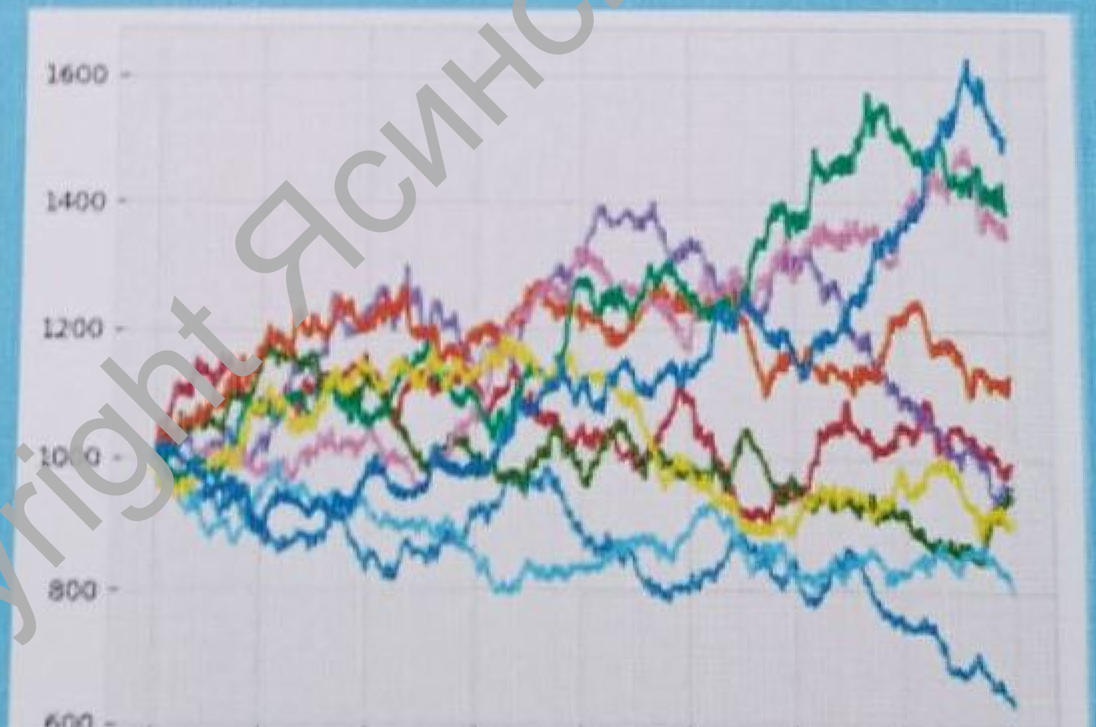
В.К. Ясинський, І.В. Юрченко

СТІЙКІСТЬ ТА ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ З ВИПАДКОВИМИ ОПЕРАТОРАМИ



Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Ясинський В.К., Юрченко І.В.

СТІЙКІСТЬ ТА ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В СТОХАСТИЧНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ З ВИПАДКОВИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Видання друге, доповнене

Чернівці
Технодрук
2019

УДК 519.21; 517.217

ББК 43.972

С 45

Р е ц е н з е н т и:
Академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор
Королюк Володимир Семенович

Доктор фіз.-мат. наук, професор
Кнопов Павло Соломонович

Друкується за ухвалою редакційно-видавничої ради
Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича

Ясинський В.К., Юрченко І.В.

С45 Стійкість та оптимальне керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами. Видання друге, доповнене. Чернівці: Технодрук, 2019, 258 с.
ISBN 978-617-7611-54-6

Дана монографія присвячена дослідженню питань стійкості та оптимального керування стохастичних динамічних систем спеціального вигляду.

У розділі 1 висвітлюється питання про існування та єдиність *l*-го моменту сильного розв'язку стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерри. Розділ 2 присвячено дослідженню стійкості у середньому квадратичному розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими операторами. Матеріал третього розділу обгрунтовує теореми про асимптотичну стійкість у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з пуассонівськими збуреннями Четвертий розділ присвячено побудові оптимального керування стохастичними динамічними системами зі всією передісторією з пуассоновими перемиканнями. У розділі 5 описуються деякі властивості розв'язків дифузійних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з марковськими параметрами. Розділ 6 присвячено доведенню теорем про існування і стабілізацію сильного розв'язку стохастичних рівнянь Іто-Скорохода в частинних похідних.

Для наукових співробітників, аспірантів, студентів спеціальностей "Системний аналіз", "Математика" вищих навчальних закладів, студентів інших спеціальностей, що вивчають поведінку стохастичних динамічних систем.

УДК 519.21; 517.217
ББК 43.972

ISBN 978-617-7611-54-6

Світлій пам'яті
Вчителя та Вченого
Царкова Євгена Федоровича
присвячується

ВСТУП

Вивчення диференціальних рівнянь з випадковими функціями спонукається все більш зростаючими запитами механіки, задачами автоматичного керування, радіоелектроніки, економіки, страхової і фінансової математики та багатьох розділів теоретичної фізики.

При розгляді диференціальних рівнянь з випадковими функціями слід розрізняти два випадки. У першому — випадкові функції, що входять до диференціального рівняння, є регулярними, а більшість питань, які пов'язані з дослідженням властивостей розв'язків рівнянь, можна розв'язувати за допомогою класичних методів теорії звичайних диференціальних рівнянь. Виняток становить задача про знаходження скінченновимірних розподілів (або інших імовірнісних характеристик) розв'язків рівнянь. До цього часу ця задача розв'язується лише для лінійних рівнянь. Для нелінійних ще, на наш погляд, немає загальних методів розв'язання такої задачі. У другому випадку доводиться розглядати диференціальні рівняння, що містять узагальнені випадкові процеси типу "білого шуму". Такі рівняння можна отримати в результаті граничного переходу від рівнянь, що описують системи, на які діють швидкозмінні впливи (дробовий ефект у радіоелектронних системах; хаотичний тепловий рух молекул, що діють на броунівську частинку; еволюція вартостей акцій і т. ін.). До подібних рівнянь класичні методи застосувати неможливо, а це означає, що для них розроблено спеціальну теорію стохастичних диференціальних рівнянь. На відміну від першого випадку, для розв'язків таких рівнянь існують ефективні методи визначення скінченновимірних розподілів. Вони грунтуються на тому, що розв'язки рівнянь є марковськими процесами. Таким чином, теорія стохастичних диференціальних рівнянь пов'язана з одним із найважливіших розділів сучасної теорії випадкових процесів — марковськими процесами.

Термін "стохастичне диференціальне рівняння"був започаткований С.Н. Бернштейном. Важливе значення у застосуванні теорії стохастичних диференціальних рівнянь відіграли роботи М.М. Боголюбова та М.М. Крилова. В них вперше розглядалося граничне рівняння динамічної системи під впливом випадкової сили, що збігалося до процесу з незалежними змінними. Для перехідних імовірностей було розглянуто рівняння Фоккера-Планка. Однак граничний перехід не був обгрунтований. Це зробив Й.І. Гіхман. Відтоді почалося систематичне дослідження диференціальних рівнянь з випадковими функціями. Й.І. Гіхман дає загальне поняття стохастичного диференціального рівняння: доведено теореми існування та єдиності і диференційованість розв'язку за початковими даними, виведено рівняння А.М. Колмогорова для перехідних імовірностей розв'язків. В цей же час японський математик К. Іто на шляху дослідження неперервності марковських процесів незалежно побудував подібну теорію стохастичних диференціальних рівнянь, що грунтувалася на понятті стохастичного інтегралу.

Надалі стохастичні диференціальні рівняння вивчалися багатьма авторами. Слід відмітити праці Й.І. Гіхмана [11—13], А.В. Скорохода [11—13, 50], В.С. Королюка [26—29], М.О. Портенка [28], Є.Ф. Царкова [44, 45, 54, 57], Ю.В. Козаченка, Д.Г. Кореневського [25], Р.З. Хасьмінського [52], І.Я. Каца [126], В.Б. Колмановського, В.Р. Носова [24] та багатьох інших вітчизняних і закордонних математиків.

Дана робота присвячена дослідженню стійкості та оптимального керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами.

У розділі 1 висвітлюється питання про існування та єдиність l-го моменту сильного розв'язку стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерри.

Розділ 2 присвячено дослідженню стійкості у середньому квадратичному розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими операторами.

Матеріал третього розділу обгрунтовує теореми про асимптотичну стійкість у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з пуассонівськими збуреннями.

Четвертий розділ присвячено встановленню достатніх умов існування оптимального керування стохастичними динамічними системами зі всією передісторією з пуассоновими перемиканнями за допомогою теореми порівняння.

У розділі 5 описуються основні теореми про стійкість розв'язків дифузійних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з марковськими параметрами зі скінченною післядією.

Розділ 6 присвячено доведенню теорем про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень та існування і стабілізацію сильного розв'язку автономних стохастичних рівнянь Іто-Скорохода в частинних похідних із випадковими параметрами.

Автори висловлюють подяку Антонюк С.В., Березі В.Ю., Дарійчуку І.В., Довгуню А.Я., Донець Н.П., Дорошенко І.В., Лукашіву Т.О., Малику І.В., Мусурівському В.І., Нікітіну А.В., Перун Г.М., Свердану М.Л., Ясинській Л.І., Ясинському Є.В. за плідну участь в обговоренні поставлених задач та отриманих результатів.

Розділ 1. Існування та єдиність розв'язків стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь

§ 1.1. Про існування l-го моменту сильного розв'язку стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерри

Питанню існування та єдиності розв'язку детермінованих та стохастичних (у випадку наявності вінерівських збурень) інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерри присвячена праця [93]. Там же доведено марківську властивість розв'язку та досліджено питання стійкості розв'язку таких рівнянь. У працях [45, 106, 107] розвинуто методику дослідження стохастичних рівнянь Іто-Вольтерри на випадок наявності пуассонівських перемикань. Матеріал даної роботи узагальнює результати щодо існування та єдиності розв'язку, що розглядалися в роботах [45, 93, 106, 107], на стохастичне інтегро-диференціальне рівняння Іто-Скорохода-Вольтерри спеціального вигляду (випадок l-го моменту, $l > 1$).

Розглянемо на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ з потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq t_0\}$

стохастичне інтегро-диференціальне рівняння Іто-Скорохода-Вольтерри

$$
\begin{aligned}
dx(t) = \Bigg[& a_1(t, x^t) + \int_{t_0}^{t} a_2(t, s, x^s)ds + \int_{t_0}^{t} a_3(t, s, x^s)dw(s) + \\
& + \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{U}} a_4(t, s, x^s, u)\tilde{\nu}(du, ds) \Bigg] dt + \\
+ \Bigg[& b_1(t, x^t) + \int_{t_0}^{t} b_2(t, s, x^s)ds + \int_{t_0}^{t} b_3(t, s, x^s)dw(s) + \\
& + \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{U}} b_4(t, s, x^s, u)\tilde{\nu}(du, ds) \Bigg] dw(t) + \\
& + \int_{\mathbb{U}} \Bigg[c_1(t, x^t, u) + \int_{t_0}^{t} c_2(t, s, x^s, u)ds + \\
& + \int_{t_0}^{t} c_3(t, s, x^s, u)dw(s) + \\
& + \int_{t_0}^{t} \int_{\mathbb{U}} c_4(t, s, x^s, u, u_1)\tilde{\nu}(du_1, ds) \Bigg] \tilde{\nu}(du, dt); \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

$$
x^{t_0} = \varphi^{t_0}; \qquad (1.2)
$$

де $\{x(t) \equiv x(t, \omega)\} \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq t_0$, $\omega \in \Omega$; $\{a_1(t, \varphi)\}, \{b_1(t, \varphi)\}$ неперервні за $t \geq t_0$, $\varphi \in \mathbb{D}_{\mathbb{R}_+}$ відображення в $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{D}_{\mathbb{R}_+}$ — простір Скорохода [13, 28] локально обмежених функцій, які є неперервними справа та мають лівосторонні границі (НПЛГ), вигляду $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ з нормою

$$\|\varphi\|_{\mathbb{D}^p} \equiv \left(|\varphi(0)|^p + \|\varphi\|_\rho^p \right)^{1/p} \equiv \left(|\varphi(0)|^p + \int\limits_0^\infty |\varphi(s)|^p \rho(s) ds \right)^{1/p}, \tag{1.3}$$

де $\mathbb{D}^p$ — простір $\mathbb{D}_{\mathbb{R}_+}$ з нормою (1.3), $1 \le p < \infty$,

$$x^t(s) \equiv \begin{cases} x(t-s), & t_0 \le s \le t, \\ \varphi(s-t), & s > t. \end{cases} \tag{1.4}$$

$\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — обмежена функція згладжуючої дії (див. п. 5.1.1 [45]). $\{a_2(t,s,x^s)\}$, $\{b_2(t,s,x^s)\}$ — $\mathbb{R}^n$-вимірні; $\{a_3(t,s,x^s)\}$, $\{b_3(t,s,x^s)\}$ — $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m$-вимірні; $\{w(s)\}$ — $\mathbb{R}^m$-вимірний стандартний вінерівський процес на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ (ці функціонали визначені та вимірні за Борелем на $\mathcal{G} \times \mathbb{D}^p$, де $\mathcal{G} \equiv \{(t,s) \in [t_0,T] \times [t_0,T] : s \le t\}$). $\{a_4(t,s,x^s,u)\}$ і $\{b_4(t,s,x^s,u)\}$, крім цього, вимірні за $u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$; $\{c_1(t,x^s,u)\}$ — $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{U}$-вимірний, $\{c_2(t,s,x^s,u)\}$ і $\{c_3(t,s,x^s,u)\}$ — $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{U}$-вимірний, $\{c_4(t,s,x^s,u,u_1)\}$ — $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{U} \otimes \mathbb{U}$-вимірний (ці функціонали визначені та вимірні за Борелем на $\mathcal{G} \times \mathbb{D}^p \times \mathbb{U}$). $\{\tilde{\nu}(du,dt)\}$ — центрована пуассонівська міра з параметром $\Pi(du)dt$, яка не залежить від $\{w(t)\}$. Нехай $\{\mathcal{F}_t, t \ge t_0\}$ — потік σ-алгебр множин з Ω такий, що $\{w(t)\}$ і $\{\tilde{\nu}(t,A)\}$, $A \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — σ-алгебра множин $\mathbb{U}$), $\mathcal{F}_t$ — вимірні $\forall t \ge t_0$. Позначимо через J^{t_0}, $t_0 \ge 0$ простір вимірних випадкових процесів $\{x(t), t \ge t_0\}$ таких, що $x^{t_0} \in \mathbb{D}^p$ для кожного $\omega \in \Omega$ та $\{x(t)\}$ не залежить від приростів вінерівського процесу та пуассонівської міри $\{w(s) - w(t_0), s \ge t_0\}$ і $\{\tilde{\nu}(s,A) - \tilde{\nu}(t_0,A), s \ge t_0, A \in \mathfrak{A}\}$.

Означення. *Стохастичний процес $\{x(t), t \in (-\infty, T]\}$ є сильним розв'язком рівняння (1.1), (1.2) для $t \in [t_0, T]$, якщо: 1) $\{x(t)\}$ неупереджуючий [28] для $t \le T$; 2) $x^t \in \mathbb{D}^p$ при $t \in [t_0,T]$ майже скрізь; 3) $x^{t_0} = \varphi^{t_0}$ майже скрізь; 4) інтеграли від модулів a_i, b_i, c_i, $i = \overline{1,4}$ скінченні. 5) для $t \ge t_0$ справджується відповідне інтегральне рівняння.*

Далі позначимо для $x : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ через $|x(\cdot)|^*_{t_0}(t) \equiv \sup\limits_{t_0 \le s \le t} |x(s)|$. Надалі будемо суттєво використовувати нерівності Буркгольдера [93] для довільного $l > 1$:

$$\mathbb{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} \psi_1(s)dw(s)\right|^{*l}_{t_0}(t) \le c_{11}\mathbb{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t} |\psi_1(s)|^2 ds\right)^{l/2}, \tag{1.5}$$

$$\mathbb{E}\left|\int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\mathbb{U}} \psi_2(s,u)\tilde{\nu}(du,ds)\right|^{*l}_{t_0}(t) \le$$

$$\le c_{21}\mathbb{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\mathbb{U}} |\psi_2(s,u)|^2 \Pi(du)ds\right)^{l/2}, \tag{1.6}$$

для J^t-вимірного процесу $\{\psi_1(t,\omega)\}$ такого, що $\int\limits_{t_0}^{T} \psi_1^2(t)dt < \infty$ майже скрізь та для J^t-вимірного процесу $\{\psi_2(t,u,\omega), u \in \mathbb{U}\}$ такого, що $\int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\mathbb{U}} \psi_2^2(t,u)\Pi(du)dt < \infty$ майже скрізь.

Позначимо

$$R(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} a_1(s,x^s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} a_2(s,v,x^v)dvds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} a_3(s,v,x^v)dw(v)ds + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} \int\limits_{\mathbb{U}} a_4(s,v,x^v,u)\tilde{\nu}(du,dv)ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} b_1(s,x^s)dw(s) + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{t_0}^{s} b_2(s,v,x^v)dvdw(s) +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s} b_3(s,v,x^v)dw(v)dw(s)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{s}\int\limits_{\mathbb{U}} b_4(s,v,x^v,u)\tilde{\nu}(du,dv)dw(s)+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\mathbb{U}} c_1(s,x^s,u)\tilde{\nu}(du,ds)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\mathbb{U}}\int\limits_{t_0}^{s} c_2(s,v,x^v,u)dv\tilde{\nu}(du,ds)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\mathbb{U}}\int\limits_{t_0}^{s} c_3(s,v,x^v,u)dw(s)\tilde{\nu}(du,ds)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\mathbb{U}}\int\limits_{t_0}^{s}\int\limits_{\mathbb{U}} c_4(s,v,x^v,u,u_1)\tilde{\nu}(du_1,dv)\tilde{\nu}(du,ds)\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=1}^{4}R_i(t,x)+\sum_{i=1}^{4}Q_i(t,x)+\sum_{i=1}^{4}S_i(t,x), \tag{1.7}$$

де перша сума містить перші чотири доданки, друга — наступні чотири доданки з інтегралами за вінерівським процесом, третя — чотири доданки з інтегралами за пуассонівською мірою. Надалі будемо опускати індекс $\mathbb{D}^p$ у позначенні $\|\cdot\|_{\mathbb{D}^p}$.

Лема 1.1. *Нехай для функціоналів* $\{a_i\},\{b_i\},\{c_i\}, i=\overline{1,4}$ *виконується відповідна умова Ліпшиця з константою* $L>0$, *тоді для розв'язку* $\{x(t)\}\subset\mathbb{R}^n$ *стохастичного диференціального рівняння (1.1), (1.2) справджується наступна оцінка:* $\mathbb{E}|R(\cdot,x)-R(\cdot,y)|^{*l}_{t_0}(t)\leq K_1\mathbb{E}\|\delta^{t_0}\|^l+\bar{M}^t_{t_0}\mathbb{E}|\delta(\cdot)|^{*l}_{t_0}(t)$, *де* $R(\cdot,\cdot)$ *визначений за формулою (1.7),* $\delta(t)\equiv x(t)-y(t)$, $K_1=O((t-t_0)^{1/2})$, $\bar{M}^t_{t_0}$ *залежить тільки від* $t-t_0$ *та* $\bar{M}^t_{t_0}=o(1)$ *при* $t-t_0\to 0$.

Доведення. Нехай $T > t_0$. Для $t \in [t_0, T]$ матимемо

$$\mathbb{E}|R(\cdot,x) - R(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t) \le c_1 \sum_{i=1}^{4} \Bigg[\mathbb{E}|R_i(t,x) - R_i(t,y)|_{t_0}^{*l}(t) +$$

$$+\mathbb{E}|Q_i(t,x) - Q_i(t,y)|_{t_0}^{*l}(t) + \mathbb{E}|S_i(t,x) - S_i(t,y)|_{t_0}^{*l}(t) \Bigg],$$

де c_1 — деяка додатна стала.
З роботи [93] відомо, що:

$$\mathbb{E}|R_1(\cdot,x) - R_1(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t) \le (t-t_0)^{l-1} L^l \mathbb{E} \int_{t_0}^{t} \|\delta^s\|^l ds;$$

$$\mathbb{E}|R_2(\cdot,x) - R_2(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t) \le$$

$$\le L^l (t-t_0)^{2l-1} \mathbb{E} \int_{t_0}^{t} \|\delta^v\|^l dv;$$

$$\mathbb{E}|R_3(\cdot,x) - R_3(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t) \le L^l (t-t_0)^{2l-2} \times$$

$$\times \mathbb{E} \left(\int_{t_0}^{t} \|\delta^v\|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}};$$

$$\mathbb{E}|Q_1(\cdot,x) - Q_1(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t) \le L^l \mathbb{E} \left(\int_{t_0}^{t} \|\delta^v\|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}};$$

$$\mathbb{E}|Q_2(\cdot,x) - Q_2(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t) \le L^l (t-t_0)^{2l-2} \mathbb{E} \left(\int_{t_0}^{t} \|\delta^v\|^2 dv \right)^{\frac{l}{2}};$$

$$\mathbb{E}|Q_3(\cdot,x)-Q_3(\cdot,y)|^{*l}_{t_0}(t)\le L^l(t-t_0)^{l-1}\mathbb{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|\delta^v\|^2dv\right)^{\frac{l}{2}}.$$

Використовуючи нерівності Гельдера і Буркгольдера (1.5), (1.6), а також лему 1.2.2 з роботи [45], можна стверджувати, що $\mathbb{E}|R_4(\cdot,x)-R_4(\cdot,y)|^{*l}_{t_0}(t)\le L^l(t-t^0)^{2l-2}\mathbb{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|\delta^v\|^2dv\right)^{\frac{l}{2}}$. Аналогічно можна одержати оцінки $\mathbb{E}|Q_4(\cdot,x)-Q_4(\cdot,y)|^{*l}_{t_0}(t)\le L^l(t-t_0)^{l-1}\mathbb{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|\delta^v\|^2dv\right)^{\frac{l}{2}}$. Випишемо тепер нерівності для доданків $S_i(t,x)$, $i=\overline{1,4}$ із співвідношення (1.7)

$$\mathbb{E}|S_1(\cdot,x)-S_1(\cdot,y)|^{*l}_{t_0}(t)\le L^l\mathbb{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|\delta^v\|^2dv\right)^{\frac{l}{2}};$$

$$\mathbb{E}|S_2(\cdot,x)-S_2(\cdot,y)|^{*l}_{t_0}(t)\le$$

$$\le L^l(t-t_0)^{2l-2}\mathbb{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|\delta^v\|^2dv\right)^{\frac{l}{2}};$$

$$\mathbb{E}|S_3(\cdot,x)-S_3(\cdot,y)|^{*l}_{t_0}(t)\le L^l(t-t_0)^{l-1}\times$$

$$\times\mathbb{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|\delta^v\|^2dv\right)^{\frac{l}{2}}.\quad \mathbb{E}|S_4(\cdot,x)-S_4(\cdot,y)|^{*l}_{t_0}(t)\le$$

$$\le L^l(t-t_0)^{l-1}\mathbb{E}\left(\int\limits_{t_0}^{t}\|\delta^v\|^2dv\right)^{\frac{l}{2}}.$$

Використовуючи наслідок 2В) з праці [1] та наслідок 5.2 з праці [45], доведену в праці [93, формула (2.7)] нерівність

$$\int_{t_0}^{t} \|\delta^v\|^l du \le \tilde{k}_{l/p} \Bigg[K_2(t-t_0)\|\delta^{t_0}\|_\rho^l +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} |\delta(u)|^l du + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{u} |\delta(v)|^p \rho(u-v) dv \right)^{\frac{l}{p}} du \Bigg]$$

і наслідок з неї:

$$\left(\int_{t_0}^{t} \|\delta^v\|^2 dv \right)^{l/2} \le \tilde{k}_{l/2} \tilde{k}_\tau^{l/2} \Bigg[\bar{\bar{K}}^{\lambda} (t-t_0)^{l/2} \|\delta^{t_0}\| +$$

$$+ \left(\int_{t_0}^{t} |\delta(v)|^2 dv \right)^{l/2} + \left(\int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{v} |\delta(s)|^2 \rho(v-s) ds \right)^{\tau} du \right)^{l/2} \Bigg],$$

де $\tilde{k}_{l/p}$, K_2 деякі додатні сталі, $\|\delta^u\|_\rho^p \equiv \int_0^\infty |\delta(u-v)|^p \rho(v) dv$, одержимо наступну оцінку

$$\mathbb{E}|R(\cdot,x) - R(\cdot,y)|_{t_0}^{*l}(t) \le K_1 \mathbb{E}\|\delta^{t_0}\|^l + \bar{M}_{t_0}^t \mathbb{E}|\delta(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t), \qquad (1.8)$$

де $\bar{M}_{t_0}^t = o(1)$ при $t - t_0 \to 0$. Лему доведено.

Теорема 1.1. *Нехай*

1) для коефіцієнтів стохастичного інтегро-диференціального рівняння (1.1), (1.2) виконується умова Ліпшіца зі сталою $L > 0$ для довільних $(t,s) \in \mathcal{G}$ та $x, y \in \mathbb{D}^p$, $u \in \mathbb{U}$;

2) для коефіцієнтів стохастичного інтегро-диференціального рівняння (1.1), (1.2) виконується умова *рівномірної обмеженості по* $t \in \mathbb{R}$ *з правою частиною вигляду* $L(1 + \|x\|_{\mathbb{D}^p})$*;*

3) існує початковий процес $x_- \in J^{t_0}$ *такий, що*

$$\mathbb{E}\|x_-^{t_0}\|_{\mathbb{D}^p}^l < \infty. \tag{1.9}$$

Тоді існує єдиний l*-ий момент* $(l > 1)$ *сильного розв'язку рівняння (1.1), (1.2)* $\{x(t)\} \subset \mathbb{D}^p$ *та* $\mathbb{E}\{|x(\cdot)|_{t_0}^{*l}(T)\} < \infty$.

Доведення. *Існування.* Побудуємо x_n:

$$x_n(t) = x_-(t) \quad \forall\, t \leq t_0 \quad \forall\, n \geq 1; \quad x_0(t) = x_-(t_0) \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Для $n \geq 1$, $\forall\ t > t_0$:

$$x_n(t) = x_-(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_1(s, x_{n-1}^s)ds + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} a_2(s, v, x_{n-1}^v)dvds+$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} a_3(s, v, x_{n-1}^v)dw(v)ds+$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{\mathbb{U}} a_4(s, v, x_{n-1}^v, u)\tilde{\nu}(du, dv)ds+$$

$$+ \int_{t_0}^{t} b_1(s, x_{n-1}^s)dw(s) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} b_2(s, v, x_{n-1}^v)dw(v)ds+$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} b_3(s, v, x_{n-1}^v)dw(v)dw(s)+$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\int_{\mathbb{U}} b_4(s, v, x_{n-1}^v, u)\tilde{\nu}(du, dv)dw(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{U}} c_1(s, x_{n-1}^v, u)\tilde{\nu}(du, ds)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{U}}\int_{t_0}^{s} c_2(s, v, x_{n-1}^v, u)dv\tilde{\nu}(du, ds)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{U}}\int_{t_0}^{s} c_3(s, v, x_{n-1}^v, u)dw(v)\tilde{\nu}(du, ds)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{\mathbb{U}}\int_{t_0}^{s}\int_{\mathbb{U}} c_4(s, v, x_{n-1}^v, u, u_1)\tilde{\nu}(dv, du_1)\tilde{\nu}(du, ds). \qquad (1.10)$$

Тут x_{n-1}^s задається, як у (1.4).

З (1.10), умов 1)—2) теореми і леми 5.2.1 з роботи [45] випливає, що $\{x_n(t), t \geq 0\}$ — вимірний відносно σ-алгебри F_t, $x_n^t \in \mathbb{D}^p$ $\forall\, t \geq t_0$.

Методом математичної індукції покажемо, що $\mathbb{E}\|x_n^{\cdot}\|_{t_0}^{*l}(t) < \infty \quad \forall\, t_0 \leq t \leq T$. При $n = 0$ маємо $x_0^{t_0} \in \mathbb{D}^p$ і з вище побудованого $\forall\, t \in [t_0, T]$: $\|x_0^t\| = \|T^{t-t_0}x_0^{t_0}\| \leq C \cdot \|x_0^{t_0}\| = C\|x_-^{t_0}\|$, де C — константа, яка залежить від $\bar{\bar{K}}$. Звідси $\mathbb{E}\|x_0^{\cdot}\|_{t_0}^{*l}(T) \leq C \cdot \mathbb{E}\|x_-^{t_0}\|_{\mathbb{D}^p}^{l} < \infty$. Нехай виконується $\mathbb{E}\|x_{n-1}^{\cdot}\|_{t_0}^{*l}(t) < \infty, \quad t_0 \leq t \leq T$. Використовуючи нерівність Гельдера, одержимо $\forall\, t \in [t_0, T]$: $\mathbb{E}\|x_n^{\cdot}\|_{t_0}^{*l}(t) \leq k_l\mathbb{E}[|x_-(t_0)|^l + L^l(k_l(T-t_0)^l + c_l(T-t_0)^{l/2})(1 + \|x_{n-1}\|_{t_0}^{*l}(T))] < \infty$, де k_l, c_l — деякі сталі.

Далі, одержимо: $\mathbb{E}|x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) = \mathbb{E}|R(\cdot, x_{n-1}) - R(\cdot, x_{n-2})|_{t_0}^{*l}(t) \leq \bar{M}_{t_0}^t\mathbb{E}|x_{n-1}(\cdot) - x_{n-2}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t)$. Можемо вибрати $t_1 > 0$ так, щоб $M_{t_0}^t < \dfrac{1}{2}$ для $t \in [t_0, t_1 + t_0]$. Якщо позначимо $d \equiv \mathbb{E}|x_1(\cdot) - x_0(\cdot)|_{t_0}^{*l}(T) < \infty$, то одержимо, що

$\mathbb{E}|x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l} \le \dfrac{d}{2^n}, \quad t \in [t_0, t_1 + t_0]$. Тоді, згідно з нерівністю Чебишова, одержимо:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{ |x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) > \frac{1}{n^2} \right\} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{2l} \mathbb{E}|x_n(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) \le d \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2l}}{2^n} < \infty,$$

звідки, за лемою Бореля-Кантеллі [28], випливає, що ряд $x_n(t) \equiv x_-(t_0) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} [x_k(t) - x_{k-1}(t)]$ майже скрізь монотонно збіжний на $[t_0, t_1]$. Тобто, $x(t) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(t)$ існує, неупереджуючий та $\mathcal{F}_t$-вимірний на $[t_0, t_1]$.

Залишилося показати, що $\{x(t), t \le t_1\}$ є розв'язком рівняння (1.1), (1.2). Використовуючи (1.8), проведемо наступні оцінки:

$$\mathbb{E}\left| x(\cdot) - x_-(t_0) - \int\limits_{t_0}^{\cdot} a_1(s, x^s) ds - \ldots - \int\limits_{t_0}^{\cdot} \int\limits_{\mathbb{U}} \int\limits_{t_0}^{s} \int\limits_{\mathbb{U}} c_4(s, v, x^v, u, u_1) \times \right.$$

$$\left. \times \tilde{\nu}(dv, du_1) \nu(du, ds) \right|_{t_0}^{*l}(t) \le k_l \mathbb{E}|x(\cdot) - x_n(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) +$$

$$+ k_l \bar{M}_{t_0}^t \mathbb{E}|x(\cdot) - x_{n-1}(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t).$$

Нагадаємо, що для $t \le t_1$ маємо $\bar{M}_{t_0}^t \le \frac{1}{2}$.

Якщо покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}|x(\cdot) - x_n(\cdot)|_{t_0}^{*l}(t) = 0$, то твердження буде доведено.

Нехай $b_i \equiv i^{-2/l'}$, $l' = l/(l-1)$. Тоді, згідно з нерівністю Гельдера $\mathbb{E}|x_n(\cdot) - x_{n+k}(\cdot)|^{*l}(t) \le \left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} \dfrac{d b_i^{-l}}{2^i} \right) \left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} b_i^{l'} \right)^{l-1}$ та

$|x(\cdot) - x_n(\cdot)|^{*l}(t) \leq \liminf\limits_{k} |x_n(\cdot) - x_{n+k}(\cdot)|^{*l}(t)$, за лемою Фату [6] матимемо $\mathbb{E}|x_n(\cdot) - x(\cdot)|^{*l}(t) \leq d\left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} \frac{b_i^{-l}}{2^i}\right)\left(\sum\limits_{i=n}^{\infty} b_i^{l'}\right)^{l-1} \underset{n\to\infty}{\to} 0.$
Отже, доведено існування l-го моменту $\mathcal{F}_t$-вимірного розв'язку $\{x(t)\}$ для $t_0 \leq t \leq t_0 + t_1$.

Цей розв'язок можна розширити для довільного $t \in [t_0, T]$, використовуючи методику, що описана в [93]. Єдиність розв'язку доводиться за допомогою стандартного відомого методу [93, 13]. Теорему доведено.

Ця теорема буде використана авторами при подальших дослідженнях системи (1.1), (1.2) на стійкість.

Розділ 2. Дослідження стійкості у середньому квадратичному розв'язків лінійних стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими операторами

Перші згадки про стохастичні диференціальні рівняння з випадковими операторами (СДРВО) знаходимо в роботах [48, 50, 62, 63, 90, 95, 96].

Для дослідження стійкості в середньому квадратичному тривіального розв'язку лінійних СДРВО застосовуються інтегральні рівняння для других моментів, які містять матричний розв'язок відповідного детермінованого диференціально-функціонального рівняння [54], [57], [70].

Така ж методика застосовується для дослідження стабілізації у середньому квадратичному задачі Коші для лінійних стохастичних рівнянь з частинними похідними (СРЧП) та постійними коефіцієнтами [42], крайової задачі для лінійних СРЧП та постійними коефіцієнтами, а також систем СРЧП зі змінними коефіцієнтами.

У цьому розділі представлено умови асимптотичної поведінки тривіального розв'язку систем СДРВО, що є узагальненням результатів [71].

§ 2.1. Існування та єдиність розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими операторами

Нехай задано імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ і потік σ-алгебр, $\{\mathcal{N}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{N}_t \in \mathcal{F}$, на якому розглядається система стохастичних диференціальних рівнянь

$$dx(t) = a(t, A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t))dt+$$
$$+b(t, A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t))dw_0(t)+$$
$$+\int_{\mathbb{U}} c(t, A_3(x_t), B_3(x_t), D_3(x_t), u)\tilde{\nu}_0(dt, du), \tag{1.1}$$

$$x_0(\theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-h, 0], \tag{1.2}$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $x_t := \{x(t+\theta), \theta \in [-h, 0]\}$, $\mathbb{D}_n([-h, 0])$ — простір Скорохода неперервних справа функцій $\{\psi(t)\} \subset \mathbb{R}^n$, які мають лівосторонні границі (НПЛГ) з нормою

$$\|\psi(\theta)\| := \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|;$$

$\{w_0(t)\}$ — n-вимірний вінерівський процес; $\tilde{\nu}_0(du, dt) := \nu_0(dt, du) - \Pi_0(du)dt$ — центрована пуассонівська міра [11].

Опишемо задання коефіцієнтів рівняння (1.1):

1. $A_i(\cdot), B_i(\cdot), D_i(\cdot), i = 1, 2, 3$ — оператори:

$$A_i(x_t) = \int_{-h}^{0} x(t+\theta)d\beta_i(\theta); \quad B_i(x_t) := \int_{-h}^{0} f_i(\theta)x(t+\theta)dw_i(\theta);$$

$$D_i(x_t) := \int_{-h}^{0}\int_{\mathbb{U}} \gamma_i(\theta, u)x(t+\theta)\tilde{\nu}_i(d\theta, du); \tag{1.3}$$

де $\{\beta_i(t)\}$, $\{f_i(\theta)\}$ — функції обмеженої варіації; $\gamma_i\left(t,u\right) \in \mathbb{R}$ — вимірні стосовно $\mathcal{N}_{\mathbb{R}_+} \cup \mathcal{U}$, локально обмежені по t та $\int\limits_{\mathbb{U}} |\gamma_i(t,u)|^2 \Pi_i(du) < \infty$.

2. $\{w_i(t), t \in \mathbb{R}_+, i = 1,2,3\}$ — одновимірні вінерівські процеси; $\{\tilde{\nu}_i(dt,du), t \geq 0, u \in \mathbb{U}, i = 1,2,3\}$ — центровані пуассонівські міри та початковий випадковий процес $\{\phi(t), t \in \mathbb{R}_+\} \subset \mathbb{D}_n([-h,0])$ не залежні між собою.

3. Функція $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вимірна за сукупністю змінних та локально обмежена. У цих припущеннях інтеграл

$$\int\limits_0^t a\left(s, A_1\left(x_s\right), B_1\left(x_s\right), D_1\left(x_s\right)\right) ds,$$

визначений для будь-якого локально-обмеженого вимірного процесу $\{x(t), t \in \mathbb{R}_+\}$.

4. Функція $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to M^n(\mathbb{R}^n)$ вимірна і локально обмежена. Стохастичні інтеграли

$$\int\limits_{-h}^0 f_i\left(s\right) x\left(t+s\right) dw_i\left(s\right), i = 1,2,3;$$

$$\int\limits_0^t b\left(s, A_2\left(x_s\right), B_2\left(x_s\right), D_2\left(x_s\right)\right) dw_0\left(s\right)$$

існують для будь-якого локально обмеженого процесу, узгодженого і прогресивно вимірного стосовно потоку σ-алгебр $\left\{\mathcal{N}^t\right\}$, якщо вінерівські процеси $\{w_i(t), t \in \mathbb{R}_+, i = 1,2,3\}$, також узгоджені з цим потоком.

5. Задане деяке вимірне $(\mathbb{U}, \mathcal{U})$ і функція $c : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to\to \mathbb{R}^n$ — вимірна стосовно $\mathcal{N}_{\mathbb{R}_+} \vee \mathcal{N}_{\mathbb{R}_+} \vee \mathcal{N}_{\mathbb{R}_+} \vee \mathcal{N}_{\mathbb{R}_+} \vee \mathbb{U}$.

Стохастичні інтеграли

$$\int_{-h}^{0}\int_{\mathbb{U}} \gamma_i\left(s,u\right)x\left(t+s\right)\tilde{\nu}_i\left(ds,du\right),\quad i=1,2,3;$$

$$\int_{0}^{t}\int_{\mathbb{U}} c\left(s,A_3\left(x_s\right),B_3\left(x_s\right),D_3\left(x_s\right),u\right)\tilde{\nu}_0\left(ds,du\right)$$

визначені для будь-якого локально обмеженого процесу $\{x(t),t\in\mathbb{R}_+\}$, якщо він узгоджений та прогресивно вимірний стосовно деякого потоку $\left\{\mathcal{N}^t\right\}$, з яким узгоджені міри $\{\tilde{\nu}_i(dt,du),t\in\mathbb{R}_+,u\in\mathbb{U}\}$. Отже, задано функції a,b,c і на одному й тому ж імовірнісному просторі задані $w_i,\tilde{\nu}_i$, $i=1,2,3$. Для того, щоб мати стохастичні диференціали та інтеграли, необхідно мати на цьому імовірнісному просторі потік σ-алгебр $\left\{\mathcal{N}^t\right\}$, з яким узгоджені вінерівські процеси та випадкові міри.

Під сильним розв'язком рівняння розуміємо прогресивно вимірні й $\left\{\mathcal{N}^t\right\}$-узгоджені процеси такі, що з імовірністю одиниця виконується рівність

$$\begin{aligned} x\left(t\right)=x\left(0\right)&+\int_0^t a\left(s,A_1\left(x_s\right),B_1\left(x_s\right),D_1\left(x_s\right)\right)ds+\\ &+\int_0^t b\left(s,A_2\left(x_s\right),B_2\left(x_s\right),D_2\left(x_s\right)\right)dw_0\left(s\right)+\\ &+\int_0^t\int_{\mathbb{U}} c\left(s,A_3\left(x_s\right),B_3\left(x_s\right),D_3\left(x_s\right),u\right)\tilde{\nu}_0\left(ds,du\right). \end{aligned}\tag{1.4}$$

Лема 2.2.1. *Якщо $\{\varphi(t)\}$ — вимірна, невід'ємна, обмежена функція, $\varphi(t)\equiv 0$ при $t\le 0$, та за умови $t>0$ задовольняє* *нерівність:*

$$\phi\left(t\right)\leq L\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0}\phi\left(t+s\right)d\beta\left(s\right)d\tau,\tag{1.5}$$

то $\varphi(t)\equiv 0$ *для* $\forall t>0$.

Доведення. Ітеруючи один раз нерівність (1.5) і враховуючи умови леми 2.1.1, отримаємо:

$$\phi\left(t\right)\leq L\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{-h}^{0}\phi\left(\tau_1+s_1\right)d\beta\left(s_1\right)d\tau_1 d\beta\left(s\right)d\tau\leq$$

$$\leq L^2Vm\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\tau}d\tau_1d\beta(s)d\tau\leq L^2Vm\int\limits_{0}^{t}\tau d\beta(s)d\tau\leq\frac{L^2V^2t^2m}{2!},$$

де $\left|\phi\left(t\right)\right|\leq m$; $\int\limits_{-h}^{0}d\beta\left(s\right)\leq m$; $\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-h}^{0}\tau d\beta\left(s\right)d\tau\leq\frac{Vt^2}{2}$.

Повторюючи ns раз ітерації, отримаємо:

$$\phi\left(t\right)\leq\frac{\left(LVt\right)^n m^{n-1}}{n!},$$

що й доводить лему.

Теорема 2.1.1. *Нехай коефіцієнти рівняння (1.1) задовольняють умови:*

1) $a(s,0,0,0)$, $b(s,0,0,0)$, $\int\limits_{\mathbb{U}}\left|c\left(s,0,0,0,u\right)\right|^2\Pi\left(du\right)$ *локально обмежені за* s*;*

2) існує зростаюча функція $l(s)$ *така, що:*

$$\left|a\left(s,x_1,y_1,z_1\right)-a\left(s,x_2,y_2,z_2\right)\right|^2+$$

$$+\left|b\left(s,x_1,y_1,z_1\right)-b\left(s,x_2,y_2,z_2\right)\right|^2+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{U}} \left|c\left(s, x_1, y_1, z_1, u\right) - c\left(s, x_2, y_2, z_2, u\right)\right|^2 \Pi\left(du\right) \le$$

$$\le l\left(s\right)\left(\left|x_1 - x_2\right|^2 + + \left|y_1 - y_2\right|^2 + \left|z_1 - z_2\right|^2\right).$$

Позначимо через $\mathcal{N}^t$ σ-алгебру, породжену величинами $x(0)$, $\tilde{\nu}\left(ds, du\right)$, $w(s)$ за умови $s \le t$. Якщо $x(0)$ не залежить від сукупності величин $\{w_0(s), \tilde{\nu}_0(ds, du)\}$ та $\mathbb{E}\{|x(0)|^2\} < \infty$, то рівняння (1.1) має $\mathcal{N}^t$-вимірний розв'язок, при цьому $\mathbb{E}\{|x(s)|^2\} < \infty$ і $x\left(t\right) \in \mathbb{D}_n\left([-h, 0]\right)$.

Доведення теореми 1.1 повторює ідеї доведення теореми 3 [12].

Доведення. Скористаємося методом послідовних наближень. Нехай $x_0\left(t\right) = x\left(0\right) = \phi\left(0\right)$,

$$x_{n+1}\left(t\right) = \phi\left(0\right) + \int\limits_0^t a\left(s, A_1\left(x_{ns}\right), B_1\left(x_{ns}\right), D_1\left(x_{ns}\right)\right) ds +$$

$$+\int\limits_0^t b\left(s, A_2\left(x_{ns}\right), B_2\left(x_{ns}\right), D_2\left(x_{ns}\right)\right) dw_0\left(s\right) +$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} c\left(s, A_3\left(x_{ns}\right), B_3\left(x_{ns}\right), D_3\left(x_{ns}\right), u\right) \tilde{\nu}_0\left(ds, du\right). \qquad (1.6)$$

Якщо $x_n\left(t\right)$ визначений та $\mathcal{N}^t$-вимірний і $\mathbb{E}\{|x(s)|^2\}$ — локально обмежене, то інтеграли у правій частині (1.6) визначені і теж $\mathcal{N}^t$-вимірні. Покажемо, що $\mathbb{E}\{|x_{n+1}(s)|^2\}$ локально обмежене. Спочатку проведемо наступні оцінки:

$$\left|x_{n+1}\left(t\right) - x\left(0\right)\right| \le 3\left|\int\limits_0^t a\left(s, A_1\left(x_{ns}\right), B_1\left(x_{ns}\right), D_1\left(x_{ns}\right)\right) ds\right|^2 +$$

$$+3\left|\int_0^t b(s, A_2(x_{ns}), B_2(x_{ns}), D_2(x_{ns}))dw_0(s)\right|^2+$$

$$+3\left|\int_0^t\int_b Uc(s, A_3(x_{ns}), B_3(x_{ns}), D_3(x_{ns}), u)\tilde{\nu}_0(ds, du)\right|^2.$$

З урахуванням нерівності Коші - Буняковського запишемо:

$$\mathbb{E}\left|\int_0^t a(s, A_1(x_{ns}), B_1(x_{ns}), D_1(x_{ns}))\right|^2\leq$$

$$\leq t\int_0^t \mathbb{E}|a(s, A_1(x_{ns}), B_1(x_{ns}), D_1(x_{ns}))|^2 ds\leq$$

$$\leq 2t\int_0^t |a(s,0,0,0)|^2 ds+$$

$$+2t\int_0^t \mathbb{E}|a(s, A_1(x_{ns}), B_1(x_{ns}), D_1(x_{ns}))-a(s,0,0,0)|^2 ds\leq$$

$$\leq 2t\int_0^t |a(s,0,0,0)|^2 ds+$$

$$+2tl(t)\int_0^t (\mathbb{E}|A_1(x_{ns})|^2+\mathbb{E}|B_1(x_{ns})|^2+E|D_1(x_{ns})|^2)ds;$$

$$\mathbb{E}(|A_1(x_{ns})|^2)=\mathbb{E}\left(\int_{-h}^0 |x_n(t+s)|d\beta_1(t)\right)^2\leq$$

$$\leq \bigvee_{-h}^{0} \beta_1(t) \int\limits_{-h}^{0} \mathbb{E}|x_n(t+s)|^2,$$

де $\bigvee\limits_{-h}^{0} \beta_1(t)$ — повна варіація функції $\beta_1(t)$.

$$\mathbb{E}(|B_1(x_{ns})|^2) = F_1^2 \left(\int\limits_{-h}^{0} \mathbb{E}|x_n(s+t)|dt \right)^2,$$

де $F_1 = \text{const}$, що обмежує $f_1(t)$;

$$\mathbb{E}(|D_1(x_{ns})|^2) = CG_1^2 \left(\int\limits_{-h}^{0} \mathbb{E}|x_n(s+t)|dt \right)^2,$$

де $G_1 = \text{const}$, що обмежує $\gamma_1(t)$, $\int\limits_{\mathbb{U}} \frac{du}{|u|^{n+1}} \leq C$.

$$\mathbb{E}\left| \int\limits_0^t b(s, A_2(x_{ns}), B_2(x_{ns}), D_2(x_{ns}))dw_0(s) \right|^2 =$$

$$= \int\limits_0^t \mathbb{E}|b(s, A_2(x_{ns}), B_2(x_{ns})D_2(x_{ns}))|^2 ds \leq 2 \int\limits_0^t |b(s,0,0,0)|^2 ds +$$

$$+2 \int\limits_0^t E\left| b(s, A_2(x_{ns}), B_2(x_{ns}), D_2(x_{ns})) - b(s,0,0,0) \right|^2 ds \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_0^t |b(s,0,0,0)|^2 ds +$$

$$+2l(t)\int\limits_0^t(\mathbb{E}|A_2(x_{ns})|^2+\mathbb{E}|B_2(x_{ns})|^2+\mathbb{E}|D_2(x_{ns})|^2)ds,$$

$$\mathbb{E}\left|\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}}c(s,A_3(x_{ns}),B_3(x_{ns}),D_3(x_{ns}),u)\tilde{\nu}_0(ds,du)\right|^2=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}}\mathbb{E}\left|c(s,A_3(x_{ns}),B_3(x_{ns}),D_3(x_{ns}),u)\right|^2\Pi(du)ds\le$$

$$\le 2\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}}|c(s,0,0,0,u)|^2\Pi(du)ds+$$

$$+2l(t)\int\limits_0^t(\mathbb{E}|A_3(x_{ns})|^2+\mathbb{E}|B_3(x_{ns})|^2+\mathbb{E}|D_3(x_{ns})|^2)ds.$$

З цих оцінок випливає, що існує зростаюча функція $c(t)$, для якої

$$\mathbb{E}|x_{n+1}(t)|^2\le c(t)\int\limits_0^t\left(\int\limits_{-h}^0\mathbb{E}|x_n(s)|^2d\tau+|a(s,0,0,0)|^2+\right.$$

$$\left.+|b(s,0,0,0)|^2+\int\limits_{\mathbb{U}}|c(s,0,0,0,u)|\Pi(du)\right)ds.$$

Оскільки $\{x_0\,(t)\}\in\mathcal{N}^t$-вимірний та $\mathbb{E}|x_0(t)|^2=\mathbb{E}|x(0)|^2$, то для всіх n процеси $x_n\,(t)$ визначені, $\mathcal{N}^t$-вимірні та $\mathbb{E}|x_n(t)|^2$ локально обмежені.

Далі очевидний ланцюг нерівностей:

$$\mathbb{E}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2\le 3\mathbb{E}\left|\int\limits_0^t(a(s,A_1(x_{ns}),B_1(x_{ns}),D_1(x_{ns}))-\right.$$

$$-a(s,A_1\left(x_{n-1_s}\right),B_1\left(x_{n-1_s}\right),D_1\left(x_{n-1_s}\right))\,ds\Bigg|^2+$$

$$+3\mathbb{E}\Bigg|\int\limits_0^t(b(s,A_2(x_{ns}),B_2(x_{ns}),D_2\left(x_{ns}\right))-$$

$$-b\left(s,A_2\left(x_{n-1_s}\right),B_2\left(x_{n-1_s}\right),D_2\left(x_{n-1_s}\right)\right)dw_0\left(s\right)\Bigg|^2+$$

$$+3E\Bigg|\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}}(c(s,A_3(x_{ns}),B_3(x_{ns}),D_3(x_{ns}),u)-$$

$$-c(s,A_3x_{n-1,s}),B_3(x_{n-1,s}),D_3(x_{n-1,s}),u))\tilde{\nu}_0(ds,du)\Bigg|^2.$$

Використовуючи умову 2) можна показати, що $\forall\, T>0\,\exists\, k_T=\text{const}$, що при $t\le T$, $n\ge 1$:

$$\mathbb{E}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2\le k_T\int\limits_0^T\int\limits_{-h}^0\mathbb{E}|x_n(s+\tau)-x_{n-1}(s+\tau)|^2d\tau ds,$$

$$\mathbb{E}|x_1(t)-x(0)|^2\le k_T\int\limits_0^T\int\limits_{-h}^0\mathbb{E}|x_0(s+\tau)|^2d\tau ds=k_Tt\int\limits_{-h}^0\mathbb{E}|x(0)|^2d\tau.$$

Тому

$$\mathbb{E}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|^2\le k_T^{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\int\limits_{-h}^0\mathbb{E}|x(0)|^2d\tau.$$

Оскільки для $\forall\, T > 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \le T} (\mathbb{E}|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2)^{1/2} < \infty,$$

то $x_n(t)$ збігається у середньому квадратичному до деякого процесу $\bar{x}(t)$, причому

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\le T} M|x_n(t) - \bar{x}(t)|^2 = 0 \quad \forall\, T > 0. \tag{1.7}$$

Процес $\{\bar{x}(t)\}$ є $\mathcal{N}^t$-вимірний. Покажемо, що для кожного t з імовірністю 1 виконується (1.1). Для цього достатньо довести, що інтеграли у правій частині (1.6) за умови $n \to \infty$ наближаються в середньому квадратичному до відповідних інтегралів у правій частині (1.1). Наприклад, для інтеграла за випадковою мірою $\tilde{\nu}_0$ маємо:

$$\mathbb{E}\Bigg|\int_0^t \int_{\mathbb{U}} c(s, A_3(x_{ns}), B_3(x_{ns}), D_3(x_{ns}), u) -$$

$$- c(s, A_3(\bar{x}_{ns}), B_3(\bar{x}_{ns}), D_3(\bar{x}_{ns}), u)\tilde{\nu}_0(ds, du)\Bigg|^2 =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{U}} \mathbb{E}|c(s, A_3(\bar{x}_s), B_3(\bar{x}_s), D_3(\bar{x}_s), u) -$$

$$- c(s, A_3(x_{ns}), B_3(\bar{x}_{ns}), D_3(\bar{x}_{ns}), u)|^2 \Pi(du) ds \le$$

$$\le l(t) \int_0^t \int_{-h}^0 \mathbb{E}|\bar{x}(s+\tau) - x_n(s+\tau)|^2 d\tau ds.$$

Вираз у правій частині наближається до нуля завдяки (1.7). Для решти інтегралів доведення можна провести аналогічно. Теорема 2.1.1. доведена.

Теорема 2.1.2. *Нехай для коефіцієнтів рівняння 2.1.1 виконується умова "лінійної обмеженості тобто за деякого* $l > 0$*:*

$$|a(t,x,y,z)|^2 + |b(t,x,y,z)|^2 + \int_{\mathbb{U}} |c(t,x,y,z)|^2 \Pi(du) \le$$

$$\le l\left(1 + |x|^2 + |y|^2 + |z|^2\right) \tag{1.8}$$

і для $\forall\, r > 0$ *можна вказати таку сталу* l_r*, що*

$$|a(t,x_1,y_1,z_1) - a(t,x_2,y_2,z_2)|^2 + |b(t,x_1,y_1,z_1) -$$

$$-b(t,x_2,y_2,z_2)|^2 + \int_{\mathbb{U}} |c(t,x_1,y_1,z_1) - c(t,x_2,y_2,z_2)|^2 \Pi(du) \le$$

$$\le l_r\left(|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 + |z_1 - z_2|^2\right) \tag{1.9}$$

за $s \le t$, $|x_i| \le r$, $|y_i| \le r$, $|z_i| \le r$, $i = 1, 2$. *Якщо* $x(0)$ *не залежить від сукупності величин* $\{w_0(s), \tilde{\nu}_0(ds,du)\}$*, то розв'язок (1.1)—(1.2) єдиний та* $\mathcal{N}^t$*-вимірний.*

Доведення. Нехай маємо два розв'язки

$$x_i(t) = x(0) + \int_0^t a(s, A_1(x_{is}), B_1(x_{is}), D_1(x_{is}))\, ds +$$

$$+ \int_0^t b(s, A_2(x_{is}), B_2(x_{is}), D_2(x_{is}))\, dw_0(s) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} c(s, A_3(x_{is}), B_3(x_{is}), D_3(x_{is}), u)\, \tilde{\nu}_0(ds,du),$$

$i = 1, 2$. Тоді

$$\mathbb{E}|x_1(t) - x_2(t)|^2 \leq \mathbb{E}[\int\limits_0^t (a(s, A_1(x_{1s}), B_1(x_{1s}), D_1(x_{1s}))-,$$

$$-a(sA_1\left(x_{2s}\right), B_1\left(x_{2s}\right), D_1\left(x_{2s}\right))\, ds+$$

$$+\int\limits_0^t \left(b\left(s, A_2\left(x_{1s}\right), B_2\left(x_{1s}\right), D_2\left(x_{1s}\right)\right)-\right.$$

$$-b\left(s, A_2\left(x_{2s}\right), B_2\left(x_{2s}\right), D_2\left(x_{2s}\right)\right)) \, dw_0\left(s\right) + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} (c\left(s, A_3\left(x_{1s}\right),\right.$$

$$B_3\left(x_{1s}\right), D_3\left(x_{1s}\right), u) - c\left(s, A_3\left(x_{2s}\right), B_3\left(x_{2s}\right), D_3\left(x_{2s}\right), u\right)) \times$$

$$\times\tilde{\nu}_0(ds, du)]^2 \leq 3\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t (a(s, A_1(x_{1s}), B_1(x_{1s}), D_1(x_{1s}))-\right.$$

$$\left.-a(s, A_1(x_{2s}), B_1(x_{2s}), D_1(x_{2s})))ds\right]^2+$$

$$+3\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t (b(s, A_2(x_{1s}), B_2(x_{1s}), D_2(x_{1s}))-\right.$$

$$\left.-b(s, A_2(x_{2s}), B_2(x_{2s}), D_2(x_{2s})))dw_0(s)\right]^2+$$

$$+3\mathbb{E}[\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} (c(s, A_3(x_{1s}), B_3(x_{1s}), D_3(x_{1s}), u)-$$

$$-c(s, A_3(x_{2s}), B_3(x_{2s}), D_3(x_{2s}), u))\tilde{\nu}_0(ds, du)]^2.$$

Оцінимо тепер кожен з трьох доданків:

$$\mathbb{E}\left[\int\limits_0^t (a(s, A_1(x_{1s}), B_1(x_{1s}), D_1(x_{1s}))-\right.$$

$$\left.-a(s, A_1(x_{2s}), B_1(x_{2s}), D_1(x_{2s})))ds\right]^2 \leq$$

$$\leq t\mathbb{E}\int\limits_0^t (a(s, A_1(x_{1s}), B_1(x_{1s}), D_1(x_{1s}))-$$

$$-a(s, A_1(x_{2s}), B_1(x_{2s}), D_1(x_{2s})))^2 ds \leq$$

$$\leq T\mathbb{E}\int\limits_0^t l_r(|A_1(x_{1s}) - A_1(x_{2s})|^2+$$

$$+|B_1(x_{1s}) - B_1(x_{2s})|^2 + |D_1(x_{1s}) - D_1(x_{2s})|^2)ds \leq$$

$$\leq T\mathbb{E}\int\limits_0^t l_r[(|A_1(|x_{1s} - x_{2s}|))^2+$$

$$+(B_1(|x_{1s} - x_{2s}|))^2 + (D_1(|x_{1s} - x_{2s}|))^2]ds =$$

$$= Tl_r\int\limits_0^t [\mathbb{E}(|A_1(|x_{1s} - x_{2s}|))^2+$$

$$+\mathbb{E}(B_1(|x_{1s} - x_{2s}|))^2 + \mathbb{E}(D_1(|x_{1s} - x_{2s}|))^2]ds.$$

Використовуючи властивості інтегралів за вінерівським процесом та пуассонівською випадковою мірою, одержимо:

$$\mathbb{E}(|A_1(|x_{1s} - x_{2s}|))^2 = \mathbb{E}\left[\int\limits_{-h}^0 |x_1(s+\tau) - x_2(s+\tau)|d\beta_1(\tau)\right]^2 \leq$$

$$\le \bigvee_{-h}^{0} \beta_1(t) \int_{-h}^{0} \mathbb{E}|x_1(s+\tau) - x_2(s+\tau)|^2 d\tau,$$

де $\overset{0}{\underset{-h}{\vee}} \beta_1(t)$ — повна варіація функції $\beta_1(t)$;

$$\mathbb{E}(|B_1(|x_{1s} - x_{2s}|))^2 = F_1^2 \left(\int_{-h}^{0} \mathbb{E}|x_1(s+\tau) - x_2(s+\tau)|d\tau \right)^2,$$

де $F_1 = \mathrm{const}$, що обмежує $f_1(t)$;

$$\mathbb{E}(|D_1(|x_{1s} - x_{2s}|))^2 = CG_1^2 \left(\int_{-h}^{0} \mathbb{E}|x_1(s+\tau) - x_2(s+\tau)|d\tau \right)^2,$$

де $G_1 = \mathrm{const}$, що обмежує $\gamma_1(t)$ та $\int\limits_{\mathbb{U}} \frac{du}{|u|^2} \le C$.

