Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

В.В. Городецький, С.Б. Боднарук,

Ж.І. Довгей, В.С. Лучко

Основи аналітичної геометрії в теоремах і задачах

Навчальний посібник
Друге видання
Виправлене і доповнене

Чернівці
2021

УДК 514.122(075.8)
ББК 22.151.54я73
Г 701

Друкується за ухвалою Вченої ради
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича
(Протокол №5 від 25.05.2020року)

Рецензенти

Кулик Г.М. - канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри математичної фізики фізико-математичного факультету Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Готинчан І.З - канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри економічної кібернетики та міжнародних економічних відносин ЧТЕІ КНТЕУ.

Городецький В.В.

Г 701 Аналітична геометрія в теоремах і задачах / навч. посіб. Друге вид. Виправлене і доп. В.В. Городецький, С.Б. Боднарук, Ж.І. Довгей, В.С. Лучко. – Чернівці: – Чернівец. нац. ун-т ім. Ю.Федьковича, 2021. – 408 с.

У посібнику викладено основний теоретичний матеріал, який стосується аналітичної геометрії. У кожному розділі наведено розв’язання типових задач різного ступеня складності; даються завдання для самостійної роботи.

Для студентів університетів, які навчаються за спеціальностями „Математика”, „Середня освіта (математика, інформатика)”.

ББК 22.151.54я73
УДК 514.122(075.8)

Вступ

Аналітична геометрія – це розділ математики, в якому властивості геометричних об’єктів (точок, ліній, поверхонь, фігур, тіл тощо) вивчаються засобами алгебри на основі методу координат.

Основоположником аналітичної геометрії є Р. Декарт, який вперше в 1637 році у своїй книзі “Геометрія” дав чіткий виклад ідеї методу координат на площині. Р. Декарт запропонував положення точки на площині відносно заданої системи координат визначати за допомогою двох чисел – її координат, а кожну лінію на площині розглядати як множину точок, заданих певною геометричною умовою. Ця умова записується у вигляді рівняння, яке пов’язує змінні координати точки, що належить даній лінії, і називається рівнянням цієї лінії. Такий спосіб дослідження геометричних об’єктів і називають методом координат.

Наступний важливий внесок в аналітичну геометрію зробив французький учений Ж.– Л. Лагранж, який уперше 1788 року у своїй “Аналітичній механіці” запропонував положення вектора визначати за допомогою чисел – його проекцій на координатні осі. Розвиток ідей Лагранжа привів до створення векторної алгебри.

Першим систематичним викладом аналітичної геометрії вважають другий том “Вступу в аналіз” Л. Ейлера, опублікований у 1748 році.

Метод координат та апарат векторної алгебри широко використовують не тільки у сучасній аналітичній геометрії, але і у диференціальній геометрії, лінійній алгебрі, тензорному аналізі, теорії поля, в багатьох загальнонаукових та інженерних дисциплінах.

Матеріал даного посібника відповідає діючій програмі з курсу “Аналітична геометрія” для студентів університетів, що навчаються за спеціальностями “Математика”, “Середня освіта (математика, інформатика)” і можу бути корисний студентам інших спеціальностей, що вивчають елементи аналітичної геометрії.

Зупинимось коротко на структурі даного посібника.

У першому розділі розглядаються питання, пов'язані з поняттям систем координат на прямій, на площині та в просторі.

Другий розділ присвячено вивченню основних положень векторної алгебри.

Третій розділ посібника містить матеріал з теми "Пряма на площині".

У четвертому розділі вивчаються питання, пов'язані з поняттями площини та прямої в просторі.

Всі розділи цього посібника супроводжуються детальним викладом теоретичного матеріалу і прикладами розв'язання типових для курсу задач різного рівня складності та містять умови завдань для самостійної роботи студентів.

Зауважимо, що якщо в умові задачі не вказано систему координат, в якій слід провести розв'язання задачі, то читачеві пропонується здійснити вибір самостійно, розглянувши при цьому найзагальніший з можливих випадків.

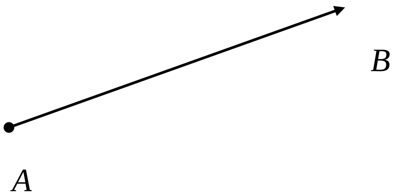
РОЗДІЛ 1
СИСТЕМИ КООРДИНАТ.
НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

§1.1. Декартові системи координат на прямій

Означення. *Напрямленим відрізком* $\overrightarrow{AB}$ *(у просторі, на площині, на прямій) називається відрізок, кінці якого взято в певному порядку. Точка* A *називається початком цього напрямленого відрізка, точка* B *– його кінцем.*

Якщо точки A та B збігаються, то напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ називається *нульовим* (або *виродженим*).

Надалі розглядаються напрямлені відрізки, розміщені на фіксованій прямій.



Додатним напрямком прямої називається напрям фіксованого на цій прямій напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$.

Означення. *Віссю називається пряма, для якої фіксовано додатний напрямок і задано масштабний відрізок.*

Означення. *Координатною віссю називається вісь, на якій вибрано початок відліку – фіксовану точку* O.

Означення. *Координатою невиродженого напрямленого відрізка* $\overrightarrow{AB}$, *розміщеного на осі, називається число* $x = \overline{AB}$, *що дорівнює довжині напрямленого відрізка* $\overrightarrow{AB}$, *взятій зі знаком „плюс” у випадку, коли напрямок цього напрямленого відрізка і напрямок осі збігаються, та зі знаком „мінус” у протилежному випадку.*

Число $\overline{AB}$ часто називають також *величиною* напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$.

Під *декартовою координатою точки* M, що лежить на координатній осі, розумітимемо координату напрямленого відрізка $\overrightarrow{OM}$ цієї осі. Позначення: $\overline{OM} = x$ або $M(x)$.

Точку E, декартова координата якої дорівнює одиниці, називають *одиничною* точкою координатної осі, а напрямлений відрізок $\overrightarrow{OE}$ – *масштабним.*

На прямій існує безліч декартових систем координат, які відрізняються напрямком, початком координат та вибраним масштабом.

За допомогою декартової системи координат на прямій здійснюється взаємно однозначна відповідність між множиною всіх точок прямої і множиною всіх дійсних чисел.

Теорема 1.1.1. (Шаля). *Якщо* A, B, C – *три довільні точки осі, то* $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Доведення. Нехай точки A, B, C попарно різні. Якщо точка B лежить між точками A і C, то

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC},$$

тобто довжина відрізка AC дорівнює сумі довжин відрізків AB і BC. Але напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$ мають однаковий напрям, тобто числа $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$ одного знаку. Тому $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Якщо ж точка C лежить між A і B, то

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB},\ \overline{AB} - \overline{CB} = \overline{AC},\ \overline{CB} = -\overline{BC},\ \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Якщо ж точка A лежить між B та C, то

$$\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC},\ -\overline{BA} + \overline{BC} = \overline{AC},\ \overline{BA} = -\overline{AB},$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

Якщо точки A і B збігаються, то $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{BC} = \overline{AC}$.

Якщо точки B і C збігаються, то $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} = \overline{AC}$.

Якщо ж точки A і C збігаються, то

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BA} = 0 = \overline{AC}.$$

Теорема доведена.

Теорема 1.1.2. *Координата* $\overline{AB}$ *напрямленого відрізка* $\overrightarrow{AB}$*, що задається двома точками* $A(x_1)$ *і* $B(x_2)$ *координатної осі, збігається з різницею* $x_2 - x_1$*, тобто* $\overline{AB} = x_2 - x_1$.

Доведення. За теоремою Шаля $\overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB}$, тобто $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = x_2 - x_1$. Теорема доведена.

Наслідком попередньої теореми є наступне твердження.

Теорема 1.1.3. *Віддаль* d *між точками* $A(x_1)$ *і* $B(x_2)$ *декартової осі координат обчислюється за формулою* $d = |x_2 - x_1|$.

Нехай на одній і тій же осі лежать два напрямлених відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

Означення. *Відношенням* λ *двох невироджених напрямлених відрізків* $\overrightarrow{AB}$ *та* $\overrightarrow{CD}$ *називається число, яке дорівнює відношенню* $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$.

Якщо $\overrightarrow{AB}$ – вироджений напрямлений відрізок, а $\overrightarrow{CD}$ – невироджений, то $\lambda = 0$. Якщо ж напрямлений відрізок $\overrightarrow{CD}$ – вироджений, то відношення λ не визначається.

У частковому випадку, розглядаючи на деякій осі невироджений напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ і точку C цієї ж осі, відмінну від точки B, прийдемо до наступного означення.

Означення. *Відношенням, в якому точка* C *ділить невироджений напрямлений відрізок* $\overrightarrow{AB}$*, називається число* λ*, що дорівнює відношенню величин напрямлених відрізків* $\overrightarrow{AC}$ *та* $\overrightarrow{CB}$*, тобто* $\lambda = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$.

Відношення $\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$ називають також *простим відношенням* точок A, B, C і позначають (ABC).

Із означення випливає, що $\lambda > 0$, якщо точка C лежить між точками A і B, та $\lambda < 0$ в протилежному випадку. Крім того:

якщо точка C збігається з точкою M – серединою відрізка AB, то $\lambda = 1$;

якщо точка C належить променю MA, то $|\lambda| \le 1$;

якщо точка C належить променю MB і не збігається з точкою B, то $|\lambda| \ge 1$.

Зауважимо, що відношення, в якому точка C ділить невироджений напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$, не дорівнює -1.

Число λ не залежить від вибору масштабу на координатній осі.

Теорема 1.1.4. *Якщо на декартовій осі координат задано дві різні точки $A(x_1)$ і $B(x_2)$, а точка $C(x)$ ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ у відношенні λ, то*

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad i \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Доведення. Із означення відношення λ, в якому точка C ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$, та з означення координати напрямленого відрізка на осі маємо: $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$. Отже, $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$. Теорема доведена.

Як наслідок, з попередньої теореми отримаємо відому зі шкільного курсу математики формулу для обчислення координати середини відрізка (при $\lambda = 1$): $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Теорема 1.1.5. *Яке б не було число λ, $\lambda \ne -1$, існує єдина точка C, яка ділить невироджений напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ у відношенні λ.*

Доведення. На прямій AB уведемо декартову систему координат. Вважаючи, що деяка точка $C(x)$ ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ у відношенні λ, за попередньою теоремою маємо: $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, де x_1 і x_2 – координати точок A і B. Цим доведено єдиність точки C, що ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ в даному відношенні λ, тобто доведено, що якщо така точка існує, то вона єдина.

Але точка C із координатою $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$ ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ в даному відношенні λ, бо з останнього співвідношення випливає, що

$x(1+\lambda) = x_1 + \lambda x_2$, $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $\overline{AC} = \lambda \overline{CB}$. Точки C і B – різні, бо $x - x_2 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} - x_2 = \frac{x_1 - x_2}{1+\lambda} \neq 0$. Тому $\overline{CB} \neq 0$, а $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$. Теорема доведена.

Приклади розв'язування задач

1.1.1. *Точка C ділить невироджений напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ у відношенні λ, $\lambda \neq \pm 1$. Точка D ділить цей же відрізок у відношенні –λ. У якому відношенні ділить відрізок $\overrightarrow{AB}$ середина M відрізка CD?*

Розв'язання. На прямій AB уведемо декартову систему координат так: точка *A* – початок системи координат, точка *B* – одинична точка. Тоді точки *C* і *D* мають відповідно координати:

$$x_C = \frac{\lambda}{1+\lambda},\ x_D = \frac{-\lambda}{1-\lambda},$$

а координата середини *M* відрізка CD така:

$$x_M = \frac{x_C + x_D}{2} = -\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}.$$

Оскільки $\overline{AM} = \left(-\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)$ і $\overline{MB} = \left(1 - \left(-\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}\right)\right)$, то шукане відношення:

$$\mu = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{-\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}}{1+\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}} = -\lambda^2 .$$

Зауважимо, що оскільки $\mu < 0$, то точка M лежить поза відрізком AB.

1.1.2. *Відрізок AB чотирма точками розділений на п'ять рівних частин. Визначити координату найближчої до A точки поділу, якщо $A(-3)$, $B(7)$.*

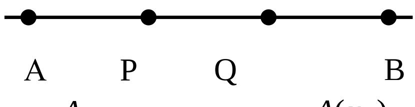
Розв'язання. Нехай $C(x)$ – шукана точка. Тоді $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{1}{4}$. Отже,

$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{-3+\frac{1}{4}\cdot 7}{1+\frac{1}{4}} = \frac{-5}{5} = -1 ,$$

тобто $C(-1)$.

1.1.3. *Визначити координати кінців A і B відрізка, який точками $P(-25)$ і $Q(-9)$ поділено на три рівні частини.*

Розв'язання. Зобразимо дані точки на прямій.



Нехай точка A має координату $A(x_A)$, точка B – (x_B). Очевидно, що $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{1}{2}$, тобто

$$\lambda = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{-25 - x_A}{x_B + 25} = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно, $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QB}} = \frac{2}{1}$, тобто $\frac{-9 - x_A}{x_B + 9} = \frac{2}{1}$.

Отримали систему:

$$\begin{cases} -2(25 + x_A) = x_B + 25, \\ -9 - x_A = 2(x_B + 9); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_A + x_B = -75, \\ x_A + 2x_B = -27; \end{cases}$$

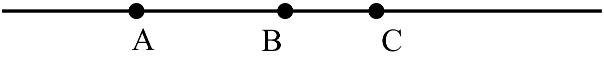
$$\begin{cases} x_A = -41, \\ x_B = 7. \end{cases}$$

Отже, $A(-41)$, $B(7)$.

Зауваження. Оскільки точка P – середина відрізка AQ, то $x_P = \frac{x_A + x_Q}{2}$, $-25 = \frac{x_A - 9}{2}$, $x_A = -41$. Аналогічно, Q – середина відрізка PB, тобто $x_Q = \frac{x_P + x_B}{2}$, $-9 = \frac{-25 + x_B}{2}$, $x_B = 7$.

1.1.4. *Нехай $A(1)$, $B(5)$ – кінці відрізка AB. Поза цим відрізком розміщена точка C, причому відстань від неї до точки A в три рази більша за відстань до точки B. Визначити координати точки C.*

Розв’язання. Зобразимо дані точки на прямій.



Очевидно, $\lambda = -\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = -3$. Отже,

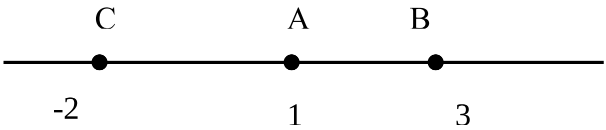
$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{1+(-3)\cdot 5}{1+(-3)} = \frac{-14}{-2} = 7,$$

тобто $C(7)$.

1.1.5. *Знайти всі шість значень простого відношення, складеного із трьох точок* $A(1)$, $B(3)$, $C(-2)$.

Розв'язання. Просте відношення (ABC) трьох точок A, B, C дорівнює $\pm\dfrac{AC}{CB}$, причому перед дробом записуємо знак плюс, якщо точка C лежить між точками A і B, інакше – знак мінус.

Зобразимо дані точки на числовій прямій.



Тоді, очевидно, $(ABC) = -\dfrac{AC}{CB} = -\dfrac{3}{5}$,

$(ACB) = -\dfrac{AB}{BC} = -\dfrac{2}{5}$, $(BCA) = \dfrac{BA}{AC} = \dfrac{2}{3}$,

$(BAC) = -\dfrac{BC}{CA} = -\dfrac{5}{3}$, $(CAB) = -\dfrac{CB}{BA} = -\dfrac{5}{2}$,

$(CBA) = \dfrac{CA}{AB} = \dfrac{3}{2}$.

Зауваження. Якщо відрізок CB – невироджений, то просте відношення (ABC) збігається з відношенням λ, в якому точка C ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$.

Завдання для самостійної роботи

1. На координатній осі побудувати точки $A(3)$, $B(5)$, $C(-1)$, $D\left(\dfrac{2}{3}\right)$, $E\left(-\dfrac{3}{7}\right)$, $F(\sqrt{2})$, $H(-\sqrt{5})$.

2. На координатній осі побудувати точки, координати яких задовольняють рівняння: 1) $|x|=2$; 2) $|x-1|=3$; 3) $|1-x|=2$; 4) $|2+x|=2$.

3. Охарактеризувати геометричне розташування точок координатної осі, координати яких задовольняють нерівності:

1) $x>2$; 2) $1<x<3$; 3) $\dfrac{2-x}{x-1}>0$; 4) $x^2-8x+15\le 0$.

4. Охарактеризувати геометричне розташування точок координатної осі, координати яких задовольняють таким нерівності: 1) $|x|<1$; 2) $|x|>3$; 3) $|x-1|\ge 2$; 4) $|x+5|\le 1$.

5. Визначити величину $\overline{AB}$ і довжину AB відрізка, заданого точками A та B на координатній осі: 1) $A(3)$, $B(11)$;
2) $A(-1)$, $B(3)$; 3) $A(-5)$, $B(-3)$; 4) $A(-7)$, $B(-5)$.

(Відповідь: 1) $\overline{AB}=8$, $AB=8$; 2) $\overline{AB}=4$, $AB=4$; 3) $\overline{AB}=2$, $AB=2$; 4) $\overline{AB}=2$, $AB=2$).

6. На осі координат знайти координату точки A, якщо відомо:
1) $B(3)$, $\overline{AB}=5$; 2) $B(2)$, $\overline{AB}=-3$; 3) $B(0)$, $AB=2$; 4) $B(2)$, $AB=3$.

(Відповідь: 1) -2, 2) 5, 3) -2 і 2, 4) -1 і 5).

7. Визначити відношення $\lambda=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$, в якому точка C ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ у таких випадках: 1) $A(2)$, $B(6)$, $C(4)$; 2) $A(2)$, $B(4)$, $C(7)$; 3) $A(-1)$, $B(5)$, $C(3)$; 4) $A(1)$, $B(13)$, $C(5)$.

(Відповідь: 1) 1; 2) $-\dfrac{5}{3}$; 3) 2; 4) $\dfrac{1}{2}$).

8. Дано три точки координатної осі $A(-7)$, $B(-1)$, $C(1)$. Визначити відношення λ, в якому кожна з них ділить напрямлений відрізок, обмежений двома іншими.

(Відповідь: $\lambda_1=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=3$, $\lambda_2=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{BA}}=\dfrac{1}{3}$, $\lambda_3=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=-4$,

$$\lambda_4 = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = -\frac{1}{4},\ \lambda_5 = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = -\frac{3}{4},\ \lambda_6 = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = -\frac{4}{3}\ ).$$

9. Визначити координату x середини відрізка, обмеженого двома даними точками, в кожному з таких випадків: 1) $A(3)$, $B(5)$; 2) $A(-1)$, $B(5)$; 3) $A(-1)$, $B(-3)$; 4) $A(-5)$, $B(1)$.

(Відповідь: 1) 4; 2) 2; 3) -2; 4) -2).

10. Визначити координату точки M, якщо відомо: 1) $M_1(3)$, $M_2(7)$, $\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = 2$; 2) $M_1(2)$, $M_2(-5)$, $\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = 3$; 3) $M_1(-1)$, $M_2(3)$, $\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \frac{1}{2}$; 4) $M_1(-1)$, $M_2(3)$, $\lambda = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = -2$.

(Відповідь: 1) $\frac{17}{3}$; 2) $-\frac{13}{4}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 7).

11. Дано дві точки $A(5)$ і $B(-3)$. Визначити: 1) координату точки M, симетричну точці A відносно точки B; 2) координату точки N, симетричну точці B відносно точки A.

(Відповідь: 1) $M(-11)$; 2) $N(13)$).

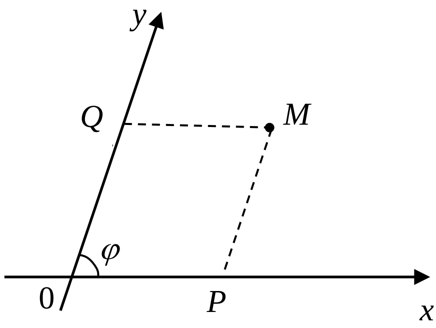
12. Відрізок, обмежений точками $A(-2)$ і $B(19)$, розділений на три рівні частини. Визначити координати точок поділу.

(Відповідь: (5) і (12)).

§1.2. Системи координат на площині та в просторі

Уведемо поняття загальної декартової і декартової прямокутної систем координат на площині.

Означення. *Загальною декартовою (афінною) системою координат на площині називається впорядкована сукупність двох координатних осей, що мають спільний початок* O. *Масштабні відрізки осей можуть бути різними.*



Якщо масштабні відрізки осей рівні, то таку систему координат називають *косокутною*.

Якщо кути між осями $\frac{\pi}{2}$ і масштаб на обох осях однаковий, то таку систему координат називають *прямокутною декартовою системою координат.*

Нехай M – довільна точка площини, P – проекція точки M на вісь Ox паралельно осі Oy, Q – проекція точки M на вісь Oy паралельно осі Ox, x – координата точки P на осі Ox, y – координата точки Q на осі Oy. Числа x, y називаються *загальними декартовими* (або *афінними*) координатами точки M. Те, що точка M має координати x, y, позначаємо так: $M(x; y)$.

За допомогою загальної декартової системи координат на площині встановлюється взаємно однозначна відповідність між множиною всіх точок площини і множиною всіх впорядкованих пар дійсних чисел. Для побудови точки $M(x;y)$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$ будуємо на осі Ox (*осі абсцис*) точку $P(x)$, а на осі Oy (*осі ординат*) – точку $Q(y)$. Точка M тоді є точкою перетину прямих, що проходять через точки P та Q паралельно до осей Oy та Ox.

Зауважимо, що масштабні відрізки осей Ox та Oy в прямокутній декартовій системі координат позначають так: $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$.

Аналогічно до випадку площини визначаємо загальну декартову і декартову прямокутну системи координат у просторі.

Означення. *Загальною декартовою (афінною) системою координат в просторі називається впорядкована сукупність трьох осей координат, які не лежать в одній площині і проходять через одну точку O, що є початком координат на кожній осі.*

Вісь Oz називається віссю *аплікат*. Площини yOz, zOx, xOy називаються *координатними площинами*.

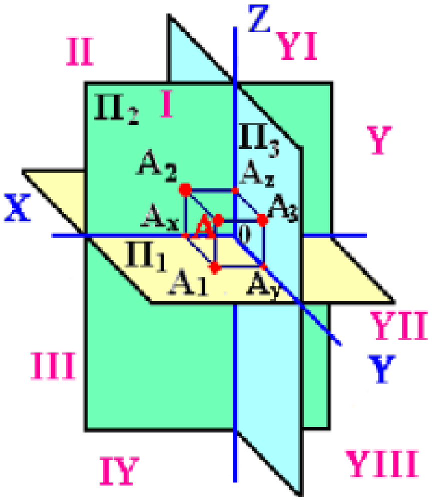
Означення. *Декартовою прямокутною системою координат у просторі називається впорядкована трійка попарно перпендикулярних осей координат зі спільним початком координат O на кожній з них і з однаковим масштабним відрізком для кожної осі.*

Масштабні напрямлені відрізки координатних осей прямокутної декартової системи координат простору позначають так: $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$, $\overrightarrow{OE_3} = \vec{k}$.

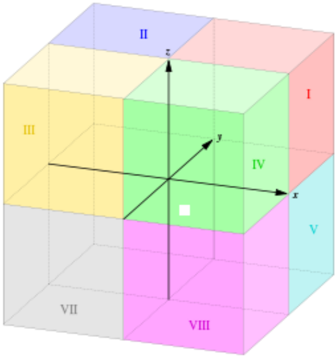
Загальні (афінні) та прямокутні декартові координати x, y, z точки M простору визначаються подібно до координат точок площини, а саме: x – це координата на осі Ox точки перетину цієї осі з площиною, що проходить через точку M

паралельно площині yOz; y – координата на осі Oy точки перетину цієї осі з площиною, що проходить через точку M паралельно площині zOx; z – координата на осі Oz точки перетину цієї вісі з площиною, що проходить через точку M паралельно площині xOy.

За допомогою прямокутної декартової системи координат у просторі утворюється 8 октант. I октант – точки простору, координати x, y, z яких задовольняють умови: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Точки, що розміщуються в II октанті, визначаються умовами: $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$. III октант: $x \geq 0$, $y \leq 0$, $z \leq 0$; IV октант: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \leq 0$; V октант: $x \leq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$; VI октант: $x \leq 0$, $y \leq 0$, $z \geq 0$; VII октант: $x \leq 0$, $y \leq 0$, $z \leq 0$; VIII октант: $x \leq 0$, $y \geq 0$, $z \leq 0$.



Зауваження. Іноді в літературі можна знайти і такий поділ на октанти: перший октант (+, +, +), верхній-задній-правий (−, +, +), верхній-задній-лівий (−, −, +), верхній-передній-лівий (+, −, +), нижній-передній-лівий (+, −, −), нижній-задній-лівий (−, −, −), нижній-задній-правий (−, +, −), нижній-передній-правий (+, +, −).



Теорема 1.2.1. *Якщо відносно загальної декартової системи координат на площині задано дві різні точки* $A(x_1; y_1)$ *і* $B(x_2; y_2)$ *і точка* $C(x; y)$ *ділить напрямлений відрізок* $\overrightarrow{AB}$ *у відношенні* λ*, то* λ *дорівнює тому зі співвідношень* $\frac{x - x_1}{x_2 - x}$ *або* $\frac{y - y_1}{y_2 - y}$*, в якому знаменник відмінний від нуля, і будь-якому з них, якщо обидва знаменники,* $x_2 - x$ *і* $y_2 - y$*, відмінні від нуля.*

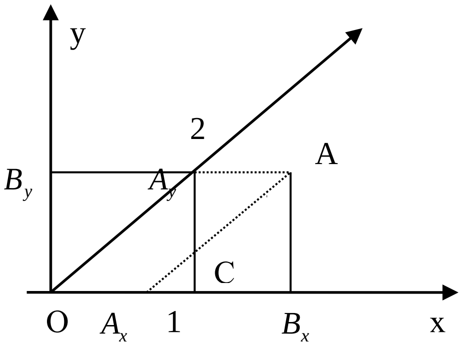
Координати x, y *точки* C *виражаються через координати точок* A *і* B *за допомогою формул*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Приклади розв'язування задач

1.2.1. *Знайти прямокутні декартові координати точки* A*, якщо координати цієї точки в афінній системі координат* $(1;1)$*, осі розмішені під кутом* 60^0*, масштабний відрізок на осі* Ox *– 1 од., на осі* Oy *– 2 од.*

Розв'язання. Зобразимо афінну і прямокутну системи координат так, щоб початки відліку і вісь Ox співпадали. Через точку A проведемо прямі, паралельні осям координат Ox та Oy прямокутної системи координат. Розглянемо паралелограм OA_yAA_x: $OA_x = A_yA = 1$, $OA_y = A_xA = 2$, $\angle A_yOA_x = 60^0$.



Проведемо з вершини A_y пряму, паралельну осі Oy. Ця пряма перетне вісь Ox у деякій точці C. Розглянемо прямокутний трикутник OA_yC:

$$A_yC = AB_x = y = OA_y \sin\angle A_yOC = 2\sin 60^0 = \sqrt{3},$$

$$OC = B_yA_y = OA_y \cos\angle A_yOC = 2\cos 60^0 = 1.$$

Оскільки CA_yAB_x – прямокутник, то $A_yA = CB_x = 1$. Отже,

$$x = OB_x = OC + CB_x = 1 + 1 = 2.$$

Координати точки A в прямокутній декартовій системі координат такі: $2; \sqrt{3}$.

Зауваження. Якщо розглянути афінну систему координат, осі якої розміщені під кутом ω, а координати точки $A(a;b)$, то перейти до прямокутних декартових координат можна за допомогою формул

$$x = b\cos\omega + a,$$
$$y = b\sin\omega,$$

(переконайтесь у цьому самостійно).

1.2.2. *Дано вершини чотирикутника* $A(-2;14)$, $B(4;-2)$, $C(6;-2)$, $D(6;10)$. *Визначити точку перетину його діагоналей.*

Розв'язання. У чотирикутнику діагоналі перетинаються в одній точці, яку позначимо через $O(x;y)$. Точка O розбиває діагональ BD на два відрізки, довжини яких знаходяться в певному відношенні: $\dfrac{\overline{BO}}{\overline{OD}} = \lambda$, тобто

$$\frac{x_O - x_B}{x_D - x_O} = \frac{y_O - y_B}{y_D - y_O} = \lambda .$$

Аналогічно, точка O розбиває діагональ AC на два відрізки такі, що $\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OC}} = \mu$, тобто

$$\frac{x_O - x_A}{x_C - x_O} = \frac{y_O - y_A}{y_C - y_O} = \mu .$$

Отже, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x-4}{6-x} = \dfrac{y+2}{10-y}, \\ \dfrac{x+2}{6-x} = \dfrac{y-14}{-2-y}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-4)(10-y) = (y+2)(6-x), \\ (x+2)(-2-y) = (6-x)(y-14); \end{cases}$$

З першого рівняння знаходимо $y = 6x - 26$, яке підставимо в друге рівняння:

$$(x+2)(24-6x) = (6-x)(6x-40),$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{9}{2}, \\ y = 1. \end{cases}$$

Отже, точка перетину діагоналей даного чотирикутника має координати $O(4{,}5;1)$.

1.2.3. *Задано вершини трикутника $A(-5;-1;6)$, $B(8;1;-9)$. Знайти вершину C, якщо середина сторони AC лежить на осі Oy, а середина BC – на площині xOz.*

Розв'язання. Нехай x, y, z – координати вершини C. Оскільки середина сторони AC лежить на осі Oy, то її абсциса і апліката дорівнюють 0. Звідси, внаслідок формул

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$$

при $\lambda = 1$, маємо:

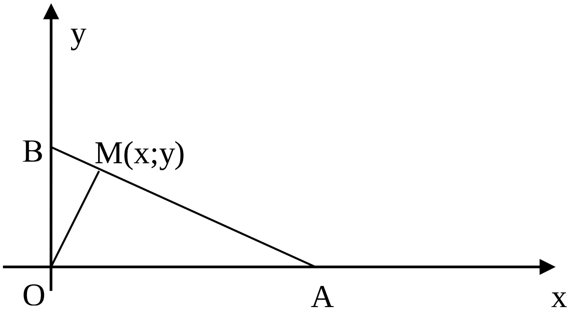
$$0 = \frac{x-5}{2}, \quad 0 = \frac{z+6}{2}.$$

Отже, $x = 5$, $z = -6$. Оскільки середина сторони BC лежить на площині xOz, то її ордината дорівнює нулю: $0 = \dfrac{1+y}{2}$. Звідси $y = -1$. Таким чином, точка $(5;-1;-6)$ – шукана.

1.2.4. *На осях Ox та Oy відкладено відповідно відрізки $OA = 8$, $OB = 4$. Знайти відношення, в якому відрізок AB ділиться основою перпендикуляра, опущеного на пряму AB із початку координат і координати точки, що є основою перпендикуляра. Система координат прямокутна.*

Розв'язання. Побудуємо прямокутну декартову систему координат і відкладемо відрізки $OA = 8$, $OB = 4$. Розглянемо прямокутний трикутник AOB, в якому проведемо висоту OM. Нехай точка M має координати x, y. За теоремою Піфагора,

$$AB = \sqrt{OB^2 + OA^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$



Оскільки OM – висота, проведена з прямого кута, то

$$OB = \sqrt{BM \cdot AB}, \ BM = \frac{OB^2}{AB} = \frac{16}{4\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$OA = \sqrt{AM \cdot AB}, \ AM = \frac{OA^2}{AB} = \frac{64}{4\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}.$$

Отже, точка M ділить гіпотенузу AB у відношенні $\lambda = \dfrac{AM}{MB} = 4$.

Точки A і B мають відповідно координати $A(8;0)$, $B(0;4)$, точка M ділить відрізок AB у відношенні $\lambda = 4$. Координати точки M знаходимо із формул

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{8 + 4 \cdot 0}{1+4} = \frac{8}{5},$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{0 + 4 \cdot 4}{1+4} = \frac{16}{5}.$$

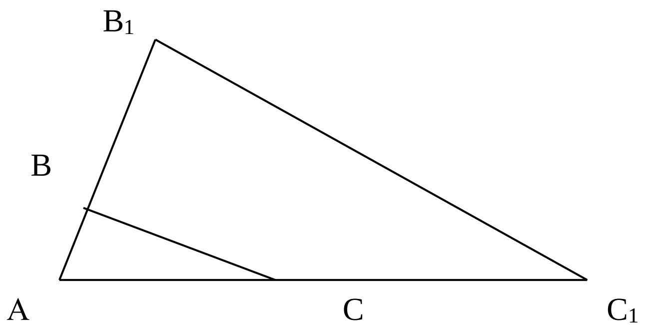
Отже, $M\left(\dfrac{8}{5}; \dfrac{16}{5}\right)$.

1.2.5. *Два подібних трикутники мають спільний кут із вершиною в точці* $A(3;-6)$. *Знайти дві інші вершини більшого* *трикутника, якщо відомі вершини меншого* $B(6{,}2;-3{,}6)$, $C(5;1)$*, а відношення відповідних сторін* $\frac{5}{2}$.

Розв’язання. Нехай AB_1C_1 – трикутник, подібний до трикутника ABC, $\frac{AB_1}{AB}=\frac{5}{2}$ (див. рис.).

Отже, $AB_1=\frac{5}{2}AB$, $BB_1=\frac{3}{2}AB$, тобто точка B ділить відрізок AB_1 у відношенні $\frac{2}{3}$. Координати точки B_1 знаходимо із формул

$$x_B=\frac{x_A+\lambda x_{B_1}}{1+\lambda},\ y_B=\frac{y_A+\lambda y_{B_1}}{1+\lambda}.$$



Тоді

$$6{,}2=\frac{3+\frac{2}{3}x_{B_1}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{9+2x_{B_1}}{5},\ x_{B_1}=-11,$$

$$-3{,}6=\frac{-6+\frac{2}{3}y_{B_1}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-18+2y_{B_1}}{5},\ y_{B_1}=0,$$

тобто $B_1(-11;0)$. Аналогічно знаходимо координати точки C_1:

$$x_C=\frac{x_A+\lambda x_{C_1}}{1+\lambda},\ y_C=\frac{y_A+\lambda y_{C_1}}{1+\lambda},$$

$$5=\frac{3+\frac{2}{3}x_{C_1}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{9+2x_{C_1}}{5},\ x_{C_1}=8,$$

$$1=\frac{-6+\frac{2}{3}y_{C_1}}{1+\frac{2}{3}}=\frac{-18+2y_{C_1}}{5},\ y_{C_1}=11{,}5.$$

Отже, $B_1(-11;0)$, $C_1(8;11{,}5)$.

Завдання для самостійної роботи

У завданнях 1–38, наведених нижче, система координат– прямокутна.

1. Побудувати точки $A(2;3)$, $B(-5;1)$, $C(-2;-3)$, $D(0;3)$, $E(-5;0)$, $F(-\frac{1}{3};\frac{2}{3})$.

2. Знайти координати проекцій на вісь абсцис точок $A(2;-3)$, $B(3;-1)$, $C(-5;1)$, $D(-3;-2)$, $E(-5;-1)$.

(Відповідь: $A_x(2;0)$, $B_x(3;0)$, $C_x(-5;0)$, $D_x(-3;0)$, $E_x(-5;0)$).

3. Знайти координати проекцій на вісь ординат точок $A(-3;2)$, $B(-5;1)$, $C(3;-2)$, $D(-1;1)$, $E(-6;-2)$.

(Відповідь: $A_y(0;2)$, $B_y(0;1)$, $C_y(0;-2)$, $D_y(0;1)$, $E_y(0;-2)$).

4. Знайти координати точок, які симетричні точкам $A(2;3)$, $B(-3;2)$, $C(-1;-1)$, $D(-3;-5)$, $E(-4;6)$ відносно: 1) осі Ox; 2) осі Oy; 3) початку координат; 4) бісектриси першого координатного кута; 5) бісектриси другого координатного кута.

(Відповідь: 1) $A(2;-3)$, $B(-3;-2)$, $C(-1;1)$, $D(-3;5)$, $E(-4;6)$; 2) $A(-2;3)$, $B(3;2)$, $C(1;-1)$, $D(3;-5)$, $E(4;6)$;
3) $A(-2;-3)$, $B(3;-2)$, $C(1;1)$, $D(3;5)$, $E(4;-6)$;
4) $A(3;2)$, $B(2;-3)$, $C(-1;-1)$, $D(-5;-3)$, $E(6;-4)$;
5) $A(-3;-2)$, $B(-2;3)$, $C(1;1)$, $D(5;3)$, $E(-6;4)$).

5. Визначити, в яких чвертях може бути розміщена точка $M(x;y)$, якщо: 1) $xy > 0$, 2) $x - y = 0$, 3) $x + y < 0$.

6. Побудувати наступні точки за їх декартовими координатами: $A(3;4;6)$, $B(-5;3;1)$, $C(1;-3;-5)$, $D(0;-3;5)$, $E(-3;-5;0)$, $F(-1;-5;-3)$.

7. Знайти координати проекцій точок $A(4;3;5)$, $B(-3;2;1)$, $C(2;-3;0)$ і $D(0;0;-3)$: 1) на площину xOy; 2) на площину xOz; 3) на площину yOz; 4) на вісь абсцис; 5) на вісь ординат; 6) на вісь аплікат.

(Відповідь: 1) $(4;3;0)$, $(-3;2;0)$, точка C лежить на площині xOy, відповідно, її проекція на цю площину збігається з нею, $(0;0;0)$; 2) $(4;0;5)$, $(-3;0;1)$, $(2;0;0)$, точка D лежить на площині xOz, отже, її проекція на цю площину збігається з нею; 3) $(0;3;5)$, $(0;2;1)$, $(0;-3;0)$, точка D лежить на площині yOz, отже, її проекція на цю площину збігається з нею; 4) $(4;0;0)$, $(-3;0;0)$, $(2;0;0)$, $(0;0;0)$; 5) $(0;3;0)$, $(0;2;0)$, $(0;-3;0)$, $(0;0;0)$; 6) $(0;0;5)$, $(0;0;1)$, $(0;0;0)$, точка D лежить на осі аплікат, отже, її проекція на цю вісь збігається з нею).

8. Знайти координати точок, симетричних точкам $A(2;3;1)$, $B(5;-3;2)$, $C(-3;2;-1)$ і $D(a;b;c)$ відносно: 1) площини xOy; 2) площини xOz; 3) площини yOz; 4) осі абсцис; 5) осі ординат, 6) осі аплікат; 7) початку координат.

(Відповідь: 1) $(2;3;-1)$, $(5;-3;-2)$, $(-3;2;1)$, $(a;b;-c)$; 2) $(2;-3;1)$, $(5;3;2)$, $(-3;-2;-1)$, $(a;-b;c)$; 3) $(-2;3;1)$, $(-5;-3;2)$, $(3;-2;1)$, $(-a;b;c)$; 4) $(2;-3;-1)$, $(5;3;-2)$, $(-3;-2;1)$, $(a;-b;-c)$; 5) $(-2;3;-1)$, $(-5;-3;-2)$, $(3;2;1)$, $(-a;b;-c)$; 6) $(-2;-3;1)$, $(-5;3;2)$, $(3;-2;-1)$, $(-a;-b;c)$; 7) $(-2;-3;-1)$, $(-5;3;-2)$, $(3;-2;1)$, $(-a;-b;-c)$).

9. Дано чотири вершини куба $A(-a;-a;-a)$, $B(a;-a;-a)$, $C(-a;a;-a)$ і $D(a;a;a)$. Визначити координати решти його вершин.

(Відповідь: $(a;a;-a)$, $(a;-a;a)$, $(-a;a;a)$, $(-a;-a;a)$).

10. У яких октантах можуть бути розташовані точки, декартові координати яких задовольняють такі умови: 1) $x-y=0$;
2) $x+y=0$; 3) $x-z=0$; 4) $x+z=0$; 5) $y-z=0$;
6) $y+z=0$.

(Відповідь: 1) у I, III, V і VII; 2) у II, IV, VI і VIII; 3) у I, IV, VI і VII; 4) у II, III, V і VIII; 5) у I, II, VII і VIII, 6) у III, IV, V і VI).

11. Побудувати точки: 1) у системі координат xOy $B_1(2;1)$, $B_2(1;-3)$, $B_3(0;-2)$; 3) у системі координат $Oxyz$ $C_1(2;3;3)$, $C_2(1;-2;3)$, $C_3(-1;2;0)$.

12. Для точки $M(2;3)$ побудувати точки, симетричні їй відносно осей Ox та Oy і відносно початку координат. Визначити координати цих точок.

(Відповідь: $(2;-3)$, $(-2;3)$, $(-2;-3)$).

13. Знайти координати точок, симетричних відносно бісектриси першого координатного кута для точок $A(3;4)$, $B(2;-5)$, $C(-3;4)$.

(Відповідь: $(4;3)$, $(-5;2)$, $(4;-3)$).

14. Сторона квадрата дорівнює 1. Визначити координати його вершин, прийнявши за осі координат дві його діагоналі.

(Відповідь: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).

15. Дано кінці $A(3;-5)$ і $B(-1;1)$ однорідного стержня. Обчислити координати його центра ваги (Нагадаємо, що центром ваги однорідного прямолінійного стержня є його середина).

(Відповідь: $(1;-2)$).

16. Центр ваги однорідного стержня знаходиться в точці $M(1;4)$, один із його кінців – у точці $P(-2;2)$. Визначити координати точки Q – іншого кінця цього стержня.

(Відповідь: $Q(4;6)$).

17. Дано вершини трикутника $A(-1;-3)$, $B(3;-5)$ і $C(-5;7)$. Визначити координати середин його сторін.

(Відповідь: координати середин сторін AB, BC, AC відповідно такі: $(2;-4)$, $(-1;1)$, $(-2;2)$).

18. Дано точки $A(3;-1)$ і $B(2;1)$. Визначити: 1) координати точки M, симетричній точці A відносно точки B; 2) координати точки N, симетричній точці B відносно точки A.

(Відповідь: 1) $M(1;3)$; 2) $N(4;-3)$).

19. Дано вершини трикутника $A(3;-7)$, $B(5;2)$ і $C(-1;0)$. Знайти координати середин його сторін.

(Відповідь: $(4;-2{,}5)$, $(2;1)$, $(1;-3{,}5)$).

20. Дано дві точки $A(2;-1)$, $B(1;1)$. Знайти координати точки N, що симетрична точці B відносно точки A.

(Відповідь: $N(3;-3)$).

21. Знайти координати вершин трикутника, знаючи середини його сторін $M(1;-1)$, $N(-2;4)$ і $P(-3;2)$.

(Відповідь: $(0;-3)$, $(2;1)$, $(-6;7)$).

22. Знайти координати вершин трикутника, якщо середини його сторін $P(3;-2)$, $Q(1;6)$ і $R(-4;2)$.

(Відповідь: $(-2;-6)$, $(8;2)$, $(-6;10)$).

23. Дано три послідовні вершини паралелограма $A(4;-4)$, $B(6;-2)$, $C(0;4)$. Визначити координату четвертої вершини D, яка протилежна до B.

(Відповідь: $D(-2;2)$).

24. Дано три вершини паралелограма: $A(3;1)$, $B(4;6)$ і $C(-4;3)$. Визначити координати четвертої вершини D, яка протилежна до B.

(Відповідь: $(-5;-2)$).

25. Дано координати двох суміжних вершин паралелограма $A(-4,5;-7)$ і $B(2;6)$ і точку перетину діагоналей $M(3;1,5)$. Знайти координати двох інших його вершин.

(Відповідь: $C(10,5;10)$, $D(4;-3)$).

26. Дано координати двох суміжних вершин паралелограма $A(-2;5)$ і $B(2;7)$ і точку перетину діагоналей $M(2;1)$. Знайти координати двох інших його вершин.

(Відповідь: $(6;-3)$, $(2;-5)$).

27. Відрізок, обмежений точками $A(2;-2)$, $B(5;4)$, поділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

(Відповідь: $(3;0)$, $(4;2)$).

28. Дано вершини трикутника $A(3;-4)$, $B(2;-1)$, $C(5;8)$. Знайти координати точки перетину бісектриси внутрішнього кута B зі стороною AC.

(Відповідь: $(3,5;-1)$).

29. Дано три точки $A(2;-1)$, $B(4;3)$, $C(5;5)$, що лежать на одній прямій. Визначити відношення λ, в якому кожна з них ділить відрізок, обмежений двома іншими.

(Відповідь: $\lambda_1 = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{\overline{BC}}} = 2$, $\lambda_2 = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{\overline{CB}}} = -3$,

$\lambda_3 = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}} = -\frac{2}{3}$).

30. Визначити координати кінців A і B відрізка, який точками $P(2;2)$ і $Q(1;5)$ поділено на три рівні частини.

(Відповідь: $A(3;-1)$, $B(0;8)$).

31. Знайти координати точки перетину діагоналей AC і BD чотирикутника з вершинами $A(2;-2)$, $B(2;5)$, $C(-1;4)$, $D(-2;-1)$.

(Відповідь: $M(0;2)$).

32. Дано вершини $A(3;2;-5)$, $B(1;-4;3)$, $C(-3;0;1)$ трикутника. Знайти координати точок, що є серединами його сторін.

(Відповідь: $(2;-1;-1)$, $(-1;-2;2)$, $(0;1;-2)$).

33. Дано дві вершини $A(2;-3;-5)$, $B(-1;3;2)$ паралелограма $ABCD$ і точка перетину його діагоналей $E(4;-1;7)$. Обчислити координати двох інших вершин цього паралелограма.

(Відповідь: $C(6;1;19)$ і $D(9;-5;12)$).

34. Дано три вершини $A(3;-4;7)$, $B(-5;3;-2)$ і $C(1;2;-3)$ паралелограма $ABCD$. Знайти координати четвертої вершини D, протилежної B.

(Відповідь: $D(9;-5;6)$).

35. Дано три вершини $A(3;-1;2)$, $B(1;2;-4)$ і $C(-1;1;2)$ паралелограма $ABCD$. Знайти координати четвертої вершини D.

(Відповідь: четверта вершина паралелограма може збігатися з однією з точок $D_1(-3;4;-4)$, $D_2(1;-2;8)$, $D_3(5;0;-4)$).

36. Відрізок прямої, обмежений точками $A(-1;8;3)$ і $B(9;-7;-2)$, розділений точками C, D, E, F на п’ять рівних частин. Знайти координати цих точок.

(Відповідь: $C(1;5;2)$, $D(3;2;1)$, $E(5;-1;0)$, $F(7;-4;-1)$).

37. Визначити координати відрізка, який точками $C(2;0;2)$ і $D(5;-2;0)$ розділено на три рівні частини.

(Відповідь: $A(-1;2;4)$, $B(8;-4;-2)$).

38. Побудувати трикутник, вершини якого дано своїми координатами $(3;5)$, $(-4;7)$, $(5{,}5;-3{,}5)$ відносно косокутної системи координат із кутом $\omega = \frac{\pi}{4}$.

39. Відносно косокутної системи координат із координатним кутом $\omega = \frac{5\pi}{6}$ дана точка $M(6;4)$. Визначити відстань від цієї точки до осей координат.

(Відповідь: $d_1 = 2$, $d_2 = 3$).

40. Визначити координати точки M, якщо відстань від осей координат до неї відповідно 1 і $1{,}5$ одиниць, координатний кут $\omega = \frac{\pi}{6}$.

(Відповідь: можливі 4 розв’язки даної задачі – $M_1(3;2)$, $M_2(-3;2)$, $M_3(-3;-2)$, $M_4(3;-2)$).

41. Точки $M(-3;-5)$ і $N(x;y)$ симетричні відносно осі Ox. Знайти координати точки N за умови, що координатний кут $\omega = \frac{\pi}{3}$.

(Відповідь: $x = -8$, $y = 5$).

42. Визначити координати вершин правильного шестикутника, сторона якого $a = 1$, якщо за осі координат прийняти такі суміжні його сторони, що вершина, яка протилежна початку координат, має додатні координати.

(Відповідь: $(0;0)$, $(1;0)$, $(2;1)$, $(2;2)$, $(1;2)$, $(0;1)$).

