонометрію хорд», що виражала залежності між центральними кутами кола і хордами, на які вони спираються. Цією тригонометрією користувався у II ст. до н. е давньогрецький астроном Гіппарх. У II ст. н.е. грецький учений Птолемей у праці «Алмагест» («Велика книга») вивів певні співвідношення для кола, які за своєю суттю аналогічні сучасним формулам синуса половинного і подвійного кутів, синуса суми і різниці двох кутів.

Довгі роки тригонометрія служила астрономії і завдяки їй розвивалася. У VIII ст. зусиллями математиків Близького і Середнього Сходу тригонометрія виокремилися з астрономії і стала самостійною математичною дисципліною. До зазначеного часу хорди в тригонометрії були замінені синусами (відношення половини хорди до радіусу кола), а також було введено поняття косинуса і тангенса та складено таблиці значень тригонометричних функцій.

Вчення про тригонометричні величини отримало розвиток в VIII-XV ст. у країнах Середнього і Близького Сходу. Так, в IX ст. в Багдаді аль-Хорезмі (Абу Абдулла Абу Джафар Мухаммад ібн Муса аль-Хорезмі (біля 780 - біля 850) – перський математик, географ, історик та астроном) склав перші таблиці синусів. Ахмад-аль-Беруні (Абу Рейхан Мухаммад ібн Ахмад Аль-Беруні (973-1048-1051) – хорезмський учений-енциклопедист) в XI ст. замість поділу радіусу на частини при визначенні значень синуса і косинуса, зробленого до нього Птолемеєм, почав використовувати коло одиничного радіусу. У першій половині XV ст. аль-Каши (Джамшид ібн Мас‘уд ібн Махмуд Гіяс ад-Дін ал-Каши (1380-1429) – математик і астроном імперії Улугбека XV ст., один з керівників Самаркандської обсерваторії) створив тригонометричні таблиці з кроком 1′, які наступні 250 років були неперевершеними за точністю. Найвідомішим європейським представником тієї епохи, який досліджував тригонометричні функції, вважають Регіомонтана.

Значний вклад у розвиток тригонометрії зробили арабські учені Аль-Батані (850-929) і Абу ль-Уафа (Абу ль-Вафа) Мухаммед-бен-Мухаммед (940-998, за ін. даними 997) – перський астроном і математик з Хорасану. Зокрема останній склав таблиці синусів і тангенсів, обчислених через кожні 10′ з точністю до $\frac{1}{60^4}$, йому ж належить одне із перших доведень теореми синусів у сферичній тригонометрії і доведення теореми тангенсів для прямокутного сферичного трикутника. Теорему синусів знали індійський учений Бхаскара II (1114-1185) і азербайджанський астроном і математик Насреддін Туси Абу Джафар Мухамед (1201-1274). Крім того, Насреддін Туси у праці «Трактат про повний чотирикутник» виклав плоску і сферичну тригонометрію як самостійні дисципліни.

Слово «синус» походить від латинського *sinus* («перегин»), останнє – від арабського слова «брехлива» («тятива лука»). Слово «косинус» – скорочення словосполучення *complementi sinus* («доповнюючий синус») і пояснює те, що cosα дорівнює синусу кута, який доповнює кут α до π/2, тобто $\cos\alpha = \sin(\pi/2-\alpha)$.

Тангенси використовували при розв’язуванні задачі про визначення довжини тіні. Тангенс і котангенс введено у X ст. арабським математиком Абу ль-Вефой, який склав і перші таблиці для їх знаходження. Проте ці відкриття тривалий час залишалися невідомими європейським ученим і тангенси були заново відкриті лише у XIV ст. (1467 р.) німецьким математиком, астрономом І. Мюллером (1436-1476), відомим в історії під псевдонімом Регіомонтан, який склав таблиці синусів для кожної мінути дуги з точністю до сьомого десяткового знаку і таблиці тангенсів через кожний градус. Регіомонтан значно покращив методику викладання тригонометрії, що, зокрема, привело до застосування алгебри при розв'язуванні геометричних задач.