Якщо так само оцінити інші два доданки, то отримаємо нерівність

$$\mathbb{E}[x_1(t) - x_2(t)]^2 \le L \int_0^t \int_{-h}^{0} \mathbb{E}|x_1(s+\tau) - x_2(s+\tau)|^2 d\beta(\tau) ds,$$

де $L = 3l_r(T + 1 + C)$;

$$\beta(\tau) = \Bigg[\overset{0}{\underset{-h}{\vee}} \beta_1(\tau) + \overset{0}{\underset{-h}{\vee}} \beta_2(\tau) + \overset{0}{\underset{-h}{\vee}} \beta_3(\tau) +$$

$$+ \max\left\{F_1^2, F_2^2, F_3^2\right\} + C \max\left\{G_1^2, G_2^2, G_3^2\right\} \Bigg] \tau.$$

За лемою 2.1.1. отримуємо $\mathbb{E}[x_1(t) - x_2(t)]^2 = 0$. А це означає, що для будь-якого $t \in [0, T]$ два розв'язки збігаються з імовірністю одиниця, тобто $\mathbb{P}\{\omega : x_1(t) = x_2(t)\} = 1$. Теорема 2.1.2. доведена.

§ 2.2. Формула Коші при стохастичних збуреннях

Позначимо $\mathbb{H}_1(a,b)$ простір $\mathcal{N}^t$-вимірних випадкових процесів $\xi(t) \in \mathbb{R}^n$ з нормою

$$\|\xi\|_{(a,b)} = \left(\int\limits_a^b \mathbb{E}\{|\xi(t)|^2\} dt \right)^{1/2}.$$

Якщо $(a,b) = (0,\infty)$, то замість $\mathbb{H}_1(a,b)$ будемо писати $\mathbb{H}_1$ та позначати норму $\|\cdot\|_0$.

Лема 2.2.1. *Якщо функції* $\{h(t,s), t \geq s \geq 0\}$ *та* $\{p(t,s), t \geq s \geq 0\}$ *неперервні разом з своїми частинними похідними* $\{h'_t(t,s), t \geq s \geq 0\}$ *та* $\{p'_t(t,s), t \geq s \geq 0\}$, *процес* $\{f(t), t \in [0,T]\}$ *є елементом* $\mathbb{H}_1(0,T)$, *при будь-яких* $T > 0$, $\{\gamma(t,u), t \in [0,T]\}$ *є* $\mathcal{N}^t$*-узгодженим та при будь-яких* $T > 0$ *існує*

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{U}} \mathbb{E}|\gamma(s,u)|^2 \Pi(du) < \infty, \quad (\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n) \tag{2.1}$$

то випадкові процеси

$$z(t) = \int\limits_0^t h(t,s) f(s) dw(s) \tag{2.2}$$

$$u(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} p(t,s) \gamma(s,u) \tilde{\nu}(ds,du) \tag{2.3}$$

мають стохастичні диференціали

$$dz(t) = \left(\int\limits_0^t h'_t(t,s) f(s) dw(s) \right) dt + h(t,t) f(t) dw(t) \tag{2.4}$$

$$du\left(t\right)=\left(\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\mathbb{U}}p_{t}'\left(t,s\right)\gamma\left(s,u\right)\tilde{\nu}\left(ds,du\right)\right)dt+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{U}}p\left(t,t\right)\gamma\left(t,u\right)\tilde{\nu}\left(dt,du\right) \qquad (2.5)$$

Доведення наведемо лише для формули (2.4). Нехай $t''>t'\geq 0$, $\Delta=\frac{t''-t'}{m}$, $t_k=t'+k\Delta$, $k=0,1,..m$, $m\in\mathbb{N}$. Тоді можна записати

$$z\left(t''\right)-z\left(t'\right)=\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{t'}^{t''}h\left(\tau,\tau\right)f\left(\tau\right)dw\left(\tau\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left[h\left(t_{k+1},\tau\right)-h\left(\tau,\tau\right)\right]f\left(\tau\right)d\omega\left(\tau\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{0}^{t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}h_t'(t,\tau)dtf(\tau)dw(\tau)=$$

$$=\int\limits_{t'}^{t''}h'(t,t)f(t)dw(t)+\int\limits_{t'}^{t''}\int\limits_{0}^{t}h_t'(t,\tau)f(\tau)dw(\tau)dt=A_m+B_m,$$

де

$$A_m=\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left[h\left(t_{k+1},\tau\right)-h\left(\tau,\tau\right)\right]f\left(\tau\right)dw\left(\tau\right),$$

$$B_m=-\sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\int\limits_{t_k}^{t}h_t'\left(t,\tau\right)f\left(\tau\right)dw\left(\tau\right)dt.$$

Нехай $C = \sup\limits_{t' \le \tau \le t \le t''} \left| H_t'(t,\tau) \right|^2$. Тоді

$$\mathbb{E}\{|A_m|^2\} \le m \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} [h(t_{k+1},\tau) - h(\tau,\tau)]^2 \mathbb{E}\{|f(\tau)|^2\} d\tau \le$$

$$\le m \sum_{k=0}^{m-1} C^2 \Delta^2 \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}\{|f(\tau)|^2\} d\tau \le \frac{C^2 (t'' - t')^2}{m} \|f\|_{l[t',t'']},$$

$$\mathbb{E}\{|B_m|^2\} \le m \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \int\limits_{\tau}^{t_{k+1}} h_t'(t,\tau) \right|^2 \mathbb{E}\{|f(\tau)|^2\} d\tau \le$$

$$\le m \sum_{k=0}^{m-1} \Delta^2 C^2 \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}\{|f(\tau)|^2\} d\tau \le \frac{C^2 (t'' - t')^2}{m} \|f\|_{l[t',t'']}.$$

Отже, $\lim\limits_{m\to\infty} A_m = \lim\limits_{m\to\infty} B_m = 0$.

Лема 2.2.1 доведена. ■

Тепер можна встановити справедливість одного з варіантів формули Коші для аналізу рівнянь вигляду

$$dx(t) = a(t, x_t)\, dt + \alpha(t)\, dt + \beta(t)\, dw(t) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{U}} \gamma(t,u)\, \tilde{\nu}(dt, du). \tag{2.6}$$

Наслідок 2.2.1. *Якщо $a(\cdot,\cdot)$ — лінійне неперервне за сукупністю змінних відображення $[t_0,T] \times C_n$ в $\mathbb{R}^n$, $\{\alpha(t)\} \in \mathbb{H}_1(t_0,T)$, $\{\alpha(t)\} \in \mathbb{H}_1(t_0,T)$, $\{\gamma(t,u)\}$ — $\mathcal{N}^t$-узгоджений та задовольняє співвідношення (2.1), тоді розв'язок початкової задачі*

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-h, 0] \tag{2.7}$$

для (2.6) на відрізку $[t_0, T]$ *може бути зображений у вигляді*

$$x(t) = y(t) + \int\limits_{t_0}^{t} h(t,\tau)\,\alpha(t)\,dt +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} h(t,\tau)\,\beta(t)\,dw(t) + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^m} h(t,\tau)\,\gamma(\tau,u)\tilde{\nu}(d\tau,du)\,, \qquad (2.8)$$

де $y(t)$ *— розв'язок початкової задачі (2.7) для однорідного рівняння*

$$\frac{dy}{dt} = a(t, y_t)\,, \qquad (2.9)$$

а $h(t,\tau)$ *— матриця Коші для (2.9), тобто матричний розв'язок (2.9), що задовольняє при всіх* $\tau \in [t_0, T]$ *умову*

$$h(\tau+\theta,\tau) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-h, 0), \\ I, & \theta = 0. \end{cases}$$

Доведення випливає з можливості диференціювання $\{h(t,\tau)\,,\ t \geq \tau \geq t_0\}$ по t та застосування леми 2.2.1. ■

Формулу (2.8) можно застосовувати для аналізу рівнянь вигляду

$$dx(t) = a(t, x_t)\,dt + \hat{\alpha}(t)\,dt + \hat{\beta}(t)\,dw(t) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{U}} \hat{\gamma}(t,u)\,\tilde{\nu}(dt,du), \qquad (2.10)$$

де $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ та $\hat{\gamma}$ — деякі відображення, що задовольняють умови теореми існування розв'язку [54], [56], а також забезпечують належність $\alpha(t) \stackrel{\Delta}{=} \hat{\alpha}(t, x_t)$ та $\beta(t) \stackrel{\Delta}{=} \hat{\beta}(t, x_t)$ простору $\mathbb{H}_1(0,T)$ та виконання нерівності (2.1) для $\gamma(t,u) \stackrel{\Delta}{=} \hat{\gamma}(t, x_t, u)$.

Для розв'язку (2.10), що проходить через (t_0, ϕ) можна записати:

$$x(t, t_0, \phi) = y(t, t_0, \phi) + \int\limits_{t_0}^{t} h(t, \tau)\, \hat{\alpha}(\tau, x_\tau)\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} h(t, \tau)\, \hat{\beta}(\tau, x_\tau)\, dw(\tau) +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{\mathbb{R}^m} h(t, \tau)\, \hat{\gamma}(\tau, x_\tau, u)\, \tilde{\nu}(d\tau, du). \qquad (2.11)$$

У наступних параграфах застосовуються інтегральні представлення (2.8) та (2.11) для дослідження стійкості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими операторами та дослідження стабілізації в середньому квадратичному розв'язків стохастичних рівнянь в частинних похідних.

§ 2.3. Асимптотична стійкість в середньому квадратичному розв'язків лінійних стохастичних систем з випадковими операторами

Розглянемо стаціонарну задачу

$$dx(t) = a(x_t) + b(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t))dw_0(t) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{U}} c(A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t))dt\tilde{\nu}_0(dt, du) \qquad (3.1)$$

$$x_0(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in [-r, 0], \qquad (3.2)$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$; $x_t := x(t+\theta), \theta \in [-r,0]$, $\varphi(\theta)$ — невипадкова функція; $a : \mathbb{D}_0([-r,0])$ — лінійний оператор; $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $c : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ — лінійні функції, аргументи яких є лінійними операторами (2.3). Нехай виконуються умови теореми 2.1.1, тоді існує єдиний сильний розв'язок задачі (3.1), (3.2) з точністю до стохастичної еквівалентності.

Позначимо через $H(t,\tau)$ матрицю Коші, тобто, при $t > \tau$ матриця $H(t,\tau)$ є розв'язком детермінованого диференціально-функціонального рівняння:

$$dy\left(t\right) = a\left(x_t\right)dt \tag{3.3}$$

за умови

$$H(t,\tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ I, & t = \tau \end{cases}$$

де I — одинична матриця.

У стаціонарному випадку матриця Коші може бути записана у вигляді [6]

$$H\left(t,\tau\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\lambda(t-\tau)}\Lambda^{-1}\left(\lambda\right)d\lambda, \tag{3.4}$$

де $\Lambda\left(\lambda\right) = \lambda\mathrm{I} - a\left(e^{\lambda\theta}\right)$, а Γ — контур, що охоплює всі корені квазіполінома $\det\Lambda\left(\lambda\right) = 0$.

Тоді розв'язок задачі (3.1), (3.2) можна записати за формулою Коші (2.11) у вигляді

$$x\left(t\right) = y\left(t\right) + \int\limits_{t_0}^{t} H\left(t-\tau\right) b\left(A_1\left(x_t\right), B_1\left(x_t\right), D_1\left(x_t\right)\right) dw\left(\tau\right) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\mathbb{U}} H\left(t-\tau\right) c\left(A_2\left(x_t\right), B_2\left(x_t\right), D_1\left(x_t\right), u\right) \tilde{\nu}_0\left(du, d\tau\right), \tag{3.5}$$

де $y(t)$ — розв'язок рівняння (3.3) за детермінованою початковою функцією $\varphi(\theta)$.

Позначимо через $r(\mathbf{B})$ спектральний радіус матриці $\mathbf{B}$.

Під простором $\mathcal{N}_\infty$ будемо розуміти простір випадкових функцій $f_1(t), f_2(t,u) \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, які є $\mathcal{N}_+$-вимірні при $t \geq 0$ і такі, що для них існують інтеграли

$$\int_0^\infty M\left\{|f_1(t)|^2\right\} dt < \infty, \quad \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} M\left\{|f_2(t,u)|^2\right\} \Pi(du,dt) < \infty.$$

Теорема 2.3.1. *Нехай власні значення твірного оператора напівгрупи розв'язків рівняння (3.3) лежать у лівій півплощині* $\mathrm{Re}\lambda < 0$. *Будь-які лінійні оператори на розв'язках задачі (3.1), (3.2) вигляду:*

$$F(x_t) := F(A_i(x_t), B_i(x_t), D_i(x_t));$$

$$\Phi(x_t) := \Phi(A_i(x_t), B_i(x_t), D_i(x_t), u),$$

$\forall u \in \mathbb{U},\ t \geq 0,\ i = 1,2,$ *належать до простору* $\mathcal{N}_\infty$ *тоді й тільки тоді, коли* $r(\mathbf{B}) < 1$, *де матриця* $\mathbf{B}$ *має конструкцію:*

$$\mathbf{B} := \int_0^\infty b\left(A_1^2(H_t), B_1^2(H_t), D_1^2(H_t)\right) dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} c\left(A_2^2(H_t), B_2^2(H_t), D_2^2(H_t), u\right) \Pi(du,dt), \tag{3.6}$$

а $H_t := H_t(t+\theta),\ \theta \in [-r,0]$

$$A_i^2(H_t) = \left[\int_{-r}^0 H_t d\beta_i(\theta)\right]^2; \tag{3.7}$$

$$B_i^2(H_t) = \int_{-r}^0 [f_i(\theta)]^2 H_t^2 d\theta; \tag{3.8}$$

$$D_i^2\left(H_t\right)=\int\limits_{-r}^{0}\int\limits_{\mathbb{U}}\left[\gamma_i\left(\theta,u\right)\right]^2 H_t^2\Pi_i\left(du\right)d\theta,\quad i=1,2. \tag{3.9}$$

Зауваження 2.3.1. Значок 2 означає, що кожний елемент вектора або матриці береться у квадраті.

Доведення. Замінимо у (3.5) $x(t)$ на $x(t+\theta)$ та застосуємо лінійні оператори $b(\cdot,\cdot,\cdot)$, $c(\cdot,\cdot,\cdot,u)$. В результаті маємо:

$$b(A_1(x_t),B_1(x_t),D_1(x_t))=b(A_1(y_t),B_1(y_t),D_1(y_t))+$$

$$+\int\limits_0^t b(A_1(H_{t-\tau}),B_1(H_{t-\tau}),D_1(H_{t-\tau}))\times$$

$$\times b(A_1(x_\tau),B_1(x_\tau),D_1(x_\tau))dw_0(\tau)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}} b(A_1(H_{t-\tau}),B_1(H_{t-\tau}),D_1(H_{t-\tau}))\times$$

$$\times c(A_2(x_\tau),B_2(x_\tau),D_2(x_\tau),u)\tilde{\nu}_0\left(du,d\tau\right),$$

$$c(A_2(x_t),B_2(x_t),D_2(x_t),u)=c(A_2(y_t),B_2(y_t),D_2(y_t),u)+$$

$$+\int\limits_0^t c(A_2(H_{t-\tau}),B_2(H_{t-\tau}),D_2(H_{t-\tau}))\times$$

$$\times b(A_2(x_\tau),B_2(x_\tau),D_2(x_\tau))dw_0(\tau)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}} c(A_2(H_{t-\tau}),B_2(H_{t-\tau}),D_2(H_{t-\tau}),u)\times$$

$$\times c(A_2(x_\tau),B_2(x_\tau),D_2(x_\tau),u)\tilde{\nu}\left(du,d\tau\right).$$

Піднесемо до квадрату ліву та праву частину одержаних рівнянь в розумінні Зауваження 2.3.1, застосуємо операцію математичного сподівання, та використовуючи властивості стохастичних інтегралів [11], одержимо:

$$\mu_b\left(t\right) = \left[b^2\left(y_t\right)\right] + \int\limits_0^t b^2\left(H_{t-\tau}\right)\mu_b\left(\tau\right)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} b^2\left(H_{t-\tau}\right)\mu_c\left(\tau, u\right)\Pi\left(du\right)d\tau \tag{3.10}$$

$$\mu_c\left(t, u\right) = c^2\left(y_t, u\right) + \int\limits_0^t c^2\left(H_{t-\tau}, u\right)\mu_c\left(\tau, u\right)d\tau +$$

$$+\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\left(H_{t-\tau}, u\right)\mu_c\left(\tau, u\right)\Pi\left(du\right)d\tau \tag{3.11}$$

де

$$b^2(y_t) := b(A_1^2(y_t), B_1^2(y_t), D_1^2(y_t));$$
$$c^2(y_t, u) := c(A_2^2(y_t), B_2^2(y_t), D_2^2(y_t), u);$$
$$b^2(H_t) := b(A_1^2(H_t), B_1^2(H_t), D_1^2(H_t));$$
$$c^2(H_t, u) := c(A_2^2(H_t), B_2^2(H_t), D_2^2(H_t), u);$$
$$\mu_b\left(t\right) := M\left\{b^2\left(x_t\right)\right\}; \quad \mu_c\left(t, u\right) := M\left\{c^2\left(x_t, u\right)\right\}.$$

Проінтегруємо рівняння (3.10), (3.11) по t від 0 до ∞ та змінимо порядок інтегрування (причому друге рівняння спочатку проінтегруємо по $u \in \mathbb{U}$); в результаті легко записати:

$$\int\limits_0^\infty \mu_b\left(t\right)dt = \int\limits_0^\infty \left[b\left(y_t\right)\right]^2 dt + \int\limits_0^\infty \left[b\left(H_t\right)\right]^2 dt \int\limits_0^\infty \mu_b\left(t\right)dt +$$

$$+\int\limits_0^\infty [b\,(H_t)]^2\,dt\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{U}}\mu_c\,(t)\,\Pi\,(du)\,dt; \tag{3.12}$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{U}}\mu_c\,(t,u)\,\Pi\,(du)\,dt=\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{U}}[c\,(y_t)]^2\,\Pi\,(du)\,dt+$$

$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{U}}[c\,(H_t,u)]^2\,\Pi\,(du)\,dt+\int\limits_0^\infty\mu_b\,(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{U}}[c\,(H_t,u)]^2\,\Pi\,(du)\,dt\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{U}}\mu_c\,(t,u)\,\Pi\,(du)\,dt; \tag{3.13}$$

де

$$b(y_t):=b(A_1(y_t),B_1(y_t),D_1(y_t));$$
$$c(y_t,u):=c(A_2(y_t),B_2(y_t),D_2(y_t),u);$$
$$b(H_t):=b(A_1(H_t),B_1(H_t),D_1(H_t));$$
$$c(H_t,u):=c(A_2(H_t),B_2(H_t),D_2(H_t),u).$$

Якщо в якості вектора $y(t)$ вибрати стовпчики матриці $H(t)$, позначивши їх відповідно $y_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, то, аналогічно (3.12) та (3.13), можна отримати, що

$$\int\limits_0^\infty\mu_{b_j}(t)dt=\int\limits_0^\infty[b(y_{jt})]^2dt+\int\limits_0^\infty[b(H_t)]^2dt\int\limits_0^\infty\mu_{b_j}(t)dt+$$

$$+\int\limits_0^\infty[b\,(H_t)]^2\,dt\int\limits_0^\infty\int\limits_U\mu_{c_j}\,(t)\,\Pi\,(du)\,dt; \tag{3.14}$$

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{U}}\mu_{c_j}(t,u)\Pi(du)dt=\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{U}}[c(y_{jt})]^2\Pi(du)dt+$$

$$+\int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \left[c\left(H_t, u\right)\right]^2 \Pi\left(du\right) dt + \int_0^\infty \mu_{b_j}\left(t\right) dt +$$

$$+\int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \left[c\left(H_t, u\right)\right]^2 \Pi\left(du\right) dt \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_{c_j}\left(t, u\right) \Pi\left(du\right) dt. \qquad (3.15)$$

У відповідних позначеннях перепишемо (3.14) та (3.15) у вигляді

$$M_j = N_j + \mathbf{B} M_j;$$

де

$$M_j = M_j^{(1)} + M_j^{(2)}; \quad N_j = N_j^{(1)} + N_j^{(2)};$$

$$N_j^{(1)} = \int_0^\infty b^2\left(y_j\left(t+\theta\right)\right) dt;$$

$$N_j^{(2)} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} c^2\left(y_j\left(t+\theta\right), u\right) \Pi\left(du\right) dt;$$

$$M_j^{(1)} = \int_0^\infty \mu_{b_j}\left(t\right) dt; \quad M_j^{(2)} = \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_{c_j}\left(t, u\right) \Pi\left(du\right) dt.$$

Очевидно, що вектор N_j співпадає з j-м стовпчиком матриці $\mathbf{B}$, причому ясно, що: $B = \{N_1, N_2, \ldots, N_n\}$ та $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$.

Тоді з вищезгаданої формули отримуємо матричне рівняння:

$$M = \mathbf{B} + \mathbf{B} M. \qquad (3.16)$$

Необхідність. Доведемо від супротивного. Оскільки матриця $\mathbf{B}$ складена з невід'ємних елементів, тоді [10] $\lambda_{\mathbf{B}} > 0$. Нехай $\lambda_0 \geq 1$. У випадку $\lambda_0 = 1$ доведемо, що рівняння (3.16) має необмежений розв'язок. Нехай це не так, тоді обмежений розв'язок має і рівняння:

$$\mathbf{X} = b + \mathbf{B}\chi, \tag{3.17}$$

де $\chi = Mb$, b — власний вектор матриці $\mathbf{B}$, який відповідає власному значенню $\lambda_0 = 1$. У підпросторі, який породжує власний вектор d, рівняння (3.17) має вигляд $y + b = y$, що не має розв'язку при жодному y ($\|y\| < \infty$). Одержане протиріччя означає, що якщо $\lambda_0 = 1$, то знайдуться початкові функції $\varphi(\theta)$, для яких

$$b(x_t) := b(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t)) \notin \mathcal{N}_\infty$$

$$c(x_t, u) := c(A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u) \notin \mathcal{N}_\infty$$

а значить $F(x_t) \notin \mathcal{N}_\infty$, $\Phi(x_t) \notin \mathcal{N}_\infty$. Одержали протиріччя.

У випадку $\lambda_0 > \mathrm{I}$ доведемо, що рівняння (3.16) має необмежений розв'язок при будь-якій достатньо малій за нормою початковій функції. Нехай це не так, тоді рівняння (3.17) має необмежений розв'язок $\mathbf{X} = \dfrac{b}{1 - \lambda_0}$, координати якого недодатні.

Достатність випливає, якщо до системи (3.10), (3.11) застосувати метод послідовних наближень знаходження розв'язків [11].

Аналогічно матричному рівнянню (3.16) легко записати $M = \mathbf{B}M + N$, де матриця-вектор має вигляд:

$$N = \int\limits_0^\infty b^2\left(y_t\right) dt + \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\left(y_t, u\right) \Pi\left(du\right) dt.$$

Побудуємо послідовні наближення:

$$M_n = \mathbf{B}M_{n-1} + N, \quad n = \overline{1,3},$$

з $M_0 = 0$. Звідки одержимо, що $\mu_{b_n}(t)$, $\mu_c(t, u) \in L_1(0, \infty)$.

Дійсно, якщо взяти $M_0 = 0$, тоді $M_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbf{B}^k N$. Відомо [10], що

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\mathbf{B}^n\|} = \max_r \lambda_r < 1$$

Тоді для достатньо великих n_0, $(n \geq n_0)$ маємо

$$\sqrt[n]{\|\mathbf{B}^n\|} < (q+\varepsilon) < 1$$

та

$$\|\mathbf{B}^n\| < (q+\varepsilon)^n \,.$$

Таким чином, при $n \geq n_0$

$$\|M_n\| \leq \sum_{k=0}^{n-1} g^k \|N\|,$$

де $0 < g = q + \varepsilon < 1$, звідки

$$\lim_{n\to\infty} \|M_n\| < \frac{\|N\|}{g-1},$$

тобто довели, що

$$b(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t)) \notin \mathcal{N}_\infty,$$

$$c(A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u) \notin \mathcal{N}_\infty.$$

Достатність стає зрозумілою, якщо застосувати до (3.5) оператори $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot, u)$ та проробивши відповідні перетворення, що привели до (3.10), (3.11), легко записати:

$$\int_0^\infty \mu_F(t)\,dt = \int_0^\infty F^2(y_t)\,dt + \int_0^\infty F^2(H_t)\,dt \int_0^\infty \mu_b(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty F^2(H_t)\,dt \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_c(t,u)\,\Pi(du)\,dt;$$

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_\Phi(t,u)\,\Pi(du)\,dt = \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \Phi^2(y_t,u)\,\Pi(du)\,dt + \int_0^\infty \mu_b(t)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \Phi^2(H_t,u)\,\Pi(du)\,dt +$$

$$+ \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \Phi^2(H_t,u)\,\Pi(du)\,dt \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \mu_c(t,u)\,\Pi(du)\,dt.$$

Аналогічні міркування, які містяться в доведенні необхідності, дають достатність теореми, тобто $F(\cdot) \in \mathcal{N}_\infty$ та $\Phi(\cdot,u) \in \mathcal{N}_\infty$.

Теорема 2.3.2. *Якщо тривіальний розв'язок (3.3) експоненціально стійкий, то в умовах теореми 2.3.1 тривіальний розв'язок задачі (3.1), (3.2) асимптотично стійкий в середньому квадратичному.*

Доведення. Застосуємо до (3.10), (3.11) перетворення Лапласа [7]:

$$M_b(\lambda) = \mathbf{Y}_b(\lambda) + H_b(\lambda)\,M_b(\lambda) + H_b(\lambda)\,M_c(\lambda);$$

$$M_c(\lambda) = \mathbf{Y}_c(\lambda) + H_c(\lambda)\,M_b(\lambda) + H_c(\lambda)\,M_c(\lambda);$$

де

$$M_b(\lambda) = \mathcal{L}\{\mu_b(t)\}; \quad M_c(\lambda) = \mathcal{L}\{\mu_c(t,u)\};$$

$$H_b(\lambda) = \mathcal{L}\{b^2(H_t)\}; \quad H_c(\lambda) = \mathcal{L}\{\int_{\mathbb{U}} c^2(H_t,u)\,\Pi(du)\};$$

$$\mathbf{Y}_b(\lambda) = \mathcal{L}\{b^2(y_t)\}; \quad ;\mathbf{Y}_c(\lambda) = \mathcal{L}\{\int_{\mathbb{U}} c^2(y_t,u)\,\Pi(du)\}.$$

Звідси легко бачити, що:

$$M(\lambda) = \mathbf{Y}(\lambda) + H(\lambda)\,M(\lambda), \tag{3.18}$$

де $M(\lambda) = M_b(\lambda) + M_c(\lambda)$; $H(\lambda) = H_b(\lambda) + H_c(\lambda)$; $\mathbf{Y}(\lambda) = \mathbf{Y}_b(\lambda) + \mathbf{Y}_c(\lambda)$. З (3.18) маємо $M(\lambda) = [\mathrm{I} - H(\lambda)]^{-1}\mathbf{Y}(\lambda)$.

Зауважимо, що з умов теореми 2.3.2 розв'язок рівняння (3.3) експоненціально стійкий [15]. Тоді $\mathbf{Y}(\lambda)$, як перетворення Лапласа, не має полюсів у півплощині $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$ [15]. Позначимо через $\gamma(\lambda)$ корінь Перрона матриці $H_t(\lambda)$ [10]. Тоді з конструкції матриці $H(\lambda)$ випливає, що $\max\limits_{\mathrm{Re}\lambda = a} \gamma(\lambda) = \gamma(a)$.

Встановимо, що рівняння $\det[\mathrm{I} - H(\lambda)] = 0$ має корені тільки в півплощині $\mathrm{Re}\lambda < 0$. Припустимо протилежне: $\det[\mathrm{I} - H(\lambda_0)] = 0$, де $\mathrm{Re}\lambda_0 \geq 0$. Це означає, що $H(\lambda_0)$ має власне значення 1. Тоді $\gamma(\mathrm{Re}\lambda_0) \geq 1$. Але елементи матриці $H(\lambda)$ при дійсних λ спадають, тобто $\gamma(\mathrm{Re}\lambda)$ — спадна функція. Таким чином, $\gamma(0) \geq 1$ і матриця $H(0) = \mathbf{B}$ має власне значення за модулем не менше 1. А це протирічить умовам теореми 2.3.2, що $r(\mathbf{B}) < 1$. Таким чином одержано, що полюса $M(\lambda)$ лежать у лівій площині.

Оригінал $\mu(t)$ веде себе при $t \to +\infty$ як $e^{\alpha t}$, де $\alpha > 0$ та α є дійсною частиною найбільш віддаленого вправо полюса зображення $M(\lambda)$ [15]. Тоді

$$|\mu_b(t)| + \left| \int\limits_{\mathbb{U}} \mu_c(t, u)\, \Pi(du) \right| \leq K e^{-\beta t} \|\phi\|, \quad K > 0, \beta > 0.$$

За умов теореми 2.3.1 для довільного лінійного оператора $F(\cdot)$, $\Phi(\cdot, u)$ маємо оцінку [34]:

$$\left|F^2(y_t)\right| + \int\limits_{\mathbb{U}} \left|\Phi^2(y_t, u)\right| \Pi(du) \leq K_1 e^{-\beta_1 t} \|\phi\|, \quad K_1 > 0, \beta_1 > 0.$$

Асимптотична стійкість у середньому квадратичному тривіального розв'язку (3.1), (3.2) випливає з нерівності:

$$M\{|x(t)|^2\} \leq K_1 e^{-\beta_1 t} \|\phi\| + \|H(t)\|^2_{C(0,\infty)} \int\limits_0^\infty |\mu_b(t)|\, dt +$$

$$+\left\|H\left(t\right)\right\|_{C(0,\infty)}^{2}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{U}}\left|\mu_{c}\left(t,u\right)\right|\Pi\left(du\right)dt.$$

Доведення теореми 2.3.2 завершено. ■

Зауваження 2.3.2. Якщо в рівнянні (3.1), (3.3) $b(\cdot,\cdot,\cdot)=b(x_t)$, $c(\cdot,\cdot,\cdot,u)=c(x_t,u)$, то результати роботи [69] випливають з 2.3.1 та 2.3.2.

Теорема 2.3.3. *Нехай тривіальний розв'язок рівняння (3.3) експонеціально стійкий та $r(\mathbf{B})<1$. Тоді в будь-якому околі нуля знайдеться така початкова функція $\varphi(\theta)$, що*

$$\lim_{t\to\infty}M\{\left|x\left(t\right)\right|^{2}\}=\infty.$$

Доведення. При доведенні теореми 2.3.2 одержали:

$$M\left(\lambda\right)=\left[\mathrm{I}-H\left(\lambda\right)\right]^{-1}\mathbf{Y}\left(\lambda\right);$$

де $\mathbf{Y}\left(\lambda\right)$ з умови теореми 2.3.3 не має особливостей в півплощині $\mathrm{Re}\lambda_0\geq 0$. Тоді полюси вектора $M\left(\lambda\right)$ збігаються з нулями визначника $\det\left[\mathrm{I}-H\left(\lambda\right)\right]$.

Матриця $H\left(\lambda\right)$ має додатне власне значення $\gamma\left(\lambda\right)$, яке не менше за модулем від усіх інших власних значень, тобто

$$\max_{\mathrm{Re}\lambda=a}\gamma\left(\lambda\right)=\gamma\left(a\right).$$

З умов теореми 2.3.3 $\gamma\left(0\right)>1$, де $\gamma\left(\lambda\right)$ — неперервна функція дійсного λ і така, що

$$\lim_{\lambda\to\infty}\gamma\left(\lambda\right)=0.$$

Таким чином, знайдеться $\lambda_0>0$ таке, що $\gamma(\lambda_0)=1$. Тоді

$$\left|\mu_b(t)\right|+\int\limits_{\mathbb{U}}\left|\mu_c(t,u)\right|\Pi(du)$$

росте при $t \to \infty$ $e^{\lambda_0 t}$ [1], що й завершує доведення теореми 2.3.3. ■

Зауважимо, що випадок $r(\mathbf{B}) = 1$ потребує окремих досліджень.

Зауваження 2.3.3. Якщо підставити (3.4) у формулу (3.6), що визначає матрицю $\mathbf{B}$, та застосувати теорему Планшереля [6], то формула (3.6) набуде зручного вигляду для практичного застосування:

$$\mathbf{B} = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left| b\left(A_1(e^{is\theta}), B_1(e^{is\theta}), D_1(e^{is\theta})\right)\right|^2 \left[V^{-1}(is)\right]_+^2 ds+$$

$$+\tfrac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{\mathbb{U}} \left| c\left(A_2(e^{is\theta}), B_2(e^{is\theta}), D_2(e^{is\theta})\right)\right|^2 \left[V^{-1}(is)\right]_+^2 \Pi(du)ds,$$

де + означає, що кожен елемент матриці або вектора береться за модулем.

§ 2.4. Стійкість розв'язків систем стохастичних рівнянь з випадковими операторами та змінними коефіцієнтами

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ заданий випадковий процес $x(t) \in \mathbb{R}^n$ системою стохастичних диференціальних рівнянь

$$dx(t) = a(t, x_t)dt + dW_0(t) b\left(t, A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t)\right) +$$

$$+ \int_{\mathbb{U}} c\left(t, A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u\right) \tilde{\nu}_0(du, dt) \qquad (4.1)$$

з детермінованими початковими умовами

$$x_0(t) = \phi(t), \quad t \in [-r, 0], \qquad (4.2)$$

де $\mathbb{D}_n([-r,0])$ — простір Скорохода неперервних справа функцій $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$, які мають лівосторонні границі (НПЛГ) з рівномірною нормою.

$$a(t,\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;$$

$$b(t,\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n;$$

$$c(t,\cdot,\cdot,\cdot,u) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n;$$

$\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ — лінійні відображення, аргументи яких — лінійні оператори:

$$A_i(x_t) := \int_{-r}^{0} x(t+\theta) d\beta_i(\theta); \tag{4.3}$$

$$B_i(x_t) := \int_{-r}^{0} \alpha_i(\theta) x(t+\theta) dw_i(\theta); \tag{4.4}$$

$$D_i(x_t) := \int_{-r}^{0} \int_{\mathbb{U}} \gamma_i(\theta,u) x(t+\theta) \tilde{\nu}_i(du,d\theta), \quad i = 1,2. \tag{4.5}$$

Тут $\beta_i(t)$ — функції обмеженої варіації; $\alpha_i(t) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\mathcal{N}_{\mathbf{R}_+}$-вимірні локально обмежені по t; $\gamma_i(t,u) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$-вимірні відносно $\mathcal{N}_{\mathbb{R}_+} \times \mathbb{U}$, локально обмежені по t та

$$\int_{\mathbb{U}} |\gamma_i(t,u)|^2 \, \Pi_i(du) < \infty;$$

$\{w_i(t), t \geq 0, i = 1,2\}$ — одновимірні вінерівські процеси, $\{\tilde{\nu}_i(du,dt), t \geq 0, u \in \mathbb{U}, i = 1,2\}$ — центровані пуассонівські міри, матриця $W_0(t) := \{w_{ij}(t)\}$ складена з незалежних за сукупністю вінерівських процесів з нульовими зносами та коефіцієнтами дифузії, що дорівнюють одиниці; $\tilde{\nu}_0(du,dt)$ — центрована пуассонівська міра. Зауважимо, що винерівські процеси та пуассонівські міри незалежні між собою [11].

Для того, щоб мати стохастичні диференціали та інтеграли, треба задати на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ потік σ-алгебр, з яким узгоджуються вінерівські процеси та випадкові міри [12].

Під сильним розв'язком рівняння (4.1) розуміємо прогресивно вимірні та $\mathcal{N}^t$-узгоджені процеси, для яких майже скрізь виконується рівність

$$x(t) = \phi(0) + \int_0^t a(s, x_s)ds + \int_0^t dW_0(s) b\left(s, A_1(x_s), B_1(x_s), D_1(x_s)\right) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} c\left(s, A_2(x_s), B_2(x_s), D_2(x_s), u\right) \tilde{\nu}_0(du, ds) \quad (4.6)$$

а при $t \in [-r, 0]$ визначаються (4.2).

Зауважимо, що сильний розв'язок задачі (4.1), (4.2) існує та єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності.

Якщо позначити через $h(t, s)$ матрицю Коші детермінованого рівняння:

$$dy(t) = a(t, y_t)dt, \quad t \geq s, \quad (4.7)$$

що задовольняє умову $h(t, s) = 0$ при $t < s$; $h(t, t) = \mathrm{I}$.

Тоді розв'язок задачі (4.1), (4.2) можна представити у вигляді

$$x(t) = y(t) + \int_0^t h(t, s)[dW_0(s)] b\left(s, A_1(x_s), B_1(x_s), D_1(x_s)\right) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} h(t, s) c\left(s, A_2(x_s), B_2(x_s), D_2(x_s), u\right) \tilde{\nu}_0(du, ds) \quad (4.8)$$

де $y(t)$ — розв'язок рівняння (4.7), який побудованй за початковою функцією $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$ (формула Коші (2.8)).

Теорема 2.4.1. *Нехай*

1) тривіальний розв'язок рівняння (4.7) експоненціально стійкий;

2) матриця Коші $h(t,s)$ задовольняє умови

$$\sup_{t\geq s\geq 0}\left\|h^2(t,s)\right\| < \infty, \quad \sup_{t\geq 0}\int\limits_0^t \left\|h^2(t,s)\right\| ds < \infty,$$

3)

$$\sup_{t\geq 0}\|b(t,\cdot,\cdot,\cdot)\| < \infty, \quad \sup_{t\geq 0}\sup_{u\in\mathbb{U}}\|c(t,\cdot,\cdot,\cdot,u)\| < \infty$$

4) для матриці

$$Q := \overline{\lim_{t\to\infty}}[\int\limits_0^t b^2\left(t,h_t(\theta,s)\right)ds + \int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}} c^2\left(t,h_t(\theta,s),u\right)\Pi(du)ds] \tag{4.9}$$

спектральний радіус $r(Q) < 1$. Тоді тривіальний розв'язок задачі (4.1), (4.2) асимптотично стійкий у середньому квадратичному. Тут введено позначення

$$b^2(t,h_t(\theta,s)) := b(t,A_1^2(h_t),B_1^2(h_t),D_1^2(h_t)); \tag{4.10}$$

$$c^2(t,h_t(\theta,s),u) := c(t,A_2^2(h_t),B_2^2(h_t),D_2^2(h_t),u); \tag{4.11}$$

де аргументи мають структуру:

$$A_i^2(h_t(\theta,s)) := [\int\limits_{-r}^0 h_t(\theta,s)d\beta_i(\theta)]^2; \tag{4.12}$$

$$B_i^2(h_t(\theta,s)) := \int\limits_{-r}^0 [f_i(\theta)]^2 h_t^2(\theta,s)d\theta; \tag{4.13}$$

$$D_t^2(h_t(\theta,s)) := \int\limits_{-r}^{0}\int\limits_{\mathbb{U}} [\gamma_i(\theta,u)]^2 h_t^2(\theta,s)\Pi_i(du)d\theta, \quad i=1,2 \tag{4.14}$$

де 2 означає, що кожний елемент вектора або матриці береться у квадраті.

Доведення. Запишемо рівняння (4.8) в момент часу $t=\theta$, застосуємо до одержаних рівнянь відповідно оператори $b(t,\cdot,\cdot,\cdot)$ та $c(t,\cdot,\cdot,\cdot,u)$, піднесемо до квадрату ліві та праві частини цих рівнянь, та, якщо застосувати операцію математичного сподівання з врахуванням властивостей стохастичних інтегралів [11], тоді

$$\mu_b(t) = b^2(y_t) + \int\limits_0^t b^2(t, h_t(\theta,s))\,\mu_b(s)ds +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}} b^2(s, h_t(\theta,s))\,\mu_c(s,u)\,\Pi(du)\,ds \tag{4.15}$$

$$\int\limits_{\mathbb{U}} \mu_c(t,u)\,\Pi(du) = \int\limits_{\mathbb{U}} c^2(y_t,u)\,\Pi(du) +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}} c^2(t, h_t(\theta,s),u)\,\mu_b(s)\Pi(du)ds +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}} c^2(t, h_t(\theta,s),u_1)\cdot\int\limits_{\mathbb{U}}\mu_c(s,u)\Pi(du_1)ds \tag{4.16}$$

де b^2, c^2 визначені (4.10)—(4.14); $\mu_b(t) = \mathbb{E}\{b^2(t,x_t)\}$; $\mu_b(t) = \mathbb{E}\{c^2(t,x_t,u)\}$.

Додамо рівняння (4.15) та (4.16) і позначимо

$$m(t) = \mu_b\,(t) + \int\limits_{\mathbb{U}} \mu_c\,(t,u)\,\Pi(du);$$

$$f(t) = b^2\,(t, y_t) + \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\,(t, y_t, u)\,\Pi(du).$$

Тоді

$$m(t) = f(t) + \int\limits_0^t b^2\,(t, h_t(\theta, s))\,m(s)ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\,(s, h_t(\theta, s), u)\,m(s)\Pi\,(du)\,ds. \tag{4.17}$$

Зауважимо, що матриця Q умови (4.9) має найбільше додатне власне значення λ_Q [1] для Q існує таке $\varepsilon > 0$, що матриця $Q_\varepsilon = \{q_{ij} + \varepsilon\}$ також має найбільше власне значення $\lambda_{Q_\varepsilon} < \mathrm{I}$. Далі очевидна нерівність $\sup\limits_{s \geq T} Q_\varepsilon \leq Q_\varepsilon$, де

$$Q(t) = \int\limits_0^t b^2\,(t, h_t(\theta, s))\,ds + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\,(t, h_t(\theta, s), u)\,\Pi(du)ds.$$

Ясно, що на інтервалі $[0, T_0]$ розв'язок $m(t)$ системи (4.17) обмежений [54].

Позначимо

$$M(t,T) = \max_{\tau \in [T,t]} m(\tau).$$

Тоді при $t \geq T_0$ з (4.17) одержимо нерівність

$$M(t,T) \leq \max_{\tau \in [T,t]} f(\tau) + \max_{\tau \in [T,t]} \left[\int\limits_0^\tau b^2\,(\tau, h_\tau(\theta, s))\,m(s)ds + \right.$$

$$
+\int_0^{\tau}\int_{\mathbb{U}} c^2\left(\tau, h_\tau(\theta,s), u\right) m(s)\Pi(du)ds\Bigg] +
$$

$$
+\max_{\tau\in[T,t]}\left[\int_0^{T_0} b^2\left(\tau, h_\tau(\theta,s)\right) m(s)ds + \right.
$$

$$
\left. +\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{U}} c^2\left(\tau, h_\tau(\theta,s), u\right) m(s)\Pi(du)ds\right] \leq
$$

$$
\leq \Phi(t) + \max_{\tau\in[T,t]} Q(\tau)M(t,T) \leq \Phi(t) + Q_\varepsilon M(t,T),
$$

де

$$
\Phi(t) := \max_{\tau\in[T,t]} f(\tau) + \max_{\tau\in[T,t]}\left[\int_0^{T_0} b^2\left(\tau, h_\tau(\theta,s)\right) m(s)ds + \right.
$$

$$
\left. +\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{U}} c^2\left(\tau, h_\tau(\theta,s), u\right) m(s)\Pi(du)ds\right].
$$

З умови $\lambda_{Q_\varepsilon} < 1$ та обмеженості норми вектора $\Phi(t)$ випливає, що $\lim\limits_{t\to\infty}|M(t,T)| < \infty$. Доведемо спочатку допоміжний результат.

Лема 2.4.1. *За умов теореми отримуємо* $\lim\limits_{t\to\infty}|m(t)| = 0$
.

Доведення. Для $\forall\, t$, T_1 таких, що $t \geq T_1$ виконується нерівність

$$
m(t) \leq f(t) + \int_0^{T_1} b^2\left(t, h_t(\theta,s)\right) m(s)ds +
$$

$$+\int_0^{T_1}\int_{\mathbb{U}} c^2\left(t, h_t(\theta,s), u\right) m(s)\Pi(du)ds + Q(t)M(t,T_1). \qquad (4.18)$$

Обчислимо верхню межу від обох частин нерівності (4.18) при $t\to\infty$.

Враховуючи умови 1)-3) теореми 2.4.1 та обмеженість $m(t)$ на $[0,T_1]$ робимо висновок, що виконані умови теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтегралів в правій частині (4.18) і

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[f(t) + \int_0^{T_1} b^2\left(t, h_t(\theta,s)\right) m(s)ds +$$

$$+\int_0^{T_1}\int_{\mathbb{U}} c^2\left(t, h_t(\theta,s), u\right) m(s)\Pi(du)ds] = 0.$$

Тоді $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} m(t) \le Q\cdot M(\infty,T_1)$, де $m(\infty,T_1) = \sup\limits_{s\ge T_1} m(s)$.

Одержана нерівність має місце при будь-якому T_1, тоді $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} m(t) \le Q\cdot \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} m(t)$, а, отже, з умови 4) теореми випливає, що $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} |m(t)| = 0$. Лема 2.4.1 доведена. ■

Далі, якщо використати (4.17), можна записати

$$\mathbb{E}\{x^2(t)\} = y^2(t) + \int_0^h h^2(t,s)m(s)ds.$$

Звідки маємо, що

$$|\mathbb{E}\{x^2(t)\}| = |y^2(t)| + \int_0^h \|h^2(t,s)\||m(s)|ds.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує $T > 0$ таке, що $|m(t)| < \varepsilon$ для $\forall\, t \ge T$.

Згідно з умовою 2) теореми 2.4.1

$$\int\limits_0^t \left\|h^2(t,s)\right\| \cdot |m(s)|\, ds \leq \int\limits_0^T \left\|h^2(t,s)\right\| \cdot |m(s)|\, ds + C\varepsilon$$

де $C > 0$. Тому $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} |\mathbb{E}\{x^2(t)\}| \leq C\varepsilon$. Але $\varepsilon > 0$ мале, тоді $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} \mathbb{E}\{x^2(t)\} = 0$. Теорема 2.4.1 доведена. ■

Зауваження 2.4.1. Якщо в рівнянні (4.1) $b(t,\cdot,\cdot,\cdot) = b(t,x_t) : \mathbb{R}_t \times \mathbb{D}_n([-r,0]) \to \mathbb{R}$; $c(t,\cdot,\cdot,\cdot,u) = c(t,x_t,u) : \mathbb{R}_t \times \mathbb{D}_n([-r,0]) \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$, то умова (4.9) набуде вигляду [105]

$$d = \overline{\lim_{t\to\infty}} \int\limits_0^t [b^2\left(t, h_t(\theta,s)\right) + \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\left(t, h_t(\theta,s), u\right) \Pi(du)] ds < 1 \tag{4.19}$$

Приклад 2.4.1. Нехай випадковий процес $x(t) \in \mathbb{R}^1$ задано рівнянням

$$dx(t) = -ax(t)dt + bx(t-1)dw_0(t) + C\int\limits_{\mathbb{U}} x(t-1)f(u)\tilde{\nu}_0(du,dt),$$

де $a > 0$. Оскільки $h(t) = e^{-at}$, тоді за теоремою 2.4.1 умови стійкості в середньому квадратичному задаються нерівністю

$$b^2 + c^2 \int\limits_{\mathbb{U}} f^2(u)\Pi(du) < 2ae^{-2a}.$$

Приклад 2.4.2. Нехай випадковий процес $x(t)^1 \in \mathbb{R}$ задано рівнянням

$$dx(t) = -ax(t)dt + bx(\alpha t)dw_0(t) + C\int\limits_{\mathbb{U}} x(\beta t)f(u)\tilde{\nu}_0(du,dt), \tag{4.20}$$

$0 < \alpha \le 1$; $0 < \beta \le 1$; $a > 0$. Очевидно, що $h(t,T) = e^{-a(t-T)}$.

Тоді достатні умови стійкості в середньому квадратичному тривіального рівняння набувають вигляду

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}[b^2 \int_0^{\alpha t} e^{-2a(\alpha t-\tau)} d\tau + c^2 \int_0^{\beta t} \int_{\mathbb{U}} f^2(u) e^{-2a(\beta t-\tau)} \Pi(du) d\tau] =$$

$$= \frac{b^2}{2a} + \frac{c^2}{2a} \int_{\mathbb{U}} f^2(u)\Pi(du) < 1.$$

Або $b^2 + c^2 \int_{\mathbb{U}} f^2(u)\Pi(du) < 2a$. Для $\xi(t) = \mathbb{E}\{x^2(t)\}$ запишемо рівняння

$$\xi(t) = y^2(t) + b^2 \int_0^t h^2(t-s)\xi(\alpha s) ds +$$

$$+c^2 \int_0^t \int_{\mathbb{U}} h^2(t-s) f^2(u)\xi(\beta s)\Pi(du) ds.$$

Після інтегрування від 0 до ∞ одержимо, що розв'язок $x(t)$ належить простору сумовних в середньому квадратичному випадкових процесів, якщо

$$\frac{b^2}{\alpha\pi} \int_0^\infty \frac{ds}{|is+a|^2} + \frac{c^2}{\beta\pi} \int_0^\infty \int_{\mathbb{U}} \frac{f^2(u)}{|is+a|^2 u^2} \Pi(du) ds < 1,$$

або

$$b^2\beta + \alpha c^2 \int_{\mathbb{U}} f^2(u)\Pi(du) < 2a\alpha\beta.$$

Тому можна стверджувати, що рівняння (4.20) має розв'язок не сумовний з квадратом, який збігається до нуля в середньому квадратичному.

§ 2.5 Асимптотична стійкість розв'язків систем стохастичних диференціальних рівнянь у критичному випадку

Позначимо $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ імовірнісний простір, $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$-потік σ-алгебр, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$; $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір; $\mathbb{D}_n := \mathbb{D}_n([-r,0])$ — простір Скорохода неперервних справа функцій $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$, які мають лівосторонні границі (НПЛГ) з рівномірною нормою

$$\|\phi(\theta)\| := \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)| . \tag{5.1}$$

$\mathcal{N}_1$ — простір неперервних на $[0, \infty)$ дійсних функцій $\alpha(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ таких, що

$$\int_0^\infty \left| 2\alpha(t) + \alpha^2(t) \right| dt < +\infty;$$

$\mathcal{N}_2$ — простір неперервних додатних функцій $\beta(t) : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, для яких

$$\int_0^\infty \left(\beta(t) + \beta^2(t) \right) dt < +\infty.$$

Розглянемо випадковий процес $x(t) \in \mathbb{R}^n$, який визначається рівнянням

$$dx(t) = a(x_t)dt + [\mathrm{I} + B(t)]dW_0(t)b\left(A_1(x_t), B_1(x_t), D_1(x_t)\right) +$$

$$+[\mathrm{I} + D(t)] \int_{\mathbb{U}} c\left(A_2(x_t), B_2(x_t), D_2(x_t), u\right) \tilde{\nu}_0(du, dt) \tag{5.2}$$

з початковими умовами

$$x(t) = \phi(t), \quad t[-r, 0], \tag{5.3}$$

де $x_t := \{x(t+\theta), \theta \in [-r, 0]\}$; лінійні неперервні функції $a(\cdot) : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n$; $b(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $c(\cdot,\cdot,\cdot,u) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ з операторами $A_i(\cdot), B_i(\cdot), D_i(\cdot) : \mathbb{D}_n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ вигляду

$$A_i(x_t) := \int_{-r}^{0} x(t+\theta) d\beta_i(\theta);$$

$$B_i(x_t) := \int_{-r}^{0} \alpha_i(\theta) dw_i(\theta) x(t+\theta); \tag{5.4}$$

$$D_i(x_t) := \int_{-r}^{0} \int_{\mathbb{U}} \gamma_i(\theta, u) x(t+\theta) \tilde{\nu}_i(du, d\theta), \tag{5.5}$$

де $\beta_i(t)$ — функції обмеженої варіації; $\{\alpha_i(t)\} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}_+}$-вимірні, локально обмежені; $\gamma_i(t, u) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}$ — вимірні стосовно $\mathcal{N}_{\mathbb{R}_+} \vee \mathbb{U}$, локально обмежені та

$$\int_{\mathbb{U}} |\gamma_i(t, u)|^2 \Pi_i(du) < \infty; \quad i = 1, 2.$$

Матриця $W_0(t)$ складається з одновимірних вінерівських процесів, попарно незалежних між собою; $\tilde{\nu}_i(du, dt)$, $i = 0, 1, 2$ — центровані пуассонівські міри, що незалежні одна від одної та від елементів матриць $t \in (0, \infty)$ [11]

$$B(t) := \operatorname{diag}\{b_1(t), b_2(t), ..., b_n(t)\}, \quad b_i(t) \in \mathcal{N}_1 \vee \mathcal{N}_2, \quad i = \overline{1, n};$$

$$D(t) := \operatorname{diag}\{d_1(t), d_2(t), ..., d_n(t)\}, \quad d_i(t) \in \mathcal{N}_1 \vee \mathcal{N}_2, \quad i = \overline{1, n};$$

$t \in (0, \infty)$.

Під сильним розв'язком задачі (5.2), (5.3) розуміємо сепарабельний процес $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \in [-r, \infty)$, визначений за $t \in [-r, 0]$ співвідношенням (5.3), вимірний стосовно σ-алгебри

$t \in (0, \infty)$ ($\mathcal{L}_t$ — σ-алгебра борелевих множин відрізка $[-r, t]$) та такий, що за умови $t \in (0, \infty)$ майже скрізь виконується

$$x(t) = \phi(0) + \int\limits_0^t a(x_s)ds +$$

$$+ \int\limits_0^t [\mathrm{I} + B(s)]dW_0(s)b\left(A_1(x_s), B_1(x_s), D_1(x_s)\right) +$$

$$+ \int\limits_0^t [\mathrm{I} + D(s)] \int\limits_{\mathbb{U}} c\left(A_2(x_s), B_2(x_s), D_2(x_s), u\right) \tilde{\nu}_0(du, ds) \quad (5.6)$$

Зауважимо, що коефіцієнти a, b, c треба задати на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, де визначені $W_i(t)$, $\tilde{\nu}_i$, $i = 0, 1, 2$. Для того, щоб мати стохастичні диференціали і інтеграли, треба мати на цьому ймовірнісному просторі потік σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, з яким узгоджені вінерівські процеси і випадкові центровані міри [11].

Умови, яким задовольняють $a(\cdot)$, $b(\cdot, \cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot, \cdot, u)$, $B(t)$, $D(t)$ і $\varphi(t)$, гарантують існування та єдиність сильного розв'язку задачі Коші.

Фундаментальний розв'язок детермінованого диференціально-функціонального рівняння

$$dy(t) = a(y_t)dt, \quad t \geq 0, \quad (5.7)$$

позначимо через $h(t)$: $h(0) = \mathrm{I}$; $h(s) = 0 \, \forall \, s \in [-r, 0)$;

$$h(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} e^{\lambda t} \Lambda^{-1}(\lambda) d\lambda \quad (5.8)$$

для $t \geq 0$, де $\Lambda(\lambda) = \lambda \mathrm{I} - a(e^{\lambda\theta})$, а Γ — контур, що охоплює всі нулі квазіполінома $\det \Lambda(\lambda)$ [7].

Теорема 2.5.1. *Нехай:*

1) тривіальний розв'язок рівняння (5.7) експоненціально стійкий;

2) корінь Перрона [10] матриці

$$Q = \int_0^\infty b\left(A_1^2(h_t), B_1^2(h_t), D_1^2(h_t)\right) dt +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{U}} c\left(A_2^2(h_t), B_2^2(h_t), D_2^2(h_t), u\right) \Pi(du)\, dt \qquad (5.9)$$

дорівнює одиниці. Тоді тривіальний розв'язок задачі (5.2), (5.3):

I) стійкий у середньому квадратичному, якщо $\{b_i(t), d_i(t), i = \overline{1,n}\} \subset \mathcal{N}_1$ *та монотонно спадають;*

II) не стійкий у середньому квадратичному, якщо $\{b_i(t), d_i(t), i = \overline{1,n}\} \subset \mathcal{N}_2$ *та монотонно зростають.*

Тут уведено позначення:

$$A_i^2(h_t) = [\int_{-r}^0 h(t+\theta) d\beta_i(\theta)]^2; \qquad (5.10)$$

$$B_i^2(h_t) = \int_{-r}^0 \alpha_i^2(\theta) h^2(t+\theta) d\theta; \qquad (5.11)$$

$$D_i^2(h_t) = \int_{-r}^0 \int_{\mathbb{U}} \gamma_i^2(\theta, u) h^2(t+\theta) \Pi_i(du) d\theta, i = 1, 2. \qquad (5.12)$$

де 2 означає, що кожний елемент вектора або матриці береться у квадраті.

Доведення. Рівняння (5.6) еквівалентне наступному інтегральному рівнянню (див. (2.8))

$$x(t) = y(t) +$$

$$+\int_0^t h(t-s)[\mathrm{I}+B(s)]dW_0(s)b\left(A_1(x_s),B_1(x_s),D_1(x_s)\right)+$$

$$+\int_0^t\int_{\mathbb{U}} h(t-s)[\mathrm{I}+D(s)]c\left(A_2(x_s),B_2(x_s),D_2(x_s),u\right)\tilde{\nu}_0(du,ds), \tag{5.13}$$

де $y(t)$ — будь-який розв'язок детермінованого рівняння (5.7) з початковою умовою (5.3).