43. Під яким кутом до осі Ox нахилено відрізок, який сполучає точки $P(-1;4)$ і $Q(2;7)$ (координатний кут $\omega = \frac{\pi}{3}$)?

(Відповідь: $\varphi = 30^0$).

44. Відомо, що пряма, яка проходить через дві точки $A(4;1)$ і $B(-2;y)$, утворює рівні кути з обома осями координат. Обчислити невідому ординату точки B. Система координат – довільна.

(Відповідь: $y=-5$).

45. На відстані $3{,}5$ одиниць від точки $A(5;2)$ знайти таку точку M, щоб пряма OM, яка сполучає її з початком координат, була нахилена до осі Ox під кутом $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ (координатний кут $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$).

(Відповідь: $M_1(1;0{,}5)$, $M_2(9;4{,}5)$).

46. Дано коло з центром у точці $C(-7;4)$ і радіусом $R=6$. Знайти кінці тих діаметрів, які паралельні бісектрисам координатного кута (координатний кут $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$).

(Відповідь: $M_1(-1;10)$, $M_2(-13;-2)$, $M_3(-7+2\sqrt{3};4-2\sqrt{3})$, $M_4(-7-2\sqrt{3};4+2\sqrt{3})$).

§1.3. Задача про віддаль між двома точками

Теорема 1.3.1. *Віддаль* d *між двома точками* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ *і* $M_2(x_2;y_2;z_2)$, *заданими відносно декартової прямокутної системи координат у просторі, дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць відповідних координат цих точок, тобто*

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

Доведення цієї теореми пропонуємо читачеві провести самостійно.

Віддаль між двома точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$, заданими своїми координатами відносно прямокутної системи координат на площині обчислюється за формулою:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ .$$

У косокутній системі координат віддаль між двома точками $A(x_1;y_1)$ і $B(x_2;y_2)$ обчислюється за формулою

$$AB=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}\,,$$

де ω – координатний кут.

Приклади розв'язування задач

1.3.1. *Трикутник* ABC *задано вершинами* $A(3;12)$, $B(6;8)$, $C(-3;4)$. *Знайти довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині* A.

Розв'язання. Розглянемо трикутник ABC, AD – бісектриса кута A. Згідно з властивістю бісектриси внутрішнього кута трикутника, маємо

$$\frac{DB}{AB}=\frac{CD}{AC}=\lambda \text{ або } \frac{AC}{AB}=\frac{CD}{DB}=\lambda\,,$$

де точкою D позначено перетин бісектриси кута A зі стороною BC. Очевидно, що

$$AC=\sqrt{(3+3)^2+(12-4)^2}=10,$$

$$AB=\sqrt{(3-6)^2+(12-8)^2}=5\,.$$

Отже, $\lambda = 2$, а

$$x_D = \frac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{-3 + 2\cdot 6}{1+2} = 3,$$

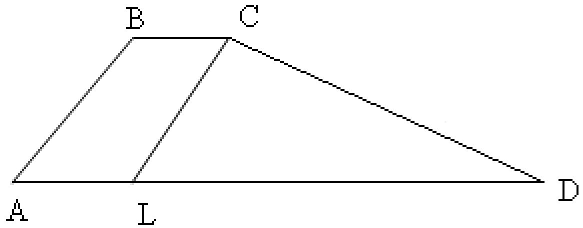
$$y_D = \frac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{4 + 2\cdot 8}{1+2} = \frac{20}{3},$$

тобто знайдена точка $D\left(3; \frac{20}{3}\right)$. Тоді

$$AD = \sqrt{(3-3)^2 + \left(12 - \frac{20}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{256}{9}} = \frac{16}{3}.$$

1.3.2. *Дано три послідовні вершини трапеції* $A(-2;-3)$, $B(1;4)$, $C(3;1)$. *Знайти четверту її вершину* D *за умови, що основа* AD *в п'ять разів більша від основи* BC.

Розв'язання. За умовою задачі, $AD = 5BC$.



Знайдемо довжину сторони BC:

$$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13},$$

Тоді $AD = 5\sqrt{13}$. Проведемо пряму CL паралельно стороні AB. Отже, $AL = BC$ і точка L ділить сторону AD у відношенні $1:4$. Обчислимо довжину сторони AB:

$$AB = \sqrt{(1+2)^2 + (4+3)^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}.$$

Нехай $(x; y)$ координати точки L. Тоді

$$AL = \sqrt{(x+2)^2 + (y+3)^2}, \; LC = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2}.$$

З іншого боку, $AL = BC = \sqrt{13}$, $LC = AB = \sqrt{58}$. Отримали систему:

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y+3)^2 = 13, \\ (x-3)^2 + (y-1)^2 = 58; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 + 6y = 0, \\ x^2 - 6x + y^2 - 2y = 48; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 4y = -24, \\ x^2 + 4x + y^2 + 6y = 0; \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + \frac{(24+5x)^2}{16} - 6 \cdot \frac{24+5x}{4} = 0,$$

$$41x^2 + 164x = 0.$$

З останнього рівняння випливає, що $x = 0$. Тоді $y = -6$, а точка $L(0;-6)$.

Точка L ділить відрізок AD у відношенні $\frac{1}{4}$. Тому

$$x_L = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda}, \; y_L = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda},$$

$$0 = \frac{-2 + \frac{1}{4}x_D}{1+\frac{1}{4}}, \; -6 = \frac{-3 + \frac{1}{4}y_D}{1+\frac{1}{4}},$$

$$x_D = 8, \; y_D = -18.$$

Отже, точка $D(8;-18)$.

Зауваження. Точку L можна знайти іншим шляхом. Оскільки $ABCL$ – паралелограм, то точка O – точка перетину діагоналей, ділить кожну з діагоналей навпіл. Тому середина діагоналі AC має координати

$$x_O = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}, \; y_O = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

Отже, точка $O\left(\frac{1}{2};-1\right)$. Ця ж точка O – середина діагоналі BL, тобто

$$x_O = \frac{x_B + x_L}{2},\ y_O = \frac{y_B + y_L}{2},$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 + x_L}{2},\ -1 = \frac{4 + y_L}{2}.$$

Отже, $x_L = 0$, $y_L = -6$, тобто точка $L(0;-6)$.

1.3.3. *Знаючи вершини трикутника* $P(-2;1)$, $Q(4;8)$, $R(10;6)$, *перевірити, чи є серед внутрішніх кутів трикутника тупий кут і знайти його градусну міру.*

Розв'язання. Знайдемо довжини сторін даного трикутника

$$PR = \sqrt{(10+2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{144+25} = 13,$$

$$PQ = \sqrt{(4+2)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{36+49} = 9,$$

$$QR = \sqrt{(10-4)^2 + (6-8)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}.$$

Оскільки $PR^2 = 169 > PQ^2 + QR^2 = 81 + 40$, то кут Q – тупий. Знайдемо градусну міру даного кута. За теоремою косинусів маємо:

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2PQ \cdot QR \cdot \cos Q,$$

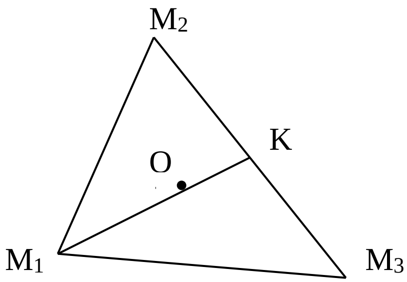
$$169 = 81 + 40 - 2 \cdot 9 \cdot \sqrt{40} \cdot \cos Q,$$

$$\cos Q = -\frac{4}{3\sqrt{10}}.$$

Отже, $Q = \pi - \arccos\frac{2\sqrt{10}}{15}$.

1.3.4. *Знайти рівняння кола, описаного навколо трикутника з вершинами у точках* $M_1(0;0)$, $M_2(10;0)$, $M_3(6;8)$.

Розв'язання. Зробимо рисунок.



Обчислимо довжини сторін трикутника $M_1M_2M_3$:

$$M_1M_3 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{100} = 10,$$

$$M_2M_3 = \sqrt{(10-6)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5},$$

$$M_1M_2 = \sqrt{(10-0)^2 + (0-0)^2} = 10.$$

Отже, трикутник $M_1M_2M_3$ – рівнобедрений ($M_1M_3 = M_1M_2$). Знайдемо довжину висоти, проведеної до основи M_2M_3 – M_1K, яка є медіаною і бісектрисою. Координати точки K знайдемо за допомогою формул

$$x_K = \frac{x_{M_3} + x_{M_2}}{2} = \frac{6+10}{2} = 8,$$

$$y_K = \frac{y_{M_3} + y_{M_2}}{2} = \frac{8+0}{2} = 4.$$

Отже, $K(8;4)$.

Розглянемо прямокутний трикутник M_1M_3K. Оскільки K – середина відрізка M_2M_3, то $M_3K = \frac{1}{2}M_3M_2 = 2\sqrt{5}$. За теоремою Піфагора,

$$M_1K = \sqrt{M_1M_3{}^2 - M_3K^2} = \sqrt{100-20} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

Тоді радіус описаного кола навколо трикутника $M_1M_2M_3$ обчислюється за формулою

$$R = \frac{M_1M_2 \cdot M_1M_3 \cdot M_2M_3}{4S}.$$

Знайдемо площу трикутника $M_1M_2M_3$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot M_1K \cdot M_2M_3 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{80} = 40 \text{ кв. од.}$$

Отже,

$$R = \frac{10 \cdot 10 \cdot 4\sqrt{5}}{4 \cdot 40} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

Знайдемо координати точки O – центру описаного кола. Оскільки $M_1O = R = \frac{5\sqrt{5}}{2}$, $M_1K = 4\sqrt{5}$, то $OK = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. Отже, точка O ділить відрізок M_1K у відношенні $\frac{5}{3}$. Тоді

$$x_O = \frac{x_{M_1} + \lambda x_K}{1+\lambda} = \frac{0 + \frac{5}{3} \cdot 8}{1 + \frac{5}{3}} = \frac{40}{8} = 5,$$

$$y_O = \frac{y_{M_1} + \lambda y_K}{1+\lambda} = \frac{0 + \frac{5}{3} \cdot 4}{1 + \frac{5}{3}} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}.$$

Отже, $O\left(5; \frac{5}{2}\right)$. Рівняння кола, центр якого знаходиться в точці $O(a,b)$ радіусом R, має вигляд

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$$

тобто

$$(x-5)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{4},$$

$$x^2 + y^2 = 10x + 5y .$$

1.3.5. *Перевірити, чи точки* $A(-3;8)$, $B(1;5)$, $C(4;1)$ *можуть бути трьома вершинами ромба. Обчислити площу цього ромба.*

Розв'язання. Оскільки ромб – це паралелограм, в якого всі сторони рівні, то покажемо, що $AB = BC$:

$$AB = \sqrt{(1+3)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{16+9} = 5,$$

$$BC = \sqrt{(4-1)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9+16} = 5 .$$

Отже, точки $A(-3;8)$, $B(1;5)$, $C(4;1)$ можуть бути вершинами ромба або дельтоїда (дельтоїд – це чотирикутник, у якому дві пари суміжних сторін мають рівні довжини).

Знайдемо площу даного ромба. Для цього використаємо формулу $S = \frac{1}{2} d_1 d_2$, де d_1, d_2 – довжини діагоналей ромба. Маємо, що

$$AC = \sqrt{(4+3)^2 + (1-8)^2} = \sqrt{49+49} = 7\sqrt{2} .$$

Знайдемо середину діагоналі AC – точку O:

$$x_O = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_O = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{8+1}{2} = \frac{9}{2}.$$

Точка $O\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$ є серединою іншої діагоналі BD, тобто

$$x_O = \frac{x_B + x_D}{2}, \; y_O = \frac{y_B + y_D}{2},$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 + x_D}{2}, \; \frac{9}{2} = \frac{5 + y_D}{2} .$$

Отже, точка D має координати $D(0;4)$. Знайдемо довжину діагоналі BD: $BD = \sqrt{(0-1)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Площа ромба дорівнює

$$S = \frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 7 \text{ кв. од.}$$

Зауваження. Площу ромба можна знайти інакше. Ромб складається з двох рівних трикутників, тому досить знайти площу одного трикутника:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{mod} \begin{vmatrix} -3 & 8 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3{,}5 \text{ кв. од.},$$

$$S_{ромба} = 2S_{\Delta ABC} = 7 \text{ кв. од.}$$

1.3.6. *Відносно косокутної системи координат із кутом* $\omega = \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ *дано дві вершини правильного трикутника* $A(2;-2)$ *і* $B(7;1)$. *Знайти координати третьої вершини.*

Розв'язання. Нехай шукана третя вершина C має координати x, y. Оскільки трикутник правильний, то $AB = BC = AC$. Знайдемо довжину сторони AB за формулою:

$$AB = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\cos\omega}$$

$$AB = \sqrt{(7-2)^2 + (1+2)^2 + 2(7-2)(1+2)\cos(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right))} =$$

$$= \sqrt{25 + 9 + 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} = 4.$$

Знайдемо довжини сторін AC і BC:

$$AC = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2 + 2(x-2)(y+2) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{32}{5}x + y^2 + \frac{32}{5}y - \frac{6}{5}xy + \frac{64}{5}} = 4,$$

$$BC = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2 + 2(x-7)(y-1) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)} =$$

$$= \sqrt{x^2 - \frac{64}{5}x + y^2 + \frac{32}{5}y - \frac{6}{5}xy + \frac{208}{5}} = 4 .$$

Отримали таку систему:

$$\begin{cases} x^2 - \frac{32}{5}x + y^2 + \frac{32}{5}y - \frac{6}{5}xy = \frac{16}{5}, \\ x^2 - \frac{64}{5}x + y^2 + \frac{32}{5}y - \frac{6}{5}xy = -\frac{128}{5}. \end{cases}$$

Якщо від першого рівняння системи відняти друге рівняння, то матимемо:

$$\frac{32}{5}x = \frac{144}{5} \text{ або } x = \frac{9}{2} .$$

Підставивши знайдене значення x у перше рівняння, отримаємо:

$$\frac{81}{4} - \frac{32}{5} \cdot \frac{9}{2} + y^2 + \frac{32}{5}y - \frac{6}{5} \cdot \frac{9}{2}y = \frac{16}{5} ,$$

$$y^2 + y - \frac{47}{4} = 0 ,$$

$$D = 1 + 47 = 48 = 16 \cdot 3 ,$$

$$y_1 = \frac{-1 - 4\sqrt{3}}{2} , \; y_2 = \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2} .$$

Отже, $C_1\left(\frac{9}{2}; -\frac{1 + 4\sqrt{3}}{2}\right)$ або $C_2\left(\frac{9}{2}; \frac{-1 + 4\sqrt{3}}{2}\right)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Дано точки $A(1;-2;-3)$, $B(2;-3;0)$, $C(3;1;-9)$, $D(-1;1;-12)$. Обчислити відстань між: 1) A і C; 2) B і D; 3) C і D.

(Відповідь: 1) 7; 2) 13; 3) 5).

2. Обчислити відстань від початку координат O до точок $A(4;-2;-4)$, $B(-4;12;6)$, $C(12;-4;3)$, $D(12;16;-15)$.

(Відповідь: $OA = 6$, $OB = 14$, $OC = 13$, $OD = 25$).

3. Довести, що трикутник із вершинами $A(3;-1;2)$, $B(0;-4;2)$, $C(-3;2;1)$ рівнобедрений.

4. Довести, що трикутник із вершинами $A(3;-1;6)$, $B(-1;7;-2)$, $C(1;-3;2)$ прямокутний.

5. Визначити, чи є серед внутрішніх кутів трикутника з вершинами $A(1;1)$, $B(0;2)$, $C(2;-1)$ тупий кут.

(Відповідь: $\angle BAC$ тупий).

6. Довести, що всі внутрішні кути трикутника з вершинами $M(-1;3)$, $N(1;2)$ і $P(0;4)$ гострі.

7. Вершини трикутника $A(5;0)$, $B(0;1)$ і $C(3;3)$. Обчислити його внутрішні кути.

(Відповідь: $\angle ACB = 90^0$, $\angle BAC = \angle ABC = 45^0$).

8. Вершини трикутника $A(-\sqrt{3};1)$, $B(0;2)$ і $C(-2\sqrt{3};2)$. Обчислити його внутрішній кут при вершині A.

(Відповідь: 60^0).

9. Визначити, чи є тупий кут серед внутрішніх кутів трикутника з вершинами $A(4;-1;4)$, $B(0;7;-4)$, $C(3;1;-2)$.

(Відповідь: $\angle ACB$ тупий).

10. Довести, що внутрішні кути трикутника з вершинами $A(3;-2;5)$, $B(-2;1;-3)$, $C(5;1;-1)$ гострі.

11. На осі абсцис знайти точку, відстань від якої до точки $A(-3;4;8)$ дорівнює 12.

(Відповідь: $(5;0;0)$ і $(-11;0;0)$).

12. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1;-3;7)$ і $B(5;7;-5)$.

(Відповідь: $(0;2;0)$).

13. Дано вершини трикутника $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ і $C(-4;7;5)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

(Відповідь: $\dfrac{2\sqrt{74}}{3}$).

14. Знайти довжину бісектриси внутрішнього кута A трикутника ABC, заданого вершинами $A(4;-5)$, $B(-2;3)$, $C(0;-2)$.

(Відповідь: $\frac{14}{3}\sqrt{2}$).

15. Дано вершини трикутника $A(1;-1;-3)$, $B(2;1;-2)$ і $C(-5;2;-6)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

(Відповідь: $\frac{3\sqrt{10}}{4}$).

16. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(3;-7)$ і $B(-1;4)$. Обчислити його площу.

(Відповідь: 137).

17. Дано дві протилежні вершини квадрата $P(3;5)$ і $Q(1;-3)$. Обчислити його площу.

(Відповідь: 34).

18. Обчислити площу правильного трикутника, дві вершини якого $A(-3;2)$ і $B(1;6)$.

(Відповідь: $8\sqrt{3}$).

19. Дано три вершини $A(3;-7)$, $B(5;-7)$, $C(-2;5)$ паралелограма $ABCD$, четверта вершина якого D протилежна B. Обчислити довжини діагоналей цього паралелограма.

(Відповідь: 13 і 15).

20. Довжина сторони ромба дорівнює $5\sqrt{10}$, дві його протилежні вершини – точки $P(4;9)$ і $Q(-2;1)$. Обчислити площу цього ромба.

(Відповідь: 150).

21. Сторона ромба дорівнює $5\sqrt{2}$, дві його протилежні вершини точки – $P(3;-4)$ і $Q(1;2)$. Обчислити довжину висоти цього ромба.

(Відповідь: $4\sqrt{2}$).

22. Довести, що точки $A(3;-5)$, $B(-2;-7)$ і $C(18;1)$ лежать на одній прямій.

23. Довести, що трикутник з вершинами $A(1;1)$, $B(2;3)$, $C(5;-1)$ прямокутний.

24. Довести, що точки $A(2;2)$, $B(-1;6)$, $C(-5;3)$ і $D(-2;-1)$ є вершинами квадрата.

25. На осі абсцис знайти таку точку M, відстань від якої до точки $N(2;-3)$ дорівнює 5.

(Відповідь: $M_1(6;0)$ і $M_2(-2;0)$).

26. На осі ординат знайти таку точку M, відстань від якої до точки $N(-8;13)$ дорівнює 17.

(Відповідь: $M_1(0;28)$ і $M_2(0;-2)$).

27. Дано дві точки $M(2;2)$ і $N(5;-2)$. На осі абсцис знайти таку точку P, щоб кут MPN був прямим.

(Відповідь: $P_1(1;0)$ і $P_2(6;0)$).

28. Визначити координати точки M_2, що симетрична точці $M_1(1;2)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(1;0)$ і $B(-1;-2)$.

(Відповідь: $M_2(3;0)$).

29. Дано дві протилежні вершини квадрата $A(3;0)$ і $C(-4;1)$. Знайти дві його інші вершини.

(Відповідь: $B(0;4)$ і $D(-1;-3)$).

30. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(2;-1)$ і $B(-1;3)$. Визначити дві його інші вершини.

(Відповідь: умову задачі задовольняють два квадрати, розташовані симетрично відносно сторони AB. Вершини одного квадрата – точки $C_1(-5;0)$, $D_1(-2;-4)$, вершини іншого – точки $C_2(3;6)$, $D_2(6;2)$).

31. Дано вершини трикутника $A(-3;6)$, $B(9;-10)$ і $C(-5;4)$. Визначити центр O_1 і радіус R кола, описаного навколо цього трикутника.

(Відповідь: $O_1(3;-2)$, $R=10$).

32. Знайти довжини медіан трикутника, знаючи координати його вершин $A(3;-2)$, $B(5;2)$, $C(-1;4)$.

(Відповідь: $\sqrt{26}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{41}$).

33. Знаючи координати вершин трикутника $A(2;4)$, $B(4;-9)$, $C(-4;2)$, знайти довжину медіани, проведеної з вершини B.

(Відповідь: 13).

34. На промені, що виходить із початку координат і проходить через точку $P(4;3)$, знайти точку D, відстань від якої до початку координат дорівнює 9.

(Відповідь: $(7{,}2;5{,}4)$).

35. Обчислити відстань між двома точками $M(3;0)$, $N(1;-2)$ за умови, що координатний кут $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

(Відповідь: $d=2$).

36. Відносно косокутної системи координат із кутом $\omega=\dfrac{\pi}{3}$ дано трикутник з вершинами у точках $A(0;0)$, $B(7;4)$, $C(-1;6)$. Обчислити довжину медіани, яка проведена з вершини A.

(Відповідь: $AM=7$).

37. Обчислити довжини сторін трикутника $A(14;3)$, $B(9;-2)$, $C(4;1)$ за умови, що координатні осі утворюють кут $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

(Відповідь: $AB=5$, $AC=2\sqrt{2}$, $BC=7$).

38. Визначити координатний кут ω, якщо відстань між точками $A(10;-4)$ і $B(7;-1)$ дорівнює 3.

(Відповідь: $\omega=\dfrac{\pi}{3}$).

39. Пряма проходить через дві точки $M(2;3\sqrt{2})$ і $N(6;-\sqrt{2})$. Обчислити довжину того відрізка цієї прямої, який знаходиться

між осями координат, якщо відомо, що координатні осі утворюють кут $\omega = \dfrac{\pi}{4}$.

(Відповідь: $MN = 4$).

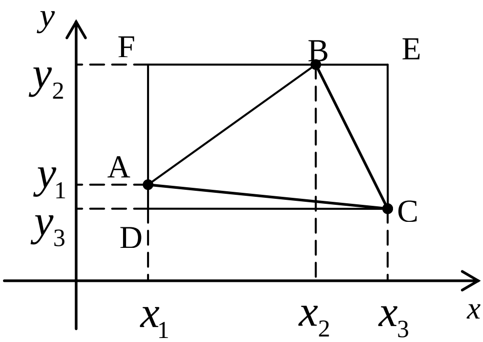
§1.4. Задача про площу трикутника

Теорема 1.4.1. *Якщо відносно прямокутної декартової системи координат на площині задано точки* $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, *то площа* S *трикутника* ABC *обчислюється за формулою*

$$S = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1.4.1)$$

(символ mod *означає абсолютну величину дійсного числа).*

Доведення. Наведемо одне з відомих доведень цієї теореми.



Для цього опишемо навколо даного трикутника прямокутник так, як це зроблено на рисунку. Тоді очевидні такі співвідношення для вказаних площ:

$$S_{\Delta ABC} = S_{DFEC} - S_{\Delta ABF} - S_{\Delta BCE} - S_{\Delta ACD},$$

$$S_{DFEC} = DC \cdot DF = (x_3 - x_1)(y_2 - y_3),$$

$$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot FB = \frac{1}{2} \cdot (y_2 - y_1)(x_2 - x_1),$$

$$S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot EC = \frac{1}{2} \cdot (x_3 - x_2)(y_2 - y_3),$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot (x_3 - x_1)(y_1 - y_3).$$

Врахувавши виписані значення площ, отримаємо

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(x_3 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_3 - x_3 y_1).$$

З іншого боку, розкривши визначник, що фігурує у формулі для площі ΔABC, справедливість вказаної формули стає очевидною для даного розташування трикутника відносно осей координат. Можна перевірити, що в кожному з інших можливих випадків розташування трикутника отримується така ж формула.

Наслідок. *Для того, щоб три точки,* $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ *та* $C(x_3; y_3)$*, задані відносно прямокутної декартової системи координат на площині, належали одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Площа трикутника в косокутній системі координат із вершинами у точках $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ обчислюється за формулою

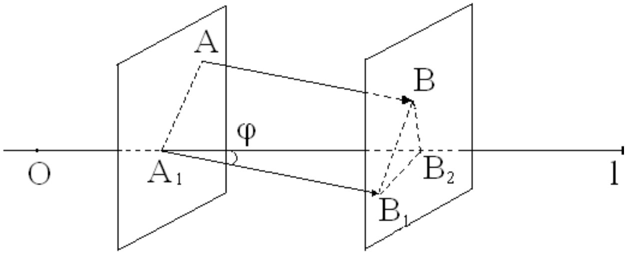
$$S = \left| \frac{\sin\omega}{2} \{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\} \right|,$$

де ω – координатний кут.

Приклади розв'язування задач

Спочатку запропонуємо ще одне доведення формули для обчислення площі трикутника, координати вершин якого задані відносно прямокутної декартової системи координат на площині. З цією метою введемо поняття проекції напрямленого відрізка на вісь.

Розглянемо в просторі (на площині) напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ та координатну вісь Ol (див. рис.). Проекцією напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ на вісь (позначення: $np_{Ol}\overrightarrow{AB}$) називається



величина напрямленого відрізка $\overrightarrow{A_1B_2}$, де A_1, B_2 – ортогональні проекції точок A та B на вісь Ol відповідно.

Нехай точки A_1 та B_2 мають на осі Ol координати l_1 і l_2 відповідно. Із означення $np_{Ol}\overrightarrow{AB}$ та теореми 1.1.2 випливає співвідношення

$$np_{Ol}\overrightarrow{AB} = l_2 - l_1.$$

Встановимо ще одну формулу для обчислення $np_{Ol}\overrightarrow{AB}$. Для цього перенесемо напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ паралельно самому собі так, щоб точка A співпала з точкою A_1. Позначимо через φ найменший кут між віссю Ol та напрямленим відрізком $\overrightarrow{A_1B_1}$, отриманим за допомогою вказаного паралельного перенесення напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$. Зауважимо, що $\varphi \in [0;\pi]$; при цьому кут φ гострий, якщо напрям напрямленого відрізка $\overrightarrow{A_1B_2}$ збігається з напрямом Ol, φ – тупий кут, якщо напрям напрямленого відрізка $\overrightarrow{A_1B_2}$ протилежний до напряму Ol. Звідси випливає, що

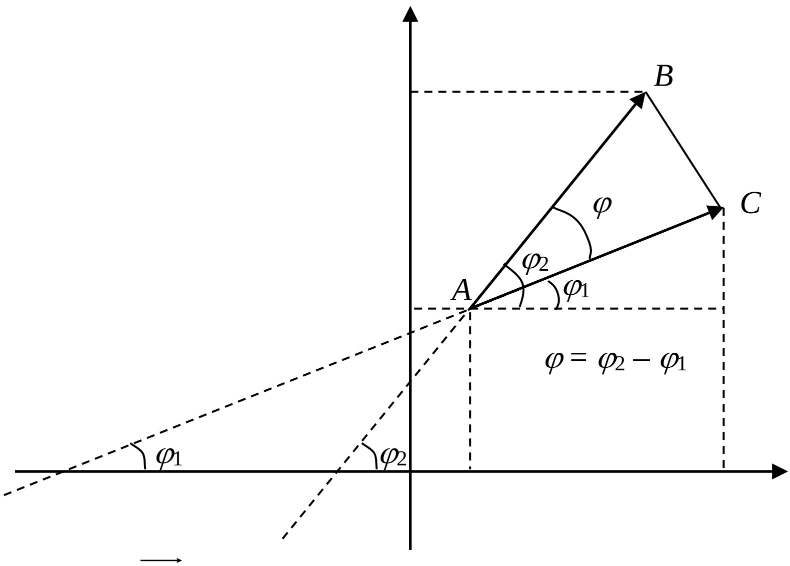
$$np_{Ol}\overrightarrow{AB} = AB\cos\varphi = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi,$$

де AB означає довжину напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$. Отже,

$$\cos\varphi = \frac{l_2 - l_1}{AB} = \frac{np_{Ol}\overrightarrow{AB}}{AB}.$$

Нехай відносно прямокутної декартової системи координат на площині задано точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Доведемо, що площа S трикутника ABC обчислюється за формулою (1.4.1).

Розглянемо направлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, на яких побудовано даний трикутник, і через φ позначимо кут між ними. Крім того, нехай φ_1 – кут, що утворює направлений відрізок $\overrightarrow{AC}$ із віссю Ox, а φ_2 – кут, що утворює направлений



відрізок $\overrightarrow{AB}$ із віссю Ox. Тоді

$$\varphi = \pm(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Скориставшись формулами

$$np_{Ox}\overrightarrow{AC} = x_3 - x_1 \equiv X_1,\ np_{Oy}\overrightarrow{AC} = y_3 - y_1 \equiv Y_1,$$

$$np_{Ox}\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1 \equiv X_2,\ np_{Oy}\overrightarrow{AB} = y_2 - y_1 \equiv Y_2,$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{np_{Ox}\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{X_1}{AC},$$

$$\sin\varphi_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \frac{np_{Oy}\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{Y_1}{AC},$$

$$\cos\varphi_2 = \frac{np_{Ox}\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{X_2}{AB},$$

$$\sin\varphi_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_2\right) = \frac{np_{Oy}\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{Y_2}{AB},$$

отримаємо, що

$$\sin\varphi = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1,$$

$$\sin\varphi = \frac{\left|X_1Y_2 - X_2Y_1\right|}{\sqrt{X_1^{\ 2} + Y_1^2}\cdot\sqrt{X_2^{\ 2} + Y_2^2}} \tag{1.4.2}$$

(тут ураховано, що $\sin\varphi > 0$, коли $\varphi \in (0, \pi)$).

Площу трикутника ABC обчислимо за формулою

$$S = \frac{1}{2}\cdot AC\cdot AB\cdot\sin\varphi. \tag{1.4.3}$$

Підставимо в (1.4.3) значення $\sin\varphi$ з (1.4.2). У результаті отримаємо, що

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\left(X_1Y_2 - X_2Y_1\right) = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

1.4.1. *Знайти площу трикутника, вершинами якого є точки* $A(2;-3)$, $B(1;1)$, $C(-6;5)$ *(система координат прямокутна).*

Розв'язання. Для обчислення площі трикутника, скористаємося формулою (1.4.1). Маємо

$$S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ -6 & 5 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot|24|=12 \text{ кв. од.}$$

1.4.2. *Знайти віддаль від початку координат до прямої, що проходить через точки* $A(1;5)$ *і* $B(2;4)$.

Розв'язання. У трикутнику OAB проведемо висоту OH, довжина якої і є шуканою віддаллю. Знайдемо площу цього трикутника за формулою

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 2 & 4 & 1\end{vmatrix}=3,$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot OH\cdot AB.$$

Знайдемо довжину відрізка AB:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(4-5)^2}=\sqrt{2}.$$

Отже, $\frac{\sqrt{2}}{2}OH=3$, $OH=3\sqrt{2}$.

1.4.3. *Обчислити площу п'ятикутника, вершинами якого є точки* $A(-2;0)$, $B(0;-1)$, $C(2;0)$, $D(3;2)$, $E(-1;3)$.

Розв'язання. Оскільки п'ятикутник $ABCDE$ можна розбити на три трикутники (ABC, ACD, ADE), то знайдемо площу кожного трикутника:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 4=2 \textit{ кв. од.},$$

$$S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 8=4\ \textit{кв. од.},$$

$$S_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot 13=6{,}5\ \textit{кв. од.}$$

Отже, площа п'ятикутника $ABCDE$ дорівнює

$$S_{ABCDE}=S_{\Delta ABC}+S_{\Delta ACD}+S_{\Delta ADE}=$$
$$=2+4+6{,}5=12{,}5\ \textit{кв. од.}$$

1.4.4. *Знайти площу трикутника, вершини якого* $A(3;5)$, $B(-4;7)$, $C(5{,}5;-3{,}5)$ *відносно афінної системи координат із кутом між осями* $\frac{\pi}{4}$*, одиниці масштабу на кожній з осей рівні між собою.*

Розв'язання. Знайдемо прямокутні декартові координати вершин трикутника. Для цього скористаємося формулами, наведеними в розділі 1.1.2:

$$x=b\cos\omega+a,$$
$$y=b\sin\omega. \qquad (*)$$

Отже,

$$x_A=5\cos\frac{\pi}{4}+3=\frac{5\sqrt{2}+6}{2},$$

$$y_A=5\sin\frac{\pi}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{2};$$

$$x_B=7\cos\frac{\pi}{4}-4=\frac{7\sqrt{2}-8}{2},$$

$$y_B=7\sin\frac{\pi}{4}=\frac{7\sqrt{2}}{2};$$

$$x_C = -3{,}5\cos\frac{\pi}{4} + 5{,}5 = \frac{-3{,}5\sqrt{2} + 11}{2},$$

$$y_C = -3{,}5\sin\frac{\pi}{4} = \frac{-3{,}5\sqrt{2}}{2}.$$

Таким чином, $A\left(\frac{5\sqrt{2}+6}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $B\left(\frac{7\sqrt{2}-8}{2}; \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$, $C\left(\frac{-7\sqrt{2}+22}{4}; \frac{-7\sqrt{2}}{4}\right)$.

Тоді площа трикутника

$$S = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{mod}\begin{vmatrix} \frac{5\sqrt{2}+6}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{7\sqrt{2}-8}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{-7\sqrt{2}+22}{4} & \frac{-7\sqrt{2}}{4} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{mod}\left(\begin{vmatrix} \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{7\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{7\sqrt{2}}{4} & -\frac{7\sqrt{2}}{4} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{6}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -\frac{8}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{22}{4} & -\frac{7\sqrt{2}}{4} & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{mod}\left(0 + \begin{vmatrix} 3 & \frac{5\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -4 & \frac{7\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \frac{11}{2} & -\frac{7\sqrt{2}}{4} & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

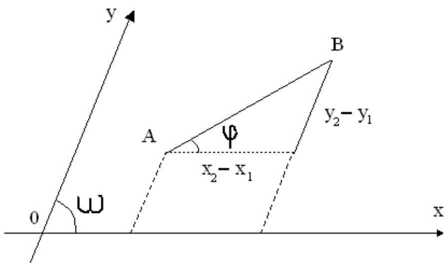
$$=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{mod}\left(\frac{21\sqrt{2}}{2}+\frac{55\sqrt{2}}{4}+7\sqrt{2}-\frac{77\sqrt{2}}{4}+10\sqrt{2}+\frac{21\sqrt{2}}{4}\right)=$$

$$=\frac{109\sqrt{2}}{8}=13{,}625\sqrt{2}\ \textit{кв. од.}$$

Зауваження. Площу даного трикутника можна знайти інакше. Оскільки маємо косокутну систему координат з кутом ω між осями координат, то віддаль між двома точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ шукається за допомогою формули

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+2(x_2-x_1)(y_2-y_1)\cos\omega}\,,$$

яка випливає з формул (*).



Тоді,

$$AB=\sqrt{(-4-3)^2+(7-5)^2+2(-4-3)(7-5)\cos\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\sqrt{49+4-14\sqrt{2}}=\sqrt{53-14\sqrt{2}}\,,$$

$$AC=\sqrt{(5{,}5-3)^2+(-3{,}5-5)^2+2(5{,}5-3)(-3{,}5-5)\cos\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\sqrt{6{,}25+72{,}25-21{,}25\sqrt{2}}=\sqrt{78{,}5-21{,}25\sqrt{2}}\,,$$

$$BC=\sqrt{(5{,}5+4)^2+(-3{,}5-7)^2+2(5{,}5+4)(-3{,}5-7)\cos\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\sqrt{90{,}25+110{,}25-99{,}75\sqrt{2}}=\sqrt{200{,}5-99{,}75\sqrt{2}}\,.$$

Площу трикутника обчислимо за формулою Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де p – півпериметр.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити площу трикутника, вершинами якого є точки:
1) $A(2;-3)$, $B(3;2)$, $C(-2;5)$, 2) $A(-3;2)$, $B(5;-2)$, $C(1;3)$,
3) $A(3;-4)$, $B(-2;3)$, $C(4;5)$.

(Відповідь: 1) 14, 2) 12, 3) 25).

2. Вершинами трикутника є точки $A(3;6)$, $B(-1;3)$, $C(2;-1)$. Обчислити довжину його висоти, проведеної з вершини C.

(Відповідь: 5).

3. Визначити площу паралелограма, трьома вершинами якого є точки $A(-2;3)$, $B(4;-5)$, $C(-3;1)$.

(Відповідь: 20).

4. Три вершини паралелограма – точки $A(3;7)$, $B(2;-3)$, $C(-1;4)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на діагональ AC.

(Відповідь: $7{,}4$).

5. Площа трикутника $S=3$, дві його вершини – точки $A(3;1)$ і $B(1;-3)$, а третя вершина C лежить на осі Oy. Визначити координати вершини C.

(Відповідь: $(0;-8)$ або $(0;-2)$).

6. Площа трикутника $S=4$, дві його вершини – точки $A(2;1)$ і $B(3;-2)$, а третя вершина C лежить на осі Ox. Визначити координати вершини C.

(Відповідь: $(5;0)$ або $\left(-\frac{1}{3};0\right)$).

7. Площа трикутника $S=3$, дві його вершини – точки $A(3;1)$ і $B(1;-3)$, центр ваги цього трикутника лежить на осі Ox. Визначити координати третьої вершини C. Нагадаємо, що центр ваги трикутника – точка перетину медіан цього трикутника.

(Відповідь: $(5;2)$ або $(2;2)$).

8. Площа паралелограма $S=12$, дві його вершини – точки $A(-1;3)$ і $B(-2;4)$. Знайти дві інші вершини цього паралелограма за умови, що точка перетину його діагоналей лежить на осі абсцис.

(Відповідь: $C_1(-7;-3)$, $D_1(-6;-4)$ або $C_2(17;-3)$, $D_2(18;-4)$).

9. Площа паралелограма $S=17$, дві його вершини – точки $A(2;1)$ і $B(5;-3)$. Знайти дві інші вершини цього паралелограма за умови, що точка перетину його діагоналей лежить на осі ординат.

(Відповідь: $C_1(-2;12)$, $D_1(-5;16)$ або $C_2\left(-2;\frac{2}{3}\right)$, $D_2\left(-5;\frac{14}{3}\right)$).

10. Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого співпадає з початком координат, а дві інші – точки $A(3;1)$, $B(-1;4)$ (координатний кут $\omega=\frac{5\pi}{6}$).

(Відповідь: $S=3{,}25$ кв. од.).

11. Обчислити координатний кут ω, якщо відомо, що площа трикутника з вершинами $A(-5;-1)$, $B(3;-2)$, $C(1;4)$ дорівнює $11{,}5$ кв. од.

(Відповідь: $\omega=\frac{\pi}{6}$ або $\omega=\frac{5\pi}{6}$).

§1.5. Полярна, циліндрична та сферична системи координат

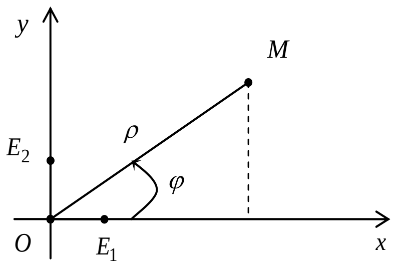
У багатьох прикладних задачах зручно користуватися так званою *полярною системою координат*.

Вона визначається заданням деякої точки O, яка називається *полюсом*, променя Ox, що виходить з точки O, який називається *полярною віссю,* і масштабною одиницею довжини. Крім того, на площині потрібно задати орієнтацію, тобто вказати, який поворот на площині навколо точки O вважається додатним (ми приймемо за додатний поворот проти руху годинникової стрілки).

Нехай M – довільна точка площини, відмінна від полюса. Тоді віддаль ρ від точки M до точки O називається першою полярною координатою точки M (*полярним радіусом*). Друга полярна координата (*амплітуда*) – кут $\varphi = \angle xOM$.

Для того, щоб відповідність між точками площини і впорядкованими парами полярних координат $(\rho;\varphi)$ була взаємно однозначною, вважають, що ρ і φ змінюються в межах: $\rho \in [0;+\infty)$, $\varphi \in [0;2\pi)$.

Для полюса O перша координата $\rho = 0$, а друга – невизначена.



В деяких книжках можна зустріти, що полярний кут φ змінюється в межах $(-\pi;\pi]$.

На площині, де введено полярну систему координат, розглянемо декартову прямокутну систему координат, прийнявши полюс O за початок координат і за додатну піввісь Ox – полярну вісь. За вісь Oy приймаємо вісь, що отримується поворотом осі Ox навколо точки O на кут 90^0. Масштабний відрізок полярної системи координат вважаємо рівним масштабному відрізку прямокутної декартової системи. Якщо ρ, φ – полярні координати довільної точки M, яка не збігається з точкою O площини, а x, y – її декартові координати, то очевидний такий взаємозв'язок:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

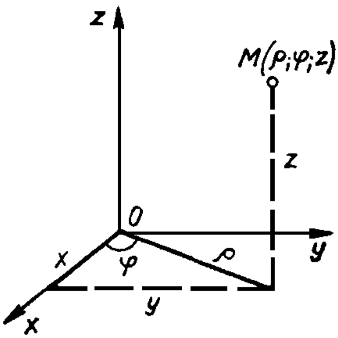
та

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

У просторі, крім прямокутної системи координат, часто вживаються циліндрична і сферична системи координат.

Циліндрична система координат. Якщо в прямокутній системі координат $Oxyz$ замість перших двох координат x, y взяти полярні координати ρ, φ, а третю координату z залишити без змін, то дістанемо *циліндричну систему координат*.



Координати точки M простору в цій системі записуються у вигляді $M(\rho; \varphi; z)$.

Залежність між прямокутними координатами точки $M(x;y;z)$ і її циліндричними координатами $M(\rho;\varphi;z)$ випливає із формул

$$x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi,\ \ z=z\,, \qquad (1.5.1)$$

$$0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi\,,\ -\infty<z<+\infty$$

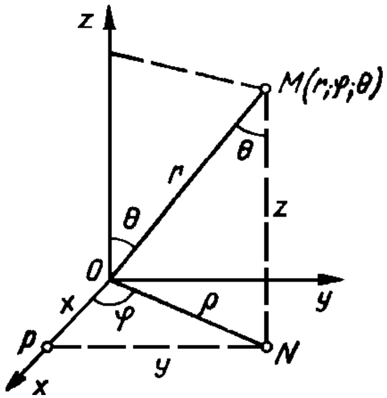
або

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\ z=z\,.$$

Отже, якщо прямокутна і циліндрична системи координат розміщені так, як на рисунку, то зв'язок між прямокутними і циліндричними координатами дається формулами (1.5.1).

Сферична система координат. У системі $Oxyz$ візьмемо довільну точку M і через цю точку та вісь Oz проведемо площину. Нехай r – відстань від початку координат до точки M, φ – двогранний кут між площинами zOx і zOM, θ – кут між віссю Oz і променем OM. Упорядкована трійка чисел r,φ,θ однозначно визначає положення точки M у просторі. Ці числа називаються *сферичними координатами* точки M.



Знайдемо залежність між прямокутними і сферичними координатами точки M. З прямокутних трикутників ONM і OPN маємо

$$z = r\cos\theta,\ \rho = r\sin\theta,\ x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi.$$

Тоді

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta, \qquad (1.5.2)$$

де

$$0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le \theta \le \pi$$

або

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right).$$

Таким чином, якщо прямокутна і сферична системи координат розміщені так, як на рисунку, то зв'язок між прямокутними і сферичними координатами дається формулами (1.5.2).

В деяких книжках можна зустріти наступні формули, які виражають сферичні координати точки

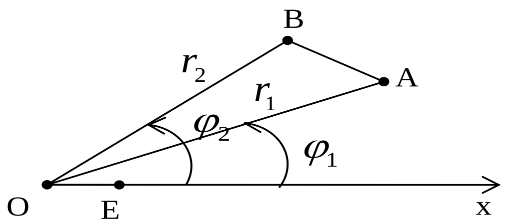
$$x = r\cos\theta\cos\varphi,\ y = r\cos\theta\sin\varphi,\ z = r\sin\theta,$$

в якості кута θ взято кут MON (див. рис.).

Приклади розв'язування задач

1.5.1. *Знайти довжину відрізка AB, кінці якого задано в полярній системі координат:* $A(r_1;\varphi_1)$, $B(r_2;\varphi_2)$, $\varphi_2 > \varphi_1$.

Розв'язання. Зобразимо дані точки в полярній системі координат.



Отримали трикутник OBA з довжинами сторін $OB = r_2$, $OA = r_1$, кут $BOA = \varphi_2 - \varphi_1$. За теоремою косинусів, маємо, що

$$AB^2 = OB^2 + OA^2 - 2 \cdot OB \cdot OA \cdot \cos\angle BOA,$$

$$AB = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\,. \qquad (1.5.3)$$

1.5.2. *В полярній системі координат дано дві протилежні вершини квадрата* $P\left(6; -\dfrac{7\pi}{12}\right)$, $Q\left(4; \dfrac{\pi}{6}\right)$. *Визначити його площу.*

Розв'язання. Знайдемо діагональ квадрата PQ. Для цього скористаємося формулою (1.5.3). Отже,

$$PQ = \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_1r_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\,,$$

$$PQ = \sqrt{36 + 16 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{12}\right)} =$$

$$= \sqrt{52 - 48\cos\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{52 + 24\sqrt{2}} = 2\sqrt{13 + 6\sqrt{2}}\,.$$

Тоді сторона квадрата дорівнює $\dfrac{PQ}{\sqrt{2}}$. Звідси дістаємо, що площа квадрата $S = \dfrac{PQ^2}{2} = 2(13 + 6\sqrt{2})$ кв. од.

1.5.3. *Обчислити площу трикутника, одна з вершин якого розміщена в полюсі, а дві інші мають полярні координати* $A\left(4; \dfrac{\pi}{9}\right)$, $B\left(1; \dfrac{5\pi}{18}\right)$.

Розв'язання. Перейдемо від полярних до прямокутних координат, використовуючи формули

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi\,.$$

Тоді $x_A = 4\cos\dfrac{\pi}{9}$, $y_A = 4\sin\dfrac{\pi}{9}$; $x_B = \cos\dfrac{5\pi}{18}$, $y_B = \sin\dfrac{5\pi}{18}$

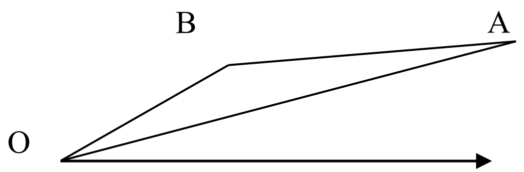
Третя вершина, яка знаходиться в полюсі, має координати $O(0;0)$. Площа трикутника дорівнює

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_O & y_O & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} 4\cos\frac{\pi}{9} & 4\sin\frac{\pi}{9} & 1 \\ \cos\frac{5\pi}{18} & \sin\frac{5\pi}{18} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{mod}(4\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{5\pi}{18} - 4\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{5\pi}{18}) = 2\,|\sin\left(\frac{\pi}{9} - \frac{5\pi}{18}\right)| =$$

$$= 2\,|-\sin\frac{3\pi}{18}| = 2\sin\frac{\pi}{6} = 1 \text{ кв. од.}$$

Зауваження. Дану задачу можна розв’язати іншим шляхом. Зобразимо в полярній системі координат заданий трикутник.