Назва «тангенс» походить від латинського *tanger* (дотикатися) і з'явилася у 1583 р. *Tangens* переводиться як «дотична» («дотична до кола», *лінія тангенсів* – дотична до одиничного кола).

Ідея введення тригонометричних понять за допомогою кола одиничного радіусу набула поширення в X-XI ст.

Перша наукова праця «П'ять книг про трикутники усіх видів» (була опублікована у 1533 році), в якій тригонометрія вперше трактувалася як самостійна наука, була написана у 1462-1464 рр. Регіомонтаном. Подальший розвиток тригонометрія отримала в працях видатних астрономів М. Коперніка (1473-1543) – творця геліоцентричної системи світу, який присвятив цій науці два розділи своєї знаменитої праці «Про обертання небесних тіл» (1543); Тихо Бразі (1546-1601), Й. Бюрги (1552-1632), І. Кеплера (1571-1630), а також в працях математика Франсуа Вієта (1540-1603) та інших відомих математиків зустрічаються складні перетворення тригонометричних виразів і виводиться багато формул.

Варто зазначити, що Ф. Вієт повністю розв'язав задачу про визначення всіх елементів плоского або сферичного трикутника за трьома даними та отримав цікаві рекурентні формули:

$$\cos m\alpha = 2\cos\alpha \cos(m - 1)\alpha - \cos(m - 2)\alpha,$$
$$\cos m\alpha = -2\sin\alpha \sin(m - 1)\alpha + \cos(m - 2)\alpha,$$
$$\sin m\alpha = 2\cos\alpha \sin(m - 1)\alpha - \sin(m - 2)\alpha,$$
$$\sin m\alpha = 2\sin\alpha \cos(m - 1)\alpha + \sin(m - 2)\alpha.$$

Тригонометрична символіка з роками удосконалювалася і лише в працях Л. Ейлера у XVIII ст. набула сучасного вигляд, зручного для розв'язування обчислювальних задач.

Зауважимо, що окрім «плоскої» тригонометрії, що вивчається у ЗНЗ, існує сферична тригонометрія, що є частиною сферичної геометрії. У сферичній тригонометрії розглядають співвідношення між сторонами і кутами трикутників на сфері, утворених дугами її великих кіл. Історично сферична тригонометрія виникла з потреб астрономії, фактично раніше тригонометрії на площині.

На початку XVII ст. в розвитку тригонометрії намітився новий напрям – аналітичний. Якщо до цього вчення про тригонометричні функції будувалися на геометричній основі, то в XVII-XIX ст. тригонометрія поступово увійшла до складу математичного аналізу і стала використовуватися в механіці і техніці, особливо при розгляді коливних процесів та інших періодичних явищ.

Про властивість періодичності тригонометричних функцій знав ще Ф. Вієт. Швейцарський математик І. Бернуллі (1642-1727) в своїх працях застосовував символіку тригонометричних функцій. Проте, близьку до прийнятої нині, ввів Л. Ейлер в 1748 р. у своїй роботі «Вступ до аналізу нескінченних». У ній він розглянув питання про знаки всіх тригонометричних функцій будь-якого аргументу.

Тригонометричні функції Ейлер розглядав як особливі числа, називаючи їх терміном трансцендентні кількості, що виходять з кола.

У XIX ст. подальший розвиток теорії тригонометричних функцій був продовжений в працях російського математика М.І. Лобачевського (1792-1856), а також в працях інших учених, наприклад, в роботах професорів МДУ Д.Є. Меньшова і Н.К. Барі.

Зазначимо, що ще давньогрецькі математики, використовували елементи тригонометрії для розв'язування прямокутних трикутників, і фактично складали та розв'язували найпростіші тригонометричні рівняння $\sin x = a$, де $0 < x < \pi/2$ і $|a| < 1$.