Запишемо рівняння (5.13) у момент часу $t+\theta$ і застосуємо до одержаних рівнянь відповідно оператори $b(\cdot,\cdot,\cdot)$ та $c(\cdot,\cdot,\cdot,u)$:

$$b(A_1(x_t),B_1(x_t),D_1(x_t))=b(A_1(y_t),B_1(y_t),D_1(y_t))+$$

$$+\int_0^t b\left(A_1(h_{t-s}),B_1(h_{t-s}),D_1(h_{t-s})\right)[\mathrm{I}+$$

$$+B(s)]dW_0(s)b\left(A_1(x_s),B_1(x_s),\right.$$

$$\left.D_1(x_s)\right)+\int_0^t\int_{\mathbb{U}} b\left(A_1(h_{t-s}),B_1(h_{t-s}),D_1(h_{t-s})\right)[\mathrm{I}+D(s)]c\left(A_2(x_s),\right.$$

$$\left.B_2(x_s),\,D_2(x_s),u\right)\tilde{\nu}_0(du,ds)$$

$$c(A_2(x_t),B_2(x_t),D_2(x_t))=c(A_2(y_t),B_2(y_t),D_2(y_t))+$$

$$+\int_0^t c(A_2(h_{t-s}),B_2(h_{t-s}),D_2(h_{t-s}))[\mathrm{I}+$$

$$+B(s)]dW_0(s)b(A_1(x_s),B_1(x_s),$$

$$\left.D_1(x_s)\right)+\int_0^t\int_{\mathbb{U}} c\left(A_2(h_{t-s}),B_2(h_{t-s}),D_2(h_{t-s})\right)[\mathrm{I}+D(s)]c\left(A_2(x_s),\right.$$

$$B_2(x_s),\, D_2(x_s), u)\, \tilde{\nu}_0(du, ds).$$

Піднесемо до квадрата одержані вище рівняння, застосуємо операцію математичного сподівання, використаємо властивості стохастичних інтегралів і, проінтегрувавши друге рівняння за $u \in \mathbb{U}$, одержимо

$$\mu_b\,(t) = b^2\,(y_t) + \int\limits_0^t b^2\,(h_{t-s})\,\mu_b(s)ds +$$

$$+ \int\limits_0^t b^2\,(h_{t-s})\,B^+\mu_b(s)ds + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} b^2\,(h_{t-s})\,\mu_c\,(t,u)\,\Pi\,(du)\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} b^2\,(h_{t-s})\,D^+\mu_c\,(t,u)\,\Pi\,(du)\,ds \tag{5.14}$$

$$\int\limits_{\mathbb{U}} \mu_c\,(t,u)\,\Pi(du) = \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\,(y_t,u)\,\Pi(du) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\,(h_{t-s},u)\,\mu_b(s)\Pi(du)ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\,(h_{t-s},u)\,B^+(s)\mu_b(s)\Pi(du)ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\,(h_{t-s},u_1) \int\limits_{\mathbb{U}} \mu_c(t,u)\Pi(du) \times$$

$$\times \Pi(du_1)ds + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\,(h_{t-s},u_1)\,D^+ \int\limits_{\mathbb{U}} \mu_c(s,u)\Pi(du_1)\Pi(du)ds \tag{5.15}$$

де

$$\mu_b(t) := \mathbb{E}\{b^2(x_t)\}; \quad \mu_c(t,u) := \mathbb{E}\{c^2(x_t,u)\};$$

$$b^2(x_t) := b\left(A_1^2(x_t), B_1^2(x_t), D_1^2(x_t)\right); \tag{5.16}$$

$$c^2(x_t,u) := c\left(A_2^2(x_t), B_2^2(x_t), D_2^2(x_t), u\right); \tag{5.17}$$

(аргументи визначені за формулами (5.10), (5.11), (5.12)); $b^2(y_t)$, $c^2(y_t,u)$, $b^2(h_t)$, $c^2(h_t,u)$ визначені за формулами (5.16), (5.17));

$$B^+(s) = \mathrm{diag}\{2b_1(t) + b_1^2(t), ..., 2b_n(t) + b_n^2(t)\},$$

$$D^+(s) = \mathrm{diag}\{2d_1(t) + d_1^2(t), ..., 2d_n(t) + d_n^2(t)\}.$$

Складемо рівняння (5.14) та (5.15) та позначимо:

$$k(t) = b^2(h_t) + \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\left(h_t, u\right)\Pi(du);$$

$$m(t) = \mu_b(h_t) + \int\limits_{\mathbb{U}} \mu_c\left(t, u\right)\Pi(du);$$

$$f(t) = b^2(y_t) + \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\left(y_t, u\right)\Pi(du).$$

Тоді

$$m(t) = f(t) + \int\limits_0^t k(t-s)m(s)ds +$$

$$+ \int\limits_0^t k(t-s)[B^+(s) + D^+(s)]m(s)ds. \tag{5.18}$$

Зауважимо, що $f(t)$ і $k(t)$ задовольняють нерівності

$$|f(t)| + \|k(t)\| \le N\exp(-\gamma t), \quad t \ge 0 \tag{5.19}$$

згідно з умовою 1) теореми 2.5.1.

Рівняння (18) можна представити у вигляді

$$m(t) = f(t) + \int_0^t H(t-s)f(s)ds +$$

$$+ \int_0^t H(t-s)[B^+(s) + D^+(s)]m(s)ds, \quad t \geq 0, \tag{5.20}$$

де

$$H(t) = k(t) + \int_0^t k(t-s)k(s)ds +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t k(t-s)k(s-s_1)k(s_1)dsds_1 + ...$$

Якщо використати властивості перетворення Лапласа [9], то умови 2) теореми 2.5.1 дають співвідношення $H(t) = A + \Delta(t)$, де матриця $A = \{a_{ij}\}$, а елементи $\delta_{ij}(t)$ матриці $\Delta(t) := \{\delta_{ij}(t)\}$ є неперервні функції, для яких

$$\lim_{t \to +\infty} \delta_{ij}(t) = 0; \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{5.21}$$

Тоді з (5.7) випливає нерівність [71]

$$m(t) \leq C + L \int_0^t [\|B^+(s)\| + \|D^+(s)\|]m(s)ds, \quad t \geq 0,$$

де

$$C = \sup_{t \geq 0} \int_0^t H(t-s)f(s)ds; \quad L = \sup_{t \geq 0} H(t).$$

Отже, лема Гронуолла-Беллмана [6] дає оцінку

$$m(t) \leq C \exp\left\{ L \int_0^t [\|B^+(s)\| + \|D^+(s)\|] m(s) ds \right\}; \quad t \geq 0. \tag{5.22}$$

Доведення I) твердження. Нехай $\{b_i(t), d_i(t), i = \overline{1,n}\} \subset \mathcal{N}_1$, тоді $\sup\limits_{t \geq 0} |m(t)| < \infty$. Підносячи обидві частини рівняння (5.13) до квадрату та застосовуючи операцію математичного сподівання, одержимо:

$$\mu(t) = y^2(t) + \int_0^t h^2(t-s) [\mathrm{I} + B^+(s) + D^+(s)] m(s) ds, \quad t \geq 0,$$

де $\mu(t) = \mathbb{E}\{x^2(t)\}$.

Зауважимо, що з умови I) теореми 2.5.1 випливає нерівність [46],

$$|y^2(t)| + \|h^2(t)\| \leq M \exp\{-\gamma_1 t\}, \quad t \geq 0, \tag{5.23}$$

для деяких $M > 0$ та $\gamma_1 > 0$.

Відповідно до записаної вище нерівності, $\sup\limits_{t \geq 0} |m(t)| < \infty$ та

$$\int_0^t \left\| B^+(s) \right\| ds < \infty, \quad \int_0^t \left\| D^+(s) \right\| ds < \infty,$$

що означає $\sup\limits_{t \geq 0} |\mu(t)| < \infty$. Це завершує доведення I-ої частини твердження теореми, бо $\phi(t) \in \mathbb{D}_0$ — будь-яка, а стійкість розв'язків лінійних детермінованих систем еквівалентна обмеженості кожного розв'язку [53].

Доведення II) твердження. Візьмемо $\{b_i(t), d_i(t), i = \overline{1,n}\} \subset \mathcal{N}_2$ та виберемо початкову функцію $\phi(t) \in \mathbb{D}_0$ розв'язку $y(t)$ рівняння (5.7) таку, що

$$\int\limits_0^\infty f(t)dt > 0, \tag{5.24}$$

де $f(t) := b^2(y_t) + \int\limits_{\mathbb{U}} c^2\,(y_t, u)\,\Pi(du)$.

Нерівність (5.23) можлива через умову I) теореми 2.5.1.

Розглянемо рівняння (5.20). Якщо врахувати співвідношення (5.19), (5.21) та (5.24), то

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t H(t-s)f(s)ds > 0.$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \int\limits_0^t H(t-s)[B^+(s) + D^+(s)][\int\limits_0^s H(s-s_1)f(s_1)ds_1]ds \right\| = \infty, \tag{5.25}$$

що випливає з $\{b_i(t), d_i(t)\} \subset \mathcal{N}_2$.

Очевидна нерівність

$$m(t) \geq \int\limits_0^t H(t-s)f(s)ds + \int\limits_0^t H(t-s)[B^+(s) + D^+(s)]\times$$

$$\times[\int\limits_0^s H(s-s_1)f(s_1)ds_1]ds, \quad t \geq 0,$$

тоді з (5.25) маємо

$$\lim_{t\to\infty} |m(t)| = \infty. \tag{5.26}$$

Співвідношення (5.23) та (5.25) приводять до $\lim\limits_{t\to\infty} |\mu(t)| = \infty$, що завершує доведення теореми 2.5.1. ■

Теорема 2.5.2. *Нехай:*

1) тривіальний розв'язок рівняння (5.7) експоненціально стійкий;

2) корінь Перрона матриці

$$Q = \sum_{j=1}^{N} \int\limits_0^\infty b_j(A_{1,j}^2(h_t), B_{1,j}^2(h_t), D_{1,j}^2(h_t))dt +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} c_m(A_{2,m}^2(h_t), B_{2,m}^2(h_t), D_{2,m}^2(h_t), u)\Pi_m(du)dt$$

дорівнює одиниці. Тоді тривіальний розв'язок системи

$$dx(t) = a(x_t)dt + \sum_{j=1}^{N}[I + B_j(t)]dW_{0,j}(t)b_j(x_t) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{M}[I + D_m(t)] \int\limits_{\mathbb{U}} c_m(x_t, u)\tilde{\nu}_{0,m}(du, dt)$$

стійкий у середньому квадратичному, якщо елементи матриці $\max\{B_j(t), D_j(t)\}$ *належать* $\mathcal{N}_1$ *і монотонно спадають; нестійкий у середньому квадратичному, якщо елементи матриці* $\min\{B_j(t), D_j(t)\}$ *належать* $\mathcal{N}_2$ *і монотонно зростають.*

Тут під $\max\{B_j(t), D_j(t)\}$ розуміємо точну нижню границю матриць-функцій $B(t)$, для яких $B(t) \geq B_j(t)$, $B(t) \geq D_m(t)$, $\forall\, t \geq 0$; під $\min\{B_j(t), D_j(t)\}$ розуміємо точну верхню границю матриць-функцій $B(t)$, для яких $B(t) \leq B_j(t)$, $B(t) \leq D_m(t)$, $t \geq 0$; $j = \overline{1, N}$, $m = \overline{1, M}$.

Зауваження 2.5.1. Якщо рівняння (5.2) має коефіцієнти $b(\cdot,\cdot,\cdot) = b(x_t) : \mathbb{D}_0 \to \mathbb{R}^n$, $c(\cdot,\cdot,\cdot,u) = c(x_t,u) : \mathbb{D}_0 \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$, то умова (5.9) набуває вигляду [46]

$$Q = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \left|b(e^{is\theta})\right|^2 \left[\Lambda^{-1}(is)\right]_+^2 ds+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{U}} \left|c(e^{is\theta},u)\right|^2 \left[\Lambda^{-1}(is)\right]_+^2 \Pi(du)ds,$$

де $+$ означає, що елементи матриці взяті за модулем.

Розділ 3. Дослідження властивостей розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь

§ 3.1. Асимптотична стійкість у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з пуассонівськими збуреннями

Матеріали цього підрозділу містять результати робіт, що стосуються асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з пуассонівськими збуреннями із загаюванням та нерозв'язаних відносно похідних; ітераційної та оптимізаційної процедури розв'язання узагальненого матричного рівняння Сільвестра.

3.1.1. Достатні умови асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціально-різницевих рівнянь із загаюванням

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathbb{P})$ з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq t_0\}, F_t \subset F$ задано випадковий процес $\{x(t), t \geq t_0 -$

$\tau\} \in \mathbb{R}^n$ системою стохастичних диференціальних рівнянь:

$$dx(t) = [Ax(t) + A_1x(t-\tau)]dt + [Bx(t) + B_1x(t-\tau)]dw(t)+$$

$$+\int\limits_U [C(u)x(t) + C_1(u)x(t-\tau)]\tilde{\nu}(du,dt), \qquad (3.1)$$

з початковою умовою

$$0 \le t_0 \le t; \quad x(\theta) = x_0 = const \ne 0; \quad \tau > 0; \quad t_0 - \tau \le \theta \le t_0, \qquad (3.2)$$

де $\{w(t) \equiv w(t,\omega), t \ge t_0\}$ - скалярний вінерівський процес; $\{\nu(dt,du)\}$ — пуассонівська міра з незалежними значеннями на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{U}$; $\mathbb{U}$ — деякий вимірний простір; $\tilde{\nu}(du,dt) = \nu(du,dt) - \Pi(du)dt$ - центрована пуассонівська міра, $U \in \mathbb{R}^n$; A, B, A_1, B_1, D - сталі матриці розмірності $n \times n$; $C(u), C_1(u)$ - матричні функції такі, що

$$\int\limits_U \|C(u)\|^2\Pi(t,du) < \infty; \quad \int\limits_U \|C_1(u)\|^2\Pi(t,du) < \infty, \quad \forall\, t > 0, \qquad (3.3)$$

$\Pi(t,du) \equiv M\{\nu(t,du)\}$.

Позначимо через $\mathbb{D}_n \equiv \mathbb{D}_n([t_0-\tau, T_0]), T_0 \ge t_0$, простір Скорохода неперервних справа функцій $\{\varphi(t)\} \subset \mathbb{R}^n$, які мають лівосторонні границі [13].

У просторі $\mathbb{D}_n$ розглядається звичайна метрика Скорохода А.В. [13] $\forall\, x, y \in \mathbb{D}_n$

$$\rho(x,y) \equiv \inf_{\lambda}\left[\sup_{t_0-\tau\le t\le t_0}|x(t) - y(\lambda(t))| + \sup_{t_0-\tau\le t\le t_0}|t - \lambda(t)|\right], \qquad (3.4)$$

де $\{\lambda(t), t \in [t_0-\tau, T_0]\} \subset \Lambda$ — множина всіх зростаючих неперервних відображень відрізка $[t_0-\tau, T_0]$ на себе: $(\lambda(t_0-\tau) = t_0-\tau;\ \lambda(T_0) = T_0)$.

Зауважимо, що простір $\mathbb{D}_n$ сепарабельний, але неповний відносно метрик ρ. Простір $\mathbb{D}_n$ буде повним у еквівалентній метриці [13]

$$\rho_1(x,y)=\inf_{\lambda}\left[\sup_{t_0-\tau\le t\le t_0}|x(t)-y(\lambda(t))|+\sup_{t\ne s}\left|\log\frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s}\right|\right]. \tag{3.5}$$

У просторі $\mathbb{D}_n([t_0-\tau,T_0])$ для робочих оцінок в теорії стійкості вигідно розглядати норму для $\{\varphi(t)\}\subset\mathbb{D}_n$ вигляду

$$\|\varphi(t)\|_0^2\equiv|\varphi(t)|^2+\int\limits_{t_0-\tau}^{t_0}|x(t+\theta)|^2d\theta. \tag{3.6}$$

Позначимо через G^t простір $\mathcal{F}_t$-вимірних випадкових процесів $\{\xi(t)\equiv\xi(t,\omega)\}\subset\mathbb{D}_n$, які інтегровні за часом у середньому квадратичному.

Тоді для $\xi\in G^t$ слід розглядати таку норму

$$\|\xi\|_G^2\equiv M\{\|\xi\|_0^2\}. \tag{3.7}$$

Простір $\mathbb{D}_n([t_0-\tau,T_0])$ за нормою (3.6) не є повним, тому слід розглядати повний розширений простір $\tilde{\mathbb{D}}_n([t_0-\tau,T_0])$ до простору $\mathbb{D}_n([t_0-\tau,T_0])$ за нормою (3.7), де має місце теорема існування та єдиності розв'язку системи (3.1), (3.2) з точністю до стохастичної еквівалентності $\tilde{\mathbb{D}}_n\supseteq\mathbb{D}_n$ [13].

Під сильним розв'язком задачі (3.1),(3.2) розуміємо ([13]) сепарабельний випадковий процес $\{x(t),t\ge t_0\}$ у просторі Скорохода $\mathbb{D}_n([t_0-\tau,T_0])$ неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі, який з імовірністю одиниця задовольняє при $\forall t\ge t_0$ рівняння

$$x(t)=x_0+A\int\limits_{t_0}^{t}x(s)ds+A_1\int\limits_{t_0}^{t}x(s-\tau)ds+$$

$$+B\int\limits_{t_0}^{t}x(s)dw(s)+B_1\int\limits_{t_0}^{t}x(s-\tau)dw(s)+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{U} C(u)x(s)\tilde{\nu}(ds,du)+\int_{t_0}^{t}\int_{U} C_1(u)x(s-\tau)\tilde{\nu}(ds,du). \quad (3.8)$$

Означення 3.1. *Тривіальний розв'язок $\{x(t)\equiv 0\}$ системи (3.1),(3.2) називається абсолютно стійким за Ляпуновим у середньому квадратичному, якщо для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що з умови $|x_0| < \delta$ випливає*

$$\mathbf{E}\{|x(t)|^2 \mid |x_0| < \delta\} < \varepsilon.$$

Означення 3.2. *Тривіальний розв'язок $\{x(t)\equiv 0\}$ системи (3.1),(3.2) називається абсолютно асимптотично стійким за Ляпуновим у середньому квадратичному, якщо він абсолютно стійкий в розумінні означення 1 та*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\{|x(t)|^2 \mid |x_0| < \delta\} = 0.$$

Проведемо дослідження абсолютної асимптотичної стійкості у середньому квадратичному тривіального розв'язку системи (3.1), (3.2) методом функціоналів Ляпунова-Красовського. Потрібний функціонал Ляпунова-Красовського слід шукати серед квадратичних функціоналів вигляду [25]

$$V(x(t+\theta)) = [x(t)]^T Hx(t)+$$

$$+\gamma\int_{t-\tau}^{t} x^T(\theta)Hx(\theta)d\theta; \quad -\tau\le\theta\le 0, \quad (3.9)$$

де невідому симетричну додатно визначену матрицю H розмірності $n\times n$ та коефіцієнт $\gamma > 0$ визначимо нижче.

Покажемо, що існують матричне рівняння та скалярна (непокращувана) нерівність, з яких можна однозначно знайти матрицю $H > 0_{n\times n}$ та число $\gamma > 0$, тим самим визначивши функціонал (3.9) і сформулювати критерій асимптотичної стійкості у середньому квадратичному. З цією метою обчислимо, використовуючи формулу Іто-Скорохода стохастичного диференціювання, диференціал dV функціонала (3.9) на розв'язках системи стохастичних рівнянь (3.1),(3.2). Одержимо:

$$dV(x) = d(x(t))^T Hx(t) + (x(t))^T Hdx(t)+$$

$$+[Bx(t) + B_1x(t-\tau)]^T H[Bx(t) + B_1x(t-\tau)]dt+$$

$$+[\gamma(x(t))^T Hx(t) - \gamma(x(t-\tau))^T Hx(t-\tau)]dt+$$

$$+[\int\limits_U [C(u)x(t) + C_1(u)x(t-\tau)]^T H[C(u)x(t)+$$

$$+C_1(u)x(t-\tau)]\Pi(du)]dt+$$

$$+\int\limits_U [C(u)x(t) + C_1(u)x(t-\tau)]^T H[C(u)x(t)+$$

$$+C_1(u)x(t-\tau)]\tilde{\nu}(du, dt) =$$

$$= \Big\{[Ax(t) + A_1x(t-\tau)]^T dt + [Bx(t) + B_1x(t-\tau)]^T dw(t)+$$

$$+\int\limits_U [C(u)x(t) + C_1(u)x(t-\tau)]^T \tilde{\nu}(du, dt)\Big\} Hx(t)+$$

$$+(x(t))^T H\Big\{[Ax(t) + A_1x(t-\tau)]dt + [Bx(t) + B_1x(t-\tau)]dw(t)+$$

$$+\int\limits_U [C(u)x(t) + C_1(u)x(t-\tau)]\tilde{\nu}(du, dt)\Big\}+$$

$$+[Bx(t) + B_1x(t-\tau)]^T H[Bx(t) + B_1x(t-\tau)]dt+$$

$$+[\gamma(x(t))^T Hx(t) - \gamma(x(t-\tau))^T Hx(t-\tau)]dt+$$

$$+[\int\limits_U [C(u)x(t) + C_1(u)x(t-\tau)]^T H[C(u)x(t)+$$

$$+C_1(u)x(t-\tau)]\Pi(du)]dt+$$

$$+\int\limits_U [C(u)x(t)+C_1(u)x(t-\tau)]^T H[C(u)x(t)+$$

$$+C_1(u)x(t-\tau)]\tilde{\nu}(du,dt). \tag{3.10}$$

Визначимо, виходячи з (3.10), математичне сподівання повної похідної $\mathbf{E}\{\frac{dV}{dt}\}$ на розв'язках системи (3.1), (3.2). Одержимо вираз

$$\mathbf{E}\{\frac{dV}{dt}\} = \frac{\mathbf{E}\{dV\}}{dt} = [Ax(t)+A_1x(t-\tau)]^T Hx(t)+$$

$$+(x(t))^T H[Ax(t)+A_1x(t-\tau)]+$$

$$+[Bx(t)+B_1x(t-\tau)]^T H[Bx(t)+B_1x(t-\tau)]+$$

$$+\gamma(x(t))^T Hx(t)-\gamma(x(t-\tau))^T Hx(t-\tau)+$$

$$+\int\limits_U [C(u)x(t)+C_1(u)x(t-\tau)]^T H[C(u)x(t)+C_1(u)x(t-\tau)]\Pi(du). \tag{3.11}$$

Праву частину співвідношення (3.11) можна розглядати як квадратичну форму від $x(t), x(t-\tau)$. Тоді (3.11) перепишеться у вигляді:

$$\mathbf{E}\{\frac{dV}{dt}\} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11}(H) & K_{12}(H) \\ K_{21}(H) & K_{22}(H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Тут

$$K_{11}(H) = A^T H + HA + \gamma H + B^T HB + P_{11}(H);$$

$$K_{12}(H) = HA_1 + B_1^T HB + P_{12}(H);$$

$$K_{21}(H) = A_1^T H + B_1^T HB + P_{21}(H); \tag{3.13}$$

$$K_{22}(H) = -\gamma H + B_1^T H B_1 + P_{22}(H);$$

$$P_{11}(H) \equiv \int\limits_{U} C^T(u) H C(u) \Pi(du);$$

$$P_{12}(H) \equiv \int\limits_{\mathbf{U}} C^T(u) H C_1(u) \Pi(du);$$

$$P_{21}(H) \equiv \int\limits_{\mathbf{U}} C_1^T(u) H C(u) \Pi(du);$$

$$P_{22}(H) \equiv \int\limits_{\mathbf{U}} C_1^T(u) H C_1(u) \Pi(du).$$

Математичне сподівання (3.12) від'ємне лише в тому випадку, коли квадратична форма, яка стоїть справа у (3.12), на розв'язках $x(t)$ від'ємно визначена, а за сукупністю всіх змінних $x(t)$ і $x(t-\tau)$ лишається недодатно визначеною; іншими словами, коли від'ємно визначена матриця $K_{11}(H)$ та недодатно визначена наступна блочна матриця

$$K(H) \equiv \begin{bmatrix} K_{11}(H) & K_{12}(H) \\ K_{21}(H) & K_{22}(H) \end{bmatrix}. \tag{3.14}$$

Матриця $K_{11}(H)$ від'ємно визначена тоді і тільки тоді, коли матриця H обчислюється як розв'язок матричного рівняння Сільвестра:

$$A^T H + HA + \gamma H + B^T H B + P_{11}(H) = -G, \tag{3.15}$$

де G — довільна симетрична додатно визначена матриця розмірності $n \times n$.

Ясно, що якщо система вигляду

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t), \quad t_0 \le t, \tag{3.16}$$

$$y(t_0) = x_0$$

є асимптотично нестійкою, то не існує і такого числа $\gamma > 0$, при якому існує розв'язок $H > 0_{n\times n}$ рівняння Сільвестра (3.15). Також очевидно, що для того щоб існувало число $\gamma > 0$, при якому рівняння Сільвестра (3.15) має розв'язок у класі додатно визначених матриць H, необхідно і досить (див.[25, с.42, лема 2.2]), щоб матриця A була експоненціально стійкою з деяким показником експоненти β.

Тоді, обираючи γ з інтервалу $0 < \gamma < 2\beta \, (\gamma \to 2\beta)$, приходимо до наступної теореми.

Теорема 3.1. *Тривіальний розв'язок $\{x(t) \equiv 0\}$ системи рівнянь (3.1),(3.2) асимптотично стійкий за Ляпуновим у середньому квадратичному для довільного сталого відхилення аргумента $\tau \geq 0$, якщо:*

1) матриця A експоненціально стійка з показником експоненти $\beta > 0$;

2) матриця $A + A_1$ гурвіцева;

3) існує додатно визначений розв'язок H матричного узагальненого рівняння Сільвестра (3.15), де γ — додатне число з інтервалу $0 < \gamma < 2\beta, \gamma \to 2\beta$; G — довільна симетрична додатно визначена матриця розмірності $n \times n$.

4) має місце матрична нерівність

$$K(H) \leq 0_{2n\times 2n}, \tag{3.17}$$

тобто блочна матриця $K(H)$ є недодатно визначеною.

Нерівність (3.17) накладає обмеження на матриці A_1, B_1 та матриці-функції $C(u), C_1(u)$. При відсутності пуассонівських перемикань з вищенаведеної теореми випливає теорема 4.1 роботи [25].

Розглянемо многовид вигляду еліпсоїда

$$\Phi \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbb{E}\{x^T Q x\} = C; \, C = \text{const} > Q; Q = Q^T > 0\}, \tag{3.18}$$

де Q — стала матриця.

Теорема 3.2. *Розв'язок системи (3.1), (3.2) належить до еліпсоїда Φ або знаходиться всередині цього еліпсоїда при* *довільному загаюванні $\tau > 0$, якщо виконуються умови 1), 2) теореми 3.1,*

3) початкові умови знаходяться в області $x_0^T Q x_0 \le C$;

4) для довільного $\gamma \in (0, 2\beta)$ при $\gamma \to 2\beta$ мають місце матричні співвідношення

$$K(Q) \le 0. \tag{3.19}$$

Знак рівності в (3.19) відповідає випадку перебування розв'язків на еліпсоїді.

Доведення теореми 3.2 базується на використанні додатно визначеного квадратичного функціоналу вигляду (3.9) та аналізі відповідного стохастичного диференціалу.

При відсутності пуассонівських перемикань з вищенаведеної теореми випливає теорема 4.6 роботи [25].

3.1.2. Достатні умови асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціально-різницевих рівнянь із загаюванням, які не розв'язані відносно похідних

Використовуючи методику, наведену в 3.1.1, одержано аналогічні результати для стохастичних диференціально-різницевих рівнянь із загаюванням, які не розв'язані відносно похідних. Наведемо постановку задачі для цього випадку та формулювання основних теорем.

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ з потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \ge t_0\}, \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ задано випадковий процес $\{x(t), t \ge t_0 - \tau\} \in \mathbb{R}^n$ системою наступних стохастичних диференціальних рівнянь із загаюванням, які не розв'язані відносно похідних:

$$Ddx(t) = [Ax(t) + A_1 x(t-\tau)]dt + [Bx(t) + B_1 x(t-\tau)]dw(t) +$$

$$+ \int_U [C(u)x(t) + C_1(u)x(t-\tau)]\tilde{\nu}(du, dt), \tag{3.20}$$

з початковою умовою

$$0 \le t_0 \le t; \quad x(\theta) = x_0 = const \ne 0; \quad \tau > 0; \quad t_0 - \tau \le \theta \le t_0. \tag{3.21}$$

де $\{w(t) \equiv w(t,\omega), t \ge t_0\}$ - скалярний вінерівський процес; $\tilde{\nu}(du,dt) = \nu(du,dt) - \Pi(du)dt$ - центрована пуассонівська міра [13], $U \in \mathbb{R}^n$; A, B, A_1, B_1, D - сталі матриці розмірності $n \times n$; $C(u), C_1(u)$ - матричні функції такі, що

$$\int\limits_U \|C(u)\|^2 \Pi(du) < \infty; \quad \int\limits_U \|C_1(u)\|^2 \Pi(du) < \infty. \tag{3.22}$$

Під сильним розв'язком задачі (3.20),(3.21) розуміємо ([13]) сепарабельний випадковий процес $\{x(t), t \ge t_0\}$ у просторі Скорохода $\mathbb{D}([t_0 - \tau, T_0])$ неперервних справа функцій, які мають лівосторонні границі, який з імовірністю одиниця задовольняє при $\forall t \ge t_0$ рівняння

$$Dx(t) = Dx_0 + A\int\limits_{t_0}^{t} x(s)ds + A_1\int\limits_{t_0}^{t} x(s-\tau)ds+$$

$$+B\int\limits_{t_0}^{t} x(s)dw(s) + B_1\int\limits_{t_0}^{t} x(s-\tau)dw(s)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_U C(u)x(s)\tilde{\nu}(ds,du) + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_U C_1(u)x(s-\tau)\tilde{\nu}(ds,du). \tag{3.23}$$

Потрібний для досліджень функціонал Ляпунова-Красовського слід шукати серед квадратичних функціоналів вигляду

$$V(x(t+\theta)) = [x(t)]^T D^T H D x(t)+$$

$$+\gamma\int\limits_{t-\tau}^{t} x^T(\theta) D^T H D x(\theta) d\theta; \quad -\tau \le \theta \le 0, \tag{3.24}$$

Теорема 3.3. *Тривіальний розв'язок* $\{x(t) \equiv 0\}$ *системи рівнянь (3.20),(3.21) асимптотично стійкий за Ляпуновим у середньому квадратичному для довільного сталого відхилення аргумента* $\tau \geq 0$ *тоді і тільки тоді, коли:*

1) матричний пучок $A - \lambda D$ *експоненціально стійкий з яким-небудь показником експоненти* $\beta > 0$*, а пучок* $A + A_1 - \lambda D$ *гурвіцевий;*

2) існує додатно визначений розв'язок H *матричного узагальненого рівняння Сільвестра*

$$A^T HD + D^T HA + \gamma D^T HD + B^T HB+$$
$$+ \int\limits_U C^T(u)HC(u)\Pi(du) = -G, \tag{3.25}$$

де γ *- додатне число з інтервалу* $0 < \gamma < 2\beta, \gamma \to 2\beta$*;* G *- довільна симетрична додатно визначена матриця розмірності* $n \times n$.

3) має місце матрична нерівність

$$R(H) \leq 0_{2n\times 2n}, \tag{3.26}$$

де

$$R(H) \equiv \begin{bmatrix} R_{11}(H) & R_{12}(H) \\ R_{21}(H) & R_{22}(H) \end{bmatrix},$$

$$R_{11}(H) = A^T HD + D^T HA + \gamma D^T HD + B^T HB+$$
$$+ \int\limits_U C^T(u)HC(u)\Pi(du);$$

$$R_{12}(H) = D^T HA_1 + B_1^T HB + \int\limits_{\mathbf{U}} C^T(u)HC_1(u)\Pi(du);$$

$$R_{21}(H) = A_1^T HD + B_1^T HB + \int\limits_{\mathbf{U}} C_1^T(u)HC(u)\Pi(du);$$

$$R_{22}(H) = -\gamma D^T H D + B_1^T H B_1 +$$

$$+ \int\limits_{\mathbf{U}} C_1^T(u) H C_1(u) \Pi(du).$$

При відсутності пуассонівських перемикань з вищенаведеної теореми випливає теорема 4.7 роботи [25].

Розглянемо многовид вигляду (3.18). Тоді справджується наступне твердження.

Теорема 3.4. *Розв'язок системи (3.20), (3.21) належить до еліпсоїда Φ або знаходиться всередині цього еліпсоїда при довільному загаюванні $\tau > 0$, якщо виконуються умови 1), 2) теореми 3.3;*

3) початкові умови знаходяться в області $x_0^T Q x_0 \le C$;

4) для довільного $\gamma \in (0, 2\beta)$ при $\gamma \to 2\beta$ мають місце матричні співвідношення

$$R(Q) \le 0. \tag{3.27}$$

Знак рівності в (3.27) відповідає випадку перебування розв'язків на еліпсоїді.

При відсутності пуассонівських перемикань з вищенаведеної теореми випливає теорема 4.12 роботи [25].

§ 3.2. Ітераційна процедура розв'язання узагальненого матричного рівняння Сільвестра

Розглянемо модифікацію принципу стислих відображень для розв'язання узагальненого рівняння Сільвестра

$$A^T H + H A + B^T H B + \int\limits_{\mathbf{U}} C^T(u) \Pi(du) = -Q. \tag{3.38}$$

Зауважимо, що рівняння Сільвестра вигляду (3.15) можна звести до вигляду (3.38), записавши його як

$$\left(A+\frac{1}{2}\gamma I\right)^T H+H\left(A+\frac{1}{2}\gamma I\right)+B^T HB+\int\limits_{\mathbf{U}} C^T(u)\Pi(du)=-Q.$$

Розглянемо операторне рівняння

$$G[x]=F[x], \tag{3.39}$$

яке визначено у повному метричному просторі $\mathbb{R}^n$ з метрикою $\rho(x,y)$.

Теорема 3.9. Нехай у повному метричному просторі R^n задано оператори $F[x]$ та $G[x]$, які задовольняють наступні властивості:

1) оператори $F[x]$ і $G^{-1}[x]$ переводять точки простору $\mathbb{R}^n$ в точки цього ж простору, тобто $F[x]\in\mathbb{R}^n, G^{-1}[x]\in\mathbb{R}^n$;

2) оператори $F[x]$ і $G^{-1}[x]$ є операторами послідовного стиску, тобто існують сталі $\alpha>0$ та $\beta>0$ такі, що

$$\rho(F[x],F[y])\leq\alpha\rho(x,y),\quad 0<\alpha<1,$$

$$\rho(G^{-1}[x],G^{-1}[y])\leq\beta\rho(x,y),\quad 0<\beta<1.$$

Тоді операторне рівняння

$$G[x]=F[x]$$

має єдиний розв'язок і він може бути знайдений методом послідовних ітерацій

$$x^*=\lim_{k\to\infty}x_k, \tag{3.40}$$

де $x_{k+1}=G^{-1}[F[x_k]], k=0,1,2,...$

Доведення. Як випливає з вигляду побудованої послідовності (3.40)

$$\rho(x_k,x_{k+1})=\rho(G^{-1}[F[x_{k-1}]],G^{-1}[F[x_k]])\leq$$

$$\leq \beta\rho(F[x_{k-1}], F[x_k]) \leq \alpha\beta\rho(x_{k-1}, x_k) \leq ... \leq (\alpha\beta)^k\rho(x_0, x_1).$$

Покажемо, що послідовність $\{x_k\}, k = 0, 1, 2, ...$ — фундаментальна. З умови 1) випливає, що оператор $G^{-1}[F[x]]$ переводить точки простору $\mathbb{R}^n$ у точки цього ж простору.

Маємо, що

$$\rho(x_k, x_{k+1}) \leq \rho(x_k, x_{k+1}) + \rho(x_{k+1}, x_{k+2}) + ...+$$

$$+\rho(x_{k+m-1}, x_{k+m}) \leq (\alpha\beta)^k\rho(x_0, x_1) + (\alpha\beta)^{k+1}\rho(x_0, x_1) + ...+$$

$$+(\alpha\beta)^{k+m}\rho(x_0, x_1) < \frac{(\alpha\beta)^k}{1-\alpha\beta}\rho(x_0, x_1).$$

Оскільки $0 < \alpha\beta < 1$, то при досить великому $k > k(\varepsilon)$ виконується нерівність $\rho(x_k, x_{k+m}) < \varepsilon$ для довільного $m = 1, 2, ...$, тобто послідовність є фундаментальною та

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*, \quad x^* \in \mathbb{R}^n.$$

Доведемо, що x^* є розв'язком рівняння (3.39) методом від супротивного. Нехай це не так і

$$G^{-1}[F[x^*]] = x^{**}.$$

Тоді

$$\rho(x^{**}, x^*) \leq \rho(x^{**}, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_n) + \rho(x_n, x_*)$$

і для кожного доданку одержимо:

а) $\rho(x_n, x^*) < \frac{\varepsilon}{3}$ для всіх $n > N(\varepsilon)$, оскільки виконується (3.40);

б) $\rho(x_n, x^{n+1}) < \frac{\varepsilon}{3}$ для всіх $n > N(\varepsilon)$ внаслідок фундаментальності послідовності $\{x_n\}, n = 0, 1, 2, ...$;

в)

$$\rho(x^{**}, x_{n+1}) = \rho(G^{-1}[F[x^*]], G^{-1}[F[x_n]]) \leq$$

$$\leq \beta\rho(F[x^*], F[x_n]) \leq \alpha\beta\rho(x^*, x_n) < \varepsilon/3$$

для $n > N(\varepsilon)$, оскільки $0 < \alpha\beta < 1$.

Таким чином, $\rho(x^{**}, x^*) < \varepsilon$, а це можливе лише при $\rho(x^{**}, x^*) = 0$, оскільки $\varepsilon > 0$ — як завгодно мала величина.

Встановимо тепер єдиність розв'язку x^*. Нехай це не так та існують два розв'язки x^* та x^{**} рівняння (3.39). Тоді для них

$$\rho(x^*, x_{**}) = \rho(G^{-1}[F[x^*]], G^{-1}[F[x^{**}]]) \leq$$
$$\leq \beta\rho(F[x^*], F[x^{**}]) \leq \alpha\beta\rho(x^*, x^{**}),$$

що можливо лише при $\rho(x^*, x^{**}) = 0$, оскільки $0 < \alpha\beta < 1$.

Теорема 3.9 доведена.

Використаємо цей факт для розв'язання узагальненого рівняння Сильвестра (3.38). Перепишемо його у вигляді

$$-A^T H - HA = Q + B^T HB + \int\limits_{\mathbf{U}} C^T(u)HC(u)\Pi(du). \quad (3.41)$$

Позначимо:

$$F[H] = Q + B^T HB + \int\limits_{\mathbf{U}} C^T(u)HC(u)\Pi(du),$$

$$G[H] = -A^T H - HA.$$

Побудуємо неявний метод за ітераційним процесом

$$G[H_{k+1}] = F[H_k], \quad k = 0, 1, 2, ... \quad (3.42)$$

Одержимо твердження, яке буде достатньою умовою збіжності методу (3.42) до розв'язку рівняння (3.41), при цьому під збіжністю будемо розуміти те, що послідовність $\{H_k\}, k = 0, 1, 2, ...$ збігається до розв'язка рівняння, тобто $\lim_{k\to\infty} H_k = H^*$ та

$$A^T H^* - H^* A = Q + B^T H^* B + \int\limits_{\mathbf{U}} C^T(u)H^*C(u)\Pi(du).$$

Теорема 3.10. *Нехай:*

1) матриця A - гурвіцева;
2) $|D^{-1}| \leq \beta$; де $D \equiv A^T \otimes I + I \otimes A^T, 0 < \beta < 1$;
3) B - додатно визначена матриця така, що $|B|^2 \leq \frac{\alpha}{2}$;
4)

$$\int\limits_{\mathbf{U}} C^T(u) H C(u) \Pi(du) \leq \frac{\alpha}{2} |H|, \quad 0 < \alpha < 1,$$

де $C(u)$ - додатно визначена матрична функція.

Тоді ітераційний процес (3.42) збігається до розв'язку H^* рівняння (3.41).

Доведення. Оскільки матриця Q додатно визначена і виконується умова 4), то $F[H]$ — оператор, який переводить простір додатно визначених матриць в себе. Рівняння Ляпунова

$$-A^T H - HA = F, \tag{3.43}$$

де F — довільна додатно визначена матриця, має розв'язок у вигляді додатно визначеної матриці $H[s]$, тобто $G^{-1}[H]$ також переводить простір в себе (оскільки виконується умова 1).

Візьмемо в якості метрики матричну норму

$$\rho(H_1, H_2) = |H_1 - H_2|.$$

Простір додатно визначених матриць із введеною таким чином метрикою буде повним метричним простором. Отже, для збіжності ітераційного процесу необхідно перевірити виконання умови стиску операторів $F[H]$ та $G^{-1}[H]$. Одержимо ланцюг нерівностей

$$\rho(F[H_1], F[H_2]) =$$

$$= |B^T (H_1 - H_2) B + \int\limits_{\mathbf{U}} C^T(u)(H_1 - H_2) C(u) \Pi(du)| \leq$$

$$\leq |B|^2 |H_1 - H_2| + \frac{\alpha}{2} |H_1 - H_2| < \alpha |H_1 - H_2|.$$

Таким чином,

$$\rho(F[H_1], F[H_2]) < \alpha\rho(H_1, H_2).$$

Запишемо рівняння (3.43) у векторному вигляді:

$$Wh = f,$$

де $W = A^T \otimes I + I \otimes A^T$ - кронекеровий добуток матриць;

$$h^T = (h_{11}, ..., h_{1n}, ..., h_{n1}, ..., h_{nn}); \quad h_{ij} = h_{ji};$$

$$f^T = (f_{11}, ..., f_{1n}, ..., f_{n1}, ..., f_{nn}); \quad f_{ij} = f_{ji}; \quad i = \overline{1, n}.$$

Тоді

$$h = W^{-1}f$$

та

$$\rho(G^{-1}[H_1], G^{-1}[H_2]) = |W^{-1}h_1 - W^{-1}h_2| \leq |W^{-1}||h_1 - h_2|,$$

звідки маємо, що умовою послідовного стиску є умова

$$|[A^T \otimes I + I \otimes A^T]^{-1}| \leq \beta, \quad 0 < \beta < 1.$$

Теорема 3.10 доведена.

Наведені теоретичні відомості дозволяють чисельно реалізувати алгоритм наближеного розв'язання узагальненого рівняння Сільвестра за допомогою ЕОМ.

§ 3.3. Оптимізаційна процедура розв'язання узагальненого матричного рівняння Сільвестра

Наведемо ще один метод розв'язання узагальненого рівняння Сільвестра, який полягає в заміні задачі розв'язання цього рівняння розв'язанням спеціальної оптимізаційної задачі. Для цього використаємо методи динамічного програмування [58, 8].

Спочатку введемо цільову функцію

$$\varphi_0(H) = -\lambda_{min}(-A^T H - HA - B^T HB - \int\limits_U C^T(u)HC(u)\Pi(du)), \tag{3.44}$$

визначену на множині симетричних додатно визначених матриць H, обмежених одиничною сферою, тобто $H \in \bar{L}$, де

$$\bar{L} \equiv \{H|\lambda_{min}(H) \geq; \lambda_{max}(H) \leq 1\}. \tag{3.45}$$

Далі розглянемо наступну оптимізаційну задачу:

$$\arg\min_{H \in \bar{L}} \varphi_0(H). \tag{3.46}$$

Лема 3.1. *Для оптимізаційної задачі (3.46) існує розв'язок.*

Вигляд функції $\varphi_0(H)$ та область її визначення характеризують наступні твердження.

Лема 3.2. *Функція $\varphi_0(H)$ є опуклою.*

Лема 3.3. *Множина $\bar{L}$ є опуклою.*

При розв'язуванні задач опуклого програмування використовуються поняття узагальненого градієнта та градієнтної множини [58].

Означення 3.3.3. *Під скалярним добутком двох матриць $H_1, H_2 \in L$ будемо розуміти вираз*

$$< H_1, H_2 > \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_{ij}^1 h_{ij}^2,$$

де $H_1 = \{h_{ij}^1\}, H_2 = \{h_{ij}^2\}, i, j = \overline{1, n}$.

Означення 3.4. *Узагальненим градієнтом опуклої функції $\varphi(H)$ у внутрішній точці $H_0 \in \bar{L}$ називається матриця Φ, для якої має місце нерівність*

$$\varphi(H) - \varphi(H_0) \geq < \Phi, H - H_0 > .$$

Означення 3.5. *Множина матриць Φ, які є градієнтом функції $\varphi(H)$ у точці $H_0 \in \bar{L}$, називається градієнтною множиною та позначається $G_\varphi[H]$.*

Теорема 3.11. *Узагальнений градієнт Φ функції*

$$\varphi_0(H) = -\lambda_{\min}(-A^T H - HA - B^T HB - \int\limits_U C^T(u)HC(u)\Pi(du)),$$

у точці $H_0 \in L$ обчислюється за формулою

$$\Phi \equiv \{\varphi_{ij}\} = \{-y_{\min}^T(-A^T\Delta_{ij} - \Delta_{ij}A-$$

$$-B^T\Delta_{ij}B - \int\limits_U C^T(u)\Delta_{ij}C(u)\Pi(du))y_{\min}\},$$

$i, j = \overline{1, n}$, де Δ_{ij} - матрица, в якої на перетині i-ої стрічки та j-го стовпця стоїть одиниця, а решта нулі; $y_{\min}$ - вектор одиничної сфери, на якому квадратична форма

$$y^T(-A^T H_0 - H_0 A - B^T H_0 B - \int\limits_U C^T(u)H_0C(u)\Pi(du))y$$

набуває мінімального значення.

Замінимо задачу

$$\varphi_0(H) \to \min_{H \in \bar{L}},$$

де

$$\bar{L} \equiv \{H : \lambda_{\min}(H) \geq 0; \lambda_{\max}(H) \leq 1\},$$

задачею безумовної мінімізації.

Для цього розглянемо функцію Лагранжа

$$\mathcal{L}(H, \beta) = \varphi_0(H) + \beta_1\varphi_1(H) + \beta_2\varphi_2(H),$$

$$\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0. \tag{3.47}$$

Тут $\varphi_1(H) = -\lambda_{\min}(H); \varphi_2(H) = -\lambda_{\max}(H) - 1$.

Теорема 3.12. *Точка $H_0 \in \bar{L}$ є розв'язком задачі (3.46) тоді і тільки тоді, коли імнує вектор (β_1^0, β_2^0), на якому трійка $(H_0, \beta_1^0, \beta_2^0)$ є сідловою точкою функції Лагранжа (3.47) на множині $\bar{L}x\{\beta_1 \geq 0, \beta_2 \geq 0\}$.*

Позначимо через $G_{\varphi_1}[H]$ градієнтну множину функцій $\varphi_1(H)$ у точці $H_0 \in \bar{L}$. Легко бачити, що $G_{\varphi_1}[H]$ співпадає з множиною матриць $\Phi = \{\varphi_{ij}^1\}; i, j = \overline{1, n}$, де

$$\varphi_{ij}^1 = -x_{\min}^T \Delta_{ij} x_{\min}. \tag{3.48}$$

Далі позначимо градієнтну множину функції $\varphi_2(H)$ в точці $H_0 \in \bar{L}$ через $G_{\varphi_2}[H]$, яка співпадає з $\Phi = \{\varphi_{ij}^2\}; i, j = \overline{1, n}$, де

$$\varphi_{ij}^2 = -x_{\max}^T \Delta_{ij} x_{\max}, \tag{3.49}$$

а $x_{\min}$ та $x_{\max}$ - одиничні векторы, на яких квадратична форма $x^T H x$ набуває відповідно мінімального і максимального значення.

Тоді в термінах узагальнених градієнтів теорему 3.12 можна сформулювати так.

Теорема 3.13. *Точка $H_0 \in \bar{L}$ є розв'язком задачі (3.46) тоді і тільки тоді, коли існує вектор (β_1^0, β_2^0), при якому градієнтна множина*

$$G_{\mathcal{L}}[H] = G_{\varphi_0}[H] + \beta_1^0 G_{\varphi_1}[H] + \beta_2^0 G_{\varphi_2}[H] \tag{3.50}$$

містить нульову матрицю, тобто $0 \in G_{\mathcal{L}}[H]$.

Висновок:

1) при розв'язуванні задачі знаходження $\arg \min\limits_{H \in \bar{L}} \varphi_0(H)$ необхідно обчислити градієнтну множину $G_{\mathcal{L}}[H]$ (3.50) та перевірити на наявність в ньому нульового вектора.

2) при чисельному розв'язанні оптимізаційних задач (3.46) будують послідовність $\{H_k, k \geq 1\}$, яка збігається до H^* - розв'язку задачі (3.46), причому

$$\lim_{k \to \infty} G_{\mathcal{L}}[H_k] = 0.$$

Послідовність $\{H_k, k \geq 1\}$ будується у вигляді [8]

$$H_k = H_{k-1} - \rho_k G_\varphi[H_{k-1}]/\|G_\varphi[H_{k-1}]\|, \quad k = 1, 2, 3, ..., \quad (3.51)$$

де H_0 - довільна симетрична додатно визначена матриця.

Далі використовуємо наступне твердження [8].

Теорема 3.14. *Нехай*

1) функція $\varphi(H)$ опукла;

2) область її мінімумів обмежена;

3) задана послідовність $\beta_k > 0$:

$$\lim_{k\to\infty} \rho_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = \infty.$$

Тоді для послідовності матриць $\{H_k, k \geq 1\}$ (3.46) виконується

A) або існує скінченне $k = k^*$ таке, що $H_{k^*} \in M^*$;

B) або

$$\lim_{k\to\infty} \min_{H\in M^*} \|H_k - H\| = 0$$

та

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(H_k) = \min_{H\in \bar{L}} \varphi(H).$$

Із вищевикладеного можна сформулювати наступний алгоритм розв'язання узагальненого матричного рівняння Сільвестра.

0. Задаємо початкову симетричну додатно визначену матрицю H_0, $k = 0$ та eps > 0.

I. Обчислюємо

$$g_1(H_k) = \lambda_{\max}(H_k) - 1;$$

$$g_2(H_k) = \lambda_{\min}(H_k).$$

II. Якщо $g_1(H_k) > 0$, то за напрямок спуску вибрати

$$\text{direct } = xx^T, \quad \text{де} \quad x = \arg\max_{\|z\|=1} z^T H_k z.$$

Перейти до блоку V.

III. Якщо $g_2(H_k) > 0$, то за напрямок спуску вибрати

$$\text{direct } = -yy^T, \quad \text{де} \quad y = \arg \min_{\|z\|=1} z^T H_k z.$$

Перейти до блоку V.

IV. За напрямок спуску необхідно вибрати

$$\text{direct } = z^T \Delta_{ij} z,$$

де

$$z = \arg \max_{\|x\|=1} x^T (A^T H_k + H_k A + B^T H_k B + \int_U C^T(u) H_k C(u) \Pi(du)) x,$$

Δ_{ij} - матриця, в якої на перетині i-ого рядка та j-ого стовпця стоїть 1, решта нулі. Перейти до блоку V.

V. Обчислити нове наближення за формулою

$$H_{k+1} = H_k - \text{direct}\, h_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

VI. Якщо умова завершення процедуры $\|G_{\mathcal{L}}(H_k)\| <$ eps не виконується, то перейти до блоку I. У протилежному випадку - до блоку VII.

VII. $H^* = H_k$ - розв'язок рівняння Сільвестра з точністю eps.

Розділ 4. Побудова оптимального керування для стохастичних динамічних систем

§ 4.1. Стохастична задача оптимального керування

4.1.1. Теорема порівняння для розв'язків стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з необмеженою післядією

Нехай $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – ймовірнісний простір з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $\mathbb{D}$ — простір неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі (НПЛГ) зі значеннями з $\mathbb{R}^1$ та з рівномірною метрикою.

Теорема 1.1. *Нехай задані:*

1) строго зростаюча функція $\{\rho(x), x \in \mathbb{R}_+\}$ *така, що*

$$\rho(0) = 0, \quad \int\limits_0^\infty \rho^{-2}(x)dx = \infty; \tag{1.1}$$

2) неперервні функціонали $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}^1$*;* $c : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \times \mathbb{V} \to$

$\mathbb{R}^1$, $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^1$ такий, що для довільних $\varphi, \psi \in \mathbb{D}$

$$|b(t,\varphi) - b(t,\psi)| + \int\limits_{\mathbb{V}} |c(t,\varphi,u) - c(t,\psi,u)|\Pi(du) \le$$

$$\le \rho(\|\varphi - \psi\|), \quad t \ge 0; \tag{1.2}$$

3) два неперервних функціонали $a_i : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{D} \to \mathbb{R}^1$, $i = 1,2$ такі, що

$$a_1(t,\varphi) \le a_2(t,\varphi), \quad t \ge 0, \quad \varphi \in \mathbb{D}; \tag{1.3}$$

4) $\{x_i(t) \equiv x_i(t,\omega), t \in \mathbb{R}_+, \omega \in \Omega, i = 1,2\}$ — неперервні за t випадкові процеси, $\{F_t\}$-вимірні за ω;

5) стандартний вінерів процес $\{w(t) \equiv w(t,\omega)\} \subset \mathbb{R}^1$ такий, що $w(0) = 0$ майже напевно;

6) $\{\tilde{\nu}(t,A) = \nu(t,A) - \Pi(A)t, A \in \mathbb{V} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$ — центрована пуассонова міра, при цьому $\{w(t)\}$ і $\{\tilde{\nu}(t,A)\}$ незалежні один від одного;

7) $\{\alpha_i(t) \equiv \alpha_i(t,\omega), t \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ — вимірні відносно $\{F_t, t \ge 0\}$ випадкові процеси.

Нехай також майже напевно випадкові процеси з пунктів 4—7 даної теореми з імовірністю одиниця задовольняють умови:

$$x_i(t) - x_i(0) = \int\limits_0^t \alpha_i(s)ds + \int\limits_0^t b(s,x_i^s)dw(s) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{V}} c(s,x_i^s,v)\tilde{\nu}(ds,dv), \tag{1.4}$$

$$x_1(\theta) \le x_2(\theta), \quad \theta \in (-\infty, 0], \tag{1.5}$$

$$\alpha_1(t) \le a_1(t,x_1^t), \quad t \ge 0, \tag{1.6}$$

$$\alpha_2(t) \le a_2(t,x_2^t), \quad t \ge 0, \tag{1.7}$$

де $\{x^t \equiv \{x(t+\theta), \theta \in (-\infty, 0]\}$.

Тоді з імовірністю 1 виконується нерівність

$$x_1(t) \le x_2(t), \quad \forall\, t \ge 0. \tag{1.8}$$

Якщо виконується умова єдиності з імовірністю одиниця сильних розв'язків хоча б для одного з наступних СДФР:

$$dx(t) = a_i(t, x^t)dt + b(t, x^t)dw(t) + \int\limits_{\mathbb{V}} c(t, x^t, v)\tilde{\nu}(dt, dv), \quad i = 1, 2, \tag{1.9}$$

тоді (1.8) виконується й при більш слабкій умові:

$$a_1(t, \varphi) \le a_2(t, \varphi), \quad t \ge 0, \quad \varphi \in \mathbb{D}. \tag{1.9$'$}$$

Доведення. Будемо вважати, що a_i, $i = 1, 2$, b і c обмежені, оскільки цього можна досягти, застосовуючи міркування локалізації [9].

Етап I. Припустимо, що для $a_1(t, x)$ виконується умова Ліпшиця:

$$|a_1(t, \varphi) - a_1(t, \psi)| \le K\|\varphi - \psi\|, \quad \forall\, \varphi, \psi \in D. \tag{1.10}$$

Виберемо послідовність $\{\psi_n(t), t \in \mathbb{R}_+, n = 1, 2, ...\}$ неперервних функцій таких, що їх носії містяться в

$$(a_n, a_{n-1}), \quad 1 > a_1 > ... > a_n > 0,$$

$$0 \le \psi_n(t) \le \frac{2\rho^{-2}(t)}{n}, \quad \int\limits_{a_n}^{a_{n-1}} \psi_n(t)dt = 1. \tag{1.11}$$

Нехай

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \int\limits_0^x dy \int\limits_0^y \psi_n(t)dt, & x > 0. \end{cases}$$

Можна перевірити, що $\varphi_n \in C(\mathbb{R}^1)$,

$$\varphi_n(x) = 0 \qquad n \le 0,$$

$$\varphi_n(x) \uparrow x^+ \qquad n \to \infty;$$

$$\varphi_n''(x) = \psi_n(x), \quad 0 \le \varphi_n'(x) \le 1, \tag{1.12}$$

Застосовуючи узагальнену формулу Іто [9], одержимо

$$\varphi_n\left(x_1(t) - x_2(t)\right) = \sum_{i=1}^{5} I_i(n),$$

де

$$I_1(n) \equiv \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))\{b(s, x_1^s) - b(s, x_2^s)\}dw(s),$$

$$I_2(n) \equiv \int_0^t \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))\{\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\}ds,$$

$$I_3(n) \equiv \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_n''(x_1(s) - x_2(s))\{b(s, x_1^s) - b(s, x_2^s)\}^2 ds,$$

$$I_4(n) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{V}} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) -$$

$$-\varphi_n(x_1(s) - x_2(s))]\tilde{\nu}(ds, dv),$$

$$I_5(n) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{V}} [\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) -$$

$$-\varphi_n(x_1(s) - x_2(s)) - \varphi_n'(x_1(s) - x_2(s))(c(s, x_1^s, v) -$$

$$-c(s, x_2^s, v))]\Pi(dv)ds.$$

Використовуючи властивості стохастичних інтегралів [57], отримаємо

$$\mathbb{E}\left\{I_1(n)\right\} = 0, \quad \mathbb{E}\left\{I_4(n)\right\} = 0,$$

$$\mathbb{E}\{I_3(n)\} \le \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\int\limits_0^t \varphi_n^{''}(x_1(s) - x_2(s))\rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|)ds\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\int\limits_0^t \psi_n(x_1(s) - x_2(s))\rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|)ds\right\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\int\limits_0^t \frac{2}{n}\rho^{-2}(|x_1(s) - x_2(s)|)\rho^2(|x_1(s) - x_2(s)|)ds\right\} \le \frac{t}{n}.$$

Далі, враховуючи умови (1.6), (1.7), (1.10), (1.12), одержимо:

$$I_2(n) \le \int\limits_0^t \varphi_n^{'}(x_1(s) - x_2(s))\{a_1(s, x_1^s) - a_2(s, x_2^s)\}ds \le$$

$$\le K\int\limits_0^t \chi_{x_1(s) > x_2(s)}\|x_1^s - x_2^s\|ds \le$$

$$\le K\int\limits_0^t (x_1^s - x_2^s)^+ ds.$$

З (1.12) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\{I_5(n)\} = \mathbb{E}\left\{\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{V}} \lim_{n\to\infty}[\varphi_n(x_1(s) - x_2(s) + c(s, x_1^s, v) -\right.$$

$$-c(s, x_2^s, v))] - \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_1(s) - x_2(s)) -$$

$$- \lim_{n\to\infty} \varphi_n^{'}(x_1(s) - x_2(s)) \times$$

$$\times (c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v))\Pi(dv)ds =$$

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{V}} \lim_{n\to\infty} (c(s, x_1^s, v) - c(s, x_2^s, v)) \times$$

$$\times [1 - \varphi_n^{'}(x_1(s) - x_2(s))]\Pi(dv)ds = 0.$$

З граничної рівності

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(x_1(t) - x_2(t))}{x_1(t) - x_2(t)} = 1$$

випливає нерівність

$$\mathbb{E}\{(x_1(t) - x_2(t))^+\} \leq K \int_0^t \mathbb{E}\{(x_1(s) - x_2(s))^+\} ds.$$

Звідси одержимо, що $\mathbb{E}\{(x_1(t) - x_2(t))^+\} = 0$, $\forall\, t \geq 0$, тобто $\mathbb{P}\{(x_1(t) \leq x_2(t))^+\} = 1$, $\forall\, t \geq 0$.