Площу трикутника AOB шукаємо за формулою

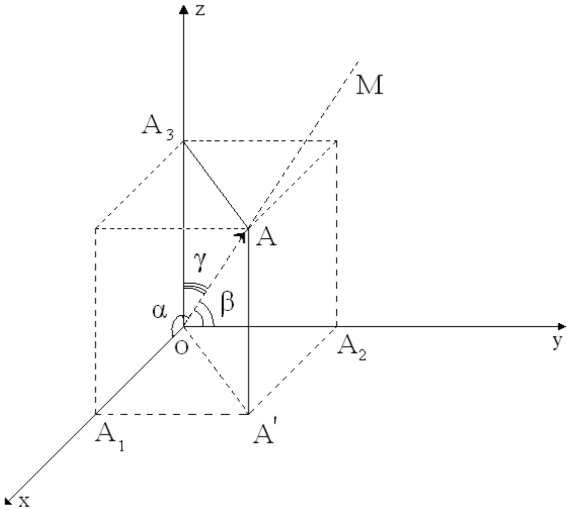
$$S = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA \cdot \sin\angle AOB.$$

Оскільки $OB = 1$, $OA = 4$, $\angle AOB = \frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{6}$, то

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 1 \text{ кв. од.}$$

1.5.4. *Знайти сферичні координати точки* M*, якщо промінь* OM *утворює з осями* Ox *і* Oy *кути, відповідно в* 45^0 *і* 60^0*, а координата* z *точки* M *дорівнює* -1.

Розв’язання. За умовою задачі промінь OM утворює кути $\alpha = 45^0$ і $\beta = 60^0$ з осями Ox і Oy. Нехай із віссю Oz промінь утворює кут γ.



На промені OM зафіксуємо точку A так, щоб напрямлений відрізок $\overrightarrow{OA}$ мав одиничну довжину: $|\overrightarrow{OA}|=1$. Нехай A_1, A_2, A_3 – ортогональні проекції точки A на осі Ox, Oy, Oz відповідно. Тоді (див. § 1.4),

$$np_{Ox}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\alpha\equiv\cos\alpha,$$

$$np_{Oy}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\beta\equiv\cos\beta,$$

$$np_{Oz}\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}|\cos\gamma\equiv\cos\gamma,$$

$$OA_1=|np_{Ox}\overrightarrow{OA}|=|\cos\alpha|,\ OA_2=|\cos\beta|,\ OA_3=|\cos\gamma|,$$

при цьому (див. рис.)

$$|\overrightarrow{OA}|^2=1=OA'^2+A'A^2=OA_1^2+OA_2^2+OA_3^2=$$

$$=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma.$$

Тоді

$$\cos^2 45^0+\cos^2 60^0+\cos^2\gamma=1,$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1,$$

$$\cos^2\gamma = \frac{1}{4}.$$

Отже, $\cos\gamma = \pm\frac{1}{2}$, тобто $\gamma = 60^0$ або $\gamma = 120^0$.

Координати точки M знаходимо за формулами

$$x_M = |\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,\ y_M = |\overrightarrow{OM}|\cos\beta,\ z_M = |\overrightarrow{OM}|\cos\gamma.$$

Оскільки $z_M = -1$, то $-1 = |\overrightarrow{OM}|\cos 120^0 = |\overrightarrow{OM}|(-0{,}5)$, $|\overrightarrow{OM}| = 2$. Тоді

$$x_M = 2\cos 45^0 = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$y_M = 2\cos 60^0 = 2\cdot\frac{1}{2} = 1,$$

$$z_M = -1.$$

Прямокутні декартові координати точки M такі: $\sqrt{2};1;-1$.

Знайдемо сферичні координати даної точки:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2+1+1} = 2,$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{-1}{2},\ \theta = \frac{2\pi}{3},\ \sin\theta = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r\sin\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r\sin\theta} = \frac{1}{2\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

тобто $tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = arctg\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Отже, сферичні координати точки $M\left(2; arctg\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{2\pi}{3}\right)$.

1.5.5. *Знайти циліндричні координати точки* M, *якщо промінь* OM *утворює з осями* Ox *і* Oy *кути, відповідно* 60^0 *і* 60^0, *а кут з віссю* Oz *гострий, довжина відрізка* OM *дорівнює* 1. *Знайти кут між променем* OM *і віссю* Oz.

Розв'язання. За умовою задачі промінь OM утворює кути $\alpha = 60^0$ і $\beta = 60^0$ з осями Ox і Oy. Нехай з віссю Oz промінь утворює кут γ, який гострий. Оскільки

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

(див. приклад 1.5.4), то

$$\cos^2 60^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\cos^2\gamma = \frac{1}{2}.$$

Тоді $\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, тобто $\gamma = 45^0 = \frac{\pi}{4}$ (кут гострий).

Координати точки M знаходимо за формулами

$$x_M = |\overrightarrow{OM}|\cos\alpha,\ y_M = |\overrightarrow{OM}|\cos\beta,\ z_M = |\overrightarrow{OM}|\cos\gamma,$$

де $|\overrightarrow{OM}| = 1$. Тоді $x_M = 1\cdot\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $y_M = 1\cdot\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $z_M = 1\cdot\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Координати точки M такі $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Знайдемо циліндричні координати даної точки:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$z = z = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, циліндричні координати точки $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Побудувати точки, задані полярними координатами: $A_1\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$, $A_2\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$, $A_3\left(3; -\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Знайти відстань між двома точками, заданими в полярних координатах: 1) $A\left(2; \frac{\pi}{12}\right)$, $B\left(1; \frac{5\pi}{12}\right)$; 2) $A\left(4; \frac{\pi}{5}\right)$, $B\left(6; \frac{6\pi}{5}\right)$; 3) $A\left(3; \frac{11\pi}{18}\right)$, $B\left(4; \frac{\pi}{9}\right)$.

(Відповідь: 1) $d = \sqrt{3}$; 2) $d = 10$; 3) $d = 5$).

3. Як розміщені точки, полярні координати яких задовольняють одне з таких рівнянь 1) $\rho = 1$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{6}$?

(Відповідь: 1) на одиничному колі з центром у полюсі;

2) на промені, що виходить із полюса під кутом $\frac{\pi}{6}$ до Ox).

4. Полюс полярної системи координат співпадає з початком прямокутної декартової системи координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю абсцис. У полярній системі координат дано точки $M_1\left(6; \frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5;0)$, $M_3\left(2; \frac{\pi}{4}\right)$, $M_4\left(10; -\frac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(8; \frac{2\pi}{3}\right)$, $M_6\left(12; -\frac{\pi}{6}\right)$. Знайти декартові координати цих точок.

(Відповідь: $M_1(0;6)$, $M_2(5;0)$, $M_3(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $M_4(5;-5\sqrt{3})$, $M_5(-4;4\sqrt{3})$, $M_6(6\sqrt{3};-6)$).

5. Полюс полярної системи координат співпадає з початком прямокутної декартової системи координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю абсцис. У декартовій системі координат дано точки $M_1(0;5)$, $M_2(-3;0)$, $M_3(\sqrt{3};1)$, $M_4(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $M_5(1;-\sqrt{3})$. Знайти полярні координати цих точок.

(Відповідь: $M_1\left(5;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M_2(3;\pi)$, $M_3\left(2;\dfrac{\pi}{6}\right)$, $M_4\left(2;-\dfrac{3}{4}\pi\right)$, $M_5\left(2;-\dfrac{\pi}{3}\right)$).

6. Знайти полярні координати точок, симетричних із точками $\left(1;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(3;\dfrac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{\pi}{6}\right)$, $(\rho;\varphi)$: 1) відносно полюса; 2) відносно полярної осі.

(Відповідь: 1) $\left(1;\dfrac{5\pi}{4}\right)$, $\left(3;\dfrac{5\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $(\rho;\varphi+\pi)$;

2) $\left(1;\dfrac{7\pi}{4}\right)$, $\left(3;\dfrac{4\pi}{3}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{\pi}{6}\right)$, $(\rho;2\pi-\varphi)$).

7. Побудувати точки, задані полярними координатами: $A\left(3;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $B(2;\pi)$, $C\left(3;-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $D\left(4;\dfrac{22}{7}\right)$, $E(5;2)$ і $F(1;-1)$.

8. Визначити полярні координати точок, симетричних відносно полярної осі точкам $M\left(3;\dfrac{\pi}{4}\right)$, $N\left(2;-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $P\left(3;-\dfrac{\pi}{3}\right)$, $Q(1;2)$ і $L(5;-1)$, заданим у полярній системі координат.

(Відповідь: $\left(3;-\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\left(2;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(3;\dfrac{\pi}{3}\right)$, $(1;-2)$, $(5;1)$).

9. Визначити полярні координати точок, симетричних відносно полюса точкам $M\left(1;\frac{\pi}{4}\right)$, $N\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$, $P\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$, $Q\left(4;\frac{5\pi}{6}\right)$ і $L(3;-2)$, заданим у полярній системі координат.

(Відповідь: $\left(1;\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(5;-\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(2;\frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(4;-\frac{\pi}{6}\right)$, $\left(3;\frac{\pi}{2}\right)$).

10. В полярній системі координат дано дві вершини $A\left(3;-\frac{4\pi}{9}\right)$ і $B\left(5;\frac{3\pi}{4}\right)$ паралелограма $ABCD$, точка перетину діагоналей якого співпадає з полюсом. Визначити дві інші вершини цього паралелограма.

(Відповідь: $C\left(3;\frac{5\pi}{9}\right)$, $D\left(5;\frac{7\pi}{4}\right)$).

11. В полярній системі координат дано точки $A\left(8;-\frac{2\pi}{3}\right)$ і $B\left(6;\frac{\pi}{3}\right)$. Обчислити полярні координати середини відрізка, який з'єднує точки A і B.

(Відповідь: $\left(1;-\frac{2\pi}{3}\right)$).

12. В полярній системі координат дано точки $A\left(12;\frac{4\pi}{9}\right)$ і $B\left(12;-\frac{2\pi}{9}\right)$. Обчислити полярні координати середини відрізка AB.

(Відповідь: $\left(6;\frac{\pi}{9}\right)$).

13. В полярній системі координат дано точки $M_1\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ і $M_2\left(8;-\frac{\pi}{12}\right)$. Обчислити відстань d між ними.

(Відповідь: $d=7$).

14. В полярній системі координат дано дві суміжні вершини квадрата $M_1\left(12;-\frac{\pi}{10}\right)$ і $M_2\left(3;\frac{\pi}{15}\right)$. Визначити його площу.

(Відповідь: $9(17-4\sqrt{3})$).

15. В полярній системі координат дано дві протилежні вершини квадрата $P\left(6;-\frac{7\pi}{12}\right)$ і $Q\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$. Визначити його площу.

(Відповідь: $2(13+6\sqrt{2})$).

16. В полярній системі координат дано дві вершини правильного трикутника $A\left(4;-\frac{\pi}{12}\right)$ і $B\left(8;\frac{7\pi}{12}\right)$. Визначити його площу.

(Відповідь: $28\sqrt{3}$).

17. Одна із вершин трикутника OAB знаходиться в полюсі, дві інші точки $A(\rho_1;\theta_1)$ і $B(\rho_2;\theta_2)$. Знайти площу цього трикутника.

(Відповідь: $S=\frac{1}{2}\rho_1\rho_2\,|\sin(\theta_1-\theta_2)|$).

18. Одна з вершин трикутника OAB знаходиться в полюсі, дві інші точки $A\left(5;\frac{\pi}{4}\right)$ і $B\left(4;\frac{\pi}{12}\right)$. Знайти площу цього трикутника.

(Відповідь: 5).

19. Обчислити площу трикутника, вершини якого $A\left(3;\frac{\pi}{8}\right)$, $B\left(8;\frac{7\pi}{24}\right)$ і $C\left(6;\frac{5\pi}{8}\right)$ задані в полярних координатах.

(Відповідь: $3(4\sqrt{3}-1)$).

20. Побудувати точки, циліндричні координати яких $A_1\left(3;\frac{\pi}{6};1\right)$, $A_2\left(\frac{1}{2};\frac{\pi}{2};2\right)$, $A_1(3;\pi;-1)$.

21. Знайти декартові прямокутні координати точок, заданих у циліндричних координатах: $A_1\left(2;\frac{\pi}{3};-1\right)$, $A_2\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4};2\right)$, $A_3\left(5;\frac{\pi}{2};3\right)$. При цьому вісь абсцис збігається з полярною віссю, а початок координат – із полюсом.

(Відповідь: $(1;\sqrt{3};-1)$, $(-1;1;2)$, $(0;5;3)$).

22. Знаючи прямокутні координати точок $A(-1;1;2)$, $B(0;2;3)$ $C(5;0;1)$, знайти їх циліндричні координати.

(Відповідь: $\left(\sqrt{2};\frac{3\pi}{4};2\right)$, $\left(2;\frac{\pi}{2};3\right)$, $(5;0;1)$).

23. Знайти декартові прямокутні координати точки $M\left(2;\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right)$, заданої сферичними координатами.

(Відповідь: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}};1\right)$).

24. Знайти сферичні координати точок за їхніми прямокутними координатами: $A(-8;-4;1)$, $B(-2;-2;-1)$, $C(0;-4;3)$, $D(1;-1;-1)$, $E(0;1;0)$.

(Відповідь: $A\left(9; arctg\left(\frac{1}{2}\right); \arccos\left(\frac{1}{9}\right)\right)$,

$B\left(3; -\frac{3\pi}{4}; \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$, $C\left(5; -\frac{\pi}{2}; \arccos\frac{3}{5}\right)$,

$D\left(\sqrt{3}; -\frac{\pi}{4}; \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$, $E\left(1; \frac{\pi}{2}; 0\right)$).

§1.6. Поняття про лінію на площині та її рівняння

Грецький учений і філософ Арістотель (384 – 322 рр. до н.е.) уявляв собі лінію як деяке "місце", де можуть бути розміщені точки. Поняття лінії як сліду рухомої точки або як сукупності точок виникло значно пізніше. Загальне означення лінії викликає певні труднощі і вводиться в різних галузях геометрії по-різному.

Розглянемо на площині деяку декартову систему координат xOy. В аналітичній геометрії під плоскою лінією L розуміють геометричне місце точок площини, координати x, y яких задовольняють рівнянню

$$F(x,y) = 0. \tag{1.6.1}$$

Рівняння (1.6.1) називається *рівнянням лінії* L (у заданій системі координат). Із наведеного означення лінії випливає, що рівняння (1.6.1) може визначати геометричний образ, відмінний від того, що ми звикли інтуїтивно розуміти під терміном "лінія". Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 = 0$ задає на площині лінію L, яка складається лише з однієї точки $(0;0)$. Для того, щоб рівняння вигляду (1.6.1) визначало геометричний образ, який відповідав би "звичайному" поняттю про лінію, необхідно, взагалі кажучи, накладати певні обмеження на функцію $F(x,y)$ (наприклад, вимогу однозначної розв'язності функціонального рівняння (1.6.1) відносно однієї зі змінних). Такі обмеження вивчаються в курсі математичного аналізу.

Розглянемо приклади складання рівнянь ліній на основі її геометричних властивостей.

Приклади розв'язування задач

1.6.1. *В декартовій прямокутній системі координат скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней яких до двох даних точок* $A_1(-a;0)$ *і* $A_2(a;0)$ *є величина стала і дорівнює* $4a^2$.

Розв'язання. Нехай M – довільна точка лінії, x, y – координати цієї точки. Оскільки точка M може займати на лінії будь-яке положення, то x і y є змінними величинами, їх називають біжучими координатами.

Запишемо геометричну властивість лінії символічно:

$$\left(MA_1\right)^2+\left(MA_2\right)^2=4a^2. \tag{1.6.2}$$

В цьому відношенні при русі точки M можуть змінюватися довжини MA_1 і MA_2. Виразимо їх через координати точки M:

$$MA_1=\sqrt{(x+a)^2+y^2},\ MA_2=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Підставивши отримані вирази у рівність (1.6.2), знайдемо рівняння, яке зв'язує координати x, y точки M:

$$(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=4a^2. \tag{1.6.3}$$

Це і є рівняння даної лінії.

Дійсно, для кожної точки M, яка лежить на цій лінії, виконується умова (1.6.2). Отже, координати точки M задовольняють рівнянню (1.6.3). Для кожної точки M, яка не лежить на лінії, не виконується умова (1.6.3), а, отже, її координати не задовольняють рівнянню (1.6.3).

Таким чином, задача розв'язана. Проте рівняння (1.6.3) можна спростити. Розкривши дужки і звівши подібні доданки, одержимо рівняння даної лінії у вигляді

$$(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2=4a^2,$$

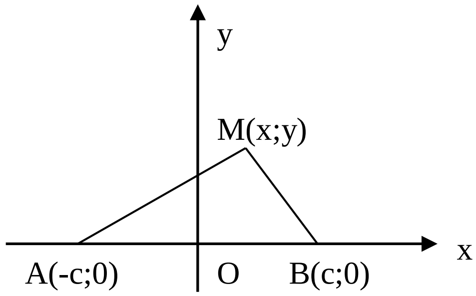
$$x^2+2xa+a^2+y^2+x^2-2xa+a^2+y^2=4a^2,$$

$$x^2+y^2=a^2.$$

Очевидно, що дана лінія – коло з центром у початку координат і радіусом, який дорівнює a.

1.6.2. *Знайти рівняння геометричного місця точок площини, різниця квадратів відстаней яких до двох заданих точок є величиною сталою.*

Розв'язання. Нехай $a>0$ – стала величина з умови задачі, A, B – задані точки площини. Довжину відрізка AB позначимо через $2c$. Прямокутну декартову систему координат побудуємо так. Вісь Ox направимо вздовж прямої AB, середину AB – точку O – візьмемо за початок координат, вісь Oy проведемо через точку O перпендикулярно до Ox.



Нехай $M(x;y)$ – довільна точка з вказаного геометричного місця точок. Тоді

$$AM^2 = (x+c)^2 + y^2,\ BM^2 = (x-c)^2 + y^2,$$

$$AM^2 - BM^2 = a^2.$$

Отже,

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 - x^2 + 2xc - c^2 - y^2 = a^2,$$

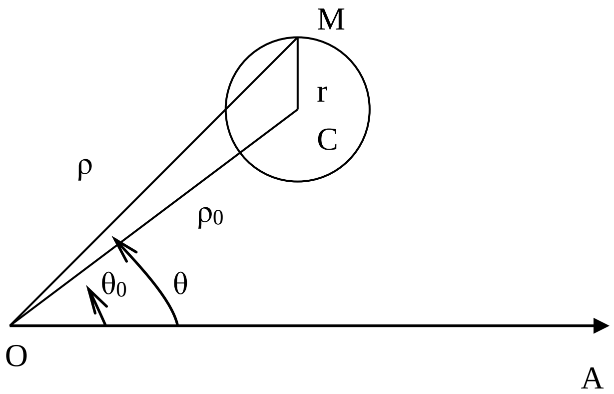
$$x = \frac{a}{4c}.$$

Аналогічно, $BM^2 - AM^2 = a^2$, тобто $x = -\frac{a}{4c}$. Таким чином, шукане геометричне місце точок площини – пара паралельних осі Oy прямих, рівняння яких має вигляд

$$|x| - \frac{a}{4c} = 0.$$

1.6.3. *В полярній системі координат вивести рівняння кола, яке має центр* $C(\rho_0;\theta_0)$ *і радіус* r.

Розв'язання. Позначимо через M довільну точку кола, ρ і θ – її полярні координати. Оскільки точка M може займати на колі будь-яке положення, то ρ і θ є змінними величинами. Як і у випадку декартової системи координат, їх називають біжучими координатами.



Усі точки кола знаходяться на відстані r від центра кола. Запишемо цю умову символічно:

$$CM = r\,. \tag{1.6.4}$$

Виразимо CM через біжучі координати точки M. Для цього скористаємося теоремою косинусів:

$$CM^2 = OM^2 + OC^2 - 2\cdot OM\cdot OC\cdot\cos\angle MOC,$$

$$CM = \sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos|\theta-\theta_0|}\,.$$

Підставивши отриманий вираз у рівність (1.6.4), знайдемо рівняння, яке зв'язує координати ρ, θ точки M:

$$\sqrt{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0\cos|\theta-\theta_0|} = r\,. \tag{1.6.5}$$

Це і є рівняння даного кола.

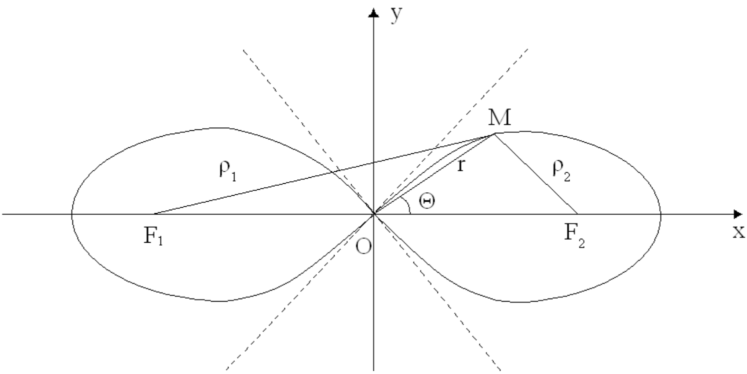
Дійсно, для кожної точки M, яка лежить на даному колі, виконується умова (1.6.4) і, отже, координати точки M задовольняють рівнянню (1.6.5). Для кожної точки M, яка не лежить на даному колі, не виконується умова (1.6.4), а тому її координати не задовольняють рівнянню (1.6.5).

Таким чином, задача розв'язана. Отримане рівняння можна також подати у вигляді

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0\cos|\theta-\theta_0| = r^2 - \rho_0^2\,.$$

1.6.4. *У полярній системі координат скласти рівняння геометричного місця точок* $\{M\}$ *площини, для яких добуток їх* *віддалей* $\rho_1 = F_1M$ *та* $\rho_2 = F_2M$ *до двох фіксованих точок* F_1 *та* F_2*, таких, що* $F_1F_2 = 2a$ *, є сталою величиною, яка дорівнює* a^2.

Розв'язання. Побудуємо на площині прямокутну декартову систему координат так. Через точки F_1 та F_2 проведемо пряму, яку перетворимо в координатну вісь, задавши на ній напрям (рух від точки F_1 до точки F_2), масштаб та початок відліку – точку O, яка є серединою відрізка F_1F_2. Вісь Oy проведемо через точку O перпендикулярно до осі Ox. Точку O одночасно візьмемо за початок координат полярної системи, додатну піввісь Ox приймемо за полярну вісь. Зафіксуємо довільну точку M із заданого геометричного місця точок із полярними координатами r, θ. З трикутників OMF_2, OMF_1 (див. рис.) та теореми косинусів маємо, що



$$MF_2^2 = OM^2 + OF_2^2 - 2 \cdot OM \cdot OF_2^2 \cdot \cos\angle MOF_2 ,$$

$$\rho_2^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta ,$$

$$MF_1^2 = OM^2 + OF_1^2 - 2 \cdot OM \cdot OF_1^2 \cdot \cos\angle MOF_1$$

$$\rho_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos(\pi - \theta) = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta .$$

Згідно з умовою

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = a^2 ,$$

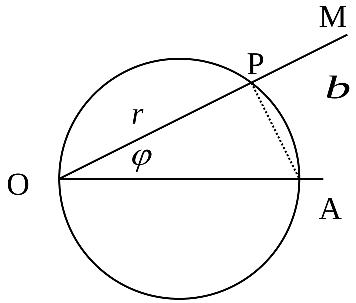
$$\rho_1^2\rho_2^2=(r^2+a^2-2ar\cos\theta)(r^2+a^2+2ar\cos\theta)=a^4,$$
$$(r^2+a^2)^2-4a^2r^2\cos^2\theta=a^4,$$
$$r^4+2r^2a^2+a^4-4a^2r^2\cos^2\theta=a^4$$
або
$$r^2+2a^2(1-2\cos^2\theta)=0.$$
Звідси випливає полярне рівняння заданого геометричного місця точок площини
$$r^2=2a^2(2\cos^2\theta-1),$$
$$r^2=2a^2\cos 2\theta.$$

З цього рівняння дістаємо, що кут θ змінюється в тих межах, для яких $\cos 2\theta\geq 0$. Це проміжки $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{7\pi}{4};2\pi\right]$. При зміні θ від $\frac{7\pi}{4}$ до 2π функція $a\sqrt{2\cos\theta}$ зростає від 0 до $a\sqrt{2}$, а при зміні θ від 0 до $\frac{\pi}{4}$ ця функція спадає від $a\sqrt{2}$ до 0. Отримується петля, розміщена в першій та четвертій чвертях у вертикальному куті, утвореному прямими, проведеними під кутами $\frac{\pi}{4}$ та $\frac{3\pi}{4}$ до полярної осі. При зміні θ від $\frac{3\pi}{4}$ до $\frac{5\pi}{4}$ отримується друга петля, розміщена в другій та третій чвертях, симетрична першій відносно полюса.

Лінія, яка називається *лемніскатою Бернулі*, перетинає сама себе в полюсі, якому відповідають значення $\theta=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

1.6.5. *Задано коло γ діаметром a, точка $O\in\gamma$. Навколо точки O обертається промінь OT, який перетинає γ в точці P. Від точки P на промені, що лежить поза кругом,* *обмеженим колом* γ*, відкладається відрізок* $PM = b$*. Скласти полярне рівняння лінії, що описується точкою* M .

Розв'язання. Візьмемо точку O за полюс, а промінь OA– за полярну вісь (див. рис.).



Нехай r, φ – полярні координати точки M, а r_1, φ – полярні координати точки P. Тоді $OM = OP + PM$, $r = r_1 + b$. Але, розглянувши прямокутний трикутник OPA ($\angle OPA$– прямий, спирається на діаметр), $\frac{OP}{OA} = \cos\varphi$, $r_1 = a\cos\varphi$, тому полярне рівняння лінії має вигляд

$$r = b + a\cos\varphi .$$

Така лінія називається *равликом Паскаля*.

Якщо $b > a$, то завжди $r > 0$ і крива оточує полюс з усіх боків (рис. а).

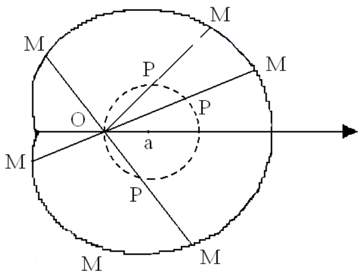


Рис. а $PM = b > a$

Якщо $b<a$, то крива проходить через полюс і, перетинаючи себе, утворює внутрішню петлю (рис. б). Для знаходження кутів φ, при яких змінна точок проходить через полюс, у рівнянні лінії підставимо $r=0$. Отримаємо рівняння $\cos\varphi=-\dfrac{b}{a}$, яке має розв'язки, оскільки $b<a$.

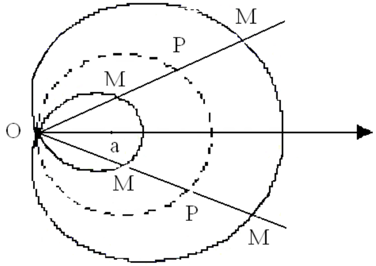


Рис. б $PM=b<a$

Якщо $b=a$, то полюс лежить на кривій, але петлі в цьому випадку немає (рис. в).

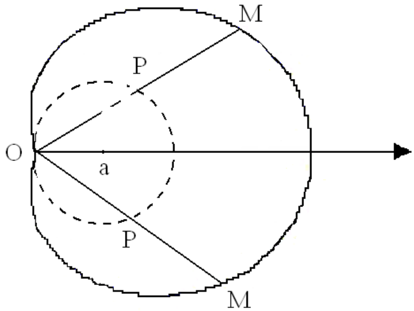
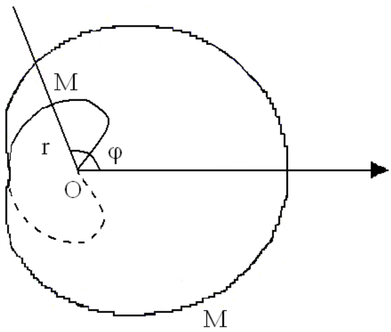


Рис. в $PM=b=a$

Зауважимо, що в полярній системі координат рівняння деяких ліній відрізняються надзвичайною простотою. Наприклад, рівняння $r=a\varphi$ задає спіраль Архімеда – лінію, яку можна розуміти як траєкторію точки, що рівномірно рухається променем, який виходить із полюса, тоді як промінь рівномірно повертається навколо полюса.



На рисунку суцільною лінією зображена частина спіралі Архімеда у випадку $a > 0$, а пунктирною – частина спіралі Архімеда у випадку $a < 0$.

Складемо рівняння спіралі Архімеда в прямокутній декартовій системі координат у випадку $a > 0$ і переконаємося у його складності порівняно з рівнянням цієї лінії в полярній системі координат.

Оскільки

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\varphi = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} + 2\pi n, \; x > 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi + 2\pi n, \; x < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y + 2\pi n, x = 0, \end{cases}$$

де $n \in Z$, то одержимо, що у випадку $a > 0$ спіраль Архімеда визначається такою нескінченною системою рівнянь:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a(arctg\frac{y}{x} + 2\pi n), \; x > 0, n \in Z,$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a(arctg\frac{y}{x} + \pi + 2\pi n), \; x < 0, n \in Z,$$

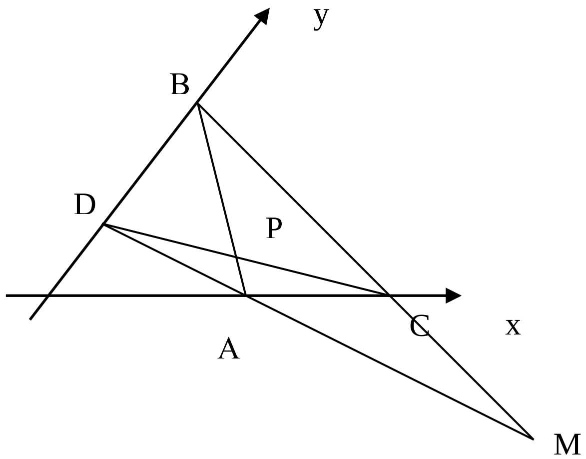
$$|\,y\,| = a(\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y + 2\pi n), \; x = 0, n \in Z.$$

1.6.6. *На осях Ox та Oy загальної декартової системи координат фіксовано точки A і B. Через точку $P(x_0;y_0)$ проведено довільну січну, яка перетинає осі Ox та Oy відповідно в точках C і D. Нехай M – точка перетину прямих CB і AD. Скласти рівняння лінії, яку описує точка M, коли січна обертається навколо точки P.*

Розв'язання. Зобразимо дані точки в загальній системі координат. Оскільки точки A і B – фіксовані і знаходяться на осях координат, то їх координати, наприклад, $A(a;0)$, $B(0;b)$. Нехай точки C і D мають координати $C(c;0)$, $D(0;d)$. Нехай x, y – координати точки M – точки перетину прямих CB і AD, x_0, y_0 – координати точки P.

Відрізок DC точкою P ділиться в певному відношенні λ, тобто

$$\lambda = \frac{\overline{DP}}{\overline{PC}} = \frac{x_P - x_D}{x_C - x_P} = \frac{y_P - y_D}{y_C - y_P} = \frac{x_0 - 0}{c - x_0} = \frac{y_0 - d}{0 - y_0}$$



або

$$y_0 - d = \frac{x_0 y_0}{x_0 - c},$$

$$d = y_0 - \frac{x_0 y_0}{x_0 - c} = \frac{c y_0}{c - x_0}.$$

Аналогічно відрізок BA точкою P ділиться в певному відношенні λ_1, тобто

$$\lambda_1 = \frac{\overline{BP}}{\overline{PA}} = \frac{x_P - x_B}{x_A - x_P} = \frac{y_P - y_B}{y_A - y_P} = \frac{x_0 - 0}{a - x_0} = \frac{y_0 - b}{0 - y_0}$$

або

$$-x_0 y_0 = (a - x_0)(y_0 - b),$$

$$x_0 b + a y_0 - ab = 0.$$

Відрізок DA точкою M ділиться в певному відношенні λ_2, тобто

$$\lambda_2 = \frac{\overline{DM}}{\overline{MA}} = \frac{x_M - x_D}{x_A - x_M} = \frac{y_M - y_D}{y_A - y_M} = \frac{x - 0}{a - x} = \frac{y - d}{0 - y}$$

або

$$-xy = (a - x)(y - d),$$

$$dx + ay - ad = 0.$$

Відрізок BC точкою M ділиться в певному відношенні λ_3, тобто

$$\lambda_3 = \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = \frac{x_M - x_B}{x_C - x_M} = \frac{y_M - y_B}{y_C - y_M} = \frac{x - 0}{c - x} = \frac{y - b}{0 - y}$$

або

$$-xy = (c - x)(y - b),$$

$$bx + cy - cb = 0.$$

Отримали таку систему:

$$\begin{cases} dx + ay = ad, \\ bx + cy = cb; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{ca(d - b)}{cd - ab}, \\ y = \dfrac{bd(a - c)}{ba - cd}. \end{cases}$$

Оскільки $d = \dfrac{cy_0}{c - x_0}$, то

$$\begin{cases} x = \dfrac{ca\left(cy_0 - bc + bx_0\right)}{c^2 y_0 - abc + abx_0}, \\ y = \dfrac{bcy_0(a-c)}{bac - bax_0 - c^2 y_0}. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння системи на y_0, а друге рівняння – на x_0 й додамо. У результаті одержимо, що

$$xy_0 + yx_0 = cay_0(cy_0 - bc + bx_0) + bcx_0 y_0(c-a),$$

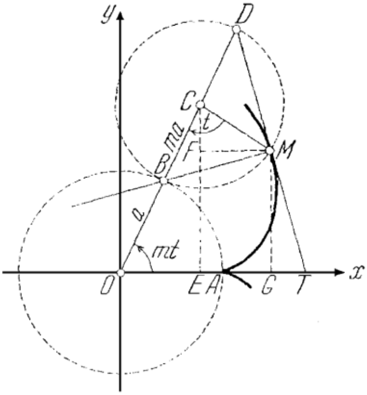
$$xy_0 + yx_0 = c^2 y_0(ay_0 - ab + bx_0) = 0\,.$$

Отже, шукана лінія – пряма, рівняння якої має вигляд

$$xy_0 + yx_0 = 0\,.$$

1.6.7. *Якщо одне коло без тертя рухається зовні іншого кола, то крива, яку описує будь-яка точка рухомого кола, називається епіциклоїдою. У випадку руху всередині коло крива називається гіпоциклоїдою. Скласти рівняння епіциклоїди.*

Розв'язання. Нехай початок координат розміщений у центрі O нерухомого кола. Вісь Ox проведемо через те положення точки A, яке нас цікавить, тобто в якому вона є точкою дотику обох кіл. Тоді рухоме коло перейде у нове положення, яке вказане на рисунку, точка A перейде в точку M. Геометричне місце точок M нам і потрібно визначити.



Позначимо через a радіус нерухомого кола, а через m_a – радіус рухомого кола. Виберемо за параметр кут $t = \angle MCB$ між радіусом CM, що сполучає центр кола, яке рухається, з точкою M і радіусом CB, який проведено в точку дотику. Вважаємо, що на початок руху цей кут дорівнює нулю.

Згідно з означенням епіциклоїди, дуга $\breve{AB}$, яка проходиться точкою дотику по нерухомому колу, дорівнює дузі $\breve{MB}$, яка проходиться точкою дотику по рухомому колу:

$$a \cdot \angle AOB = ma \cdot \angle MCB = mat,$$

$$\angle AOB = mt.$$

Виразимо координати x і y точки M через t. Маємо

$$x = OG = OE + FM = (a + ma)\cos mt + ma \sin \angle FCM,$$

але

$$\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE \text{ і } \angle OCE = \frac{\pi}{2} - mt.$$

Отже,

$$\angle FCM = (1+m)y - \frac{\pi}{2} \text{ і } \sin \angle FCM = -\cos(1+m)t,$$

$$x = a((1+m)\cos mt - m\cos(1+m)t).$$

Аналогічно знаходимо

$$y = a((1+m)\sin mt - m\sin(1+m)t).$$

Ці рівняння і визначають параметричні рівняння епіциклоїди.

Коли коло, яке котиться, дотикається нерухомого кола в тій самій точці, що й на початку руху (тобто при $t = 2\pi$), точка M опише одну вітку кривої. При подальшому русі вона буде описувати наступну вітку, подібну до першої, і т.д.

Похідні

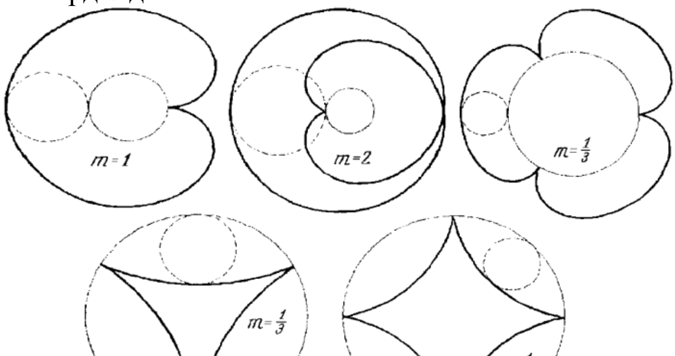
$$x'_t = -m(m+1)a(\sin mt - \sin(1+m)t),$$

$$y'_t = m(m+1)a(\cos mt - \cos(1+m)t)$$

перетворюються одночасно в 0 при $t = 2k\pi$ (де $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), тобто кожен раз, коли точка, яка розглядається на рухомому колі, є точкою дотику. Відповідні точки кривої особливі (точки звороту).

Епіциклоїди

кардіоїда



астроїда

Гіпоциклоїди

У випадку гіпоциклоїди подібним способом можна отримати такі параметричні рівняння:

$$x = a((1-m)\cos mt + m\cos(1-m)t),$$

$$y = a(-(1-m)\sin mt + m\sin(1-m)t).$$

У цих рівняннях m означає відношення радіуса рухомого кола до радіуса нерухомого, вони отримуються з рівняння епіциклоїди заміною m на $-m$.

На рисунку зображені епіциклоїди, які відповідають $m = 1{,}2, \frac{1}{3}$, і гіпоциклоїди, що відповідають $m = \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Написати рівняння геометричного місця точок, однаково віддалених від координатних осей.

(Відповідь: прямі $x \pm y = 0$).

2. Написати рівняння геометричного місця точок, які знаходяться на відстані a від осі Oy.

(Відповідь: прямі $x \pm a = 0$).

3. Написати рівняння геометричного місця точок, які знаходяться на відстані b від осі Ox.

(Відповідь: прямі $y \pm b = 0$).

4. Із точки $P(6;-8)$ проведені всеможливі промені до перетину з віссю ординат. Скласти рівняння геометричного місця їх середин.

(Відповідь: пряма $y + 4 = 0$).

5. Вивести рівняння траєкторії точки, яка в кожен момент руху однаково віддалена від точок: 1) $A(3;2)$, $B(2;3)$; 2) $A(5;-1)$, $B(1;-5)$; 3) $A(5;-2)$, $B(-3;-2)$.

(Відповідь: 1) пряма $x - y = 0$; 2) пряма $x + y = 0$;

3) пряма $x - 1 = 0$).

6. Скласти рівняння геометричного місця точок, різниця квадратів відстаней яких до точок $A(-a;0)$ і $B(a;0)$ дорівнює c.

(Відповідь: прямі $4ax \pm c = 0$).

7. Вивести рівняння кола, яке має центр у початку координат і радіус r.

(Відповідь: $x^2 + y^2 = r^2$).

8. Вивести рівняння кола, яке має центр $C(\alpha;\beta)$ і радіус r.

(Відповідь: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$).

9. Дано рівняння кола $x^2+y^2=25$. Скласти рівняння геометричного місця середин тих хорд цього кола, довжина яких дорівнює 8.

(Відповідь: $x^2+y^2=9$).

10. Скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней яких до точок $A(-3;0)$ і $B(3;0)$ дорівнює 50.

(Відповідь: $x^2+y^2=16$).

11. Вершинами квадрата є точки $A(a;0)$, $B(-a;0)$, $C(-a;-a)$ і $D(a;-a)$. Скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней яких до сторін цього квадрата – величина стала й дорівнює $6a^2$.

(Відповідь: $x^2+y^2=a^2$).

12. Через початок координат проведені всеможливі хорди кола $(x-8)^2+y^2=64$. Скласти рівняння геометричного місця середин цих хорд.

(Відповідь: $(x-4)^2+y^2=16$).

13. Вивести рівняння геометричного місця точок, сума віддалей яких до двох даних точок $F_1(-3;0)$ і $F_2(3;0)$ є величиною сталою, що дорівнює 10.

(Відповідь: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$).

14. Вивести рівняння геометричного місця точок, абсолютна величина різниці віддалей яких до двох даних точок $F_1(-5;0)$ і $F_2(5;0)$ – величина стала й дорівнює 6.

(Відповідь: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$).

15. Вивести рівняння геометричного місця точок площини, для яких віддаль від даної точки $F(3;0)$ дорівнює віддалі до прямої $x+3=0$.

(Відповідь: $y^2 = 12x$).

16. Вивести рівняння геометричного місця точок площини, сума віддалей яких до двох даних точок $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$ є величиною сталою і рівна $2a$. Це геометричне місце називається еліпсом, точки F_1 і F_2 – фокусами еліпса.

(Відповідь: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = a^2 - c^2$).

17. Вивести рівняння геометричного місця точок, абсолютна величина різниці віддалей яких до двох даних точок $F_1(-c;0)$ і $F_2(c;0)$ – величина стала й дорівнює $2a$. Це геометричне місце називається гіперболою, точки F_1 і F_2 – фокусами гіперболи.

(Відповідь: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = c^2 - a^2$).

18. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких відстань від даної точки $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ дорівнює відстані до даної прямої $x = -\frac{p}{2}$. Це геометричне місце точок називається параболою, точка F – фокусом параболи, дана пряма – її директрисою.

(Відповідь: $y^2 = 2px$).

19. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані від даної точки $F(-4;0)$ до відстані до даної прямої $4x + 25 = 0$ дорівнює $\frac{4}{5}$.

(Відповідь: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$).

20. Пряма паралельна осі Oy і відтинає на осі Ox відрізок величиною $\frac{25}{3}$. Знайти геометричне місце точок, для яких

відношення відстаней до точки $F(3;0)$ до відстані до даної прямої дорівнює $\frac{3}{5}$.

(Відповідь: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$).

21. Пряма паралельна осі ординат і відтинає на осі абсцис відрізок величиною $\frac{9}{5}$. Знайти геометричне місце точок, для яких відношення відстаней до точки $F(5;0)$ до відстані до даної прямої дорівнює $\frac{5}{3}$.

(Відповідь: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$).

22. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких відношення відстані від даної точки $F(-5;0)$ до відстані до даної прямої $5x+16=0$ дорівнює $\frac{5}{4}$.

(Відповідь: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$).

23. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких найкоротші віддалі до двох даних кіл $(x+3)^2+y^2=1$, $(x-3)^2+y^2=81$ рівні між собою.

(Відповідь: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$).

24. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких найкоротші віддалі до двох даних кіл $(x+10)^2+y^2=289$, $(x-10)^2+y^2=1$ рівні між собою.

(Відповідь: права вітка гіперболи $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$).

25. Вивести рівняння геометричного місця точок, для яких найкоротша віддаль до даного кола $(x-5)^2+y^2=9$ і до даної прямої $x+2=0$ рівні між собою.

(Відповідь: $y^2=20x$).

26. Пряма перпендикулярна полярній осі і відтинає на ній відрізок, що дорівнює 3. Скласти рівняння цієї прямої в полярних координатах.

(Відповідь: $\rho\cos\theta=3$).

27. Промінь виходить із полюса і нахилений до полярної осі під кутом $\frac{\pi}{3}$. Скласти рівняння цього променя в полярних координатах.

(Відповідь: $\theta=\frac{\pi}{3}$).

28. Пряма проходить через полюс і нахилена до полярної осі під кутом 45^0. Скласти рівняння цієї прямої в полярних координатах.

(Відповідь: $tg\theta=1$).

29. В полярних координатах скласти рівняння геометричного місця точок, відстань яких до полярної осі дорівнює 5.

(Відповідь: $\rho\sin\theta+5=0$, $\rho\sin\theta-5=0$, $\rho=5$).

30. Коло радіуса $R=5$ проходить через полюс, його центр лежить на полярній осі. Скласти рівняння цього кола в полярній системі координат.

(Відповідь: $\rho=10\cos\theta$).

31. Коло радіуса $R=3$ дотикається полярної осі в полюсі. Скласти рівняння цього кола в полярній системі координат.

(Відповідь: умову задачі задовольняють два кола, рівняння яких в полярних координатах $\rho+6\sin\theta=0$, $\rho-6\sin\theta=0$).

32. Знайти геометричне місце точок, для яких сума квадратів відстаней від двох сталих точок є величиною сталою.

(Відповідь: коло).

33. Знайти геометричне місце точок, для яких відстань від точки $A(4;0)$ удвічі більше за відстань від точки $B(1;0)$.

(Відповідь: коло $x^2+y^2=4$).

34. Прямокутний трикутник із катетами a і b рухається так, що вершини його гострих кутів ковзають по взаємно перпендикулярних прямих. Знайти лінію, яку описує при цьому русі вершина прямого кута.

(Відповідь: відрізок двох прямих, який проходить через точку перетину двох даних прямих).

35. Знайти геометричне місце точок, сума квадратів відстаней яких до трьох даних точок – величина стала.

(Відповідь: коло, центр якого співпадає з центром ваги системи із трьох даних точок, в яких розміщені рівні маси).

36. Знайти геометричне місце точок, сума квадратів відстаней яких до сторін прямокутника стала, за умови, що цьому геометричному місцю належить одна з вершин прямокутника.

(Відповідь: коло, описане навколо даного прямокутника).

37. Дано два кола. Знайти геометричне місце точок, дотичні з яких, які проведені до цих двох кіл, мають рівні довжини.

(Відповідь: пряма, перпендикулярна до лінії центрів даних кіл, у випадку, коли кола не перетинаються; якщо кола перетинаються, то шуканим геометричним місцем є всі точки прямої, які проходить через точки перетину даних кіл, за винятком точок цієї прямої, які лежать усередині даних кіл; якщо кола дотикаються, то шуканим геометричним місцем є їх спільна дотична, за винятком точки дотику).

38. Дано коло з центром в початку координат і радіусом r і точка $A(a;0)$ поза ним. Знайти геометричне місце точок, відстань від яких до точки A дорівнює довжинам дотичних, які проведені із цих точок до кола.

(Відповідь: пряма).

39. Дано точку O і пряму l, яка не проходить через точку O. Нехай P – змінна точка прямої l. На промені OP береться точка M, така, що $OP \cdot OM = k$, де k – задане додатне число. Знайти геометричне місце точок M.

(Відповідь: коло).

40. Біля початку координат O, як центра кола, описано два кола з радіусами a і b. Промінь, який обертається навколо точки O, перетинає ці кола відповідно в точках A і B. Через точку B проведена пряма, яка паралельна осі абсцис, а через точку A – пряма, паралельна осі ординат. Знайти лінію, яку описує точка M, що є точкою перетину цих двох прямих при обертанні променя.

(Відповідь: якщо через φ позначити кут від осі Ox до радіуса OA, а через x і y – позначити координати довільної точки шуканого геометричного місця, то параметричні рівняння шуканого параметричного місця мають вигляд $x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi$ або $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$).

41. В трикутнику зі сталою площею S, який обмежений осями координат і прямою, яка їх перетинає, опущено перпендикуляр із вершини прямого кута на гіпотенузу. Знайти геометричне місце точок, що є основами цих перпендикулярів у вказаних трикутниках.

(Відповідь: $(x^2 + y^2)^2 = 2Sxy$).

42. Відрізок сталої довжини ковзає своїми кінцями по сторонах прямого кута. Точка M ділить цей відрізок на дві частини, довжини яких a і b. Знайти лінію, яку описує точка M при русі відрізка.

(Відповідь: еліпс).

43. Знайти геометричне місце точок, добуток відстаней яких до двох сталих точок $F_1(-b;0)$ і $F_2(b;0)$ – величина стала й дорівнює a^2 (овал Кассіні).

(Відповідь: $(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = a^4 - b^4$).

44. Визначити геометричне місце середин відрізків дотичних до кола $x^2 + y^2 = R^2$, які знаходяться між осями координат.

(Відповідь: $R^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$).