Історично вчення про розв'язування тригонометричних рівнянь формувалося з розвитком теорії тригонометричних функцій, а також «черпало» з алгебри загальні методи їх розв'язування. Зауважимо, що частина тригонометричних рівнянь безпосередньо розв'язується зведенням їх до простішого вигляду, іноді – з попереднім розкладанням лівої частини рівняння на множники, коли права частина дорівнює 0. В деяких випадках удається провести заміну невідомих таким чином, що тригонометричне рівняння перетвориться в «зручне» для розв'язання рівняння алгебри.

На жаль, не можна вказати загального методу розв'язування тригонометричних рівнянь, майже кожне з них (окрім найпростіших) вимагає особливого підходу.

Сьогодні ж тригонометричні функції лежать в основі спеціального математичного апарату – гармонічного аналізу, за допомогою якого вивчаються різні періодичні процеси: коливні рухи, розповсюдження хвиль, деякі атмосферні явища тощо. Необхідність вивчення тригонометрії у ЗНЗ обумовлюється в основному потребами сучасної науки, а тому поглиблене вивчення її основ у профільних ЗНЗ є актуальним.

Ідеї геометрії втілені в усіх сферах навколишнього світу, вони з успіхом використовуються у природничих і технічних науках, зокрема й у найрізноманітніших розділах математики. Про місце геометрії у розвитку людини важко сказати краще за ірландського філософа Дж. Берклі (1685-1753): «Давно підмічено, що геометрія – це чудова логіка … Набувається звичка міркувати точно, послідовно і методично; ця звичка посилює й загострює розум і стає в нагоді під час пошуків істини в інших галузях».

У ході реформи загальноосвітньої математичної освіти було допущено суттєві прорахунки і перегини. Зокрема, зі сторінок загальноосвітніх посібників з математики зникло багато чудових геометричних фактів, свого роду геометричні «перлини», що використовуються при доведеннях теорем і розв'язуванні задач, а також певні тригонометричні співвідношення та їх доведення. Нові ж методи – векторний, координатний, метод перетворень – не зайняли належного місця у викладанні геометрії і тригонометрії. На мою думку, у цьому полягає одна із причин значного зниження рівня теоретичної і практичної підготовки з геометрії і тригонометрії випускників ЗНЗ.

При відборі матеріалу завжди можна, з одного боку, заглибитися у деталі, а з іншого – упустити дещо важливе з практичної і пізнавальної точок зору. Тому викладений у посібнику матеріал уразливий для критики. Він регламентований програмою з дисципліни «Елементарна математика і методика викладання математики», але не виходить за межі державного стандарту з математики, а дещо «поглиблює» деякі його питання. Автор вважав необхідним включити «забутий» матеріал, розширити матеріал загальноосвітніх підручників з математики теоремами і формулами та їх доведеннями, які безпосередньо пов'язані з тим, що вивчається у загальноосвітньому курсі математики, і добавити багато фактів з класичного арсеналу елементарної геометрії і тригонометрії.

У посібнику викладено теоретичний матеріал з ілюстрацією на конкретних прикладах, а доведення тверджень дозволяє виявляти різнобічні зв'язки окремого факту з іншими, що є суттєвим при вивченні математики. Він дозволяє оригінально і красиво розв'язувати багато геометричних і тригонометричних задач. Автор хоче «пробудити» зацікавленість до розглядуваних питань у майбутніх вчителів математики, оскільки завтрашнє навчальних закладів залежатиме від них.

Посібник в основному призначений для поглибленого вивчення зазначених розділів математики майбутніми вчителями математики, для учителів, які працюють у класах і ЗНЗ з поглибленим вивченням математики, його матеріал можна використовувати і у неспеціалізованих класах як на уроках, так і на гурткових й факультативних заняттях. Студенти і викладачі ВНЗ спеціальності «Середня освіта. Математика» знайдуть у ньому чимало корисного для своєї фахової підготовки й удосконалення.