Внаслідок виконання умов теорем існування та єдиності розв'язку [2], отримуємо НПЛГ траєкторії й робимо висновок, що (1.8) виконується. Завуажимо, що у випадку виконання умови Ліпшиця (1.10) для $a_2(t, \varphi)$, повторюючи міркування етапу I, можна одержати (1.8).

Етап II. У загальному випадку вибираємо $a(t, \varphi)$ таким чином, щоб

$$a_1(t, \varphi) < a(t, \varphi) < a_2(t, \varphi), \quad t \geq 0, \quad \varphi \in \mathbb{D},$$

і для $a(t, \varphi)$ виконується (1.8).

Нехай $\{x(t)\}$ — єдиний розв'язок СДФР:

$$dx(t) = a(t, x^t)dt + b(t, x^t)dw(t) + \int_{\mathbb{V}} c(t, x^t, v)\tilde{\nu}(dt, dv), \quad t \geq 0,$$

з початковими умовами

$$x(\theta) = \varphi_2(\theta), \quad -\infty < \theta \leq 0.$$

Тоді з результатів етапу 1 випливає, що $x(t) \leq x_2(t)$ і $x_1(t) \leq x(t)$ для $t \geq 0$ майже напевно. Таким чином, (1.8) виконується.

Етап III. Нехай існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок $\{x(t)\}$ рівняння (1.9) за умови, що $i = 1$:

$$dx(t) = a_1(t, x^t)dt + b(t, x^t)dw(t) + \int_{\mathbb{V}} c(t, x^t, v)\tilde{\nu}(dt, dv), \quad (1.13)$$

$$x(\theta) = \varphi_1(\theta), -\infty < \theta \leq 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ нехай $x^{(\pm\varepsilon)}(t)$ — два розв'язки рівнянь:

$$dx(t) = (a_1(t, x^t) \pm \varepsilon)dt + b(t, x^t)dw(t) + \int_{\mathbb{V}} c(t, x^t, v)\tilde{\nu}(dt, dv),$$

$$x(\theta) = \varphi_1(t), -\infty < t \leq 0,$$

для розв'язків яких з етапів I, II випливає, що

$$x^{(-\varepsilon)}(t) \leq x(t) \leq x^{(+\varepsilon)}(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Якщо $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$, тоді

$$x^{(-\varepsilon_1)}(t) \leq x^{(-\varepsilon_2)}(t), \quad x^{(+\varepsilon_2)}(t) \leq x^{(+\varepsilon_1)}(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Таким чином, внаслідок неперервності $a_1(t, \varphi)$ і єдиності розв'язку для (1.13), отримаємо

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} x^{(-\varepsilon)}(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} x^{(+\varepsilon)}(t) = x(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Враховуючи нерівності $\alpha_1 \leq a_1(t, x_1^t)$, $a_1(t, x_1^t) \leq a_1(t, x_1^t) + \varepsilon$ і застосовуючи вище доведені результати для $x_2(t)$ і $x^{(+\varepsilon)}(t)$, можемо записати, що

$$x_1(t) \leq x^{(+\varepsilon)}(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

При $\varepsilon \downarrow 0^+$ одержимо:

$$x_1(t) \leq x(t), \quad \forall\, t \geq 0. \tag{1.14}$$

Аналогічні міркування у випадку $\alpha_2(t) \geq a_2(t, x_2^t)$, $a_2(t, x^t) > a_1(t, x^t) - \varepsilon$ приводять до нерівності $x^{(-\varepsilon)}(t) \leq x_2(t)$ майже напевно. При $\varepsilon \downarrow 0^+$ маємо, що

$$x(t) \leq x_2(t), \quad \forall\, t \geq 0. \tag{1.15}$$

Порівнюючи нерівності (1.14) і (1.15), запишемо

$$x_1(t) \leq x(t) \leq x_2(t), \quad \forall\, t \geq 0,$$

що й завершує доведення теореми. ■

4.1.2. Стохастична задача управління

Розглянемо таку задачу стохастичної оптимізації, яку можна розв'язати за допомогою теореми 1.1. Нехай $k(z)$ — неспадна невід'ємна функція, визначена на $[0, \infty)$.

Означення 1.1. *Система випадкових процесів* $\{w(t), \tilde{\nu}(t, A), u(t), t \geq 0, A \in \mathbb{V}\}$ *називається допустимою системою або допустимим керуванням, якщо:*

1) вона визначена на $(\Omega, F, \mathbb{P})$ *з потоком σ-алгебр* $\{F_t, t \geq 0\}$*;*

2) $w(t)$, $(w(0) = 0)$ *—* n*-вимірний броунівський рух;*

3) $\tilde{\nu}(t, A)$ *— центрована пуассонова міра;*

4) $u(t)$ *—* n*-вимірний* $\{F_t\}$*-вимірний процес такий, що* $|u(t)| \leq 1$ *для всіх* $t \geq 0$ *майже напевно.*

Нехай $x \in \mathbb{D}$ задано й фіксовано. Для даної допустимої системи $\{w(t), \tilde{\nu}(t, A), u(t)\}$ ризик $x_u(t)$ визначається рівністю:

$$x_u(t) = x + \int_0^t b(s, x_u^s) dw(s) + \int_0^t \int_{\mathbb{V}} c(s, x_u^s, v) \tilde{\nu}(dv, ds) +$$

$$+ \int_0^t u(s) ds, \tag{1.16}$$

де

$$x_u^s \equiv \{x_u(s + \theta), \theta \in (-\infty, 0]\}.$$

Ставиться задача мінімізації математичного сподівання $\mathbb{E}\{k\|x_u^t\|\}$ за всіма можливими системами $\{w(t), \tilde{\nu}(t, A), u(t)\}$. Будемо розв'язувати цю задачу згідно з методикою, викладеною в [9].

Нехай $\mathbb{U}(y)$ визначено наступним чином:

$$\mathbb{U}(y) = \begin{cases} \frac{-y}{|y|}, & y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \\ 0, & y = 0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1.17}$$

Розглянемо таке стохастичне диференціально-функціональне рівняння

$$dx(t) = b(s, x^s) dw(t) + \int_{\mathbb{V}} c(s, x^s, v) \tilde{\nu}(dv, ds) + \mathbb{U}(x(t)) dt, \tag{1.18}$$

з початковими умовами

$$x(\theta) = \varphi(\theta), \quad \theta \in (-\infty, 0]; \quad x(0) = \varphi(0) = x.$$

Відомо [45], що розв'язок (1.18) існує й єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності.

Нехай

$$u^0(s) \equiv \mathbb{U}(x^0(t)), \tag{1.19}$$

тоді одержимо, що допустима система $\{w^0(t), \tilde{\nu}^0(t,A), u^0(t)\}$ задає оптимальне керування, тобто для довільної допустимої системи $\{w(t), \tilde{\nu}(t,A), u(t)\}$ маємо

$$\mathbb{E}\{k(|x^0(t)|)\} \leq \mathbb{E}\{k(|x_u(t)|)\}. \tag{1.20}$$

Для подальших міркувань нам буде потрібна наступна лема, доведення якої міститься у працях [45, 9].

Лема 1.1. *Нехай $\{x(t), w(t), \tilde{\nu}(t,A)\}$ — трійка n-вимірних $\{F_t\}$-узгоджених процесів, визначених на ймовірнісному просторі $(\Omega, F, \mathbb{P})$. Нехай $\{\mathbb{Y}(t), w'(t), \tilde{\nu}'(t)\}$ — подібна трійка, визначена на іншому ймовірнісному просторі $(\Omega', F', \mathbb{P}')$ з потоком $\{F_t'\}$.*

Тоді існує ймовірнісний простір $(\hat{\Omega}, \hat{F}, \hat{\mathbb{P}})$ з потоком $\{\hat{F}_t\}$ і четвірка $\{\hat{x}(t), \hat{\mathbb{Y}}(t), \hat{w}(t), \hat{\nu}(t,A)\}$ n-вимірних $\{\hat{F}_t\}$-узгоджених процесів таких, що:

I. $\{x(t), w(t), \tilde{\nu}(t,A)\} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \{\hat{x}(t), \hat{w}(t), \hat{\nu}(t,A)\}$.

II. $\{\mathbb{Y}(t), w'(t), \tilde{\nu}'(t)\} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \{\hat{\mathbb{Y}}(t), \hat{w}(t), \hat{\nu}(t,A)\}$.

III. $\{\hat{w}(t)\}$ — n-вимірний $\{\hat{F}_t\}$-броунівський рух.

IV. $\{\tilde{\nu}(t,A)\}$ — центрована пуассонова міра.

Тут знак $\overset{\mathcal{L}}{\approx}$ означає, що процеси мають однакові закони розподілу.

При вищенаведених припущеннях справджується наступна теорема.

Теорема 1.2. *Нехай $\{w(t), \nu(t,A), u(t)\}$ — довільна задана допустима система, для заданого $x \in \mathbb{R}^n$ нехай розв'язок $\{x_u(t)\}$ визначається рівністю (1.16).*

Тоді на відповідному ймовірнісному просторі можна побудувати $\mathbb{R}^n$-вимірні процеси $\{\hat{x}_u(t)\}$ и $\{x^0(t)\}$ такі, що:

I. $\{x_u(t)\} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \{\hat{x}_u(t)\}$.

II. $\{x^0(t)\} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \{\hat{x}^0(t)\}$.

III. $|\hat{x}^0(t)| \leq |x_u(t)|$ для довільного $t \geq 0$ майже напевно.

Доведення. Нехай $\{w(t), \tilde{\nu}(t,A), u(t)\}$ — задана допустима система:

$$x_u(t) = x + \int\limits_0^t b(s, x_u^s) dw(s) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{V}} c(s, x_u^s, v) \tilde{\nu}(ds, dv) + \int\limits_0^t u(s) ds,$$

— розв'язок рівняння (1.18).

Нехай $\{x^0(t), w^0(t), \tilde{\nu}^0(t, A)\}$ — відповідний розв'язок рівняння (1.18).

Виберемо $o(n)$-значну борелівську функцію $\{p_{ij}(x)\}$ таку, що

$$p_{ij}(x) = \begin{cases} \frac{x^i}{|x|}, & x \equiv (x^1, x^2, \ldots, x^n) \neq 0, \\ \delta_{1j}, & x = 0. \end{cases} \quad (1.21)$$

Нехай

$$\bar{w}(t) = \int\limits_0^t p(x_u(s)) dw(s), \quad \bar{w}^0(t) = \int\limits_0^t p(x^0(s)) dw^0(s),$$

$$\bar{\nu}^0(t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{V}} p(x^0(s)) \tilde{\nu}^0(du, ds).$$

Тоді одержимо, що

$$x_u(t) = x + \int\limits_0^t p^{-1}(x_u(s)) d\bar{w}(t) +$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{V}} p^{-1}(x_u(s)) \tilde{\nu}(du, ds) + \int\limits_0^t u(s) ds, \quad (1.22)$$

$$x^0(t) = x + \int_0^t p^{-1}(x^0(s))d\bar{w}^0(t) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{V}} p^{-1}(x^0(s))\bar{\bar{\nu}}^0(du, ds) + \int_0^t \mathbb{U}(x^0(s))ds. \qquad (1.23)$$

Застосовуючи лему 1.1 до $\{x_u(t), \bar{w}(t), \bar{\bar{\nu}}(t)\}$ и $\{x_0(t), \bar{w}^0(t), \bar{\bar{\nu}}^0(t)\}$, одержимо четвірку $\{\hat{x}^u(t), \hat{x}^0(t), \hat{w}(t), \hat{\bar{\nu}}(t)\}$ відповідних процесів на ймовірнісному просторі з потоком $\{\hat{F}_t\}$ таких, що $\{\hat{w}(t)\}$ — n-вимірний $\hat{F}_t$-вимірний броунівський рух, $\{\bar{\bar{\nu}}(t, A)\}$ — $\hat{F}_t$-вимірна центрована пуассонова міра і

$$\{x_u(t), \bar{w}(t), \bar{\bar{\nu}}(t)\} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \{\hat{x}_u^t(t), \hat{w}(t), \hat{\bar{\nu}}(t, A)\},$$

$$\{x^0(t), w^0(t), \bar{\bar{\nu}}^0(t)\} \overset{\mathcal{L}}{\approx} \{\hat{x}^0(t), w^0(t), \hat{\bar{\nu}}^0(t, A)\}.$$

Очевидно, що існує $\hat{F}_t$-вимірний n-вимірний процес $\{u(t)\}$ такий, що $|\hat{u}(t)| \leq 1$ для довільного $t \geq 0$ і

$$\hat{x}_u(t) = x + \int_0^t p^{-1}(\hat{x}_u(s))d\hat{w}(s) +$$

$$+ \int_0^t \int_{\mathbb{V}} p^{-1}(\hat{x}_u(s))\hat{\bar{\nu}}(dv, ds) + \int_0^t \hat{u}(s)ds.$$

Застосовуючи узагальнену формулу Іто до $x_1(t) = |\hat{x}^0(t)|^2$ и $x_2(t) = |\hat{x}_u(t)|^2$, одержимо

$$dx_2(t) = 2\hat{x}_u(t)p^{-1}(\hat{x}_u(t))dw(t) + \int_{\mathbb{V}} [|\hat{x}_u(t) + p^{-1}(\hat{x}_u(t))|^2 -$$

$$-|\hat{x}_u(t)|^2]_1\tilde{\nu}(dv,dt)+\{2\hat{x}_u(t)\hat{u}(t)+n+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}_u(t)+$$

$$+p^{-1}(\hat{x}_u(t))|^2-|\hat{x}_u(t)|^2-2\hat{x}_u(t)p^{-1}(\hat{x}_u(t))]_2\Pi(du)\}dt=$$

$$=2|\hat{x}_u(t)|d\hat{w}^1(t)+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}_u(t)+p^{-1}(\hat{x}_u(t))|^2-|\hat{x}_u(t)|^2]_1\tilde{\nu}(dv,dt)+$$

$$+\{2\hat{x}_u(t)\hat{u}(t)+n+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}_u(t)+p^{-1}(\hat{x}_u(t))|^2-$$

$$-|\hat{x}_u(t)|^2-2\hat{x}_u(t)p^{-1}(\hat{x}_u(t))]_2\Pi(dv)dt=2\sqrt{x_2(t)}d\hat{w}^1(t)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}_u(t)+p^{-1}(\hat{x}_u(t))|^2-|\hat{x}_u(t)|^2]_1\tilde{\nu}(dv,dt)+$$

$$+\{2\hat{x}_u(t)\hat{u}(t)+n+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}_u(t)+p^{-1}(\hat{x}_u(t))|^2-|\hat{x}_u(t)|^2-$$

$$-2\hat{x}_u(t)p^{-1}(\hat{x}_u(t))]_2\Pi(dv)dt, \tag{1.24}$$

$$dx_1(t)=2\hat{x}^0(t)p^{-1}(\hat{x}^0(t))d\hat{w}(t)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}^0(t)+p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2-|\hat{x}^0(t)|^2]_1\tilde{\nu}^0(dv,dt)+$$

$$+\{2\hat{x}^0(t)\mathbb{U}(x^0(t))+n+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}^0(t)+p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2-$$

$$-|\hat{x}^0(t)|^2-2\hat{x}^0(t)p^{-1}(\hat{x}^0(t))]_2\Pi(dv)\}dt=$$

$$=2|\hat{x}^0(t)|d\hat{w}^1(t)+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}^0(t)+p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2-$$

$$-|\hat{x}^0(t)|^2]_1\hat{\tilde{\nu}}^0(dv,dt)+\{-2|\hat{x}^0(t)|+n+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}^0(t)+p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2-$$

$$-|\hat{x}^0(t)|^2 - 2\hat{x}^0(t)p^{-1}(\hat{x}^0(t))]_2\Pi(dv)dt = 2\sqrt{x_1(t)}d\hat{w}^1(t)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}^0(t)+p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2 - |\hat{x}^0(t)|^2]_1\bar{\tilde{\nu}}^0(dv,dt) + \{-2\sqrt{x_1(t)}+n+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}^0(t)+p^{-1}(\hat{x}^0(t))|^2 - |\hat{x}^0(t)|^2 - 2\hat{x}^0(t)p^{-1}(\hat{x}^0(t))]_2\Pi(dv)\}dt, \tag{1.25}$$

де $\hat{w}(t) = (\hat{w}^1(t), \hat{w}^2(t), ..., \hat{w}^n(t))$.

Відмітимо, що

$$[xp^{-1}(x)]_i = \sum_j x_j(p^{-1}(x_j))_1 = \sum_j x_j p_{ij}(x) = \delta_{i1}|x|.$$

Нехай

$$b(t,n) = 2\sqrt{x\vee 0};$$

$$b_1(t,x) = b_2(t,x) = -2\sqrt{x\vee 0}+n+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}_u(t)+p^{-1}(\hat{x}_u(t))|^2 - |\hat{x}_u(t)|^2 - 2\hat{x}_u(t)p^{-1}(\hat{x}_u(t))]_2\Pi(dv),$$

$$\beta_2(t) = 2\hat{x}_u(t)\hat{u}(t) + n + \int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}_u(t)+p^{-1}(\hat{x}_u(t))|^2 -$$

$$-|\hat{x}_u(t)|^2 - 2\hat{x}_u(t)p^{-1}(\hat{x}_u(t))]_2\Pi(dv).$$

Тоді очевидно, що $\beta_1(t) = b_1(t, x_1(t))$ і

$$\beta_2(t) \geq -2|\hat{x}_u(t)| + n + \int\limits_{\mathbb{V}}[|\hat{x}_u(t)+p^{-1}(\hat{x}_u(t))|^2 -$$

$$-|\hat{x}_u(t)|^2 - 2\hat{x}_u(t)p^{-1}(\hat{x}_u(t))]_2\Pi(dv) = b_2(t, x_2(t)).$$

Існує [45] потраєкторна єдиність розв'язку для СДФР

$$dx(t) = b(t,x^t)dw(t) + \int\limits_{\mathbb{V}} c(t,x^t,u)\tilde{\nu}(dv,dt) + b_1(t,x(t))dt.$$

Таким чином, можна застосувати друге твердження теореми 1.1 і отримати, що $x_1(t) \leq x_2(t)$ для довільного $t \geq 0$ майже напевно. Теорема 1.2 доведена. ■

Розглянута оптимізаційна задача є прикладом задачі стохастичного керування для класу СДФР з розривними траєкторіями, яка підтверджує існування оптимального керування.

§ 4.2. Оптимальне керування стохастичними динамічними системами зі всією передісторією з пуассоновими перемиканнями

2.1. Постановка задачі. Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — ймовірнісний простір з потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$; $\{w(t) \equiv w(t,\omega)\} \subset \mathbb{R}^1$ — $\mathcal{F}_t$-вимірний вінерів процес; $\{\tilde{\nu}(t,A) \equiv \nu(t,A) - M\{\nu(t,A)\}\}$ — скалярна центрована пуассонова міра, $A \in Z \subset \mathbb{R}^n$, причому $\{w(t)\}$ і $\{\overline{\nu}(t,A)\}$ незалежні й $\mathcal{F}_t$-вимірні при $t \geq 0$; $\mathbb{D}_p$ — простір Скорохода локально обмежених функцій, які є неперервними справа й мають лівосторонні границі, вигляду $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ з нормою при $1 < p < \infty$

$$\|\varphi\|_{\mathbb{D}_p} \equiv \left(|\varphi(0)|^p + \int\limits_0^\infty |\varphi(s)|^p ds \right)^{1/p}, \tag{2.1}$$

де невласний інтеграл у правій частині (2.1) існує.

Керована стохастична динамічна система з післядією описується стохастичними диференціально-функціональними рівняннями зі всією передісторією (так звані рівняння Іто-Скорохода (СДФР∞)):

$$dx(t) = a(t, x_t, u)dt + b(t, x_t, u)dw(t) + \int\limits_Z c(t, x_t, z, u)\tilde{\nu}(dz, dt), \tag{2.2}$$

з початковою умовою

$$x_0(s) = \varphi_0(s), \quad -\infty < s \le 0. \tag{2.3}$$

Тут $x(t) \equiv x(t,\omega) \in \mathbb{R}^n$ — сильний розв'язок задачі Коші (2.2), (2.3); $x_t \equiv \{x(t+s), -\infty < s \le 0\} \in \mathbb{D}_p$ — відрізки розв'язків задачі (2.2), (2.3); $a : [0,T] \times \mathbb{D}_p \times U \to \mathbb{R}^n$, $b : [0,T] \times \mathbb{D}_p \times U \to \mathbb{R}^n$, $c : [0,T] \times \mathbb{D}_p \times Z \times U \to \mathbb{R}^n$ — векторні функціонали, причому ці функціонали неперервні за всіма аргументами; $u \in U$ — l-вимірний простір кусково-неперервних керувань [4]. Керування $u(t) \equiv u(t, x_t)$ є неупереджуючим функціоналом за другим аргументом, вимірним відносно відповідної борелевої σ-алгебри простору $[0,T] \times \mathbb{D}_p$.

Стохастичне диференціально-функціональне рівняння Іто-Скорохода (рівняння (2.2), (2.3) для $u \equiv 0$) вивчалося авторами [13], [24], де вказано умови існування та єдиності сильного розв'язку з точністю до стохастичної еквівалентності.

Синтез оптимального управління для стохастичних динамічних систем Іто одержаний у роботах [4], [109—118].

Уведемо наступні позначення: транспонування — знаком "^{T}"над вектором або матрицею;

$$\nabla v \equiv \left(\frac{\partial v}{dx_1}, \frac{\partial v}{dx_2}, ..., \frac{dv}{dx_n} \right)^T, \quad \nabla^2 v \equiv \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\}, \quad i,j = \overline{1,n};$$

Sp — слід матриці; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток, $v \equiv v(x_1, x_2, .., x_n)$.

Нехай $\psi(s)$ деяка функція на $(-\infty, T]$ за умови, що $\varphi(s) = \psi(t+s)$ при $s \le 0$ для фіксованого $t \in [0,T]$, належить простору $\mathbb{D}_p$.

Виберемо функціонал

$$v(t,\varphi) \equiv v(t, \varphi(0), \varphi(s)), \tag{2.4}$$

і позначимо

$$v_\varphi(t,x) = v(t,x,\psi(t+s)) \tag{2.5}$$

де $x \equiv \varphi(0) = \psi(t)$.

Розглянемо клас $\mathbb{V}$ функціоналів $v(t,\varphi)$, для яких $v_\varphi(t,x)$ двічі неперервно диференційовні за x і один раз за $t \in [0,T]$. На функціоналах $v(t,\varphi)$ з $\mathbb{V}$ визначений слабкий інфінітезимальний оператор

$$\mathcal{L}v\,(s,\varphi) \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\mathbb{E}v\,(s+t, x_t\,(s,\varphi)) - v\,(s,\varphi)\right].$$

На розв'язках СДФР∞ (2.2), (2.3) він обчислюється за формулою [108, теорема 2.3.1]:

$$\mathcal{L}v(t,x_t) = \frac{\partial v_\varphi(t,x_t)}{\partial t} + (\nabla v_\varphi(t,x_t), a(t,x_t,u)) +$$

$$+\frac{1}{2}Sp\left(\nabla^2 v_\varphi(t,x_t), b^T(t,x_t,u)\right) b(t,x_t,u) +$$

$$+\int\limits_Z \left[v_\varphi(t, x_t + c(t,x_t,z,u)) - v_\varphi(t,x_t)\right] -$$

$$-\left(\nabla v_\varphi(t,x_t), c(t,x_t,z,u)\right)\Pi(dz) \qquad (2.6)$$

Функціонали, що використовуються для дослідження стійкості розв'язків СДФР∞, які є, наприклад, математичною моделлю задач теорії механіки суцільних середовищ [93], набувають вигляду

$$v_1(\varphi) \equiv \int\limits_0^\infty k(t)g(\varphi(t),\varphi(0))dt. \qquad (2.7)$$

Якщо $k:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^1$ неперервно диференційовна, а функціонали a, b, c і g задовольняють певні умови [108], то функціонал v_1 належить до області визначення слабкого інфінітезимального оператора $D(\mathcal{L})$, а $\mathcal{L}v$ на розв'язках СДФР∞ (2), (3) обчислюється за формулою [108, теорема 2.3.2].

$$\mathcal{L}v_{1\varphi}(t,x_t) = k(0)g(x(0),x(0)) +$$

$$+\int_{-\infty}^{0} k(-s)g(x(-s),x(0))ds+(\mathcal{L}_2 g)(x_t), \tag{2.8}$$

$$(\mathcal{L}_2 g)(t,x_t)=\int_{-\infty}^{0} k(-s)\{(\nabla g(x(-s),x(0)),a(s,x_t,u))+$$

$$+\frac{1}{2}Sp\left(\nabla^2 g\right)(x(-s),x(0))b\left(s,x_t,u\right)b^T\left(s,x_t,u\right)+$$

$$+\int_Z [g(x(-s),x(0)+c(s,x_t,z,u))-g(x(-s),x(0))-$$

$$-(\nabla g(x(-s),x(0)),c(s,x_t,z,u))]\Pi(du)\}ds=$$

$$=\int_0^{\infty} k(s)\{(\nabla g(x(s),x(0)),a(s,x_t))+$$

$$+\frac{1}{2}Sp\left(\left(\nabla^2 g\right)(x(s),x(0))b(s,x_t)b^T(s,x_t)\right)+$$

$$+\int_Z [g(x(s),x(0)+c(s,x_t,z,u))-g(x(s),x(0))-$$

$$-(\nabla g(x(s),x(0)),c(s,x_t,u))]\Pi(du)\}ds. \tag{2.9}$$

Для класу неавтономних функціоналів

$$v_2(t,\varphi)\equiv\int_0^{\infty} k(s)g(t-s,\varphi(s),\varphi(0))ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{t} k(t-s)g(s,\varphi(s),\varphi(0)) \tag{2.10}$$

при виконанні певних умов, можна обчислити $\mathcal{L}v_2$ на розв'язках СДФР (2.2), (2.3) за формулою [108]

$$\mathcal{L}v_2(t,x_t)=$$

$$=k(0)g(t,x(t),x(t))+\int\limits_{-\infty}^{t}k(t-s)g(s,x(s),x(t))ds+\mathcal{L}_3v_{2\varphi}(t,x_t). \tag{2.11}$$

где

$$(\mathcal{L}_3v_2)(t,x_t)=\int\limits_{-\infty}^{t}k(t-s)\{(\nabla g(s,x(s),x(t)),a(t,x_t,u))+$$

$$+\frac{1}{2}Sp\left(\nabla^2 g(s,x(s),x(t))b(t,x_t,u)b^T(t,x_t,u)\right)+$$

$$+\int\limits_{Z}[g(s,x(s),x(t)+c(t,x_t,z,u)-g(s,x(s),x(t))-$$

$$-(\nabla g(s,x(s),x(t)),c(t,x_t,z,u))]\Pi(dz)\}ds. \tag{2.12}$$

Для складніших функціоналів $v_3(t,\varphi)\equiv Q(v_2(t,\varphi))$ і $v_4=Q(v(t,\varphi)+v_1(t,\varphi))$ обчислені $(\mathcal{L}v_3)(t,\varphi)$ і $(\mathcal{L}v_4)(t,\varphi)$ (теореми 2.3.4, 2.3.5).

Одержимо рівняння Беллмана, яке визначає умови оптимальності керування.

2.2. Достатні умови оптимальності. Доведемо спочатку декілька допоміжних тверджень.

Лема 2.1. *Нехай скалярний функціонал* $v:[0,T]\times\mathbb{D}_p\to\mathbb{R}^1$ *з класу* $\mathbb{V}$ *і* $\mathcal{L}v(t,\varphi)$ *— слабкий інфінітезимальний оператор від функціоналу* v *на розв'язках СДФР∞ (2.2), (2.3), визначений при* $s\in[t,T]$ *з початковою умовою* $x_t=\varphi$ *і обчислюється за однією з формул (2.6) (або (2.8) або (2.11)).*

Тоді для довільних $t_1 \le t_2$ *з відрізку* $[t, T]$ *одержимо*

$$\mathbb{E}_{t_1,\varphi} v(t_2, x_{t_2}) - \mathbb{E}_{t_1,\varphi} v(t_1, x_{t_1}) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbb{E}_{t_1,\varphi} v(t_2, x_{t_2})(\mathcal{L}v)(s, x_s)\}ds, \tag{2.13}$$

де $\mathbb{E}_{t,\varphi}$ *— операція умовного математичного сподівання, яке обчислюється за умови, що траєкторія процесу* $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *при* $t_1 \le t_2$*, як розв'язок задачі (2.2), (2.3) зафіксована й збігається з функцією* $\varphi \in \mathbb{D}_p$*, тобто* $x_{t_1} = \varphi$*.*

Доведення. Розв'язки СДФР∞ задачі Коші (2.2), (2.3) у просторі Скорохода $\mathbb{D}_p$ — локально обмежених функцій $\varphi : R_+ \to \mathbb{R}^n$, що мають лівосторонні границі й неперервні справа з нормою (2.1), мають строгу властивість Маркова

$$\mathbb{P}\left\{\omega : x_{t_2}(t_1, \varphi) \in A \middle| \mathcal{F}^{s,\varphi}_{t_1}\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\omega : x_{t_2}(t_1, \varphi) \in A \left| x_{t_1}\right.\right\} = p(t_1, x_{t_1}, t_2, A), \tag{2.14}$$

$t_2 \ge t_1 \ge s$, $A \in \Im$ — σ-алгебрі борелевих множин $\mathbb{D}_p$, $\mathcal{F}^{s,\varphi}_{t_1}$ — мінімальна σ-алгебра, породжена всіма подіями, які здійснювалися до момента часу t_1, а

$$p(t_1, x_{t_1}, t_2, A) \equiv P_{s,\varphi}\left\{\omega : x_t \in A\right\} \tag{2.15}$$

перехідна ймовірність [108].

Для слабкого інфінітезимального оператора строго марковського процесу справджується формула Динкіна (див. формулу (2.3.13) з [24]). Нехай $\tau(t) \ge s$ — марковський момент часу для строго марковського процесу $x_t \in \mathbb{D}_p$ такого, що $\mathbb{E}\tau(t) < \infty$ і $v \in D(\mathcal{L})$. Тоді

$$\mathbb{E}_{t,\varphi}\left\{v(s + \tau(t), x_{s+\tau(t)}(s, \varphi))\right\} =$$

$$= v(s, \varphi) + \mathbb{E}_{t,\varphi}\left\{\int\limits_0^{\tau(t)} (\mathcal{L}v)\left((s + s_1), x_{s+s_1}(s, \varphi)\right)\right\}. \tag{2.16}$$

для $\forall s \geq 0$, $t \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{D}_p$, де $\tau(t) \equiv \inf\{\tau, t\}$; $\tau \equiv \inf\{s_1 \in R_+ \,|x_{s+s_1}(s,\varphi) \in Q\}$.

Нехай $n \in \mathbb{N}$, τ_n — перший момент виходу з околу $S_n^p \equiv \left\{\varphi \in \mathbb{D}_p \left| \|\varphi\|_{\mathbb{D}_P} < n \right.\right\}$. Якщо $P\left\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = t\right\} = 1$, $\forall t > 0$, тоді формулу (2.16) можна переписати для $\forall t_2 \geq t_1 \geq 0$ з відрізка $[t,T]$ у вигляді (2.13).

Дійсно, формула Динкіна (2.16) для відрізків $[0,t_1]$ і $[0,t_2]$ буде мати наступний вигляд

$$\mathbb{E}_{t_1,\varphi}\{v(t_1, x_{t_1})\} = v(0,\varphi)+$$

$$+\mathbb{E}_{t_1,\varphi}\left\{\int\limits_0^{t_1} (\mathcal{L}v)\left((s+s_1), x_{s+s_1}(s,\varphi)\right)ds\right\}; \tag{2.16.1}$$

$$\mathbb{E}_{t_2,\varphi}\{v(t_2, x_{t_2})\} = v\,(0,\varphi)+$$

$$+\mathbb{E}_{t_2,\varphi}\left\{\int\limits_0^{t_2} (\mathcal{L}v)\left((s+s_1), x_{s+s_1}(s,\varphi)\right)ds\right\}. \tag{2.16.2}$$

Віднімаючи від лівої та правої частини (2.16.2) відповідно ліву і праву частини (2.16.1) і, враховуючи адитивність інтегралів, одержимо (2.13). ■

Задача оптимального управління полягає у відшуканні оптимального управління $\bar{u}^0$ з деякої множини допустимих управлінь $\mathbb{U}$, яке мінімізує скалярний функціонал

$$J(u) \equiv J^u(t,\varphi) = \mathbb{E}_{t,\varphi}\left\{F(x_T^u) + \int\limits_t^T G(s, x_s^u, u(s, x_s^u))ds\right\}, \tag{2.17}$$

де $F(\varphi) \geq 0$, $G(t,\varphi,u) \geq 0$, x_t^u — розв'язок (2.2) при управлінні $u \in \mathbb{U}$.

Лема 2.2. *Нехай функціонал $v : [0,T] \times \mathbb{D}_p \to \mathbb{R}$ з класу $\mathbb{V}$ і для $t \in [0,T]$ справджуються рівняння на розв'язках задачі (2.2), (2.3)*

$$(\mathcal{L}v)(t, x_t) + G(t, x_t, u) = 0; \tag{2.18}$$

$$v(T, x_T) = 0; \quad \varphi = x_t \in \mathbb{D}_p, \tag{2.19}$$

де $\mathcal{L}v(t, \varphi)$ *— слабкий інфінітезимальний оператор на розв'язках СДФР∞ (2.2), який обчислюється за однією з формул (2.6), (або (2.8), або (2.11)).*

Тоді функціонал $v \in \mathbb{V}$ *можна представити у вигляді*

$$v(t, x_t) = \mathbb{E}_{t,\varphi} \left\{ \int\limits_t^T G(s, x_s) ds \right\}, \tag{2.20}$$

де $x(s) \in \mathbb{R}^n$, $\forall s \geq t \geq 0$, *— розв'язок (2.2) за початкової умови* $\varphi = x_t$.

Доведення. Проінтегруємо ліву і праву частини (2.18) від t до T, обчислимо $\mathbb{E}_{t,\varphi}$ за умови, що розв'язок СДФР∞ (2.2), (2.3) $x(s) \in \mathbb{R}^n$ при $s \geq t \geq 0$ зафіксований і збігається з $\varphi \in \mathbb{D}_p (\varphi = x_t)$.

Тоді маємо

$$\mathbb{E}_{t,\varphi} \left\{ \int\limits_t^T \mathcal{L}v(s, x_s) ds \right\} + \mathbb{E}_{t,\varphi} \left\{ \int\limits_t^T G(s, x_s) ds \right\} = 0. \tag{2.21}$$

Однак, згідно з твердженням леми 2.1, існує перший доданок рівності (2.21), який дорівнює лівій частині (2.13)

$$\mathbb{E}_{t,\varphi} \left\{ \int\limits_t^T \mathcal{L}v(s, x_s) ds \right\} = \mathbb{E}_{t,\varphi} \left\{ v(T, x_T) \right\} - \mathbb{E}_{t,\varphi} \left\{ v(t, x_t) \right\} =$$

$$= \mathbb{E}_{t,\varphi} \left\{ v(t, \varphi) \right\} = -v(t, \varphi), \tag{2.22}$$

оскільки справджується умова (2.19). Підставляючи (2.22) у (2.21), одержимо формулу (2.20), що й завершує доведення леми 2.2. ■

Домовимося надалі замість оператора $\mathcal{L}$ записувати $\mathcal{L}(t, \varphi, u)$, щоб підкреслити його залежність від цих аргументів.

Теорема 2.1 (достатні умови оптимальності). *Нехай існує функціонал $v \in \mathbb{V}$ і керування $\bar{u}^0 \in \mathbb{U}$, які для майже всіх $t \in [0,T]$ і $u \in \mathbb{U}$ задовольняють наступні умови*

$$\mathcal{L}(t,\psi_t,u)v(t,\psi_t) + G(t,\psi_t,u) \geq 0; \tag{2.23}$$

$$\mathcal{L}(t,x_t,\bar{u}^0(t,\psi_t))v(t,\psi_t) + G(t,\psi_t,\bar{u}^0(t,\psi_t)) = 0; \tag{2.24}$$

$$v(T,\psi_T) = F(\psi_T), \tag{2.25}$$

де $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(t,x_t,u)$ — слабкий інфінітезимальний оператор, що діє на функціонал $v(t,x_t)$, визначений на відрізках розв'язку (2.2), (2.3); ψ_t — довыльна функція така, що $\varphi = \psi_t \in \mathbb{D}_p$, $\forall t \in [0,T]$.

Тоді $\bar{u}^0(t,x_t) \in \mathbb{U}$ є оптимальним керуванням задачі (2.2), (2.3) з критерієм якості $J^u(0,\varphi_0)$, причому

$$J^{\bar{u}^0}(t,x_t) = \inf_{u\in\mathbb{U}} J^u(t,x_t) = v(t,x_t) \tag{2.26}$$

при $\forall t \in [0,T]$, $x_t \in \mathbb{D}_p$.

Зауваження 2.1. *Умову (2.24) з урахуванням (2.23) можна записати у вигляді так званого рівняння Беллмана*

$$\inf_{u\in\mathbb{U}} \left[\mathcal{L}(t,\varphi,u)v\,(t,\varphi) + G(t,\varphi,u)\right] = 0, \tag{2.27}$$

а функціонал $v(t,\varphi)$ назвемо вартістю керування, або функціоналом Беллмана [109].

Доведення. Оскільки $\bar{u}^0 \in \mathbb{U}$ — допустиме керування, то існує траєкторія $x(t,\tau,\bar{u}^0)$, як розв'язок СДФР∞, де $x(t,\tau,\bar{u}^0)$ як функція τ є розв'язком СДФР∞ (2.2) на відрізку $t \leq \tau \leq T$ при керуванні $\bar{u}^0$ з початковою умовою $x(t,t+\theta,\bar{u}^0) = \varphi(\theta)$, а $x_\tau(t,\bar{u}^0) \equiv \{x(t,\tau+\theta,\bar{u}^0)\}$, $\theta \in [-\infty,0]$.

Тоді, підставляючи цю траєкторію до (2.27), одержимо

$$\mathcal{L}\left(t,x_\tau(t,\bar{u}^0),\bar{u}^0\right)v(t,x_\tau(t,\bar{u}^0)) + G(t,x_\tau(t,\bar{u}^0),\bar{u}^0) = 0. \tag{2.28}$$

Зауважимо, що управління $\bar{u}^0$ у (2.28) потрібно брати в точці $(\tau,x_\tau(t,\bar{u}^0))$. Далі, проінтегрируємо рівність (2.28) за t на відрізку $[t,T]$, обчислимо $\mathbb{E}_{t,\varphi}$ і, враховуючи граничну умову, маємо

$$v(t,\varphi) = F(x_T(t,\bar{u}^0)) + \mathbb{E}_{t,\varphi}\left\{\int\limits_t^T G(\tau, x_\tau(t,\bar{u}^0), \bar{u}^0)d\tau\right\}. \quad (2.29)$$

Нехай тепер $u \equiv u(t,\varphi)$ — довільне інше керування з $\mathbb{U}$, відмінне від $\bar{u}^0(t,\varphi)$. Тоді, згідно з умовою (2.23), очевидною є нерівність

$$\mathcal{L}(\tau, x_\tau(t,u), u)v(\tau, x_\tau(t,u)) + G(\tau, x_\tau(t,u), u) \geq 0, \quad (2.30)$$

де $u \equiv u(\tau, x_\tau(t,u))$.

Далі проінтегруємо (2.30) за τ від t до T, обчислимо $\mathbb{E}_{t,\varphi}$ і, враховуючи (2.25) і (2.26), легко записати нерівність

$$v(t, x_t(t,\bar{u}^0)) \leq F(x_T(t,u)) +$$

$$+\mathbb{E}_{t,\varphi}\left\{\int\limits_t^T G(\tau, x_\tau(t,u), u)d\tau\right\} \equiv v(t, x_t(t,u)).$$

Це й означає існування оптимального управління $\bar{u}^0 \in \mathbb{U}$ задачі (2.2), (2.3), (2.17). ■

Зауваження 2.2. *У випадку лінійних стохастичних систем з квадратичним функціоналом якості $J(u)$ рівняння Беллмана (2.27) дозволяє в явному вигляді побудувати синтез оптимального керування для СДФР∞.*

§ 4.3. Синтез оптимального керування динамічними системами з нескінченною післядією з малим параметром і пуассоновими збуреннями

3.1. Постановка задачі. Розглянемо задачу оптимального керування $\{x^u(t,\omega), J(u), \mathbb{U}\}$ з керовним випадковим процесом

$x^u(t,\omega)$, який узгоджений з потоком (σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t\}$ з функціоналом якості $J(u)$ і множиною допустимих керувань $\mathbb{U}$ [4].

Означення 3.1. *$\mathcal{F}_t$-вимірні функції $u(t) \in \mathbb{R}^l$, для яких визначені траєкторія руху $x(t,\omega)$ і скінченний функціонал $J(u)$, назвемо допустимими керуваннями.*

Позначимо

$$v_J \equiv \inf_{u\in\mathbb{U}} J(u). \tag{3.1}$$

Розглянемо таку задачу оптимального керування: знайти таке керування $u(t)$ з $\mathbb{U}$, для якого функціонал якості $J(u)$ набуває мінімального значення, тобто

$$J(u^0) = v_J. \tag{3.2}$$

Означення 3.2. *Керування $u^0(t)$, для якого виконуєтьcя (3.2) назвемо оптимальным керуванням задачі $\{x^u(t,\omega), J(u), \mathbb{U}\}$.*

Якщо оптимальне керування $u^0(t)$ у $\mathbb{U}$ не існує або існує, однак отримати його складно, то виникає питання про побудову $\tilde{u}^0(t) \in \mathbb{U}$ із заданою точністю.

Нехай, наприклад, задача керування $\{x^u(t,\omega), J(u), \mathbb{U}\}$ містить малий параметр $\varepsilon > 0$, задана точність керування $\tau(\varepsilon) > 0$. Тоді $\tilde{u}^0$ задовольняє нерівність

$$0 \le J(\tilde{u}^0) - v_J \le \tau(\varepsilon) \tag{3.3}$$

Означення 3.3. *Керування $\tilde{u}^0$, яке задовольняє (3.3), назвемо $\tau(\varepsilon)$-оптимальним керуванням задачі $\{x^u(t,\omega), J(u), \mathbb{U}\}$.*

У монографії [4] розглянута проблема синтеза оптимального керування динамічними системами зі скінченною післядією і дифузними збуреннями. Одержимо аналогічний результат для стохастичних динамічних систем Іто-Скорохода з пуассоновими збуреннями й нескінченною післядією.

3.2. Алгоритм побудови послідовних наближень оптимального керуванння стохастичною динамічною системою Іто-Скорохода з малим параметром. Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ з потоком σ-алгебр

$\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}\}$, $t \geq 0$, сформульована задача керування для стохастичної системи

$$dx^u(t) = a(t, x_t^u, u, \varepsilon)dt + b(t, x_t^u, u, \varepsilon)dw(t) +$$
$$+ \int_Z c(t, x_t^u, z, u, \varepsilon)\tilde{\nu}(dz, dt), \quad \forall t \geq 0, \tag{3.4}$$

з початковою умовою

$$x^u(t) = \varphi_0(t); \quad -\infty < t \leq 0; \quad \varphi \in \mathbb{D}_\infty \tag{3.5}$$

Тут $x^u(t) \equiv x^u(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ — сильний розв'язок задачі (3.4), (3.5), відрізки траєкторій $x_t \equiv \{x(t+\theta), -\infty < \theta \leq 0\}$ належать до простору Скорохода $\mathbb{D}_\infty$ неперервних справа і тих, що мають лівосторонні границі, функцій; $a : [0, T] \times \mathbb{D} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$; $b : [0, T] \times \mathbb{D} \times \mathbb{D} \times \mathbb{U} \to M_u(R)$ — матриця розмірності $n \times n$; $c : [0, T] \times \mathbb{D} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{U} \to \mathbb{R}^n$ — обмежені неперервні за сукупністю змінних функціонали; $w(t)$ — n-вимірний стандартний вінерів процес; $\tilde{\nu}(dz, dt) \equiv \nu(dz, dt) - \Pi(dz)dt$, $\mathbb{E}\{\nu(dz, dt)\} = \Pi(dz)dt$ — центрована пуассонова міра; $u \in \mathbb{U}$ — l-вимірний простір кусково-неперервних керувань, ε — малий параметр.

Уведемо функціонал якості $J(u) = J(0, \varphi_0)$, де

$$J^u(t, \varphi) = \mathbb{E}_{t,\varphi}\left\{F(x_T^u, \varepsilon) + \int_t^T G(s, x_s^u, u(s, x_s^u), \varepsilon)ds\right\}, \tag{3.6}$$

$$F(\varphi, \varepsilon) \geq 0, \quad G(t, \varphi, u) \geq 0.$$

Розглянемо допоміжну задачу керування для $\{x^u(t, \omega), J(u), \mathbb{U}\}$ і позначимо її через $\{y^u(t, \omega), I(u), \mathbb{U}\}$ на потоці σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}\}$, $t \in [0, T]$.

Нехай

$$v_J \equiv \inf_{u \in \mathbb{U}} J(u). \tag{3.7}$$

Позначимо через $\tilde{u}^0(t)$ оптимальне керування задачі $\{y^u(t, \omega), J(u), \mathbb{U}\}$, тобто

$$I(\tilde{u}^0) = v_I. \tag{3.8}$$

Виникаючу похибку позначимо через

$$\rho(J,I) \equiv \sup_{u\in\mathbb{U}} \left|J(u) - I(u)\right|. \tag{3.9}$$

Лема 3.1. *При виконанні вищевказаних умов для задачі керування (3.4), (3.5), (3.6) справджуються нерівності*

$$0 \le J(\tilde{u}^0) - v \le 2\rho(J,I). \tag{3.10}$$

Доведення. З означення (3.9) супремума випливає нерівність

$$|J(u) - I(u)| \le 2\rho(J,I). \tag{3.11}$$

Звідси одержимо

$$-\rho(J,I) \le J(u) - I(u) \le \rho(J,I),$$

що еквівалентно

$$\begin{aligned} J(u) &\le I(u) + \rho(J,I),\\ I(u) &\le J(u) + \rho(J,I). \end{aligned} \tag{3.12}$$

За означенням v_J і v_I (див.(3.1) і (3.7)) маємо $v_J \le v_I + \rho(J,I)$ і $v_I \le v_J + \rho(J,I)$, тобто $|v_J - v_I| \le \rho(J,I)$.

Тоді

$$0 \le J(u^0) - v_J \le \left|J(u^0) - I(\tilde{u}^0)\right| + |v_J - v_I| \le 2\rho(J,I),$$

що й доводить твердження.

Наслідок 1. *Нехай задача керування $\{x^u(t,\omega), J(u), \mathbb{U}\}$ містить малий параметр ε, а допоміжна задача керування $\{y^u(t,\omega), I(u), \mathbb{U}\}$ має оптимальне керування $\tilde{u}^0$ таке, що*

$$\rho(J,I) \le \tau(\varepsilon), \tag{3.13}$$

де $\tau(\varepsilon)$ — точність.

Тоді керування $\tilde{u}^0$ є $\tau(\varepsilon)$-оптимальним керуванням задачі $\{x^u(t,\omega), J(u), \mathbb{U}\}$.

Доведення. З нерівності (3.10) і (3.13) будемо мати

$$J(\tilde{u}^0) - v_J \le 2\rho(J, I) \le 2\tau(\varepsilon),$$

що й доводить наслідок 1. ■

Наслідок 3.1 задає алгоритм наближеного синтеза оптимального керування для систем (3.4), (3.5), які містять малий параметр ε.

Як правило, в якості допоміжної задачі керування вибираємо лінійну задачу керування типу (3.4)—(3.6), де покладемо $\varepsilon = 0$. У результаті одержимо нульове наближення u_0 до оптимального керування u^0.

Розглянемо алгоритм побудови послідовності допоміжних задач керування, який дозволить одержати наближений синтез із заданою точністю $\tau(\varepsilon)$.

3.3. Рівняння Беллмана. Наближена побудова оптимального керування. Оптимальне керування $u^0(t, \varphi)$ і ціна керування $v(t, \varphi)$ задачі (3.4)—(3.6) визначається з рівняння Беллмана [4]:

$$\inf_{u \in \mathbb{U}} \left[\mathcal{L}(t, \varphi, u, \varepsilon)\, v(t, \varphi) + G(t, \varphi, u, \varepsilon) \right] = 0, \tag{3.14}$$

$$v(T, \varphi) = F(\varphi, \varepsilon), \tag{3.15}$$

де $\mathcal{L}v$ — слабкий інфінітезимальний оператор на розв'язках задачі Коші (3.4), (3.5).

$$\mathcal{L}(t, \varphi, u, \varepsilon) v(t, \varphi) = \frac{\partial}{\partial t} v_\varphi(t, x) + (\nabla v(t, x), a(t, \varphi, u, \varepsilon)) +$$

$$+ \frac{1}{2} Sp \left[\nabla^2 v_\varphi(t, x) b(t, \varphi, u, \varepsilon) b^T(t, \varphi, u, \varepsilon) \right] +$$

$$+ \int_Z \left[v_\varphi(t, x + c(t, \varphi, z, u, \varepsilon)) - \right.$$

$$\left. - v(t, x) - (\nabla v_\varphi(t, x), c(t, \varphi, z, u, \varepsilon)) \right] \Pi(dz). \tag{3.16}$$

Тут "^{T}— операція транспонування вектора або матриці; $\nabla v \equiv \left(\dfrac{\partial v}{dx_1}, \dfrac{\partial v}{dx_2}, ..., \dfrac{\partial v}{dx_n}\right)^T$; $\nabla^2 v \equiv \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right)$, $i, j = \overline{1, n}$; SpA — слід матриці A; $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток.

Функціонал $v : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{D}_\infty \to \mathbb{R}^1$ вигляду $v(t, \varphi) \equiv v(t, \varphi(0), \varphi(\theta))$, $-\infty < \theta \leq 0$ з класу $\mathbb{V}$ функціоналів, двічі неперервно-диференційовних за x і один раз за t, позначимо

$$v_\varphi(t, x) \equiv v(t, x, \psi(t + \theta)),$$

де $x \equiv \varphi(0) \equiv \psi(t)$, а функція ψ на $[-\infty, T]$ така, що для $\theta \in [-\infty, 0]$, $\forall t \in [0, T]$ визначає $\varphi(\theta) \equiv \psi(t + \theta)$ з простору $\mathbb{D}$.

Припустимо, що існує така множина $\mathbb{V}_0$ з класу $\mathbb{V}$, що для довільного $v \in \mathbb{V}_0$ існує керування $u^0 \in \mathbb{U}$, для якого досягається точна нижня межа в лівій частині (3.14):

$$\inf_{u \in \mathbb{U}} [\mathcal{L}(t, \varphi, u, \varepsilon) v(t, \varphi) + G(t, \varphi, u, \varepsilon)] =$$

$$= \mathcal{L}(t, \varphi, u^0, \varepsilon) v(t, \varphi) + G(t, \varphi, u^0, \varepsilon),$$

де керування залежить від t, φ, v, тобто

$$u^0 \equiv u^0(t, \varphi, v, \varepsilon). \tag{3.17}$$

Якщо підставити (3.17) в (3.14), то одержимо рівняння для знаходження v:

$$\mathcal{L}(t, \varphi, u, \varepsilon) v(t, \varphi) + G(t, \varphi, u, \varepsilon) = 0,$$

$$v(T, \varphi) = F(\varphi, \varepsilon) \tag{3.18}$$

Розв'язок цієї крайової задачі (3.17), (3.18) збігається з ціною задачі управління (3.4)—(3.6), а оптимальне управління задається співвідношенням (3.17).

3.4. Побудова послідовних наближень до оптимальних керувань. У рівнянні (3.18) проведемо розклад у ряд за ε наступних величин

$$v(t, \varphi) = v_0(t, \varphi) + \varepsilon v_1(t, \varphi) + ... \tag{3.19.1}$$

$$\mathcal{L}(t, \varphi, u^0, \varepsilon) = \mathcal{L}_0(t, \varphi) + \varepsilon \mathcal{L}_1(t, \varphi) + ... \tag{3.19.2}$$

$$G(t, \varphi, u^0, \varepsilon) = G_0(t, \varphi) + \varepsilon G_1(t, \varphi) + ... \tag{3.19.3}$$

Підставимо (3.19.1)—(3.19.3) у (3.18), прирівняємо до нуля відповідні коефіцієнти при однакових степенях ε. В результаті одержимо

$$\sum_{j=0}^{i} \mathcal{L}_{i-j}(t, \varphi) v_j(t, \varphi) + G_i(t, \varphi) = 0; \quad i = 0, 1, 2, \tag{3.20.1}$$

$$v_0(T, \varphi) = F(\varphi, \varepsilon); \quad v_i(T, \varphi) = 0; \quad i = 1, 2, ... \tag{3.20.2}$$

Оскільки керування u^0 залежить від усіх функціоналів $v_j (j = 0, 1, 2, ...)$, то в рівностях (3.19.1)—(3.19.3) кожен з операторів $\mathcal{L}_i(t, \varphi)$ і функціоналів $G_i(t, \varphi) (i = 0, 1, 2, ...)$, взагалі кажучи, також може залежати від усіх функціоналів $v_j (j = 0, 1, 2, ...)$.

Теорема 3.1. *Нехай оператор $\mathcal{L}_i(t, \varphi)$ і функціонал $G_i(t, \varphi)$ залежить тільки від скінченної кількості функціоналів v_j з номерами $j \le i$.*

Тоді співвідношення (3.20.1), (3.20.2) слід розглядати як систему рівнянь для послідовного знаходження функціоналів $v_0, v_1, ..., v_k$.

Доведення. Якщо функціонал v_0 визначається з рівняння $\mathcal{L}_0 v_0 + G_0 = 0$, то функціонал v_1 можна визначити за допомогою (3.20.1) при $i = 1$: $\mathcal{L}_0 v_1 + \mathcal{L}_1 v_0 + G_1 = 0$; функціонал v_2 — за допомогою (3.20.1) при $i = 2$: $\mathcal{L}_2 v_1 + \mathcal{L}_1 v_1 + \mathcal{L}_0 v_2 + G_2 = 0$; ...; функціонал v_k — за допомогою (3.20.1) при $i = k$:

$$\sum_{j=0}^{k} \mathcal{L}_{ij}(t, \varphi) v_j(t, \varphi) + G_k(t, \varphi) = 0,$$

що й доводить твердження теореми 3.1.

Уведемо величину $\delta_k(t, \varphi)$, яка визначається за знайденими $v_0, v_1, ..., v_k$:

$$\delta_k(t, \varphi) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i \left[\sum_{j=0}^{i} \mathcal{L}_{i-j}(t, \varphi) v_j(t, \varphi) + G_i(t, \varphi) \right] -$$

$$-\mathcal{L}(t,\varphi,u_k,\varepsilon)Q_k(t,\varphi)-G(t,\varphi,u_k,\varepsilon), \tag{3.21}$$

де

$$u_k \equiv u^0(t,\varphi,Q_k,\varepsilon); \quad Q_k \equiv v_0+\varepsilon v_1+..+\varepsilon^k v_k. \tag{3.22}$$

З (3.20.1), (3.20.2), (3.21), (3.22) випливає, що

$$\mathcal{L}(t,\varphi,u_k,\varepsilon)Q_k(t,\varphi)+G(t,\varphi,u_k,\varepsilon)+\delta_k(t,\varphi)=0, \tag{3.23}$$

$$Q_k(T,\varphi)=F(\varphi,\varepsilon). \tag{3.24}$$

Порівнюючи (3.23), (3.24) з (3.18), отримаємо, що u_k — оптимальне керування, Q_k — функціонал Беллмана допоміжної задачі керування $\{x^u(t), I_k(u), \mathbb{U}\}$, де

$$I_k(u) \equiv J(u)+\mathbb{E}_{\varphi_0}\int_0^T \delta_k(s,x_s^u)ds. \tag{3.25}$$

Тут $\mathbb{E}_{\varphi_0}$ відповідає $\mathbb{E}_{0,\varphi_0}$, а $I_k(u) \equiv J^u(0,\varphi_0) \geq \inf_{u\in\mathbb{U}} J^u(0,\varphi) = v(\varphi_0)$.

Теорема 3.2. *Якщо $\delta_k(t,\varphi)\equiv o(\varepsilon k+1)$, де $o(\varepsilon)$ — величина порядку ε, то керування u_k за формулою (3.23) буде k-им наближенням до оптимального керування $\{x^u(t), J(u), \mathbb{U}\}$, тобто*

$$v(\varphi_0)=J(u_k)+o(\varepsilon^{k+1}).$$

Доведення випливає з наслідку 3.1.

Алгоритм послідовного наближення до оптимального керування задачі $\{x^u(t), J(u), \mathbb{U}\}$:

1. З рівнянь (3.20.1), (3.20.2) визначаємо функціонали $v_0, v_1, ..., v_k$;

2. За формулами (3.22) визначаємо керування u_k.

Зауважимо, що п.1, 2 не вимагають існування оптимального керування, тому ми не вимагаємо існування відповідного функціонала Беллмана.