45. Прямокутник, дві сторони якого співпадають з осями координат, змінюється так, що його діагональ зберігає сталу

величину a. Лінія, яка описується основою перпендикуляра, опущеного з вершини прямокутника, протилежної до початку координат, на його діагональ, називається астроїдою. Знайти рівняння астроїди.

(Відповідь: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$).

46. Написати в полярних координатах рівняння прямої, яка перпендикулярна до полярної осі й відтинає на ній відрізок $OA = a$.

(Відповідь: $r = \dfrac{a}{\cos\varphi}$).

47. Написати рівняння кола радіусом a в полярних координатах, прийнявши за полюс точку O на колі, а за полярну вісь діаметр OA.

(Відповідь: $r = 2a\cos\varphi$).

48. Знайти геометричне місце основ перпендикулярів, які опущені з нерухомої точки на дотичні до даного кола, приймаючи за полюс полярної системи координат нерухому точку, а за полярну вісь – пряму, яка сполучає цю точку з центром кола. Відстань від даної точки до центра кола позначається через a, радіус кола – через b.

(Відповідь: $r = a\cos\varphi + b$).

49. На колі радіусом a взято точку O і через неї проведено діаметр OA. Навколо точки O обертається промінь, який перетинає коло в змінній точці B. На цьому промені по обидва боки від точки B відкладаються відрізки $BM_1 = BM_2 = AB$. Написати рівняння лінії, яку описують точки M_1 і M_2 при обертанні променя.

(Відповідь: два кола $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 2a^2$, $(x-a)^2 + (y+a)^2 = 2a^2$).

50. Відрізок сталої довжини $2a$ ковзає своїми кінцями по сторонах прямого кута. Знайти лінію, яку описує при цьому русі відрізка основа перпендикуляра, проведеного з вершини прямого кута на відрізок (у полярних і декартових координатах).

(Відповідь: $r = a\sin 2\varphi$ або $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$).

51. На колі радіусом a взято точку O. Через точку K, яка діаметрально протилежна точці O, до кола проведена дотична. Навколо точки O обертається пряма, яка перетинає коло й дотичну відповідно в точках A і B. Із точки A проведена пряма, паралельна дотичній, а із точки B – пряма, паралельна діаметру OK. Знайти геометричне місце точок перетину цих прямих, приймаючи за початок прямокутної системи координат точку O, а за вісь абсцис діаметр OK.

(Відповідь: $x = 2a\cos^2\varphi$, $y = 2atg\varphi$, де φ – полярний кут, або $x = \dfrac{8a^3}{y^2 + 4a^2}$).

РОЗДІЛ 2
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

§2.1. Вектори. Лінійні операції над векторами. Лінійна залежність векторів

2.1.1. Основні означення

Означення. *Два невироджені напрямлені відрізки* $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{CD}$ *(у просторі, на площині, на прямій) називаються колінеарними, якщо прямі* AB *і* CD *або паралельні, або збігаються (позначення:* $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$*). Вироджений напрямлений відрізок* $\overrightarrow{AA}$ *вважають колінеарним з будь-яким напрямленим відрізком* $\overrightarrow{BC}$.

Невироджені напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються *однаково напрямленими*, якщо вони колінеарні й лежать в одній півплощині відносно прямої, що проходить через їх початки (див. рис. 1) та *протилежно напрямленими*, якщо вони колінеарні й лежать в різних півплощинах відносно цієї прямої (див. рис. 2). Якщо напрямлені відрізки однаково напрямлені, то кажуть також, що такі напрямлені відрізки мають *однаковий напрям*. Якщо ж напрямлені відрізки протилежно напрямлені, то кажуть також, що такі напрямлені відрізки мають *протилежний напрям*.

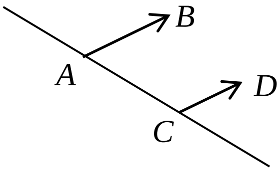


Рис. 1
(однаковий напрямок)

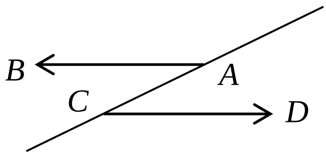


Рис. 2
(протилежний напрямок)

Означення. *Два напрямлені відрізки* $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{CD}$ *називаються рівними (позначення:* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$*), якщо вони* *однаково напрямлені та їх довжини рівні, тобто якщо виконуються такі умови:*

1) довжини відрізків AB і CD рівні;

2) напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні;

3) напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ мають однаковий напрям.

Означення. *Вільним (або геометричним) вектором $\vec{a}$ називається клас усіх рівних між собою напрямлених відрізків.*

Означення. *Нульовим вектором називається клас всіх вироджених напрямлених відрізків.*

Розглянемо два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Нехай $\overrightarrow{AB}$ – напрямлений відрізок із класу напрямлених відрізків, що утворюють вільний вектор $\vec{a}$, а $\overrightarrow{CD}$ – напрямлений відрізок із класу напрямлених відрізків, що утворюють вільний вектор $\vec{b}$.

Означення. *Ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються колінеарними, якщо колінеарні напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ (позначення: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$ – однаковий напрям, $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$ – протилежний напрям).*

Нульовий вектор вважається колінеарним до будь-якого вектора.

Означення. *Якщо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються рівними ($\vec{a}=\vec{b}$).*

Означення. *Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називаються протилежними, якщо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, тобто якщо виконуються такі умови:*

1) довжини відрізків AB і CD рівні;

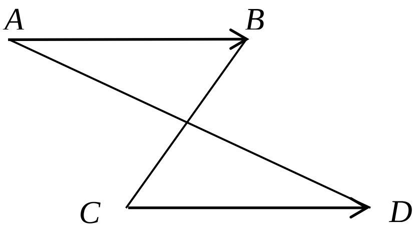
2) напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні;

3) напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ мають протилежний напрям.

Вектор, протилежний до вектора $\vec{a}$ позначатимемо $-\vec{a}$.

Означення. *Довжиною або модулем вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB. Довжину виродженого* *відрізка вважаємо рівною нулеві. Довжина вектора позначається символами:* $|\vec{a}|$ або $|\overrightarrow{AB}|$.

Теорема 2.1.1. *Необхідною і достатньою умовою рівності напрямлених відрізків* $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{CD}$ *є співпадання середини відрізка* AD *із серединою відрізка* BC.



Доведення цієї теореми пропонуємо провести читачеві самостійно.

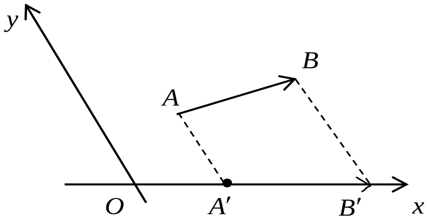
Наслідок 2.1.1. *Якщо* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, *то* $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$.

2.1.2. Координати вектора

Координатою вектора, розміщеного на координатній осі, називають координату відповідного напрямленого відрізка.

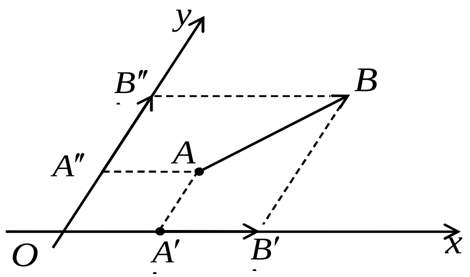
Введемо поняття координат вектора, заданого на площині. Для цього зафіксуємо на площині загальну декартову систему координат з початком у точці O.

Означення. *Проекцією напрямленого відрізка* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* Ox *паралельно осі* Oy *називається величина напрямленого відрізка* $\overrightarrow{A'B'}$, *де* A' *і* B' *– проекції точок* A *і* B *на дану вісь паралельно осі* Oy.



Проекції рівних напрямлених відрізків рівні.

Нехай $\overrightarrow{AB}$ – довільний вектор даної координатної площини, а A', B' та A'', B'' – проекції точок A, B на осі Ox і Oy паралельно осям Oy і Ox відповідно.



Означення. *Координатами вектора* $\overrightarrow{AB}$ *в загальній декартовій системі координат площини називаються числа* x *і* y, *де* x – *координата вектора* $\overrightarrow{A'B'}$ *на осі* Ox, *а* y – *координата вектора* $\overrightarrow{A''B''}$ *на осі* Oy. *Отже,* $x = \overline{A'B'}$, $y = \overline{A''B''}$.

Те, що числа x, y є координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ записують так: $\overrightarrow{AB} \equiv \vec{a} = (x; y)$.

Якщо $P(x; y)$ і $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$, то $\vec{a} = (x; y)$.

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$ в загальній декартовій системі координат простору визначаються аналогічно: $\vec{a} = (x; y; z)$, де

$x-$ координата на осі Ox вектора $\overrightarrow{A'B'}$; y – координата на осі Oy вектора $\overrightarrow{A''B''}$; z – координата на осі Oz вектора $\overrightarrow{A'''B'''}$ (A', B' – проекції точок A, B на вісь Ox паралельно площині yOz; A'', B'' – проекції точок A, B на вісь Oy паралельно площині xOz; A''', B''' – проекції точок A, B на вісь Oz паралельно площині xOy).

За допомогою декартової системи координат площини встановлюється взаємно однозначна відповідність між векторами площини і впорядкованими парами чисел.

Теорема 2.1.2. *Нехай задано вектор* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ *та координати точок* A, B *у загальній декартовій системі координат:* $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. *Тоді координати* x, y *вектора* $\overrightarrow{AB}$ *у відповідній системі координат обчислюються за формулами* $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$.

Доведення. Оскільки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то, згідно з означенням декартових координат точок площини, маємо, що $x_1 = \overline{OA'}, y_1 = \overline{OA''}, x_2 = \overline{OB'}, y_2 = \overline{OB''}$. Отже, $x = \overline{A'B'} = = \overline{OB'} - \overline{OA'} = x_2 - x_1$, $y = \overline{A''B''} = \overline{OB''} - \overline{OA''} = y_2 - y_1$.

Аналогічне твердження справджується і в просторі: якщо $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

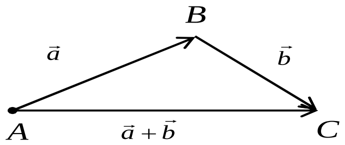
Нагадаємо також (див. розділ 1, стор. 48), що правильною є формула

$$np_l\, \overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\varphi,$$

де l – деяка вісь, φ – кут між вектором $\overrightarrow{AB}$ та віссю l.

2.1.3. Лінійні операції над векторами

***Означення**. Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладений від кінця вектора $\vec{a}$.*



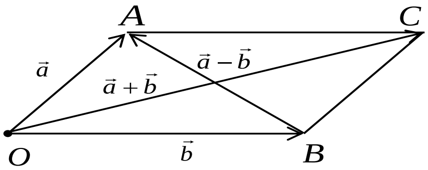
(правило «трикутника»)

У випадку, коли вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - колінеарні, даний трикутник вироджується у відрізок.

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ однаково напрямлені, то їх сума $\vec{a}+\vec{b}$ – це вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладений від кінця вектора $\vec{a}$, при цьому його довжина рівна сумі довжин відповідних векторів.

Якщо ж вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - колінеарні, але протилежно напрямлені, то їх сума $\vec{a}+\vec{b}$ – це вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – із кінцем вектора $\vec{b}$, за умови, що вектор $\vec{b}$ відкладений від кінця вектора $\vec{a}$, при цьому його довжина рівна різниці довжин відповідних векторів і його напрямок співпадає з напрямком того з векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, довжина якого більша.

Суму двох неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна побудувати і так: відкладаємо від довільної точки O вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ і будуємо паралелограм $OACB$ зі сторонами OA і OB. Тоді $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}.$



(правило «паралелограма»)

Оскільки суміжні сторони паралелограма – не паралельні, то дане правило не можна використати, у випадку колінеарних векторів.

Дія додавання векторів має такі властивості:

1. $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ (асоціативність),
2. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$,
3. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$,
4. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (комутативність)

(тут $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – довільні вектори, $\vec{0}$ – нульовий вектор, $-\vec{a}$ – вектор, протилежний до вектора $\vec{a}$).

Означення. *Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{x}$, що $\vec{x}+\vec{b}=\vec{a}$.*

Різниця $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів завжди існує, і вона єдина.

Зауваження. За правилом паралелограма легко перевірити, що у випадку неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, їхня різниця $\vec{a}-\vec{b}$ це вектор, початок якого співпадає з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець – із кінцем вектора, які відкладені від однієї точки. Отже, різниця векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ лежить на іншій діагоналі паралелограма, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$.

Означення. *Добутком $\lambda\cdot\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на число $\lambda\in R$ у випадку $\left|\vec{a}\right|\neq 0$, $\lambda\neq 0$ називається вектор, модуль якого дорівнює $\left|\lambda\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$ і який однаково напрямлений із вектором $\vec{a}$,* *якщо* $\lambda > 0$*, і протилежно напрямлений з* $\vec{a}$*, якщо* $\lambda < 0$. *Якщо* $\lambda = 0$*, або* $\vec{a} = \vec{0}$*, то, за означенням,* $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Операція множення вектора на число володіє властивостями:

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$,
2. $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a}$,
3. $(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$,
4. $\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

(тут $\vec{a}$, $\vec{b}$ – довільні вектори, а $\lambda, \mu \in R$).

Доведемо, наприклад, властивість 2. Нехай $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a}) = \vec{p},$ $(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{a} = \vec{q}.$ Покажемо, що $\vec{p} = \vec{q}$. Маємо:

$$|\vec{p}| = |\lambda| \cdot |\mu \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\vec{a}|,$$

$$|\vec{q}| = |\lambda \mu| \cdot |\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\mu| \cdot |\vec{a}|.$$

Отже, $|\vec{p}| = |\vec{q}|$. Доведемо, що $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. Якщо числа λ, μ одного знаку, то вектор $\vec{p}$ однаково напрямлений з $\vec{a}$ і $\vec{q}$ однаково напрямлений з $\vec{a}$. Отже, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q}$. У випадку, коли числа λ, μ протилежних знаків, $\vec{p} \uparrow\downarrow \vec{a}$, $\vec{q} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Отже, $\vec{p} \uparrow\uparrow \vec{q},$ що й треба було довести.

Доведемо, наприклад, ще властивість 4. Нехай точка A довільна і $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Тоді $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$. Відкладемо тепер від точки A вектор $\vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Тоді з рівності $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ маємо $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{a}$, тобто $\overrightarrow{DC}$ – це вектор $\vec{a}$, відкладений від точки D. Отже, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$ і тому $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Означення. *Ортом ненульового вектора* $\vec{a}$ *називається одиничний вектор, колінеарний з* $\vec{a}$ *та однаково напрямлений з ним.*

Зауважимо, що:

1. Вектор $(-\vec{a})$, протилежний до вектора $\vec{a}$, дорівнює $(-1)\vec{a}$.

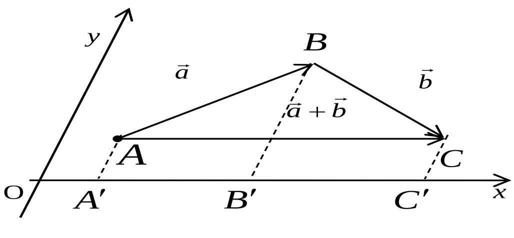
2. Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектор $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \overrightarrow{a^0}$ є одиничним вектором, що має той самий напрям, що й вектор $\vec{a}$ (тобто $\overrightarrow{a^0}$ – орт вектора $\vec{a}$). Звідки $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a^0}$.

3. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й $\vec{a} \neq \vec{0}$, то відношенням векторів $\vec{b}$ і $\vec{a}$ називається таке число λ, що $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{b}$.

2.1.4. Сума векторів і добуток вектора на число в координатах

Теорема 2.1.3. *Координати суми двох векторів дорівнюють сумам відповідних координат доданків, тобто якщо відносно загальної декартової системи координат на площині задано вектори* $\vec{a} = (x_1; y_1)$ *і* $\vec{b} = (x_2; y_2)$, *то* $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$.

Доведення. Нехай в загальній декартовій системі



координат площини $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Спроектуємо вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ на вісь Ox паралельно осі Oy. Тоді: $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$. Оскільки точки A', B', C' належать осі Ox, то за теоремою Шаля $\overline{A'B'} + \overline{B'C'} = \overline{A'C'}$, тобто $np._{Ox}(\vec{a} + \vec{b}) = np._{Ox}\vec{a} + np._{Ox}\vec{b}$.

Але, за означенням координат вектора,

$$np._{Ox}\vec{a} = x_1,\ np._{Ox}\vec{b} = x_2,$$

$\left(np._{Ox}\vec{a} + np._{Ox}\vec{b}\right)$ – перша координата вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

Аналогічно доводимо теорему для другої координати.

Аналогічне твердження правильне і у просторовому випадку. *Різницею* $\vec{a} - \vec{b}$ *векторів* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *називається такий вектор* $\vec{x}$*, що* $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$.

Наслідок 2.1.2. *Координати різниці* $\vec{a} - \vec{b}$ *двох векторів дорівнюють різницям відповідних координат* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *, тобто якщо* $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$, *то* $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ *(в загальній декартовій системі координат).*

Теорема 2.1.4 *Координати добутку вектора на число дорівнюють добутку цього числа на відповідні координати вектора, тобто якщо відносно загальної декартової системи координат задано вектор* $\vec{a} = (x; y)$ *(на площині) або* $\vec{a} = (x; y; z)$ *(у просторі), то:*

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x; \lambda y) \text{ (на площині)},$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x; \lambda y; \lambda z) \text{ (у просторі)}.$$

Доведення. Доведемо твердження теореми для першої координати. Очевидно:

$$np._{Ox}(\lambda\vec{a}) = (\lambda np._{Ox}\vec{a}) = \lambda\ np._{Ox}\vec{a} = \lambda x.$$

Для координат y, z – аналогічно.

2.1.5. Лінійна залежність векторів

Означення. *Вектори* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ *називаються лінійно залежними, якщо існують такі числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *, серед яких є принаймні одне відмінне від нуля, такі, що правильна рівність:*

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k = \vec{0}.$$

Якщо ж вказана рівність справджується лише при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = 0,$ *то вектори* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ *називаються лінійно незалежними.*

Сума добутків чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *на вектори* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$*, тобто вектор*

$\vec{p} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k \vec{a}_k$, *називається лінійною комбінацією векторів* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

Якщо вектор $\vec{p}$ подано у вигляді лінійної комбінації векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$, то кажуть, що *вектор* $\vec{p}$ *розкладено за векторами* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$.

Отже, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \ldots \vec{c}$ лінійно залежні, якщо хоч один із них можна розкласти за іншими.

Система лінійно незалежних векторів не містить нульового вектора. Справді, якщо в деякій системі векторів є нульовий вектор: $\vec{0}, \vec{a}_1, ..., \vec{a}_n$, то виконується рівність $1 \cdot \vec{0} + 0 \cdot \vec{a}_1 + ... + 0 \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$, тому така система лінійно залежна.

Для системи двох і трьох векторів поняття лінійної залежності тісно пов'язане з колінеарністю і компланарністю векторів.

Справедливі такі твердження.

Теорема 2.1.5. *Для того, щоб два вектори* $\vec{a}_1$ *і* $\vec{a}_2$ *були лінійно залежними, необхідно й достатньо, щоб вони були колінеарними.*

Доведення. 1) Необхідність. Дано: вектори $\vec{a}_1$ *і* $\vec{a}_2$ – лінійно залежні. Доведемо, що вони колінеарні. Оскільки $\vec{a}_1$ *і* $\vec{a}_2$ – лінійно залежні, то існують числа λ_1, λ_2, серед яких принаймні одне відмінне від нуля, такі, що

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 = \vec{0}.$$

Нехай, наприклад, $\lambda_1 \neq 0$; тоді:

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 \Rightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2.$$

2) Достатність. Дано: вектори $\vec{a}_1$ *і* $\vec{a}_2$ – колінеарні. Доведемо, що вони лінійно залежні.

Якщо, наприклад, $\vec{a}_1 = \vec{0}$, то $1 \cdot \vec{a}_1 + 0 \cdot \vec{a}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2$ – лінійно залежні.

Якщо ж $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, визначивши число λ як відношення векторів $\vec{a}_2$ та $\vec{a}_1$, отримаємо $\vec{a}_2 = \lambda \vec{a}_1$, або $-\lambda \cdot \vec{a}_1 + 1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{0}$ $\Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2$ – лінійно залежні. Твердження доведено.

Означення. *Три вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або паралельні одній площині.*

Теорема 2.1.6. *Для того, щоб три вектори були лінійно залежні, необхідно й достатньо, щоб вони були компланарні.*

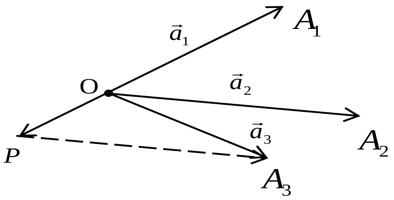
Доведення. 1) Необхідність. Дано: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – лінійно залежні вектори. Доведемо, що вони компланарні.

Оскільки $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – лінійно залежні вектори, то існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (не всі рівні нулеві), що $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3 = \vec{0}$. Нехай, наприклад, $\lambda_3 \neq 0$, тоді $\vec{a}_3 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \vec{a}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \vec{a}_2$. Вектори $-\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \vec{a}_1$ і $-\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \vec{a}_2$ колінеарні до векторів $\vec{a}_1$ *і* $\vec{a}_2$. Якщо $-\frac{\lambda_1}{\lambda_3} \vec{a}_1 = \vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $-\frac{\lambda_2}{\lambda_3} \vec{a}_2 = \vec{c} = \overrightarrow{BC}$, то внаслідок додавання двох векторів маємо, що $\overrightarrow{a_3} = \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AC},$ тобто вектори $\overrightarrow{a_3}, \vec{b}, \vec{c}$ лежать у площині, що проходить через точки A, B, C. Це й означає компланарність векторів $\overrightarrow{a_3}, \vec{b}, \vec{c}$, а отже, й компланарність векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

2) Достатність. Дано: вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – компланарні. Доведемо, що вони лінійно залежні. Якщо $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$, то $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ – лінійно залежні, тобто існують λ_1, λ_2 (не всі рівні нулю) і такі,

що $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2=\vec{0}$; але тоді $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+0\cdot\vec{a}_3=\vec{0}$. Отже, $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ – лінійно залежні.

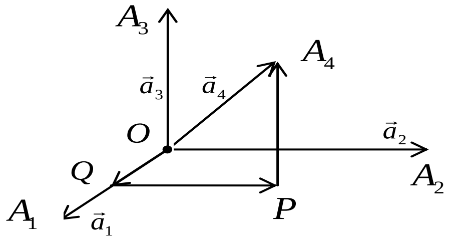
Нехай вектори $\vec{a}_1$ *і* $\vec{a}_2$ – неколінеарні. Відкладемо вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ від однієї точки O: $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2}=\vec{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3}=\vec{a}_3$. Оскільки вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ – компланарні, то точки O,A_1,A_2,A_3 лежать в одній площині.



Спроектуємо точку A_3 на пряму OA_1, паралельно до прямої OA_2. Нехай P – ця проекція. Тоді $\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_3}$ і, оскільки $\overrightarrow{OP}\parallel\vec{a}_1$, $\overrightarrow{PA_3}\parallel\vec{a}_2$, $\overrightarrow{a_1}\neq\vec{0},\overrightarrow{a_2}\neq\vec{0}$, то знайдуться числа λ_1,λ_2, такі, що $\overrightarrow{OP}=\lambda_1\vec{a}_1$, $\overrightarrow{PA_3}=\lambda_2\vec{a}_2$. Отже, $\vec{a}_3=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2$, тобто вектори $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ – лінійно залежні.

Теорема 2.1.7. *Будь-які чотири вектори* $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4$ *в просторі лінійно залежні.*

Доведення. Нехай $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ – некомпланарні вектори.



Відкладемо всі чотири вектори від однієї точки $\overrightarrow{OA_4} = \vec{a}_4$ O: $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{a}_3$, $\overrightarrow{OA_4} = \vec{a}_4$. Нехай P – проекція точки A_4 на площину OA_1A_2 паралельно до прямої OA_3, а Q – проекція точки P на пряму OA_1 паралельно до OA_2. Тоді $\vec{a}_4 = \overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA_4}$, причому $\overrightarrow{OQ} \parallel \vec{a}_1$, $\overrightarrow{QP} \parallel \vec{a}_2$ $\overrightarrow{PA_4} \parallel \vec{a}_3$.

Зауважимо, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ ненульові, бо, за припущенням, вони некомпланарні і тому лінійно незалежні. Отже, існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, такі, що $\overrightarrow{OQ} = \lambda_1 \vec{a}_1$, $\overrightarrow{QP} = \lambda_2 \vec{a}_2$, $\overrightarrow{PA} = \lambda_3 \vec{a}_3$. Тоді $\vec{a}_4 = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \lambda_3 \vec{a}_3$, звідки випливає, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ – лінійно залежні.

Якщо ж вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ компланарні, то вони лінійно залежні й тому вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ теж лінійно залежні. Твердження доведено.

Теорема 2.1.8. *Для того, щоб два ненульових вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ були колінеарні, необхідно й достатньо, щоб їх координати були пропорційні.*

Проведемо доведення даної теореми для випадку, коли вектори задані у тривимірній декартовій системі координат.

Доведення. 1) Необхідність: Дані вектори $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ та $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ – колінеарні. Треба довести, що їх координати пропорційні.

Оскільки $\vec{a}_1 \neq \vec{0}$, то, позначаючи через λ відношення векторів $\vec{a}_2$ та $\vec{a}_1$, отримаємо рівність $\vec{a}_2 = \lambda\vec{a}_1$, яка рівносильна співвідношенню $(x_2; y_2; z_2) = \lambda(x_1; y_1; z_1)$, звідки $x_2 = \lambda x_1$, $y_2 = \lambda y_1$, $z_2 = \lambda z_1$.

2) Достатність. Дано, що координати векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ та $\vec{a} = (x_2; y_2; z_2)$ пропорційні. Треба довести, що ці вектори колінеарні.

Нехай $x_2 = \lambda x_1, y_2 = \lambda y_1, z_2 = \lambda z_1$, тоді $\vec{a}_2 = \lambda\vec{a}_1$, і, отже, вектори $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ та $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$ – колінеарні.

Теорема 2.1.9. *Для того, щоб вектори* $\vec{a}_1$ *і* $\vec{a}_2$*, задані своїми координатами відносно загальної декартової системи координат на площині або відносно загальної декартової системи координат у просторі* $\left(\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1), \vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)\right)$*, були колінеарні, необхідно й достатньо, щоб*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \textit{(у випадку площини)}$$

і

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \ \textit{(у випадку простору).}$$

Доведення теореми 2.1.9 пропонуємо провести читачеві самостійно.

Теорема 2.1.10. *Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох ненульових векторів* $\vec{a}_1 = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{a}_2 = (x_2; y_2; z_2)$, $\vec{a}_3 = (x_3; y_3; z_3)$*, заданих своїми* *координатами відносно загальної декартової системи координат, є рівність*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення. Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – компланарні тоді і тільки тоді, коли вони лінійно залежні (див. теорему 2.1.6). Отже, $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ (де не всі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ рівні нулеві), що покоординатно записується так:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0, \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = 0, \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 = 0. \end{cases}$$

Ця однорідна система лінійних рівнянь відносно невідомих $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ є сумісною і невизначеною, отже, її визначник дорівнює нулеві:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема доведена.

Наслідок 2.1.3. *Точки* $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3), M_4(x_4; y_4; z_4)$ *задані своїми координатами в загальній декартовій системі координат простору, належатимуть одній площині тоді і тільки тоді, коли вектори* $\overrightarrow{M_4M_1}$, $\overrightarrow{M_4M_2}$, $\overrightarrow{M_4M_3}$ *компланарні, тобто тоді і лише тоді, коли*

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

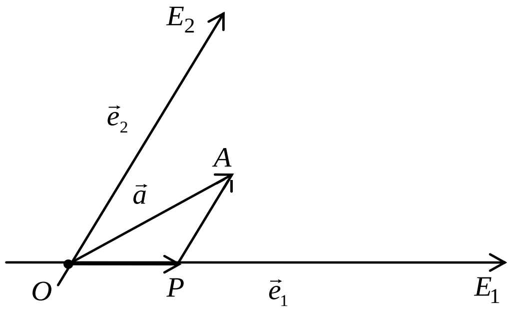
2.1.6. Базис векторів

Означення. *Базисом на координатній осі називається будь-який ненульовий вектор. Базисом на площині називається впорядкована пара неколінеарних векторів* $\vec{e}_1$ *і* $\vec{e}_2$*, що лежать у цій площині. Базисом у просторі називається впорядкована трійка некомпланарних векторів* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Теорема 2.1.11. *Будь-який вектор* $\vec{a}$*, компланарний з двома неколінеарними векторами* $\vec{e}_1$ *і* $\vec{e}_2$*, може бути, і при цьому єдиним способом, розкладений за цими векторами.*

Доведення. Доведемо існування розкладу. Відкладемо всі вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ і $\vec{a}$ від однієї і тієї ж точки O: $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

Оскільки вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, і $\vec{a}$ компланарні, то точки O, E_1, E_2, A лежать в одній площині.



Нехай P – проекція точки A на пряму OE_1 паралельно до прямої OE_2. Тоді $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{OP}$ і $\overrightarrow{PA}$ відповідно колінеарні з ненульовими векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$, то існують числа $\{x, y\} \in R$, такі, що $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1$, $\overrightarrow{PA} = y\vec{e}_2$. Отже, $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.

Доведемо єдиність розкладу. Нехай існує ще один розклад $\vec{a} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$. Тоді $x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$, або $(x - x')\vec{e}_1 + (y - y')\vec{e}_2 = \vec{0}$.

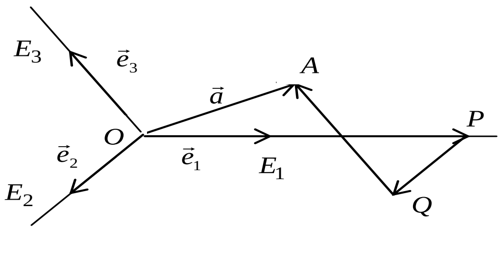
Якщо хоча б одна з різниць $x - x'$ або $y - y'$ була б відмінна від нуля, то останнє співвідношення означало б, що вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ лінійно залежні, а тому колінеарні, що суперечить умові. Отже, $x - x' = 0$, $y - y' = 0$, тобто $x = x'$, $y = y'$.

Теорема 2.1.12. *Будь-який вектор* $\vec{a}$ *простору може бути, і при цьому єдиним способом, розкладений за трьома некомпланарними векторами* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ *і* $\vec{e}_3$.

Доведення. Доведемо спочатку існування розкладу. Відкладемо всі вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ і $\vec{a}$ від однієї точки O:

$$\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1,\ \overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2,\ \overrightarrow{OE_3} = \vec{e}_3,\ \overrightarrow{OA} = \vec{a}\cdot$$

Нехай Q – проекція точки A на площину E_1OE_2 паралельно прямій OE_3, а P – проекція точки Q на пряму OE_1 паралельно прямій OE_2. Тоді, скориставшись означенням суми векторів, можна записати таку векторну рівність: $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA}$.



Оскільки $\overrightarrow{OP} \parallel \vec{e_1}$, $\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{e_2}$, $\overrightarrow{OA} \parallel \vec{e_3}$, то $\overrightarrow{OP} = x\vec{e_1}$, $\overrightarrow{PQ} = y\vec{e_2}$, $\overrightarrow{QA} = z\vec{e_3}$, де $\{x, y, z\} \in R$. Тоді $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

Доведення єдиності розкладу проведемо методом від супротивного. Нехай існує ще один розклад вектора $\vec{a}$ за векторами $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$:

$$\vec{a} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3.$$

Тоді

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3,$$

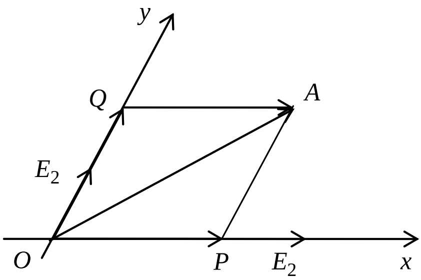
тобто

$$(x - x')\vec{e}_1 + (y - y')\vec{e}_2 + (z - z')\vec{e}_3 = 0.$$

Якщо хоча б одне із чисел $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ не дорівнює нулю, то останнє співвідношення означає, що вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ лінійно залежні, а тому й компланарні, що суперечить умові теореми. Отже, $x - x' = 0$, $y - y' = 0$, $z - z' = 0$, тобто $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. Єдиність доведено.

Теорема 2.1.13. *Координати x та y вектора $\vec{a}$, що лежить у деякій площині збігаються з коефіцієнтами в розкладі вектора $\vec{a}$ за масштабними векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ загальної декартової системи координат у цій площині . Тобто* $\vec{a} = (x; y) \equiv x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.

Доведення. Нехай вектор $\vec{a}$ лежить у площині, в якій введено загальну декартову систему координат xOy з масштабними векторами $\overrightarrow{OE_1} = \vec{e}_1$ і $\overrightarrow{OE_2} = \vec{e}_2$. Відкладемо початок вектора $\vec{a}$ від початку координат. Нехай $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Скориставшись теоремою 2.1.11, розкладемо вектор $\vec{a}$ за векторами $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$: $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$.



Виберемо на осях Ox і Oy точки P і Q так, що $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OQ} = y\vec{e}_2$. Тоді $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$. Отже, $\overrightarrow{OP}$ – проекція вектора $\overrightarrow{OA}$ на вісь Ox паралельно осі Oy, а $\overrightarrow{OQ}$ – проекція вектора $\overrightarrow{OA}$ на Oy паралельно до осі Ox. Тоді зі співвідношень $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1$ $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{e_1}$ $\overrightarrow{OQ} = y\vec{e}_2$ та з означення координат вектора отримуємо, що x і y – координати вектора $\vec{a}$. Отже,

$$\vec{a} = (x; y) \equiv x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Аналогічна теорема до теореми 2.1.13 справедлива і у випадку простору.

Означення. *Радіус-вектором довільної точки M площини або простору називається вектор $\overrightarrow{OM}$, де O – довільним чином вибрана, але фіксована точка площини (або простору).*

Зауваження. Із теорем 2.1.12 і 2.1.13 випливає, що загальні декартові координати точки M дорівнюють координатам її радіус–вектора $\overrightarrow{OM}$, де O – початок координат.

Зауваження. Твердження теореми 2.1.13 можна прийняти і за означення координат вектора.

Приклади розв’язування задач

2.1.1. *Нехай* $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=8$, *кут між векторами* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ – 60^0. *Знайти* $|\vec{a}-\vec{b}|$ *і* $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Розв’язання. Якщо на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$ побудувати паралелограм $OBCA$ так, як вказано в пункті 2.1.3, то, як випливає з правила паралелограма додавання ненульових векторів, вектор $\vec{a}+\vec{b}$ лежить на діагоналі побудованого паралелограма, що виходить зі спільного початку векторів, причому його початок співпадає із цією точкою, а кінець – із протилежною вершиною паралелограма. Отже, $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$, а довжина $|\vec{a}+\vec{b}|$ дорівнює довжині відповідної діагоналі. Різниця векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, як відомо, – вектор, який лежить на іншій діагоналі паралелограма, тобто $\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}$.

За теоремою косинусів, маємо, що

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^0=5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=49,$$

звідки $|\vec{a}-\vec{b}|=7$.

Для знаходження довжини іншої діагоналі, досить з`ясувати, що інший кут паралелограма дорівнює 120^0, і використати цей самий спосіб.

Або ж можна скористатися відомою властивістю паралелограмів, про те, що сума квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин його сторін. Тобто

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2+|\vec{a}-\vec{b}|^2=2\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2\right),$$

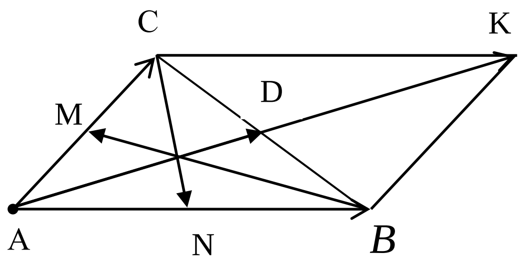
звідки знаходимо, що $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{129}$.

Зауваження. Інший спосіб розв’язування даної задачі див.

у § 2.2 (приклад 2.2.7).

2.1.2. *У трикутнику* ABC *проведено медіани* AD, BM, CN. *Довести рівність* $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

Розв'язання. Добудуємо паралелограм $ACKB$ таким чином: із точки C відкладемо вектор $\overrightarrow{CK}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$,

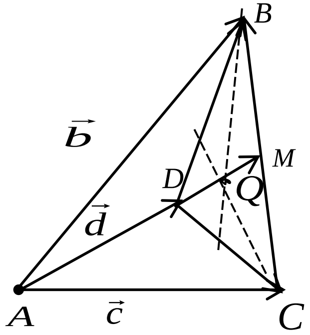


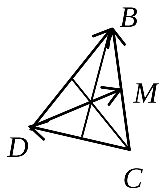
а з точки B – вектор $\overrightarrow{BK}$, такий, що $\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AC}$. Оскільки AD – медіана трикутника ABC, то точка D – точка перетину діагоналей паралелограма, а тому $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$. За правилом паралелограма додавання векторів, маємо, що $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)$. Аналогічно, $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)$ та $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$. Додаючи одночасно ці рівності та враховуючи при цьому, що сума протилежних векторів дорівнює нульовому вектору, отримаємо:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\vec{0}.$$

2.1.3. В *тетраедрі* $ABCD$ *дано ребра, що виходять із вершини* A: $\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AC}=\vec{c},\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. *Виразити через ці вектори решту ребер тетраедра, медіану* $\overrightarrow{DM}$ *грані* BCD *та* *вектор* $\overrightarrow{AQ}$, *де* $Q-$ *центр ваги трикутника* BCD *(центр ваги – точка перетину медіан трикутника).*

Розв'язання. За правилом трикутника додавання векторів знайдемо вектори $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\vec{b}-\vec{d}$; $\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\vec{b}-\vec{d}+\vec{d}-\vec{c}=\vec{b}-\vec{c}$, а також медіану $\overrightarrow{DM}$ грані BCD: $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{d}-(\vec{d}+\vec{c})\right)=$
$=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-2\vec{d}+\vec{c}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{d}.$





Оскільки точка Q перетину медіан ділить їх у відношенні $2:1$, починаючи від вершин, то з трикутника BCD знайдемо, що $\overrightarrow{DQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{b}-2\vec{d}+\vec{c}\right).$

З трикутника ADQ випливають співвідношення
$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ}=\vec{d}+\frac{1}{3}\left(\vec{b}-2\vec{d}+\vec{c}\right)=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}.$$

2.1.4. *Перевірити, які з векторів* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *є лінійно залежними. У випадку, коли це можливо, виразити вектор* $\vec{c}$ *через вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *:*

a) $\vec{a}=(6;-18;12), \vec{b}=(-8;24;-16), \vec{c}=(8;7;3)$;

b) $\vec{a}=(6;4;2), \vec{b}=(-9;6;3), \vec{c}=(-3;6;3)$.

Розв'язання. *a*) Згідно з теоремами 2.1.6 та 2.1.10 обчислимо визначник, складений із координат цих векторів: $\begin{vmatrix} 6 & -18 & 12 \\ -8 & 24 & -16 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 2496 \neq 0,$ а тому дані вектори не є компланарними, тобто вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні.

b) Можна побачити, що визначник складений з координат векторів – нульовий: $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -9 & 6 & 3 \\ -3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0,$ тобто дані три вектора лінійно залежні. З означення лінійно залежних векторів випливає, що існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не всі одночасно рівні нулеві, такі, що лінійна комбінація $\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c} = \vec{0}$ або $\lambda_1(6;4;2) + \lambda_2(-9;6;3) + \lambda_3(-3;6;3) = \vec{0}.$ Виконуючи дії множення векторів на числа та додавання векторів, матимемо:

$$(6\lambda_1 - 9\lambda_2 - 3\lambda;4\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_3;2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3) = \vec{0}.$$

З означення рівності двох векторів випливає, що

$$\begin{cases} 6\lambda_1 - 9\lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ 4\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи дану однорідну систему отримаємо, що впорядкована трійка $\left(\frac{3}{4}\lambda_2; \lambda_2; -\frac{3}{2}\lambda_2\right), \lambda_2 \in R$ є розв'язком цієї системи. Візьмемо, наприклад, $\lambda_2 = 4$. Тоді, підставляючи

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -6$ у початкову рівність, знайдемо, що $3\vec{a} + 4\vec{b} - 6\vec{c} = \vec{0}$. Звідси $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

2.1.5. *Дано вектор* $\vec{a} = (6;-8)$. *Знайти координати одиничного вектора, який колінеарний з* $\vec{a}$ *і:*

a) однаково напрямлений із вектором $\vec{a}$*;*

b) протилежно напрямлений із вектором $\vec{a}$.

Розв'язання. Відомо, що орт $\vec{a}^0$ вектора $\vec{a}$ дорівнює $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ (див. зауваження 1, 2 з пункту 2.1.3), тому $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(6;-8)}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \left(\frac{6}{10}; \frac{-8}{10}\right) = \left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$ та протилежний йому вектор $-\vec{a}^0 = \left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}\right)$. Отже, шуканими векторами є $\vec{a}^0$ та $-\vec{a}^0$, причому $\vec{a}^0 \uparrow\uparrow \vec{a}$ та $-\vec{a}^0 \uparrow\downarrow \vec{a}$.

2.1.6. *Показати, що якими б не були три вектори* $\vec{a}, \vec{b}$ *та* $\vec{c}$ *і три числа* λ, μ, γ, *то вектори* $\lambda\vec{a} - \mu\vec{b}$, $\gamma\vec{b} - \lambda\vec{c}, \mu\vec{c} - \gamma\vec{a}$ *компланарні.*

Розв'язання. Користуючись теоремою 2.1.6 покажемо, що дані три вектори лінійно залежні, тобто компланарні. Для цього розглянемо їхню лінійну комбінацію $k_1(\lambda\vec{a} - \mu\vec{b}) + k_2(\gamma\vec{b} - \lambda\vec{c}) + k_3(\mu\vec{c} - \gamma\vec{a}) = \vec{0}$, яку перепишемо в такому вигляді:

$$(k_1\lambda - k_3\gamma)\vec{a} + (k_2\gamma - k_1\mu)\vec{b} + (k_3\mu - k_2\lambda)\vec{c} = \vec{0}.$$

Далі розглянемо два можливі випадки:

a) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні. Отже, усі три коефіцієнти одночасно дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{cases} k_1\lambda - k_3\gamma = 0, \\ k_2\gamma - k_1\mu = 0, \\ k_3\mu - k_2\lambda = 0. \end{cases}$$

Безпосередньо знаходимо, що головний визначник даної однорідної відносно невідомих k_1, k_2, k_3 системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -\gamma \\ -\mu & \gamma & 0 \\ 0 & -\lambda & \mu \end{vmatrix} = \lambda\mu\gamma - \lambda\mu\gamma = 0.$$

Отже, дана однорідна система рівнянь має і ненульові розв'язки k_1, k_2, k_3. Це рівносильно тому, що існує впорядкована трійка чисел k_1, k_2, k_3, які одночасно не дорівнюють нулю, така, що

$$(k_1\lambda - k_3\gamma)\vec{a} + (k_2\gamma - k_1\mu)\vec{b} + (k_3\mu - k_2\lambda)\vec{c} = \vec{0}.$$

Звідси випливає, що вектори $\lambda\vec{a} - \mu\vec{b}, \gamma\vec{b} - \lambda\vec{c}, \mu\vec{c} - \gamma\vec{a}$ – лінійно залежні, тобто компланарні.

b) Нехай $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно залежні вектори, тобто компланарні. Отже, усі три вектори $\lambda\vec{a} - \mu\vec{b}, \gamma\vec{b} - \lambda\vec{c}, \mu\vec{c} - \gamma\vec{a}$ – лінійно залежні, як лінійна комбінація компланарних (лінійно залежних) векторів.

2.1.7. *З однієї точки площини відкладені вектори* $\vec{a} = (-12;16)$ *та* $\vec{b} = (12;5)$. *Знайти координати одиничного вектора, відкладеного з тієї ж точки, який ділить кут між векторами* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *навпіл.*

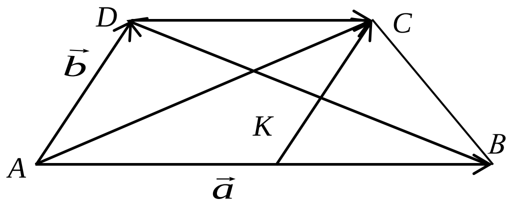
Розв'язання. Якщо на одиничних векторах $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{(-12;16)}{\sqrt{(-12)^2 + 16^2}} = \left(-\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$ та $\vec{b}^0 = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{(12;5)}{\sqrt{12^2 + 5^2}} =$

$=\left(\dfrac{12}{13};\dfrac{5}{13}\right)$ побудувати паралелограм, то він буде ромбом, в якому діагональ є бісектрисою. Тоді знайдемо вектор $\vec{c}$, який співпадає з бісектрисою та лежить на діагоналі, отже дорівнює сумі цих одиничних векторів $\vec{a}^0$ та $\vec{b}^0$, тобто $\vec{a}^0+\vec{b}^0=\left(\dfrac{21}{65};\dfrac{77}{65}\right)=\dfrac{7}{65}(3;11)$.

Оскільки вектор $\vec{c}$ *колінеарний із вектором* $\vec{d}=(3;11)$, *то шуканий одиничний вектор* $\vec{c}^0=\dfrac{\vec{d}}{|\vec{d}|}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{130}};\dfrac{11}{\sqrt{130}}\right)$.

2.1.8. *У рівнобічній трапеції* $ABCD$ *відома нижня основа* $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, *бічна сторона* $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ *і кут між ними* $\angle A=\dfrac{\pi}{3}$. *Розкласти за базисом* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *усі вектори, що складають решту сторін і діагоналі трапеції.*

Розв'язання. За правилом трикутника, маємо, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, звідки $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$. З умови



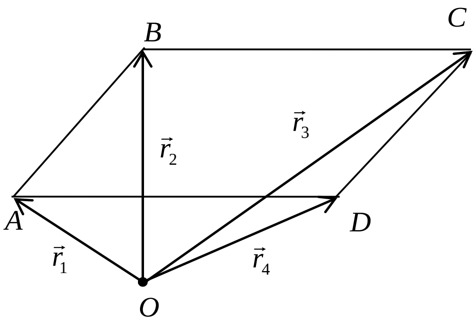
колінеарності векторів $\vec{a}$ та $\overrightarrow{DC}$ випливає, що $\overrightarrow{DC}=\left|\overrightarrow{DC}\right|\overrightarrow{DC}^0=\left|\overrightarrow{DC}\right|\vec{a}^0$, де $\overrightarrow{DC}^0, \vec{a}^0$ – орти векторів $\overrightarrow{DC}$ та $\vec{a}$ відповідно. Проведемо вектор $\overrightarrow{KC}$, рівний вектору $\vec{b}$, при цьому початок вектора – точка K, належатиме прямій AB. Враховуючи, що $\overrightarrow{KC}=\vec{b}$ та трапеція $ABCD$ – рівнобічна, а отже, $\angle CBK = \angle CKB = \dfrac{\pi}{3}$, матимемо, що трикутник CBK – рівносторонній: $\left|\overrightarrow{CB}\right| = \left|\overrightarrow{KB}\right| = \left|\vec{b}\right|$. Тоді $\left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{AK}\right| = \left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|$.

Тому $\overrightarrow{DC} = \left(\left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|\right)\vec{a}^{\,0} = \dfrac{\left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$. З цього самого трикутника видно, що. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK} + \vec{b} = \left|\overrightarrow{BK}\right|\vec{a}^{\,0} + \vec{b} = -\left|\vec{b}\right|\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|} + \vec{b} = -\dfrac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a} + \vec{b}.$

За правилом трикутника додавання векторів маємо, що $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \dfrac{\left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}$. Отже, $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$,

$$\overrightarrow{BC} = -\frac{\left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{CD} = \frac{\left|\vec{b}\right| - \left|\vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a}, \quad \overrightarrow{AC} = \frac{\left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|}\vec{a} + \vec{b}.$$

2.1.9. *Дано радіус-вектори $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ і $\vec{r}_3$ трьох послідовних вершин A, B, C паралелограма. Знайти радіус-вектор четвертої вершини D.*



Розв'язання. Нехай радіус-вектори $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ відкладені від точки O. Розглянемо трикутник AOB (див. рис.). Очевидно, що $\vec{r}_1 + \overrightarrow{AB} = \vec{r}_2$. Тоді $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \overrightarrow{DC}$.