Теорема 3.3. *Нехай функціонал*

$$\gamma_k(t,\varphi,u,\varepsilon) \equiv L(t,\varphi,u,\varepsilon)Q_k(t,\varphi) + G(t,\varphi,u,\varepsilon) \tag{3.26}$$

задовольняє рівномірно за $t \in [0,T]$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ *і* φ *з множини* $\|\varphi\| \leq K$ *задовольняє умову Ліпшиця*

$$|\gamma_k(t,\varphi,u_1,\varepsilon) - \gamma_k(t,\varphi,u_2,\varepsilon)| \leq K\,|u_1 - u_2|\,. \tag{3.27}$$

Тоді в якості k*-го наближення до оптимального керування задачі керування (3.4)–(3.6), яке задається формулою (3.22), можна взяти довільне допустиме керування таке, що*

$$u = u_k + o\left(\varepsilon^{k+1}\right). \tag{3.28}$$

Доведення. Нехай $u_{1k}(t,\varphi)$ — деяке допустиме керування, для якого

$$u_{1k}(t,\varphi) - u_k(t,\varphi) = o(\varepsilon^{k+1}). \tag{3.29}$$

Тоді для довільного керування $u \in \mathbb{U}$ маємо

$$\mathcal{L}(t,\varphi,u,\varepsilon)Q_k(t,\varphi) + G(t,\varphi,u,\varepsilon) + \delta_k(t,\varphi) +$$
$$+\gamma_k(t,\varphi,u_k,\varepsilon) - \gamma_k(t,\varphi,u,\varepsilon) = 0.$$

Покладемо

$$\bar{\delta}_k \equiv \delta_k(t,\varphi) + \gamma_k(t,\varphi,u_k,\varepsilon) - \gamma_k(t,\varphi,u_{1k},\varepsilon), \tag{3.30}$$

що дає можливість записати рівняння

$$\mathcal{L}(t,\varphi,u,\varepsilon)Q_k(t,\varphi) + G(t,\varphi,u_{1k},\varepsilon) + \bar{\delta}_k(t,\varphi) = 0,$$
$$Q_k(T,\varphi) = F(\varphi,\varepsilon).$$

Таким чином, аналогічно до доведення тверджень (3.23), (3.24) маємо керування u_{1k} в якості оптимального керування задачі $\{x^u(t), I_k(u), \mathbb{U}\}$ з функціоналом якості вигляду (3.25) із заміною δ_k на $\bar{\delta}_k$.

З умов (3.27), (3.29), (3.30) випливає, що $\bar{\delta}_k(t,\varphi) = o(\varepsilon k + 1)$, якщо $\delta_k(t,\varphi) = o(\varepsilon^{k+1})$. Таким чином, $0 \leq J(u_{1k}) - v(\varphi_0) = o(\varepsilon^{k+1})$.

Надалі можна конкретизувати метод послідовних наближень для квазілінійних систем з пуассоновими перемиканнями.

§ 4.4. Наближений синтез оптимального керування квазілінійними стохастичними диференціальними рівняннями з малим параметром і пуассоновими перемиканнями

4.1. Постановка задачі. На ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ визначений сильний розв'язок $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ системою квазілінійних стохастичних диференціально-функціональних рівнянь Іто-Скорохода [57] (КСДФР∞) для $\forall t \in [0, T]$

$$dx(t) = [\varepsilon f(t, x_t) + B(t)u(t)]\, dt + d\xi(t), \tag{4.1}$$

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dw(t) + \int\limits_Z c(t, z)\tilde{\nu}(dz, dt), \tag{4.2}$$

і початковими умовами

$$x(t) = \varphi_0(t), \quad -\infty < t \leq 0, \quad u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^l. \tag{4.3}$$

Тут $\varphi_0 \in \mathbb{D}_\infty \equiv \mathbb{D}((-\infty, 0])$ — простір Скорохода неперервних справа і таких, що мають лівосторонні границі, функцій, [119], [120], [121]; вектори-стовпці a і c вимірні й обмежені на $[0, T]$; матриці $B(t)$ і $b(t)$ розмірності $n \times n$; функціонал $f : [0, T] \times \mathbb{D}_\infty$ - вимірний; $w(t)$ — n-вимірний вінерів процес, що не залежить від центрованої пуассонової міри $\tilde{\nu}(dz, dt) \equiv \nu(dz, dt) - \Pi(dz)dt$ [119].

Припустимо, що існує така невід'ємна неспадна за τ функція $r(t, \tau)$ така, що виконуються умови рівномірної обмеженості за $t \in [0, T]$

$$|f(t, \varphi)|^2 \leq a_0^2 + \int\limits_0^\infty |\varphi(-\tau)|^2\, dr(t, \tau) \tag{4.4}$$

і умова Ліпшиця: $\forall \varphi, \psi \in \mathbb{D}_\infty$

$$|f(t, \varphi) - f(t, \psi)|^2 \leq \int\limits_0^\infty |\varphi(-\tau) - \psi(-\tau)|^2\, dr(t, \tau); \tag{4.5}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int\limits_0^\infty dr(t,\tau)<\infty. \tag{4.6}$$

Інфінітезимальний оператор на розв'язках (4.1)—(4.3) обчислюється за наступними формулами від функціоналу $v\in\mathbb{V}$ (множина функціоналів $v:[0,T]\times\mathbb{D}\to\mathbb{R}^1$ двічі неперервно-диференційовні за x і один раз за t):

$$\mathcal{L}v(t,\varphi,u,\varepsilon)v(t,\varphi)=\mathcal{L}_0v_\varphi(t,x)+[\varepsilon f(t,\varphi)+B(t)u]^T\nabla v_\varphi(t,x), \tag{4.7}$$

для якого

$$\mathcal{L}_0v_\varphi(t,\varphi)=\frac{\partial}{\partial t}v_\varphi+a^T(t)\nabla v_\varphi(t)+\frac{1}{2}Sp[b^T(t)\nabla^2v_\varphi(t,x)b(t)]+$$

$$+\int\limits_Z[v(t,x_t+c(t,z))-v(t,x_t)-(\nabla v(t,x_t),c(t,z))\Pi(dz), \tag{4.8}$$

де "^{T}— операція транспонування вектора або матриці; $\nabla v\equiv\left(\frac{\partial v}{dx_1},\frac{\partial v}{dx_2},...,\frac{\partial v}{dx_n}\right)^T$; $\nabla^2v\equiv\left(\frac{\partial^2v}{\partial x_i\partial x_j}\right)$, $i,j=\overline{1,n}$; SpA — слід матриці A; $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток.

Розглянемо проблему мінімізації функціоналу якості задачі оптимального керування

$$J(u)=\mathbb{E}_{\varphi_0}\{x^T(T)M_0(t)x(T)+\int\limits_0^T u^T(t)M_1(t)u(t)+$$

$$+x^T(t)M_2(t)x(t)dt\}, \tag{4.9}$$

де матриці $M_1(t)$, $M_2(t)$ — вимірні й рівномірно обмежені, $M_1(t)$ — рівномірно за t додатно визначена, а $M_0(t)$, $M_2(t)$ — невід'ємно визначені матриці.

Множина допустимих керувань $\mathbb{U}$ є множиною випадкових процесів $\gamma(t,\omega)$, узгоджених з потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ і таких, що

$$\mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{\int\limits_0^T |\gamma(t)|^2\, ds\right\} \le K(1+\|\varphi\|_0^2), \tag{4.10}$$

де

$$\|\varphi_0\| \equiv \sup_{-h\le\theta\le 0} |\varphi_0(\theta)|^2 . \tag{4.11}$$

Розв'язок задачі оптимального керування для (4.1)—(4.3), (4.9) зводиться [57, 122] до дослідження рівняння Беллмана

$$\mathcal{L}_0 v_\varphi(t,x) + \varepsilon f^T(t,\varphi)\cdot\nabla v_\varphi(t,x) + x^T M_2(t)x =$$

$$= \frac{1}{4}(\nabla v_\varphi(t,x))^T B_1(t)\nabla v_\varphi(t,x); \tag{4.12}$$

$$v(T,\varphi) = x^T M_0(T)x; \quad x = \varphi(0); \quad B_1 \equiv BM_1^{-1}(t)B^T. \tag{4.13}$$

Оптимальне керування $u^0(t,\varphi)$ при виконанні деяких умов, що накладаються на розв'язок задачі (4.12), (4.13), можна знайти у вигляді

$$u^0(t,\varphi) = -\frac{1}{2}M_1^{-1}(t)B^T(t)\nabla v_\varphi(t,x). \tag{4.14}$$

Побудуємо послідовні наближення до оптимального керування $u^0(t,\varphi)$, встановимо оцінки похибки для задачі керування (4.1)—(4.3), (4.9).

4.2. Вибір нульового наближення до оптимального керування. Для $\varepsilon = 0$ рівняння (4.12), (4.13) має точний розв'язок

$$v_0(t,\varphi) = x^T P_0(t)x + 2x^T P_1(t) + P_2(t),$$

де $x = \varphi(0)$.

Тут матриця $P_0(t)$, вектор $P_1(t)$ і функція $P_2(t)$ визначаються крайовою задачею для системи звичайних диференціальних рівнянь [123]:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + M_2 = P_0^T B_1 P_0; \quad P_0(T) = M_0; \tag{4.15}$$

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + P_0 a = P_0 B_1 P_1; \quad P_1(T) = 0; \tag{4.16}$$

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + 2a^T P_1 + Sp\left[b^T P_0 b\right] + \int\limits_Z c^T P_0 c \Pi(dz) = P_1^T P_1 P_1; \tag{4.17}$$

$$P_2(T) = 0.$$

При цьому $P_0(t)$, $P_1(t)$ і $P_2(t)$ як розв'язки системи (4.15)—(4.17), рівномірно обмежені за t і такі, що матриця

$$\begin{pmatrix} P_0 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} \geq 0_{(n+1)\times(n+1)},$$

(надалі будемо позначати невід'ємну визначеність матриці розмірності $(n+1)\times(n+1)$ на векторах $(x_1, x_2, .., x_n, 1)^T$), де $\forall x \equiv (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $P_0 \geq 0_{n\times n}$; $P_2 \geq 0$.

Тоді оптимальне керування для $\varepsilon = 0$ задачі (4.1)—(4.3), (4.9) має вигляд

$$u_0^0(t,\varphi) = -M_1^{-1} B^T(t) \left[P_0(t)\varphi(0) + P_1(t)\right]. \tag{4.18}$$

Позначимо через $x_\varepsilon^u(t)$ розв'язок системи (4.1)—(4.3) для $\varepsilon \geq 0$ з керуванням u, а через $J_\varepsilon(u)$ позначимо функціонал

$$J_\varepsilon(u) \equiv \mathbb{E}_{\varphi_0}\Bigg\{(x_\varepsilon^u(T))^T M_0 x_\varepsilon^u(T) + \int\limits_0^T [u^T(s) M_1(s) u(s) +$$

$$+ (x_\varepsilon^u(s))^T M_2(s) x_\varepsilon^u(s)] ds\Bigg\}. \tag{4.19}$$

Теорема 4.1. *Керування* $u_0^0(t,\varphi)$ *(4.18) є нульовим наближенням до оптимального керування* $u^0(t,\varphi)$ *задачі (4.1)—(4.3), (4.9) у розумінні виконання умови*

$$0 \le J_\varepsilon(u_0^0(t,\varphi) - v(\varphi_0)) \le \varepsilon K_0, \tag{4.20}$$

де $K_0 = K(1 + \|\varphi_0\|_0^2)$; $v(\varphi_0) = \inf\limits_{u\in\mathbb{U}} J_\varepsilon(u)$.

Доведення. В якості допоміжної задачі керування [4] розглянемо вихідну систему (4.1)—(4.3), (4.9) для $\varepsilon = 0$. Тоді, згідно з лемою 1 [121], маємо

$$0 \le J_\varepsilon(u_0^0 - v(\varphi_0)) \le 2\rho(J_\varepsilon, J_0), \tag{4.21}$$

де $\rho(J_\varepsilon, J_0) \equiv \sup\limits_{u\in\mathbb{U}} |J_\varepsilon(u) - J_0(u)|$, $\mathbb{U}$ — множина випадкових процесів $\gamma(t) \equiv \gamma(t,\omega) \in \mathbb{R}^n$, узгоджених з потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}\}$, для яких

$$\int\limits_0^T \mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{|\gamma(t)|^2\right\} dt \le K_0. \tag{4.22}$$

Доведемо спочатку, що $\forall\gamma \in \mathbb{U}$ має місце оцінка

$$\mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{\sup_{0\le t\le T} |x_\varepsilon^\gamma(t)|^2\right\} \le K_0. \tag{4.23}$$

З інтегрального представлення системи (4.1)—(4.2) легко отримати оцінку квадрата модуля розв'язку через інтеграли:

$$|x_\varepsilon^\gamma(\tau)|^2 \le K\left\{|x(0)|^2 + \varepsilon^2\left|\int\limits_0^\tau f(s, x_{\varepsilon s}^\gamma)ds\right|^2 + \right.$$

$$+\left|\int\limits_0^\tau B(s)\gamma(s)ds\right|^2 + \left|\int\limits_0^T a(s)ds\right|^2 + \left|\int\limits_0^T b(s)dw(s)\right|^2 +$$

$$+\left|\int_0^\tau\int_Z c(s,z)\tilde{\nu}(dz,ds)\right|^2\Bigg\}.$$

Звідси, враховуючи умови (4.4)—(4.6), обмеженість коефіцієнтів (4.1), (4.2) і властивості стохастичних інтегралів [119], одержимо очевидну нерівність для другого моменту розв'язку задачі (4.1)—(4.3)

$$\mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{\sup_{0\le t\le T}|x_\varepsilon^\gamma(t)|^2\right\}\le K\left[1+\|\varphi_0\|^2+\right.$$

$$\left.+\int_0^t E_{\varphi_0}\left\{|\gamma(s)|^2\right\}ds+\int_0^t\int_0^h E_{\varphi_0}\left\{|x_\varepsilon^\gamma(s-\tau)|^2\right\}dr(s,\tau)ds\right].$$

Якщо врахувати справедливість очевидної оцінки

$$\mathbb{E}_{\varphi_0}\{\left\{\sup_{-\tau\le\tau\le s}|x_\varepsilon^\gamma(\tau)|^2\right\}\le\|\varphi_0\|^2+E_{\varphi_0}\left\{\sup_{0\le\tau\le s}|x_\varepsilon^\gamma(\tau)|^2\right\},$$

та оцінку (4.22), то одержимо нерівність

$$\mathbb{E}_{\varphi_0}\{\left\{\sup_{-\tau\le\tau\le s}|x_\varepsilon^\gamma(\tau)|^2\right\}\le$$

$$\le K\left[1+\|\varphi_0\|+\int_0^t\mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{\sup_{0\le\tau\le s}|x_\varepsilon^\gamma(\tau)|^2\right\}ds\right].$$

А звідси і з нерівності Гронуолла-Беллмана маємо

$$\mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{\sup_{0\le t\le T}|x_\varepsilon^\gamma(t)-x_0^\gamma(t)|^2\right\}\le\varepsilon^2K_0. \tag{4.24}$$

Далі, враховуючи (4.23), отримуємо оцінку

$$|J_\varepsilon(\gamma)-J_0(\gamma)|=|\mathbb{E}_{\varphi_0}\left[(x_\varepsilon^\gamma(T)-x_0^\gamma(T))^TM_0(x_\varepsilon^\gamma(T)+x_0^\gamma(T))+\right.$$

$$+\int\limits_0^T (x_\varepsilon^\gamma(s) - x_0^\gamma(s))^T M_2(s)(x_\varepsilon^\gamma(s)+)ds]\Bigg| \le$$

$$\le K\left[\mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|x_\varepsilon^\gamma(t) + x_0^\gamma(t)\right|^2\right\}\times\right.$$

$$\left.\times\mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{\sup_{0\le t\le T}\left|x_\varepsilon^\gamma(t) - x_0^\gamma(t)\right|^2\right\}\right]^{1/2} \le \varepsilon K_0.$$

Звідси, з урахуванням (4.21), маємо (4.20). Далі необхідно довести, що керування $u_0^0(t,\varphi)$ з $\mathbb{U}$, тобто воно задовольняє (4.23). Дійсно,

$$\int\limits_0^T \mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{\left|u_0^0(t, x_{\varepsilon t}^{u_0^0})\right|^2\right\}dt = \int\limits_0^T \mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{\left|M_1^{-1}(t)B^T(t)(P_0(t)x_\varepsilon^{u_0^0}(t)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+P_1(t))\right|\right\}dt \le K(1 + \int\limits_0^T \mathbb{E}_{\varphi_0}\left\{\left|x_\varepsilon^{u_0^0}(t)\right|^2\right\}dt),$$

де $x_\varepsilon u_0^0(t)$ — розв'язок рівняння

$$dx_\varepsilon^{u_0^0}(t) = \left[\varepsilon f(t, x_{\varepsilon t}^{u_0^0}) - B_1(t)(P_0(t)x_\varepsilon^{u_0^0}(t) + P_1(t))\right]dt+$$

$$+a(t)dt + b(t)dw(t) + \int\limits_Z c(t,z)\tilde{\nu}(dz,dt).$$

Тому $x_\varepsilon u_0^0(t)$ задовольняє оцінку вигляду (4.23). Таким чином, керування $u_0^0(t,\varphi)$ задовольняє (4.22), що й доводить теорему 4.1. ■

4.3. Алгоритм побудови k-го наближення до оптимального керування. Алгоритм побудови k-го наближення до оптимального керування задачі (4.1)—(4.3), (4.9) в загальному вигляді описаний у [4]. Так, величини v, $\mathcal{L}$ і G, що входять до рівняння Беллмана

$$\mathcal{L}(t,\varphi,u^0,\varepsilon)v(t,\varphi)+G(t,\varphi,u^0,\varepsilon)=0, \tag{4.25}$$

$$v(T,\varphi)=F(\varphi,\varepsilon)$$

для функціоналу якості $J(u)\equiv J^u(0,\varphi_0)$, де

$$J^u(t,\varphi)=\mathbb{E}_{t,\varphi}\left\{F(x_T^u(\varepsilon))+\int\limits_t^T G(s,x_s^u,u(s,x_s^u),\varepsilon)ds\right\},$$

знаходяться у вигляді [4]

$$v(t,\varphi)=v_0(t,\varphi)+\varepsilon v_1(t,\varphi)+\varepsilon^2 v_2(t,\varphi)+...$$

$$\mathcal{L}(t,\varphi,u^0,\varepsilon)=\mathcal{L}_0(t,\varphi)+\varepsilon\mathcal{L}_1(t,\varphi)+\varepsilon^2\mathcal{L}_2(t,\varphi)+... \tag{4.26}$$

$$G(t,\varphi,u^0,\varepsilon)=G_0(t,\varphi)+\varepsilon G_1(t,\varphi)+\varepsilon^2 G_2(t,\varphi)+...$$

Якщо підставити (4.26) у (4.24) і прирівняти до нуля коефіцієнти при різних степенях ε, то одержимо

$$\sum_{j=0}^{i}\mathcal{L}_{i-j}(t,\varphi)v_j(t,\varphi)+G_i(t,\varphi)=0;\quad i=0,1,2,... \tag{4.27}$$

$$v_0(T,\varphi)=F(\varphi,\varepsilon),\quad v_i(T,\varphi)=0,\quad i=0,1,2,...$$

Таким чином, $\mathcal{L}_i$ и G_i для нашої задачі керування (4.1)—(4.3), (4.9) набувають вигляду

$$\mathcal{L}_0(t,\varphi)=\mathcal{L}_0-\frac{1}{2}(\nabla v_\varphi^0(t,x))^T B_1(t)\nabla;$$

$$\mathcal{L}_1(t,\varphi)=f^T(t,\varphi)\nabla-\frac{1}{2}(\nabla v_\varphi^1(t,x))^T B_1(t)\nabla;$$

$$\mathcal{L}_i(t,\varphi) = -\frac{1}{2}(\nabla v_\varphi^i(t,x))^T B_1(t)\nabla; \quad i = 2,3,...$$

$$G_0(t,\varphi) = x^T M_2(t)x + \frac{1}{4}(\nabla v_\varphi^0(t,x))^T B_1(t)\nabla v_\varphi^0(t,x); \quad x = \varphi(0),$$

$$G_i(t,\varphi) = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{i}(\nabla v_\varphi^{i-j}(t,x))^T B_1(t)\nabla v_\varphi^j(t,x);$$

$$x = \varphi(0), \quad i = 1,2,...$$

Тоді для $i \geq 1$ рівняння Беллмана (4.27) можна записати у вигляді

$$\mathcal{L}_0 v_\varphi^i(t,x) + f^T(t,\varphi)\nabla v_\varphi^{i-1}(t,x) =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{i}(\nabla v_\varphi^j(t,x))^T B_1(t)\nabla v_\varphi^{i-j}(t,x), \tag{4.28}$$

$$v_\varphi^i(T,x) = 0, \quad x = \varphi(0).$$

Визначимо з (4.28) $v_1(t,\varphi),...,v_k(t,\varphi)$, $v_i \equiv v^i$, задамо k-е наближення до оптимального керування [4], [121] (у відповідності до $u_k \equiv u(t,\varphi,Q_k,\varepsilon)$, $Q_k \equiv v_0 + \varepsilon v_1 + .. + \varepsilon k v_k$ і $u^0(t,\varphi) = -\frac{1}{2}M_1^{-1}(t)^T(t)\nabla v_\varphi(t,x)$ формулою

$$u_k(t,\varphi) = -\frac{1}{2}M_1^{-1}(t)B^T(t)\nabla\Bigg[v_\varphi^0(t,x) + \varepsilon v_\varphi^1(t,x) + ...+$$

$$+\varepsilon^k v_\varphi^k(t,x)\Bigg]. \tag{4.29}$$

Формула (4.14) задає нульове наближення v_0 для функціоналу Беллмана, існування наступних наближень $v_1, v_2, ..., v_k$ встановлюється за допомогою такого твердження.

Теорема 4.2. *Розв'язок рівнянь (4.28) для* $i = \overline{1,k}$ *існує у вигляді*

$$v_i(t,\varphi) = \mathbb{E}_{t,\varphi}\left\{\int\limits_t^T \Phi_i(s,y_s)ds\right\}, \tag{4.30}$$

де

$$\Phi_i \equiv f^T(t,\varphi)\nabla v_\varphi i - 1(t,x) -$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{i-1}\nabla v_\varphi i - 1(t,x)B_1(t)\nabla v_\varphi i - j(t,x),$$

$x \equiv \varphi(0)$, *а невідомий випадковий процес* $y(s)$ *знаходиться як розв'язок СДР*

$$dy(s) = -B_1(s)[P_0(s)y(s)+P_1(s)]ds+d\xi(s), \quad \forall s \in [t,T], \tag{4.31}$$

$$y_t = \varphi \in \mathbb{D}.$$

Доведення. Для $i \geq 1$ з (4.28) отримаємо

$$\mathcal{L}_1 v_i(t,\varphi) + \Phi_i(t,\varphi) = 0; \quad v_i(T,\varphi) = 0, \tag{4.32}$$

при цьому слід враховувати тотожність

$$\sum_{j=0}^{i}(\nabla v_\varphi^j(t,x))^T B_1(t)\nabla v_\varphi^{i-j}(t,x) = 4(\nabla v_\varphi^i(t,x))^T B_1(t)[P_0(t)x+$$

$$+P_1(t)] + \sum_{j=1}^{i-1}(\nabla v_\varphi^j(t,x))^T B_1(t)\nabla v_\varphi^{i-j}(t,x),$$

а $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_0 - (P_0x + P_1)^T B_1\nabla$ — інфінітезимальний оператор процесу $y(s)$ як розв'язку СДР (4.31).

Для $i = 1$ рівняння (4.32) запишемо у вигляді

$$\mathcal{L}_1 v_1(t,\varphi) + 2f^T(t,\varphi)[P_0(t)x + P_1(t)] = 0, \tag{4.33}$$

з крайовою умовою

$$v_1(T,\varphi) = 0; \quad x = \varphi(0). \tag{4.34}$$

Якщо $\tilde{v}_1$ и $\tilde{v}_2$ — два розв'язки задачі (4.33), (4.34), то для $\tilde{v} = \tilde{v}_1 - \tilde{v}_2$ з $\mathcal{L}_1\tilde{v} = 0$ і $\tilde{v}(T,\varphi) = 0$ випливає [50], що $\tilde{v}(T,\varphi) \equiv 0$. А це буде означати єдиність розв'язку для задачі (4.33), (4.34). Аналогічно, методом математичної індукції, доводимо єдиність розв'язку рівнянь (4.32) $\forall i \geq 1$. Зі співвідношень (4.32)—(4.34) випливає (4.30), що й доводить теорему 4.2. ■

Зауваження 4.1. *Обчислення правої частини виразу (4.30) для $v_1(t,\varphi)$ можна іноді звести до квадратур. Наприклад, у випадку $f(t,x_t) \equiv f(t,x(t-h))$, де $h \geq 0$ — стала, а $p(t,x,s,y)$ — щільність імовірності переходу процесу $y(s)$ як розв'язку СДР (4.31). Тоді представлення (4.30) для $i = 1$ запишемо для $t \in [0, T-h]$ у вигляді*

$$v_1(t,\varphi) = 2\int\limits_t^{t+h}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^T(s,\varphi(s-t-h))\times$$

$$\times[P_0(s)+P_1(s)]p(t,\varphi(0),s,y)dyds+$$

$$+2\int\limits_{t+h}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^T(s,z)[P_0(s)y+P_1]\times$$

$$\times p(t,\varphi(0),s-h,z)p(s-h,z,s,y)dzdyds;$$

а для $t \in [T-h, T]$

$$v_1(t,\varphi) = 2\int\limits_t^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^T(s,\varphi(s-t-h))[P_0(s)y+$$

$$+P_1(s)]p(t,\varphi(0),s,y)dyds,$$

де щільність $p(t,x,s,y)$ у деяких випадках для СДР (4.31) можна обчислити в явному аналітичному вигляді (див. § 2 цього розділу).

4.4. Знаходження першого наближення $u_1(t,\varphi)$ для задачі оптимального керування (4.1)—(4.3), (4.9).

k-е наближення задано формулою (4.29), причому нульове наближення — (4.18). Побудуємо перше наближення і відповідний алгоритм.

Теорема 4.3. *Керування першого наближення задачі оптимального керування (4.1)—(4.3), (4.9) обчислюється за формулою*

$$u_1(t,\varphi) = -\frac{1}{2}M_1^{-1}(t)B_1(t)[\nabla v_\varphi^0(t,x) + \varepsilon\nabla v_\varphi^1(t,x)], \tag{4.35}$$

де

$$v_0(t,\varphi) \equiv \varphi^T(0)P_0(t)\varphi(0) + 2\varphi^T(0)P_1(t) + P_2(t), \tag{4.36}$$

$$v_1(t,\varphi) = \mathbb{E}_{t,\varphi}\int\limits_t^T f^T(s,y_s)[P_0(s)+P_1(s)]ds, \tag{4.37}$$

а матриці $P_i(t)$, $i=0,1,2$, визначають (4.15)—(4.17), випадковий процес $y(s)$ — рівнянням (4.31). При цьому

$$0 \le J_\varepsilon(u_1) - v(\varphi_0) \le \varepsilon^2 K. \tag{4.38}$$

Лема 4.1. *Перше наближення функціоналу Беллмана $v_1(t,\varphi)$ на розв'язках (4.1)—(4.3) задовольняє нерівність*

$$\left|\nabla v_\varphi^1(t,x)\right|^2 \le K(1+\|\varphi\|^2). \tag{4.39}$$

Доведення. Нехай $y_1(s)$ і $y(s)$ є розв'язками СДР (4.31) з початковими умовами $y_{1t}=\varphi_1$ і $y_t=\varphi$. Тоді

$$|v_1(t,\varphi) - v_1(t,\varphi_1)|^2 = |\mathbb{E}\{v_1(t,\varphi) - v_1(t,\varphi_1)\}|^2 =$$

$$= 4\left|\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}_{t,\varphi}\int\limits_t^T f^T(s,y_{1s})[P_0(s)y_1(s)+P_1(s)]ds\right\} -\right.$$

$$\left.-\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}_{t,\varphi}\int\limits_t^T f^T(s,y_{1s})[P_0(s)y_1(s)+P(s)_1]ds\right\}\right|^2 =$$

$$= 4\left|\mathbb{E}\int\limits_t^T \left[f^T(s,y_s)[P_0(s)y(s)+P_1(s)]\right] -\right.$$

$$\left.-f^T(s,y_{1s})[P_0(s)y_1(s)+P_1(s)ds]\right|^2 \leq$$

$$\leq 8T\left\{\int\limits_t^T \left[\mathbb{E}\{f^T(s,y_s)-f^T(s,y_{1s})\}[P_0(s)y(s)+P_1(s)]\right]^2 ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_t^T \left[\mathbb{E}\{f^T(s,y_{1s})P_0(s)\}[y(s)-y_1(s)]\right]^2 ds\right\} \leq$$

$$\leq K\left[\int\limits_t^T \mathbb{E}\left|f(s,y_s)-f(s,y_{1s})\right|^2 \mathbb{E}\left\{1+|y(s)|^2\right\}ds+\right.$$

$$\left.+\int\limits_t^T \mathbb{E}\left|f(s,y_{1s})\right|^2 \mathbb{E}\left|y(s)-y_1(s)\right|^2 ds\right] \leq K(1+\|\varphi\|\,2).$$

Звідси випливає (4.39), що й доводить лему 4.1. ■

Продовжимо доведення теореми 4.3. Будуємо допоміжну задачу, для якої керування u_1 буде оптимальним, а $Q_1 \equiv v_0 + \varepsilon v_1$ буде функціоналом Беллмана. Для цього додамо рівняння (4.12) при $\varepsilon = 0$ до рівняння (4.28), яке домножимо на ε, при $i = 1$.

Отримаємо диференціальне рівняння для відшукання $Q_1(t,\varphi)$:

$$\mathcal{L}_0 Q^1_\varphi(t,x) + x^T M_2(t)x + \varepsilon f^T(t,\varphi)\nabla Q^1_\varphi(t,x) + \delta_1(t,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nabla Q^1_\varphi(t,x)\right)^T B_1(t)\nabla Q^1_\varphi(t,x); \qquad (4.40)$$

з крайовою умовою

$$Q_1(T,\varphi) = x^T M_0 x; \quad x = \varphi(0);$$

$$\delta_1(t,\varphi) \equiv \varepsilon^2\left[\frac{1}{4}\left(\nabla v^1_\varphi(t,x)\right)^T B_1(t)\nabla v^1_\varphi(t,x) - f^T(t,\varphi)\nabla v^1_\varphi(t,x)\right].$$

Це означає, що керування u_1 (4.35) є оптимальним, а функціонал $Q_1 \equiv v_0 + \varepsilon v_1$ — функціоналом Беллмана в задачі керування з рівнянням (4.1) і мінімізуючим функціоналом

$$I^1_\varepsilon(u) = J_\varepsilon(u) + \mathbb{E}_{\varphi_0}\int\limits_0^T \delta_1(s,x_s)ds.$$

Умови (4.4)—(4.6) і (4.39) дають оцінку

$$|\delta_1(t,\varphi)| \le \varepsilon^2 k(1+\|\varphi\|^2).$$

Зауважимо, що для керування $u_1(t,\varphi)$, згідно з умовою (4.39), будуть виконуватися оцінки типу (4.22), (4.23).

Теорема 4.3 доведена. ■

4.5. Допоміжна задача керування для k-го наближення. Оцінка k-го наближення.

Для нульового і першого наближення побудовано допоміжні задачі з СДФР (4.1), (4.2) і функціоналом Беллмана, який відрізняється від вихідного функціоналу (4.19) на величину порядку ε і ε^2.

Ставиться задача: побудувати допоміжну задачу керування, для якої керування (4.14) буде оптимальним, а функціонал

$$Q_k \equiv v_0 + \varepsilon v v_1 + .. + \varepsilon^k v_k, \quad k \ge 1, \qquad (4.41)$$

буде функціоналом Беллмана.

Для цього потрібно:

1. Отримати

$$\mathcal{L}_0 v_\varphi(t,x) + x^T M_2 x = \frac{1}{4}\left(\nabla v_\varphi(t,x)\right)^T B_1(t)\nabla v_\varphi(t,x) \qquad (4.12.0)$$

з (4.12) при $\varepsilon = 0$.

2. Домножити рівняння (4.15)—(4.17) на ε^i $(i = 1, 2, ..., k)$ і додати до (4.12.0).

3. До одержаної рівності додати і відняти вираз $\frac{1}{4}\left(\nabla Q_\varphi k\right)^T B_1 \nabla Q_\varphi k$, у результаті будемо мати

$$\mathcal{L}_0 Q^k_\varphi(t,x) + x^T F(t)x + \varepsilon f^T(t,\varphi)\nabla Q^k_\varphi(t,x)+$$
$$+\frac{1}{4}[\left(\nabla Q^k_\varphi(t,x)\right)^T B_1(t)\nabla Q^k_\varphi(t,x)-$$
$$-\sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i\sum_{j=0}^{i}\left(\nabla v^j_\varphi(t,x)\right)^T B_1(t)\nabla v^{i-j}_\varphi(t,x)]-$$
$$-\varepsilon^{k+1} f^T(t,\varphi)\nabla v^k_\varphi(t,x) = \frac{1}{4}\left(\nabla Q^k_\varphi(t,x)\right)^T B_1(t)\nabla Q^k_\varphi(t,x). \qquad (4.42)$$

4. Перетворити вираз у квадратних дужках (4.42) за допомогою Q_k (4.41):

$$\sum_{m=0}^{k}\sum_{n=0}^{k}\varepsilon^{n+m}\left(\nabla v_m\right)^T B_1(t)\nabla v v_n - \sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i\sum_{j=0}^{i}\left(\nabla v_j\right)^T B_1(t)\nabla v_{i-j} =$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k+j}\varepsilon^i\left(\nabla v_j\right)^T B_1(t)\nabla v_{i-j} - \sum_{j=0}^{k}\sum_{i=j}^{k}\varepsilon^i\left(\nabla v_j\right)^T B_1(t)\nabla v_{i-j} =$$
$$=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=k+1}^{k-j}\varepsilon^i\left(\nabla v_j\right)^T B_1(t)\nabla v_{i-j} =$$

$$= \varepsilon^{k+1} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon^i \left(\nabla v_j\right)^T B_1(t) \nabla v_{k+1+i-j}. \qquad (4.43)$$

Таким чином, отримали наступне твердження.

Теорема 4.4. *k-е наближення керування $u_k(t)$ (4.14) для задачі оптимального керування (4.1)—(4.3) з функціоналом якості*

$$I^k_\varepsilon(u) = J_\varepsilon(u) + E_{t,\varphi} \int\limits_0^T \delta_k(s, x^u_s) ds$$

є функціоналом Беллмана $Q_k(t,\varphi)$, для якого виконується рівняння

$$\mathcal{L}_0 Q^k_\varphi(t,x) + \varepsilon f^T(t,\varphi) \nabla Q^k_\varphi(t,x) + x^T M_2(t) x + \delta_k(t,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\nabla Q^k_\varphi(t,x)\right) B_1(t) \nabla Q^k_\varphi(t,x), \qquad (4.44)$$

де $B_1(t) \equiv B M_1^{-1} B^T$;

$$\delta_k \equiv \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon^i \left(\nabla v_j\right)^T B_1 \nabla v_{k+1+i-j} - f^T \nabla v_k \right) \varepsilon^{k+1}. \qquad (4.45)$$

Оцінка для k-го наближення міститься у наступному твердженні.

Теорема 4.5. *Нехай функціонали $v_2, ..., v_k$, $k \geq 2$ визначаються співвідношеннями (4.30), (4.31), задовольняють оцінки вигляду (4.39). Тоді керування $u_k(t,\varphi)$ (4.29) є k-им наближенням до оптимального управління задачі (4.1)—(4.3), (4.9) з оцінкою*

$$0 \leq J_\varepsilon(u_k) - v(\varphi_0) \leq \varepsilon^{k+1} K_0. \qquad (4.46)$$

Доведення випливає з (4.45) і оцінок вигляду (4.39). Можна отримати оцінку $|\delta_k(t,\varphi)| \leq \varepsilon^{k+1} K(1 + \|\varphi\|^2)$. Слід зауважити, що для керування $u_k(t,\varphi)$ справедливі оцінки типу (4.22), (4.23), що й дає оцінку (4.46) теореми 4.5. ■

Теорема 4.6. *Нехай у задачі оптимального керування (4.1)–(4.3), (4.9) наближення $v_1, v_2, ..., v_k$ до оптимального управління задовольняють оцінку*

$$\max_{1 \le i \le k} \left| \nabla v_\varphi^i(t,x) \right| \le K \cdot k^m (1 + \|\varphi\|^2). \tag{4.47}$$

Тоді $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = v(\varphi_0)$.

Доведення. Для $\delta_k(t,\varphi)$, заданого формулою (4.45), з урахуванням оцінки (4.47) будемо мати $|\delta_k(t,\varphi)| \le K\varepsilon^{k+1}k^{m+2}(1 + \|\varphi\|^2)$ для деякого $K > 0$ і $0 < \varepsilon < 1$.

Тому $0 \le J_\varepsilon(u_k) - v(\varphi_0) \le \varepsilon^{k+1}k^{m+2}K$. Звідси випливає (4.48).

Розділ 5. Властивості розв'язків дифузійних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з марковськими параметрами

У розділі 5 описуються основні теореми про стійкість розв'язків дифузійних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з марковськими параметрами зі скінченною післядією.

§5.1. Стійкість дифузійних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з марковськими параметрами

5.1.1. Основні означення

Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ задано на потоці σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq t_0\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ випадковий процес $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$ дифузійним стохастичним функціональнодиференціальним рівнянням (ДСФДР)

$$dx(t) = a(t, x_t, y(t))dt + b(t, x_t, y(t))dw(t), \quad t \geq t_0, \tag{1.1}$$

за початковими умовами

$$x(t_0 + \theta) = \varphi(\theta), \theta \in [-\tau, 0], \quad \tau > 0, \tag{1.2}$$

де $x_t = \{x(t+\theta), \theta \in [-\tau, 0]\}$; $y(t) \equiv y(t, \omega) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, t \geq t_0$, — стохастично-неперервний однорідний феллерівський марковський процес з неперервними справа реалізаціями на компактному фазовому просторі Y [17]; $a : [t_0, \infty) \times C_n([-\tau, 0]) \times Y \to \mathbb{R}^n$ — неперервне відображення за аргументами; $b : [t_0, \infty) \times C_n([-\tau, 0]) \times Y \to M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$ — матриця порядку $n \times n$; $w(t)$ — n-вимірний процес броунівського руху.

Означення 1.1. *Абсолютно неперервний за змінною $t \geq t_0$ n-вимірний випадковий процес $x(t)$ називається розв'язком задачі (1.1), (1.2) на множині $[t_0, T) \subset \mathbb{R}_+$, якщо $\forall T_1 \subset [t_0, T)$, $t \in [t_0 - \tau, T_1)$ з імовірністю 1 виконується рівність*

$$x(t) = \begin{cases} \varphi(t - t_0), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ \varphi(0) + \int\limits_{t_0}^{t} a(s, x_s, y(s))ds + \\ \quad + \int\limits_{t_0}^{t} b(s, x_s, \xi(s))dw(s), \quad t \in [t_0, T_1). \end{cases} \tag{1.3}$$

Якщо довільні два розв'язки (1.1), (1.2) рівні між собою з імовірністю одиниця на довільному відрізку $t \in [t_0, T)$, то говорять, що на цій множині розв'язок єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності. У цьому випадку за умови $y(t_0) = y$ розв'язок будемо позначати через $x(t, t_0, \varphi, y)$, а його траєкторії на відрізку часу $[t - \tau, t]$ через $x_t(t_0, \varphi, y) = \{x(t + \theta, t_0, \varphi, y), \theta \in [-\tau, 0]\}$.

Надалі будемо припускати виконання однієї з умов на праву частину ДСФДР

$L1$) Глобальна умова Ліпшиця:

$$|a(t, \varphi, y) - a(t, \psi, y| + \|b(t, \varphi, y) - b(t, \psi, y)\| \leq L \,\|\varphi - \psi\|$$

для всіх $t \geq 0$, $y \in Y$ та $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$, $\|\varphi\| = \sup\limits_{-\tau \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$.

$L2$) Посилена глобальна умова Ліпшиця: існує така ймовірнісна міра ρ на σ-алгебрі борелівських підмножин відрізку $[-\tau, 0]$, що для всіх $t \geq 0$, $y \in Y$ та $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$

$$|a(t,\varphi,y) - a(t,\psi,y| + \|b(t,\varphi,y) - b(t,\psi,y)\| \leq$$

$$\leq L \int\limits_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta) - \psi(\theta)|\, \rho(d\theta) \equiv \|\varphi - \psi\|_\rho \,.$$

$L3$) Локальна умова Ліпшиця:

$$|a(t,\varphi,y) - a(t,\psi,y| + \|b(t,\varphi,y) - b(t,\psi,y)\| \leq L_r \|\varphi - \psi\|$$

за умови $\forall t \geq 0$, $y \in Y$, $r > 0$ та $\varphi, \psi \in U_r(0) \equiv \{\varphi \in C_n([-\tau, 0]) \,|\, \|\varphi\| < r\}$.

$L4$) Посилена локальна умова Ліпшиця:

$$|a(t,\varphi,y) - a(t,\psi,y| + \|b(t,\varphi,y) - b(t,\psi,y)\| \leq L_r \|\varphi - \psi\|_\rho$$

для довільних $t \geq 0$, $y \in Y$, $r > 0$ та $\varphi, \psi \in U_r(0) \equiv \{\varphi \in C_n([-\tau, 0]) \,\Big|\, \|\varphi\|_\rho < r\}$.

За обмеженнями типу $L3$, $L4$, як правило, використовується обмеження так званого підлінійного росту

$$|a(t,\varphi,y)| + \|b(t,\varphi,y)\| \leq K(\|\varphi\| + \alpha) \tag{1.4}$$

або

$$|a(t,\varphi,y)| + \|b(t,\varphi,y)\| \leq K(\|\varphi\|_\rho + \alpha) \tag{1.5}$$

для всіх $t \geq 0$, $y \in Y$ та $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$.

Зрозуміло, що з глобальних умов $L1$) або $L2$) та умови

$$\sup_{t \geq 0} |a(t,0,y)| = \alpha < \infty, \quad \sup_{t \geq 0} |b(t,0,y)| = \alpha < \infty, \tag{1.6}$$

випливають умови (1.4), (1.5) відповідно [54].

Підставляючи у праву частину ДСФДР реалізації марковського процесу $y(t)$ та використовуючи результати праці [54], легко переконатися у тому, що глобальна умова Ліпшиця $L1$) та умова (1.6) (або локальна умова $L3$) та умова (1.6)) гарантують існування та єдиність розв'язку задачі (1.1), (1.2) на $[t_0, \infty)$ для довільного $t_0 \geq 0$ [54]. Уведемо поняття стійкості тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ рівняння (1.1), як це зроблено в працях [24, 50, 54, 57, 126, 127, 129], причому природно покласти $\alpha = 0$ в умові (1.6), тобто

$$a(t, 0, y) = 0, \quad b(t, 0, y) = 0, \tag{1.7}$$

а також вважати, що існує єдиний розв'язок задачі (1.1), (1.2) на будь-якому напівінтервалі $[t_0, \infty)$, $t_0 \geq 0$.

Означення 1.2. *Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі (1.1), (1.2) назвемо:*

— стохастично стійким, якщо $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ існує таке $\delta > 0$, що з нерівності $\|\varphi\| < \delta$ випливає $\forall t_0 \geq 0$, $y \in Y$ нерівність

$$P\{\omega : \sup_{t \geq t_0} |x(t, t_0, \varphi, y)| \geq \varepsilon_1\} < \varepsilon_2; \tag{1.8}$$

— асимптотично стохастично стійким, якщо виконується (1.8) та існує таке $\delta_1 > 0$, що для $\forall t_0 \geq 0$, $y \in Y$ та $\varphi \in U_{\delta_1}(0)$

$$P\{\omega : \lim_{t \to \infty} |x(t, t_0, \varphi, y)| = 0\} = 1; \tag{1.9}$$

— локально асиптотично стохастично стійким, якщо він стохастично стійкий та існують такі $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$, що

$$\lim_{t \to \infty} |x(t, t_0, \varphi, y)| = 0, \quad \forall t_0 \geq 0, \quad y \in Y, \quad \varphi \in U_{\delta_1}(0)$$

як тільки $\sup_{t \geq t_0} |x(t, t_0, \varphi, y)| < \delta_2$.

Означення 1.3. *Тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ задачі (1.1), (1.2) назвемо:*

— p–стійким, якщо

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \sup_{t \geq t_0 \geq 0} E\{|x(t, t_0, \varphi, y)|^p\} = 0;$$

— асимптотично p–стійким, якщо він p–стійкий та існує таке $\delta > 0$, *що*

$$\lim_{t\to\infty} E\{|x(t,t_0,\varphi,y)|^p\} = 0$$

для $\forall t_0 \geq 0$, $y \in Y$ *та* $\varphi \in U_\delta(0)$.

Означення 1.4. *Тривіальний розв'язок* $x(t) \equiv 0$ *задачі (1.1), (1.2) назвемо*

— експоненційно p–стійким, якщо існують такі $\delta > 0$, $M > 0$ *та* $\gamma > 0$, *що для довільних* $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in Y$ *та* $\varphi \in U_\delta(0)$

$$E\{|x(t,t_0,\varphi,y)|^p\} \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}\,\|\varphi\|^p; \tag{1.10}$$

— глобально експоненційно p–стійким, якщо (1.10) виконано для всіх $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in Y$ *та* $\varphi \in C_n([-\tau,0])$;

— сильно експоненційно p–стійким, якщо існують такі $-\delta > 0$, $M > 0$ *та* $\gamma > 0$, *що для всіх* $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in Y$ *та* $\varphi \in U_\delta(0)$

$$E\{\|x_t(t_0,\varphi,y)\|^p\} \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}\,\|\varphi\|^p; \tag{1.11}$$

— сильно глобально експоненційно p–стійким, якщо нерівність (1.11) виконується для всіх $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in Y$ *та* $\forall\varphi \in C_n([-\tau,0])$.

5.1.2. Похідна Ляпунова на розв'язках стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь (1.1), (1.2)

Розглянемо скалярний неперервний функціонал [54, 57] за всіма змінними

$$V : \mathbb{R}_+ \times C_n([-\tau,0]) \times Y \to \mathbb{R}^1, \tag{1.12}$$

для якого виконана глобальна умова Ліпшиця

$$|V(t,\varphi,y) - V(t,\psi,y)| \leq L\,\|\varphi - \psi\| \tag{1.13}$$

для всіх $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$ та умова глобальної обмеженості

$$\sup_{t \geq 0} |V(t, 0, y)| = \alpha < \infty. \tag{1.14}$$

За допомогою розв'язку (1.1), (1.2) та перехідної ймовірності $P(t, y, dz)$ марковського процесу $y(t) \in \mathbb{R}^n$ визначимо лінійний оператор [17]

$$(T(t)V)(s, \varphi, y) \equiv \int_Y E\{V(s+t, x_{s+t}(s, \varphi, y), z)\} P(t, y, dz). \tag{1.15}$$

Теорема 1.1. *Нехай функціонал V неперервний за сукупністю змінних. Тоді:*

1) результат дії оператора $T(t)$ на $V(t, \varphi, \xi)$ є неперервною функцією за аргументами, тобто $T : C(\tilde{Y}) \to C(\tilde{Y})$, де $\tilde{Y} \equiv [0, \infty) \times C_n([-\tau, 0) \times Y$;

2) оператор $T(t), t \geq 0$ утворює напівгрупу:

$$T(t_1 + t_2) = T(t_1) \cdot T(t_2), \quad \forall t_1, t_2 \geq 0; \tag{1.16}$$

3) сім'я лінійних операторів на фазовому просторі $\tilde{Y}$ визначає стохастичний неперервний марковський процес з неперервними справа реалізаціями.

Доведення. 1). За умови $L1)$ можна одержати нерівність

$$\|x_{t+s}(s, \varphi, y) - x_{t+s}(s, \psi, y)\| \leq \|\varphi - \psi\| \, e^{Lt}$$

для довільних $\varphi, \psi \in C_n([-\tau, 0])$ та $t \geq 0$, а завдяки стохастичної неперервності феллерівського марковського процесу $y(t)$ функція $T(t)V(s, \varphi, y)$ неперервна за сукупністю аргументів $T : C(\tilde{Y}) \to C(\tilde{Y})$.

2). Завдяки єдиності розв'язку задачі (1.1), (1.2) та властивостей перехідної ймовірності $P(t, y, dz)$ [17] матимемо

$$(T(t_1 + t_2)V(s, \varphi, y) =$$

$$= \int\limits_Y E\{V(s+t_1+t_2, x_{s+t_1+t_2}(s,\varphi,y),z)\}P(t_1+t_2,y,dz) =$$

$$= \int\limits_Y \int\limits_Y E\{V(s+t_1+t_2, x_{s+t_1+t_2}(s+t_1,$$

$$x_{t_2}(s,\varphi,y),u),z)\}P(t_1,y,du)P(t_2,u,dz)$$

але за визначенням

$$\int\limits_Y E\{V(s_1+t_2, x_{s_1+t_2}(s,\psi,y),z)P(t_2,u,dz)\Big|_{\substack{s_1=s+t_1,\\ \psi=x_{s+t_1}(s,\varphi,y)}} =$$

$$= (T(t_2)V)(s+t_1, x_{s+t_1}(s,\varphi,y),u)$$

і тому можна записати

$$(T(t_1+t_2)V(s,\varphi,y) =$$

$$= \int\limits_Y E\{(T(t_2)V)(s+t_1, x_{s+t_1}(s,\varphi,y),u)\}P(t_1,y,du) =$$

$$= (T(t_1)T(t_2)V))(s,\varphi,y)$$

для довільних $t_1, t_2, s \geq 0$, $y \in Y$ та $\forall\varphi \in C_n([-\tau,0])$, що й доводить (1.16).

3). Оскільки неперервна на відрізку $[-\tau+s, s+\Delta]$ функція аргументу t, що задана рівністю [17], [129]

$$x(t,s,\varphi) = \begin{cases} \varphi(t-s), \forall t \in [-\tau+s, s+\Delta], \\ \varphi(0) + \int\limits_s^t a(\tau, x_\tau(s,\varphi,y), y(\tau))d\tau + \\ \quad + \int\limits_s^t b(\tau, x_\tau(s,\varphi,y), y(\tau))dw(\tau), \quad \forall t \in [s,\Delta], \end{cases}$$

є рівномірно неперервною, тоді $\lim\limits_{t\to 0}\|x_t(s,\varphi,y)-\varphi\|=0$. Звідки, враховуючи стохастичну неперервність марковського процесу $y(t)$ та неперервність функціоналу $V(s,\varphi,y)$ за сукупністю змінних, випливає співвідношення

$$\lim_{t\downarrow 0} E\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t)\} = V(s,\varphi,y)$$

для всіх $s\geq 0$, $y\in Y$ та $\forall\varphi\in C_n([-\tau,0])$.

Залишилося скористатися теоремою 2.1 з [17, с.79] та лемою 2.2 з [17, с.83], щоб одержати твердження 3) теореми 1.

Означення 1.5. *Слабкий інфінітезимальний оператор визначається [17, 128] на функціоналі $V(s,\varphi,y)$, якщо для всіх $s\geq 0$, $y\in Y$ та $\forall\varphi\in C_n([-\tau,0])$ знайдеться таке $\Delta>0$, що існує*

$$\sup_{0<t\leq\Delta}\frac{1}{t}\left|E\{V(s+t,x_{s+t}(s,\psi,z),y(t)\}-V(s,\psi,z)\right|\leq K<\infty$$

рівномірно за аргументами ψ та z деякого околу точки (φ,y), а також існує границя

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}[E\{V(s+t,x_{s+t}(s,\varphi,y),y(t)\}-V(s,\varphi,y)]\equiv(\mathcal{L}V)(s,\varphi,y). \tag{1.17}$$

Нехай $\varphi\in U_r(0)\subset C_n([-\tau,0])$ та $\tau_r\equiv\inf\{t\in\mathbb{R}_+\mid x(t+s,s,\varphi,y)\mid>r\}$ — перший момент виходу випадкового процесу $\{x(t+s,s,\varphi,y)\}$ з $U_r(0)$. Якщо ця нерівність ніколи не виконується, то накладемо $\tau_r=\infty$. Зрозуміло, що подія $\{\omega:\tau_r>t\}$, що визначена тільки значеннями розв'язку задачі (1.1), (1.2) моменту часу t, є марковською випадковою величиною [17]. Якщо позначити $\tau_r(t)\equiv\min\{\tau_r,t\}$, то формулу Динкіна ((5.8), [17, с.191]) можна записати для нашого випадку у вигляді

$$E\{V(s+\tau_r(t),x_{s+\tau_r(t)}(s,\varphi,y),y(\tau_r(t)\}=$$

$$=V(s,\varphi,y)+E\{\int_0^{\tau_r(t)}(\mathcal{L}V)(s+\tau,x_{s+\tau}(s,\varphi,y),y(\tau)d\tau\} \tag{1.18}$$

для довільного $V \in D(\mathcal{L})$ і $\forall t \geq s \geq 0$, $y \in Y$ та $\forall \varphi \in U_r(0)$.

Лема 1.1. *Якщо неперервний функціонал* $V : \mathbb{R}_+ \times C([-\tau, 0]) \times Y \to \mathbb{R}$ *задовольняє умови (1.13), (14), то слабкий інфінітезимальний оператор* $\mathcal{L}$ *за означенням 5 можна подати у вигляді трьох операторів, що діють відповідно по першому, другому та третьому аргументам*

$$\mathcal{L}V = \mathcal{L}_1 V + \widehat{\mathcal{L}}_2 V + \widehat{\mathcal{L}}_3 V, \tag{1.19}$$

якщо функціонал V *лежить в області визначення кожного з цих операторів.*

Доведення. Для обчислення оператора $\mathcal{L}$ за формулою (1.17) використовуються лише локальні характеристики процесу, що задає напівгрупу $T(t)$, тобто $x_{s+t}(s, \varphi, y)$ та $y(t)$ за достатньо малими $t > 0$. Тому оператор $\mathcal{L}$ повністю визначається правою частиною ДСФДР та слабким інфінітезимальним оператором $\widehat{\mathcal{L}}_3$ марковського процесу $y(t)$.

Умови (1.13), (1.14) для всіх $s \geq 0$, $y \in Y$ та $\forall \varphi \in C_n([-\tau, 0])$ гарантують існування

$$\sup_{0<t\leq\Delta} \frac{1}{t} |E\{V(s, \varphi, y(t)\} - V(s, \varphi, y)| \leq K < \infty,$$

$$\sup_{0<t\leq\Delta} \frac{1}{t} |V(s, x_{t+s}(s, \varphi, y), y) - V(s, \varphi, y)| \leq K < \infty,$$

а також існування границь

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[E\{V(s, \varphi, y(t)\} - V(s, \varphi, y)] \equiv \tilde{V}_1(s, \varphi, y), \qquad (1.20_1)$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[V(s, x_{t+s}(s, \varphi, y), y) - V(s, \varphi, y)] \equiv \tilde{V}_2(s, \varphi, y), \qquad (1.20_2)$$

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}[V(s+t, \varphi, y) - V(s, \varphi, y)] \equiv \frac{\partial}{\partial t} V(s, \varphi, y). \qquad (1.20_3)$$

Тоді слід тотожно прирівняти ці границі:

$$\tilde{V}_1(s,\varphi,y) \equiv (\widehat{\mathcal{L}}_3 V)(s,\varphi,y),$$

$$\tilde{V}_2(s,\varphi,y) \equiv (\widehat{\mathcal{L}}_2 V)(s,\varphi,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial s}V(s,\varphi,y) \equiv (\mathcal{L}_1 V)(s,\varphi,y),$$

де границя (1.20_1) — це оператор $\mathcal{L}_3$, який діє на $V(s,\varphi,y(t))$ по третьому аргументу як слабкий інфінітезимальний оператор марковського процесу $y(t)$ [17]; границя (1.20_2) — це інфінітезимальний оператор на розв'язках ДСФДР [54]:

$$(\widehat{\mathcal{L}}_2 V)(s,\varphi,y) = ((\nabla V)(s,\varphi(0)), a(s,\varphi)) +$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{sp}\,((\nabla^2 V(s,\varphi(0))), b(s,\varphi)b^T(s,\varphi)),$$

де ∇V — вектор, компоненти якого дорівнюють V_{φ_i}; $\nabla^2 V$ — матриця з елементами $V_{\varphi_i\varphi_j}$; $\mathrm{sp}\,A$ — слід матриці A; b^T — транспонована матриця b. Лема 1.1 доведена.

Означення 1.6. *Оператор $(\mathcal{L}V)(s,\varphi,y)$ назвемо похідною Ляпунова на розв'язку ДСФДР, якщо функціонал $V:\mathbb{R}_+\times C([-\tau,0])\times Y$ є неперервний по s,φ,y, обмежений на кожній множині $[t_1,t_2]\times U_r(0)\times Y$ і виконано умови означення 5. Будемо це записувати так: $V\in D(\mathcal{L})$.*

Нехай $P\{\omega : \lim\limits_{r\to\infty}\tau_r(t)=t\}=1$, існують математичні сподівання

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t)\} < \infty$$

та

$$\sup_{0\le u\le t} E\{(\mathcal{L}V)(s+u, x_{s+u}(s,\varphi,y), y(u)\} < \infty.$$

Це дає можливість перейти до границі у формулі Динкіна (1.18), яка набуде вигляду

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t))\} = V(s,\varphi,y) +$$

$$+\int\limits_0^t E\{(\mathcal{L}V)(s+u, x_{s+u}(s,\varphi,y), y(u)\}du, \qquad (1.21)$$

де для обчислення $\mathcal{L}V$ використали лише тільки локальні характеристики марковського процесу $y(t)$, а саме інфінітезимальний оператор $\widehat{\mathcal{L}}_3$, і розв'язки ДСФДР, а саме оператор $\mathcal{L}_2$ з (20_2).

Зауваження 1.1. Якщо виконана локальна умова Ліпшиця $L3$) та умова (1.6), то формулу Динкіна (1.18) можна використовувати тільки до марковського моменту часу $\tau = \lim\limits_{r\to\infty} \tau_r$, тому що немає гарантії існування розв'язку задачі (1.1), (1.2) на напівінтервалі $[s,\infty)$. Але якщо за деякими s,φ,y з імовірністю 1 час $\tau=\infty$ та існують відповідні математичні сподівання, тоді можна використовувати формулу Динкіна (1.21) для всіх $t>0$.

Означення 1.7. *В умовах означення 6 верхньою похідною Ляпунова назвемо вираз*

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\sup_{0<t\le\Delta}\frac{1}{t}[E\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t))\}-$$

$$-V(s,\varphi,y)]\equiv(\tilde{\mathcal{L}}V)(s,\varphi,y),$$

якщо для всіх досить малих $\Delta>0$ у кожному околі $U_r(0)\times Y$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\Delta}\mid E\{V(s+\Delta, x_{s+\Delta}(s,\varphi,y), y(\Delta))\}-V(s,\varphi,y)\mid < g_r(s,\varphi,y), \qquad (1.22)$$

де $g_r(s,\varphi,y)$ є неперервною функцією своїх аргументів, обмежена за другим аргументом φ у кожній кулі $U_r(0)$.