Із трикутника OCD дістаємо співвідношення $\vec{r}_4 = \vec{r}_3 + \overrightarrow{CD}.$

Отже, $\vec{r}_4 = \vec{r}_3 - \overrightarrow{DC} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 + \vec{r}_1 = \vec{r}_1 + \vec{r}_3 - \vec{r}_2$.

2.1.10. *Дано три вектори* $\vec{a}=(3,-1),\vec{b}=(1,-2)$, $\vec{c}=(-1,7)$. *Визначити розклад вектора* $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ *за базисом* $\vec{a}$, $\vec{b}$.

Розв'язання. Оскільки вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ не колінеарні, бо

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

то вони дійсно утворююёть базис на площині. Знайдемо насамперед координати вектора $\vec{p}$, а потім – його розклад за вказаним базисом:1

$$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(3,-1)+(1,-2)+(-1,7)=(3,4).$$

Знайдемо $\alpha,\beta\in R$, такі, що $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}=\vec{p}$. Останню рівність запишемо покоординатно $\alpha(3,-1)+\beta(1,-2)=(3,4)$, звідки:

$$\begin{cases} 3\alpha+\beta=3, \\ -\alpha-2\beta=4. \end{cases}$$

Розв'язками останньої системи лінійних рівнянь є числа $\alpha=2,\beta=-3$. Таким чином, $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

Зазначимо, що можна було спочатку розкладати за базисними векторами не сам шуканий вектор $\vec{p}$, а лише вектор $\vec{c}$. При додаванні до нього векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ знайдемо і шуканий вектор $\vec{p}$.

2.1.11. *До вершин куба прикладено сили* $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$, *рівні за величиною 1,2,3 відповідно і напрямлені по діагоналях граней куба, що проходять через цю вершину. Знайти величину рівнодійної цих трьох сил.*

Розв'язання. Проекція x сили $\vec{F}_1$ на вісь Ox дорівнює її проекції y на вісь Oy. Розглядаючи площину XOY як площину грані, що містить силу $\vec{F}_1$, а також враховуючи попереднє зауваження, маємо, що $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{x}{\left|\vec{F}_1\right|}=\frac{x}{1}$. Звідси

$x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, тому перша сила $\vec{F}_1=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$. Міркуючи

аналогічно для двох інших сил, матимемо, що $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{y}{\left|\vec{F}_2\right|}=\frac{y}{2}$,

$y=\sqrt{2}$, $\vec{F}_2=\left(0;\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{z}{3}$, $z=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\vec{F}_3=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2};0;\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. Враховуючи, що рівнодійна сила

$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$, отримаємо $\vec{F}=\left(2\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, звідки

$\left|\vec{F}\right|=5.$

2.1.12. *У трикутнику ABC проведена бісектриса AD кута A. Виразити вектор $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.*

Розв'язання. З трикутника ABD маємо, що $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\left|\overrightarrow{BD}\right|\overrightarrow{BD^0}$, де $\overrightarrow{BD^0}$ – орт вектора $\overrightarrow{BD}$.

Якщо позначити довжину вектора $\overrightarrow{BD}$ через m, а довжину вектора $\overrightarrow{DC}$ через n, тоді $\overrightarrow{BD}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$. При цьому бісектриса AD кута A ділить протилежну сторону трикутника у відношенні, що рівне відношенню відповідних сторін : $\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\left|\overrightarrow{BD}\right|}{\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\frac{m}{n}$, тому існує коефіцієнт подібності k, такий що $\left|\overrightarrow{AB}\right| = km, \left|\overrightarrow{AC}\right| = kn$. З останніх формул отримаємо, що $\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{k} = m, \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{k} = n$. Тому

$$\overrightarrow{BD} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC} = \frac{\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{k}}{\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{k} + \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{k}}\overrightarrow{BC} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|}\overrightarrow{BC}.$$

І, отже, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|}\overrightarrow{BC} =$

$$= \frac{\overrightarrow{AB}\left|\overrightarrow{AB}\right| + \overrightarrow{AB}\left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right|\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

З трикутника ABC маємо, що $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, і підставляючи цей вираз у попередній, отримаємо, що:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB}\left|\overrightarrow{AB}\right| + \overrightarrow{AB}\left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{AB}\right|\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\overrightarrow{AC}\left|\overrightarrow{AB}\right| + \overrightarrow{AB}\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right|}.$$

Завдання для самостійної роботи

У всіх наведених нижче задачах система координат – прямокутна декартова.

1. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати кожний з таких векторів: 1) $\vec{a} + \vec{b}$, 2) $\vec{a} - \vec{b}$, 3) $\vec{b} - \vec{a}$, 4) $-\vec{a} - \vec{b}$.

2. На трьох некомпланарних векторах $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ і $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ побудовано паралелепіпед. Вказати ті його вектори-діагоналі, які відповідно дорівнюють $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ і $\vec{b}-\vec{a}-\vec{c}$.

3. Дано: $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ і $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$.

(Відповідь: 22).

4. Дано: $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ і $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$

(Відповідь: 20).

5. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}|=5$ і $|\vec{b}|=12$.

(Відповідь: $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=13$).

6. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=30^0$, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=4$. Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

(Відповідь: $|\vec{a}+\vec{b}|=5, |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$).

7. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб справджувалось одне з таких співвідношень: 1) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$, 2) $|\vec{a}+\vec{b}|>|\vec{a}-\vec{b}|$, 3) $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$.

(Відповідь: 1) $\vec{a}\perp\vec{b}$, 2) $\angle(\vec{a},\vec{b})<\frac{\pi}{2}$, 3) $\angle(\vec{a},\vec{b})>\frac{\pi}{2}$).

8. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a}+\vec{b}$ ділив навпіл кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

(Відповідь: $|\vec{a}|=|\vec{b}|$).

9. Дано три вектори $\vec{a}=(5;3), \vec{b}=(2;0), \vec{c}=(4;2)$. Підібрати числа α та γ так, щоб вектори $\alpha\vec{a}, \vec{b}, \gamma\vec{c}$ утворювали

трикутник, якщо початок вектора $\vec{b}$ співпадає з кінцем вектора $\alpha\vec{a},$ а початок вектора $\gamma\vec{c}$ – з кінцем вектора $\vec{b}.$

(Відповідь: $\alpha = 2; \gamma = -3$).

10. У трикутнику знайти таку точку, що сума векторів, відкладених від цієї точки до вершин трикутника, дорівнює $\vec{0}$.

(Відповідь: центр ваги трикутника).

11. У паралелограмі $ABCD$ позначено сторони $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$; M – точка перетину діагоналей. Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ утворюють базис, і виразити вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{MD}$ у цьому базисі.

(Відповідь: $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right), \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right),\ \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA},$ $\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MB}$).

12. Користуючись паралелограмом, побудованим на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, перевірити на рисунку справедливість тотожностей:

1) $(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a}$,

2) $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{b}$,

3) $\vec{a} + (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b}$,

4) $\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$,

5) $\frac{\vec{a} - \vec{b}}{2} + \vec{b} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

13. Три вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ є сторонами трикутника. Через $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виразити вектори, що збігаються з медіанами трикутника $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ і $\overrightarrow{CP}$.

(Відповідь: $\overrightarrow{AM} = \vec{c} + \frac{\vec{a}}{2}$ або $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right)$; $\overrightarrow{BN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CP} = \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$).

14. У трикутнику з попередньої задачі виразити всі вектори-медіани за базисом $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

(Відповідь: $\overrightarrow{AM} = -\left(\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$).

15. Сторона BC трикутника ABC поділена на п'ять рівних частин і всі точки поділу D_1, D_2, D_3, D_4 сполучені з протилежною вершиною A. Довести, що вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ і $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$ утворюють базис. Знайти вирази для векторів $\overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{D_2A}$, $\overrightarrow{D_3A}$, $\overrightarrow{D_4A}$ у цьому базисі.

(Відповідь: $\overrightarrow{D_1A} = -\left(\vec{c} + \frac{\vec{a}}{5}\right), \overrightarrow{D_2A} = -\left(\vec{c} + \frac{2\vec{a}}{5}\right),$
$\overrightarrow{D_1A} = -\left(\vec{c} + \frac{3\vec{a}}{5}\right), \overrightarrow{D_1A} = -\left(\vec{c} + \frac{4\vec{a}}{5}\right)$).

16. Вектори $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$ є діагоналями паралелограма $ABCD$. Виразити через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA},$ які є сторонами цього паралелограма.

(Відповідь: $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{a}\right), \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$).

17. Знаючи радіус-вектори $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ вершин трикутника, знайти радіус-вектор точки перетину його медіан.

(Відповідь: $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}$).

18. Знаючи радіус-вектори $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$, $\vec{r}_1{}'$ чотирьох вершин A, B, C, A_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, знайти радіус-вектори чотирьох інших його вершин.

(Відповідь: $\vec{r}_4 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \vec{r}_3$, $\vec{r}_2{}' = \vec{r}_1{}' - \vec{r}_1 + \vec{r}_2$, $\vec{r}_3{}' = \vec{r}_1{}' - \vec{r}_1 + \vec{r}_3$,
$\vec{r}\,'_4 = \vec{r}\,'_1 - \vec{r}_2 + \vec{r}_3$).

19. Радіус-вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1, \overrightarrow{OB} = \vec{r}_2, \overrightarrow{OC} = \vec{r}_3$ служать ребрами паралелепіпеда. Знайти радіус-вектор точки перетину діагоналі

паралелепіпеда, що виходить із вершини O, з площиною, що проходить через вершини A, B і C.

(Відповідь: $\vec{r} = \dfrac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}$).

20. У чотирикутнику $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{n}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{p}$, $\overrightarrow{DA} = \vec{q}$. Знайти вектор $\overrightarrow{EF}$, що з'єднує середини діагоналей $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{BD}$ трикутника.

(Відповідь: $\overrightarrow{EF} = \dfrac{\vec{m} + \vec{p}}{2} = -\dfrac{\vec{n} + \vec{q}}{2}$).

21. У правильному шестикутнику $ABCDEF$ дано: $\overrightarrow{AB} = \vec{m}$, $\overrightarrow{AE} = \vec{n}$. Розкласти за цими векторами вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{EF}$.

(Відповідь: $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{2}\vec{m} + \dfrac{1}{2}\vec{n},$ $\overrightarrow{AD} = \vec{m} + \vec{n},$ $\overrightarrow{AF} = -\dfrac{1}{2}\vec{m} + \dfrac{1}{2}\vec{n},$

$\overrightarrow{EF} = -\dfrac{1}{2}\vec{m} - \dfrac{1}{2}\vec{n}$).

22. У ромбі $ABCD$ дано вектори-діагоналі $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкласти за цими векторами усі вектори-сторони ромба: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

(Відповідь: $\overrightarrow{AB} = \dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{BC} = \dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{2}$, $\overrightarrow{CD} = -\dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{2}$,

$\overrightarrow{DA} = -\dfrac{\vec{a}}{2} - \dfrac{\vec{b}}{2}$).

23. У трикутнику ABC сторона BC поділена точкою D у відношенні $m:n$, тобто $\overrightarrow{BD} = \dfrac{m}{n}\overrightarrow{DC}$. Розкласти вектор $\overrightarrow{AD}$ за векторами $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$.

(Відповідь: $\overrightarrow{AD} = \dfrac{m}{m+n}\vec{b} + \dfrac{n}{m+n}\vec{c}$).

24. Вершина D паралелограма $ABCD$ сполучена з точкою K, що лежить на стороні BC, такою, що $BK : KC = 2:3$. Вершина B сполучена з точкою L, що лежить на стороні CD, такою, що $CL : LD = 5:3$. В якому відношенні точка M перетину прямих DK і BL ділить відрізки DK і BL?

(Відповідь: $DM : MK = 3:2, BM : ML = 16:9$).

25. У тетраедрі $ABCD$ точки K і L – відповідно середини ребер AC і BD, O – точка перетину медіан грані ACD. Знайти: 1) координати вектора $\overrightarrow{BO}$ в базисі $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$; 2) координати вектора KL у базисі $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AC}$.

(Відповідь: $\overrightarrow{BO} = \left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{KL} = \left(-\frac{1}{2};1;0\right)$).

26. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ та їхню довжину:

1) $A(5;-1;2)$, $B(1;2;1)$,

2) $A(4;-5;2)$, $B(2;-3;1)$,

3) $A(7;3;-2)$, $B(4;3;2)$,

4) $A(3;-2;2)$, $B(-1;0;2)$.

(Відповідь: 1) $\overrightarrow{AB} = (-4;3;-1), \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{26}$, 2) $\overrightarrow{AB} = (-2;2;-1)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3,$ 3) $\overrightarrow{AB} = (-3;0;4)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 5$, 4) $\overrightarrow{AB} = (-4;2;0)$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{20}$).

27. Знайти точку N, з якою збігається кінець вектора $\vec{a} = (3;-1;4)$, якщо його початок збігається з точкою $M(1;2;-3)$.

(Відповідь: $N(4;1;1)$).

28. Точки K та L є серединами сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Позначивши $\overrightarrow{AK} = \vec{k}$ і $\overrightarrow{AL} = \vec{l}$, виразити через вектори $\vec{k}$ і $\vec{l}$ вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$.

(Відповідь: $\overrightarrow{BC} = \frac{4\vec{l} - 2\vec{k}}{3}, \overrightarrow{CD} = \frac{2\vec{l} - 4\vec{k}}{3}$).

29. Визначити початок вектора $\vec{a} = (2;-3;-1)$, якщо його кінець збігається з точкою $(1;-1;2)$.

(Відповідь: $(-1;2;3)$).

30. Обчислити модуль вектора $\vec{a} = (3;-6;2)$.

(Відповідь: $|\vec{a}| = 7$).

31. Дано дві координати вектора $a_x = 4$, $a_y = -12$. Визначити третю координату a_z, якщо $|\vec{a}| = 13$.

(Відповідь: $a_z = \pm 3$).

32. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомі кути α, β, γ, які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz, і його довжина:
1) $|\vec{a}| = 4$, $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 120^0$, 2) $|\vec{a}| = 4$, $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$, $\gamma = 60^0$, 3) $|\vec{a}| = 8$, $\alpha = 135^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 60^0$, 4) $|\vec{a}| = 2$, $\alpha = 120^0$, $\beta = 45^0$, $\gamma = 120^0$.

(Відповідь: 1) $(2\sqrt{2};2;-2)$, 2) $(2;2\sqrt{2};2)$; 3) $(-4\sqrt{2};4;4)$, 4) $(-1;\sqrt{2};-1)$).

33. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути:
1) $\alpha = 60^0$, $\beta = 120^0$, $\gamma = 45^0$, 2) $\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 135^0$, 3) $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$, $\gamma = 30^0$, 4) $\alpha = 120^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma = 150^0$?

(Відповідь: 1) може; 2) не може; 3) не може; 4) не може).

34. Чи може вектор утворювати з двома координатними осями просторової декартової системи координат кути: 1) $\alpha = 45^0$, $\beta = 30^0$, 2) $\alpha = 150^0$, $\beta = 90^0$, 3) $\alpha = 60^0$, $\beta = 45^0$, 4) $\alpha = 120^0$, $\beta = 30^0$?

(Відповідь: : 1) не може; 2) може; 3) може; 4) може).

35. Довести, що коли площина відтинає на осях координат відрізки довжин a, b, c, то довжина перпендикуляра p,

опущеного на цю площину з початку координат, задовольняє співвідношення $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{p^2}$.

36. Вектор $\vec{a}$ утворює з координатними осями Ox і Oy кути $\alpha=60^0$, $\beta=120^0$. Знайти його координати, якщо $|\vec{a}|=2$.

(Відповідь: $\vec{a}=\left(1;-1;\sqrt{2}\right)$).

37. Визначити координати точки M, якщо її радіус-вектор утворює з координатним осями однакові кути і його модуль дорівнює $3\sqrt{3}$.

(Відповідь: $M\left(3;3;3\right)$).

38. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{e}$, якщо задано вектор $\vec{a}$ і кут φ між векторами:

1) $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\varphi=60^0$, 2) $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$, $\varphi=0^0$,

3) $\vec{a}=(1;2;-3)$, $\varphi=120^0$, 4) $\vec{a}=(0;3;-4)$, $\varphi=150^0$.

(Відповідь: 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\sqrt{26}$; 3) $-\sqrt{\frac{7}{2}}$; 4) $-\frac{5\sqrt{3}}{2}$).

39. Дано два вектори: $\vec{a}=(4;-1;7)$ і $\vec{b}=(-1;2;1)$. Знайти проекції на координатні осі векторів: 1) $\vec{a}-\vec{b}$, 2) $\vec{a}+3\vec{b}$, 3) $(-2\vec{a}+\vec{b})-2\vec{b}$, 4) $-\vec{a}-2\vec{b}+5(\vec{a}+\vec{b})$.

(Відповідь: 1) 5 на вісь Ox, -3 на вісь Oy, 6 на вісь Oz; 2) 1 на вісь Ox, 5 на вісь Oy, 10 на вісь Oz; 3) -7 на вісь Ox, 0 на вісь Oy, -15 на вісь Oz; 4) 15 на вісь Ox, -6 на вісь Oy, 27 на вісь Oz).

40. Перевірити колінеарність векторів $\vec{a}=(3;-2;1)$ і $\vec{b}=(-9;6;-3)$.

(Відповідь: $\vec{b}=-3\vec{a}$).

41. Визначити, при яких значеннях α і β вектори $\vec{a}=(-6;\beta;2)$ і $\vec{b}=(\alpha;4;-1)$ колінеарні.

(Відповідь: $\alpha = 3, \beta = -8$).

42. Дано точки $A(5;0;2)$, $B(-3;3;-1)$, $C(1;2;-3)$, $D(5;-4;3)$. Чи можуть вони бути вершинами трапеції?

(Відповідь: можуть).

43. Дано точки $A(-1;5;-10)$, $B(5;-7;8)$, $C(2;2;-7)$, $D(5;-4;2)$. Перевірити, чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

(Відповідь: так, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$).

44. Дано вектор $\vec{a} = (-8;4;1)$. Знайти одиничний вектор, який має такий напрямок, що й вектор $\vec{a}$.

(Відповідь: $\vec{a}^0 = \left(-\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{1}{9}\right)$).

45. Знайти орт вектора $\vec{a} = (6;-2;-3)$.

(Відповідь: $\vec{a}_0 = (\frac{6}{7};-\frac{2}{7};-\frac{3}{7})$)

46. Визначити модулі суми і різниці векторів $\vec{a} = (3;-5;8)$ і $\vec{b} = (-1;1;-4)$.

(Відповідь: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 6, \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 14$).

47. Представити вектор $\vec{c}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ в кожному з випадків:

1) $\vec{a} = (4;-2), \vec{b} = (3;5), \vec{c} = (1;-7)$;

2) $\vec{a} = (5;4), \vec{b} = (-3;0), \vec{c} = (19;8)$;

3) $\vec{a} = (4;-2), \vec{b} = (3;5), \vec{c} = (1;-7)$.

(Відповідь: 1) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, 2) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, 3) $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a}$).

48. Представити вектор $\vec{d}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ у кожному з таких випадків:

1) $\vec{a} = (2;3;1), \vec{b} = (5;7;0), \vec{c} = (3;-2;4), \vec{d} = (4;12;-3)$;

2) $\vec{a} = (5;-2;0), \vec{b} = (0;-3;4), \vec{c} = (-6;0;1), \vec{d} = (25;-22;16)$;

3) $\vec{a}=(3;5;6), \vec{b}=(2;-7;1), \vec{c}=(12;0;6), \vec{d}=(0;20;18)$.

(Відповідь: 1) $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, 2) $\vec{d}=5\vec{a}+4\vec{b}$, 3) $\vec{d}=4\vec{a}-\vec{c}$).

49. Встановити, в яких із нижче наведених випадків трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ лінійно залежна, і в тому випадку, коли це можливо, подати вектор $\vec{c}$ як лінійну комбінацію векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) $\vec{a}=(5;2;1), \vec{b}=(-1;4;2), \vec{c}=(-1;-1;6)$;

2) $\vec{a}=(6;4;2), \vec{b}=(-9;6;3), \vec{c}=(-3;6;3)$;

3) $\vec{a}=(6;-18;12), \vec{b}=(-8;24;-16), \vec{c}=(8;7;9)$.

(Відповідь: 1) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}-$ лін. незалежні, 2) $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$,

3) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}-$ лін. залежні, але $\vec{a} \parallel \vec{b}$).

50. Два вектори $\vec{a}=(2;-3;6)$ і $\vec{b}=(-1;2;-2)$ виходять з однієї точки. Визначити координати вектора $\vec{c}$, напрямленого по бісектрисі кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, за умови, що $|\vec{c}|=3\sqrt{42}$.

(Відповідь: $\vec{c}=(-3;15;12)$).

51. Вектори $\overrightarrow{AB}=(2;6;-4)$ і $\overrightarrow{AC}=(4;2;-2)$ збігаються зі сторонами трикутника ABC. Визначити координати векторів-медіан $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$.

(Відповідь: $\overrightarrow{AM}=(3;4;-3), \overrightarrow{BN}=(0;-5;3), \overrightarrow{CP}=(-3;1;0)$).

52. Дано вершини трикутника $A(3;-7)$, $B(5;2)$ і $C(-1;0)$. Знайти координати точок, що є серединами його сторін.

(Відповідь: $\left(4;-\frac{5}{2}\right), \left(1;-\frac{7}{2}\right), (2;1)$).

53. Знайти довжини медіан трикутника, знаючи координати його вершин $A(3;-2)$, $B(5;2)$, $C(-1;4)$.

(Відповідь: $\sqrt{26}, \sqrt{17}, \sqrt{41}$).

54. Дано дві точки $A(2;-1)$, $B(1;1)$. Знайти координати точки N, що симетрична точці B відносно точки A.

(Відповідь: $N(3;-3)$).

55. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $M(1;-1)$, $N(-2;4)$ і $P(-3;2)$.

(Відповідь: $(0;-3),(2;1),(-6;7)$).

56. Знайти вершини трикутника, якщо середини його сторін $P(3;-2)$, $Q(1;6)$ і $R(-4;2)$.

(Відповідь: $(-2;-6),(8;2),(-6;10)$).

57. Дано три вершини паралелограма: $A(4;-4)$, $B(6;-2)$ і $C(0;4)$. Визначити четверту вершину D, яка протилежна до B.

(Відповідь: $D(-2;2)$).

58. Дано три вершини паралелограма: $A(3;1)$, $B(4;6)$ і $C(-4;3)$. Визначити четверту вершину D, яка протилежна до B.

(Відповідь: $(-5;-2)$).

59. Дано координати двох суміжних вершин паралелограма $A(-4,5;-7)$ і $B(2;6)$ і точку перетину діагоналей $M(3;1,5)$. Знайти координати двох інших його вершин.

(Відповідь: $C\left(10\frac{1}{2};10\right),D(4;-3)$).

60. Дано координати двох суміжних вершин паралелограма $A(-2;5)$ і $B(2;7)$ і точку перетину діагоналей $M(2;1)$. Знайти координати двох інших його вершин.

(Відповідь: $(6;-3),(2;-5)$).

61. Знаючи координати вершин трикутника $A(2;4)$, $B(4;-9)$, $C(-4;2)$, знайти довжину медіани, проведеної з вершини B.

(Відповідь: 13).

62. Відрізок, обмежений точками $A(2;-2)$, $B(5;4)$, поділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.

(Відповідь: $(3;0),(4;2)$).

63. На промені, що виходить із початку координат і проходить через точку $P(4;3)$, знайти точку D, відстань якої від початку координат дорівнює 9.

(Відповідь: $\left(7\frac{1}{5};5\frac{2}{5}\right)$).

64. Дано вершини трикутника $A(3;-4)$, $B(2;-1)$, $C(5;8)$. Знайти точку перетину бісектриси внутрішнього кута B зі стороною AC.

(Відповідь: $\left(\frac{7}{2};-1\right)$).

65. Знайти довжину бісектриси внутрішнього кута A трикутника ABC, заданого вершинами $A(4;-5)$, $B(-2;3)$, $C(0;-2)$.

(Відповідь: $\frac{14}{3}\sqrt{2}$).

66. Дано три точки $A(2;-1)$, $B(4;3)$, $C(5;5)$, що лежать на одній прямій. Визначити відношення λ, в якому кожна з них ділить відрізок, обмежений двома іншими.

(Відповідь: $\lambda_1 = \frac{AB}{BC} = 2; \lambda_2 = \frac{AC}{CB} = -3, \lambda_3 = \frac{BA}{AC} = -\frac{2}{3}$).

67. Визначити координати кінців A і B відрізка, який точками $P(2;2)$ і $Q(1;5)$ поділений на три рівні частини.

(Відповідь: $A(3;-1), B(0;8)$).

68. Знайти точку перетину діагоналей AC і BD чотирикутника з вершинами $A(2;-2)$, $B(2;5)$, $C(-1;4)$, $D(-2;-1)$.

(Відповідь: $M(0;2)$).

§ 2. Скалярне множення векторів

Означення. *Скалярним добутком* $(\vec{a},\vec{b})$ *двох ненульових векторів* с*називається добуток їх модулів на косинус кута між ними:*

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi,\ 0\le\varphi\le\pi.$$

Якщо $\vec{a}=\vec{0}$ *або* $\vec{b}=\vec{0}$ *(або* $\vec{a}=\vec{b}=\vec{0}$*), то, за означенням, вважається, що* $(\vec{a},\vec{b})=0$.

Безпосередньо з означення випливає, що *скалярний квадрат* $\vec{a}^2$ вектора, тобто скалярний добуток $(\vec{a},\vec{a})$, дорівнює квадрату модуля вектора $\vec{a}$. Справді, для $\vec{a}\ne\vec{0}$ маємо: $|\vec{a}|^2=(\vec{a},\vec{a})=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^0=|\vec{a}|^2$; для $\vec{a}=\vec{0}$, згідно з означенням, $\vec{a}^2=0$ і $|\vec{a}|=0$, тому $\vec{a}^2=|\vec{a}|$. Звідси $|\vec{a}|=\vec{a}^2$.

Зауважимо також, що з означення скалярного добутку двох векторів та означення проекції направленого відрізка на вісь випливають співвідношення

$$(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|np._{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|np._{\vec{b}}\vec{a}.$$

Означення. *Два вектори* $\vec{a}$ та $\vec{b}$ *називаються ортогональними якщо кут між ними дорівнює* 90^0.

Необхідною та достатньою умовою ортогональності двох ненульвих векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку. Справді, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ортогональні, то кут φ між ними рівний $\frac{\pi}{2}$. Тоді $\cos\varphi=0$ і $(\vec{a},\vec{b})=0$. Нехай тепер $(\vec{a},\vec{b})=0$, $\vec{a}\ne\vec{0},\vec{b}\ne\vec{0}$. Тоді $|\vec{a}|>0,|\vec{b}|>0$ і з рівності $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi=0$ випливає, що $\cos\varphi=0$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ортогональні. Якщо один із векторів нульовий, то такий вектор вважається ортогональним до довільного вектора.

Скалярний добуток двох векторів має ще такі властивості:

1. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$ (комутативність);
2. $\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right),\qquad \lambda\in R$ (асоціативність множення на число);
3. $\left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)$ (дистрибутивність).

Доведення. Властивість 1 випливає безпосередньо з означення скалярного добутку.

Доведемо властивість 2. Якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$, то

$$\left(\lambda\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|np._{\vec{b}}\left(\lambda\vec{a}\right)=\left|\vec{b}\right|\left(\lambda np._{\vec{b}}\,\vec{a}\right)=\left|\vec{b}\right|\lambda\left(np._{\vec{b}}\,\vec{a}\right)=\lambda\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Якщо ж $\vec{a}=\vec{0}$, то рівність очевидна.

Доведемо властивість 3. Якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$, то

$$\left(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|np._{\vec{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|\left(np._{\vec{a}}\vec{b}+np._{\vec{a}}\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|np._{\vec{a}}\vec{b}+$$
$$+\left|\vec{a}\right|np._{\vec{a}}\vec{c}=\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right).$$

Рівність очевидна при $\vec{a}=\vec{0}$.

Далі, природно, виникає задача зображення скалярного добутку в координатах.

Означення. *Ортонормованим базисом простору називається впорядкована трійка $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ одиничних і попарно ортогональних векторів.*

Нехай відносно ортонормованого базису простору задано два вектори своїми координатами:

$$\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},$$
$$\vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right)=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}.$$

Використовуючи властивості скалярного добутку, знаходимо:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$$
$$=x_1x_2\vec{i}^{\,2}+y_1y_2\vec{j}^{\,2}+z_1z_2\vec{k}^{\,2}+$$
$$+\left(x_1y_2+x_2y_1\right)\left(\vec{i},\vec{j}\right)+\left(y_1z_2+y_2z_1\right)\left(\vec{j},\vec{k}\right)+$$
$$+\left(z_1x_2+z_2x_1\right)\left(\vec{k},\vec{i}\right).$$

Оскільки $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні і попарно ортогональні вектори, то

$$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1,\ \left(\vec{i}, \vec{j}\right) = \left(\vec{j}, \vec{k}\right) = \left(\vec{k}, \vec{i}\right) = 0 .$$

Отже,

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 ,$$

тобто *скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами в ортонормованому базисі, дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.*

Зокрема,

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ , де } \vec{a} = \left(x; y; z\right),$$

тобто *модуль вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат, взятих відносно ортонормованого базису.*

Як наслідок, отримуємо, що косинус кута φ між двома ненульовими векторами можна обчислити за їх координатами так:

$$\cos\varphi = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^{\,2} + y_1^{\,2} + z_1^{\,2}}\sqrt{x_2^{\,2} + y_2^{\,2} + z_2^{\,2}}} ,$$

причому $x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$ – необхідна й достатня умова перпендикулярності двох ненульових векторів.

Помножимо рівність $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ скалярно на $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$. Отримаємо $x = \left(\vec{a}, \vec{i}\right)$, $y = \left(\vec{a}, \vec{j}\right)$, $z = \left(\vec{a}, \vec{k}\right)$, тобто координати x, y, z вектора $\vec{a}$ відносно ортонормованого базису дорівнюють скалярним добуткам цього вектора на одиничні вектори базису.

Якщо ж вектор $\vec{a}$ одиничний, то із останніх рівностей $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$, де α, β, γ – кути між вектором $\vec{a}$ та векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ відповідно. При цьому

$$\left|\vec{a}\right|^2 = 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Виписані три косинуси називаються *напрямними косинусами одиничного вектора* $\vec{a}$ або *напрямними косинусами осі*, що має напрямок вектора $\vec{a}$.

Якщо ж ненульовий вектор $\vec{a}$ не є одиничним, то, очевидно, маємо:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

З останніх формул випливає таке зображення координат вектора $\vec{a}$:

$$x = |\vec{a}|\cos\alpha,\ y = |\vec{a}|\cos\beta,\ z = |\vec{a}|\cos\gamma.$$

Пропонуємо читачеві сформулювати останні результати у випадку площини.

Приклади розв'язування задач

2.2.1. *Знайти довжину вектора* $\vec{a} = 6\vec{m} - 8\vec{n}$*, якщо* $\vec{m}$ *і* $\vec{n}$ *– одиничні взаємно перпендикулярні вектори.*

Розв'язання. Використовуючи властивості скалярного добутку, обчислимо квадрат модуля вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}|^2 = (\vec{a},\vec{a}) =$
$= (6\vec{m}-8\vec{n}, 6\vec{m}-8\vec{n}) = (6\vec{m},6\vec{m}) + (-8\vec{n},6\vec{m}) + (6\vec{m},-8\vec{n}) +$
$+ (-8\vec{n},-8\vec{n}) = 36(\vec{m},\vec{m}) - 48(\vec{n},\vec{m}) - 48(\vec{m},\vec{n}) + 64(\vec{n},\vec{n}) =$
$= 36|\vec{m}|^2 - 96(\vec{m},\vec{n}) + 64|\vec{n}|^2$. Оскільки $\vec{m}$ та $\vec{n}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори, то їхній скалярний добуток дорівнює нулю. Враховуючи це, отримаємо, що $|\vec{a}|^2 = 36|\vec{m}|^2 + 64|\vec{n}|^2 = 36\cdot 1 + 64\cdot 1 = 100$. Отже, $|\vec{a}| = 10$.

2.2.2. *Використовуючи скалярний добуток векторів довести теорему Піфагора.*

Розв'язання. Розглянемо довільний прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C. Тоді, виразивши за правилом трикутника додавання векторів вектор $\overrightarrow{AB}$, що співпадає з гіпотенузою через вектори-катети, знайдемо квадрат її довжини:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) =$$

$$= \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) + 2\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CB}\right) =$$

$$= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{CB}\right|^2,$$

врахувавши при цьому ортогональність векторів $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{CB}$. Отже, *в довільному прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів*.

2.2.3. *Знайти проекцію вектора* $\vec{s} = (\sqrt{2}; -3; -3)$ *на вісь, що утворює з координатними осями* Ox, Oz *кути* $\alpha = 45^0$, $\gamma = 60^0$, *а з віссю* Oy *– гострий кут* β.

Розв'язання. Виберемо одиничний вектор $\vec{e} = (x; y; z)$ даної осі, початок якого знаходиться у початку координат. Відомо, що координати x, y, z кінця вектора з початком в початку системи координат – це проекції цього вектора на осі Ox, Oy, Oz відповідно, тому

$$x = np_{Ox}\vec{e} = |\vec{e}|\cos\alpha = \cos\alpha,$$

$$y = np_{Oy}\vec{e} = |\vec{e}|\cos\beta = \cos\beta,$$

$$z = np_{Oz}\vec{e} = |\vec{e}|\cos\gamma = \cos\gamma$$

(напрямні косинуси осі), звідки

$$\vec{e} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \cos\beta; \frac{1}{2}\right).$$

З того, що вектор $\vec{e}$ – одиничний, випливає, що $\cos\beta = \pm\frac{1}{2}$. Оскільки він утворює гострий кут із віссю Oy, то $\cos\beta = \frac{1}{2} > 0$, тому $\vec{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

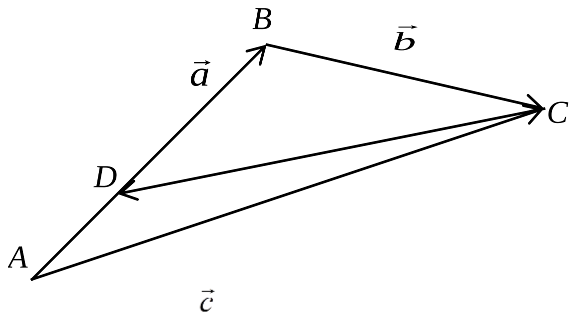
Шукану проекцію знайдемо зі співвідношень:

$$\cos\left(\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{e}\right) = \frac{(\vec{s},\vec{e})}{|\vec{s}||\vec{e}|} = \frac{1-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}{\sqrt{20}} = \frac{-2}{2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$np_{\vec{e}}\vec{s} = |\vec{s}|\cos\left(\vec{s}\,\hat{,}\,\vec{e}\right) = 2\sqrt{5}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -2.$$

2.2.4. *В трикутнику ABC точка D ділить сторону AB у відношенні $\overline{AD} : \overline{DB} = \lambda$. Виразити довжину відрізка CD через три сторони трикутника та число λ.*

Розв'язання. Введемо позначення: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. З відношення $\overline{AD} : \overline{DB} = \lambda$ випливає, що $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{DB}$,



тому

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = (\lambda+1)\overrightarrow{DB},$$

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DB}+\vec{b}=\frac{\vec{a}}{\lambda+1}+\overleftarrow{b},$$

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\left(\frac{\vec{a}}{\lambda+1}+\overleftarrow{b},\frac{\vec{a}}{\lambda+1}+\overleftarrow{b}\right)=\left|\vec{b}\right|^2+\frac{\left|\vec{a}\right|^2}{(\lambda+1)^2}+\frac{2}{\lambda+1}\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

З рівності

$$\left|\vec{c}\right|^2=\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+2\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$

знайдемо, що

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2}{2},$$

тому

$$\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\left|\vec{b}\right|^2+\frac{\left|\vec{a}\right|^2}{(\lambda+1)^2}+\frac{\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2}{\lambda+1},$$

звідки

$$CD^2=\frac{\lambda}{1+\lambda}b^2+\frac{1}{1+\lambda}c^2-\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}a^2,$$

де $a,b,c-$ довжини сторін трикутника.

2.2.5. *Дано одиничні вектори* $\vec{a},\vec{b},\vec{c},$ *такі що задовольняють умову* $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}.$ *Обчислити* $\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right).$

Розв'язання. Використовуючи властивості скалярного добутку, знайдемо квадрат модуля суми даних векторів і прирівняємо його до нуля (довжина нульового вектора дорівнює нулю):

$$\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2+$$
$$+2\left(\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)\right)=0.$$

Враховуючи той факт, що дані вектори – одиничні, знайдемо, що

$$2\left(\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)\right)=-\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{c}\right|^2\right)=-3.$$

Тому шуканий вираз $\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{a},\vec{c}\right)+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$ дорівнює $-\dfrac{3}{2}$.

2.2.6. *Нехай* $\left|\vec{a}\right|=5, \left|\vec{b}\right|=8.$ *Кут між векторами* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ – 60^0. *Знайти* $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ *і* $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

Розв'язання. Знайдемо $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos 60^0=5\cdot 8\cdot\dfrac{1}{2}=20$ і підставимо у співвідношення :

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{a}\right)+\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left(\vec{b},\vec{a}\right)+\left(\vec{b},\vec{b}\right)=$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2+2\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2=25+2\cdot 20+64=129$$

та

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{a}\right)-\left(\vec{a},\vec{b}\right)-\left(\vec{b},\vec{a}\right)+\left(\vec{b},\vec{b}\right)=$$

$$=\left|\vec{a}\right|^2-2\left(\vec{a},\vec{b}\right)+\left|\vec{b}\right|^2=25-2\cdot 20+64=49.$$

Звідси $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{129}$ *та* $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7.$

Зауваження. Інший спосіб розв'язування цієї задачі наведений у § 2.1 (приклад 2.1.1).

2.2.7. *Дано вершини трикутника* $A(3;2;-3)$, $B(5;1;-1)$ *та* $C(1;-2;1)$. *Визначити його зовнішній кут при вершині* A.

Розв'язання. Зовнішній кут трикутника ABC при вершині A можна знайти як кут між векторами $\overrightarrow{AB}=(2;-1;2)$ та $-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}=(2;4;-4)$ (або як кут між векторами $-\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$).

Оскільки

$$\cos\alpha=\frac{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{CA}\right|}=\frac{2\cdot 2-1\cdot 4+2\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}}=\frac{-8}{18},$$

то шуканий кут $\alpha=\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.

2.2.8. *Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{s}$ і $\vec{t}$, якщо відомо, що $\vec{p}=\vec{s}+2\vec{t}$ і $\vec{q}=5\vec{s}-4\vec{t}$ – взаємно перпендикулярні?*

Розв'язання. Необхідною та достатньою умовою ортогональності двох ненульових векторів є рівність нулю їхнього скалярного добутку:

$$(\vec{p},\vec{q})=\left(\vec{s}+2\vec{t},5\vec{s}-4\vec{t}\right)=5(\vec{s},\vec{s})-4\left(\vec{s},\vec{t}\right)+10\left(\vec{t},\vec{s}\right)-8\left(\vec{t},\vec{t}\right)=$$

$$=5|\vec{s}|^2+6\left(\vec{s},\vec{t}\right)-8\left|\vec{t}\right|^2=5\cdot 1+6\left(\vec{s},\vec{t}\right)-8\cdot 1=0;\ 6\left(\vec{s},\vec{t}\right)=3;$$

$\left(\vec{s},\vec{t}\right)=\frac{1}{2}$. Знайдемо косинус кута φ між двома векторами $\vec{s}$ і $\vec{t}$, за формулою: $\cos\varphi=\frac{\left(\vec{s},\vec{t}\right)}{|\vec{s}|\left|\vec{t}\right|}=\frac{\frac{1}{2}}{1\cdot 1}=\frac{1}{2}$. Отже, $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

2.2.9. *Дано вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, що співпадають зі сторонами трикутника ABC. Знайти розклад за базисом $\vec{b},\vec{c}$ вектора, відкладеного з вершини B цього трикутника і такого, що співпадає з його висотою BD.*

Розв'язання. Із трикутника ABD знаходимо, що $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}-\vec{b}$. Точка D належить основі $\overrightarrow{AC}$, тому вектори $\overrightarrow{AD}$ та $\overrightarrow{AC}$ – колінеарні, тобто $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{AC}=\lambda\vec{c}$.

Оскільки $\overrightarrow{AD} = \lambda\vec{c} \perp \overrightarrow{BD}$, то $\left(\lambda\vec{c}, \lambda\vec{c} - \vec{b}\right) = 0$. Звідси, врахувавши властивості скалярного добутку, знайдемо, що $\lambda = \dfrac{\left(\vec{b}, \vec{c}\right)}{|\vec{c}|^2}$. Отже, $\overrightarrow{BD} = \dfrac{\left(\vec{b}, \vec{c}\right)}{|\vec{c}|^2}\vec{c} - \vec{b}.$

2.2.10. *Вектор $\vec{x}$, колінеарний до вектора $\vec{a} = (6;-8;-7{,}5)$, утворює гострий кут з віссю Oz. Знаючи, що $|\vec{x}| = 50$, знайти його координати.*

Розв'язання. З умови колінеарності векторів випливає, що $\vec{x} = t\vec{a} = \vec{t}\,(6;-8;-7{,}5)$. Враховуючи, що $|\vec{a}| = 12{,}5$, маємо $|\vec{x}| = |t||\vec{a}| = 12{,}5|t| = 50$, тобто $|t| = 4$ або $t = \pm 4$. Шуканий вектор утворює гострий кут β із віссю Oz, а тому і з одиничним вектором $\vec{k} = (0{,}0{,}1)$ осі Oz. Косинус гострого кута набуває додатного значення, а тому в рівності $\cos\beta = \dfrac{\left(\vec{x}, \vec{k}\right)}{|\vec{x}||\vec{k}|}$ вимагаємо, щоб права її частина була додатною. Оскільки довжини векторів додатні, то $\left(\vec{x}, \vec{k}\right) = -7{,}5t > 0$, звідки $t < 0$, тобто $t = -4$ і $\vec{x} = -4(6;-8;-7{,}5) = (-24;32;30)$.

2.2.11. *Дано два вектора $\vec{a} = (8;4;1)$ та $\vec{b} = (2;-2;1)$ з початком в одній точці. Знайти вектор $\vec{c}$ з початком у тій же точці, перпендикулярний до вектора $\vec{a}$, рівний йому за довжиною, компланарний із векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, такий, що утворює з вектором $\vec{b}$ гострий кут.*

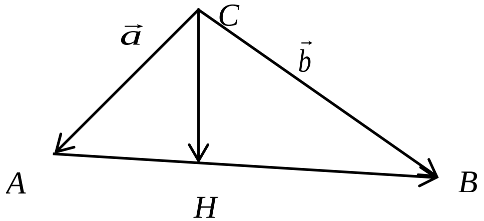
Розв'язання. З умови компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ випливає їх лінійна залежність, тому шуканий вектор $\vec{c}$ можна подати у вигляді $k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$. Отже, $\vec{c} = \left(8k_1 + 2k_2; 4k_1 - 2k_2; k_1 + k_2\right)$.

З умови перпендикулярності векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ випливає рівність нулю їх скалярного добутку: $(\vec{a},\vec{c}) = 64k_1 + 16k_2 + 16k_1 - 8k_2 + k_1 + k_2 = 81k_1 + 9k_2 = 0$, звідки $k_2 = -9k_1$. Тому $\vec{c} = (-10k_1; 22k_1; -8k_1)$ і $|\vec{c}| = \sqrt{100k_1^2 + 484k_1^2 + 64k_1^2} = \sqrt{648}|k_1|$. З умови рівності довжин векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$ випливає, що $|k_1| = \frac{81}{648} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Оскільки шуканий вектор $\vec{c}$ утворює гострий кут з вектором $\vec{b}$, то $(\vec{c},\vec{b}) = |\vec{c}||\vec{b}|\cos\left(\vec{c} \hat{,} \vec{b}\right) > 0$ (косинус гострого кута – додатній), тому $(\vec{c},\vec{b}) = -72k_1 > 0$, звідки маємо, що $k_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, тому $\vec{c} = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}; -\frac{11}{\sqrt{2}}; \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$.

2.2.12. *У прямокутному трикутнику ABC опущено перпендикуляр CH на гіпотенузу AB. Виразити вектор* $\overrightarrow{CH}$ *через вектори* $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ *та* $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$.

Розв’язання.



1-й спосіб. Відомо, що

$$|\vec{a}|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AH}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|,$$

$$|\vec{b}|^2 = \left|\overrightarrow{CB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{BH}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|,$$

звідки

$$\left|\overrightarrow{AH}\right| = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}\left|\overrightarrow{BH}\right|.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{AH}$ та $\overrightarrow{HB}$ колінеарні й мають однаковий напрямок, то $\overrightarrow{AH} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}\overrightarrow{HB}$. З рівності

$$\vec{b} - \vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB} = \frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HB} = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}{|\vec{b}|^2}\overrightarrow{HB}$$

знайдемо, що

$$\overrightarrow{HB} = \frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right),$$

тому

$$\overrightarrow{CH} = \vec{b} + \overrightarrow{BH} = \vec{b} - \frac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \frac{|\vec{a}|^2\vec{b} + \vec{a}|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2}.$$

2-й спосіб. Вектор $\overrightarrow{AH}$ колінеарний із вектором $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, тому $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AB}$. З трикутника ACH знайдемо вектор $\overrightarrow{CH}$:

$$\overrightarrow{CH} = \vec{a} + \overrightarrow{AH} = \vec{a} + \lambda\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \lambda\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = (1-\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

Оскільки CH – висота, то використаємо умову перпендикулярності векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{CH}$, а також векторів-катетів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:

$$\left(\overrightarrow{AB}, (1-\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b}\right) = \left(\vec{b} - \vec{a}, (1-\lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b}\right) = 0;$$

$$\lambda|\vec{b}|^2 + (\lambda - 1)|\vec{a}|^2 + (1 - 2\lambda)\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \lambda|\vec{b}|^2 + (\lambda - 1)|\vec{a}|^2 = 0;$$

$$\lambda\left(\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2\right)=\left|\vec{a}\right|^2,$$

звідки знайдемо λ і, відповідно, $\overrightarrow{CH}$:

$$\lambda=\frac{\left|\vec{a}\right|^2}{\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}\right|^2};$$

$$\overrightarrow{CH}=\frac{\left|\vec{a}\right|^2\vec{b}+\vec{a}\left|\vec{b}\right|^2}{\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2}.$$

2.2.13. *Довести, що для будь-яких дійсних чисел* a_i, b_i, *де* $i\in\{1,2,3\}$ *справджується нерівність*

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}.$$

Розв'язання. Розглянемо вектори $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Нехай φ – кут між цими векторами. Тоді

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\le\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|=\left|\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi\right|\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|=$$

$$=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2},$$

що й потрібно було довести.

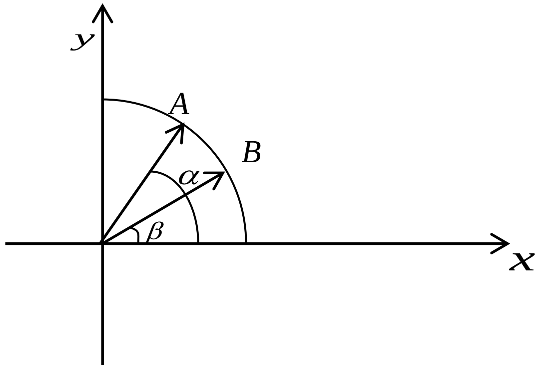
Зауважимо, що нерівність $\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|\le\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$ називається нерівністю Коші–Буняковського.

2.2.14. *Довести, що*

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

Розв'язання. Розглянемо одиничні вектори $\overrightarrow{OA}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB}=\vec{e}_2$. Тоді

$$\vec{e}_1=\left(\cos\alpha;\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=(\cos\alpha;\sin\alpha),$$



$$\vec{e}_2 = \left(\cos\beta; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\right) = (\cos\beta; \sin\beta),$$

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = |\vec{e}_1||\vec{e}_2|\cos(\alpha - \beta)$, бо $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$. З іншого боку,

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta .$$

Отже, $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta$.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у випадку
1) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}) = 135^0$; 2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$;
3) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 6$, $\vec{a} \downarrow\downarrow \vec{b}$.

(Відповідь: 1) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) -3; 3) 18).

2. В трикутнику ABC дано довжини його сторін $BC = 5$, $CA = 6$, $AB = 7$. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$.
(Відповідь: -19).

3. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у випадку

1) $|\vec{a}| = \dfrac{3}{2}, |\vec{b}| = \sqrt{2},\ (\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}) = 45^0$; 2) $|\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 8,\ \varphi = 60^0$

(Відповідь: 1) -$\dfrac{3}{2}$; 2) 20).

4. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$, довжини цих векторів $|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 3$. Обчислити:

1) $(\vec{a}, \vec{b})$; 3) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$;

2) $(\vec{a}, \vec{a})$; 4) $(-2\vec{a} + 3\vec{b}, \vec{b} + 2\vec{a})$.

(Відповідь: 1) – 6; 2) 16; 3) 13; 4) - 61).

5. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ одиничні взаємно перпендикулярні; вектор $\vec{c}$ утворює з кожним вектором кут $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Обчислити:

1) $(3\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{b} + 3\vec{c})$;

2) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

(Відповідь: 1) – 62; 2) 162).

6. Знайти кут α при вершині рівнобедреного трикутника, якщо відомо, що медіани, проведені з кінців основи цього трикутника, взаємно перпендикулярні.

Вказівка: Виразити вектори, які напрямлені по медіанах трикутника, через вектори, що напрямлені по його сторонах.

(Відповідь: $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$).

7. Довести, що вектори $\vec{p} = \vec{a}(\vec{b}, \vec{c}) - \vec{b}(\vec{a}, \vec{c})$ та $\vec{c}$ перпендикулярні.

8. Обчислити скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{b})$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, де $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

(Відповідь: $(\vec{a}, \vec{b}) = -5$).

9. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 6$ і $\left(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

(Відповідь: $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 30, \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = 2\sqrt{593}$).

10. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, кожний з яких дорівнює 60^0. Знаючи, що $|\vec{a}| = 4, \left|\vec{b}\right| = 2$ і $|\vec{c}| = 6$, визначити модуль вектора $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

(Відповідь: $\left|\vec{d}\right| = 10$).

11. В трикутнику ABC проведені медіани AD, BE, CF. Знайти значення виразу $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BE}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CF}\right)$.

(Відповідь: 0).

12. Дано прямокутник $ABCD$ і точку M (яка може лежати як у площині прямокутника, так і поза нею). Довести, що:

1) скалярний добуток векторів, із початком у точці M та з кінцями у двох несуміжних вершинах прямокутника, дорівнює скалярному добутку векторів, із початком в тій же точці та кінцями в інших двох несуміжних вершинах цього прямокутника: $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}\right) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}\right)$;

2) сума квадратів довжин векторів однієї пари дорівнює сумі квадратів довжин векторів іншої пари: $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MD}^2$.

13. Відомо, що $|\vec{a}| = 3, \left|\vec{b}\right| = 5$. При якому значенні α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

(Відповідь: $\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$).

14. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a} + \vec{b}$ був перпендикулярним до вектора $\vec{a} - \vec{b}$?

(Відповідь: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$).

15. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, де $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

(Відповідь: $\frac{\pi}{4}$).

16. Знайти кут між бісектрисами двох координатних кутів площин Oxy та Oxz.

Вказівка: Одиничні вектори бісектрис розкласти за координатним базисом і знайти їх скалярний добуток.

(Відповідь: $\varphi = \frac{\pi}{3}$).

17. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 1$. Обчислити кут α між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

(Відповідь: $\alpha = \arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$).

18. У прямокутному рівнобедреному трикутнику проведено медіани з вершин гострих кутів. Обчислити тупий кут між ними.

(Відповідь: $\varphi = \arccos(-\frac{4}{5})$).

19. Позначивши через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ сторони ромба, що виходять з однієї вершини, довести, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

20. Дано координати векторів $\vec{a} = (5{,}2)$ та $\vec{b} = (-3;6)$. Знайти скалярний добуток цих векторів і косинус кута між ними.

(Відповідь: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -3, \cos\alpha = \frac{-1}{9\sqrt{145}}$).

21. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, що задані своїми координатами:

1) $\vec{a} = (6;-8)$, $\vec{b} = (12;9)$; 4) $\vec{a} = (3;0;-6)$, $\vec{b} = (2;-4;0)$;

2) $\vec{a}=(3;-5)$, $\vec{b}=(7;4)$; 5) $\vec{a}=(2;5;1)$, $\vec{b}=(3;-2;4)$.

3) $\vec{a}=(3;5;7)$, $\vec{b}=(-2;6,1)$;

(Відповідь: 1) 0; 2) 1; 3) 31; 4) 6; 5) 0).

22. Дано вектори $\vec{c}=(2;-1;-2)$, $\vec{d}=(12;-6;4)$. Обчислити:

1) $(\vec{c},\vec{d})$; 3) $(\vec{c}+\vec{d},\vec{c}+\vec{d})$;

2) $\sqrt{(\vec{c},\vec{c})}$; 4) $(2\vec{c}-3\vec{d},\vec{d}-\vec{c})$.

(Відповідь: 1) 22; 2) 3; 3) 31; 4) 8; 5) 0).

23. Визначити кут φ між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, що задані своїми координатами:

1) $\vec{a}=(4;3)$, $\vec{b}=(1;7)$; 4) $\vec{a}=(8;4;1)$, $\vec{b}=(2;-2,1)$;

2) $\vec{a}=(6;-8)$, $\vec{b}=(12;9)$; 5) $\vec{a}=(2;5;4)$, $\vec{b}=(6;0;-3)$.

3) $\vec{a}=(2;5)$, $\vec{b}=(3;-7)$;

(Відповідь: 1) 45^0; 2) 90^0; 3) 135^0; 4) $\cos\lambda=\dfrac{1}{3}$; 5) 90^0).

24. Визначити косинус кута між векторами з координатами $(2;1;2)$ та $(3;2;6)$.

(Відповідь: $\cos\alpha=\dfrac{20}{21}$).

25. Дано три вектори $\vec{a}=(3;-2)$, $\vec{b}=(-5;1)$, $\vec{c}=(0;4)$. Знайти:

1) $3(\vec{a},\vec{a})-4(\vec{a},\vec{b})+5|\vec{b}|^2-6(\vec{b},\vec{c})-2|\vec{c}|^2$;

2) $3(\vec{a},\vec{b})\vec{c}-3|\vec{b}|^2\vec{a}+(\vec{a},\vec{c})\vec{b}$.

(Відповідь: 1) 181; 2) $(-254;12)$).

26. Дано три вектори $\vec{a}=(5;-6;1)$, $\vec{b}=(-4;3;0)$, $\vec{c}=(5;-8;10)$.

Знайти значення виразів: 1) $3(\vec{a},\vec{a})-4(\vec{a},\vec{b})+2|\vec{c}|^2$;

2) $2|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2-4|\vec{c}|^2$; 3) $3(\vec{a},\vec{b})-4(\vec{b},\vec{c})-5(\vec{a},\vec{c})$.

(Відповідь: 1) 716; 2) -721; 3) -353).

27. Дано точки $A(0;4;-6)$, $B(3;0;6)$ і $C(1;2;-4)$. Обчислити:
1) $(2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}, 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB})$; 2) $\sqrt{(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CA})}$; 3) координати вектора $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\overrightarrow{BC}$.

(Відповідь: 1) – 524; 2) 3; 3) $(-70;70;-350)$).

28. Дано вершини чотирикутника $A(2;-1;2)$, $B(2;5;0)$, $C(-3;2;1)$ і $D(-4;-4;3)$. Довести, що його діагоналі AC і BD взаємно перпендикулярні.

29. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\alpha\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

(Відповідь: $\alpha=-6$).

30. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
1) $\vec{a}=(1;-2;2)$, $\vec{b}=(-6;4;12)$;
2) $\vec{a}=5\vec{i}+6\vec{j}$ і $\vec{b}=6\vec{i}-5\vec{j}$.

(Відповідь: 1) $\cos\varphi=\frac{5}{21}$; 2) $\cos\varphi=\frac{4}{9}$).

31. Дано точки $A(1;0;0)$, $B(0;0;2)$, $C(1;0;1)$. Побудувати вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ та знайти кут між ними.

(Відповідь: $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$).

32. Дано вершини трикутника $A(0;-1;4)$, $B(-3;-1;0)$, $C(4;-1;1)$. Визначити його внутрішній кут при вершині B.

(Відповідь: 45^0).

33. На площині дано трикутник із вершинами $C(1;1)$, $A(3;1)$ і $B(2;0)$. Знайти кут, утворений стороною CB і медіаною CM цього трикутника.

(Відповідь: $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$).

34. Обчисливши внутрішні кути трикутника з вершинами $A(2;3;1)$, $B(4;0;7)$, $C(8;5;-2)$, переконатися, що цей трикутник рівнобедрений.

35. З вершини квадрата проведено прямі, що ділять протилежні сторони навпіл. Знайти кут між цими прямими.

(Відповідь: $\arccos 0{,}8$).

36. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=(2;1;0)$, $\vec{b}=(0;-2;1)$.

(Відповідь: 90^0).

37. Нехай $|\vec{a}|=13, |\vec{b}|=19, |\vec{a}+\vec{b}|=24$. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$.

(Відповідь: 22).

38. Нехай $|\vec{a}|=5, |\vec{b}|=12$, а кут між векторами $\vec{a}$ та $\overleftarrow{b}$ – прямий. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$ і $|\vec{a}+\vec{b}|$.

(Відповідь: $|\vec{a}-\vec{b}|=13, |\vec{a}+\vec{b}|=13$).

39. Вважаючи, що кожен із векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ відмінний від нуля, встановити, при якому їх взаємному розміщенні справедлива рівність $(\vec{a},\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b},\vec{c})$.

(Відповідь: $\vec{b}\perp\vec{a},\vec{b}\perp\vec{c};\vec{a}\|\vec{c}$).

40. Довести, що при довільному розташуванні точок A,B,C,D на площині чи в просторі, правильною є рівність $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BD})+(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=0.$

41. Знайти вектор $\vec{x}$, який колінеарний вектору $\vec{a}=(2;1;-1)$ і задовольняє умову $(\vec{x},\vec{a})=3$.

(Відповідь: $\vec{x}=(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$).

42. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(3;2;2)$ і $\vec{b}=(18;-22;-5)$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти його координати, якщо $|\vec{x}|=14$.

(Відповідь: $\vec{x} = (-4;-6;12)$).

43. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2;3;-1)$ і $\vec{b} = (1;-2;3)$ та задовольняє умову $(\vec{x}, \vec{c}) = -6$ де $\vec{c} = (2;-1;1)$.

(Відповідь: $\vec{x} = (-3;3;3)$).

44. Дано два вектори $\vec{a} = (5;2)$ та $\vec{b} = (7;-3)$. Знайти вектор $\vec{x}$, такий, що $(\vec{x}, \vec{a}) = 38$, $(\vec{x}, \vec{b}) = 30$.

(Відповідь: $\vec{x} = (6;4)$).

45. Дано три вектори $\vec{a} = (3;-2;4)$, $\vec{b} = (5;1;6)$, $\vec{c}$ =(-3;0;2). Знайти вектор $\vec{x}$, що задовольняє умови $(\vec{a}, \vec{x}) = 4, (\vec{b}, \vec{x}) = 35, (\vec{c}, \vec{x}) = 0.$

(Відповідь: $\vec{x} = (2;7;3)$).

46. Дано два вектори $\vec{a} = (3;-1;5)$ і $\vec{b} = (1;2;-3)$. Знайти вектор $\vec{x}$ за умови, що він перпендикулярний до осі Oz та $(\vec{x}, \vec{a}) = 9$, $(\vec{x}, \vec{b}) = -4$.

(Відповідь: $\vec{x} = (2;-3;0)$).

47. Знайти геометричне місце кінців змінного вектора $\vec{x},$ якщо його початок знаходиться в даній точці A і він задовольняє умову $(\vec{x}, \vec{a}) = \alpha,$ де $\vec{a}$ – заданий вектор, α – задане число.

(Відповідь: площина, перпендикулярна до вектора $\vec{a},$ що відтинає на ньому відрізок, довжина якого $\dfrac{\alpha}{|\vec{a}|}$, рухаючись із точки A).

48. Знайти геометричне місце кінців змінного вектора $\vec{x},$ якщо його початок знаходиться в даній точці A і він задовольняє умови $(\vec{x}, \vec{a}) = \alpha, (\vec{x}, \vec{b}) = \beta,$ де $\vec{a}, \vec{b}$ – задані неколінеарні вектори, α, β – задані числа.

(Відповідь: пряма перетину площин, перпендикулярних до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і таких, що відтинають на векторах відрізки, довжини яких, вимірюючи від точки $A - \dfrac{\alpha}{|\vec{a}|}, \dfrac{\beta}{|\vec{b}|}$).

49. Знайти проекцію вектора $(7;-4)$ на вісь, паралельну до вектора $(-8;6)$.

(Відповідь: -8).

50. Знайти проекцію вектора $(8;4;1)$ на вісь, паралельну до вектора, $(2;-2;1)$.

(Відповідь: 3).

51. Знайти проекцію вектора $\vec{a}$ на вісь вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (5;2;5)$, $\vec{b} = (2;-1;2)$.

(Відповідь: 6).

52. Дано точки $A(4;4;-1)$, $B(1;-2;5)$, $C(1;-2;1)$ і $D(1;3;-3)$. Побудувати вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ і знайти $np_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{CD}$.

(Відповідь: - 6).

53. Дано три вектори $\vec{a} = (3;-6;21)$, $\vec{b} = (1;4;-5)$ і $\vec{c} = (3;-4;12)$. Обчислити $np_{\vec{c}}(\vec{a} + \overleftarrow{b})$.

(Відповідь: - 4).

54. Дано три вектори $\vec{a} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 10\vec{j}$ і $\vec{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Обчислити $np_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\overleftarrow{b})$.

(Відповідь: - 22).

55. Знайти проекцію вектора $\vec{s} = (4;-3;2)$ на вісь, що утворює з координатними осями рівні гострі кути.

(Відповідь: $\sqrt{3}$).

56. Задано дві точки $A(0;4;3)$ та $B(2;-1;2)$. Знайти проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь, що утворює з координатними осями рівні тупі кути.

(Відповідь: $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$).

57. Довести, що вектор $\vec{p} = \vec{b} - \dfrac{\vec{a}\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|^2}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

58. Довести, що якщо в тетраедрі $ABCD$ два ребра відповідно перпендикулярні своїм протилежним, то й інші два ребра взаємно перпендикулярні.

59. Використовуючи поняття скалярного добутку векторів довести теорему косинусів.

60. Довести справедливість тотожності $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2 = 2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)$ та з'ясувати її геометричний зміст.

(Відповідь: сума квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин його сторін).

§ 2.3. Векторний добуток векторів
2.3.1. Означення векторного добутку

Означення. *Упорядкована трійка некомпланарних векторів* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *, відкладених від спільної точки, називається правою (лівою), якщо вектор* $\vec{c}$ *так розміщений у півпросторі відносно площини, утвореної векторами* $\vec{a}, \vec{b}$ *, що найкоротший поворот від вектора* $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$*, за яким спостерігають з кінця вектора* $\vec{c}$ *, здійснюється проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою).*

Трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, зображена на рис.3 є правою, а на рис.4 – лівою.

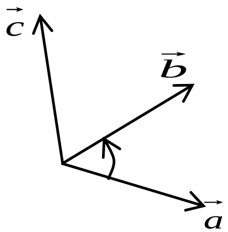


Рис. 3

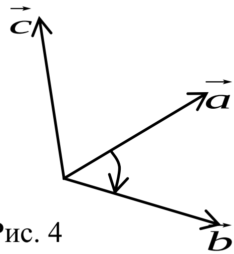


Рис. 4

Зауважимо, що поняття правої та лівої трійок втрачає зміст для компланарних векторів.

Якщо дві трійки векторів одночасно праві або ліві, то кажуть, що ці трійки *однакової орієнтації*. У протилежному випадку такі трійки називаються *трійками протилежної орієнтації.*

Усього з трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можна скласти такі шість трійок:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\, ; \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\, ; \vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\, ; \vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\, ; \vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\, ; \vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\, .$$

Легко бачити, що перші три трійки векторів тієї ж орієнтації, що й трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, а інші три трійки мають орієнтацію, протилежну до $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Означення. *Векторним добутком вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$

називається вектор $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, *що задовольняє умови:*
1) довжина вектора $\vec{c}$ *дорівнює добутку довжин векторів* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *на синус кута* φ *між ними, тобто*

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin\varphi\,; \qquad (2.3.1)$$

2) вектор $\vec{c}$ *ортогональний до кожного з векторів* $\vec{a}$ *та* $\vec{b}$ *;*
3) вектор $\vec{c}$ *направлений так, що впорядкована трійка векторів* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *є правою.*

Зауважимо, що, згідно з домовленістю, за кут між векторами беремо кут φ, такий, що $0 \le \varphi \le \pi$; тому завжди $\sin\varphi \ge 0$. З формули (2.3.1) випливає також, що у випадку колінеарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ *вектор* $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ нульовий.

Поняття векторного добутку виникло в механіці. Якщо вектор $\vec{b}$ зображає прикладену в деякій точці H силу, а вектор $\vec{a}$ направлений із точки O в точку H, то вектор $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ являє собою момент сили $\vec{b}$ відносно точки O.

2.3.2. Геометричні властивості векторного добутку

1. *Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів є рівність нулю їхнього векторного добутку.*

Справді, необхідність випливає із самого означення векторного добутку.

Достатність. Нехай $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}, \vec{a} \ne \vec{0}, \vec{b} \ne \vec{0}$. Тоді $\left|\vec{a}\right| > 0, \left|\vec{b}\right| > 0$ і тому із рівності $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$ та формули (2.3.1) випливає, що $\sin\varphi = 0$, тобто вектори $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ колінеарні. Якщо ж хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то його можна вважати колінеарним з довільним вектором.

2. *Модуль векторного добутку* $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ *дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a}, \vec{b}$*, зведених до спільного початку.*

Справді, оскільки площа паралелограма дорівнює добутку довжин суміжних сторін паралелограма на синус кута між ними, то властивість 2 безпосередньо випливає із формули (2.3.1).

Наслідок 2.3.1. *Якщо* $\vec{e}$ *– орт векторного добутку* $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ *(тобто* $|\vec{e}|=1, \vec{e}\uparrow\uparrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]$*), а* S *– площа паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a}$*,* $\vec{b}$*, зведених до спільного початку, то* $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=S\vec{e}$.

2.3.3. Алгебраїчні властивості векторного добутку

Векторний добуток векторів має такі властивості:

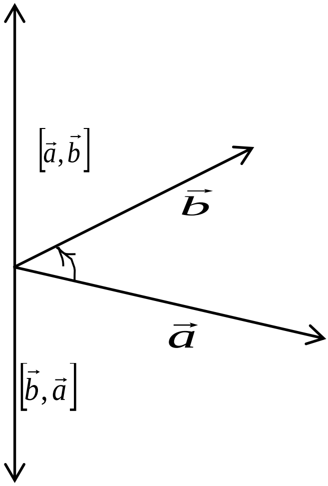
1. $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right], \forall\vec{a},\vec{b}$;
2. $\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right], \alpha\in R, \forall\vec{a},\vec{b}$;
3. $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right], \forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (один зі способів доведення див. у прикладі 2.4.1 наступного параграфу).

Доведення. 1. Для того, щоб довести властивість 1, достатньо показати, що вектори $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, $\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ мають однакові довжини і протилежний напрям. Згідно з умовою 1 означення векторного добутку, маємо, що $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=\left|\left[\vec{b},\vec{a}\right]\right|$, векторний добуток $\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ (згідно з умовою 2 означення векторного добутку) – це вектор, перпендикулярний до векторів $\vec{b}$ та $\vec{a}$, такий, що трійка векторів $\vec{b},\vec{a},\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ – права (див. рис.). Отже, вектори $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ та $\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ мають протилежні напрямки та однакові довжини, тому $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$.

2. З означення векторного добутку та властивостей абсолютних величин випливає, що довжини даних векторів рівні:

$$\left|\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\alpha\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=|\alpha||\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi=|\alpha|\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|,$$

$$\alpha\in R, \forall\vec{a},\vec{b}$$



Оскільки вектор $\alpha\vec{a}$ колінеарний з $\vec{a}$, то перпендикулярність вектора $\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]$ до векторів $\alpha\vec{a}$ та $\vec{b}$ випливає з перпендикулярності вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Орієнтація трійки векторів залежить від того, яке α: якщо $\alpha > 0$, то трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ та $\alpha\vec{a},\vec{b},\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]$ праві, тому, враховуючи усе вищезгадане $\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, якщо ж $\alpha < 0$, то з правої частини рівності випливає, що трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ права, тому $\vec{a},\vec{b},\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ – ліва. З означення векторного добутку $\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]$ випливає, що трійка векторів $\alpha\vec{a},\vec{b},\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]$ – права, тому $\vec{a},\vec{b},\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right]$ – ліва, тобто $\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ – права. Оскільки вектори $\left[\alpha\vec{a},\vec{b}\right],\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ мають однаковий напрямок та довжину, то вони рівні між собою.

Властивість 3 доведена в наступному §2.4 (приклад 2.4.1).

Наслідок 2.4.4. *Векторний добуток двох векторів має властивості:*

4. $\left[\vec{a},\alpha\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right],\alpha\in R$;

5. $\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$.

Властивості 4, 5 є наслідками властивостей 1, 2, 3 векторного добутку. Справді,

$$\left[\vec{a},\alpha\vec{b}\right]=-\left[\alpha\vec{b},\vec{a}\right]=-\alpha\left[\vec{b},\vec{a}\right]=\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Аналогічно,

$$\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right]=-\left[\vec{b}+\vec{c},\vec{a}\right]=-\left(\left[\vec{b},\vec{a}\right]+\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right)=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right].$$

2.3.4. Зображення векторного добутку векторів у декартових координатах

Теорема 2.3.1. *Нехай вектори* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *задано своїми прямокутними декартовими координатами:* $\vec{a}=\left(x_1;y_1;z_1\right)$, $\vec{b}=\left(x_2;y_2;z_2\right)$. *Тоді*

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(y_1z_2-y_2z_1,z_1x_2-z_2x_1,x_1y_2-x_2y_1\right). \quad (2.3.2)$$

Доведення. Урахувавши, що $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, а також властивості векторного добутку векторів, дістаємо співвідношення:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=x_1x_2\left[\vec{i},\vec{i}\right]+x_1y_2\left[\vec{i},\vec{j}\right]+x_1z_2\left[\vec{i},\vec{k}\right]+y_1x_2\left[\vec{j},\vec{i}\right]+y_1y_2\left[\vec{j},\vec{j}\right]+$$
$$+y_1z_2\left[\vec{j},\vec{k}\right]+z_1x_2\left[\vec{k},\vec{i}\right]+z_1y_2\left[\vec{k},\vec{j}\right]+z_1z_2\left[\vec{k},\vec{k}\right].$$

Оскільки базисні вектори $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ ортогональні, утворюють праву трійку і мають одиничну довжину, то

$$\left[\vec{i},\vec{i}\right]=\vec{0},\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k},\left[\vec{i},\vec{k}\right]=-\vec{j},\left[\vec{j},\vec{i}\right]=-\vec{k},\left[\vec{j},\vec{j}\right]=\vec{0},$$
$$\left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i},\left[\vec{k},\vec{i}\right]=\vec{j},\left[\vec{k},\vec{j}\right]=-\vec{i},\left[\vec{k},\vec{k}\right]=\vec{0}.$$

Звідси вже випливає шукане координатне зображення вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Теорема доведена.

Для запам'ятовування формули (2.3.2) зручно використовувати символ визначника і записати цю формулу у вигляді символічного визначника $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Розкриваючи визначник за елементами першого рядка, дістанемо розклад вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ за базисними векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, еквівалентний (2.3.2).

Наведемо ще деякі формули, які зручно використовувати при розв'язуванні задач.

Площа паралелограма, побудованого на двох неколінеарних векторах $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ і $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, відкладених від однієї точки і заданих своїми координатами відносно ортонормованого базису, дорівнює $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$ і, отже, обчислюється за формулою

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}\,.$$

Нехай відносно прямокутної системи координат у просторі задано три вершини паралелограма $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$. Вважатимемо, що

$$\vec{a}:=\overrightarrow{CA}=(x_1-x_3;y_1-y_3;z_1-z_3),$$

$$\vec{b}:=\overrightarrow{CB}=(x_2-x_3;y_2-y_3;z_2-z_3).$$

Тоді попередня формула набуває вигляду:

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_3 & z_1-z_3 \\ y_2-y_3 & z_2-z_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1-z_3 & x_1-x_3 \\ z_2-z_3 & x_2-x_3 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x_1-x_3 & y_1-y_3 \\ x_2-x_3 & y_2-y_3 \end{vmatrix}^2}$$

Відповідно, площа трикутника ABC визначається як половина площі паралелограма.

Приклади розв'язування задач

2.3.1. *Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *, якщо:*

a) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, *кут між ними* $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$;

b) $\vec{a} = (5;-4;7), \vec{b} = (1,1,-2)$.

Розв'язання. *a)* Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, дорівнює модулю векторного добутку цих векторів. Отже,

$$S = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi = \sqrt{3}\cdot 4\sin\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$$

b) Передусім знайдемо векторний добуток $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (1;17;9).$$

Тоді

$$\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = \sqrt{1^2 + 17^2 + 9^2} = \sqrt{371}.$$

Отже, площа паралелограма дорівнює $\sqrt{371}$ кв.од.

2.3.2. *Визначити, при якому* λ *вектори* $\vec{p} = \lambda\vec{a} + 5\vec{b}$ *і* $\vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b}$ *колінеарні, за умови, що* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *неколінеарні.*

Розв'язання. Необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів $\vec{p}$ та $\vec{q}$ є рівність нулю їх векторного добутку. Використовуючи алгебраїчні властивості, знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та прирівняємо його до нульового вектора:

$$\left[\lambda\vec{a} + 5\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b}\right] = \left[\lambda\vec{a}, 3\vec{a}\right] + \left[\lambda\vec{a}, -\vec{b}\right] + \left[5\vec{b}, 3\vec{a}\right] + \left[5\vec{b}, -\vec{b}\right] =$$
$$= 3\lambda\left[\vec{a}, \vec{a}\right] - \lambda\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + 15\left[\vec{b}, \vec{a}\right] - 5\left[\vec{b}, \vec{b}\right] = \vec{0}.$$

Враховуючи, що векторний добуток вектора на себе дорівнює нульовому вектору, $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$, то $\left[\lambda\vec{a}+5\vec{b},3\vec{a}-\vec{b}\right]=(\lambda+15)\left[\vec{b},\vec{a}\right]=\vec{0}$. Це можливо, коли або число $\lambda+15$ дорівнює 0, або вектор, що дорівнює векторному добутку $\left[\vec{b},\vec{a}\right]$,– нульовий. За умовою задачі вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - неколінеарні. Отже, їх векторний добуток – ненульовий вектор, тому $\lambda+15=0$, звідки $\lambda=-15$.

2.3.3. *Обчислити площу трикутника* ABC *:* $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$, $C(5;2;6)$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, на яких побудовано трикутник ABC: $\overrightarrow{AB}=(2;-2;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(4;0;6)$. Тоді, використавши геометричну властивість 2 векторного добутку, знайдемо, що

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\left|(-12;-24;8)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 28=14 \text{ (кв.од.)}.$$

2.3.4. *Дано* $\left|\vec{a}\right|=10$, $\left|\vec{b}\right|=2$ *та* $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=12$. *Обчислити* $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

Розв'язання. Позначимо через α кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і знайдемо значення косинуса цього кута за допомогою скалярного добутку цих векторів: $\cos\alpha=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{12}{2\cdot 10}=\dfrac{3}{5}$.

З основної тригонометричної тотожності маємо, що $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\pm\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\pm\dfrac{4}{5}$. Оскільки кут між довільними векторами менший за π, то синус кута α додатний, а отже, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$. Підставляючи це значення у формулу для обчислення модуля векторного добутку, отримаємо $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha = 10\cdot 2\cdot\frac{4}{5} = 16$.

2.3.5. *Дано точки* $A(4;1;4)$, $B(3;4;1)$, $C(5;4;3)$. *Знайти координати векторного добутку* $\left[\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right]$.

Розв'язання. Знаходимо координати векторів: $\overrightarrow{BC} = (2;0;2)$, $\overrightarrow{CA} = (-1;-3;1)$, $\overrightarrow{CB} = (-2;0;-2)$.

1-ий спосіб: Знайдемо також $\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA} = (4,6,0)$. Тому

$$\left[\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = \left(\begin{vmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}4 & 0\\ -2 & -2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}4 & 6\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right) = (-12;8;12).$$

2-ий спосіб: Використовуючи алгебраїчні властивості, обчислимо векторний добуток

$$\left[\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = \left[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}\right] - 2\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] = -2\left[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right] =$$
$$= -2(6;-4;-6) = (-12;8;12).$$

2.3.6. *Вектор* $\vec{x}$, *перпендикулярний до векторів* $\vec{a} = (4;-2;-3)$ *і* $\vec{b} = (0;1;3)$, *утворює з віссю* Oy *тупий кут. Знаючи, що* $|\vec{x}| = 13$, *знайти його координати.*

Розв'язання. Оскільки шуканий вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то він колінеарний до вектора $\vec{c} = \left[\vec{a},\vec{b}\right] = (-3;-12;4)$. З умови колінеарності, маємо: $\vec{x} = k\vec{c} = k(-3;-12;4) = (-3k;-12k;4k), k\in R.$

Вимагатимемо, щоб модуль вектора $\vec{x}$ дорівнював 13: $|\vec{x}| = \sqrt{9k^2 + 144k^2 + 16k^2} = 13|k| = 13$. Звідси $k = \mp 1$, а тому $\vec{x}_1 = (-3;-12;4)$ або $\vec{x}_2 = (3;12;-4)$. Розглянемо одиничний вектор $\vec{j}=(0;1;0)$ осі Oy. З того, що шуканий вектор утворює з віссю Oy тупий кут, випливає, що він утворює тупий кут із вектором $\vec{j}$. Оскільки косинус тупого кута від'ємний, то скалярний добуток векторів $\vec{x}$ та $\vec{j}$ – від'ємне число, а отже, умову задачі задовольнятиме вектор $\vec{x}_i$ такий, що $(\vec{x}_i, \vec{j})<0$. Оскільки $(\vec{x}_1, \vec{j})=-12$, то вектор $\vec{x}_1$ шуканий.

2.3.7. *Площа трикутника ABC дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{2}$. Дві його вершини лежать у точках $A(2;-1;3)$ і $B(1;2;1)$. Знайти координати вершини C, якщо вона лежить на осі Oz.*

Розв'язання. Оскільки точка C лежить на осі Oz, то вона має координати $(0;0;z)$. Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, на яких побудовано трикутник ABC: $\overrightarrow{AB}=(-1;3;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(-2;1;z-3)$. Тоді, використавши геометричну властивість 2 векторного добутку, знайдемо площу трикутника ABC:

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\left|(3z-7;z+1;5)\right|=\frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Тому

$$\sqrt{(3z-7)^2+(z+1)^2+5^2}=\sqrt{35},$$

звідки знаходимо, що $z=2$. Отже, шукана точка має координати $(0;0;2)$.

2.3.8. Дано вершини трикутника $A(1;-1;2)$, $B(5;-6;2)$, $C(1;3;-1)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC.

Розв'язання. Розглянемо два вектори, які виходять з однієї вершини, наприклад, A трикутника ABC, тобто $\overrightarrow{AB}=(4;-5;0)$, $\overrightarrow{AC}=(0;4;-3)$. Тоді площа S трикутника знаходиться зі співвідношення $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$. З іншого боку, $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BH}\right|$. Звідси, прирівнюючи ці вирази, отримаємо, що $\left|\overrightarrow{BH}\right|=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$. Отже,

$$\left|\overrightarrow{BH}\right|=\frac{\left|(15;12;16)\right|}{5}=\frac{\sqrt{225+144+256}}{5}=5.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ визначені координатами своїх кінців: $A(2;4;5)$, $B(-1;-3;-2)$, $C(4,1,7)$, $D(-2;3;10)$.

Знайти:

а) векторний добуток $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]$;

б) його модуль;

в) напрямні косинуси векторного добутку $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]$.

(Відповідь: а) $(-7;51;-48)$, б) $\sqrt{4954}$, в) $\cos\alpha=-\frac{7}{\sqrt{4954}}$, $\cos\beta=\frac{51}{\sqrt{4954}}$, $\cos\alpha=-\frac{48}{\sqrt{4954}}$).

2. Знайти площу трикутника, координати вершин якого відомі: $A(-2;1;2)$, $B(3;-3;4)$, $C(1,0,9)$.

(Відповідь: $\sqrt{391{,}5}$ кв.од.).

3. При якому значенні λ вектори $\vec{q}=\vec{a}+3\vec{b}$ та $\vec{p}=4\vec{a}-\lambda\vec{b}$ будуть колінеарні, за умови, що $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - неколінеарні.

(Відповідь:12).

4. Знайти векторний добуток $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, якщо $\vec{a}=2\vec{i}+11\vec{j}-10\vec{k}$ та $\vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}-2\vec{k}$.

(Відповідь: $38\vec{i}-26\vec{j}-21\vec{k}$).

5. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектори $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{a}-\vec{b}$ були колінеарні?

(Відповідь: колінеарні).

6. Позначивши через α кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, виразити $tg\alpha$ через векторний і скалярний добутки цих векторів.

(Відповідь: $tg\alpha=\dfrac{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}$).

7. Дано $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$ і $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=72$. Обчислити $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

(Відповідь: ± 30).

8. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$, $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$. Обчислити:1) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)$; 2) $\left(\left[\vec{a}+3\vec{b},3\vec{a}-\vec{b}\right],\left[\vec{a}+3\vec{b},3\vec{a}-\vec{b}\right]\right)$.

(Відповідь: 1) 3; 2) 300).

9. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}|=6, |\vec{b}|=5,$ обчислити $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

(Відповідь: 15).

10. Знаючи два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, знайти: 1) $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}\right]$; 2) $\left[\vec{a},\vec{a}+\vec{b}\right]$; 3) $\left[\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\vec{b}-\dfrac{\vec{a}}{2}\right]$.

(Відповідь: 1) $-2\left[\vec{a},\vec{b}\right]$; 2) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$;3) $\dfrac{3}{4}\left[\vec{a},\vec{b}\right]$).

11. Дано вектори $\vec{a}=(3;-1;2)$ і $\vec{b}=(1;2;-1)$. Знайти координати векторів $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ та $\left[2\vec{a}+\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}\right]$.

(Відповідь: $(-3;5;7)$, $(12;-20;-28)$).

12. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, обчислити:1) $\left|\left[\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\right]\right|$; 2) $\left|\left[3\vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-2\vec{b}\right]\right|$.

(Відповідь: 1) 24; 2) 60).

13. Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4$, обчислити: 1) $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right)$,

2) $\left(\left[2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b}\right], \left[2\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{b}\right]\right)$.

(Відповідь: 1) 3; 2) 27).

14. Довести, що $\left[\vec{a}, \vec{b}+\lambda\vec{a}\right] = \left[\vec{a}+\mu\vec{b}, \vec{b}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

15. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (3;-5;-2)$ та $\vec{b} = (3;2;-10)$.

(Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{78}$).

16. Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\vec{a} = (4;4;2)$ та $\vec{b} = (4;5;3)$.

(Відповідь: $\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$).

17. У трикутнику з вершинами $A(3;1;4)$, $B(7;-4;4)$ і $C(3;5;1)$ знайти висоту $h = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

(Відповідь: 5).

18. Обчислити синус кута, утвореного векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (4;-4;2)$ та $\vec{b} = (2;3;6)$.

(Відповідь: $\sin\varphi = \frac{5\sqrt{17}}{21}$).

19. Довести, що $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right) \le |\vec{a}|^2 \left|\vec{b}\right|^2$. За якої умови виконуватиметься рівність?

(Відповідь: якщо вектори перпендикулярні).

20. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(4;-2;-3)$ і $\vec{b}=(0;1;3)$, утворює з віссю Oy гострий кут. Знаючи, що $\left|\vec{x}\right|=26,$ знайти його координати.

(Відповідь: $\vec{x}=\left(6;24;-8\right)$).

21. Довести тотожність $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)+\left(\left(\vec{a},\vec{b}\right),\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2$.

22. Вектори $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ задовольняють умову $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Довести, що $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{c},\vec{a}\right]$.

23. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярний до осі Oz і до вектора $\vec{a}=(16;-30;6)$, утворює гострий кут із віссю Ox. Знаючи, що $|\vec{c}|=17$, знайти його координати.

(Відповідь: $\vec{c}=\left(15;8;0\right)$).

24. Довести, що для будь-яких векторів $\vec{a},\vec{p},\vec{q}$ і $\vec{r}$ вектори $\left[\vec{a},\vec{p}\right],\left[\vec{a},\vec{q}\right],\left[\vec{a},\vec{r}\right]$ – компланарні.

25. Для векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ і $\vec{d}$ виконуються умови $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{c},\vec{d}\right]$, $\left[\vec{a},\vec{c}\right]=\left[\vec{b},\vec{d}\right]$. Довести колінеарність векторів $\vec{a}-\vec{d}$ та $\vec{b}-\vec{c}$.

26. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2;-3;1)$ і $\vec{b}=(1;-2;3)$ і задовольняє умову $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=10$, де $\vec{c}=(1;2;-7)$.

(Відповідь: $\vec{x}=\left(7;5;1\right)$).

27. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{s}$ та $\vec{t}$, якщо відомо, що вектори $\vec{p}=\vec{s}+2\vec{t}$ і $\vec{q}=5\vec{s}-4\vec{t}$ взаємно перпендикулярні.

(Відповідь: $\dfrac{\pi}{3}$).

§ 2.4. Мішаний добуток трьох векторів

2.4.1. Означення та геометричний зміст мішаного добутку

Означення. *Мішаним добутком трьох векторів* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *називається скалярний добуток вектора* $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ *на вектор* $\vec{c}$, *тобто число* $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$.

Геометричний зміст мішаного добутку дає нижче наведене твердження.

Теорема 2.4.1. *Мішаний добуток* $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$ *дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на зведених до спільного початку векторах* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, *взятому зі знаком плюс, якщо трійка векторів* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *права, і зі знаком мінус, якщо трійка векторів* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *ліва. Якщо ж вектори* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *компланарні, то* $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=0$.

Доведення. Передусім виключимо з розгляду тривіальний випадок, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. У цьому випадку вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ компланарні. Оскільки векторний добуток $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ двох колінеарних векторів дорівнює нульовому вектору, то мішаний добуток $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$ дорівнює нулеві, що й потрібно довести.

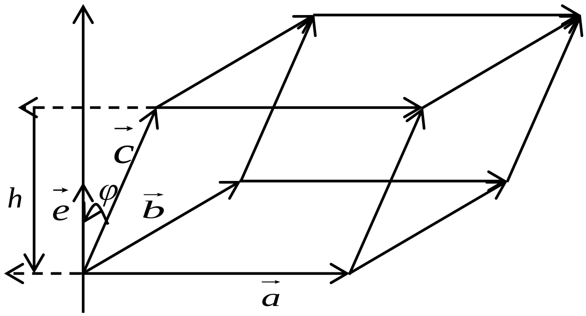
Залишається розглянути випадок, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні. Позначимо через S площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, приведених до спільного початку, а через $\vec{e}$ – орт векторного добутку $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. Тоді

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(S\vec{e},\vec{c}\right)=S\left(\vec{e},\vec{c}\right)=S\left|\vec{e}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\varphi=S\cdot np_{\vec{e}}\vec{c} \qquad (2.4.1)$$

(тут φ – кут між векторами $\vec{e}$ та $\vec{c}$).

Припустимо спочатку, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ некомпланарні. Тоді $np_{\vec{e}}\vec{c}$, з точністю до знака, дорівнює висоті h паралелепі -

педа, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, приведених до спільного початку, за умови, що основою є паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$. Таким чином, $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$ з точністю до знака, дорівнює об’єму вказаного паралелепіпеда.



Очевидно, що $np_{\vec{e}}\vec{c}=+h$, якщо вектори $\vec{e}$ та $\vec{c}$ розміщуються в одному півпросторі відносно площини, що визначається векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, і $np_{\vec{e}}\vec{c}=-h$, якщо вектори $\vec{e}$ та $\vec{c}$ розміщуються у різних півпросторах відносно вказаної площини. Але це означає, що $np_{\vec{e}}\vec{c}=+h$, якщо трійки векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ та $\vec{a},\vec{b},\vec{e}$ одної орієнтації, і $np_{\vec{e}}\vec{c}=-h$, якщо вказані трійки векторів мають протилежну орієнтацію. Оскільки, за означенням векторного добутку, трійка $\vec{a},\vec{b},\vec{e}$ є правою, то $np_{\vec{e}}\vec{c}=+h$, якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – права трійка векторів, і $np_{\vec{e}}\vec{c}=-h$, якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – ліва трійка. Для завершення доведення теореми у випадку некомпланарності векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ досить підставити значення $np_{\vec{e}}\vec{c}$ у праву частину співвідношення (2.4.1).

У випадку, коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні, вектор $\vec{c}$ лежить у площині, що визначається векторами $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$, звідки випливає, що $np_{\vec{e}}\vec{c} = 0$. Внаслідок формули (2.4.1) дістаємо, що $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right) = 0$. Теорема доведена.

Наслідок 2.4.1. *Правильною є рівність* $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right) = \left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$.

З урахуванням наслідку 2.4.1 мішаний добуток векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ часто позначають символом $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Наслідок 2.4.2. *Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.*

Справді, згідно з теоремою 2.4.1, з компланарності векторів випливає рівність нулю їх мішаного добутку. Обернене твердження дістається з того, що для некомпланарних векторів мішаний добуток (внаслідок тієї ж теореми) дорівнює відмінному від нуля об'єму паралелепіпеда.

Наслідок 2.4.3. *Мішаний добуток трьох векторів, два з яких збігаються, дорівнює нулю.*

Справді, такі три вектори компланарні.

2.4.2. Зображення мішаного добутку векторів у декартових координатах

Теорема 2.4.2. *Якщо вектори* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *задані своїми декартовими прямокутними координатами:*

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \vec{b} = (x_2; y_2; z_2), \vec{c} = (x_3; y_3; z_3),$$

то

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (2.4.2)$$

Доведення. Оскільки, за означенням, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$, координати вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ визначаються формулою (2.4.1), то урахувавши формулу, що зображує скалярний добуток двох векторів у координатах, знайдемо зображення мішаного добутку $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ у координатах:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (y_1z_2 - y_2z_1)x_3 + (z_1x_2 - z_2x_1)y_3 + \\ + (x_1y_2 - x_2y_1)z_3. \quad (2.4.3)$$

Якщо розкласти визначник, записаній у правій частині формули (2.4.2) за елементами третього рядка, то одержимо еквівалентність формул (2.4.2) та (2.4.3). Теорема доведена.

Наслідок 2.4.4. *Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ *є рівність*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклади розв'язування задач

2.4.1. *Довести рівність*

$$[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{c}] + [\vec{b},\vec{c}], \forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}.$$

Розв'язання. Нехай вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – некомпланарні.

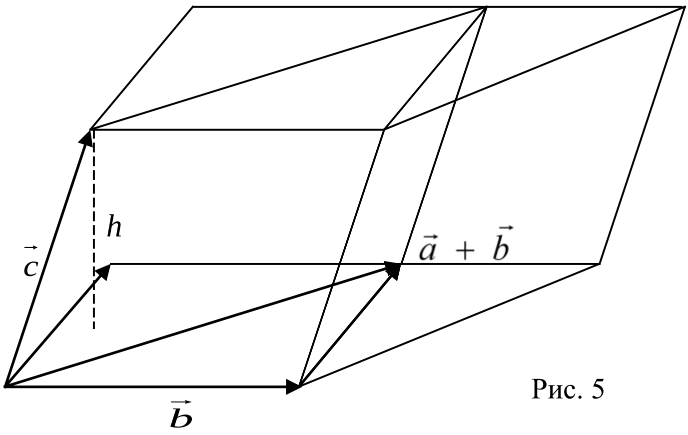


Рис. 5

Оскільки три вектори $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]$, $[\vec{a},\vec{c}]$ та $\left[\vec{b},\vec{c}\right]$ ортогональні до вектора $\vec{c}$, то ці три вектори компланарні, а отже, лінійно залежні. Це означає, що знайдуться такі числа λ,μ,ν, хоча б одне з яких не дорівнює нулю, що справджується рівність

$$\lambda\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=\mu[\vec{a},\vec{c}]+\nu\left[\vec{b},\vec{c}\right]. \qquad (2.4.4)$$

Залишається довести, що $\lambda=\mu=\nu$. Доведемо, наприклад, що $\lambda=\mu$. Для цього співвідношення (4.4) помножимо скалярно на вектор $\vec{b}$ і врахуємо, що $\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{b}\right)=0$. У результаті одержимо, що $\lambda\left(\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right],\vec{b}\right)=\mu\left([\vec{a},\vec{c}],\vec{b}\right)$. Оскільки вектори $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$ некомпланарні, мішаний добуток $\left([\vec{a},\vec{c}],\vec{b}\right)$ не дорівнює нулеві. Отже, для доведення рівності $\lambda=\mu$ досить довести рівність мішаних добутків $\left(\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right],\vec{b}\right)$ та $\left([\vec{a},\vec{c}],\vec{b}\right)$. Рівність абсолютних величин вказаних мішаних добутків випливає з того, що ці абсолютні величини рівні об'ємам двох паралелепіпедів (див. теорему 2.4.1) з рівними основами (основою одного паралелепіпеда служить паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а іншого – паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}+\vec{b}$ та $\vec{b}$; рівновеликість указаних паралелограмів випливає з того, що вони мають спільну сторону, яка співпадає з вектором $\vec{b}$, та спільну висоту, проведену з кінця вектора $\vec{a}+\vec{b}$ на вектор $\vec{b}$; див. рис. 5).

Рівність знаків указаних мішаних добутків випливає з означення правої (лівої) трійки векторів, оскільки трійки $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ та $\vec{a}+\vec{b},\vec{c},\vec{b}$, очевидно, однієї орієнтації. Отже, рівність $\lambda=\mu$ доведена.

Аналогічно доводиться рівність $\lambda=\nu$.

Випадок, коли вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарні, пропонуємо читачеві розглянути самостійно.

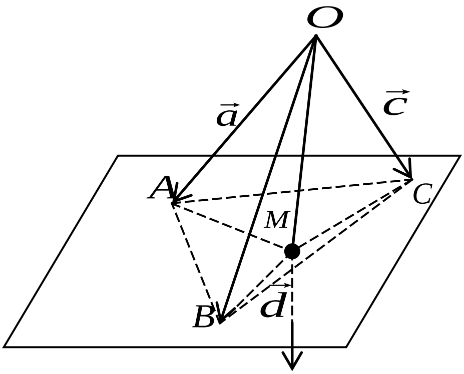
2.4.2. *Дано координати вершин піраміди:* $A_1(5;1;-4), A_2(1;2;-1), A_3(3;3;-4), A_4(2;2;2)$. *Визначити її об'єм.*

Розв'язання. Розглянемо три вектори $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}$ і $\overrightarrow{A_1A_4}$. Знайдемо об'єм піраміди, побудованої на цих векторах за допомогою мішаного добутку:

$$V = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|-24\right|,\ V = 4\ (\text{куб.од.}),$$

бо $\overrightarrow{A_1A_2} = (-4;1;3), \overrightarrow{A_1A_2} = (-2;2;0), \overrightarrow{A_1A_2} = (-3;1;6)$.