Лема 1.2. *Якщо виконуються умови леми 1.1, то виконується нерівність Динкіна*

$$E\{V(s+\tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}(s,\varphi,y(\tau_r(t)), y(\tau_r(t)\}\le$$

$$\leq V(s,\varphi,y)+E\{\int\limits_{0}^{\tau_r(t)}(\mathcal{L}V)(s+u,x_{s+u}(s,\varphi,y),y(u))du\}. \quad (1.23)$$

Доведення. Розглянемо

$$V_{\Delta}(s,\varphi,y)\equiv\frac{1}{\Delta}\int\limits_{0}^{\Delta}E\{V(s+u,x_{s+u}(s,\varphi,y),y(u))\}du.$$

Оскільки Y — компакт [17, 128], а розв'язок задачі (1.1), (1.2) за проміжок часу $u\leq\Delta$ за умови $L1$) та (1.6) не виходить з кулі $U_r(0)$ для деякого $r>0$, то функціонал V_{Δ} існує для $V(s,\varphi,y)$, який обмежений на множині вигляду $[s,s+\Delta]\times U_r(0)\times Y$. Але $V_{\Delta}\in D(\mathcal{L})$ і

$$(\mathcal{L}V_{\Delta})(s,\varphi,y)=\frac{1}{\Delta}[E\{V(s+\Delta,x_{s+\Delta}(s,\varphi,y),y(\Delta))\}-V(s,\varphi,y)]$$

для всіх $s\geq 0$, $y\in Y$ та $\forall\varphi\in C_n([-\tau,0])$.

Таким чином,

$$E\{V(s+\tau_r(t),x_{s+\tau_r(t)}(s,\varphi,y),y(\tau_r(t)\}=$$

$$=V_{\Delta}(s,\varphi,y)+E\{\frac{1}{\Delta}\int\limits_{0}^{\tau_r(t)}[E\{V(s+\Delta+u,$$

$$x_{s+\Delta+u}(s+u,x_{s+u}(s,\varphi,y),y(\Delta+u)\}-$$
$$-V(s+u,x_{s+u}(s,\varphi,y),y(u))]du\}, \quad (1.24)$$

де $\tau_r(t)$ — перша мить виходу розв'язку (1.1), (1.2) з $U_r(0)$. Після переходу до границі в (1.24) зліва та справа за теоремою Фубіні одержимо нерівність (1.23). Лема 1.2 доведена.

Означення 1.8. *Якщо функціонал* $V:\mathbb{R}_+\times C_n([-\tau,0])\times Y\to\mathbb{R}^1$ *неперервний за всіма аргументами та задовольняє умови*

$$c_1\,|\varphi(0)|^{p_1}\leq V(s,\varphi,y)\leq c_2\,\|\varphi\|^{p_2} \quad (1.25)$$

для деяких $c_1, c_2 > 0$, $p_2 \geq p_1 > 0$ *та всіх* $s \in \mathbb{R}_+$, $y \in Y$ *та* $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$, *а також* $V \in D(\mathcal{L})$ *(або* $V \in D(\tilde{\mathcal{L}})$*), то такий функціонал назвемо функціоналом Ляпунова-Красовського.*

Зауваження 1.2. Величина (1.22) означення 1.7 може бути занадто жорсткою. Зокрема, цю нерівність не задовольняє найпростіший функціонал $\tilde{V}(s, \varphi, y) = \|\varphi\|$. Тому умову (1.22) можна послабити таким чином. Використовуючи напівгрупову властивість оператора $T(t)$, замість формули (1.24) слід записати вираз

$$E\{V_\Delta(s + \tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}(s, \varphi, y), y(\tau_r(t)\} =$$

$$= E\{V_\Delta(s + s_1, x_{s+s_1}(s, \varphi, y), y(s_1)\}+$$

$$+E\{\frac{1}{\Delta} \int\limits_0^{\tau_r(t)} [E\{V(s + s_1, x_{s+\Delta+u}(s + u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(\Delta + u)\}-$$

$$-V(s + u, x_{s+u}(s, \varphi, y), y(u))]du\}, \qquad (1.26)$$

де $s_1 \in [-\tau, t_1]$, а момент часу t_1 вибрано так, щоб за цей час розв'язок не вийшов з $U_r(0)$. Зрозуміло, що повинні виконуватися умови, які гарантують існування такого t_1. Нехай також мають місце умови, що гарантують оцінку

$$\sup |a(u, \varphi, y)| = c_{1r} < \infty, \quad \sup |b(u, \varphi, y)| = c_{2r} < \infty,$$

де sup по $u \geq s$, $y \in Y$ та $\varphi \in U_r(0)$. Тоді для всіх $u_1 \in [\tau, \tau_2)$, $u_2 \in [\tau, \tau_2)$ розв'язок (1.1), (1.2) задовольняє умову Ліпшиця

$$|x(s + u_1, s, \varphi, y) - x(s + u_2, s, \varphi, y)| \leq c_r \, |u_1 - u_2| \, .$$

Тепер для того, щоб перейти до границі під інтегралом у (1.26), достатньо, щоб виконувалася нерівність (1.22) тільки для тих $\varphi \in U_r(0)$, які задовольняють умову Ліпшиця. Легко бачити, що цю умову Ліпшиця функціонал $\tilde{V}(s, \varphi, y) = \|\varphi\|$

задовольняє, причому

$$
(\tilde{\mathcal{L}}\tilde{V})(s,\varphi,y) = \begin{cases} 0, \quad |\varphi(0)| < \|\varphi\|\,; \\ \max\{0, \dfrac{1}{|\varphi(0)|}\varphi^T(0)a(s,\varphi,y) + \\ \qquad \frac{1}{|\varphi(0)|}|b(s,\varphi,y)\varphi(0)|\}, \quad \varphi \in S_0, \end{cases} \tag{1.27}
$$

де $S_0 \equiv \{\varphi \in C([-\tau,0]) \mid \|\varphi\| = |\varphi(0)|\}$.

Якщо $P\{\omega : \lim_{r\to 0}\tau_r(t) = t\} = 1$, то з (1.23) випливає нерівність

$$
E\{\|x_{t+s}(s,\varphi,y)\|\} \leq
$$

$$
\leq E\{\|x_{s+\tau}(s,\varphi,y)\|\} + \int_{\tau}^{t} E\{(\tilde{\mathcal{L}}V)(s+u, x_{s+u}(s,\varphi,y), y(u))\}du,
$$

яку разом з (1.27) можна використовувати для аналізу розв'язків (1.1), (1.2).

Потрібно також зауважити, що в момент τ_r першого виходу розв'язку з кулі $U_r(0)$ завжди виконується рівність $|x(s+\tau_r,\varphi,y)| = \|x_{s+\tau_r}(s,\varphi,y)\|$, тобто $x_{s+\tau_r} \in S_0$, а значить для всіх $s \geq 0$, $y \in Y$ та $\forall \varphi \in U_r(0)$

$$
(\tilde{\mathcal{L}}\tilde{V})(s+\tau_r, x_{s+\tau_r(t)}(s,\varphi,y), y(\tau_r)) =
$$

$$
= \frac{1}{r}x^T(s+\tau_r,s,\varphi,y)a(s+\tau_r, x_{s+\tau_r}(s,\varphi,y), y(\tau_r)) +
$$

$$
+\frac{1}{r}|b(s+\tau_r, x_{s+\tau_r}(s,\varphi,y), y(\tau_r))x(s+\tau_r,s,\varphi,y)|.
$$

Одержані результати дозволяють досліджувати стійкість розв'язків задачі (1.1), (1.2) за означеннями 1.2, 1.3 та 1.4.

5.1.3. Загальні теореми Ляпунова про стійкість

Спочатку встановимо допоміжні нерівності для розв'язків задачі (1.1),(1.2).

Лема 1.3. *Якщо виконано умови L3) та (1.4), то розв'язок задачі (1.1), (1.2) допускає оцінку для всіх $T \geq 0$, $s \geq 0$, $y \in Y$ та $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$*

$$\sup_{-r \leq t \leq T} |x(t+s, s, \varphi, y)| \leq (\|\varphi\| + \alpha K \cdot T)e^{K \cdot T}; \tag{1.28}$$

$$\sup_{t_1, t_2 \in [s, s+T]} |x(t_2, s, \varphi, y) - x(t_1, s, \varphi, y)| \leq$$

$$\leq K[(\|\varphi\| + \alpha K \cdot T)e^{K \cdot T} + \alpha] \cdot |t_1 - t_2| \, . \tag{1.29}$$

Доведення. Умови $L3$) та (1.4) гарантують існування та єдиність розв'язку задачі (1.1), (1.2) на напівінтервалі $[s, \infty)$ [54]. З умови (1.4) легко одержати оцінку

$$\sup_{-r \leq t \leq u} |x(t+s, s, \varphi, y)| \leq (\|\varphi\| +$$

$$+K(\int\limits_0^u \sup_{-\tau \leq s_1 \leq t} |x(s+s_1, s, \varphi, y)| \, ds + \alpha T),$$

звідки за лемою Гронуолла випливає оцінка (1.28).

Тепер, використовуючи другий рядок (1.3) для довільних $t_2 > t_1$ з відрізку $[s, s+t]$, матимемо

$$|x(t_2, s, \varphi, y) - x(t_1, s, \varphi, y)| \leq K(\int\limits_{t_1}^{t_2} (\|x_t(s, \varphi, y)\| + \alpha) dt \leq$$

$$\leq K[(\|\varphi\| + \alpha K \cdot t)e^{KT} + \alpha](t_2 - t_1),$$

що й доводить лему 3.

Зауважимо, що у випадку $a(s, 0, y) \equiv 0$, $b(s, 0, y) = 0$ формули спростяться за рахунок $\alpha = 0$.

Теорема 1.2. *Нехай:*

1) $a(s, 0, y) \equiv 0$, $b(s, 0, y) = 0$;

2) виконано умови L3) та (1.5);

3) існує функціонал $V(s,\varphi,y)$, для якого справедлива оцінка (1.25)

$$c_1\,|\varphi(0)|^{p_1} \le V(s,\varphi,y) \le c_2\,\|\varphi\|^{p_2}$$

для $c_1, c_2 > 0$, $p_2 \ge p_1 > 0$, всіх $s \in \mathbb{R}_+$, $y \in Y$, $\varphi \in C_n([-\tau,0])$ та для деяких $c_3 > 0$ і $p \in (0,p_1]$ виконуєтьcя нерівність

$$(\tilde{\mathcal{L}}V)(s,\varphi,y) \le -c_3\,|\varphi(0)|^p\,, \tag{1.30}$$

$\forall s \ge 0$, $y \in Y$ та $\forall \varphi \in C_n([-\tau,0])$.

Тоді тривіальний розв'язок задачі (1.1), (1.2) є асимптотично p–стійким.

Доведення. Оскільки $P\{\omega : \lim\limits_{r\to\infty}\tau_r(t) = t\} = 1$ для всіх $t > 0$, то в (1.24) замість $\tau_r(t)$ можна писати t. За формулами (1.24) і (1.28) для $t \ge \tau$ матимемо нерівність

$$c_1E\{|x(t+s,s,\varphi,y)|^{p_1} \le E\{V(s+t,x_{s+t}(s,\varphi,y),y(t))\} \le$$

$$\le c_2E\{\|x_{s+\tau}(s,\varphi,y)\|^{p_2}\} - c_3\int\limits_{\tau}^{t}E\{|x(s+u,s,\varphi,y)|^p\}du \le$$

$$\le c_2\,\|\varphi)\|^{p_2}\,e^{p_2kT} - c_3\int\limits_{\tau}^{t}E\{|x(s+u,s,\varphi,y)|^p\}du.$$

Звідки випливає p–стійкість для $p \le p_1$ та збіжність інтегралу

$$\int\limits_{\tau}^{\infty}E\{|x(s+u,s,\varphi,y)|^p\}du < \infty.$$

А значить, зі збіжності інтеграла випливає прямування до нуля p–го моменту розв'язку задачі (1.1), (1.2), що і доводить твердження теореми 1.2.

Теорема 1.3. *Якщо виконані умови теореми 1.2 з $p_2 = p_1 = p > 0$, то тривіальний розв'язок задачі (1.1), (1.2) є глобально експоненційно стійким.*

Доведення. Позначимо через $u(t) \equiv (T(t)V)(s,\varphi,y)$ та перепишемо формулу (1.23) для випадку $\tau_r(t) = t$ і $t_2 > t_1 \geq \tau$ у вигляді

$$u(t_2) \leq u(t_1) - \int\limits_{t_1}^{t_2} E\{(\tilde{\mathcal{L}}V)(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t))\}dt.$$

Якщо V задовольняє умови теореми 1.2, то з попередньої формули та очевидної нерівності

$$(\tilde{\mathcal{L}}V)(s,\varphi,y) \leq -c_3\,|\varphi(0)|^p \leq -\frac{c_3}{c_1}V(s,\varphi,y)$$

матимемо

$$u(t_2) - u(t_1) \leq -\frac{c_3}{c_1}\int\limits_{t_1}^{t_2} u(t)dt.$$

Звідки

$$E\{|x(s+t,s,\varphi,y)|^p\} \leq \frac{1}{c_1}E\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t))\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1}e^{-\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)}E\{V(s+\tau, x_{s+\tau}(s,\varphi,y), y(t))\} \leq$$

$$\leq \frac{c_2}{c_1}e^{-\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)} \cdot e^{p_2 Kh\|\varphi\|^p}$$

для всіх $\varphi \in C_n([-\tau,0])$, $s \geq 0$, $y \in Y$ та $t \geq \tau$.

Теорема 1.4. *Якщо виконана локальна умова L3) Ліпшиця, умова (1.7) та існує функціонал Ляпунова-Красовського, що задовольняє умови теореми 1.2, то тривіальний розв'язок задачі (1.1), (1.2) є асимптотично стохастично стійкий.*

Доведення. Нехай τ_r — момент першого виходу розв'язку з кулі $U_r(0)$. Тоді для довільних $t \geq 0$ та $r > 0$ з формули (1.18) і означення функціоналу V очевидно виконується нерівності

$$c_1 E\{|x(s+\tau_r(t),s,\varphi,y)|^p\} \leq$$

$$\leq E\{V(s+\tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}(s,\varphi,y), y(\tau_r(t))\} \leq$$

$$\leq V(s,\varphi,y) \leq c_1 \|\varphi\|^p .$$

Значить $\lim\limits_{r\to\infty} \tau_r(t) = t$ та існує

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t))\} < \infty$$

для всіх $t \geq 0$, $\varphi \in C_n([-\tau,0])$, $s \geq 0$, $y \in Y$. Нехай $\mathcal{F}_t$ — мінімальна σ-алгебра, відносно якої вимірні всі $y(s)$ для $s \in [0,t]$. Тоді $V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t))$ є $\mathcal{F}_t$ — вимірним, а марковська властивість для довільного $u \in [0,t]$ дає

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t))\,|_{F_u}\} =$$

$$= E\{V(s_1+(t-u), x_{s_1+(t-u)}(s,\psi,z), y(t-u))\}\Bigg|_{\substack{s_1=s+u\\ z=y(u)\\ \psi=x_{s+u}(s,\varphi,y)}} .$$

Тому з нерівності (1.30) матимемо

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t))\,|_{F_u}\} \leq$$

$$\leq E\{V(s+u, x_{s+u}(s,\varphi,y), y(u))\},$$

тобто $\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t)), F_t\}$ - невід'ємний супермартингал для $t \geq 0$ [13], [124]. Значить, існує границя

$$\lim_{t\to\infty} V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t)) = \eta(\omega) \geq 0$$

з імовірністю 1. З нерівностей (1.25) і (1.30) можна одержати оцінки

$$E\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t))\} \leq$$

$$\leq c_2 \|\varphi\|^p - c_3 \int_0^t E\{|x(s+s_1,s,\varphi,y)|^p\} ds_1 \leq$$

$$\leq c_2 \left\|\varphi\right\|^p - \frac{c_3}{c_1} \int_0^t E\{V(s+s_1, x_{s+s_1}(s,\varphi,y), y(s_1))\} ds_1,$$

тобто

$$E\{\eta(\omega)\} = \lim_{t\to\infty} E\{V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t))\} \leq$$

$$\leq c_2 \left\|\varphi\right\|^p \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{c_3}{c_1}t} = 0$$

і тому $P\{\omega : \eta(\omega) = 0\} = 1$.

Тепер на підставі основної нерівності для супермартингалів [125] матимемо

$$P\{\omega : \sup_{t\geq T} |x(s+t, s, \varphi, y)| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\leq P\{\omega : \sup_{t\geq T} \frac{1}{T} V(s+t, x_{s+t}(s,\varphi,y), y(t)) \geq \varepsilon^p\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c_1\varepsilon^p} E\{V(s+T, x_{s+T}(s,\varphi,y), y(T))\} \leq \frac{c_2 \left\|\varphi\right\|^p}{c_1\varepsilon^p} e^{-\frac{c_3}{c_1}\cdot T}$$

для всіх $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C_n([-\tau, 0])$, $s \geq 0$, $y \in Y$.

Залишилось спрямувати $T \to \infty$ і теорема 4 доведена.

5.1.4. Стійкість систем дифузійних функціонально-диференціальних рівнянь з дискретними марковськими параметрами

4.1. Розглянемо скалярний процес $y(t) \in \mathbb{Y}$, який є однорідним марковським ланцюгом зі скінченним числом станів $Y \equiv \{y_1, y_2, y_k\}$, причому відомі параметри q_{ij} за умови

$$q_i = \sum_{j\neq i} q_{ij}, \tag{1.31}$$

$$\mathbb{P}\{y(t+\Delta t) = y_j | y(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \tag{1.32}$$

$$\mathbb{P}\{y(\tau) \equiv y_i, t \leq \tau \leq t + \Delta t | y(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t). \quad (1.33)$$

Цей марковський ланцюг $y(t) \in \mathbb{Y}$ є параметром задачі (1.1), (1.2).

Припустимо, що в момент $\tau > 0$ стрибкоподібної зміни структури фазовий вектор $x(\tau) \in \mathbb{R}^n$ однозначно визначається станом, в якому знаходилася система безпосередньо перед зміною структури, що викликано переходом $y(\tau - 0) = y_i$ в $y(\tau) = y_j \neq y_i$. Це означатиме виконання рівності

$$x(\tau) = \varphi_{ij}(x(\tau - 0)), \quad i \neq j, \quad (1.34)$$

де $\varphi_{ij}(x) \in C_n([-h, 0])$, причому $\varphi_{ij}(0) = 0$.

Згідно з формулою (1.19) у випадку ланцюга Маркова слабкий інфінітезимальний оператор на розв'язках ДСФДР має вигляд [125, 54]

$$\mathcal{L}v(s, \varphi, y(s)) = \frac{\partial v(s, \varphi, y(s))}{\partial s} + (\nabla v(s, \varphi(0), y(s)), a(s, \varphi, y(s))) +$$

$$+ \frac{1}{2} \mathrm{sp}\, \nabla^2 v(s, \varphi, y(s)) \sigma(s, \varphi, y(s)) \sigma^T(s, \varphi, y(s)) +$$

$$+ \sum_{j \neq i}^{k} [v(s, \varphi_{ij}(\varphi), y_j) - v(s, \varphi, y_i)] q_{ij}. \quad (1.35)$$

4.2. Якщо $y(t) \in \mathbb{Y}$ є чисто розривним скалярним марковським процесом, тобто $y(t) \in [t_1, t_2]$ такий, що допускає розклад

$$\mathbb{P}\{y(t + \Delta t) \in [\beta, \beta + \Delta\beta) | y(t) = \alpha \neq \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta t + o(\Delta t), \quad (1.36)$$

$$\mathbb{P}\{y(\tau) \equiv \alpha, t < \tau < t + \Delta t | y(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t). \quad (1.37)$$

Тоді матимемо слабкий інфінітезимальний оператор

$$\mathcal{L}v(s, \varphi, y(s)) = \frac{\partial v(s, \varphi, y(s))}{\partial s} + (\nabla v(s, \varphi(0), y(s)), a(s, \varphi, y(s))) +$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{sp}\nabla^2 v(s,\varphi,y(s))\sigma(s,\varphi,y(s))\sigma^T(s,\varphi,y(s))+$$

$$+\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}[v(s,\varphi,\beta)-v(s,\varphi,\alpha)]p(t,\alpha,\beta)d\beta. \tag{1.38}$$

4.3. Модельні задачі

Модельна задача 1. Нехай на ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ сильний розв'язок визначено скалярним диференціально-різницевим рівнянням

$$dx(t)=[y(t)x(t)+bx(t-h)]dt+\sigma x(t-\tau)dw(t) \tag{1.39}$$

за початковими умовами

$$x(t)=\varphi(t),\quad t\in[-h,0], \tag{1.40}$$

де $b\geq 0$, $h\geq 0$ — відомі сталі величини; $\{y(t)\}$ — однорідний марковський процес з двома станами $y_1>0$ та y_2 з перехідними ймовірностями

$$\mathbb{P}\{y(t)=y_j,y(s)=y_i\}=q_{ij}(t-s)+o(t-s);\quad i,j=\overline{1,2},$$

$$\mathbb{P}\{y(\sigma)\equiv y_i;s\leq\sigma\leq-1|y(s)=y_i\}=1-q_i(t-s)+o(t-s);$$

$$q_i=\sum_{j\neq i}q_{ij}.$$

Тут (B,S)-модель ринку складається з однієї акції $x(t)\equiv S(t,\omega)\in\mathbf{R}^1$, тобто ми розглядаємо випадок інвестицій в акції одного підприємства.

Визначимо достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному розв'язку рівняння (1.39).

Розв'язання. Скористаємося стохастичним функціоналом Ляпунова-Красовського

$$v(\varphi,y_k)=|y_k|\varphi^2(t)+y_1 b\int_{t-h}^{t}\varphi^2(\theta)d\theta, \tag{1.41}$$

де $k = 1, 2$.

Функціонал (1.41) задовольняє, очевидно, умови теореми 1.2, причому $v \in D(\mathcal{L})$, а нерівність $\mathcal{L}v < 0$ набуде вигляду

$$\mathcal{L}v(\varphi, y) = \varphi^2(t)[2y_k|y_k| + by_1 + q_{12}(|y_2| - y_1) +$$
$$+ q_{21}(y_1 - |y_2|)] + (-y_1 b + \sigma^2|y_k|)\varphi^2(t-h) +$$
$$+ 2\varphi(t)\varphi(t-h)b|y_k| < 0. \qquad (1.42)$$

$\mathcal{L}v$ відносно фазових змінних $\varphi(t-h)$, $\varphi(t)$ є квадратичною формою з матрицею

$$A \equiv \begin{bmatrix} -y_1 b + \sigma^2|y_k| & b|y_k| \\ b|y_k| & 2y_k|y_k| + by_1 + (q_{12} - q_{21})(|y_2| - y_1) \end{bmatrix}.$$

За правилом Сильвестра матриця A буде від'ємно-визначеною, а значить, і відповідна квадратична форма буде від'ємно-визначеною, якщо головні мінори матриці A змінюють знак з "$-$"на "$+$ тобто

$$-y_1 b < 0,$$
$$(-y_1 b + \sigma^2|y_k|)[2y_k|y_k| + by_1 +$$
$$+ (q_{12} - q_{21})(|y_2| - y_1)] - b^2 y_k^2 > 0; \quad k = 1, 2. \qquad (1.43)$$

За теоремою 1.2 умови (1.43) визначають достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному нульового розв'язку задачі (1.39), (1.40).

Модельна задача 2. Розглянемо скалярне стохастичне диференціально-різницеве рівняння

$$dx(t) = -[bx(t) + y(t)x(t-h)]dt + \sigma x(t)dw(t) \qquad (1.44)$$

за початковими умовами

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0], \qquad (1.45)$$

де $b \geq 0$, $h \geq 0$ — сталі, $\{y(t)\}$ — однорідний марковський процес з двома станами $y_1 > 0$ та y_2 з перехідними ймовірностями (1.31)—(1.33).

Визначимо достатні умови експоненціальної стійкості в середньому квадратичному задачі (1.44), (1.45).

Скористаємося знову функціоналом (1.41), для якого

$$\mathcal{L}v(\varphi, y_k) = \varphi^2(t)[-2by_k + by_1 + (q_{12} - q_{21})(|y_2| - y_1) +$$

$$+\sigma^2|y_k|] - y_1 b\varphi^2(t-h) - 2|y_k|y_k\varphi(t)\varphi(t-h) < 0.$$

Отже, достатніми умовами експоненціальної стійкості в середньому квадратичному нульового розв'язку задачі (1.44), (1.45) буде виконання нерівностей

$$-y_1 b < 0;$$

$$y_1 b[2by_k - by_1 - (q_{12} - q_{21})(|y_2| - y_1)] - \sigma^2|y_k| - y_k^4 > 0, k = 1, 2.$$

Ці умови дають можливість у площині параметрів b, σ будувати зони стійкості розв'язків (1.44), (1.45).

Зауважимо, що одержані теореми про стійкість розв'язків ДСФДР з успіхом можуть бути застосовані для аналізу стійкості динамічних систем, які мають транспортну, інформаційну, екологічну післядію тощо [24].

§ 5.2. Проблема оборотності теорем про стійкість для систем випадкової структури зі скінченною післядією

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}\}$, $\mathcal{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\}$, задана система з випадковою структурою та післядією (СВСП) за допомогою стохастичного диференціально-функціонального рівняння вигляду

$$dx(t) = a(t, x_t, \xi(t)) + b(t, x_t, \xi(t))dw(t) \tag{2.1}$$

з початковою умовою

$$x(t) = x^0(t, \omega), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0, \quad \xi(t_0) = y_0 \in \mathbb{Y}, \tag{2.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $x_t \equiv \{x(t+\theta), -\tau \le \theta \le 0\} \in C([-\tau, 0])$, функціонали $a : \mathbb{R}_+ \times C([-\tau, 0]) \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^m$; $b : \mathbb{R}_+ \times C([-\tau, 0]) \times \mathbb{Y} \to \mathbb{R}^m$; $w(t) \equiv w(t, \omega)$ — стандартний вінерів процес [17]; $\xi(t)$ — простий марковський ланцюг зі скінченним числом станів $\xi(t) \in \mathbb{Y} \equiv \{y_1, y_2, ..., y_k\}$, який задано ймовірностями переходу для $\forall\, t \ge s \ge 0$ [16, 17]:

$$\mathbb{P}\{\xi(t+\Delta t) = y_j | y(t) = y_i\} = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t), \tag{2.3}$$

$$\mathbb{P}\{y(s) \equiv y_i, t \le s \le t + \Delta t | y(t) = y_i\} = 1 - q_i \Delta t + o(\Delta t). \tag{2.4}$$

Розглянемо випадок, коли в момент $s > 0$ зміни структури системи (2.1), (2.2) відбувається випадкова стрибкоподібна зміна фазового вектора $x(s-0) = x$, $x(s) = z$, для якого задана умовна щільність $p_{ij}(\tau, z/x)$, тобто

$$\mathbb{P}\{x(s) \in [z, z+dz) | x(s-0) = x\} = p_{ij}(s, z/x)dz + o(dz). \tag{2.5}$$

Припустимо, що функціонали a і b задовольняють у довільній скінченній області $\|x_t\| < H$, $\|x_t\| \equiv \sup\limits_{t-\tau \le \theta \le t} |x(t+\theta)|$, умову Ліпшиця для довільних $\varphi, \psi \in C([-\tau, 0])$

$$|a(t, \varphi, y) - a(t, \psi, y)| + |b(t, \varphi, y) - b(t, \psi, y)| \le L\|\varphi - \psi\|, \tag{2.6}$$

$$|a(t, \varphi, y)| + |b(t, \varphi, y)| \le L(1 + \|\varphi\|), \tag{2.7}$$

при всіх $y \in \mathbb{Y}$, $t \in J \equiv \{t | t \ge t_0 \ge 0\}$, де $\|\varphi\| \equiv \sup\limits_{-\tau \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$, стала L залежить тільки від розмірів області H.

Якщо $w(t) \equiv w(t, \omega)$, $\forall\, t \ge t_0 \ge 0$, не залежить від початкового випадкового вектора $x_0(t, \omega)$, причому $\mathbb{E}|x_0(t, \omega)|^2 < \infty$, виконуються умови (2.6), (2.7), тоді існує сильний розв'язок СВСП (2.1)—(2.2) $x(t) \equiv x(t, \omega)$ [50, 52].

Припускається також, що траєкторії процесу можна продовжувати при всіх $t \ge t_0 \ge 0$.

Для рівнянь (2.1) з $\tau = 0$, $b \equiv 0$, тобто

$$dx(t) = a(t, x(t), \xi(t))dt \tag{2.8}$$

з неперервними фазовими траєкторіями проблема оборотності була розв'язана у праці [133].

Для стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) Іто розв'язанню цієї проблеми присвячені праці [133, 35].

Питання про існування функції Ляпунова для СВС без післядії, напевно, вперше обговорювався в [126].

Тут розглядається питання про існування функціоналів Ляпунова-Красовського для систем зі скінченною післядією.

Будемо, не втрачаючи загальності, досліджувати на стійкість тривіальний розв'язок СВСП (2.1), (2.2), тобто вимагатимемо, щоб

$$a(t,0,y) = b(t,0,y) = 0, \quad \forall\, t \geq t_0 \geq 0, \quad y \in \mathbb{Y}. \tag{2.9}$$

Означення 2.1. *Розв'язок $x = 0$ системи (2.1), (2.2) назвемо асимптотично стійким за ймовірністю в цілому, якщо для довільної обмеженої області $\|x_0\| \leq H_0$ і чисел $\gamma > 0$, $p > 0$, $q > 0$ існує обмежена область $\|x_t\| < H_1$ і число $T(q,\gamma) > 0$ такі, що*

$$\mathbb{P}\{[\sup \|x_t\| | t \geq t_0] < H_1|_{x_0,y_0}\} > 1 - p, \tag{2.10}$$

$$\mathbb{P}\{[\sup \|x_t\| | t \geq t_0 + T] < \gamma|_{x_0,y_0}\} > 1 - q - p, \tag{2.11}$$

Означення 2.2. *Розв'язок $x \equiv 0$ СВСП (2.1), (2.2) асимптотично стійкий за ймовірністю в цілому рівномірно за часом $t_0 \geq 0$ і початковими даними з області*

$$\|x_{t_0} \equiv \varphi_0\| \leq H_0; \quad y_0 \in \mathbb{Y}, \quad t_0 \geq 0, \tag{2.12}$$

якщо він задовольняє всі умови означення 2.1, при цьому сталу $T(q,\gamma)$ можна вибрати такою, що не залежить від початкових даних (2.12).

Означення 2.3. *Тривіальний розв'язок $x \equiv 0$ системи (2.1), (2.2) назвемо $p(H)$-асимптотично стійким за ймовірністю в цілому, рівномірним за початковими даними (2.12), якщо*

$$\mathbb{P}\{[\sup \|x_t\| | t \geq t_0] < H | x^0, y_0\} > 1 - p(H), \tag{2.13}$$

де $p(H)$ — стала, яка оцінює ймовірність того, що розв'язок $x(t)$ виходить з області $\|x_t\| < H$.

§ 5.3. Умови асимптотичної стійкості за ймовірністю в цілому рівномірно відносно початкових даних

Диференціально-функціональне рівняння з випадковою структурою (2.1), ймовірнісні характеристики процесу $\xi(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \geq t_0 \geq 0$, (2.3), (2.4), умова (2.5) стрибка фазового вектора $x(t) \equiv x(t, \omega) \in \mathbb{R}^m$ у моменти стрибкоподібної зміни структури системи визначають марковський процес $\{x_t, y_t\}$ з неперервними справа реалізаціями [10].

Розглянемо функціонал $v(t, y, \varphi)$, $\varphi \in C([-\tau, 0])$, який володіє такими властивостями:

i) v — додатно визначений в області $G \times \mathbb{Y}$, якщо для $\forall\, r > \varepsilon > 0$ можна вказати таке число $\delta > 0$, що $v(t, y, \varphi) \geq \delta$ при $t \geq t_0$, $(y, \varphi) \in \{G \cap \{\varepsilon \leq \|\varphi\| \leq r\} \times \mathbb{Y}\}$;

ii) допускає нескінченно малу вищу границю

$$\sup_{\substack{y \in \mathbb{Y}, t \in \mathbb{R}_+ \\ \|\varphi\| \leq r}} v(t, y, \varphi) \equiv \underline{v}(r) \to 0$$

при $r \to 0$;

iii) допускає нескінченно велику нижню границю

$$\inf_{\substack{y \in \mathbb{Y}, t \in \mathbb{R}_+ \\ \|\varphi\| \geq r}} v(t, y, \varphi) \equiv \bar{v}(r) \to \infty$$

при $r \to \infty$;

iv) існує $\mathbb{E}\{v(t, \xi(t), x_t) | x_s = \varphi, y(s) = y\}$;

v) існує інфінітезимальний оператор від v в силу (2.1)—(2.3)

$$\lim_{t \to s+0} \frac{\mathbb{E}\{v(t, \xi(t), x_t)\}}{t} \equiv (\mathcal{L}v)(s, y, \psi). \tag{3.1}$$

Зауваження 3.1. Якщо існує

$$\lim_{t \to s+0} \frac{1}{t} \mathbb{E}\{v(t, \xi(t), x_t)\} = h(s, y, \varphi), \tag{3.2}$$

то має місце формула Динкіна [17, 35, 133]

$$\mathbb{E}\{v(t,\xi(t),x_t)|x_s=\varphi,\xi(s)=y\}=v(s,y,\varphi)+$$
$$+\int\limits_s^t \mathbb{E}\{(\mathcal{L}v)(u,\xi(u),x_u)|x_s=\varphi,\xi(s)=y\}du. \tag{3.3}$$

Ця формула є стохастичним аналогом класичної формули Ньютона-Лейбніца

$$F(t,x(t))=F(s,x(s))+\int\limits_s^t dF(u,x(u)).$$

Зауважимо, що формула (2.7) справедлива також для марковських моментів часу $\tau(\omega)$ [13, 16, 35], якщо $\mathbb{E}\tau(\omega)<\infty$.

Нехай τ_U — момент першого виходу процесу $\{x_t,\xi_t\}$ з множини $U\equiv Q\times Y$ (Q — відкрита обмежена множина простору $C(\mathbb{R}^m,[-\tau,0])$, Y — відкрита обмежена множина простору $\mathbb{Y}([-\tau,0])$).

Тоді $\tau_U\equiv\min\{t,\tau_U\}$ — марковський процес [17]. Якщо $\{x_s,\xi_s\}\in U$, то справедливою є формула Динкіна

$$\mathbb{E}\{v(\tau_U(t),\xi(\tau_U(t)),x_{\tau_U(t)})|x_s\equiv\varphi,\xi(s)=y\}=$$
$$=v(s,y,\varphi)+\mathbb{E}\left\{\int\limits_s^{\tau_U(t)}(\mathcal{L}v)(u,\xi(u),x_u)du|x_s=\varphi,\xi(s)=y\right\}. \tag{3.4}$$

При цьому процес $\{x_{\tau_U(t)},y(\tau_U(t))\}$ також буде строго марковським [134], а інфінітезимальний оператор буде обчислюватися за однією з формул [124, 125, 126, 133].

$\mathcal{L}1$) Якщо виконуються умови (2.3)—(2.4) стану системи (2.1), (2.2) випадкової структури, тоді

$$(\mathcal{L}v)(s,y,\varphi)=\frac{\partial v}{\partial s}+(\nabla v(s,y,\varphi),a(s,y_i,\varphi))+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{sp}\,(\nabla^2 v(s,y_i,\varphi)b(s,y_i,\varphi),b'(s,y_i,\varphi))+$$

$$+\sum_{j\neq i}^{k}[\int v(s,y_j,z)p_{ij}(s,z/\varphi)dz - v(s,y_i,\varphi)]q_{ij}, \qquad (3.5)$$

де $\nabla v \equiv \left(\frac{\partial v}{\partial x_1},...,\frac{\partial v}{\partial x_n}\right)'$, $\nabla^2 v \equiv \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=\overline{1,m}}$, "$'$"— знак транспонування, sp — слід матриці.

Зокрема, коли в моменти зміни структури $y_i \to y_j$ фазовий вектор змінюється неперервно $x(\tau-0) = x(\tau) = x$, формула (3.5) спрощується, а саме,

$$(\mathcal{L}v)(s,y,\varphi) = \frac{\partial v}{\partial s} + (\nabla v, a) + \frac{1}{2}\mathrm{sp}\,(\nabla^2 v b, b')+$$

$$+\sum_{j\neq i}^{k}[v(s,y_j,\varphi) - v(s,y_i,\varphi)]q_{ij}. \qquad (3.6)$$

Доведемо аналог прямої теореми Ляпунова про стійкість системи (2.1), (2.2).

Теорема 3.1. *Нехай для системи випадкової структури (2.1), (2.2) виконуються умови i) — iv).*

Тоді тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ буде асимптотично стійкий за ймовірністю в цілому рівномірно відносно початкових даних з довільної скінченної області (2.12).

Доведення проведемо в три етапи.

Перший етап. Розглянемо незалежне від початкових даних число $T(H_0,\gamma,q) = 2C(H_0)q^{-1}k^{-2}$ з означення 2.1, де довільні числа

$$p > 0, \quad q > 0, \quad 0 < \gamma < H. \qquad (3.7)$$

Доведемо, що в інтервалі часу $[t_0, t_0+T]$ існує $t_1 \geq t_0 \geq 0$, для якого виконується нерівність

$$\mathbb{P}\{\|x_{t_1}\| < \gamma_1 | x^{t_0} = \varphi, \xi(t_0) = y_0\} > 1 - p - \frac{1}{2}q. \qquad (3.8)$$

Позначимо

$$c(H_0) \equiv [\sup v(t, y, \varphi) | \|\varphi\| < H_0,$$
$$y \in \mathbb{Y}, t \in J \equiv \{t \in \mathbb{R}_+ | t \geq t_0 \geq 0\}]. \tag{3.9}$$

Число $H > 0$ визначимо з умови

$$\mathbb{P}\{\inf v(t, y, \varphi) | \|\varphi\| = H, y \in \mathbb{Y}, t \in J\} > c(H_0). \tag{3.10}$$

Виберемо число $\gamma_1 > 0$ таким чином, щоб $\gamma_1 < \gamma$ (див. (3.7)) і задовольняло нерівність

$$c(\gamma_1) < \frac{1}{2} q [\inf v(t, y, \varphi) | \gamma_1 \leq \|\varphi\| \leq H, y \in \mathbb{Y}, y \in J]. \tag{3.11}$$

Позначимо

$$-k^2 \equiv [\inf(\mathcal{L}v) | \gamma_1 \leq \|\varphi\| \leq H, y \in \mathbb{Y}, t \in J]. \tag{3.12}$$

З умови (3.10) випливає, що для довільних початкових даних з області (2.12) справедлива нерівність

$$\mathbb{P}\{[\sup \|x_t\| | t \geq t_0 \geq 0] < H | \varphi, y_0\} > 1 - p.$$

Далі припустимо, що (3.8) не виконується, тобто

$$\mathbb{P}\{\gamma_1 \leq \|x_{t_1}\| \leq H, t \in [t_0, t_0 + T] | \varphi, y_0\} \geq \frac{1}{2} q \tag{3.13}$$

Тоді з урахуванням (3.12) і (3.4) виконувалася б нерівність

$$\mathbb{E}\{v(\tau_{\mathbb{U}}(t_0 + T), y(\tau_{\mathbb{U}}(t_0 + T)), x_{\tau_{\mathbb{U}}(t_0+T)}) | \varphi, y_0\} \leq$$
$$\leq v(t_0, y_0, \varphi) - \frac{1}{2} q k^2 T < 0, \tag{3.14}$$

де $\mathbb{U} \equiv \{(\varphi, y) : \gamma_1 < \|\varphi\| < H, y \in \mathbb{Y}\}$, $\tau_{\mathbb{U}}(t) \equiv \min\{\tau_{\mathbb{U}}, t\}$.

Нерівність (3.14) є неможливим внаслідок того, що $\mathbb{E}\{\cdot\} \geq 0$ за умов теореми.

Другий етап. За умови теореми 3.1 $x(t) \equiv 0$ системи (2.1), (2.2) є стійким за ймовірністю.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, $0 < p < 1$. Тоді існує таке число $\varepsilon_1 > 0$, що

$$(\inf v(t, y, \varphi) | y \in \mathbb{Y}, t \geq t_0, \|\varphi\| \geq \varepsilon) = \varepsilon_1. \tag{3.15}$$

Позначивши

$$\mathbb{U} \equiv \{(\varphi, y) : \|\varphi\| < \varepsilon, y \in \mathbb{Y}\}, \quad \tau_{\mathbb{U}}(T) \equiv \min\{T, T_{\mathbb{U}}\},$$

де $\tau_{\mathbb{U}}$ — момент першого виходу траєкторії $\{x_t, \xi(t)\}$ з множини $\mathbb{U}$.

Тоді з формули Динкіна (3.4) і знаковід'ємності $(\mathcal{L}v) < 0$ випливає, що

$$\mathbb{E}\{v(\tau_{\mathbb{U}}(T), \xi(\tau_{\mathbb{U}}(T)), x_{\tau_{\mathbb{U}}(T)}) | x_{t_0} = \varphi, \xi(t_0) = y_0\} \leq v(t_0, y_0, \varphi). \tag{3.16}$$

Далі виберемо $\delta > 0$ з умови

$$\sup\{v(t_0, y_0, \varphi) | \|\varphi\| \leq \delta, y_0 \in \mathbb{Y}\} < \varepsilon_1 p. \tag{3.17}$$

Нерівності (3.16), (3.17) дозволяють для довільного φ з області $\|\varphi\| \leq \delta$ легко записати оцінки

$$\varepsilon_1 p > v(t_0, y_0, \varphi) \geq \mathbb{E}\{v(\tau_{\mathbb{U}}(T), y(\tau_{\mathbb{U}}(T)), x_{\tau_{\mathbb{U}}(T)}) | y_0, \varphi\} \geq$$
$$\geq \varepsilon_1 \mathbb{P}\{[\sup \|x_t\| | t_0 \leq t \leq T] \geq \varepsilon | y_0, \varphi\}. \tag{3.18}$$

Якщо в (3.18) перейти до границі при $T \to \infty$, то одержимо

$$\mathbb{P}\{[\sup \|x_t\| | t \geq t_0] \geq \varepsilon | y_0, \varphi\} < p,$$

що й доводить стійкість тривіального розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи випадкової структури за ймовірністю.

Третій етап. Доведення асимптотичної стійкості за ймовірністю в цілому системи (2.1), (2.2).

Вибираємо довільно числа $H_0 > 0$, $p > 0$, $q > 0$, $\gamma > 0$ і визначимо H_1 і γ_1 за допомогою умов

$$\{\sup v(t, y, \varphi) | \|\varphi\| \leq H_0, y \in \mathbb{Y}, t \geq t_0\} <$$

$$< p \cdot \{\inf v(t, y, \varphi) | \|\varphi\| \geq H_1, y \in \mathbb{Y}, t \geq t_0\},$$

$$\{\sup v(t, y, \varphi) | \|\varphi\| \leq \gamma_1, y \in \mathbb{Y}, t \geq t_0\} <$$

$$< \frac{1}{2} q \cdot \{\inf v(t, y, \varphi) | \|\varphi\| \geq \gamma, y \in \mathbb{Y}, t \geq t_0\}.$$

Для фіксованих $p > 0$, $q > 0$ і стійкості за ймовірністю системи (2.1), (2.2) (див. другий етап) для $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що при $\|\varphi\| \leq \delta$ виконується нерівність

$$\mathbb{P}\{[\sup \|x_t\| | t \geq t_0] > \varepsilon | y_0, \psi\} > 1 - p.$$

Далі покладемо $H_0 = \delta$ і покажемо, що H_0 задовольняє умови асимптотичної стійкості за ймовірністю. Дійсно, візьмемо число $0 < \gamma < \varepsilon$ і визначимо $\gamma_1 > 0$ за допомогою нерівності

$$[\sup v(t, y, \varphi) | t \geq t_0, y \in \mathbb{Y}, \|\varphi\| < \gamma_1] <$$

$$< \frac{q}{2} [\inf v(t, y, \varphi) | t \geq t_0, y \in \mathbb{Y}, \gamma \leq \|\varphi\| < \varepsilon].$$

Тоді, повторюючи міркування другого етапу, одержимо

$$\mathbb{P}\{[\sup \|x_\tau\| | \tau \geq t] < \gamma | \xi(t), x_t\} > 1 - \frac{1}{2} q \qquad (3.19)$$

при виконанні умови

$$\|x_t\| \leq \gamma_1.$$

Покажемо, що існує $T > 0$, для якого має місце

$$\mathbb{P}\{\|x_{t_0+T}\| \leq \gamma_1 | y_0, \varphi\} > 1 - \frac{1}{2} q - p. \qquad (3.20)$$

Дійсно, у протилежному випадку для траєкторії x_t виконувалася б нерівність

$$\mathbb{P}\{\gamma_1 \leq \|x_t\| \leq \varepsilon, t \geq t_0 | y_0, \varphi\} \geq \frac{1}{2} q. \qquad (3.21)$$

Однак $\mathcal{L}v < 0$, тоді з (3.21) випливало б, що

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\{v(\tau_{\mathbb{U}_1}(t), y(\tau_{\mathbb{U}_1}(t)), x_{\tau_{\mathbb{U}_1(t)}})|y_0, \varphi\} = -\infty, \tag{3.22}$$

де $\mathbb{U}_1 \equiv \{(x_t, y) : \gamma_1 < \|x_t\| < \varepsilon, y \in \mathbb{Y}\}$, $\tau_{\mathbb{U}_1}(t) \equiv \min\{\tau_{\mathbb{U}_1}, t\}$.

Рівність (3.22) є неможливою внаслідок додатної визначеності $v(t, y, \varphi)$. Це протиріччя доводить справедливість (3.19).

Далі внаслідок строгої марковості процесу $\{x_t, \xi_t\}$ [1] з (3.17), (3.19) і (3.20) випливає, що для довільних чисел $p > 0$, $q > 0$ знайдеться таке число $T > 0$, що при $\|\varphi\| \le H_0$, $y_0 \in \mathbb{Y}$ виконується нерівність

$$\mathbb{P}\{[\sup \|x_t\||t \ge t_0 + T] < \gamma|y_0, \varphi\} > 1 - p - q. \tag{3.23}$$

А це доводить асимптотичну стійкість за ймовірністю $x(t) \equiv 0$.

З нерівностей (3.15), (3.16) та (3.23) випливають оцінки

$$\mathbb{P}\{[\sup \|x_t\||t \ge t_0] < H|\|\varphi\| \le H_0\} > 1 - p, \tag{3.24}$$

$$\mathbb{P}\{\|x_t\| < \gamma|\|x_{t_0+T}\| \le \gamma_1\} > 1 - \frac{1}{2}q. \tag{3.25}$$

Аналогічно до міркувань при отриманні оцінок (3.18)—(3.22), можна знайти момент часу $T > 0$, для якого

$$\mathbb{P}\{\|x_{t_0+T}\| \le \gamma_1|\|\varphi_0\| \le H_0\} > 1 - p - \frac{1}{2}q. \tag{3.26}$$

Умова (3.25) і (3.26) визначають оцінку

$$\mathbb{P}\{[\sup \|x_t\||t \ge t_0 + T] < \gamma|y_0, \varphi_0\} > 1 - p - q \tag{3.27}$$

для $\|\varphi_0\| \le H_0$.

Співвідношення (3.27) разом з (3.24) доводить третій етап. Отже, повернувшись до першого етапу, переконуємося у справедливості твердження теореми 3.1. ■

Зауважимо, що для стаціонарної системи з післядією

$$dx(t) = a(\xi(t), x_t)dt + b(\xi(t), x_t)dw(t), \tag{3.28}$$

що визначена в області $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{Y}$, $t \geq 0$ і у випадку однорідного марковського ланцюга зі скінченною кількістю станів $\xi(t) \in \mathbb{Y} \equiv \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ асимптотична стійкість за ймовірністю при початкових даних з області (2.12) завжди буде рівномірною в розумінні означення 2.2.

§ 5.4. Існування функціонала Ляпунова-Красовського для систем випадкової структури зі скінченною післядією

Викладені у §2 результати дають можливість стверджувати, що питання про існування функціоналу Ляпунова-Красовського (див. вимоги i)—iii)) можна висувати тільки у припущенні про справедливість рівномірної асимптотичної стійкості за ймовірністю нульового розв'язку $x(t) \equiv 0$ системи випадкової структури (2.1), (2.2).

Доведемо допоміжні твердження.

Лема 4.1. *Нехай для системи (2.1)—(2.5) виконуються умови:*

1) умовна щільність розподілу стрибків фазового вектора $p_{ij}(\tau, z/x)$ неперервна за τ і має компактний носій, для якого

$$h_1\|x_t\| \leq \|z_t\| \leq h_2\|x_t\|, \quad 0 < h_1 < h_2;$$

$$p_{ij}(\tau, z/0) = \delta(z); \tag{4.1}$$

2) функціонали a і b задовольняють умову Ліпшиця (2.6).

Тоді існують константи $L_1 > 0$, $L_2 > 0$ такі, що для $\forall\, t \geq t_0 \geq 0$

$$\mathbb{E}\{\|x_t\|^2 | x_{t_0} = \varphi; \xi(t_0) = y_0\} \leq \|\varphi\|^2 e^{L_2(t-t_0)}, \tag{4.2}$$

$$\mathbb{E}\{\|x_t\|^2 | x_{t_0} = \varphi; \xi(t_0) = y_0\} \geq \|\varphi\|^2 e^{-L_1(t-t_0)}. \tag{4.3}$$

Доведення. Візьмемо функціонал

$$v(t, y, \varphi) = |\varphi(0)|^2 + \int_{-\tau}^{0} |\varphi(t+\theta)|^2 d\theta. \tag{4.4}$$

Обчислимо $\mathcal{L}v$ за формулою (3.5) в силу системи (2.1)

$$(\mathcal{L}v)(t,y,x_t) = 2x'(0)a(t,y_i,x_t)+$$

$$+\mathrm{sp}(b(t,y_i,x_t),b'(t,y_i,x_t)) + |x(0)|^2 - |x(-\tau)|^2+$$

$$+\sum_{j\neq i}\left[\int\left(\|z\|^2 + \int\limits_{-\tau}^{0}\|z(t+\theta)\|^2 d\theta\right)p_{ij}(t,z/x)dz - +\right.$$

$$\left. -|x(0)|^2 - \int\limits_{-\tau}^{0}\|z(\theta)\|^2 d\theta\right]q_{ij}. \qquad (4.5)$$

Далі слід врахувати умову Ліпшиця (2.6), властивість щільності розподілу стрибків (4.1) і після елементарних оцінок отримаємо такі нерівності

$$(\mathcal{L}v)(t,y,x_t) \geq [-2L + (h_1^2-1)q_i + L^2]v(t,y,x_t) \equiv -L_1 v(t,y,x_t), \qquad (4.6)$$

де $L_1 \equiv 2L + (1-h_1^2)q_i$;

$$(\mathcal{L}v)(t,y,x_t) \leq [2L + L^2 + (h_2^2-1)q_i]v(t,y,x_t) \equiv L_2 v(t,y,x_t), \qquad (4.7)$$

де $L_2 \equiv 2L + L^2 + (h_2^2-1)q_i$; $q_i \equiv \sum\limits_{j\neq i} q_{ij}$; $h_1 \leq 1$; $h_2 \geq 1$.

Позначимо

$$v_t \equiv \mathbb{E}\left\{\left(\|x(t)\|^2 + \int\limits_{-\tau}^{0}\|x(t+\theta)\|^2 d\theta\right)\Bigg|_{y_0,x_0\equiv\varphi}\right\}, \qquad (4.8)$$

і після усереднення за всіма реалізаціями $\{x_t,\xi(t)\}$ з урахуванням

$$\frac{dv_t}{dt} = \mathbb{E}\{(\mathcal{L}v)(t,y,x_t)|x_{t_0}=\varphi,\xi(t_0)=y_0\}, \qquad (4.9)$$

можна записати оцінки

$$-L_1 v_t \le \frac{dv_t}{dt} \le L_2 v_t. \tag{4.10}$$

Інтегруючи нерівності (4.10) і, враховуючи, що $v_{t_0} = \|x_0\|^2 + \int\limits_{-\tau}^{0} \|x(t+\theta)\|^2 d\theta$, легко отримати оцінки (4.2), (4.3). Лема 4.1 доведена. ■

Лема 4.2. *Нехай тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи (2.1)–(2.5) рівномірно асимптотично стійкий в цілому.*

Тоді для довільної області

$$\Gamma \equiv \{x_t \in C([-\tau, 0]) : a \le \|x_t\| \le b\} \tag{4.11}$$

справедливе існування невласного інтеграла

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \mathbb{P}\{x_t \in \Gamma\} dt < \infty. \tag{4.12}$$

Доведення. Надалі позначення $x(t_0, \varphi_0, y_0; t)$ означає сильний розв'язок СДФР у точці $t \ge t_0 \ge 0$ з початковими умовами $x_{t_0} \equiv x(t_0 + \theta) = \varphi_0(\theta)$, $-\tau \le \theta \le 0$, $\xi(t_0) = y_0$.

Візьмемо довільні додатні числа $\gamma > 0$, $q > 0$, $H_0 > b$, знайдемо число $T(H_0, \gamma, q) > 0$, яке повинно задовольняти означення 2.2. Для цього слід вибрати початкові умови з (2.12). Позначимо також $\tau(\Gamma)$ — сумарний час знаходження розв'язку $x(t_0, \varphi_0, y_0; t)$ в області Γ.

У вихідному ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ має місце рівність

$$\mathbb{E}\{\tau(\Gamma)\} = \int\limits_{t_0}^{\infty} \mathbb{P}\{x(t_0, \varphi_0, y_0; t) \in \Gamma\} dt. \tag{4.13}$$

Для оцінювання (4.13) слід розглянути такі події.

Позначимо через $\mathcal{G}_0$ множину реалізацій розв'язку $x(t_0, \varphi_0, y_0; t)$, що потрапили до Г. В силу сепарабельності процесу $\{x_t, \xi(t)\}$ множина $\mathcal{G}_0$ має скінченну міру відносно мінімальної σ-алгебри.

Побудуємо послідовність подій

$$\mathcal{G}_k \equiv \{\omega : (k-1)T < \tau(\Gamma) \le kT\}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.14}$$

Очевидними є співвідношення для $\mathcal{G}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$: $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}_0$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k = \mathcal{G}_0$, $\mathcal{G}_i \cap \mathcal{G}_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Реалізації процесу $\{x(t_0, \varphi_0, y_0; t), \xi(t)\} \subset \mathcal{G}_k$, можуть потрапити до Г при $t \ge t_0 + (k-1)T$ хоча б одного разу.

Далі, враховуючи строгу марковість і рівномірну асимптотичну стійкість процесу $\{x(t_0, \varphi_0, y_0; t), \xi(t)\}$, одержимо

$$\mathbb{P}(\mathcal{G}_k) < q^{k-1} \tag{4.15}$$

Тоді за означенням математичного сподівання маємо

$$\mathbb{E}\{\tau(\Gamma)\} < T \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \frac{T}{(1-q)^2},$$

що з урахуванням (4.13) доводить твердження (4.12) леми 4.2. ■

Теорема 4.1 (обернена теорема Ляпунова для системи (2.1)—(2.5)). *Нехай нульовий розв'язок $x(t) \equiv 0$ системи випадкової структури зі скінченною післядією (2.1)—(2.5) асимптотично стійкий за ймовірністю рівномірно відносно початкових даних з області (2.12).*

Тоді в цій області H_0 існує додатно визначений (див. i)) неперервний функціонал Ляпунова-Красовського $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \times C([-\tau, 0]) \to \mathbb{R}_+$, що допускає нескінченно малу вищу границю

ii)

$$\sup_{\substack{y \in \mathbb{Y}, t \in \mathbb{R}_+ \\ \|\varphi\| \le r}} v(t, y, \varphi) \equiv \underline{v}(r) \to 0$$

при $r \to 0$ *з від'ємно визначеним інфінітезимальним оператором*

$$(\mathcal{L}v)(t, y, \varphi) < 0. \tag{4.16}$$

Доведення. *Етап I. Побудова необхідних областей.* Зауважимо спочатку, що можна вибрати обмежену область Γ_0 таким чином, щоб

$$\Gamma_0 \supset \{\varphi_0 \in C([-\tau, 0]) : \|\varphi_0\| \le \mathbb{H}_0\}.$$

Тоді за умовою теореми 4.2 розв'язок $x(t) \equiv 0$ буде рівномірно асимптотично стійким за ймовірністю відносно

$$\varphi_0 \in \Gamma_0, \quad y_0 \in \mathbb{Y}, \quad t_0 \ge 0. \tag{4.17}$$

При цьому слід відповідним чином змінити значення константи $T(\Gamma_0, \gamma, q)$. Доведення цього твердження випливає з виконання оцінок (4.2), (4.3) леми 4.1 для сильного розв'язку СДФР (2.5) [126, 133].