2.4.3. *Дано чотири вектори* $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ *та* $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$. *Вектори* $\vec{a}, \vec{b}$ *і* $\vec{c}$ *– некомпланарні. Нехай* M *– точка перетину прямої* OD *із площиною* ABC. *Знайти вектор* $\overrightarrow{OM}$.



Розв'язання. Розкладемо вектор $\vec{d}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}$ *і* $\vec{c}$: $\vec{d} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b} + k_3\vec{c}$, отже, колінеарний вектор $\overrightarrow{OM}$ із вектором $\vec{d}$ має пропорційні координати: $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{d}$. Знаходячи об\`єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}, \vec{b}$ та $\vec{c}$, і розбиваючи даний об'єм відповідно на три об'єми пірамід, побудованих на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{OM}$; $\vec{a}, \overrightarrow{OM}, \vec{c}$ та $\vec{b}, \vec{c}, \overrightarrow{OM}$, отримаємо рівність:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \overrightarrow{OM}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{OM}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}, \overrightarrow{OM}\right) = \left(\vec{a}, \alpha\vec{d}, \vec{c}\right) +$$
$$+ \left(\vec{a}, \vec{b}, \alpha\vec{d}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}, \alpha\vec{d}\right) = \lambda\left[\left(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right)\right],$$

звідки

$$\lambda = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)}{\left(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right)},$$

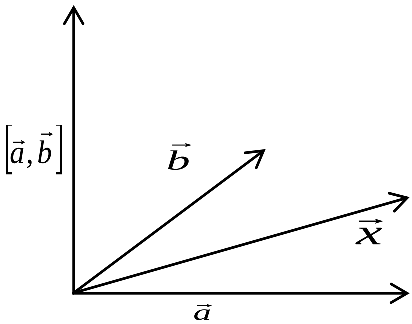
тому

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)}{\left(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c}\right) + \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}\right)}\vec{d}.$$

2.4.4. *Дано три компланарних вектори $\vec{x}, \vec{a}, \vec{b}$, причому $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – неколінеарні. Виразити коефіцієнти розкладу вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$ по заданим векторам.*

Розв'язання. Оскільки вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – неколінеарні, то вони лінійно незалежні, а тому утворюють базис на заданій площині. Відомо, що довільний вектор площини єдиним чином розкладається за деяким базисом площини, а отже, є їх лінійною комбінацією:

$$\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$



Знайдемо мішані добутки векторів $\vec{x},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ та $\vec{x},\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}$:

$$\left(\vec{x},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\left(\alpha\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)+\left(\beta\vec{b},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=$$
$$=\alpha\left(\vec{a},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\alpha\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\alpha\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2,$$

$$\left(\vec{x},\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right)=\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right)=\left(\alpha\vec{a},\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right)+\left(\beta\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right)=$$
$$=\beta\left(\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right)=\beta\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)=\beta\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2,$$

звідки

$$\alpha=\frac{\left(\vec{x},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2},\ \beta=\frac{\left(\vec{x},\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right)}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}.$$

Отже,

$$\vec{x}=\frac{\left(\vec{x},\vec{b},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}\vec{a}+\frac{\left(\vec{x},\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right)}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}\vec{b}.$$

2.4.5. *Дано три некомпланарні вектори* $\vec{a},\vec{b}$ *і* $\vec{c}$. *Знайти вектор* $\vec{x}$, *що задовольняє систему рівнянь* $\left(\vec{a},\vec{x}\right)=\alpha,\left(\vec{b},\vec{x}\right)=\beta,\left(\vec{c},\vec{x}\right)=\gamma$.

Розв'язання. *1-й спосіб*: Нехай вектор $\vec{x}=\left(x;y;z\right)$, тоді розглянувши відповідні скалярні добутки, отримаємо систему лінійних неоднорідних рівнянь:

$$\begin{cases}\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z=\alpha,\\ \beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z=\beta,\\ \gamma_1 x+\gamma_2 y+\gamma_3 z=\gamma,\end{cases}$$

де $\vec{a}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right),\vec{b}=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right),\vec{c}=\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right)$. Розв'яжемо дану систему за методом Крамера. Знайдемо головний визначник даної системи

$$\Delta=\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right).$$

Оскільки вектори $\vec{a},\vec{b}$ та $\vec{c}$ – некомпланарні, то $\Delta \neq 0$.
Обчислимо інші визначники і знайдемо розв’язок:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\alpha \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \gamma \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix},$$

$$\vec{x} = \frac{1}{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}\left(\alpha \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}; \right.$$

$$-\alpha \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \gamma \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix};$$

$$\left. \alpha \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right) = \frac{\alpha\left[\vec{b},\vec{c}\right] - \beta\left[\vec{a},\vec{c}\right] + \gamma\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}.$$

2-й спосіб: Розкладемо вектор $\vec{x}$ за базисом $\left[\vec{b},\vec{c}\right], \left[\vec{c},\vec{a}\right], \left[\vec{a},\vec{b}\right]$: $\vec{x} = \lambda_1\left[\vec{b},\vec{c}\right] + \lambda_2\left[\vec{c},\vec{a}\right] + \lambda_3\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

З умов

$$\left(\vec{a},\vec{x}\right) = \left(\vec{a}, \lambda_1\left[\vec{b},\vec{c}\right] + \lambda_2\left[\vec{c},\vec{a}\right] + \lambda_3\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right) = \lambda_1\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right) = \alpha,$$

$$\left(\vec{b},\vec{x}\right) = \left(\vec{b}, \lambda_1\left[\vec{b},\vec{c}\right] + \lambda_2\left[\vec{c},\vec{a}\right] + \lambda_3\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right) = \lambda_2\left(\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right) = \beta,$$

$$\left(\vec{c},\vec{x}\right) = \left(\vec{c}, \lambda_1\left[\vec{b},\vec{c}\right] + \lambda_2\left[\vec{c},\vec{a}\right] + \lambda_3\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right) = \lambda_3\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right) = \gamma$$

випливає, що

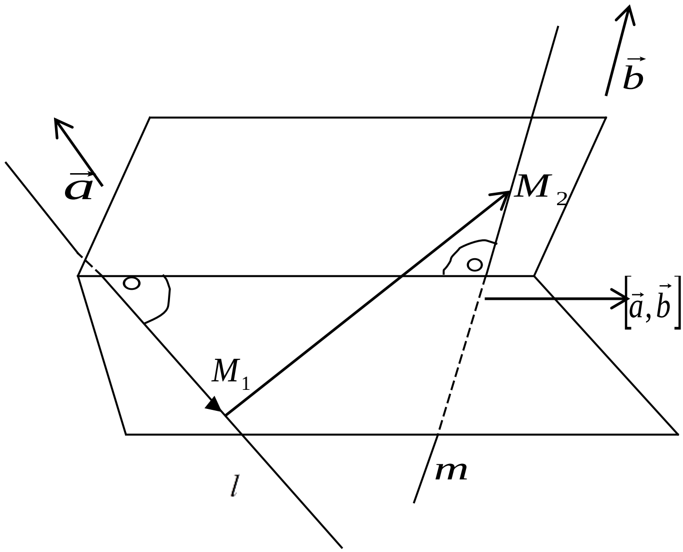
$$\lambda_1 = \frac{\alpha}{\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)}, \lambda_2 = \frac{\beta}{\left(\vec{b},\left[\vec{c},\vec{a}\right]\right)}, \lambda_3 = \frac{\gamma}{\left(\vec{c},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)},$$

звідки

$$\vec{x} = \frac{\alpha\left[\vec{b},\vec{c}\right]+\beta\left[\vec{c},\vec{a}\right]+\gamma\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}.$$

2.4.6. *Знайти найкоротшу віддаль між двома мимобіжними прямими.*

Розв'язання. Якщо прямі l та m мимобіжні (тобто не лежать в одній площині), то, як відомо, найкоротша віддаль δ між ними – це довжина відрізка спільного перпендикуляра до



прямих l та m, кінці якого лежать на цих прямих. Звідси випливає, що δ дорівнює абсолютній величині ортогональної проекції довільного вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, кінці якого лежать відповідно на прямих l та m $\left(M_1 \in l, M_2 \in m\right)$, на довільну пряму, перпендикулярну до прямих l та m.

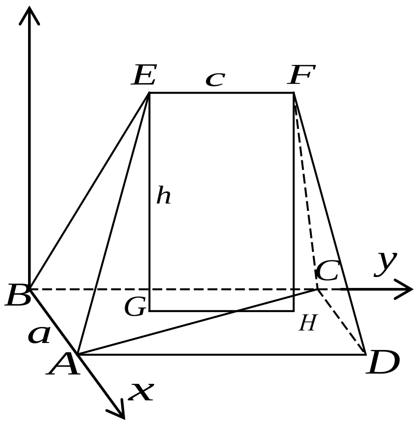
Нехай $\vec{a},\vec{b}$ – напрямні вектори прямих l та m відповідно. Тоді вектор $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ – напрямний вектор прямої, перпендикулярної до прямих l та m. Отже, $\delta = \left|пр._{[\vec{a},\vec{b}]}\overrightarrow{M_1M_2}\right|$. Але

$$\left|\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\overrightarrow{M_1M_2}\right)\right| = \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right| \cdot \left|np._{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \delta \cdot \left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|.$$

Таким чином,

$$\delta = \frac{\left|\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}.$$

2.4.7. *Дано прямокутник $ABCD$. Відрізок EF паралельний до площини цього прямокутника та проектується на цю площину у відрізок GH, паралельний до AD і до BC, причому точки G та H знаходяться на однакових відстанях від AB та CD, а відрізок GH – на однакових відстанях від AD та BC. Знайти найкоротшу віддаль між прямими BE та AC, якщо $AB = a$, $AD = b$, $EG = h$, $EF = c$.*



Розв'язання. Приймаючи точку B за початок координат, BA – за вісь Ox, BC – за вісь Oy та вибираючи вісь Oz перпендикулярно до площини $ABCD$, матимемо:

$$B(0;0;0), A(a;0;0), D(a;b;0), C(0;b;0),$$

$$E\left(\frac{a}{2};\frac{b-c}{2};h\right), F\left(\frac{a}{2};\frac{b+c}{2};h\right).$$

Тому

$$\overrightarrow{AC}=(-a;b;0)=\vec{x},\ \overrightarrow{BE}=\left(\frac{a}{2};\frac{b-c}{2};h\right)\uparrow\uparrow(a;b-c;2h)=\vec{y},$$

$$\overrightarrow{AE}=\left(-\frac{a}{2};\frac{b-c}{2};h\right),\ [\vec{x},\vec{y}]=(2bh;2ah;a(c-2b)),$$

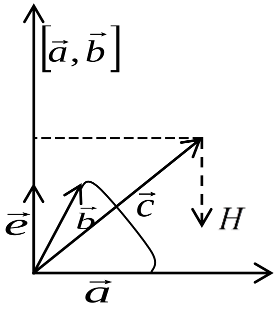
а найкоротша відстань d між прямими AC та BE дорівнює (див. попередній приклад):

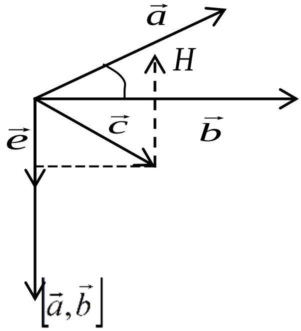
$$d=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AE},[\vec{x},\vec{y}]\right)\right|}{|[\vec{x},\vec{y}]|}=\frac{\bmod\begin{vmatrix}-\frac{a}{2} & \frac{b-c}{2} & h\\ -a & b & 0\\ a & b-c & 2h\end{vmatrix}}{\sqrt{4h^2\left(a^2+b^2\right)+a^2(c-2b)^2}}=$$

$$=\frac{2abh}{\sqrt{4h^2\left(a^2+b^2\right)+a^2(c-2b)^2}}.$$

2.4.8. *Дано вектори* $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b},\overrightarrow{OC}=\vec{c}$. *Вектори* $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$ *неколінеарні. Нехай* H *– проекція точки* A *на площину* OBC. *Знайти вектор* $\overrightarrow{OH}$.

Розв'язання. Нехай $\vec{e}-$ орт векторного добутку $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$: $\vec{e}=\frac{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}$. Якщо трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}-$ права, то, згідно з умовою задачі, вектор протилежно направлений із вектором $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, тобто $\overrightarrow{CH}=-\left|\overrightarrow{CH}\right|\vec{e}$, при цьому $\left|\overrightarrow{CH}\right|=np._{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}\vec{c}$. Якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}-$ ліва трійка векторів, то вектори $\overrightarrow{CH}$ та $\vec{e}-$однаково направлені. Отже, в цьому випадку $\overrightarrow{CH}=\left|\overrightarrow{CH}\right|\vec{e}$, $\left|\overrightarrow{CH}\right|=-np._{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}\vec{c}$. Зауважимо також, що





$$np._{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}\vec{c}=\frac{\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}=\frac{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|}.$$

Тоді

$$\overrightarrow{CH}=-\frac{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}{\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|^2}\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\frac{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}\left[\vec{a},\vec{b}\right],$$

незалежно від того, якою є трійка векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}-$ правою чи лівою. Якщо ж вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}-$компланарні, то точки C та H співпадають, а отже, $\overrightarrow{CH}=\vec{0}$.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити мішаний добуток $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$ векторів, якщо:

1) $\vec{a}=\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}$, $\vec{c}=\vec{i}$, де $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – ортонормований базис системи координат;

2) $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(3;1;2)$, $\vec{c}=(2;3;1)$.

(Відповідь: 1) 1; 2) 18).

2. Визначити, якою трійкою (правою чи лівою) є трійка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a} = (1;-1;2)$, $\vec{b} = (-2;1;1)$, $\vec{c} = (1;-2;2)$;

2) $\vec{a} = (1;2;1)$, $\vec{b} = (2;1;1)$, $\vec{c} = (1;1;2)$;

3) $\vec{a} = (-1;2;0)$, $\vec{b} = (3;-7;2)$, $\vec{c} = (2;-5;2)$.

(Відповідь: 1) правою; 2) лівою; 5) компланарні).

3. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо:

1) $\vec{a} = (3;2;2)$, $\vec{b} = (1;-1;3)$ та $\vec{c} = (1;9;-11)$;

2) $\vec{a} = (5;-1;3)$, $\vec{b} = (2;1;2)$, $\vec{c} = (3;-1;-2)$.

(Відповідь: 1) так; 2) ні).

4. З'ясувати, чи лінійно залежні вектори $\vec{a} = (1;2;3)$, $\vec{b} = (4;5;6)$, $\vec{c} = (7;8;9)$.

(Відповідь: так).

5. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a} = (3;4;0)$, $\vec{b} = (0;-3;1)$ та $\vec{c} = (0;2;5)$.

(Відповідь: 51).

6. Встановити, чи утворюють вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис у множині всіх векторів, якщо:

1) $\vec{a} = (2;3;-1)$, $\overleftarrow{b} = (1;-1;3)$, $\vec{c} = (1;9;-11)$;

2) $\vec{a} = (3;-2;1)$, $\vec{b} = (2;1;2)$, $\vec{c} = (3;-1;-2)$.

(Відповідь: 1) ні; 2) так).

7. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють базис, і розкласти вектор $\vec{d}$ за цим базисом, якщо $\vec{a} = (0;-5;7)$, $\vec{b} = (3;-2;1)$, $\vec{c} = (1;5;3)$ та $\vec{d} = (20;-27;35)$.

(Відповідь: $\vec{d} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 2\vec{c}$).

8. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, що утворюють праву трійку, взаємно

перпендикулярні. Знаючи, що $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\left|\vec{c}\right| = 3$, обчислити $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

(Відповідь: 24).

9. Довести, що кінці радіус-векторів $\vec{r}_1 = (4;-2;-2)$, $\vec{r}_2 = (3;1;1)$, $\vec{r}_3 = (4;2;0)$, $\vec{r}_4 = (7;-1;-6)$ лежать в одній площині.

10. Довести, що вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні, якщо вони задовольняють умову $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right] + \left[\vec{c}, \vec{a}\right] = \vec{0}$.

11. Точки $A(-1,3,-2)$, $B(-2,6,2)$, $C(-1,7,1)$, $D(2;6;-5)$ є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник плоский, та знайти його площу.

(Відповідь: $\sqrt{74}$).

12. З'ясувати, чи лежать точки $A(3;3;2)$, $B(7;1;5)$, $C(1;1;2)$ та $D(3;2;3)$ в одній площині.

(Відповідь: ні).

13. Знайти об'єм піраміди за відомими координатами її вершин: $A_1(2,1,-2), A_2(3,3,3), A_3(1,1,2), A_4(-1,-2,-3)$.

(Відповідь: $\frac{1}{6}$ куб.од.).

14. Обчислити об'єм піраміди з вершинами у точках $A(3;-2;5)$, $B(1;3;1)$, $C(-1;-1;3)$, $D\left(4;3;4\right)$.

(Відповідь: 6).

15. У тетраедрі з вершинами в точках $A(2;2;1)$, $B(3;1;2)$, $C(3;3;2)$ і $D(4;5;-3)$ обчислити висоту $h = \left|\overrightarrow{DE}\right|$.

(Відповідь: $3\sqrt{2}$).

16. Об'єм піраміди $V = 2$, три її вершини лежать у точках $A(2;1;3)$, $B(3;3;2)$, $C(1;2;4)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі Oz.

(Відповідь: $D_1\left(0;0;1\right), D_2\left(0;0;9\right)$).

§ 2.5. Подвійний векторний добуток

Нехай задано три довільні вектори $\vec{a},\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Означення. *Подвійним векторним добутком векторів* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *називається вектор* $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$.

Вектори $\vec{b},\vec{c}$ та $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$ є компланарними і звідси випливає, що вектор $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$ можна розкласти за векторами $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

Теорема 2.5.1. *Для довільних векторів* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *справедлива формула*

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Доведення. Побудуємо у просторі прямокутну декартову систему координат, направивши вісь Oz уздовж вектора $\vec{c}$, а вісь Oy візьмемо в площині векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Тоді вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ матимуть такі координати:

$$\vec{a}=\left(X;Y;Z\right),\vec{b}=\left(0;Y';Z'\right),\vec{c}=\left(0;0;Z''\right).$$

Застосувавши формулу (3.2) для векторного добутку, будемо мати $\left[\vec{b},\vec{c}\right]=\left(Y'Z'';0;0\right)$; згідно з цією ж формулою,

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\left(0;Y'ZZ'';ZZ'Z''\right).$$

Очевидно також, що $\left(\vec{a},\vec{c}\right)=ZZ'',\left(\vec{a},\vec{b}\right)=YY'+ZZ'$, тому

$$\left(\vec{a},\vec{c}\right)\vec{b}=\left(0;Y'ZZ'';ZZ'Z''\right),\ \left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c}=\left(0;0;YY'Z''+ZZ''Z''\right).$$

Урахувавши останні співвідношення знаходимо, що

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Твердження доведено.

Приклади розв’язування задач

2.5.1. *З’ясувати, при якому взаємному розміщенні ненульових векторів* $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *справджується рівність*

$$\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right].$$

Розв'язання. Відомо, що для довільних векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ справджується рівність $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Пропонуємо читачеві самостійно довести співвідношення

$$\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{a}\left(\vec{b},\vec{c}\right).$$

Отже, рівність $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]=\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$ матиме місце тоді й лише тоді, коли $\vec{a}\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\vec{c}\left(\vec{a},\vec{b}\right)$. Звідси випливають такі висновки: вектори $\vec{a}$ та $\vec{c}$ повинні бути колінеарними, або $\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$, тобто вектор $\vec{b}$ ортогональний до векторів $\vec{a}$ та $\vec{c}$.

2.5.2. *Знайти вектори $\vec{x}$ та $\vec{y}$, якщо відомі їх сума $\alpha \neq 0$, скалярний добуток ρ та векторний добуток $\vec{b} \neq \vec{0}$. Дано, що вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – ортогональні (якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ неортогональні, то задача розв'язків не має).*

Розв'язання. Маємо систему рівнянь:

$\vec{x}+\vec{y}=\vec{a},(\vec{x},\vec{y})=\rho,[\vec{x},\vec{y}]=\vec{b}$, причому $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$.

З першого рівняння знаходимо, що $\vec{y}=\vec{a}-\vec{x}$, і підставляємо це значення у друге та третє рівняння:

$$(\vec{x},\vec{a}-\vec{x})=\rho,[\vec{x},\vec{a}-\vec{x}]=[\vec{x},\vec{a}]=\vec{b}.$$

З останнього співвідношення $[\vec{x},\vec{a}]=\vec{b}$ випливає, що вектор $\vec{x}$ ортогональний до вектора $\vec{b}$, а оскільки вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ ортогональні та ненульові, то вектор $\vec{x}$ компланарний із векторами $\vec{a}$ та $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$; ці вектори ненульові та ортогональні, а тому вектор $\vec{x}$ можна за ними розкласти:

$$\vec{x}=\lambda\vec{a}+\mu\left[\vec{a},\vec{b}\right].$$

Підставляючи отриманий вираз у рівність $[\vec{x},\vec{a}]=\vec{b}$, отримаємо:

$$\left[\lambda\vec{a}+\mu\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right]=\vec{b},$$

$$\lambda[\vec{a},\vec{a}]+\mu\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right]=\mu\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{a}\right]=\mu\left(\vec{b}(\vec{a},\vec{a})-\vec{a}\left(\vec{b},\vec{a}\right)\right)=\mu\vec{b}|\vec{a}|^2=\vec{b}$$

звідки

$$\mu=\frac{1}{|\vec{a}|^2},\ \vec{x}=\lambda\vec{a}+\frac{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{|\vec{a}|^2}.$$

Тому рівняння $(\vec{x},\vec{a}-\vec{x})=\rho$, або $(\vec{x},\vec{a})+|\vec{x}|^2=\rho$, набуде вигляду

$$\lambda|\vec{a}|^2-\lambda^2|\vec{a}|^2-\frac{\left|\vec{b}\right|^2}{|\vec{a}|^2}=\rho,$$

звідки

$$\lambda=\frac{|\vec{a}|^2\pm\sqrt{|\vec{a}|^4-4\left(\left|\vec{b}\right|^2+\rho|\vec{a}|^2\right)}}{2|\vec{a}|^2}.$$

Якщо $|\vec{a}|^4<4\left(\left|\vec{b}\right|^2+\rho|\vec{a}|^2\right)$, то задача не має розв’язків. Якщо ж $|\vec{a}|^4=4\left(\left|\vec{b}\right|^2+\rho|\vec{a}|^2\right)$, то $\lambda=\frac{1}{2}$ і задача має єдиний розв’язок:

$$\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{|\vec{a}|^2},\ \vec{y}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{|\vec{a}|^2}.$$

У випадку, коли $|\vec{a}|^4>4\left(\left|\vec{b}\right|^2+\rho|\vec{a}|^2\right)$, задача має два

розв’язки: $$\vec{x}=\frac{|\vec{a}|^2+\sqrt{|\vec{a}|^4-4\left(\left|\vec{b}\right|^2+\rho|\vec{a}|^2\right)}}{2|\vec{a}|^2}\vec{a}+\frac{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{|\vec{a}|^2},$$

$$\vec{y}=\frac{|\vec{a}|^2-\sqrt{|\vec{a}|^4-4\left(\left|\vec{b}\right|^2+\rho|\vec{a}|^2\right)}}{2|\vec{a}|^2}\vec{a}-\frac{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{|\vec{a}|^2},$$

або

$$\vec{x} = \frac{|\vec{a}|^2 - \sqrt{|\vec{a}|^4 - 4\left(|\vec{b}|^2 + \rho|\vec{a}|^2\right)}}{2|\vec{a}|^2}\vec{a} + \frac{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{|\vec{a}|^2},$$

$$\vec{y} = \frac{|\vec{a}|^2 + \sqrt{|\vec{a}|^4 - 4\left(|\vec{b}|^2 + \rho|\vec{a}|^2\right)}}{2|\vec{a}|^2}\vec{a} - \frac{\left[\vec{a},\vec{b}\right]}{|\vec{a}|^2}.$$

2.5.3. *Дано вершини трикутника* $A(2;-1;-3)$, $B(1;2;-4)$ *та* $C(3;-1;-2)$. *Знайти координати вектора* $\vec{s}$ *, колінеарного з його висотою, опущеною з вершини* A, *за умови, що* $|\vec{s}| = 2\sqrt{34}$. *Відомо також , що вектор* $\vec{s}$ *утворює з віссю* Oy *тупий кут.*

Розв'язання. *1-ший спосіб.* Нехай точка $K(x_K; y_K; z_K)$ є основою висоти трикутника опущеної з вершни A. Оскільки ця точка належить прямій BC, то існує таке число $\lambda \neq -1$, що точка K ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{BC}$ у цьому відношенні λ, тобто:

$$x_K = \frac{x_C + \lambda \cdot x_B}{1+\lambda} = \frac{3+\lambda}{1+\lambda};$$

$$y_K = \frac{y_C + \lambda \cdot y_B}{1+\lambda} = \frac{-1+2\lambda}{1+\lambda};$$

$$z_K = \frac{z_C + \lambda \cdot z_B}{1+\lambda} = \frac{-2-4\lambda}{1+\lambda}.$$

З умови перпендикулярності висоти AK та сторони BC, до якої проведена дана висота, випливає рівність нулеві скалярного добутку векторів $\overrightarrow{BC} = (2;-3;2)$ та

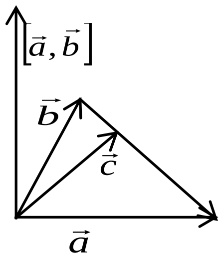
$$\overrightarrow{AK} = \left(\frac{3+\lambda}{1+\lambda} - 2; \frac{-1+2\lambda}{1+\lambda} + 1; \frac{-2-4\lambda}{1+\lambda} + 3\right) = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}; \frac{3\lambda}{1+\lambda}; \frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right).$$

Отже, $\left(\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{BC}\right) = 2\cdot\frac{1-\lambda}{1+\lambda} - 3\cdot\frac{3\lambda}{1+\lambda} + 2\frac{1-\lambda}{1+\lambda} = \frac{4-13\lambda}{1+\lambda} = 0$.

Звідси $\lambda = \frac{4}{13}$, а тому $\overrightarrow{AK} = \left(\frac{9}{13}; \frac{12}{13}; \frac{9}{13}\right)$. Шуканий вектор $\vec{s}$ колінеарний з висотою, тобто існує таке дійсне число t таке, що $\vec{s} = t\overrightarrow{AK} = \left(\frac{9}{13}t; \frac{12}{13}t; \frac{9}{13}t\right)$. Врахувавши, що $|\vec{s}| = 2\sqrt{34}$ отримаєм, що $t = \pm\frac{26}{3}$. Тому $\vec{s}_1 = (6;8;6)$ та $\vec{s}_2 = (-6;-8;-6)$.

Обираючи серед них такий, що утворює тупий кут з віссю Oy (див. задачу 2.2.10 або 2.2.11) отримаємо, що шуканий вектор має координати $\vec{s} = (-6;-8;-6)$.

2-ий спосіб. Розглянемо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-1;3;-1)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (1;0;1)$ зі спільним початком A, які є сторонами даного трикутника та вектор $\overrightarrow{AK} = \vec{c}$, що лежить на висоті трикутника, опущеної з вершини A. Оскільки вектори $\vec{a}$,



$\vec{b}$ та $\vec{c}$ компланарні, то векторний добуток $\vec{d} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = (-3;0;3)$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є також перпендикулярним і до компланарного з ними вектора $\vec{c}$.

Нехай шуканий вектор $\vec{s}$ має координати $(x; y; z)$. З умови колінеарності вектора $\vec{s} = (x; y; z)$ та висоти, опущеної з вершини A, випливає перпендикулярність векторів $\vec{s}$ та $\vec{d}$. Тому $(\vec{s}, \vec{d}) = 0$, звідки $-3x + 3z = 0$.

Вектор $\overrightarrow{AK} = \vec{c}$, що лежить на висоті AK трикутника, опущеної з вершини A, є також перпендикулярним ще й до третьої сторони трикутника - BC. Це означає, що і вектор $\vec{s}$, колінеарний з $\overrightarrow{AK} = \vec{c}$, є перпендикулярним до сторони BC трикутника. Звідси випливає, що шуканий вектор $\vec{s} = (x; y; z)$ перпендикулярний до вектора $\overrightarrow{BC} = (2; -3; 2)$. Отже, $(\overrightarrow{BC}, \vec{s}) = 0$, тому $2x - 3y + 2z = 0$.

Приєднавши до попередніх двох умов ще рівність довжини вектора $\vec{s}$ до $2\sqrt{34}$, отримаємо систему з трьох рівнянь: $\begin{cases} -3x + 3z = 0; \\ 2x - 3y + 2z = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{34}. \end{cases}$

Розв’язавши дану систему отримаєм, що $\vec{s}_1 = (6; 8; 6)$ та $\vec{s}_2 = (-6; -8; -6)$. Міркуючи аналогічно як в задачах 2.2.10 та 2.2.11, з того, що шуканий вектор утворює тупий кут з віссю Oy випливає, що $\vec{s} = (-6; -8; -6)$.

3-ій спосіб. Нагадаємо, що векторний добуток $[\vec{a}, \vec{b}] = (-3; 0; 3)$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є також перпендикулярним і до компланарного з ними вектора $\vec{c}$. Якщо врахувати, що шуканий вектор $\vec{s}$ колінеарний з висотою трикутника, отримаєм, що $\vec{s}$ колінеарний до такого вектора $\vec{f}$, який одночасно перпендикулярний і до сторони, до якої проведено висоту, тобто до вектора $\overrightarrow{BC} = (2; -3; 2)$, і до $[\vec{a}, \vec{b}] = (-3; 0; 3)$. Тобто $\vec{s}$ колінеарний до векторного добутку цих векторів: $\vec{s} \parallel \vec{y} = \left[\overrightarrow{BC}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right] = \left(-9; -12; -9\right)$. Отже, існує дійсне число t таке, що $\vec{s} = t\vec{y} = \left(-9t; -12t; -9t\right)$. Врахувавши, що його довжина рівна $2\sqrt{34}$, отримаєм, що $|t| = \dfrac{2}{3}$. Тому $\vec{s}_1 = \left(6; 8; 6\right)$ та $\vec{s}_2 = \left(-6; -8; -6\right)$.

Користуючись методом наведеним на стор.146 при розв'язуванні задач 2.2.10 та 2.2.11 врахуємо, що шуканий вектор утворює тупий кут з віссю Oy. Тому отримаємо, що $\vec{s} = \left(-6; -8; -6\right)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Дано вектори $\vec{a} = (2; -3; 1)$, $\vec{b} = (-3; 1; 2)$ і $\vec{c} = (1; 2; 3)$. Обчислити $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right]$ і $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right]$.

   (Відповідь: $\left(-7; 14; -7\right)$, $\left(10; 13; 19\right)$)
2. Довести тотожності:
   1. $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right] = \vec{b}\left(\vec{a}, \vec{c}\right) - \vec{a}\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$;
   2. $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right]\right] = \left(\vec{a}, \vec{c}\right)\left[\vec{b}, \vec{d}\right] - \left[\vec{a}, \vec{d}\right]\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$;
   3. $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right]\right] = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\vec{b} - \left(\vec{a}, \vec{b}\right)\left[\vec{c}, \vec{d}\right]$;
   4. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]^2 \cdot \left[\vec{a}, \vec{c}\right]^2 - \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{a}, \vec{c}\right]\right)^2 = \vec{a}^2 \cdot \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)^2$;
   5. $\left[\vec{a}, \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right] + \left[\vec{b}, \left[\vec{c}, \vec{a}\right]\right] + \left[\vec{c}, \left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right] = \vec{0}$;
   6. $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right) + \left(\left[\vec{a}, \vec{c}\right], \left[\vec{d}, \vec{b}\right]\right) + \left(\left[\vec{a}, \vec{d}\right], \left[\vec{b}, \vec{c}\right]\right) = 0$;
   7. $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{b}, \vec{c}\right], \left[\vec{c}, \vec{a}\right]\right) = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)^2$;
   8. $\left[\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right] = \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right) - \vec{d}\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$;
   9. $\left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right)\left(\vec{b}, \vec{d}\right) - \left(\vec{a}, \vec{d}\right)\left(\vec{b}, \vec{c}\right)$;
   10. $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\left(\vec{a}, \vec{d}, \vec{e}\right) = \begin{vmatrix} \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}\right) & \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}\right) \\ \left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}\right) & \left(\vec{a}, \vec{c}, \vec{e}\right) \end{vmatrix}$.

РОЗДІЛ 3
ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

§3.1. Рівняння прямої на площині

3.1.1. Канонічне та параметричні рівняння прямої

Нехай γ – пряма лінія на площині π.

Пряма γ називається колінеарною вектору $\vec{a}$, якщо $\vec{a} \in \gamma$ або $\vec{a} \parallel \gamma$, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}, \forall \vec{b} \in \gamma$.

Означення. *Напрямним вектором прямої γ називається ненульовий вектор, розміщений у площині π, колінеарний цій прямій.*

Оскільки вектор – це напрямлений відрізок, то вектор належить прямій, якщо його кінці є точками прямої. Зафіксуємо на площині π загальну декартову систему координат xOy. Складемо рівняння прямої γ, яка проходить через задану точку $A(x_0; y_0) \in \pi$ і має заданий напрямний вектор $\vec{a} = (l; m)$. Очевидно, що точка $M(x; y) \in \pi$ лежить на вказаній прямій тоді і лише тоді, коли вектори $\overrightarrow{AM} = (x - x_0; y - y_0)$ та $\vec{a} = (l; m)$ колінеарні, тобто тоді і лише тоді, коли координати цих векторів пропорційні:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{3.1.1}$$

Рівняння (3.1.1) називається *канонічним рівнянням прямої* γ.

Рівняння (3.1.1) часто записують у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ l & m \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.2}$$

Зауважимо, що в рівняннях (3.1.1) і (3.1.2) обидва числа l і m одночасно нульові дорівнювати не можуть, бо вектор $\vec{a} = (l; m)$ ненульовий: $|l| + |m| \neq 0$.

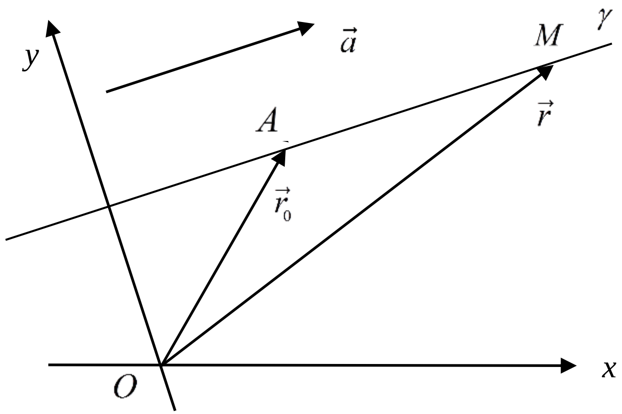
Вектори $\vec{i}=(1;0)$, $\vec{j}=(0;1)$ є напрямними векторами координатних осей Ox та Oy відповідно. Тоді із (3.1.2), згідно з правилом обчислення визначника другого порядку, маємо рівняння вказаних осей: $y=0$ – канонічне рівняння осі Ox; $x=0$ – канонічне рівняння вісі Oy.

Параметричні рівняння прямої γ отримуються з канонічного рівняння (3.1.1) цієї прямої, якщо прийняти за параметр t величину, що стоїть у лівій та правій частинах (3.1.1). Оскільки один із знаменників (3.1.1) відмінний від нуля, а відповідний чисельник може набувати *довільних значень*, то областю визначення параметра t є вся множина $\mathbb{R}$. Отже,

$$x-x_0=lt,\ \ y-y_0=mt,\ t\in\mathbb{R}\text{, або}$$

$$x=x_0+lt,\ \ y=y_0+mt,\ t\in\mathbb{R}. \qquad (3.1.3)$$

Рівняння (3.1.3) називаються *параметричними рівняннями прямої* γ.



Якщо $\vec{r}=(x;y)$ – радіус-вектор довільної точки M прямої γ, $\vec{r}_0=(x_0;y_0)$ – радіус-вектор фіксованої точки A

прямої γ, *то* $\vec{r}=\vec{r}_0+\overrightarrow{AM}$. Вектор $\overrightarrow{AM}$ – також напрямний вектор прямої γ, тому $\overrightarrow{AM}\parallel\vec{a}$. Отже, існує $t\in\mathbb{R}$, таке, що $\overrightarrow{AM}=t\vec{a}$. Звідси дістаємо співвідношення

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a}, t\in\mathbb{R}. \qquad (3.1.4)$$

Рівняння (3.1.4) називається *векторно-параметричним рівнянням прямої* γ.

3.1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Зафіксуємо на площині π загальну декартову систему координат xOy. Нехай пряма γ не паралельна вісі Oy.

Означення. *Кутовим коефіцієнтом* k *прямої* γ*, заданої відносно загальної декартової системи координат, називається відношення другої координати напрямного вектора* $\vec{a}=(l;m)$ *цієї прямої до першої координати:*

$$k=\frac{m}{l}.$$

Прямі, що паралельні осі Oy*, й сама вісь* Oy *не мають кутового коефіцієнта, оскільки перша координата будь-якого напрямного вектора таких прямих дорівнює нулю.*

Для будь-якої прямої, що перетинає вісь Oy, кутовий коефіцієнт має конкретне значення і не залежить від вибору напрямного вектора.

Складемо рівняння прямої γ, яка проходить через задану точку $N(x_0;y_0)$, не паралельна вісі Oy і має напрямний вектор $\vec{a}=(l;m)$, тобто кутовий коефіцієнт $k=\frac{m}{l}$. Урахувавши означення кутового коефіцієнта, канонічне рівняння прямої (3.1.1) запишемо у вигляді

$$y-y_0=k(x-x_0). \qquad (3.1.5)$$

Рівняння (3.1.5) називається *рівнянням прямої, яка проходить через точку* $(x_0; y_0)$ *і має кутовий коефіцієнт k.*

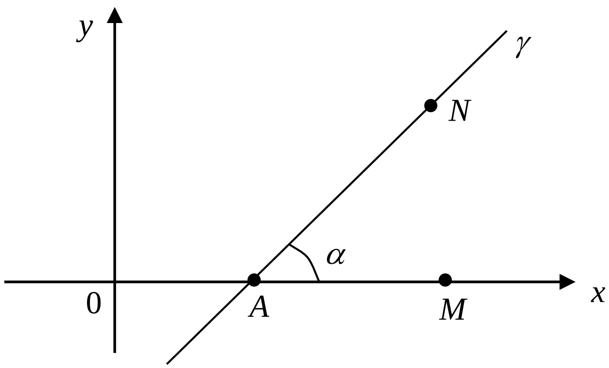
Рівняння (3.1.5) можна подати у вигляді

$$y = kx + b, \tag{3.1.6}$$

де $b = y_0 - kx_0$. Очевидно, що b – це ордината точки перетину прямої γ з віссю Oy.

З'ясуємо геометричний зміст кутового коефіцієнта прямої, якщо на площині π зафіксовано прямокутну декартову систему координат та l, m – координати її напрямного вектора в цій системі координат.

Нехай пряма γ не паралельна вісі Ox. Уведемо поняття кута нахилу цієї прямої до вісі Ox. Припустимо, що пряма перетинає вісь Ox у точці A. Візьмемо на осі Ox довільну точку M, розміщену по той бік від точки A, куди направлена вісь Ox, а на прямій γ – довільну точку N, розміщену відносно вісі Ox у півплощині, що визначається додатним напрямом вісі Oy. Кут $\alpha = \angle NAM$ називається кутом нахилу прямої γ до вісі Ox. Якщо пряма γ паралельна вісі Ox або збігається з нею, то вважаємо, що $\alpha = 0$.



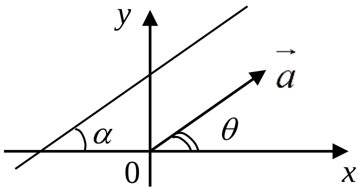
Доведемо, що кутовий коефіцієнт прямої γ дорівнює тангенсу кута нахилу цієї прямої до вісі Ox. Для прямої, яка перпендикулярна до вісі Ox, кутовий коефіцієнт не існує. Кутовий коефіцієнт прямої позначається буквою k, отже, покажемо, що $k = tg\alpha$.

Нехай θ – кут нахилу напрямного вектора $\vec{a}$ до вісі Ox. Можливі чотири випадки, зображені на відповідних малюнках. У випадках 1) та 3) маємо $\theta = \alpha$ і для проекцій на вісі Ox, Oy правильними є формули

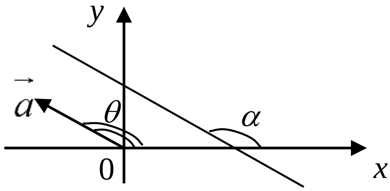
$$l = |\vec{a}|\cos\theta,\ m = |\vec{a}|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |\vec{a}|\sin\theta .$$

У випадках 2) і 4) $\theta = \pi - \alpha$, при цьому

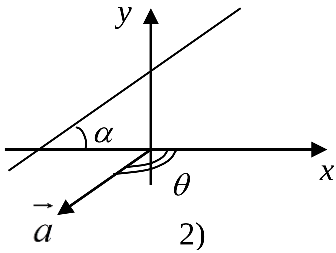
$$l = |\vec{a}|\cos\theta,\ m = |\vec{a}|\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -|\vec{a}|\sin\theta .$$



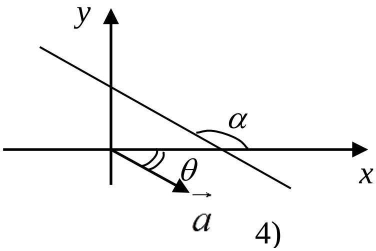
1)



3)



2)



4)

Таким чином, у випадках 1) та 3) $tg\theta = tg\alpha$ і $\frac{m}{l} = tg\theta$, а у випадках 2) і 4) $tg\theta = -tg\alpha$, $\frac{m}{l} = -tg\theta$. Отже, у всіх чотирьох випадках $tg\alpha = \frac{m}{l} = k$. Твердження доведено.

3.1.3. Загальне рівняння прямої на площині

Нехай на площині π задана пряма лінія γ і фіксована загальна декартова система координат, відносно якої γ задається канонічним рівнянням (3.1.1). Це рівняння, очевидно, можна подати у вигляді $m(x - x_0) = l(y - y_0)$ або $Ax + By + C = 0$, де $A = m$; $B = -l$; $C = ly_0 - mx_0$. Оскільки $|l| + |m| \neq 0$, то $|A| + |B| \neq 0$. Рівняння

$$Ax + By + C = 0,\ |A| + |B| \neq 0 \qquad (3.1.7)$$

називається *загальним рівнянням прямої* γ.

Правильне є також таке твердження: *кожне рівняння першого степеня вигляду (3.1.6) є рівнянням прямої лінії на площині.*

Справді, нехай $(x_0; y_0)$ – деякий розв'язок рівняння (3.1.7), тобто

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \qquad (3.1.8)$$

Віднімемо від (3.1.7) тотожність (3.1.8); в результаті одержимо рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0, \qquad (3.1.9)$$

еквівалентне рівнянню (3.1.7). Рівняння (3.1.9) запишемо у вигляді $\frac{x - x_0}{-B} = \frac{y - y_0}{A}$, яке, внаслідок п.3.1.1, є канонічним рівнянням прямої, що проходить через точку $(x_0; y_0)$ і має напрямний вектор $\vec{a} = (-B; A)$.

Вектор $\vec{n}=(A;B)$ називається *головним вектором прямої* γ.

Зауваження. Нехай на площині π зафіксована прямокутна декартова система координат і пряма $\gamma\in\pi$ задана загальним рівнянням (3.1.7), що еквівалентне рівнянню (3.1.9). Числа $x-x_0, y-y_0$ є координатами напрямного вектора $\overrightarrow{AM}$ прямої γ, який розміщується на цій прямій ($A(x_0;y_0)\in\gamma$, $M(x;y)\in\gamma$). Вияснимо геометричний зміст вектора $\vec{n}=(A;B)$. Ліву частину (3.1.9) можна розуміти як скалярний добуток вказаних векторів, заданих своїми координатами. Отже, (3.1.9) можна подати у вигляді $(\vec{n},\overrightarrow{AM})=0$. Це означає, що вектор $\vec{n}$ ортогональний до вектора $\overrightarrow{AM}$, тому $\vec{n}$ ортогональний до прямої γ, що задана загальним рівнянням відносно прямокутної декартової системи координат. Вектор $\vec{n}$ називається також *нормальним вектором прямої* γ.

Співвідношення (3.1.9) можна також розуміти як рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}$ (оскільки хоча б одна зі сталих A, B відмінна від нуля, то вектор $\vec{n}$ ненульовий).

У загальній декартовій системі координат вектор $\vec{n}=(A;B)$ може й не бути перпендикулярним до прямої, заданої рівнянням $Ax+By+C=0$. Але, легко переконатися, що пряма $Ax+By+C=0$ не колінеарна вектору $\vec{n}=(A;B)$. Для доведення цього твердження використовують наступну умову колінеарності прямої вектору.

Терема 3.1.1. *Нехай відносно загальної декартової системи координат на площині задано вектор* $\vec{a}=(l;m)$ *і пряма своїм загальним рівнянням* $Ax+By+C=0$.

Тоді необхідна і достатня умова колінеарності даної прямої вектору $\vec{a}$ є така

$$Al + Bm = 0.$$

Доведення. Відкладемо вектор $\vec{a} = (l; m)$ *від довільної точки* $M_0(x_0; y_0)$ даної прямої. Тоді кінець P побудованого вектора матиме координати $x_0 + l, y_0 + m$. Дана пряма колінеарна вектору $\vec{a} = (l; m)$ тоді і тільки тоді, коли точка P належить даній прямій, тобто виконується рівність $A(x_0 + l) + B(y_0 + m) + C = 0$, або $Al + Bm = 0$ (очевидно $Ax_0 + By_0 + C = 0,$ бо точка $M_0(x_0; y_0)$ лежить на даній прямій). Теорема доведена.

Таким чином, якщо пряма γ відносно загальної декартової системи координат задається загальним рівнянням (3.1.6), то за допомогою коефіцієнтів цього рівняння при змінних x і y будуються два вектори: $\vec{a} = (-B; A)$, $\vec{n} = (A; B)$; при цьому $\vec{a}$ – напрямний вектор прямої γ, $\vec{n}$ – головний вектор цієї прямої.

3.1.4. Неповні рівняння прямої. Рівняння прямої у відрізках

Нехай на площині π задана пряма лінія γ і фіксована загальна декартова система координат, відносно якої γ задається загальним рівнянням (3.1.7):

$$Ax + By + C = 0, \ |A| + |B| \neq 0.$$

Пряма γ, задана рівнянням $Ax + By + C = 0$, колінеарна осі Ox тоді і тільки тоді, коли $A = 0$, оскільки напрямний вектор $\vec{a} = (-B; A)$ прямої γ колінеарний осі Ox тоді і тільки тоді, коли друга координата цього вектора дорівнює нулю.

Загальне рівняння прямої, що колінеарна осі Ox *, є таким:* $By+C=0$, $B\neq 0$ *, або* $y=b$ *, де* $b=-\dfrac{C}{B}$.

Пряма γ, задана рівнянням $Ax+By+C=0$, колінеарна осі Oy тоді і тільки тоді, коли $B=0$, оскільки напрямний вектор $\vec{a}=\left(-B;A\right)$ прямої γ колінеарний осі Oy тоді і тільки тоді, коли перша координата цього вектора дорівнює нулю.

Загальне рівняння прямої, що колінеарна осі Oy *, є таким:* $Ax+C=0$, $A\neq 0$ *, або* $x=a$*, де* $a=-\dfrac{C}{A}$.

Необхідна і достатня умова того, що пряма проходить через початок координат є такою: $C=0$. Дійсно, при виконанні рівності $C=0$ і тільки в цьому випадку рівняння $Ax+By+C=0$ задовольняють координати $\left(0;0\right)$ початку координат заданої загальної декартової системи координат.