Далі розіб'ємо область $\|x_t\| \le \mathbb{H}_0$ на послідовність обмежених областей

$$G_k \equiv \{x_t \in C([-\tau, 0]) : \frac{H_0}{k+1} < \|x_t\| \le \frac{H_0}{k}\}, \quad k \ge 1. \tag{4.18}$$

Тоді, згідно з лемою 4.2, одержимо

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} \mathbb{P}\{x_t \in G_k\} dt \le l_k. \tag{4.19}$$

Побудуємо скалярну опуклу функцію $G(r)$, $r \in \mathbb{R}^1$, для якої:

1) існує $G'(r)$, $G''(r)$;
2) $G(r) = 0$ при $r \le 0$;
3) $G(r) > 0$ для $r \in 90, \mathbb{H}_0]$;
4)

$$\left[\sup_{r \in \mathbb{R}^1} G(r) \middle| \frac{H_0}{k+1} < |r| < \frac{H_0}{k}\right] < \mu_k. \tag{4.20}$$

Зауважимо далі, що слід вибрати таку послідовність $\{\mu_k, k \geq 1\}$, щоб ряд, складений з $\{l_k\}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k \mu_k < \infty. \tag{4.21}$$

Етап II. Вибір функціонала Ляпунова-Красовського потрібно провести таким чином

$$v(t, \zeta, \eta) \equiv \int_t^{\infty} \mathbb{E}\{G(\|x(t+\theta), \zeta, \eta; \tau\|)|\zeta, \eta\} d\tau_0. \tag{4.22}$$

Цей функціонал визначений у довільній точці області (2.12), оскільки

$$v(t, \zeta, eta) \leq \sum_{k=1}^{\infty} l_k \mu_k. \tag{4.23}$$

Етап III. Доведемо для функціонала Ляпунова-Красовського (4.22) $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \times C([-\tau, 0]) \to \mathbb{R}_+$ такі факти: a) v — додатно визначений; b) v допускає нескінченно малу вищу границю; c) $\mathcal{L}v < 0$.

a) Нехай $T \equiv (L_1)^{-1} \ln 2$, де L_1 з (4.3). Тоді ця оцінка (4.3) визначає

$$\mathbb{E}\{\|x(t+\theta), \xi, \eta; \tau\|^2\} \geq$$

$$\geq \|\xi\| e^{-L_1(\tau - t)} \geq \|\xi\| e^{-L_1 T} = \frac{1}{2}\|\xi\|.$$

Далі, для опуклої функції має місце нерівність Ляпунова [16]

$$\mathbb{E}\{G(z)\} \geq G(\mathbb{E}\{z\}).$$

Тоді

$$v(t, \xi, \eta) \geq \int_t^{t+T} \mathbb{E}\{G(\|x(t+\theta), \xi, \eta; \tau\|)|\xi, \eta\} d\tau \geq T \cdot G(\frac{1}{2}\|\xi\|),$$

що й доводить додатню визначеність функціонала $v(t,\xi,\eta)$ (див. (4.22)).

b) Візьмемо $\forall\,\gamma > 0$ і визначимо число N з умови

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \mu_k l_k < \frac{\gamma}{2}. \tag{4.24}$$

Виберемо $\nu \equiv \dfrac{1}{2}\gamma(l_1\mu_1 + ... + l_N\mu_N)^{-1}$ і для $\nu > 0$ та $\varepsilon_1 = H_0$ визначимо $\delta_1 > 0$ з нерівності

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\geq t_0\geq 0} \|x_t\| < \varepsilon_1 | y_0, \varphi_0\} > 1 - \nu \tag{4.25}$$

для $\|\varphi_0\| \leq \delta_1$, $y_0 \in \mathbb{Y}$.

Далі визначимо $\varepsilon_2 \equiv \dfrac{H_0}{2}$ і знайдемо $\delta_2 > 0$ з аналогічної умови (4.25):

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\geq t_0\geq 0} \|x_t\| < \varepsilon_2 | y_0, \varphi_0\} > 1 - \nu \tag{4.26}$$

для $\|\varphi_0\| \leq \delta_2$, $y_0 \in \mathbb{Y}$. Продовжимо аналогічним чином вибір чисел $\delta_3, \delta_4, ..., \delta_N$.

Отже, з вибору $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_N$ випливає, що вони не залежать від $t_0 \geq 0$ внаслідок рівномірної стійкості за ймовірністю.

Вибравши $\delta \equiv \min\{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_N\}$, при $\|\xi\| \leq \delta$ легко одержати оцінку

$$v(t,\zeta,\eta) \equiv \int_t^{\infty} \mathbb{E}\{G(\|x(t+\theta),\zeta,\eta\|)|\zeta,\eta\}d\tau \leq$$

$$\leq \nu \sum_{k=1}^{N} l_k\mu_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} l_k\mu_k < \gamma. \tag{4.27}$$

Таким чином, оцінка (4.27) доводить існування нескінченно малої вищої границі для v (див. ii)).

c) Для доведення $\mathcal{L}v < 0$ спочатку доведемо неперервність функціоналу $v(t,\zeta,\eta)$. Для цього досить показати, що інтеграл у (4.22) збігається рівномірно відносно параметрів t,ζ,η, які беремо з області (2.12). Слід узяти $\forall\,\varepsilon > 0$ і визначити число m з умови

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} l_k\mu_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далі, поклавши $\nu \equiv \frac{1}{2}\varepsilon(l_1\mu_1 + ... + l_m\mu_m)^{-1}$, знайдемо $T(\varepsilon)$ з умови

$$\mathbb{P}\{\sup_{\tau>t+T}\|x(t+\theta,\zeta,\eta;\tau)\| < \frac{H_0}{m+1}|\zeta,\eta\} > 1-\nu$$

для $\zeta\in\Gamma_0$, $\eta\in\mathbb{Y}$, $t\geq t_0$.

Тоді легко встановити оцінки

$$\int\limits_{t+T}^{\infty}\mathbb{E}\{G(\|x(t+\theta,\zeta,\eta;\tau)\|)|\zeta,\eta\}d\tau =$$

$$= \int\limits_{t+T}^{\infty}\mathbb{E}\{G(\|x(t+\theta,\zeta,\eta;\tau)\|)|\zeta\in\Gamma_0,\eta\in\mathbb{Y},\|x_\tau\| < \frac{H_0}{m+1}\}d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t+T}^{\infty}\mathbb{E}\{G(\|x(t+\theta,\zeta,\eta;\tau)\|)|\zeta\in\Gamma_0,\eta\in\mathbb{Y},\|x_\tau\| > \frac{H_0}{m+1}\}d\tau < \varepsilon,$$

що й доводить неперервність функціоналу $v(t,\zeta,\eta)$.

Використовуючи означення $(\mathcal{L}v)(t,\zeta,\eta)$, а саме,

$$(\mathcal{L}v)(t,\zeta,\eta) \equiv$$

$$\equiv \lim_{\Delta t\to+0}\frac{1}{\Delta t}[\mathbb{E}\{v(t+\Delta t, y(t+\Delta t), x_{t+\Delta t})|\zeta,\eta\} - v(t,\zeta,\eta)]. \quad (4.28)$$

Підставимо замість $v(t,\zeta,\eta)$ її вираз (4.22) до означення $\mathcal{L}v$ (4.28):

$$(\mathcal{L}v)(t,\zeta,\eta) \equiv \lim_{\Delta t\to+0} \frac{1}{\Delta t}\Bigg\{\mathbb{E}\Bigg[\int\limits_{t+\Delta t}^{\infty} \mathbb{E}\{G(\|x(t+\Delta t+\theta,$$

$$y(t+\Delta t), x_{t+\Delta t};\tau)\|)|y(t+\Delta t), x_{t+\Delta t}\}d\tau|\zeta,\eta\Bigg] -$$

$$-\int\limits_{t}^{\infty} \mathbb{E}\{G(\|x(t+\theta,y(t),x_t)\|)|\zeta,\eta\}d\tau\Bigg\}. \qquad (4.29)$$

Далі справедливою є нерівність

$$\mathbb{E}\Bigg\{\int\limits_{t+\Delta t}^{\infty} \mathbb{E}\{G(\|x(t+\Delta t+\theta, y(t+\Delta t), x_{t+\Delta t+\theta};\tau)\|)|\times$$

$$\times y(t+\Delta t), x_{t+\Delta t+\theta}\}d\tau|\zeta,\eta\Bigg\} =$$

$$= \int\limits_{t+\Delta t}^{\infty} \mathbb{E}\{G(\|x(t+\theta,y(t),x_{t+\theta};\tau)\|)|\zeta,\eta\}d\tau. \qquad (4.30)$$

Підставивши (4.30) у (4.29), легко бачити, що

$$(\mathcal{L}v)(t,\zeta,\eta) \leq -G\|\zeta\|,$$

що доводить визначену від'ємність інфінітезимального оператора.

Таким чином, це завершує доведення теореми 4.1 про побудову функціоналу у вигляді (4.22). ■

Зауважимо, що питання про побудову алгоритмів для вибору функціоналів Ляпунова-Красовського залишається відкритим.

Розділ 6. Властивості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь Іто-Скорохода в частинних похідних

У розділі 6 описуються основні теореми про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень та існування і стабілізацію сильного розв'язку автономних стохастичних рівнянь Іто-Скорохода в частинних похідних із випадковими параметрами.

§6.1. Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень

Питання існування та єдиності розв'язку стохастичних диференцальних рівнянь з деякими початковими та граничними умовами в різних функціональних просторах, зокрема і рівнянь у частинних похідних, досліджувалося багатьма авторами [3, 4, 6, 7, 8, 11, 12]. У працях [9, 10] А.Н. Станжицький та А.О. Цуканова одержали теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції-дифузії нейтрального типу. Дана робота розглядає питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу.

6.1.1. Постановка задачі

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0, 0\}, \mathbf{P})$ задано нелінійне дифузійне стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НДСДРРНТ) в частинних похідних під дією випадкових зовнішніх збурень, незалежних від вінерівського процесу

$$d\left(u(t,x) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,y)\, u(t-\tau,y)\, dy\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \varphi_j(\gamma_j) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2} dt + \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1})\, \sigma(t, u(t-\tau,x))\, dw(t,x), \tag{1}$$

для $t \in (0,T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковими даними

$$u(t,x) = \psi(t,x), \quad \forall t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

де $\gamma_j \equiv \gamma_j(\omega) \in \mathbf{R}^1$, $j = \overline{1, r+1}$, незалежні попарно та незалежні від вінерівського процесу $w(t,x)$ випадкові величини; зовнішні збурення $\varphi_j(\gamma_j)$, $j = \overline{1, r+1}$, — берівські функції, додатні, попарно незалежні та незалежні від вінерівського процесу і початкової функції; $T \in (0, \infty)$ — фіксований дійсний час, $\tau > 0$, випадковий r-вимірний оператор Лапласа [1, 4]

$$\Delta_x(\omega) \equiv \sum_{j=1}^{r} \varphi_j(x_j) \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2}, \tag{3}$$

$w(t,x)$ – $L_2(\mathbf{R}^r)$-вимірний Q-вінерівський процес [2]; σ : $[0,T] \times \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^1$ і $b : [0,T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^1$ – деякі конкретні функції, які будуть визначені під час дослідження; $\psi : [-\tau, 0] \times \mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^1$ – функція початкових даних.

6.1.2. Обговорення попередніх результатів та означення

Наведемо декілька тверджень з праць [9, 10, 11, 12].

Лема 1. [12, с.188]. *Оператор*

$$S(t) : L_2(\mathbf{R}^r) \to L_2(\mathbf{R}^r) \tag{4}$$

генерує розв'язок однорідної задачі Коші для рівняння тепла (лема 1, [9]) за початковими даними (2) *з імовірністю 1*

$$d(u(t,x)) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,z)\, u(t-\tau,z)\, dz =$$

$$= \Delta_x u(t,x)\, dt, \tag{5}$$

за правилом

$$u(t,x) = (s(t)\, g(\bullet))(x) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x-y)\, g(\bullet)\, dy, \tag{6}$$

та утворює C_{0-} *напівгрупу операторів, інфінітезимальним оператором якої є випадковий лапласіан* $\Delta_x(\omega)$ (3)*. А ця напівгрупа* $S(t)$ *є стискаючою, тобто*

$$\|(S(t)\, g(\bullet))(x)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le \|g(x)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}. \tag{7}$$

Уведемо потік (фільтрацію) σ-алгебр $\{F_t, t \geq t_0 \geq 0\}$, який породжений $L_2(\mathbf{R}^r)$-значним Q-вінерівським процесом

$$w(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} e_n(x) \beta_n(t), \tag{8}$$

де $\{\beta_n(t) \equiv \beta_n(t,\omega)\} \subset \mathbf{R}^1$ – незалежні стандартні одновимірні вінерівські (броунівські) процеси, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \equiv \lambda < \infty. \tag{9}$$

При цьому система векторів $e_n(x) \equiv \bar{e}_n(x)$ утворюють ортонормований базис у $L_2(\mathbf{R}^r)$ такий, що

$$\sup_{n\in\{1,2,\ldots\}} \; ess \sup_{x\in\mathbf{R}^r} |e_n(x)| \leq 1. \tag{10}$$

Уведемо простір Банаха $\mathfrak{B}_{2,T}$ всіх $L_2(\mathbf{R}^r)$-значних F_t-вимірних та неперервних з імовірністю одиниця випадкових процесів $\Phi(\bullet) \equiv \Phi(t,\omega) : [0,T] \times \Omega \to L_2(\mathbf{R}^r)$ з нормою

$$\|\Phi(\bullet)\|_{B_{2,T}} \equiv \sqrt{\sup_{0\leq t\leq T} \mathbf{E}\,\|\Phi(t,\omega)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}}. \tag{11}$$

Означення 1. Неперервну випадкову функцію $u \equiv u(t,x,\omega) : [-\tau, T] \times \mathbf{R}^r \times \Omega \to \mathbf{R}^1$ назвемо м'яким розв'язком задачі (1), (2), якщо виконуються умови:

1. u є F_T-вимірною для майже всіх $t \in [-\tau, T]$ та фіксованих $x \in \mathbf{R}^r$, $\omega \in \Omega$;

2. u задовольняє умову (інтегральне рівняння)

$$u(t,x,\omega) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x-y) \times$$

$$\times \left(\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0,y,z)\,\psi(-\tau,z)\,dz\right) dy -$$

$$- \int_{\mathbf{R}^r} b(0,x,y)\,u(t-\tau,y)\,dy -$$

$$- \int_0^t \left(\sum_{j=1}^r \varphi_j(\gamma_j)\,\Delta_x(\omega) \int_{\mathbf{R}^r} K(t-s,x-y) \times\right.$$

$$\left.\times \int_{\mathbf{R}^r} b(s,y,z)\,u(s-\tau,z)\,dzdy\right) ds +$$

$$+ \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s,x-y)\,\varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \times\right.$$

$$\times \sigma(s,u(s-\tau),y)\,e_n(y)\,dy)\,d\beta_n(s) \qquad (12)$$

для $t \in [0,T]$, $x \in \mathbf{R}^r$ за початковою умовою (2);

3. існує норма

$$E\left\{\int_0^T \|u(t,x,\omega)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\,dt\right\} < \infty. \qquad (13)$$

Лема 2 [10]. *Вираз* (13) *для випадкової функції* $u(t,x,\omega)$ *є нормою.*

6.1.3. Основний результат

Будемо надалі вважати, що ймовірнісний базис $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0\}, \mathbf{P})$ побудований [1–5] для задачі (1), (2), яка є предметом дослідження цієї роботи.

Основне твердження

Нехай для задачі (1), (2) виконано умови:

1. Коефіцієнт $\sigma \equiv \sigma(t,u,x)$ є:

   1а) вимірним за всіма аргументами;

   1б) задовольняє умову Ліпшиця за другим аргументом

$$|\sigma(t,u,x) - \sigma(t,v,x)| \le L\,|u-v|$$

   для $\forall t \in [0,T]$, $u,v \in \mathbf{R}^1$, $x \in \mathbf{R}^r$;

2. Початкова функція $\psi(t,x,\omega)$ є:

   2а) F_0-вимірною відносно аргумента $t \in [0,T]$;

   2б) незалежною від вінерівського процесу $w(t) \equiv w(t,\omega) \in \mathbf{R}^1$ для $\forall t \in [0,T]$;

   2в) незалежною від зовнішніх збурень $\varphi_j(\gamma_j)$, $j = \overline{1, r+1}$;

   2г) має норму

$$\sup_{-\tau \le t \le 0} \mathbf{E}\,\|\psi(t,x,\omega)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} < \infty; \tag{14}$$

3. Функція $b \equiv b(t,x,y)$ задовольняє умови:

   3а)

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,y)\,dydx} = K_1; \tag{15}$$

   3б)

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,y)\,dydx = K_2; \tag{16}$$

   3в) для кожної точки $x \in \mathbf{R}^r$ існують частинні похідні $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, де $\{i,j\} \subset \{1,2,...,r\}$;

   3г) матриця Гессе $D_x^2 b$ задовольняє умову

$$|\nabla_x b(t,x,y)| + \left\|D_x^2 b(t,x,y)\right\| \le Z(t,x,y), \tag{17}$$

для $\forall t \in [0,T] \subset [0,\infty)$, $\{x,y\} \subset \mathbf{R}^r$, де функція $Z : [0,T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \to [0,\infty)$ задовольняє умову обмеженості подвійного просторового інтегралу

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} Z\,(t,x,y)\, dxdy = K_3 < \infty; \tag{18}$$

4. Для функції $Z\,(t,x,y)$ виконується аналог умови Ліпшиця за другим аргументом

$$|Z\,(t,x,z) - Z\,(t,x_0,z)| \le \zeta\,(t,z,x_0,\delta)\,|x - x_0|\,,$$

   де для кожної точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$ існує її окіл $B_\delta\,(x_0)$ та невід'ємна функція $\zeta \equiv \zeta\,(t,z,x_0,\delta)$ для $\forall t \in [0,T]$, $|x - x_0| < \delta$; $z \in \mathbf{R}^r$, де

$$\sup_{0 \le t \le T} \zeta\,(t,\cdot,x_0,\delta) \in L_2\,(\mathbf{R}^r)\,, \delta \in \mathbf{R}_+; \tag{19}$$

5. зовнішні збурення $\varphi_j\,(\gamma_j)\,,\ j = \overline{1, r+1}$,

   5а) попарно незалежні;

   5б) незалежні від вінерівського процесу та від початкової функції $\psi\,(t,x) \equiv \psi\,(t,x,\omega) \in \mathbf{R}^1$;

   5в) виконується умова обмеженості математичних сподівань квадратів зовнішніх збурень $\mathbf{E}\left\{\varphi_{r+1}^2\right\} \le K_4 < \infty$.

Тоді задача (1), (2) для НДСДРНТ має єдиний м'який розв'язок $u \equiv u\,(t,x,\omega) \in \mathfrak{B}_{2,T}$ з імовірністю одиниця для $\forall t \in [0,T]$, якщо

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2\,(t,x,y)\, dxdy \equiv K_5 < \frac{1}{4}. \tag{20}$$

6.1.4. Доведення основного твердження

Доведення розіб'ємо на етапи, що містяться в теоремі Банаха [1, 2], яка застосована для встановлення з імовірністю одиниця єдиного розв'язку задачі (1), (2) (задачі Коші). Будемо використовувати методику, викладену в [9, 10].

Розглянемо оператор $S : \mathfrak{B}_{2,T} \to \mathfrak{B}_{2,T}$, який діє за правилом для $t \in [0,T]$, $x, y \in \mathbf{R}^r$

$$(Su)(t) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x-y) \times$$

$$\times \left[\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0,y,z)\,\psi(-\tau,z)\,dz\right] dy -$$

$$- \int_{\mathbf{R}^r} b(t,y,z)\,u(t-\tau,y)\,dy -$$

$$- \int_0^t \left[\sum_{j=1}^r \varphi_j(\gamma_j)\,\Delta_x(\omega) \int_{\mathbf{R}^r} \left(K(t-s, x-y) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int_{\mathbf{R}^r} b(s,y,z)\,u(s-\tau,z)\,dz \right) dy \right] ds +$$

$$+ \int_0^t \varphi_{r+1}(\gamma_{r+1}) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \times$$

$$\times \left[\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, s-y)\,\sigma(s, u(s-\tau), y)\,e_n(y)\,dy\right] d\rho_n(s) \equiv$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{3} I_j(t) \tag{21}$$

за початковими даними (2).

Доведемо, що цей оператор є стискаючим.

По-перше, треба довести, що $Su \in \mathfrak{B}_{2,T}$ для $\forall u \in \mathfrak{B}_{2,T}$. Для цього потрібно оцінити чотири норми $\|I_j(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}} \equiv \sup \mathbf{E}\|I_j(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}$, $j = 0, 1, 2, 3$.

Використаємо нерівність (7) леми 1, нерівність Коші-Шварца [4] та умови (14), (20) і одержимо оцінку для супремума математичного сподівання $I_0(s)$ з оператора $(Su)(t)$ (див. (21)), а саме:

$$\|I_0(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} E\|I_0(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^d)} \equiv$$

$$= \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\|\int\limits_{\mathrm{R}^r} K(s,\ x-y)(\psi(0)+$$

$$+\int\limits_{R^r} b(0,\ y,\ z)\psi(-\tau,z)dz)dy\|^2_{L_2(R^r)} \le$$

$$\le 2\mathbf{E}\|\psi(0)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} + 2\mathrm{E}\|\int\limits_{\mathrm{R}^r} b(0,\ x,z)\psi(-\tau,z)dz\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} =$$

$$= 2\mathbf{E}\|\psi(0)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} + 2\mathrm{E}\int\limits_{\mathrm{R}^r}(\int\limits_{\mathrm{R}^r} b(0,\ x,\ z)\psi(-\tau,\ z)dz)^2dx \le$$

$$\le 2\mathbf{E}\|\psi(0)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}+$$

$$+2\left(\int\limits_{\mathrm{R}^r}\int\limits_{\mathrm{R}^r} b^2(0,\ x,\ z)\,dzdx\right)\mathrm{E}\int\limits_{\mathrm{R}^r}\psi^2(-\tau,z)\,dz =$$

$$= 2\mathbf{E}\|\psi(0)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} + \mathrm{E}\int_{\mathrm{R}^r}\psi^2(-\tau,z)\,dz = 2\mathrm{E}\|\psi(0)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}+$$

$$+2(\int\limits_{\mathbf{R}^r}\int\limits_{\mathbf{R}^r} b^2(0,\ x,\ z)dzdx)\mathbf{E}\|\psi(-\tau)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} = C < \infty.$$

Застосуємо нерівність Коші-Шварца [4] та припущення (14), (20) при оцінюванні супремума математичного сподівання $I_1(s)$, а саме:

$$\|I_1(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\|I_1(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv$$

$$= \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\int\limits_{\mathbf{R}^r}(\int\limits_{\mathbf{R}^r} b(s,\ x,y)u(s-\tau,\ y)dy)^2dx \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t} (\int\limits_{\mathbf{R}^r}\int\limits_{\mathbf{R}^r} b^2(s,\ x,\ y)dydx)\mathbf{E}\int\limits_{\mathbf{R}^r} u^2(s-\tau,\ y)dy \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t} (\int\limits_{\mathbf{R}^r}\int\limits_{\mathbf{R}^r} b^2(s,\ x,\ y)dydx)\mathbf{E}\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} \cdot \sup_{0\le s\le t} \int\limits_{\mathrm{R}^r}\int\limits_{\mathrm{R}^r} b^2(s,\ x,\ y)dydx.$$

Далі спрацьовує очевидна нерівність на першому кроці відрізка $[0,\tau]$ для розв'язку $u(t)$ рівняння (1) для $t\in[0,T]$:

$$\mathbf{E}\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le \tau} \|Eu(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} + \sup_{\tau\le s\le t} \|Eu(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} =$$

$$= \sup_{-\tau\le s-\tau\le 0} \mathbf{E}\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} + \sup_{0\le s-\tau\le t-\tau} \|Eu(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}. \quad (22)$$

З урахуванням (22) попередня нерівність дасть оцінку

$$\|I_1(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le$$

$$\le \left(\sup_{0\le s\le t} \int\limits_{\mathbf{R}^r}\int\limits_{\mathbf{R}^r} b^2(s,\ x,\ y)dydx\right) \times$$

$$\times\left(\sup_{-\tau\le s-\tau\le 0}\mathbf{E}\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}+\sup_{0\le s-\tau\le t-\tau}\mathbf{E}\|u(s-\tau)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}\right)=$$

$$=\left(\sup_{0\le s\le t}\int\limits_{\mathbf{R}^r}\int\limits_{\mathbf{R}^r}b^2(s,\ x,\ y)dydx\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{-\tau\le s\le 0}\mathbf{E}\|\psi(s)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}+\sup_{0\le s\le t-\tau}\mathbf{E}\|u(s)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}\right)\le$$

$$\le\left(\sup_{0\le s\le t}\int\limits_{\mathbf{R}^r}\int\limits_{\mathbf{R}^r}b^2(s,\ x,\ y)dydx\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{-\tau\le s\le 0}\mathrm{E}\|\psi(s)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}+\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|u(s)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}\right)=C_1<\infty.$$

Аналогічно слід оцінити супремум математичного сподівання квадрату інтеграла $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$ з відповідними нормами

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}\equiv\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|I_2(s)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\equiv$$

$$=\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\|\int\limits_0^s\left(\sum_{j=1}^r\varphi_j(\omega)\int\limits_{\mathrm{R}^r}K(s-\tau,x-y)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_{\mathrm{R}^r}b(l,y,\ z)u(l-\tau,z)dz\right)dl\right)d\tau\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}\le$$

$$\le\ \mathrm{t}\left(\sum_{j=1}^r\mathbf{E}\left\{\varphi_j\left(\gamma_j\right)\right\}\right)^2\cdot\varepsilon\left(s\right),\tag{23}$$

де

$$\varepsilon(s)\equiv\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\int\limits_{\mathbf{R}^r}\left(\int\limits_0^s\left(\triangle_x\int\limits_{\mathbf{R}^r}K(s-\tau,\ x-y)\times\right.\right.$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz \right) dy \Bigg)^2 dl \Bigg) dx. \qquad (24)$$

Змінюючи порядок інтегрування у $\varepsilon(s)$ (див. (24)), матимемо оцінку для $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$:

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le \mathrm{t} \left(\sum_{j=1}^{r} \mathbf{E} \{\varphi_j(\gamma_j)\} \right)^2 \cdot \varepsilon(s) =$$

$$= t \left(\sum_{j=1}^{r} \mathbf{E} \{\varphi_j(\gamma_j)\} \right)^2 \times$$

$$\times \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \int\limits_0^s \Bigg(\int\limits_{\mathbf{R}^r} \Bigg(\triangle_x \int\limits_{\mathbf{R}^r} K(s-\tau,\ x-y) \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz \right) dy \Bigg)^2 dx \Bigg) dl \le$$

$$\le Ct\, \mathbf{E} \left\{ \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbf{R}^r} \left\| D_x^2 \int\limits_{\mathbf{R}^r} b(l,x,z)u(l-\tau,z)dz \right\|^2 dxdl \right\}. \qquad (25)$$

У попередній оцінці

$$\nabla_x \equiv (\partial_{x_1} ... \partial_{x_r})^T ; D_x^2 = \begin{pmatrix} \partial^2_{x_1} & ... & \partial^2_{x_1 x_r} \\ ... & ... & ... \\ \partial^2_{x_r x_1} & ... & \partial^2_{x_r} \end{pmatrix}; \qquad (26)$$

$\|\cdot\|$ – відповідна матрична норма.

Далі слід використати лему 1 [9, лема 4]. Якщо умови цієї леми для

$$u(l,x) = \int\limits_{\mathbf{R}^r} K(s-l,\ x-y) \left(\int\limits_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz \right) dy,$$

$$g\left(l,x\right) \equiv \int\limits_{\mathbf{R}^r} b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz \tag{27}$$

виконуються, то оператор $S\left(\cdot\right)$ є стискаючим (див. (7)).

Перевіримо умови леми 1, тобто доведемо, що:

1. З імовірністю одиниця для кожного $l \in [0,t]$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^r} b(l,\cdot,z)u(l-\tau,z)dz \in L_1\left(\mathbf{R}^r\right); \tag{28}$$

2.

$$|\nabla_x g| \in L_2(\mathbf{R}^r), \|D_x^2 g\| \in L_2(\mathbf{R}^r). \tag{29}$$

Перевіримо умову 1). Доведення (28) випливає з використання умов Коші-Шварца та умов 2а), 2б) основного твердження та (20) зі сталою K_5.

$$\mathbf{E}\left\{\sum_{j=1}^{r}\varphi_j^2\left(\gamma_j\right)\right\}\mathbf{E}\left\{\int\limits_{\mathbf{R}^r}\left|\int\limits_{\mathbf{R}^r} b(l,\ x,\ z)u(l-\tau,\ z)dz\right|dx\right\} \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\left\{\sum_{j=1}^{r}\varphi_j^2\left(\gamma_j\right)\right\}\left(\sup_{0\leq l\leq t}\int\limits_{\mathbf{R}^r}\sqrt{\int\limits_{\mathbf{R}^r} b^2(l,x,z)dzdx}\right)\times$$

$$\times\left(\sqrt{\sup_{-\tau\leq l\leq 0}\mathbf{E}\left\|\psi(l)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}+\sup_{0\leq l\leq t}\mathbf{E}\left\|u(l)\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Звідки з імовірністю одиниця умова 1 виконується

$$\int\limits_{\mathbf{R}^r}\left|\int\limits_{\mathbf{R}^r} b(l,\ x,\ z)u(l-\tau,\ z)dz\right|dx = C_1 < \infty.$$

Перевіримо умову 2) леми 1. Умову (29) доведемо для $|\nabla_x g|$. Для $\|D_x^2 g\|$ міркуватимемо аналогічно. Спочатку доведемо диференційовність $g\,(l, x)$ (дивись (27)) у точці $x = x_0 \in \mathbf{R}^r$.

Нехай $B_\delta\,(x_0)$ є околом точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$. Використовуючи умови (17) та умову (19), матимемо

$$|\nabla_x b\,(t,\ x,\ z)\,u\,(t-\tau,\ z)| \leq \psi\,(t,x,z)\,|u\,(t-\tau,\ z)| =$$

$$= (\psi(t,\ x,z) - \psi(t,\ x_0,\ z) + \psi(t,\ x_0,\ z))|u(t-\tau,\ z)| \leq$$

$$\leq (\delta\varphi(t,\ z,\ x_0,\ \delta) + \psi(t,\ x_0,\ z))|u(t-\tau,\ z)|.$$

Перевіримо включення

$$(\delta\varphi(t,\ \cdot,\ x_0,\ \delta) + \psi(t,\ x_0,\ \cdot))|u(t-\tau,\ \cdot)| \in L_1(\mathbf{R}^r). \tag{30}$$

Використовуючи нерівність Коші-Шварца та умови (17), (18), (20) очевидно матимемо

$$\mathbf{E}\int\limits_{\mathbf{R}^r}(\delta\varphi(t_1,\ z,\ x_0,\ \delta) + \psi(t_1,\ x_0,\ z))|u(t_1-\tau,\ z)|dz =$$

$$= \delta\mathbf{E}\int\limits_{\mathbf{R}^r}\varphi(t_1,\ z,\ x_0,\ \delta)|u(t_1-\tau,\ z)|dz +$$

$$+\mathbf{E}\int\limits_{\mathbf{R}^r}\psi(t_1,\ x_0,\ z)|u(t_1-\tau,\ z)|dz \leq$$

$$\leq \left(\delta\sqrt{\int\limits_{\mathbf{R}^r}\varphi^2(t_1,z,x_0,\delta)dz} + \sqrt{\int\limits_{\mathbf{R}^r}\psi^2(t_1,x_0,z)dz}\right)\times$$

$$\times\left(\sup_{-\tau\leq t_1\leq 0}\ \mathrm{E}\|\psi(t_1)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)} + \sup_{0\leq t_1\leq t}\ \mathbf{E}\|u(t_1)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Звідки з імовірністю одиниця одержимо

$$\int\limits_{\mathbf{R}^r} (\delta\varphi(t_1,\ z,\ x_0,\ \delta) + \psi(t_1,\ x_0,\ \zeta))|u(t_1 - \tau,\ z)|dz < \infty.$$

Звідси, згідно з локальною теоремою про диференційовність інтеграла за параметром, для функції (27) існує градієнт $\nabla_x g$ [4] та

$$\nabla_x \int\limits_{\mathbf{R}^r} b(t,\ x,\ z)u(t-\tau,\ z)dz = \int\limits_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b(t,\ x,\ z)u(t-\tau,\ z)dz. \quad (31)$$

Залишилось довести, що

$$\nabla_x \int\limits_{\mathbf{R}^r} b(t,\ \cdot,\ z)u(t - \tau,\ z)dz \in L_2(\mathbf{R}^r). \quad (32)$$

З урахуванням (31), (17), нерівності Коші-Шварца, умов (18) та (14), виконуються співвідношення

$$\mathbf{E} \int\limits_{\mathbf{R}^r} \left| \nabla_x \int\limits_{\mathbf{R}^r} b(t,\ x,\ z)u(t - \tau,\ z)dz \right|^2 dx =$$

$$= \mathbf{E} \int\limits_{\mathbf{R}^r} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b\,(t,\ x,\ z)\, u\,(t - \tau,\ z)\, dz \right)^2 dx \le$$

$$\le \mathbf{E} \int\limits_{\mathbf{R}^r} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^r} |\nabla_x b(t,\ x,\ z)u(t - \tau,\ z)|dz) \right)^2 dx \le$$

$$\le \sup_{0 \le t_1 \le t} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^r} \int\limits_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1,\ x,\ z)dzdx \right) \times$$

$$\times\left(\sup_{-\tau\le t_1\le 0} E\|\psi(t_1)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}+\sup_{0\le t_1\le t} E\|u(t_1)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}\right)<\infty.$$

Звідки отримуємо

$$\int\limits_{\mathbf{R}^r}\left|\nabla_x\int\limits_{\mathbf{R}^r} b(t_1,\ x,\ z)u(t_1-\tau,\ z)dz\right|^2 dx<\infty.$$

Остаточно з (25) матимемо оцінку

$$\|I_2(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}\le Ct\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbf{R}^r}\|D_x^2\int\limits_{\mathbf{R}^r} b(t_1,\ x,\ z)u(t_1-\tau,\ z)dz\|^2dxdt_1\le$$

$$\le Ct^2\sup_{0\le t_1\le t}\left(\int\limits_{\mathbf{R}^r}\int\limits_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1,\ x,\ z)dzdx\right)\left(\sup_{-\tau\le t_1\le 0}\mathbf{E}\|\psi(t_1)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}+\right.$$

$$\left.+\sup_{0\le t_1\le t}\mathbf{E}\|u(t_1)\|^2_{L_2(\mathrm{R}^r)}\right)\le C_2<\infty. \tag{33}$$

Отримаємо оцінку для $I_3(s)$. Надалі під $\|\cdot\|$ будемо розуміти $\|\cdot\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}$. З урахуванням нерівності Коші-Шварца, теореми Фубіні [4] та умов (7), (14) отримуємо для норми $I_3\,(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ оцінку

$$\|I_3(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}=\sup_{0\le s\le t} E\|I_3(s)\|^2\equiv$$

$$=\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left(\int\limits_{\mathbf{R}^r} K(t-s,\ x-y)\varphi_{r+1}(\gamma_{r+1})\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sigma(s,\ u(s-\tau),y)e_n(y)dy\right)d\beta_n(s)\right\|^2\le 2L^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)\ \times$$

$$\times\left(t+\tau\sup_{-\tau\le y\le 0}\mathbf{E}\left\|\psi\left(y\right)\right\|^{2}+\mathbf{E}\int\limits_{0}^{t}\left\|u\left(y\right)\right\|^{2}dy\right)=C_{3}<\infty. \tag{34}$$

Об'єднавши чотири вищевикладені оцінки $I_0(s)-I_3(s)$, одержимо для $u\in\mathfrak{B}_{2,t}$ нерівність

$$\left\|\left(\Psi u\right)(t)\right\|^{2}_{\mathfrak{B}_{2,t}}\equiv\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\sum_{j=0}^{3}I_{j}(t)\right\|^{2}_{L_{2}(\mathbf{R}^{r})}\le 4\sum_{j=0}^{3}\left\|I_{j}(t)\right\|^{2}_{\mathfrak{B}_{2,T}}. \tag{35}$$

Оскільки F_t-вимірність $(\Psi u)(t)$ очевидна, робимо висновок, що Ψ задано.

Доведемо, що оператор Ψ має єдину стискаючу фіксовану точку.

Дійсно, слід взяти до уваги чотири вищенаведені нерівності та властивість лінійності r-вимірного інтеграла, в результаті отримаємо для різниці $I_1(s)(u)-I_1(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ оцінку

$$\left\|I_{1}\left(s\right)\left(u\right)-\mathrm{I}_{1}\left(s\right)\left(v\right)\right\|^{2}_{\mathfrak{B}_{2,t}}=\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\mathbf{I}_{1}\left(s\right)\left(u\right)-\mathbf{I}_{1}\left(s\right)\left(v\right)\right\|^{2}_{L_{2}(\mathbf{R}^{r})}\le$$

$$\le\left(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^{r}}\int_{\mathbf{R}^{r}}b^{2}\left(s,x,y\right)dydx\right)\left\|u-v\right\|^{2}_{\mathfrak{B}_{2,t}}. \tag{36}$$

Аналогічно, одержимо оцінку для різниці $I_2(s)(u)-I_2(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$, а саме:

$$\left\|I_{2}\left(s\right)\left(u\right)-\mathrm{I}_{2}\left(s\right)\left(v\right)\right\|^{2}_{\mathfrak{B}_{2,t}}\le$$

$$\le Ct^{2}\sup_{0\le\tau\le t}\left(\int_{\mathbf{R}^{r}}\int_{\mathbf{R}^{r}}Z^{2}\left(\tau,x,y\right)dydx\right)\times$$

$$\times\sup_{0\le\tau\le t}\mathbf{E}\left\|u\left(\tau\right)-v\left(\tau\right)\right\|^{2}_{L_{2}(\mathbf{R}^{r})}. \tag{37}$$

Попередні міркування слід провести для оцінки різниці $I_3(s)(u) - I_3(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$, тоді одержимо

$$\|I_3(s)(u) - \mathrm{I}_3(s)(v)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le L^2 C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\right) t \,\|u - v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}. \quad (38)$$

Врахувавши оцінки (35)-(38), одержимо

$$\|\Psi u - \Psi v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\|\sum_{j=0}^{3}(I_j(s)(u) - I_j(s)(v))\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le 4\Bigg(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,\ x,\ y)\,dydx +$$

$$+Ct^2\sup_{0\le\tau\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,\ x,\ y)\,dydx +$$

$$+L^2ct^2 + L^2c\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)t\Bigg)\|u - v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} = \gamma(t)\|u - v\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}, \quad (39)$$

$$\gamma(t) \equiv 4\Bigg(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,\ x,\ y)\,dydx +$$

$$+Ct^2\sup_{0\le\tau\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,\ x,\ y)\,dydx + L^2ct^2 + L^2c\left(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\right)t\Bigg), \quad (40)$$

для $\{u,\ v\} \subset \mathfrak{B}_{2,t}$.

Висновки. Згідно з (20), $K_5 < \frac{1}{4}$, тобто перший доданок у $\gamma(t)$ (див. (40)) менший за 1. Для наступних трьох доданків можна зауважити наступне: за рахунок вибору $t_1 \in [0, T]$ їх сума може бути зроблена рівною $\frac{3}{16}$. Отже, $\gamma(t_1) \in (0, 1)$. Це означає, що оператор Ψ, визначений у просторі Банаха $\mathfrak{B}_{2,t_1}$, є стискаючим. А значить, згідно з теоремою Банаха [4] про стискаюче відображення, оператор Ψ має єдину фіксовану точку – м'який розв'язок $u \in \mathfrak{B}_{2,t_1}$ задачі (1), (2) на відрізку $[0, t_1]$. Цю процедуру повторимо скінченну кількість разів на додатних малих інтервалах $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, $\ldots$, $[t_{n-2}, t_{n-1}]$, $[t_{n-1}, T]$, які в сумі дають відрізок $[0, T]$, де розв'язується задача (1), (2). В результаті розв'язок отримується як об'єднання розв'язків на цих малих інтервалах. Отже, основне твердження доведено.

Перелік посилань до §6.1.

1. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием.– М.: Наука, 1992.– 333 с.

2. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.– М.: Наука, 1977.– 352 с.

3. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.– К.: Наук. думка, 1980.– 612 с.

4. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр.– К.: Ин-т математики АН УССР.– 1981.– С.25–59.

5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.– М.: Наука, 1976.–541 с.

6. Перун Г.М., Ясинский В.К. О стабилизации решений задачи Дирихле с разрывными траекториями и оператором Бесселя // Кибернетика и вычисл. математика.– 1991.– № 83.– С.19–25.

7. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн.– 1993.– Т.45, № 9.– С.1773–1781.

8. Свердан М.Л., Ясинская Л.И„ Ясинский В.К. Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных при наличии пуассоновских возмущений // Кибернетика и вычислительная техника.– 1988.– №81.– С.7-12.

9. Станжицкий А.Н., Цуканова А.О. Существование и единственность решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа // Нелінійні коливання.– 2016.– 3, № 3.– С.408–430.

10. Tsukanova A.O. On existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation of reaction-diffusion type in hilbert space // Буковинський математичний журнал.– 2016. – Т.4, № 3–4.– С.179–189.

11. Tessitore G., Zabczyk J. Invariant Measures for Stochastic Heat Equations // Probability and Mathematical Statistics.– 1998.– 18.– P.271–287.

12. Zabczyk J., Da Prato G. Ergodicity for Infinite Dimensional Systems // Dynamic Systems and Applications.– Cambridge University Press.– 1996.– 449 p.

§6.2. Про існування та стабілізацію сильного розв'язку автономних стохастичних рівнянь Іто-Скорохода в частинних похідних із випадковими параметрами

Дослідженню детермінованих рівнянь у частинних похідних присвячено велику кількість робіт, які вказані в монографіях [1–3], і не менша кількість робіт вітчизняних і закордонних вчених була опублікована в кінці XX – на поч. XXI ст.

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціала, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР) у відомих монографіях [4–6] та їх подальше поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь [7–9] (див. наведену велику бібліографію в цих роботах) стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для СДРІСзЧП (див., наприклад, роботи [5,10–12] та ін.)

Подальше дослідження СДРІСзЧП йшло шляхом створення математичних моделей складних реальних систем, які вимагають враховувати випадкові параметри в цих рівняннях (див. [6,7,12,13] та ін).

Дана робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки сильного розв'язку ЛСДРІСзЧП з урахуванням випадкових параметрів [10,12].

6.2.1. Постановка задачі

Розглянемо стохастичний експеримент з базовим імовірнісним простором [1, 4, 5, 7] $(\Omega, F, \mathrm{F}, \mathrm{P})$, $\mathrm{F} \equiv \{F_t, t \geq 0\}$ – фільтрація, де задана функція $u(t,x,\omega) \in \mathrm{R}^1$, яка є вимірною з імовірністю одиниця за t і x відносно мінімальної σ- алгебри $B([0,T], \mathrm{R}^1)$ борельових множин на площині [13, 15] та для якої

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{E}\left\{|u(t,x,\omega)|^2\right\} dx < \infty \tag{41}$$

для всіх $t \in [0,T]$, $\mathrm{E}\{\bullet\}$ – математичне сподівання [14], $T \subset [0,\infty)$. Позначимо через $\mathfrak{M}_T$ простір функцій $\{u(t,x,\omega)\}$, що мають властивість інтегровності (41).

Уведемо норми [6, 15]:

$$\|u(t,x,\omega)\|^2_{L_{2\mathrm{R}^1}} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2 dx; \tag{42}$$

$$\|u(t,x,\omega)\|^2_{L_{2T}} \equiv \int_0^T |u(t,x,\omega)|^2 dt; \tag{43}$$

$$\mathrm{E}_u(t) \equiv \mathrm{E}\left\{\|u(t,x,\omega)\|^2_{L_{2\mathrm{R}^1}}\right\}, \tag{44}$$

де через $L_{2\mathrm{R}^1}$ і L_{2T} позначені простори функцій $\{u(t,x,\omega)\}$, які мають відповідні норми (42)–(44).

У просторі $\mathfrak{M}_T$ треба ввести норму вигляду

$$\|u(t,x,\omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathrm{E}_u(t)dt = \int_0^T \mathrm{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2\,dx\right]^2 dt. \tag{45}$$

Позначимо через

$$Q(A(\xi(\omega)),q,p) \equiv \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{kj}(\xi(\omega))\,q^k p^j. \tag{46}$$

де $A \equiv \{a_{kj}\}$ матриця розмірності $n\times m$, складена з елементів $a_{kj}\in\mathrm{R}^1$.

У просторі $\mathfrak{M}_T$ з (45) розглянемо підпростір $\mathfrak{M}_{1T}\subset\mathfrak{M}_T$, для елементів якого має місце включення

$$Q\left(A,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\in\mathfrak{M}_T. \tag{47}$$

У $(\Omega, F, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ розглянемо задачу Коші для ЛСДРІСзЧП

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A(\xi_1(\omega)),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\right]+\\ +Q\left(B(\xi_2(\omega)),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)=\\ =Q\left(C(\xi_3(\omega)),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\frac{dw(t,\omega)}{dt}+\\ +\int_{\mathbf{V}} Q\left(D(\xi_4(\omega)),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x},v\right)u(t,x,\omega)\,\tilde{\nu}(dt,dv),\end{gathered} \tag{48}$$

$$Q\left(A(\xi_1(\omega)),\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\Big|_{t=0}=[Qu]_0, \tag{49}$$

де Q визначено у (46), (47) матриці $B \equiv \{b_{ij}(\xi_2(\omega))\}_{i,j=1}^{k,n}$, $b_{ij}(\xi_2(\omega)) \in \mathrm{R}^1$; $C \equiv \{c_{ij}(\xi_3(\omega))\}_{i,j=1}^{k,n}$, $c_{ij}(\xi_3(\omega)) \in \mathrm{R}^1$, $D \equiv \{d_{ij}(\xi_4(\omega), v)\}_{i,j=1}^{k,n}, d_{ij}(\xi_4(\omega), v) \in \mathbf{R}^1 \times \mathbf{V}$, де $\xi_i(\omega), i = 1, 2, 3, 4$, випадкові величини, які задані щільністю $p_{\xi_i}(x), i = 1, 2, 3, 4$, (або функцією розподілу $F_{\xi_i}(x) \equiv \mathrm{P}\{\omega : \xi_i(\omega) < x \; \forall \, x \in \mathrm{R}^1\}$, i=1,2,3,4 [14]), $w(t, \omega)$ – одновимірний вінерів процес [11], та $\xi_i(\omega)$, i=1,2,3,4, не залежать від $w(t, \omega)$. $\tilde{\nu}(dt, A) \equiv \nu(dt, A) - \Pi(A)\, dt$ – центрована пуассонова міра.

Під сильним розв'язком задачі Коші (48), (49) будемо розуміти неперервну з імовірністю одиниця за $t \in [0, T]$ функцію $u(t, x, \omega)$, узгоджену з фільтрацією $\{F_t, t \in [0, T]\}$, і таку, що з імовірністю одиниця для кожної пари (t, x) задовольняє інтегральне стохастичне рівняння [1, 4, 11]

$$Q\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) = [Qu]_0 +$$

$$+ \int_0^t Q\left(B(\xi_2(\omega)), \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s, x, \omega) ds +$$

$$+ \int_0^t Q\left(C(\xi_3(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s, x, \omega) dw(s, \omega)\, ds +$$

$$+ \int_0^t \int_V Q\left(D(\xi_4(\omega)), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}, v\right) u(s, x, \omega)\, \tilde{\nu}(ds, dv) \qquad (50)$$

з початковими невипадковими умовами (49).

6.2.2. Існування розв'язку задачі Коші для ЛСДРІ-СзЧП у просторі $\mathfrak{M}_{1T}$

Для встановлення факту існування сильного розв'язку задачі Коші для (48)–(49) доведемо спочатку допоміжний результат.

Лема 6.2.1. *Перетворення Фур'є за x для функції $u(t,x,\omega)$*

$$v(t,\sigma,\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t,x,\omega)\, dx \tag{51}$$

не виводить її з простору $\mathfrak{M}_T$ для довільного скінченного $T \subset \mathrm{R}^1$.

Доведення. Існування перетворення Фур'є випливає з того, що $u(t,x,\omega)$ з імовірністю одиниця належить $L_{2\mathrm{R}^1}$ для довільного $t \in [0,T]$ та $\mathrm{P}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2\, dx > N\right\} \leq \frac{\mathrm{E}_u(t)}{N} \to 0$ при $N \to +\infty$. Згідно з теоремою Планшереля [16] маємо, що $\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t,\sigma,\omega)|^2\, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t,x,\omega)|^2\, dx$, тобто $\|v\|_{L_{2\mathrm{R}^1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{L_{2\mathrm{R}^1}}$; тому $\mathrm{E}_v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{E}_u(t)$. Тоді, згідно з означенням норми в просторі $\mathfrak{M}_T$, будемо мати $\|v\|_{\mathfrak{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{\mathfrak{M}_T}$, що й доводить лему 6.2.1.

Теорема 6.2.1. *Нехай для задачі Коші (48), (49) виконуються умови:*

1. *Корені полінома $P(\lambda(x), i\sigma) \equiv \lambda Q(A(x), \lambda, i\sigma) + Q(B(x), \lambda, i\sigma)$ при кожному фіксованому $x \in \mathrm{R}^1$ та $\sigma \neq 0$ задовольняють нерівність $Re\lambda(x) \leq \psi(\sigma) < 0$, $\psi(0) = 0$;*

2. *$\forall\, t \in [0,T]$ та $C(x) \equiv 0_{k\times n}$, $D(x) \equiv 0_{k\times n}$ детерміноване рівняння*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}(t,x)\right] + $$
$$+Q\left(B(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}(t,x) = 0 \tag{52}$$

має розв'язок $\tilde{u}(t,x)$ задачі Коші в $L_{2\mathrm{R}^1}$ з початковими умовами

$$Q\left(A(x), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}(t,x) = [Q\tilde{u}]_0\,; \tag{53}$$

3. *Випадкові величини* $\xi_i(\omega)$, $i = 1,2,3,4$, *не залежать від* $w(t,\omega)$ *та* $\tilde{\nu}(dt, A)$.

Тоді стохастична задача Коші (48), (49) *при* $C(x) \neq 0_{k\times n}$ *має розв'язок у просторі* $\mathfrak{M}_{1T}$.

Доведення. Оскільки перетворення Фур'є [1] зберігає норму в $\mathfrak{M}_{1T}$ за лемою 6.2.1, то достатньо довести існування сильного розв'язку задачі Коші лінійного ЛСДРІСзЧП для $v(t,\sigma,\omega)$, заданого формулою (51), а саме

$$\frac{d}{dt}\left[Q\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)\right]+$$

$$+Q\left(B(\xi_2(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega) =$$

$$= Q\left(C(\xi_3(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega)\frac{dw(t,\omega)}{dt}+$$

$$+\int_{\mathbf{V}} Q\left(D(\xi_4(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma, v\right)v(t,\sigma,\omega)\tilde{\nu}(ds,dv). \tag{54}$$

Зауважимо, що для довільної дійснозначної матриці $D(x) \equiv \{d_{ij}(x)\}_{i,j=1}^{k,n}$ та для довільного $x \in \mathrm{R}^1$ маємо включення $Q\left(D(x), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega) \in \mathfrak{M}_{1T}$ і розв'язок $v(t,\sigma,\omega)$ ЛСДРІСзЧП (54) при кожному $\sigma \neq 0$ існує та єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності [3, 5, 8]. ЛСДРІСзЧП (54) слід тлумачити як інтегральне стохастичне рівняння

$$Q\left(A(\xi_1(\omega)), \frac{d}{dt}, i\sigma\right)v(t,\sigma,\omega) =$$

$$= [Qv]_0 + \int_0^t Q(B(\xi_2(\omega)), ds, i\sigma)v(s,\sigma,\omega) =$$

$$= \int_0^t Q(C(\xi_3(\omega)), ds, i\sigma)v(s,\sigma,\omega)dw(s,\omega)+$$

$$+\int_0^t \int_{\mathbf{V}} Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}, v\right) v\left(s, \sigma, \omega\right) \tilde{\nu}\left(ds, dv\right),$$

для якого виконуються умови, що гарантують існування та єдиність сильного розв'язку з точністю до стохастичної еквівалентності [7, с. 266–270, теорема 4.1].

Позначимо через $H\left(t, \sigma\right)$ фундаментальний розв'язок детермінованої однорідної незбуреної задачі Коші (52), (53) для ЛСДРІСзЧП (48), (49) при $C\left(x\right) \neq 0_{k\times n}$, тоді сильний розв'язок ЛСДРІСзЧП (54), (53) можна записати у вигляді інтегрального рівняння [9, 19]

$$v\left(t, \sigma, \omega\right) = v_0\left(t, \sigma\right) +$$

$$+\int_0^t H\left(t-s\right) Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), ds, i\sigma\right) v\left(t, \sigma, \omega\right) dw\left(s, \omega\right) +$$

$$+\int_0^t \int_{\mathbf{V}} y\left(t-s\right) Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right), i\sigma\right)\right) \tilde{\nu}\left(ds, dv\right), \tag{55}$$

де $v_0\left(t, \sigma\right)$ розв'язок однорідної незбуреної задачі Коші

$$\frac{d}{dt}\left[Q\left(A\left(\xi_1\left(\omega\right)\right), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v\left(t, \sigma, \omega\right) + \right.$$

$$\left. +Q\left(B\left(\xi_2\left(\omega\right)\right), \frac{d}{dt}, i\sigma\right) v\left(t, \sigma, \omega\right)\right] = 0.$$

Згідно з [1], фундаментальний розв'язок $H\left(t, \sigma\right)$ має вигляд

$$H\left(t, \sigma\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{P\left(\lambda\left(x\right), i\sigma\right)}, \tag{56}$$

де Γ — контур, що охоплює всі нулі многочлена $P\left(\lambda\left(x\right), i\sigma\right)$.

Застосувавши випадковий оператор $Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right)$ до обох частин (55), отримаємо

$$Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right) v\left(t, \sigma, \omega\right) = Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right) v_0\left(t, \sigma\right) +$$

$$
+\int_0^t Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right) H\left(t-s,\sigma\right)\times
$$

$$
\times Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma\right) v\left(s,\sigma,\omega\right) dw\left(s,\omega\right)+
$$

$$
+\int_0^t Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial s}, is, v\right) v\left(s,\sigma,\omega\right) \tilde{\nu}\left(ds,dv\right). \tag{57}
$$

Розглянувши квадрат модуля величини лівої та правої частини рівняння (57) та використавши нерівність $|a+b+c|^2 \leq 3\left(|a|^2+|b|^2+|c|^2\right)$ в результаті одержимо

$$
\left|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right) v\left(t,\sigma,\omega\right)\right|^2 \leq
$$

$$
\leq 3\left|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right) v_0\left(t,\sigma\right)\right|^2+
$$

$$
+3\left|\int_0^t Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right) H\left(t-s,\sigma\right)\times\right.
$$

$$
\left.\times Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma\right) v\left(s,\sigma,\omega\right) dw\left(s,\omega\right)\right|^2+
$$

$$
+3\left|\int_0^t\int_{\mathbf{V}} Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma, v\right) H\left(t-s,\sigma\right)\times\right.
$$

$$
\left.\times Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma, v\right) v\left(s,\sigma,\omega\right) \tilde{\nu}\left(ds,dv\right)\right|. \tag{58}
$$

Позначимо через

$$
z_1\left(t,\sigma\right) \equiv \mathrm{E}\left\{\left|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right) v\left(t,\sigma,\omega\right)\right|^2\right\},
$$

$$
z_2\left(t,\sigma,v\right) \equiv \mathrm{E}\left\{\left|Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma, v\right) v\left(t,\sigma,\omega\right)\right|^2\right\}
$$

де $\mathrm{E}\{\bullet\}$ – операція математичного сподівання [14]. Далі, застосувавши операцію $\mathrm{E}\{\bullet\}$ до лівої та правої частини нерівності (58), враховуючи властивість інтеграла Іто стосовно обчислення $\mathrm{E}\{\bullet\}$ від квадрату інтеграла Іто [7, с.245–249] та враховуючи умову III) теореми 6.2.1, одержимо таку нерівність:

$$z(t,\sigma) \leq 3\mathrm{E}\left|Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right), dt, i\sigma\right) v_0(t,\sigma)\right|^2 +$$
$$+3\int_0^t \mathrm{E}\left|Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma\right) H(t-s,\sigma)\right|^2 z_1(s,\sigma)\, ds +$$
$$+3\int_0^t \int_{\mathbf{V}} \mathbf{E}\left\{\left|Q\left(D\left(\xi_4(\omega), \frac{\partial}{\partial s}, i\sigma, v\right)\right) H(t-s,\sigma)\right|^2\right\} \times$$
$$\times z_2(s,\sigma,v)\, ds. \tag{59}$$

Умова I) теореми 6.2.1 дає можливість одержати нерівність [1] $\mathrm{E}\left|Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right), dt, i\sigma\right) H(t-s,\sigma)\right|^2 \leq L$, а умова II) визначає рівномірну обмеженість

$$\mathrm{E}\left|Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right), dt, i\sigma\right) v_0(t,\sigma)\right|^2 \leq\leq \frac{K}{2},$$

$$\mathrm{E}\left|Q\left(D\left(\xi_4(\omega)\right), dt, i\sigma, v\right) v_0(t,\sigma)\right|^2 \leq \frac{K}{2}.$$

Отримані вище нерівності дають оцінку

$$z_i(t,\sigma) \leq \frac{K}{2} + L\int_0^T z_i(s,\sigma)\, ds, \quad i = 1,2,$$

звідки, згідно з нерівністю Гронуолла [1], будемо мати експоненціальну оцінку

$$z_i(t,\sigma) \leq Ke^{Lt} \quad \forall\, t \in [0,T] \subset [0,\infty), i = 1,2. \tag{60}$$

Таким чином, гарантується включення

$$Q\left(C\left(\xi_3(\omega)\right), dt, i\sigma\right) v(t,\sigma,\omega) \in \mathfrak{M}_T,$$

$$Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right),dt,i\sigma,v\right)v\left(t,\sigma,\omega\right)\in\mathfrak{M}_T \tag{61}$$

Застосувавши випадковий оператор $Q\left(D\left(\xi\left(\omega\right)\right),dt,i\sigma\right)$ до (56), аналогічно вищевикладеним міркуванням, можна записати відповідну нерівність для довільної дійсної матриці $D\left(x\right)\equiv\left\{d_{ij}\left(x\right)\right\}_{i,j=1}^{k,n}$. Отже, враховуючи оцінку (60) та умову I), отримаємо твердження теореми 6.2.1.

6.2.3. Асимптотична поведінка в середньому квадратичному сильного розв'язку ЛСДРІСзЧП

Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Лема 6.2.2. *Нехай для ЛСДРзЧП* (48), (49) *виконуються умови теореми 6.2.1. Тоді:*

1. *Для довільної матриці* $C\left(x\right)\neq 0_{k\times n}$ *має місце включення*

$$\mathrm{E}\left|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right),dt,i\sigma\right)\right|^2 H\left(t,\sigma\right)\in L_{2,(0,+\infty)}, \tag{62}$$

2. *Для відповідної норми цього простору справджується рівність*

$$\mathrm{E}\left\|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right),dt,i\sigma\right)H\left(t,\sigma\right)\right\|_{L_{2T}}^2=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{E}\left|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right),i\lambda,i\sigma\right)\right|^2}{\left|P\left(i\lambda,i\sigma\right)\right|^2}d\lambda\equiv S\left(\sigma\right), \tag{63}$$

3. *Для довільної матриці* $D\left(x\right)\neq 0_{k\times n}$*має місце включення*

$$\int_{\mathbf{V}}\mathrm{E}\left|Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right),dt,i\sigma,v\right)\right|^2 H\left(t,\sigma\right)\Pi\left(d\sigma\right)\in L_{2,(0,+\infty)}, \tag{64}$$

4. *Для відповідної норми цього простору справджується рівність*

$$\int_{\mathbf{V}} \mathrm{E}\left\{Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma, v\right) H\left(t, \sigma\right)\right\} \Pi\left(dv\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{V}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{E}\left|Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), i\lambda, i\sigma, v\right)\right|^2}{\left|P\left(i\lambda, i\sigma\right)\right|^2} d\lambda \Pi\left(dv\right) \equiv$$

$$\equiv S_1\left(\sigma\right). \tag{65}$$

Доведення. 1) Використовуючи умову I) та формулу (56), можна отримати рівність

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right) H\left(t, \sigma\right) e^{-i\lambda t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), i\lambda, i\sigma\right)}{P\left(i\lambda, i\sigma\right)},$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{\mathbf{V}} \left[Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma, v\right) H\left(t, \sigma\right) e^{-i\lambda t}\right] \Pi\left(dv\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{V}} \frac{Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), i\lambda, i\sigma, v\right)}{P\left(i\lambda, i\sigma\right)} \Pi\left(dv\right)$$

та, взявши $\mathrm{E}\left\{|\bullet|^2\right\}$ від лівої та правої частини вищезгаданих рівностей, отримаємо твердження (62), (64).

Для доведення (63), (65) застосуємо теорему Планшереля [1]:

$$\left\|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma\right) H\left(t, \sigma\right)\right\|^2_{L_{2(0,\infty)}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|Q\left(C\left(\xi_3\left(\omega\right)\right), i\lambda, i\sigma\right)\right|^2}{\left|P\left(i\lambda, i\sigma\right)\right|^2} d\lambda,$$

$$\int_{\mathbf{V}} Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), dt, i\sigma, v\right) H\left(t, \sigma\right) \Pi\left(dv\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{V}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left|Q\left(D\left(\xi_4\left(\omega\right)\right), i\lambda, i\sigma, v\right)\right|^2}{\left|P\left(i\lambda, i\sigma\right)\right|^2} d\lambda \Pi\left(dv\right),$$

взявши $\mathrm{E}\left\{\left|\bullet\right|^2\right\}$ від лівої та правої частини вищезгаданих рівностей, отримаємо $S\left(\sigma\right), S_1\left(\sigma\right)$ у (63), (65).

Теорема 6.2.2. *Нехай виконуються умови теореми 6.2.1. Тоді:*

1. *Якщо* $\sup\limits_{\sigma} S\left(\sigma\right) < 1$, *тоді* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{E}_U\left(t\right) = 0$, *де*

$$U\left(t, x, \omega\right) \equiv Q\left(R\left(\xi\left(\omega\right)\right), \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u\left(t, x, \omega\right)$$

   для довільної дійснозначної матриці R;

2. *Якщо* $S\left(\sigma\right) > 1$ *на множині* Λ *міри Лебега, тоді* $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{E}_U\left(t\right) = +\infty$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що з нерівності (58), внаслідок прямування до нуля додатного ядра при $t \to +\infty$, випливає, що $z\left(t, \sigma\right)$ прямує до нуля при $S\left(\sigma\right) < 1, \sigma \neq 0$.

Якщо в (64) виконується нерівність $S\left(\sigma\right) < 1$, тоді легко бачити прямування до нуля при $t \to +\infty$, модуля перетворення Фур'є $U\left(t, x, \omega\right)$ при довільній дійснозначній матриці $R\left(x\right), \forall x \in \mathbf{R}^1$ [19]. При цьому прямування є рівномірним відносно σ, якщо $\sup\limits_{\sigma} S\left(\sigma\right) < 1$. Залишилося перейти до границі під знаком інтеграла Лебега і перша частина теореми 6.2.2 доведена.

Для доведення другої частини теореми 6.2.2 достатньо довести, що $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z\left(t, \sigma\right) d\sigma = \infty$, оскільки має місце (64).

Дійсно, нехай $S\left(\sigma\right) > 1$ на множині Λ додатної міри Лебега, тоді $\lim\limits_{t\to+\infty} z\left(t, \sigma\right) = +\infty$, оскільки $z\left(t, \sigma\right) > 0$. Теорема 6.2.2 доведена.

6.2.4. Задача втрати стійкості стрижня

У праці [12] досліджується поведінка стрижня, на який діє "білий шум". Математичною моделлю цього процесу будемо вважати стохастичне диференціальне рівняння в частинних похідних з похідною від вінерового процесу, яку тлумачимо як формальний запис, оскільки вона не існує в жодній точці з імовірністю одиниця, а в узагальненому розумінні похідна вінерового процесу – це нормальний "білий шум" (див. [20]), а саме

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a\left(\xi_1\left(\omega\right)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\left(\xi_2\left(\omega\right)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\left(\xi_3\left(\omega\right)\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dw(t,\omega)}{dt}, \tag{66}$$

з початковими умовами

$$u\left(0,x\right) = f_1\left(x\right), \frac{\partial u\left(0,x\right)}{\partial t} = f_2\left(x\right) \tag{67}$$

та крайовими умовами

$$u\left(t,0\right) = u\left(t,l\right) = \frac{\partial u\left(t,0\right)}{\partial x} = \frac{\partial u\left(t,l\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u\left(t,0\right)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u\left(t,l\right)}{\partial x^2} = 0. \tag{68}$$

Тут $a\left(\xi_1\left(\omega\right)\right) > 0, b\left(\xi_2\left(\omega\right)\right) > 0, c\left(\xi_3\left(\omega\right)\right) > 0$ з імовірністю 1. Під функцією $u\left(t,x,\omega\right)$ розуміємо випадкову функцію, що не має розривів 2-го роду,тобто інтегровна в розумінні пункту 1. Аналогічно до дискретного випадку [3] визначають статистичний запас стійкості S_a^2 за параметром $a\left(x\right), \forall x \in \mathrm{R}^1$, як найбільш допустиму інтенсивність процесів з взаємно незалежними значеннями, при якій система стійка в l.i.m., тобто розв'язок стабілізується до нуля.

Тоді можна обчислити статистичний запас стійкості [17] $S_{k_1 k_2}$ системи (66)–(68)

$$S_{k_1 k_2} \equiv \sum_{k=0}^{m} a_{k_1 k_2}\left(\xi\left(\omega\right)\right)\frac{\partial^k u\left(t,x\right)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}} \tag{69}$$

за параметрами $a_{k_1 k_2}\left(\xi_1\left(\omega\right)\right)$, $k = k_1 + k_2$.

Якщо позначити $P(\lambda,\sigma,\omega) \equiv \sum_{k=0}^{m} a_{k_1k_2}(\xi_1(\omega))\,\lambda^{k_1}(i\sigma)^{k_2}$, тоді статистичний запас стійкості $S_{k_1k_2}(x)$ системи обчислюється за формулою

$$S_{k_1k_2}(x) \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{k_1}|\sigma|^{k_2}}{|P(i\lambda,\sigma,x)|}d\lambda\right]^{-1}. \qquad (70)$$

Використовуючи вищенаведене твердження (69), (70), знайдено [9] статистичний запас стійкості $S(x)$ за параметрами $a(x), b(x), c(x)$ системи (66)–(68):

$$S(x) \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4 + a(x)\sigma^2 - b(x)\lambda^2)^2 + c(x)^2\lambda^2}\right]^{-1} =$$

$$= 2a(x)\,c(x)\,, \forall x \in \mathrm{R}^1.$$

Отже, система (66)–(68) є стійкою в середньому квадратичному, $S(x) > \varepsilon^2, \forall x \in \mathrm{R}^1$.

Нехай на систему (66)–(68) діють зовнішні випадкові "збурення" типу $\xi(\omega)$ на праву частину СДРзЧП (66). Ця ситуація може виникнути, якщо система розташована на платформі, рух якої диктується зовнішними збуреннями $\varphi_i(\xi(\omega)), i = 1, 2$. Тоді (66) буде мати вигляд

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi_1(\xi(\omega))\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dw(t,\omega)}{dt}. \qquad (71)$$

Використовуючи означення статистичного запасу стійкості для системи (71), (67), (68), маємо

$$S(\varphi_i) \equiv \left[\mathrm{E}\left\{|\varphi_i(\xi)|^2\right\}\sup_{\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4 + a\sigma^2 - b\lambda^2)^2 + c^2\lambda^2}\right]^{-1} =$$

$$= \mathrm{E}\left\{|\varphi_i(\xi)|^2\right\} 2ac.$$

Застосовуючи достатні умови асимптотичної стійкості в l.i.m. теореми 2, приходимо до висновку, що система (71), (67), (68) є стійкою в l.i.m., якщо

$$E\left\{\varphi_1^2\left(\xi\left(\omega\right)\right)\right\}2ac < 1, \tag{72}$$

та нестійкою в l.i.m., якщо поміняти знак на протилежний.

Нехай $\varphi_2\left(\xi\left(\omega\right)\right) \equiv 0$, $\varphi_1\left(\xi\left(\omega\right)\right) \equiv \varphi\left(\xi\left(\omega\right)\right)$; $\xi\left(\omega\right)$ має закон розподілу $P\left\{\omega : \xi \equiv \mathbf{1}\right\} = P\left\{\omega : \xi = -1\right\} = \frac{1}{2}$ та $\varphi\left(\xi\left(\omega\right)\right) \equiv \xi\left(\omega\right)$. Тоді $\mathrm{E}\left\{\xi\right\} = 0$, $D\left\{\xi\right\} = 1$ й умова збігається з умовою (72).

Нехай $\varphi_2\left(\xi\left(\omega\right)\right) \equiv 0$, $\varphi_1\left(\xi\left(\omega\right)\right) \equiv \varphi\left(\xi\left(\omega\right)\right)$. Якщо в якості закону розподілу $\xi\left(\omega\right)$ вибрати пуассоновий закон $\mathrm{P}\left\{\omega : \xi = k\right\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ та $\varphi\left(\xi\right) = \xi$, тоді $\mathrm{E}\xi = D\xi = \lambda$. Отже, умова стійкості в l.i.m. системи (71), (67), (68) буде мати вигляд $2ac\lambda < 1$, а нестійкості, відповідно, $2ac\lambda > 1$.

Висновок. Запропонована в даній роботі стохастична модель складних систем, є спробою врахування в повному обсязі випадковостей при дослідженні реальних процесів, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, у правій частині яких враховуються не тільки дифузійні збурення типу броунівського процесу [5,10,18,19], але й випадкові збурення інших типів.

Перелік посилань до §6.2

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения.— Москва: Мир, 1967.— 548 с.

2. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных.— Москва: Наука, 1997.— 495 с.

3. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений.— Москва: Наука, 1978.— 521 с.

4. Гулинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов.— Москва: Физматлит, 2005.— 408 с.

5. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение.— К.: Наук. думка, 1980.— 612 с.

6. Гихман И.И., Скороход А.В. Управляемые случайные процессы.— К.: Наук. думка, 1977.— 251 с.

7. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика.— Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2009.— 798 с.

8. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.— Рига: Ориентир, 1992.— 301 с.

9. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— Рига: Зинатне, 1989.— 421 с.

10. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. Сб. научн. тр.— К.: Ин-т математики АН УССР.— 1981.— С.25–59.

11. Дороговцев А.Я., Ивасишен С.Д., Кукуш А.Г. Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, №1.— С.13–20.

12. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн.— 1993.— Т.45, № 9.— С.1773–1781.

13. Дынкин Е.Б. Марковские процессы.— Москва:Физматгиз, 1969.— 859 с.

14. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.1.: Ймовірність. Теорія та комп'ютерна практика.— Чернівці: Золоті литаври, 2007.— 444 с.

15. Колмогоров А.Н., Фомин С.в. Элементы теории функций и функционального анализа.— Москва: Наука, 1976.— 541 с.

16. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— Москва: Наука, 1969.— 367 с.

17. Эйдельман С.Д. Параболические системы.— Москва:Наука,1964.— 445с.

18. Donez N.P., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Mean Square Behavior of the Strong Solution of a Linear non-Autonomous Stochastic Partial Differential Equation with Markov Parameters // Cybernetics and System Analysis.– 2014.– Vol.**50**, No.6.– P.930-939. doi:10.1007/s10559-014-9683-8

19. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side // Cybernetics and Systems Analysis.– 2015.– Vol.**51**, No.1.– P.56-63. doi:10.1007/s10559-015-9697-x

20. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов.— Москва: Физматлит, 2005.— 402 с.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Азбелев Н.В. Устойчивость линейных систем с последействием // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений.— Новосибирск:Наука, 1988.— С.65—72.

2. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М.,Чистяков А.В.Устойчивость линейных систем с последействием // Дифференц. уравнения.— 1987.— Т.28, № 5.— С.745—746.

3. Азбелев Н.В., Рахматулина Л.Ф. Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения.— 1978.— Т.24, № 5.— С.771—797.

4. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием.— М.:Наука, 1992.— 333 с.

5. Антонюк С.В., Юрченко І.В., Ясинський В.К. Поведінка другого моменту розв'язків стохастичних функціонально-диференціальних динамічних систем з розривними траєкторіями в критичному випадку // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 191—192. Математика.— Чернівці: Рута, 2004.— С.5—9.

6. Арато М. Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход.— М.: Наука, 1989.— 304 с.

7. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения.— М.:Мир, 1967.— 548 с.

8. Бычков М.С. Построение оптимальных качественных харктеристик линейных стохастических систем нейтрального типа. Дис. канд. физ.-мат. наук.— К.: КНУ, 1994.— 164 с.

9. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифферциальные

уравнения и диффузионные процессы.— М.: Наука, 1986.— 445 с.

10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 575 с.

11. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения.— К.: Наукова думка, 1968.— 354 с.

12. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. В 3-х т.— М.: Наука, 1975.— Т.3.— 496 с.

13. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1982.— 612 с.

14. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. I.Общая теория.- М.: ИЛ, 1962.-895с.

15. Деч Д. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.— М.:Наука, 1971.— 288 с.

16. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы.— М.: ИЛ, 1965.— 605 с.

17. Дынкин Е.Б. Марковские процессы.— М.: Физматгиз, 1963.— 859 с.

18. Игнатенко М.Н., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений со случайными операторами.— Черновиц.ун-т.— Черновцы, 1986.— 21с.— Деп. в Укр. НИИНТИ 28.11.86, № 2681 Ук.-Д86.

19. Ионин Л.Л., Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Об устойчивости решений стохастических дифференциально-разностных уравнений // Исследования по теории дифференциальных и разностных уравнений.— Рига:Изд-во ЛГУ, 1994.— С.29—73.

20. Иго К., Нисио М. Стационарные решения стохастического дифференциального уравнения // Математика: Сб.пер. иностр. лит.— 1967.— Т.11, № 5.— С.117—173.

21. Кац И.Я. Об устойчивости по первому приближению систем со случайным запаздыванием//Прикл. математика и механика.— 1967.— Т.31, Вып.3.— С.447—452.

22. Кац И.Я., Красовский Н.Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. математика и

механика.— 1960.— Т.27, Вып.5.— С.809—823.

23. Колмановский В.Б. Об ограниченности моментов решений стохастических уравнений с последействием // Укр.мат.журн.— 1989.— Т.41, №5.— С.609—614.

24. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.— М.:Наука, 1981.— 448 с.

25. Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии.— К.: Наукова думка,1989.— 208 с.

26. Королюк В.С. Стохастичесие модели систем.— Киев: Наукова думка,1989.— 208с.

27. Королюк В.С., Мусуривский В.И., Юрченко И.В. Устойчивость динамических систем с последействием с учетом марковских возмущений // Кибернетика и системный анализ.— 2007.— №6.— С.134—146.

28. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике.— М.: Наука, 1985.— 640 с.

29. Королюк В.С., Свищук Л.В. Полумарковские случайные эволюции.— Киев: Наукова думка, 1992.— 256 с.

30. Королюк В.С., Турбин А.Ф. Полумарковкие процессы и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1976.— 184 с.

31. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.1.: Ймовірність. Теорія та комп'ютерна практика.— Чернівці: Золоті литаври, 2007.— 444 с. (Затверджено МОН України як підручник для студентів ВНЗ, лист-погодження №14/18.2-1213 від 30.05.05).

32. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.2.: Математична статистика. Комп'ютерне статистичне моделювання.— Чернівці: Золоті литаври, 2008.— 580 с. (Затверджено МОН України як підручник для студентів ВНЗ, лист-погодження №14/18.2-1213 від 30.05.05).

33. Королюк В.С., Ясинский В.К., Юрченко И.В. Устойчивость диффузионных стохастических функционально-дифференциальных уравнений с марковскими параметрами // Кибернетика и системный анализ.— 2008.— №1.— С.74—88.

34. Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М.:Физматгиз, 1959.— 212 с.

35. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление.— М.:Мир, 1969.— 200с.

36. Кушнер Г.Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления.— М.: Наука, 1985.— 222 с.

37. Маккин Г. Стохастические интегралы.— М.:Мир, 1972.— 184 с.

38. Махно С.Я., Шайхет Л.Е. Об устойчивости стохастических систем с запаздыванием //Поведение систем в случайных средах.— К.: Ин-т кибернетики АН УССР, 1973.— С.51—60.

39. Мильштейн Г.Н. Квадратические функционалы Ляпунова и вторые моменты для стохастических систем с последействием // Теория вероятн. и ее примен.— 1981.— Т.26, № 4.— С.734—744.

40. Мильштейн Г.Н., Репин Ю.М. О среднеквадратической устойчивости стохастических дифференциальных уравнений // Прикл. математика и механика.— 1967.— Т.31, Вып.3.— С.508—510.

41. Никитин А.В., Юрченко И.В., Ясинский Е.В. Оптимизационная процедура решения обобщенного матричного уравнения Сильвестра // Проблемы управления и информатики.— 1998.— N4.— С.51—65.

42. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных // Укр. мат. журн., 1993.— Т.45, № 9.— С.1773—1781.

43. Свердан М.Л. Аналіз стійкості за першим наближенням для диференціальних рівнянь з імпульсними збуреннями та марковськими параметрами // Доклады Академии наук Украины. Математика,естествознание, технические науки, 1994, № 11.— С.19—23.

44. Свердан М.Л., Царьков Е.Ф. Устойчивость стохастических импульсных систем.— Рига: РТУ, 1994.— 300 с.

45. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем.— Снятин: Над Прутом, 1996.— 448 с.

46. Свердан М.Л., Ясинский В.К. Устойчивость решений линейных стохастических функционально-дифференциальных систем в критическом случае //Изв. ВУЗов Математика, 1982.— Т.241, Вып. 4.— С.53—56.

47. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных //Кибернетика и вычислительная техника.— 1988.— Т.81.— С.7—12.

48. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Некоторые свойства дифференциально-функциональных уравнений // Черновиц.ун-т.- Черновцы, 1982.- 47с.- Деп. в ВИНИТИ 09.10.82, № 6202-82 деп.

49. Свердан М.Л., Ясинський В.К., Юрченко І.В. Критерії абсолютної асимптотичної стійкості у середньому квадратичному розв'язків стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з пуассонівськими збуреннями // Доповіді НАН України.— 1997.— N5.— С.43—49.

50. Скороход А.В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.— Киев: Наукова думка, 1987.— 328 с.

51. Слюсарчук В.Е., Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Об устойчивости решений линейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений // Укр.мат.журн.— 1973.— Т.25, № 8.— С.412—418.

52. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров.— М.:Наука, 1969.— 367 с.

53. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.

54. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.— Рига: Зинатне, 1989.— 421 с.

55. Царьков Е.Ф. О статистических решениях линейных дифференциально-функциональных уравнений // Топологические пространства и их отображения.— Рига: Латв. гос. ун-т, 1981.— С.142—151.

56. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. // Стохастические модели в функциональных пространствах.— К.,1989.— С.27—46.— (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 89.32).

57. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.— Рига: Ориентир, 1992.— 328 с.

58. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.— К.:Наук. думка, 1979.— 200 с.

59. Юрченко І.В. Про стійкість розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь із загаюванням, які нерозв'язані відносно похідних // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки.— Вип.2.— Київ, 1998.— С.153—158.

60. Юрченко І.В., Антонюк С.В. Експоненціальна стійкість у середньому квадратичному стохастичних диференціально-функціональних рівнянь зі всією передісторією // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. праць. Вип. 239. Математика.— Чернівці: Рута, 2005.— С.5—10.

61. Юрченко І.В., Грінчук А.П., Ясинський В.К. Метод функціоналів Ляпунова-Красовського дослідження стійкості диференціально-функціональних рівнянь // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач.— Вип. 5. Київ:Інститут математики,1994.— С.73—82.

62. Юрченко І.В., Ясинська Л.І., Ясинський В.К. Асимптотична стійкість у середньому квадратичному розв'язку систем стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими операторами / Черновиц.ун-т.— Черновцы,1994.— Укр. Деп. в ГНТБ Украины.— 05.08.94, № 1530.— Укр.94.— 19 с.

63. Юрченко І.В., Ясинська Л.І. Дослідження стійкості розв'язків систем лінійних стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими операторами в критичному випадку.— 13 с. /Черновиц. ун-т.— Черновцы, 1994.— Укр. Деп. в ГНТБ

Украины.— 05.08.94, № 1532.— Ук. 94.

64. Юрченко І.В., Ясинський В.К. Асимптотична стійкість у середньому квадратичному тривіального розв'язку систем стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з розривнивними траєкторіями // Доклады АН Украины. Математика, естествознание, технические науки.— 1994.— № 11.— С.24—28.

65. Юрченко И.В., Ясинский В.К., Береза В.Ю. Об устойчивости и ограниченности в среднем квадратическом решений стохастических дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими постоянными отклонениями аргумента // Проблемы управления и информатики.— 2000.— N1.— С.28—43.

66. Юрченко І.В., Ясинський В.К. Про існування l-го моменту сильного розв'язку стохастичних інтегро-диференціальних рівнянь Іто-Вольтерра // Доповіді НАН України.— 2004.— № 7.— С.33—39.

67. Юрченко І.В., Ясинський В.К. Стійкість дифузійних стохастичних функціонально-диференціальних рівнянь з марковськими параметрами // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: Зб. наук. пр. (за матеріалами міжнародної науково-методичної конференції).— Київ-Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський державний університет, редакційно-видавничий відділ, 2006.— С.61—69.

68. Ясинская Л.И. Устойчивость линейных стохастических функционально-дифференциальных систем // Аналитические методы нелинейной механики.— К.:Ин-т математики АН УССР, 1981.— С.153—161.

69. Ясинская Л.И. Об устойчивости тривиального решения функционально-дифференциальных систем к случайным возмущениям их параметров // Вест.Киев.ун-та. Математика и механика, 1982.— Вып.24.— С.121—130.

70. Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом решения стохастических дифференциально-функциональных уравнений // Укр.мат.журн.— 1980.— Т.32, № 1.— С.89—98.

71. Ясинская Л.И. Устойчивость стохастических систем с последействием при наличии пуассоновских возмущений // Дисс. канд.физ.-мат. наук.— Черновцы: Черновиц.гос.ун-т,1984.— 99 с.

72. Ясинская Л.И. Устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Укр.мат.журн.— 1981.— Т.33, № 4.— С.482—488.

73. Ясинская Л.И. Устойчивость почти наверное нулевого решения систем с последействием и с разрывными траекториями в критическом случае // Рукопись деп. в ВИНИТИ 09.07.82, № 3667.

74. Ясинская Л.И. Устойчивость почти наверное нулевого решения систем с последействием и с разрывными случайными возмущениями // Приближенные методы исследования нелинейных колебаний.— Киев:Ин-т математики АН УССР,1983.— С.180—188.

75. Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Об асимптотическом поведении решений стохастических дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием при наличии пуассоновских возмущений // Стохастические системы и их приложения.— Киев: Ин-т математики, 1990.— С.107—116.

76. Ясинська Л.I., Юрченко I.В. Асимптотична стiйкiсть розв'язкiв систем стохастичних диференцiальних рiвнянь у критичному випадку // Укр. мат. журн.— 1995.— Т.47, N11.— С.1558—1565.

77. Ясинська Л.I., Юрченко I.В. Стiйкiсть розв'язкiв систем стохастичних рiвнянь з випадковими операторами та змiнними коефiцiєнтами // Докл. АН Украины.— 1995.— N 5.— С.18—21.

78. Ясинский В.К. Устойчивость решений линейных стохастических дифференциальных систем с последействием // Уравнения математической физики и теория алгоритмов.— Рига:Латвийский ун-т, 1972.— С.97—109.

79. Ясинский В.К. Устойчивость решений линейных стохастических функционально-дифференциальных уравнений в

критическом случае // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1977.— Т.31, № 6.— С.977—1005.

80. Ясинский В.К. Устойчивость почти наверное тривиального решения функционально-дифференциальных уравнений // Асимптотические методы нелинейной механики.— Киев: Ин-т математики АН УССР.— 1979.— С.111—117.

81. Ясинский В.К. Об устойчивости решений стохастических функционально-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами // Аналитические методы исследования нелинейных колебаний.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980.— С.109—117.

82. Ясинский В.К. Поведение на бесконечности решений стохастических дифференциальных уравнений со случайными операторами //Дифференциальные уравнения и применения (I): Тр. третьей конф. (Руссе, 26 авг. — 2 сент. 1985г.).— Руссе, 1987.— С.487—490.

83. Ясинский В.К. Анализ устойчивости резца в радиальном направлении с учетом стохастических возмущений // Нелинейные колебания механических систем:Тр. всесоюзн. конф. (Горький, 11-17 окт. 1987г.).— Горький, 1987.— С.113—114.

84. Ясинский В.К. Исследование потерь устойчивости стержня в динамических системах с учетом стохастических возмущений // Нелинейные колебания механических систем: II всесоюзн. конф.— Горький, 1990.— Т.2.— С.31—32.

85. Ясинский В.К., Юрченко И.В. Устойчивость в среднем квадратическом решений стохастических дифференциальных уравнений нейтрального типа с несколькими постоянными отклонениями аргумента // Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського державного політехнічного університету. Зб. наук. пр. Вип. 121.— Харків: ХДПУ, 2000.— С.33—38.

86. Ясинський В.К., Ясинська Л.I. Про зв'язок експоненціальної та асимптотичної стохастичної стійкості розв'язків диференціально-функціональних рівнянь з розривними траєкторіями // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями:Збірн.наук.праць.— Чернівці, 1990.— С.183—

189.

87. Ясинский В.К., Ясинская Л.И. Исследование на устойчивость одной стохастической модели из теории вязкоупругости // Моделирование и исследование устойчивости процессов: Конференция.— В 2-х т.— Киев, 1992.— Т.2.— С.77—78.

88. Ясинський В.К., Свердан М.Л., Юрченко І.В. Про одну задачу стохастичного керування // Укр. мат. журн.— 1995.— Т.47, N 11.— С.1566—1573.

89. Ясинський В.К., Ясинська Л.І., Юрченко І.В. Асимптотична стійкість у середньому квадратичному розв'язків систем стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими операторами // Укр. мат. журн.— 1995.— Т.47, N7.— С.990—1001.

90. Ichikawa A. Semilinear Stochastic Evolution Equations: boundedness, stability and invariant measures // Stochastic.— 1984.— 12.— P.1—39.

91. Ito K., Nisio M.O. On Stationary Solutions of a Stochastic Differential Equations //J.Math. Kyoto Univ.— 1964.— Vol.4.— P.1—75.

92. Kushner H.J. On the stability of processes defined by stochastic difference-differential equations //J. Diff. Equations.— 1968.— Vol.4.— P.424—443.

93. Mizel V.J., Trutzer V. Stochastic Hereditary Equations: Existence and Asymptotic Stability //J.Integral Equations.— 1984.— Vol.7.— P.1—72.

94. Neiman F., Yasinsky V.K. On stability of functional-differential Equations with Markov Parameters //Proceedings of the Latvian Probality Seminar.— 1993.— Vol.2.— P.116—140.

95. Stoyanov J., Yasinska L., Yasinsky V. Stochastic Functional-Differential Equations with infinite ifterefect poisson perturbation // Украинская конференция моделирования и исследования устойчивости (Киев,Украина, 16-20 мая 1994).— Киев, 1994.— С.124—125.

96. Tsarkov Ye., Yasinsky V. The Investigation of stochastic Quasilinear Differential-Functional Equations with Poisson Disturbances // 19 Conference on Stochastic Processes and their Application(Eisenach, German Democratic Republic, September

3—8, 1990).— Jena (GDR),1990.— P.97—98.

97. Tsarkov Ye., Yasinsky V. The Second Lyapunov method for stochastic Differential-Functional Equations with Poisson Disturbances // Proceedings of the Latvian Probality Seminar, Sect.1. Dynamical Systems with Markov Parameters.— 1992.— Vol. 1.— P.1—18.

98. Tsarkov Ye., Yasinsky V. Research of Accountable System of Stochastic Differential Equations with Breaking Trajectories // Second Collogvium on Differential Equations (Plovdiv, Bulgaria, August 19-24).— Plovdiv, 1991.— P.111.

99. Tsarkov Ye., Yasinsky V. The Second Lyapunov Method for stochastic Functional-Differential Equations with Poisson Disturbancess // Random Operators and Stochastic Equations.— 1992.— Vol.4.— P.1—16.

100. Wonham W.M. A Lyapunow method for the estimation of statistical everages // J.Diff. Eqat.— 1966.— 2, № 4.— P.365—377.

101. Yasinskaya L.I., Yasinsky V.K. Stability of Solutions of Nonlinear Stochastic Functional Differential Equations // Second Colloquium on Differential Equations (Plovdiv, Bulgaria, August 19-24).— Plovdiv, 1991.— P.310

102. Yasinsky V.K. On Strong Solutions of Stochastic Functional-Differential Equations with Infinite Aftereffect // Proceedings of the Latvian Probality Seminar.— 1992.— Vol.1.— P.189—214.

103. Yasinska L., Yurchenko I. About the stability of the stochastic Equations systems solutions with the random operators // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Г.Гана (Чернівці, 10-15 жовтня 1994р.).— Чернівці: Рута, 1994.— С.159.

104. Yasinsky V., Yurchenko I. Asymptotic stability of the stochastic differential Equations systems solutions in the critical case // Міжнародна математична конференція, присвячена пам'яті Г.Гана (Чернівці,10-15 жовтня 1994р.).— Чернівці:Рута, 1994.— С.161.

105. Yasinsky V., Yurchenko I., Antonyk S. Comparison theorem for the solution of the stochastic functional differential equation with all prehistory // Theory of Stochastic Processes.—

Vol. 10(26).— no.1-2.— 2004.— P.214—221.

106. Ясинский И.В., Ясинский В.К. Исследование стохастической задачи "свисающий паук"с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями. Ч.1. Свойства решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями // Кибернетика и системный анализ.— 2000.— N 4.— С.101—130.

107. Ясинский В.К., Ясинский Е.В. Исследование стохастической задачи "свисающий паук"с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями. Ч.2. Устойчивость решений СДФУ с с бесконечной предисторией и пуассоновскими переключениями // Кибернетика и системный анализ.— 2000.— N 5.— С.113—139.

108. Ясинский В.К. Стохастические дифференциально-функциональные системы со всей предысторией.— К.: ТВiМС, 2003.— 254 с.

109. Зубов В.И. Стохастическое поведение систем с конечным числом фазовых состояний при наличии последействия // Дифференциальные уравнения.— 1979.— **15**, N 3.— С.18—26.

110. Колмановский В.Б., Майзенберг Т.Л. Оптимальное управление стохастическими системами с последействием // Прикл.мат. и мех.— 1977.— **41**, Вып.3.— С.31—38.

111. Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Об одном методе построения приближенного синтеза оптимального управления // ДАН УССР. Сер.А.— 1978.— N 8.— С.32—36.

112. Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. О приближенном синтезе оптимального управления стохастическими квазилинейными системами с последействием // Прикл.мат. и мех.— 1978.— **42**, Вып.6.— С.45—49.

113. Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. О приближенном синтезе квадратичных задач управления // ДАН УССР. Сер.А.— 1980.— N 4.— С.13—18.

114. Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Синтез оптимального управления некоторыми механическими системами при случайных возмущениях // Изв. АН СССР. Техническая

кибернетика.— 1973.— N 2.— С.31—43.

115. Колмановський В.Б., Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление при случайных возмущениях.— М.: Наука, 1978.— 401 с.

116. Шайхет Л.Е. Решение задачи стабилизации управляемых стохастических систем с запаздыванием методом функционалов Ляпунова // Теория случайных процессов.— К.: Наук. думка, 1976.— В.4.— С.113—118.

117. Шайхет Л.Е. О приближенном синтезе квадратичных и неквадратичных задач управления // Теория случайных процессов.— К.: Наук. думка, 1981.— Вып.9.— С.125—131.

118. Шайхет Л.Е. Численное решение задачи быстродействия при наличии непрерывных и дискретных случайных возмущений // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1987.— N 6.— С.98—109.

119. Биллингсли. Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.— 352 с.

120. Jakubovski A.A. The a.s. Skorohod representation for subsequences in nonmetric spaces // Theory Probability. Appl.— 1997.— Vol.42.— P.209—216.

121. Jakubovski A.A. Non-Skorohod topology on the Skorohod space // Electronic Journal of Probability.— 1997.— Vol.2.— P.1—21.

122. Колмановский В.Б. Управление и оценивание в системах с последействием // Математическая теория систем.— М.: Наука, 1986.— 329 с.

123. Шайхет Л.Е. Об ε-оптимальном управлении квазилинейными интегральными уравнениями // Теория случайных процессов.— К.: Наук. думка, 1986.— Вып.14.— С.121—130.

124. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-ч т.— М.: Физматгиз, 1994.— Т.1.— 544 с.

125. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов: В 2-ч т.— М.: Физматгиз, 1994.— Т.2.— 497 с.

126. Кац И.Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры.— Ека-

теринбург: Изд-во Уральской государственной академии путей сообщения, 1998.— 228 с.

127. Королюк В.С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Укр. мат. журн.— 1991.— **42**, № 9.— С.1176—1181.

128. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы.— М.:ИЛ, 1962.— 829 с.

129. Grossman S.E., Yorke I.A. Asymptotic Behavior and Exponential Stability Criteria for Differential delay Equations // I. Differen.Equent.— 1972.— **12**,№ 2.— P.236—253.

130. Shiryaev A.N. On some conceptions on stochastic models of financial mathematics // Probabilistic Theory and its applications.— 1994,—**39**, 1.— P.5—22.

131. Di Mazi J., Kabanov Yu.M., Runggalder V.J. Hedging of options on the stock with mean square criterion and Markov coefficient of variation // Probabilistic Theory and its applications.— 1994,—**39**, 1.— P.211—222.

132. Martin J.D., Cox S.H., McMinn R.D. The Theory of Finance. Evidence and Applications.— The Dryden Press, 1988.— 709 p.

133. Tsarkov Ye. Averaging in Dynamical Systems with Markov Jumps.— Bremen: Univ. of Bremen, Inst. of Dynamical Syst., 1993.— № 182, April.— 41 p.

134. Ясинський В.К., Ясинська Л.І., Вернигора І.В. Дослідження стійкості диференціально-функціональних рівнянь з марковськими перемиканнями методом функціоналів Ляпунова-Красовського // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.— 2002.— Вип.4.— С.139—155.

135. Дарійчук І.В., Козаченко Ю.В., Перестюк М.М. Випадкові процеси з просторів Орліча.— Чернівці: Золоті литаври, 2011.— 212 с.

Список додаткової літератури

2009

1. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Стійкість та оптимальне керування в лінійних стохастичних динамічних системах з випадковими операторами.– Чернівці: Золоті литаври, 2009.– 237 с.

2. Лукашив Т.О., Юрченко И.В., Ясинский В.К. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем Ито случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. I. Общие теоремы об устойчивости импульсных стохастических систем // Кибернетика и системный анализ.– 2009.– №2.– С.135–145.

3. Лукашив Т.О., Юрченко И.В., Ясинский В.К. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости стохастических систем Ито случайной структуры с импульсными марковскими переключениями. II. Устойчивость по первому приближению импульсных стохастических систем с марковскими параметрами // Кибернетика и системный анализ.– 2009.– №3.– С.146–158.

4. Юрченко И.В., Ясинский В.К., Ясинский Е.В. Устойчивость стохастических самонастраивающихся динамических систем без последействия с эталонной моделью //

Системний аналіз та інформаційні технології: Матеріали XI Міжнародної науково-технічної конференції (26–30 травня 2009 р., Київ).– К.: ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”, 2009.– С.247.

5. Yasinsky V.K., Yurchenko I.V. Stabilization of stochastic diffusion dynamic systems with impulse Markov switchings and parameters // Міжнародна конференція до 100-річчя М.М. Боголюбова та 70-річчя М.І. Нагнибіди (8–13 червня 2009 р., Чернівці). Тези доповідей.– Чернівці: Книги–XXI, 2009.– С. 251–253.

6. Ясинский В.К., Юрченко И.В. Об устойчивости стохастических самонастраивающихся динамических систем без последействия с эталонной моделью // International Conference “Dynamical System Modelling and Stability Investigation” (May 27–29, 2009, Kyiv). Thesis of conference reports.– Kyiv, 2009.– С.318.

2010

1. Никитин А.В., Юрченко И.В., Ясинский В.К. Устойчивость само-настраивающихся стохастических систем автоматического регулиро-вания с последействием. Часть 1. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном систем линейных стохастических дифференциально-разностных уравнений // Кибернетика и системный анализ.– 2010.– № 1.– С.–90–104.

2. Nikitin A.V., Yurchenko I.V., Yasinskiy V.K. Stability of stochastic self-adjusting automatic control systems with after effect. Part I. Mean square asymptotic stability of systems of linear stochastic differential-difference equations // Cybernetics and Systems Analysis.– 2010.– Vol.46, № 1.– P.80–92.

3. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Проблема оборотності теорем про стійкість для систем випадкової структури зі

скінченною післядією // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика: Наук. журнал / Донецький нац. ун-т.– 2009.– № 1–2.– С.153–167.

4. Юрченко И.В. Об устойчивости динамических систем с учетом марковских возмущений // Тринадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М.Кравчука (13–15 травня, 2010 р., Київ): Матеріали конф. Т.3.– К.: НТУУ "КПІ", 2010.– С.128.

5. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Дослідження стійкості динамічних систем з марковськими параметрами // Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 12-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2010, Київ, 25–29 травня 2010 р. / ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ". – К.: ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ", 2010. – С. 187.

6. Юрченко И.В., Ясинский В.К. Об устойчивости динамических систем с учетом марковских возмущений // Міжнародна наукова конференція "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури" (17–21 жовтня 2010 р., Чернівці). Тези доповідей.– Чернівці: Вид-во "Золоті литаври", 2010.– С.172.

2011

1. Ясинський В.К., Ясинський Є.В., Юрченко І.В. Стабілізація у динамічних системах випадкової структури.– Чернівці: Золоті литаври, 2011.– 738 с.

2. Королюк В.С., Юрченко И.В., Ясинский В.К. Асимптотика вектора состояния импульсных диффузионных систем запаздывающего типа с марковскими параметрами // Кибернетика и системный анализ.– 2011.– №4.– С.79–94.

3. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Asymptotic of the state vector of delayed impulsive diffusion systems

with Markov parameters // Cybernetics and Systems Analysis.– 2011.– Vol.47, №4.– P.571–586.

4. Юрченко И.В., Ясинский В.К. Исследование поведения второго момента сильного решения задачи Коши для нелинейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных с марковскими параметрами // Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали Міжнародної науково-технічної конференції SAIT'2011, Київ 23–28 травня 2011 р. / ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ".– К.: ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ", 2011.– С.178.

5. Ясинский В.К., Юрченко И.В. Поведение сильного решения задачи Коши для нелинейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных // Международная конференция "Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях" (Харьков, 17–22 апреля 2011 г.). Тезисы докладов.– Харьков.: Вировец А.П. "Апостроф", 2011.– С.204.

6. Ясинский В.К., Юрченко И.В. Поведение сильного решения задачи Коши для нелинейного стохастического дифференциального уравнения в частных производных с марковскими параметрами // XV International Conference "Dynamical System Modelling and Stability Investigation" (May 25-27, 2011, Kiev, Ukraine). Abstracts of conference reports.– Kiev, 2011.– P.147.

2012

1. Ясинський В.К., Ясинський Є.В., Юрченко І.В. Стабілізація стрибкоподібних вартостей акцій та облігацій загальної стохастичної моделі (B,S)-ринку цінних паперів із зовнішніми збуреннями // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика: Наук. журнал / Донецький нац. ун-т.– 2012.– №2.– С.30–46.

2. Юрченко И.В., Ясинский Е.В. О поведении второго момента решения линейного автономного стохастического уравнения в частных производных со случайными параметрами в правой части // XIV Міжнародна наукова конференція ім. акад. Михайла Кравчука (19–21 квітня 2012 р., м.Київ). Матеріали конференції. Том 3. Теорія ймовірностей та математична статистика.– Київ: НТУУ "КПИ", 2012.– С.139.

3. Рогозкіна Я.П., Юрченко І.В. Математичні методи прийняття економічних рішень за недетермінованих умов // Сборник научных трудов SWorld. Материалы международной научно-практической конференции "Современные направления теоретических и прикладных исследований '2012". (20–31 марта 2012 г., Одесса).– Выпуск 1. Том 11.– Одесса: КУПРИЕНКО, 2012.– ЦИТ: 112–237.– С.11–12.

4. Юрченко И.В., Ясинский Е.В. Поведение второго момента решения линейного автономного стохастического уравнения в частных производных со случайными параметрами в правой части // Системный анализ и информационные технологии: материалы 14-й Международной научно-технической конференции SAIT'2012 (24 апреля 2012 года., Киев) УНК "ИПСА" НТУУ "КПИ".– Киев: УНК "ИПСА" НТУУ "КПИ", 2012.– С.151.

2013

1. Легкалюк Н.Т., Юрченко І.В. Методи визначення колективних переважань при прийнятті економічних рішень // Сборник научных трудов SWorld. Материалы международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований '2013» (Одесса, 19-30 марта 2013 г.). – Выпуск 1. Том 11. – Одесса: КУПРИЕНКО, 2013. – ЦИТ: 113-0246. – С.95-96.

2. Самокіщук А.Ю., Юрченко І.В. Задача оптимального управління валютним резервом // Сборник научных трудов SWorld. Материалы международной научно-практической конференции «Современные направления теоретических и прикладных исследований ‘2013» (Одесса, 19-30 марта 2013 г.). – Выпуск 1. Том 11. – Одесса: КУПРИЕНКО, 2013. – ЦИТ:113-0028. – С.86–88.

3. Юрченко И.В., Ясинский В.К. О поведении решения линейного автономного стохастического уравнения в частных производных со случайными параметрами в правой части // Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 15-ї Міжнародної науково-технічної конференції “SAIT 2013” (Київ, 27-31 мая 2013 р.) / ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”. – К.: ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”, 2013. – С.224.

4. Юрченко И.В., Ясинский В.К. О поведении решения линейного автономного стохастического уравнения в частных производных со случайными параметрами в правой части // Крайові задачі, теорія функцій та їх застосування. Міжнародна математична конференція з нагоди 75-річчя з дня народження академіка А.М. Самойленка: матеріали конференції.– Слов’янськ: ДДПУ, 2013.– С.48.

2014

1. Ясинский В.К., Юрченко И.В. Асимптотика решения линейного неавтономного стохастического уравнения в частных производных с марковскими параметрами // Науковий вісник Ужгородського університету. Сер. Матем. і інформ.– Ужгород: Вид. УжНУ “Говерла”, 2014.– Вип.25, №1.– С.137–149.

2. Юрченко І.В. Стохастичне прогнозування.– Чернівці: Видавничий дім “Родовід”, 2014.– 76 с.

3. Ясинський В.К., Ясинський Є.В., Юрченко І.В. Про стійкість розв’язку лінійного автономного стохастично-

го рівняння з частинними похідними із зовнішними випадковими збуреннями // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка.– Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014.– Вип. 10.– С.197–209.

4. Донец Н.П., Юрченко И.В., Ясинский В.К. О поведении в среднем квадратичном сильного решения линейного неавтономного стохастического уравнения в частных производных с марковскими параметрами // Кибернетика и системный анализ.– 2014.– Т.50, №6.– С.122–131.

5. Donez N. P., Yurchenko I. V., Yasynskyy V. K. Mean Square Behavior of the Strong Solution of a Linear non-Autonomous Stochastic Partial Differential Equation with Markov Parameters // Cybernetics and System Analysis.- 2014.- Vol.50., №6.- P.930-939.

6. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Асимптотика розв'язків у випадкових системах з необмеженою післядією.– Чернівці: Видавничий дім "РОДОВІД", 2014.– 266 с.

7. Юрченко І.В., Ясинський В.К. Про поведінку другого моменту розв'язку лінійного автономного стохастичного рівняння в частинних похідних з випадковими параметрами в правій частині // VI Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 4-5 квітня 2014 року). Тези доповідей.– Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014.– С.195–196.

8. Юрченко І.В. Про поведінку розв'язку стохастичних рівнянь в частинних похідних з марковськими параметрами // Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 16-ї Міжнародної науково-технічної конференції

“SAIT 2014” (Київ, 26-30 травня 2014 р.) / ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”. – К.: ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”, 2014. – С.181.

2015

1. Koroliuk V. S., Yurchenko I. V., Yasynskyy V. K. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side // Cybernetics and Systems Analysis.- 2015.- Vol. 51, Issue 1.- PP.56-63.

2. Королюк В.С., Юрченко И.В., Ясинский В.К. О поведении второго момента решения линейного автономного стохастического уравнения в частных производных со случайными параметрами в правой части // Кибернетика и системный анализ.- 2015.- Т.51, №1.- С.65-72.

3. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Stability of self-adaptive stochastic dynamic systems with finite aftereffect and reference model // Cybernetics and System Analysis. — 2015. — Vol. 51, N 6. — P.915 –928.

4. Юрченко И.В., Ясинский В.К. Проблема устойчивости самонастраивающихся стохастических динамических систем с конечным последействием и с эталонной моделью // Кибернетика и системный анализ.- 2015.- Т.51, №6.- С.92-106.

5. Юрченко І.В., Цибрій Н.П. Моделювання портфеля цінних паперів // Сборник научных трудов SWorld.– Выпуск 1(38). Том 21.– Одесса: КУПРИЕНКО СВ, 2015.– С.51–54. (Index Copernicus Value ICV 2015: 66.23).

6. Yasynskyy V. K., Yurchenko I. V. Optimal control in the nonlinear stochastic functional differential Ito-Skorokhod equations with Markov parameters and external Markov switchings // International conference “Probability, reliability

and stochastic optimization" (April 7–10, 2015, Kyiv, Ukraine). Conference materials.– Kyiv, 2015.– P.59.

7. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Поведінка сильного розв'язку стохастичних рівнянь в частинних похідних з марковськими параметрами // Системний аналіз та інформаційні технології: матеріали 17-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2015 (Київ, 22-25 червня 2015 р.).– К.: ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ", 2015.– С.122.

2016

1. Юрченко І.В. Стійкість розв'язку лінійного автономного стохастичного рівняння в частинних похідних з випадковими параметрами в правій частині // VII Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 21-22 квітня 2016).– Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016.– С.250-251.

2. Yurchenko I. V., Yasynskyy V.K. Stability theorems for random structure systems with finite aftereffect // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences.- IV (12).- Issue: 110.- 2016.- P.51-54.

3. Ясинський В.К., Юрченко І.В., Кисілюк У.М. Про існування сильного розв'язку дифузійного стохастичного диференціально-функціонального рівняння із зовнішніми випадковими збуреннями-процесами // VII Міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 21-22 квітня 2016).– Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016.– С.254-255.

4. Yurchenko I.V. Stability theorems for random structure systems with finite aftereffect // International Conference “Modern Directions Of Theoretical And Applied Researches ‘2016” (Odessa, 15-22 March 2016).– Електронний ресурс. Адреса доступу: http://sworld.com.ua/index.php/uk/physics-and-mathematics-116/mathematics-116/27188

5. Юрченко І.В. Теореми про стійкість для систем випадкової структури зі скінченною післядією // Сборник научных трудов SWorld.– Выпуск 1(42). Том 1.– Иваново: Научный мир, 2016.– С.79–86.

6. Довгунь А.Я., Донець Н.П., Лукашів Т.О., Юрченко І.В., Ясинський В.К. Стійкість та стабілізація у стохастичному моделюванні складних динамічних систем // Міжнародна наукова конференція, присвячена 80-річчю від дня народження М.П. Ленюка (28-30 жовтня 2016 р., м.Чернівці). Матеріали конференції.- Чернівці, 2016.- С.116-118.

2017

1. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. On stability of the strong solution of the autonomous stochastic partial differential equation with random parameters // SWorld Journal, Issue №12 (Scientific world, Ivanovo, 2017).– P.343-356. URL: http://www.sworld.com.ua/e-journal/swj12.pdf DOI: 10.21893/2227-6920.2017-12.012.

2. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Про існування розв’язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень // Системні дослідження та інформаційні технології.– 2017.– №2.– С.103-114. URL: http://journal.iasa.kpi.ua/article/view/108824 DOI:10.20535/SRIT.2308-8893.2017.2.10

3. Юрченко І.В. Стохастичне прогнозування. Навч. посібник. 2-е видання.- Чернівці: Видавничий дім "Родовід 2017.– 78 с.

4. Ясинський В.К., Юрченко І.В., Кисілюк У.М. Існування та єдиність сильного розв'язку стохастичного диференціально-функціонального рівняння із зовнішніми випадковими збуреннями // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика.– 2017.– Вип. №1 (30).– С.143-153.

5. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Асимптотика другого моменту розв'язку лінійного автономного стохастичного рівняння в частинних похідних із зовнішніми випадковими збуреннями // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка.– Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2017.– Вип. 16.– С.181–192.

2018

1. Юрченко И.В., Ясинский В.К. Существование функционалов Ляпунова-Красовского для стохастических дифференциально-функциональных уравнений Ито-Скорохода при условии устойчивости решений по вероятности с конечным последействием // Кибернетика и системный анализ.– 2018.– Т.54, №6.– С.119-133.

2. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. The existence of Lyapunov-Krasovskii functionals for stochastic differential-functional Ito-Skorokhod equations under the condition of the solutions stability on probability with finite aftereffect // Cybernetics and Systems Analysis.– 2018.– Vol.54, Iss.6.– P.957-970. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0099-8

3. Yurchenko I.V., Sikora V.S. Stability of the solution of stochastic partial differential equation with random parameters // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences.- 2018.- VI(18), Issue: 158.- P. 21-24. DOI:10.31174/NT2018-158VI18-05

4. Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. On existence and stabization of the strong solution of the autonomous stochastic partial differential Ito-Skorokhod equation with random parameters // System Research and Information Technologies.– 2018.– №3.– P.80-90. http://journal.iasa.kpi.ua/article/view/138168 DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2018.3.01

5. Ясинський В., Юрченко І., Дорошенко І., Лукашів Т. Достатні умови існування функціонала Ляпунова-Красовського для стохастичної динамічної системи випадкової структури зі скінченною післядією // Сучасні проблеми математики та її застосування в природничих науках і інформаційних технологіях. Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 50-річчю факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, 17-19 вересня 2018 р.– Чернівці: ЧНУ, 2018.– С.115.

2019

1. Yurchenko I.V., Sikora V.S. On existence of solution of the Cauchy problem for one class of stochastic partial differential-difference equations with random external perturbations // Science and Education a New Dimension. Natural and Technical Sciences.– 2019.– VII(23), Issue: 193.– P. 89–92.

ПРО АВТОРІВ

Ясинський Володимир Кирилович — доктор фіз.-мат. наук, професор, академік АН ВШ України.

Web-сторінка: http://sasfm.fmi.org.ua/index.php?Itemid=108
Google Scholar:
https://scholar.google.com.ua?user=2bx5EdsAAAAJ
ORCID ID: www.orcid.org/0000-0001-5434-6427

Researcher ID: www.researcherid.com/rid/C-3535-2016
SCOPUS Author ID: 19337841500

Ясинський Володимир Кирилович народився 12 жовтня 1940 року в м.Пружани (Брестська область, Бєларусь). Закінчив середню школу у м. Шахтарську Сахалінської області (1958 р.), технічне училище у м. Олександрія Кіровоградської області (1960 р.), фізико-математичний факультет (математичний відділ, кафедра прикладної математики і механіки (ПММ), спеціальність "Обчислювальна математика") (1965 р.) Чернівецького державного університету (ЧДУ), аспірантуру при Латвійському університеті (лабораторія математичної статистики Обчислювального центру, науковий керівник — кандидат фіз.-мат. наук, доцент Царков Є.Ф. (1973 р.)

Кандидатську дисертацію "Стійкість розв'язків стохастичних рівнянь з післядією" захистив 15 лютого 1975 р. в ЧДУ (науковий керівник — кандидат фіз.-мат. наук, доцент Царков Є.Ф.; офіційні опоненти: доктор фіз.-мат. наук, професор Скороход А.В., кандидат фіз.-мат.наук, доцент Букатар М.І.; провідна установа – Київський державний університет імені Тараса Шевченка (КДУ)).

Докторську дисертацію "Математичні методи дослідження стійкості стохастичних систем з післядією при наявності пуассонових збурень" (спеціальності 01.01.09 — математична кібернетика; 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика) захистив 18 березня 1993 р. на засіданні спеціалізованої ради при КДУ (офіційні опоненти: академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук,професор Королюк В.С., доктори фіз.-мат. наук, професори Наконечний О.Г., Кулініч Г.Л.; провідна установа — Інститут кібернетики ім.В.М. Глушкова НАН України).

Вчене звання доцента по кафедрі прикладної математики і механіки ЧДУ присвоєно в 1983 р.; професора по кафедрі математичного моделювання ЧДУ — в 1996 р.

На посаді завідувача кафедри математичної і прикладної статистики (МіПС) Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича В.К. Ясинський працював у 2001-2015 рр. (у 2010 р. кафедру МіПС перейменовано на кафедру стохастичного та системного аналізу, у 2012 р. - на кафедру системного аналізу і страхової та фінансової математики (САСФМ)). У 2015-2017 рр. працював на посаді професора кафедри САСФМ.

В.К. Ясинський обгрунтував і узагальнив метод функціоналів Ляпунова-Красовського (другий метод Ляпунова) для динамічних систем випадкової структури, що описуються стохастичними диференціально-функціональними рівняннями Іто-Скорохода, інтегро-функціональними рівняннями Іто-Скорохода-Вольтерри.

Опублікував у наукових виданнях понад 580 наукових праць, з яких 5 монографій, понад 150 статей у міжнародних журналах, понад 30 підручників, навчальних посібників, навчально-методичних праць для студентів математичного факультету, факультету математики та інформатики, факультету комп'ютерних наук ЧНУ.

В.К. Ясинський керував більше ніж 20 грантовими науково-дослідними і госпдоговірними темами. Під його керівництвом захищено 12 кандидатських дисертацій та одна докторська.

Активно працює в області стійкості, оптимізації та стабілізації стохастичних диференціальних, диференціально-різницевих та диференціально-функціональних рівнянь під впливом зовнішніх збурень на системи, що описуються цими рівняннями.

Лауреат обласної педагогічної премії імені Юрія Федьковича (2002 р.).

У 2009 р. Ясинського В.К. нагороджено Почесною Грамотою Міністерства освіти і науки України.

Академік Академії наук вищої школи України з 2009 р.

У 2015 р. В.К. Ясинському оголошено подяку від міського голови м.Чернівці Каспрука О.П.

Проживає в Канаді з 2018 року.

Юрченко Ігор Валерійович — кандидат фіз.-мат. наук, доцент.

Web-сторінка:

http://matmod.fmi.org.ua/pro-kafedru/spivrobitnyky/yurchenko-igor-valeriyovich/

ZentrablattMATH:

https://zbmath.org/authors/?q=ai:yurchenko.i-v

Google Scholar:

http://scholar.google.com.ua/citations?user=yEBtORQAAAAJ

ORCID ID: www.orcid.org/0000-0001-9929-5758

Researcher ID: www.researcherid.com/rid/B-9321-2016

SCOPUS Author ID: 23096632000

Народився 6 серпня 1971 р. в м. Чернівці. Закінчив середню школу №5 м. Чернівці (1988 р.) із золотою медаллю, математичний факультет (кафедра математичних проблем управління та кібернетики, спеціальність – прикладна математика, 1993 р.) Чернівецького державного університету (ЧДУ) із червоним дипломом і аспірантуру при цьому університеті (кафедра математичного моделювання, науковий керівник – доктор фіз.-мат. наук, професор Ясинський В.К., 1995 р.).

Кандидатську дисертацію ”Математичні методи дослідження стійкості у стохастичному моделюванні динамічних систем з післядією” (спеціальність 01.05.02 — математичне моделювання та обчислювальні методи в наукових дослідженнях) захистив 24 червня 1995 р. на засіданні спеціалізованої вченої ради в ЧДУ (науковий керівник — доктор фіз.-мат. наук, професор В.К. Ясинський; офіційні опоненти: доктори фіз.-мат. наук, старші наукові співробітники М.В. Андрєєв і Р.В. Бобрик; провідна установа – Київський національний університет імені Тараса Шевченка).

З 1 липня 1995 р. працював асистентом кафедри математичного моделювання ЧДУ. У 2001 р. перейшов на новостворену кафедру математичної і прикладної статистики. У 2002-2012 рр. працював на посаді доцента кафедри МіПС, у 2012-2017 рр. — доцент кафедри САСФМ. З 2017 р. працює доцентом кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

На кафедрі САСФМ забезпечував читання таких навчальних дисциплін: “Інформатика та програмування”, “Практикум на ЕОМ”, “Програмне забезпечення обчислювальних систем”, “Прикладний статистичний аналіз”, “Комп’ютерна статистика”, “Стохастичне прогнозування”, “Прийняття рішень у соціально-економічних системах”, відповідав за проведення виробничої та педагогічної практики студентів, що спеціалізувалися на кафедрі САСФМ.

На кафедрі математичного моделювання забезпечує читання навчальних дисциплін “Спеціалізовані мови програмування”, “Алгоритми та структури даних”, “Теорія ймовірностей”, “Системи штучного інтелекту”, “Основи теорії систем”, “Програмні засоби в системному аналізі”.

Опублікував більше 100 наукових та методичних праць, серед яких 3 монографії, 11 навчальних посібників, 26 наукових статей, 15 навчально-методичних вказівок. Брав участь більше ніж у 50 наукових конференціях, входив до складу оргкомітету двох міжнародних конференцій.

Нагороджений почесною грамотою Чернівецької міської ради у 2013 році.

Зміст

Наукове видання

Стійкість та оптимальне керування в стохастичних динамічних системах з випадковими операторами

Видання друге, доповнене

Ясинський Володимир Кирилович

Юрченко Ігор Валерійович

Публікується в авторській редакції

Підписано до друку 1.10.2019 р. Папір офсетний. Формат 60×84/16.
Ум. друк. арк. 14,94. Вид. № 19-23. Зам.№ 33. Тираж 100 прим.
Виготовлено з готового оригінал-макета замовника.
Видавець та виготівник: ПВКФ “Технодрук”
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК №1841 від 10.06.2004 р.
58000, м.Чернівці, вул. І.Франка, 20, оф.18, тел. (0372) 55-05-85