Отже, *загальне рівняння прямої, що проходить через початок координат, має вигляд:* $Ax+By=0$.

Підсумувавши все сказане вище, маємо:

Неповними рівняннями прямої називають такі її загальні рівняння:

$By+C=0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$ — рівняння прямої, паралельної координатній вісі Ox.

$Ax+C=0$, $A\neq 0$, $C\neq 0$ — рівняння прямої, паралельної координатній вісі Oy.

$Ax+By=0$, $A\neq 0$, $B\neq 0$ — рівняння прямої, яка містить початок координат.

$By=0$, $B\neq 0$ (або $y=0$) — рівняння координатної вісі Ox.

$Ax=0$, $A\neq 0$ (або $x=0$) — рівняння координатної вісі Oy.

Нехай у загальному рівнянні прямої (3.1.7) $A\neq 0$, $B\neq 0$ і $C\neq 0$. Тоді зробимо такі перетворення рівняння (3.1.7):

$$Ax+By=-C,$$

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1,$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (3.1.10)$$

де $a=-\frac{C}{A}$, $a=-\frac{C}{B}$ – величини відрізків, які відтинаються прямою (що має рівняння (3.1.7)) від координатних осей. Рівняння (3.1.10) називається *рівнянням прямої у відрізках.* Точки $A(a;0)$ і $B(0;b)$ є точками перетину прямої, заданої рівнянням (3.1.10), з координатними осями.

3.1.5. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Нехай на площині π задана пряма лінія γ і фіксована загальна декартова система координат.

Якщо дві різні точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ належать прямій γ, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ є напрямним вектором прямої γ. Тоді канонічне рівняння прямої γ матиме вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (3.1.11)$$

Рівняння (3.1.11) називається *рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки.*

Рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, можна, очевидно, записати ще в одному із таких виглядів:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix}=0,$$

або

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

або в параметричній формі

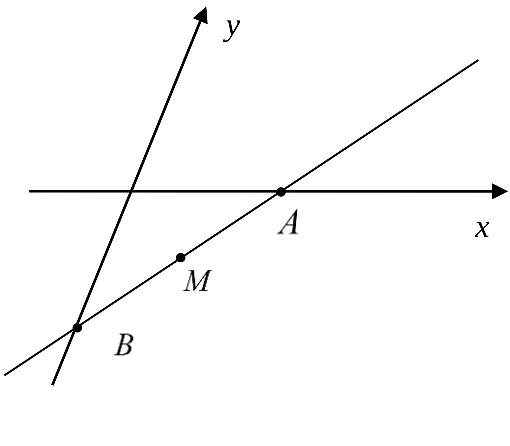
$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t,$$

(в цих рівняннях t є координатою точки M на прямій M_1M_2 в такій системі координат: точка M_1 — початок координат, $\overrightarrow{M_1M_2}$ — масштабний відрізок координатної осі).

Приклади розв'язування задач

3.1.1. *Через точку* $M(2;-1)$ *провести пряму, відрізок якої між осями координат ділився б у даній точці навпіл. Система координат афінна.*

Розв'язання. Перш за все знайдемо координати кінців відрізка, про який йде мова в умові задачі (точки A та B перетину шуканої прямої γ із координатними осями Ox та Oy заданої афінної системи координат). Очевидно, що $A(x;0)$ і $B(0;y)$. Оскільки $M(2;-1)$ — середина відрізка AB, то, використавши формули координат середини відрізка, маємо: $\frac{x+0}{2} = 2$, $\frac{0+y}{2} = -1$. Отже, $A(4;0)$, $B(0;-2)$.



Запишемо рівняння шуканої прямої γ.

1-й спосіб. Пряма γ проходить через точки A, M, B, координати яких відомі. Візьмемо довільні дві з них, наприклад M та A і використаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ (див. п.3.1.5). Маємо: $\frac{x-4}{2-4}=\frac{y-0}{-1-0}$, $\frac{x-4}{-2}=\frac{y}{-1}$, тобто, $x-2y-4=0$.

2-й спосіб. Оскільки будь-який із векторів, кінець і початок яких є точками A, B або M прямої γ, є напрямним вектором γ, то, взявши за напрямний вектор γ, наприклад, вектор $\overrightarrow{MA}=(4-2;0-(-1))=(2;1)$. Запишемо канонічне рівняння прямої γ (див. рівняння (3.1.1)): $\frac{x-0}{2}=\frac{y-(-2)}{1}$, $x-2y-4=0$. Зауважимо, що в ролі фіксованої точки прямої взято точку B.

3-й спосіб. Використаємо рівняння прямої у відрізках (3.1.9) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де $a=4, b=2$. Отже, рівняння прямої γ: $\frac{x}{4}+\frac{y}{-2}=1$, $x-2y-4=0$.

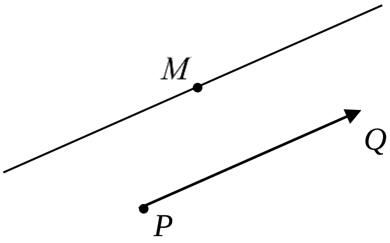
4-й спосіб. Очевидно, що пряма γ маючи напрямний вектор $\overrightarrow{MA}=(2;1)$, має кутовий коефіцієнт $k=\frac{1}{2}$ (див. п. 3.1.2). Запишемо рівняння прямої γ з кутовим коефіцієнтом $y-y_0=k(x-x_0)$, взявши за точку $(x_0;y_0)$ будь-яку з точок A, B або M, наприклад, точку M: $y-(-1)=\frac{1}{2}(x-2)$, $x-2y-4=0$.

3.1.2. *Через точку* $M(2;5)$ *провести пряму, рівновіддалену від точок* $P(-1;2),\ Q(5;1)$. *Система координат афінна.*

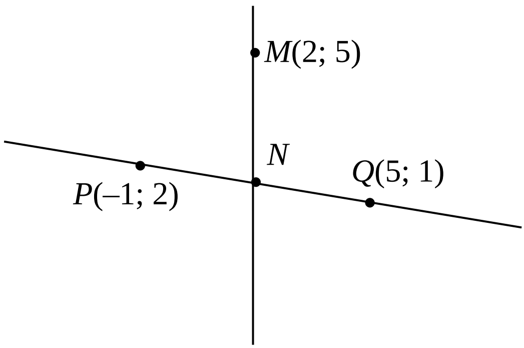
Розв'язання. Зі шкільного курсу геометрії відомо, що існують дві прямі, що задовольняють умову задачі:

а) пряма γ_1 проходить через точку M паралельно прямій PQ, тобто $\overrightarrow{PQ}=(6;-1)$ – напрямний вектор прямої γ_1. Канонічне рівняння прямої γ_1:

$$\frac{x-2}{6}=\frac{y-5}{-1},\ -1\cdot(x-2)=6\cdot(y-5),\ x+6y-32=0;$$



б) пряма γ_2, яка проходить через дві точки: точку M та середину відрізка PQ, тобто точку $N(2;\frac{3}{2})$.



Використаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки:

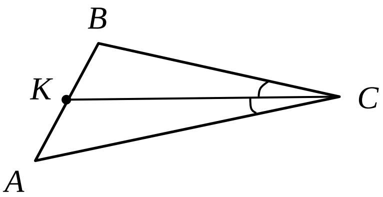
$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}, \quad \frac{x-2}{2-2}=\frac{y-5}{\frac{3}{2}-5}.$$

Отже, рівняння прямої γ_2: $x-2=0$.

3.1.3. *Дано трикутник* ABC: $A(4;4)$, $B(-6;-1)$, $C(-2;-4)$. *Написати рівняння бісектриси внутрішнього кута трикутника при вершині* C. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Під рівнянням бісектриси кута трикутника розумітимемо рівняння прямої, на якій лежить ця бісектриса.

З шкільного курсу геометрії відомо, що якщо CK – бісектриса внутрішнього кута при вершині C трикутника ABC, то $\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{AC}{BC}$.



Отже, точка K ділить сторону AB (напрямлений відрізок $\overrightarrow{AB}$) у відношенні $\lambda=\dfrac{AC}{BC}$, де

$AC=\sqrt{(-2-4)^2+(-4-4)^2}=\sqrt{100}=10$,

$BC=\sqrt{(-2+6)^2+(-4+1)^2}=\sqrt{25}=5$, тобто $\lambda=2$.

Використаємо формули поділу напрямленого відрізка в заданому відношенні

$$x_K = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}, \quad y_K = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

Маємо $x_K = \frac{4-2\cdot 6}{1+2} = -\frac{8}{3}$, $y_K = \frac{4-2\cdot 1}{1+2} = \frac{2}{3}$, $M(-\frac{8}{3};\frac{2}{3})$.

Таким чином, шукана бісектриса проходить через дві точки C і K:

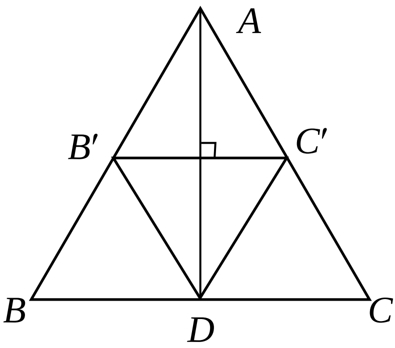
$$\frac{x+\frac{8}{3}}{-2+\frac{8}{3}} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-4-\frac{2}{3}}, \quad \frac{x+\frac{8}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-\frac{14}{3}},$$

$\frac{3x+8}{2} = -\frac{3y-2}{14}$, тобто $21x+3y+54=0$. Отже, рівняння бісектриси $KC: 7x+y+18=0$.

3.1.4. *Дано вершини трикутника* $A(0;1)$, $B(-2;5)$, $C(4;9)$. *Скласти рівняння сторін ромба, вписаного в даний трикутник, якщо одна з його вершин співпадає з точкою* A, *сторони, що виходять із вершини* A, *лежать на сторонах* AC *і* AB *даного трикутника, а вершина, протилежна вершині* A, *лежить на стороні* BC. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Під рівнянням сторони геометричної фігури розуміють рівняння прямої, на якій лежить ця пряма.

Згідно з умовою задачі, маємо рисунок:



Рівняння прямої AC, яка проходить через дві точки A та C: $\frac{x-0}{4-0}=\frac{y-1}{9-1}$, $8x-4y+4=0$. Маємо рівняння сторони AC' ромба: $2x-y+1=0$.

Аналогічно записуємо рівняння сторони AB трикутника та, відповідно, сторони AB' ромба. Отже: AB: $\frac{x-0}{-2-0}=\frac{y-1}{5-1}$, $4x+2y-2=0$. Таким чином, рівняння сторони AB' ромба: $2x+y-1=0$.

Оскільки діагональ ромба ділить кут при його вершині навпіл, то $\angle BAD=\angle DAC$. Звідси: AD – бісектриса внутрішнього кута при вершині A трикутника ABC. Скористаємось (як і в попередній задачі) відомою з шкільного курсу геометрії властивістю бісектриси: $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$. Отже, $\frac{BD}{DC}=\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{80}}=\frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{2}$. Відношення, у якому точка D ділить напрямлений відрізок BD дорівнює $\lambda=\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$. Таким чином, координати точки D:

$$x_D=\frac{-2+\frac{1}{2}4}{1+\frac{1}{2}}=0,\quad y_D=\frac{5+\frac{9}{2}}{\frac{3}{2}}=\frac{19}{3}\text{, тобто } D(0;\frac{19}{3}).$$

Протилежні сторони ромба – паралельні. Зокрема, $B'D \parallel AC'$. Отже, $B'D\perp\vec{n}$, де $\vec{n}=(2;-1)$ – головний вектор прямої AC'. Рівняння прямої $B'D$:

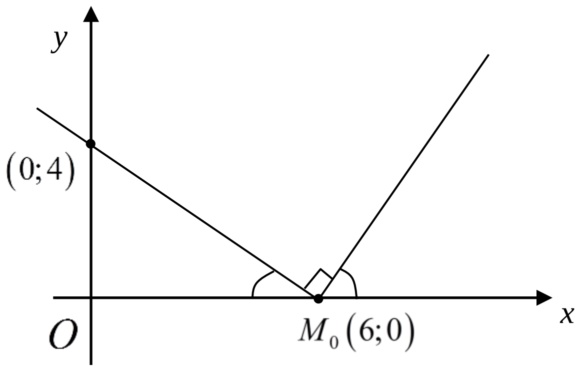
$$2(x-0)-\left(y-\frac{19}{3}\right)=0,\ 6x-3y+19=0.$$

Аналогічно: $(C'D) \perp \vec{m}$, де $\vec{m} = (2;1)$ – головний вектор прямої AB' і рівняння прямої $C'D$: $6x + 3y - 19 = 0$.

Зауваження. За головні вектори паралельних прямих може слугувати один і той же вектор, або (як буде показано в п.3.3.2) колінеарні вектори.

3.1.5. *Промінь світла, направлений уздовж прямої* $2x - 3y - 12 = 0$*, дійшовши до осі* Ox*, відбився від неї. Визначити точку зустрічі променя з віссю і рівняння відбитого променя. Система координат прямокутна декартова.*

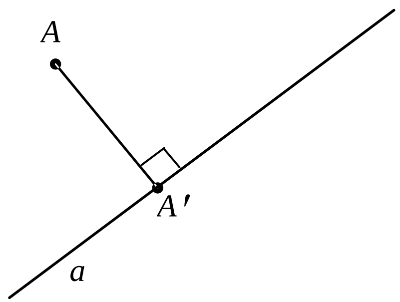
Розв'язання. Рівняння заданої прямої запишемо у вигляді $y = \frac{2}{3}x - 4$. Пряма має кутовий коефіцієнт $k = \frac{2}{3}$. Оскільки з фізики відомо, що кут падіння дорівнює куту відбиття, то кутовий коефіцієнт шуканої прямої $k' = tg\left(180^\circ - arctg\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$. Оскільки точка M_0 зустрічі заданого променя з віссю Ox має ординату $y_0 = 0$, то її абсциса $x_0 = 6$.



Отже, шукана пряма має кутовий коефіцієнт $k' = -\frac{2}{3}$ і проходить через точку $M_0(6;0)$. Її рівняння $y = -\frac{2}{3}(x-6)$, тобто $2x+3y-12=0$.

3.1.6. *Знайти проекцію точки* $A(-5;6)$ *на пряму* a*, яка задана рівнянням* $7x-13y-105=0$*. Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Точка A не належить прямій a, бо її координати не задовольняють рівняння цієї прямої: $7\cdot(-5)-13\cdot 6-105=-35-78-105=-218\neq 0$.



Тоді проекцією точки A на пряму a є точка A' перетину прямої a з прямою b, що проходить через точку A перпендикулярно до a. Зауважимо, що нормальний вектор $\vec{n}=(7;-13)$ прямої a є напрямним вектором для b, а отже, рівняння b таке:

$$\frac{x+5}{7}=\frac{y-6}{-13}, \text{ тобто } 13x+7y+23=0.$$

Координати шуканої точки A' знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} 13x+7y+23=0, \\ 7x-13y-105=0. \end{cases}$$

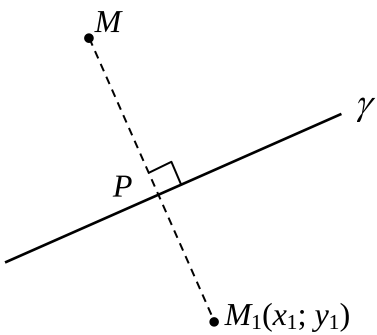
Головний визначник даної системи: $\Delta = \begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 7 & -13 \end{vmatrix} = -218.$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$. Знайдемо Δ_1 і Δ_2: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -23 & 7 \\ 105 & -13 \end{vmatrix} = -436,$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 13 & -23 \\ 7 & 105 \end{vmatrix} = 1526.$ Тоді отримаємо: $x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-436}{-218} = 2,$ $y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1526}{-218} = -7$. Отже, $A'(2;-7)$ – шукана проекція.

3.1.7. *Знайти точку, симетричну точці* $M(-2;9)$ *відносно прямої* $\gamma : 2x - 3y + 18 = 0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Шукану точку і її координати в заданій прямокутній декартовій системі координат позначимо $M_1(x_1, y_1)$.

Знайдемо спочатку проекцію точки $M(-2;9)$ на пряму $2x - 3y + 18 = 0$, скориставшись алгоритмом попередньої задачі.



Рівняння прямої MP: $\frac{x+2}{2} = \frac{y-9}{-3}$, тобто $3x + 2y - 12 = 0$.

Координати точки P, що є проекцією точки M на пряму γ, знаходимо із системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x-3y+18=0, \\ 3x+2y-12=0. \end{cases}$$

Маємо: $P(0;6)$.

Знайдена точка $P(0;6)$ є серединою відрізка MM_1. Скористаємося відомими зі шкільного курсу геометрії формулами координат середини відрізка. Отримаємо співвідношення для знаходження x_1, y_1: $\dfrac{x_1-2}{2}=0$ і $\dfrac{y_1+9}{2}=6$.

Таким чином, координати шуканої точки M_1: $x_1=2, y_1=3$.

Зауваження. Інший спосіб розв'язання цієї задачі пропонується читачеві в другому параграфі цього розділу (задача 3.2.5).

3.1.8. *Через точку* $M(4;-3)$ *провести пряму так, щоб площа трикутника, утвореного нею і осями координат, дорівнювала* 3. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Оскільки шукана пряма γ перетинатиме обидві осі, то її кутовий коефіцієнт k визначається і $k \neq 0$ (див. п.3.1.2). Рівняння прямої γ, яка проходить через точку $M(4;-3)$ і має кутовий коефіцієнт k: $y+3=k(x-4)$, $y=kx-4k-3$. Позначимо через A та B точки перетину γ з осями Ox та Oy відповідно, причому $A(a;0)$, $B(0;b)$. Трикутник OAB – прямокутний і його площа $S=\frac{1}{2}|a||b|=\frac{1}{2}|ab|$. За умовою задачі $S=3$, тобто $|ab|=6$. Оскільки в рівнянні $y=kx-4k-3$ коефіцієнт $-4k-3$ – це величини відрізка, який відтинає пряма γ на осі Oy, то

$b = -4k - 3$. Точка $A = \gamma \cap Ox$, тобто координати точки $A(a;0)$ є розв'язком системи рівнянь: $\begin{cases} y = 0, \\ y = kx - 4k - 3. \end{cases}$

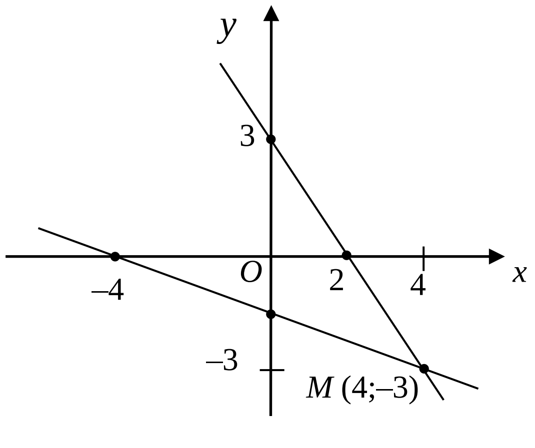
Отже, $A(4 + \frac{3}{k};0)$, $a = 4 + \frac{3}{k}$, де $k \neq 0$. Таким чином, рівність $|ab| = 6$, рівносильна наступній: $\left|(4 + \frac{3}{k})(4k + 3)\right| = 6$. Маємо: $16k + 24 + \frac{9}{k} = \pm 6$. Розглянемо обидва випадки.

а) $16k^2 + 18k + 9 = 0$. Дискримінант отриманого квадратного рівняння $D_1 = -252 < 0$. Рівняння дійсних розв'язків немає.

б) $16k^2 + 30k + 9 = 0$. Обчислимо дискримінант: $D_2 = 900 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 324$. Отже,

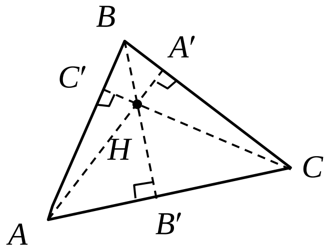
$$k_1 = \frac{-30 + 18}{32} = -\frac{3}{8}, \; k_2 = \frac{-30 - 18}{32} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}.$$

Існують дві прямі, що задовольняють умову задачі, а саме: $\gamma_1 : 3x + 8y + 12 = 0$, $\gamma_2 : 3x + 2y - 6 = 0$. На наступному рисунку зображено обидві прямі.



3.1.9. *Дано дві вершини трикутника* $A(-6;2)$, $B(2;-2)$ *і точка* $H(1;2)$ *перетину його висот. Обчислити координати третьої вершини* C. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Точка C (див. рис.) є точкою перетину висоти CC' і кожної з прямих BC та AC.



Знайдемо рівняння висоти CC' та однієї зі сторін трикутника, наприклад прямої AC.

Пряма CC' проходить через точку $H(1;2)$ і, оскільки система координат прямокутна та CC' є висотою заданого трикутника, то вектор $\overrightarrow{AB}=(8;-4)\,||\,(2;-1)$, де $\overrightarrow{n}=(2;-1)$ – головний (нормальний) вектор прямої CC'. Тоді рівняння CC' має вигляд $2(x-1)+(-1)(y-2)=0,\ 2x-y=0$.

Аналогічно, для прямої AC, що проходить через точку $A(-6;2)$, головним вектором є вектор $\overrightarrow{HB}=(1;-4)$. Отже: $1\cdot(x+6)+(-4)\cdot(y-2)=0$, $x-4y+14=0$ – загальне рівняння прямої AC.

Координати точки C є розв'язком системи лінійних рівнянь: $\begin{cases}2x-y=0,\\ x-4y+14=0;\end{cases}$ $\begin{cases}y=2x,\\ x-8x+14=0;\end{cases}$ $x=2,\ y=4$.

Таким чином, $C(2;4)$.

3.1.10. *Довести, що пряма* $5x-y-5=0$ *перетинає відрізок прямої* $3x-2y-6=0$*, розміщений між осями координат. Система координат афінна.*

Розв'язання. Всі точки відрізка прямої $3x-2y-6=0$, розміщеного між осями координат, мають абсциси $x\in[0;2]$. Дійсно, запишемо рівняння $3x-2y-6=0$ «у відрізках» (див. п.3.1.4): $3x-2y=6\,|:6$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$. Знаменник першого дробу в лівій частині останнього рівняння, тобто число 2, є величиною відрізка, що відтинає пряма $3x-2y-6=0$ на осі Ox. Отже, всі точки цієї прямої, розташовані між осями координат, матимуть абсциси, що не перевищують числа 2 і, природно, більші за нуль.

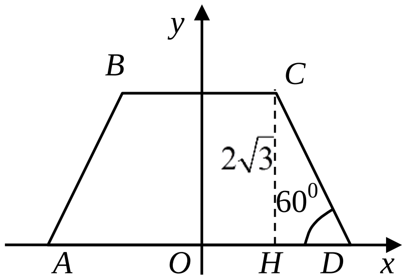
Знайдемо спільну точку двох заданих прямих, розв'язавши систему рівнянь: $\begin{cases}5x-y-5=0,\\3x-2y-6=0.\end{cases}$

Маємо: $x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{4}{7}$, $y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-\frac{15}{7}$.

Отже, абсциса $\frac{4}{7}$ точки перетину двох прямих лежить між 0 та 2, тобто належить відрізку з умови задачі.

3.1.11. *Написати рівняння сторін рівнобічної трапеції, знаючи, що основи її відповідно дорівнюють* 10 *і* 6*, а бічні сторони утворюють з основою кут* 60^0*. За вісь* Ox *береться більша основа, за вісь* Oy *– вісь симетрії трапеції, а за додатний напрямок осі* Oy *– напрямок променя, що перетинає меншу основу.*

Розв'язання. З умови задачі безпосередньо випливає, що побудована система координат буде прямокутною декартовою (див. рис.).



Нехай $ABCD$ – задана трапеція. В цій задачі, як і в попередніх, під рівнянням сторін геометричної фігури розумітимемо рівняння прямих, на яких лежать ці сторони.

Рівняння прямої (осі Ox), на якій розташована її більша основа AD: $y=0$.

Розглянемо прямокутний трикутник CHD, де CH – висота трапеції. Катет $HD=2$, а гіпотенуза цього трикутника $CD=4$. Тоді $CH=2\sqrt{3}$. Пряма BC паралельна осі Ox і відтинає на осі Oy відрізок, величина якого $2\sqrt{3}$. Тому рівняння цієї прямої: $y=2\sqrt{3}$ (див. п. 3.1.4).

Пряма AB проходить через точки $A(-5;0)$ та $B\left(-3;2\sqrt{3}\right)$. Використавши рівняння прямої, що проходить через дві точки, маємо: $\dfrac{x+5}{-3+5}=\dfrac{y-0}{2\sqrt{3-0}}$. Тоді рівняння прямої AB: $\sqrt{3}x-y+5\sqrt{3}=0$.

Аналогічні міркування здійснюємо у випадку прямої CD, де $C\left(3;2\sqrt{3}\right)$ та $D(5;0)$. Отримаємо: $\dfrac{x-3}{5-3}=\dfrac{y-2\sqrt{3}}{0-2\sqrt{3}}$.

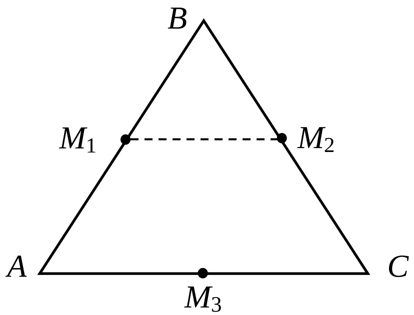
Спростивши, маємо рівняння прямої CD: $\sqrt{3}x+y-5\sqrt{3}=0$.

Отже, шукані рівняння:

$$y=0;\; y=2\sqrt{3};\; y=\sqrt{3}x+5\sqrt{3};\; y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}.$$

3.1.12. *Дано середини сторін трикутника* $M_1(2;3),\ M_2(-1;2),\ M_3(4;5)$. *Скласти рівняння сторін трикутника. Система координат афінна.*

Розв'язання. Нехай ABC – даний трикутник, а $M_1M_2,\ M_2M_3,\ M_1M_3$ – це його середні лінії.



Пряма AC проходить через точку M_3 і має напрямний вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(-3;-1\right)$. Запишемо канонічне рівняння прямої $AC:\ \dfrac{x-4}{-3} = \dfrac{y-5}{-1}$, тобто $x-3y+11=0$.

Міркуючи аналогічно, читач може впевнитись, що рівняння двох інших сторін відповідно $AB: 3x-5y+9=0;$ $BC:\ x-y+3=0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, які з точок $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;-3)$, $M_5(3;-1)$, $M_6(-2;1)$ належать прямій $2x-3y-3=0$.

(Відповідь: точки M_1, M_3, M_4 належать даній прямій).

2. Точки P_1, P_2, P_3, P_4 і P_5 належать прямій $3x-2y-6=0$; їх абсциси відповідно дорівнюють числам: 4, 0, 2, –2 і –6. Визначити ординати цих точок.

(Відповідь: 3, –3, 0, –6 і –12).

3. Точки Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 і Q_5 належать прямій $x-3y+2=0$; їх ординати відповідно дорівнюють числам: 1, 0, 2, –1 і 3. Визначити абсциси цих точок.

(Відповідь: 1, –2, 4, –5 і 7).

4. Визначити точки перетину прямої $2x-3y-12=0$ з координатними осями і побудувати цю пряму.

(Відповідь: $(6;0)$, $(0;-4)$).

5. Побудувати прямі, задані такими рівняннями:

1) $y=3x+4$; 2) $y=\frac{1}{2}x-2$; 3) $y=4x$; 4) $y=-\frac{1}{2}x$; 5) $y=-\frac{2}{3}x+4$; 6) $x+2=0$; 7) $3x-2=0$; 8) $y-4=0$; 9) $2y+3=0$; 10) $x+y=0$; 11) $x-y=0$; 12) $5x+3y+15=0$.
Система координат афінна.

6. Знайти точку перетину прямих $3x-4y-29=0$. $2x+5y+19=0$.

(Відповідь: $(3;-5)$).

7. Сторони AB, BC і AC трикутника ABC задано рівняннями (в цій задачі і надалі під рівнянням сторін розумітимемо рівняння прямих, на яких лежать сторони) $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Визначити координати його вершин.

(Відповідь: $A(2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(2;4)$).

8. Дано рівняння двох сторін паралелограма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ і рівняння однієї із його діагоналей $3x+2y+3=0$. Визначити координати вершин цього паралелограма.

(Відповідь: $(1;-3)$, $(-2;5)$, $(5;-9)$ і $(8;-17)$).

9. Скласти рівняння прямої, яка має кутовий коефіцієнт 3 і відтинає на осі ординат відрізок, рівний 4. Система координат афінна.

(Відповідь: $3x-y+4=0$).

10. Скласти рівняння прямої, яка відтинає на осі Ox відрізок, що дорівнює 3 і проходить через точку $(-5;3)$. Система координат афінна.

(Відповідь: $3x+8y-9=0$).

11. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(2;3)$ і має кутовий коефіцієнт -5. Система координат афінна.

(Відповідь: $5x+y-13=0$).

12. Записати загальне рівняння прямої, якщо відомо її кутовий коефіцієнт k і відрізок b, який вона відтинає на осі Oy:

1) $k=\frac{2}{3}$, $b=3$; 2) $k=3$, $b=0$; 3) $k=0$, $b=-2$;

4) $k=-\frac{3}{4}$, $b=3$; 5) $k=-2$, $b=-5$; 6) $k=-\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$.

(Відповідь: 1) $2x-3y+9=0$; 2) $3x-y=0$; 3) $y+2=0$; 4) $3x+4y-12=0$; 5) $2x+y+5=0$; 6) $x+3y-2=0$).

13. Визначити кутовий коефіцієнт k і відрізок b, який відтинається на осі Oy, для кожної з таких прямих:

1) $5x-y+3=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $5x+3y+2=0$;

4) $3x+2y=0$; 5) $y-3=0$.

(Відповідь: 1) $k=5, b=3$; 2) $k=-\frac{2}{3}, b=2$; 3) $k=-\frac{5}{3}, b=\frac{-2}{3}$; 4) $k=-\frac{3}{2}, b=0$; 5) $k=0, b=3$).

14. Обчислити кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки: а) $M_1(2;-5)$, $M_2(3;2)$; б) $P(-3;1)$, $Q(7;8)$; в) $A(5;-3)$, $B(-1;6)$.

(Відповідь: а) $k=7$; б) $k=\frac{7}{10}$; в) $k=-\frac{3}{2}$).

15. Скласти рівняння прямих, що проходять через початок координат і нахилені до осі Ox під кутом: 1) 30^0; 2) 45^0; 3) 60^0; 4) 120^0; 5) 135^0; 6) 150^0.

(Відповідь: 1) $x-\sqrt{3}y=0$; 2) $x-y=0$; 3) $\sqrt{3}x-y=0$; 4) $\sqrt{3}x+y=0$; 5) $x=y=0$; 6 $x+\sqrt{3}y=0$).

16. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(-5;3)$ і нахилена до осі Ox під кутом 135^0.

(Відповідь: $x+y+2=0$).

17. Скласти рівняння прямої, нахиленої до осі Ox під кутом 150^0, яка відтинає на осі Oy відрізок, величина якого дорівнює $-\frac{1}{3}$. Знайти точку перетину прямої з віссю абсцис.

(Відповідь: $\sqrt{3}x+3y+1=0$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};0\right)$).

18. Визначити кутовий коефіцієнт і відрізки, які відтинає на осях координат кожна з таких прямих:
1) $2x-y+4=0$; 2) $2x+3y-6=0$; 3) $x+2y+1=0$;
4) $-3x+4y-6=0$; 5) $3x+\sqrt{3}y+3=0$.

(Відповідь: 1) $k=2,\ b=4,\ a=-2$; 2) $k=-\frac{2}{3},\ b=2,\ a=3$; 3) $k=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ a=-1$; 4) $k=\frac{3}{4},\ b=\frac{3}{2},\ a=-2$; 5) $k=-\sqrt{3},\ b=-\sqrt{3},\ a=-1$).

19. Побудувати пряму, якщо відома одна з її точок A та кутовий коефіцієнт у кожному з нижче вказаних випадків:
1) $A(2;4), k=\frac{2}{3}$; 2) $A(-2;3), k=-\frac{3}{4}$; 3) $A(-5;-2), k=3$;
4) $A(4;-3), k=-2$.

20. З точки $M_0(-2;3)$ під кутом α до осі Ox напрямлено промінь світла. Відомо, що $tg\alpha=3$. Дійшовши до осі Ox, промінь відбився від неї. Скласти рівняння прямих, на яких лежать обидва промені: падаючий і відбитий.

(Відповідь: $3x-y+9=0$, $3x+y+9=0$).

21. Записати рівняння прямих, що проходять через пари точок:
1) $(1;3)$ і $(2;4)$; 2) $(2;3)$ і $(-4;-6)$; 3) $(1;3)$ і $(1;-7)$; 4) $(2;-3)$ і $(4;-3)$. Система координат афінна.

(Відповідь: 1) $x-y+2=0$; 2) $3x-2y=0$; 3) $x-1=0$; 4) $y+3=0$).

22. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку $(-1;-8)$. Система координат афінна.

(Відповідь: $8x-y=0$).

23. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $(3;-2)$ паралельно осям координат Система координат афінна.

(Відповідь: $x-3=0$, $y+2=0$).

24. Скласти рівняння прямої, що відтинає на осях координат відрізки 3 і 5. Система координат афінна.

(Відповідь: $5x+3y-15=0$).

25. Через точку $M(-4;10)$ провести прямі, що відтинають на осях координат рівні відрізки.

(Відповідь: $x+y-6=0$).

26. Через точку перетину прямих $x+y-6=0$, $2x+y-13=0$ провести пряму, яка відтинає на осях координат рівні відрізки.

(Відповідь: $x+y-6=0$).

27. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки перетину пар прямих $2x-y=0,\ x+4y-2=0$ і $x+2y=0,\ 3x-7y+4=0$. Система координат афінна.

(Відповідь: $8x-49y+20=0$).

28. Через точку перетину прямих $3x-y=0$, $x+4y-2=0$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $2x+7y=0$.

(Відповідь: $91x-26y-2=0$).

29. Скласти рівняння прямої, що відтинає на осі Ox відрізок 3 і проходить через точку $(-5;3)$. Система координат афінна.

(Відповідь: $3x+8y-9=0$).

30. Визначити площу трикутника, розташованого між осями координат і прямою $x+2y-6=0$.

(Відповідь: $S=9$).

31. Сторони трикутника лежать на прямих $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Обчислити його площу S.

(Відповідь: $S=17$ кв. од.).

32. Площа трикутника $S=1,5$ кв. од.; дві його вершини – точки $A(2;-3)$ і $B(3;-2)$, центр ваги цього трикутника належить прямій $3x-y-8=0$. Визначити координати третьої вершини C.

(Відповідь: $C_1(1;-1)$ або $C_2(-2;-10)$).

33. Написати рівняння прямої, що паралельна до прямої $2x+5y=0$ і утворює разом з осями координат трикутник, площа якого дорівнює 5.

(Відповідь: $2x+5y\pm10=0$).

34. Сторони трикутника лежать на прямих $x+5y-7=0$, $3x-2y-4=0$, $7x+y+19=0$. Обчислити його площу S.

(Відповідь: $S=17$ кв. од.).

35. Площа трикутника $S=8$ кв. од.; дві його вершини – точки $A(1;-2)$ і $B(2;3)$, а третя вершина C належить прямій $2x+y-2=0$. Визначити координати вершини C.

(Відповідь: $C_1(-1;4)$ або $C_2\left(\frac{25}{7};-\frac{36}{7}\right)$).

36. Площа трикутника $S=1,5$ кв. од.; дві його вершини – точки $A(2;-3)$ і $B(3;-2)$, центр ваги цього трикутника належить прямій $3x-y-8=0$. Визначити координати третьої вершини C.

(Відповідь: $C_1(1;-1)$ або $C_2(-2;-10)$).

37. Написати рівняння прямої, що паралельна до прямої $2x+5y=0$ і утворює разом з осями координат трикутник, площа якого дорівнює 5.

(Відповідь: $2x+5y\pm10=0$).

38. В якому відношенні пряма $2x-y+5=0$ ділить відрізок, початок якого знаходиться в точці $(-5;4)$, а кінець – в точці $(2;1)$? Система координат афінна.

(Відповідь: $\frac{9}{8}$).

39. Знайти кут, який утворює з додатним напрямом осі Ox пряма, що проходить через дві точки $(2;-5)$ і $(0;-3)$.

(Відповідь: 135^0).

40. Знайти кут, який утворює з додатним напрямом осі Ox пряма, що проходить через дві точки $(1;4)$ і $(3;5)$.

(Відповідь: $arctg\frac{1}{2}$).

41. Через точки $M_1(-1;2)$ і $M_2(2;3)$ проведено пряму. Визначити точки перетину цієї прямої з осями координат.

(Відповідь: $(-7;0)$, $\left(0;2\frac{1}{3}\right)$).

42. Довести, що умова, при якій три точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, $M_3(x_3;y_3)$ лежать на одній прямій, може бути записана у вигляді

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

43. Довести, що рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$, можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

44. Дано послідовні вершини опуклого чотирикутника $A(-3;1)$, $B(3;9)$, $C(7;6)$, $D(-2;-6)$. Визначити точку перетину його діагоналей.

(Відповідь: $(1;3)$).

45. Написати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $(3;-5)$ паралельно вектору $(-4;2)$. Система координат афінна.

(Відповідь: $x = 3 - 4t, y = -5 + 2t$).

46. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $A(-6;-4)$ і має кутовий коефіцієнт $k=-\frac{3}{7}$. Система координат афінна.

(Відповідь: $x=6+7t, y=-4-3t$).

47. Скласти параметричні рівняння прямої, що відтинає на осях Ox і Oy відрізки 3 і -5 відповідно. Система координат афінна.

(Відповідь: $x=3+3t, y=5t$).

48. Скласти параметричні рівняння прямої, що проходить через початок координат і нахилена до осі абсцис під кутом 150^0.

(Відповідь: $x=-\sqrt{3}t, y=t$).

49. Написати в параметричній формі рівняння наступних прямих:

1) $3x+6y+5=0$; 2) $x-2y-4=0$; 3) $y=-3x+5$; 4) $x=2$; 5) $y=-3$; 6) $2x+3y=0$. Система координат афінна.

(Відповідь: 1) $x=-2t, y=-\frac{5}{6}+t$; 2) $x=4+2t, y=t$; 3) $x=t, y=-3t+5$; 4) $x=2, y=t$; 5) $x=t, y=-3$; 6) $x=3t, y=-2t$).

50. Записати у вигляді $Ax+By+C=0$ рівняння таких прямих:

1) $x=t, y=1-3t$; 2) $x=2+5t, y=4-7t$. Система координат афінна.

(Відповідь: 1) $3x+y-1=0$; 2) $7x+5y-34=0$).

51. Дано пряма $2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;1)$:

1) паралельно даній прямій;2) перпендикулярно до даної прямої.

(Відповідь: 1) $2x+3y-7=0$; 2) $3x-2y-4=0$).

52. Дано рівняння двох сторін прямокутника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ і одна з його вершин $A(2;-3)$. Скласти рівняння двох інших сторін прямокутника.

(Відповідь: $3x+2y=0$, $2x-3y-13=0$).

53. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x-2y=0$, $x-2y+15=0$ і рівняння однієї з його діагоналей $7x+y-15=0$. Знайти вершини прямокутника.

(Відповідь: $(2;1)$, $(4;2)$, $(-1;7)$, $(1;8)$).

54. Знайти проекцію точки $P(-8;12)$ на пряму, що проходить через точки $A(2;-3)$ і $B(-5;1)$.

(Відповідь: $(-12;5)$).

55. Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $4x-5y+3=0$.

(Відповідь: $(-2;-1)$).

56. Знайти точку Q, симетричну точці $P(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.

(Відповідь: $Q(11;-11)$).

57. Знайти точку M_1, симетричну точці $M_2(8;-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3;-4)$ і $B(-1;-2)$.

(Відповідь: $M_1(10;-5)$).

58. Скласти рівняння прямих, що проходять через вершини трикутника $A(5;-4)$, $B(-1;3)$, $C(-3;-2)$ паралельно до протилежних сторін.

(Відповідь: $5x-2y-33=0$, $x+4y-11=0$, $7x+6y+33=0$).

59. Дано середини сторін трикутника $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$, $M_3(3;-4)$. Скласти рівняння його сторін.

(Відповідь: $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$).

60. Дано дві точки $P(2;3)$ і $Q(-1;0)$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку Q перпендикулярно до відрізка PQ.

(Відповідь: $x+y+1=0$).

61. Записати рівняння прямої, якщо точка $P(2;3)$ — основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

(Відповідь: $2x+3y-13=0$).

62. Дано трикутник ABC: $A(-2;3)$, $B(4;1)$, $C(6;-5)$. Написати рівняння медіани цього трикутника, проведеної із вершини A. Система координат афінна.

(Відповідь: $5x+7y-11=0$).

63. Дано вершини трикутника $M_1(2;1)$, $M_2(-1;-1)$ і $M_3(3;2)$. Записати рівняння його висот.

(Відповідь: $4x+3y-11=0$, $x+y+2=0$, $3x+2y-13=0$).

64. Дано вершини трикутника $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$. Скласти рівняння висоти, опущеної із вершини A на сторону BC.

(Відповідь: $3x-4y+12=0$).

65. Сторони трикутника задано рівняннями $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$, $x+5y-7=0$. Знайти точку перетину його висот.

(Відповідь: $(3;4)$).

66. Дано вершини трикутника ABC: $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(3;5)$. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, проведену з вершини B.

(Відповідь: $4x+y-3=0$).

67. Дано вершини трикутника ABC: $A(2;-2)$, $B(3;-5)$, $C(5;7)$. Написати рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині A.

(Відповідь: $x-5=0$).

68. Скласти рівняння сторін і медіан трикутника з вершинами $A(3;-2)$, $B(5;-2)$, $C(1;0)$.

(Відповідь: рівняння сторін: $2x+y-8=0$, $x+2y-1=0$, $x-y-1=0$; рівняння медіан: $x-3=0$; $x+y-3=0$; $y=0$).

69. Дано вершини трикутника $A(1;-2)$, $B(5;4)$, $C(-2;0)$. Скласти рівняння бісектриси його внутрішнього і зовнішнього кутів при вершині A.

(Відповідь: $5x+y-3=0$ – бісектриса внутрішнього кута; $x-5y-11=0$ – бісектриса зовнішнього кута).

70. Через $M(2;5)$ провести пряму, рівновіддалену від точок $P(-1;2)$ і $Q(5;4)$. Система координат афінна.

(Відповідь: $x-2=0$, $x-3y+13=0$).

71. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(3;5)$ і рівновіддалена від точок $A(-7;3)$ і $B(11;-15)$.

(Відповідь: $x+y-8=0$; $11x-y-28=0$).

72. Дано дві вершини трикутника $A(-6;2)$, $B(2;-2)$ і точку $H(1;2)$ перетину його висот. Знайти координати вершини С.

(Відповідь: $C(2;4)$).

73. В трикутнику ABC відомі сторона AB: $4x+y-12=0$, висота BH: $5x-4y-15=0$ і висота AH: $2x+2y-9=0$. Написати рівняння двох інших сторін і третьої висоти.

(Відповідь: $x-y-3=0\ (BC)$, $4x+5y-20=0\ (AC)$, $3x-12y-1=0\ (CH)$).

74. Точка перетину висот трикутника лежить в початку координат. Рівняння двох сторін цього трикутника $x+3y-1=0$, $3x+5y-6=0$. Скласти рівняння третьої сторони.

(Відповідь: $39x-9y-4=0$).

§3.2. Взаємне розташування точок та прямих на площині

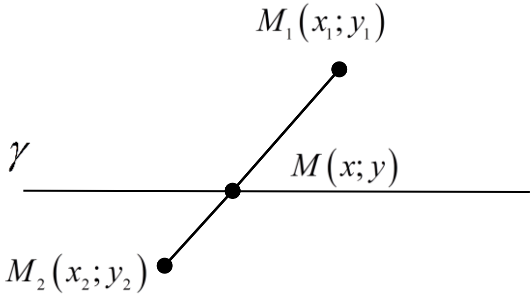
3.2.1. Геометричний зміст нерівностей $Ax+By+C<0$ та $Ax+By+C>0$. Задача про віддаль від точки до прямої на площині

Нехай на площині π задана пряма лінія γ і фіксована загальна декартова система координат.

Рівняння кожної прямої у координатній площині розбиває множину точок цієї площини на підмножини. Це, власне, множина точок прямої (яка здійснює розбиття) і дві множини точок, які належать півплощинам, розміщеним по різні сторони відносно заданої прямої.

Теорема 3.2.1. *Нехай відносно загальної декартової системи координат пряма лінія* γ *задана загальним рівнянням* $Ax+By+C=0$. *Координати* $(x;y)$ *довільної точки однієї півплощини задовольняють нерівності* $Ax+By+C<0$*, а для іншої півплощини маємо* $Ax+By+C>0$. *Усі точки прямої задовольняють своїми координатами рівняння* $Ax+By+C=0$.

Доведення. Нехай $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ — дві довільні точки, що лежать по різні боки від прямої γ, що заданої рівнянням $Ax+By+C=0$.



Це означає, що існує внутрішня точка $M(x;y)$ відрізка M_1M_2, яка лежить на прямій γ. Нехай λ – відношення, в якому точка M ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$. Тоді координати точки M виражаються через координати точок M_1 та M_2 такими співвідношеннями:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Оскільки точка M належить прямій γ, то координати точки M задовольняють рівняння прямої γ:

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} + C = 0.$$

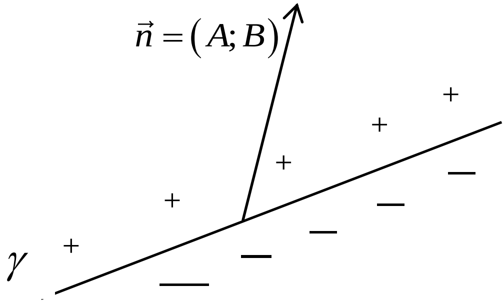
Отже, $\lambda = -\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C}$.

Точка M – внутрішня точка відрізка M_1M_2, тому $\lambda > 0$. Отже, числа $Ax_1 + By_1 + C$ і $Ax_2 + By_2 + C$ мають різні знаки. Якщо тепер вважати точку M_1 фіксованою, а точку M_2 – змінною (але такими, що розташовані по різні боки від прямої γ), то, очевидно, число $Ax_2 + By_2 + C$ не змінює знак і при цьому знак числа $Ax_2 + By_2 + C$ залишається протилежним знаку числа $Ax_1 + By_1 + C$.

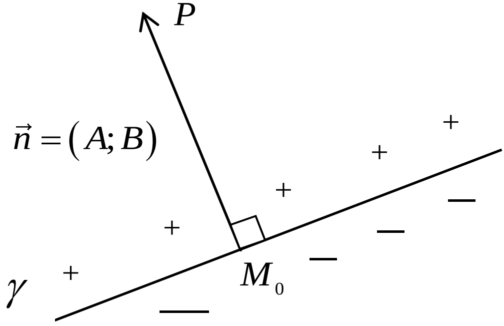
Фіксуючи тепер точку M_2, а точку M_1 змінюючи (але так, щоб вони знову були розташовані по різні боки від прямої γ), доведемо, що число $Ax_1 + By_1 + C$ не змінює знак і при цьому знак числа $Ax_1 + By_1 + C$ залишається протилежним до знаку числа $Ax_2 + By_2 + C$. Теорема доведена.

Назвемо *півплощину відносно прямої* γ, заданої рівнянням $Ax + By + C = 0$, *додатною*, якщо для довільної точки $(x_1; y_1)$

цієї півплощини відхилення $Ax_1 + By_1 + C > 0,$ і, відповідно, *від'ємною,* якщо $Ax_1 + By_1 + C < 0$.



Теорема 3.2.2. *Нехай відносно загальної декартової системи координат пряма лінія γ задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$. Тоді, якщо відкласти головний вектор $\vec{n} = (A; B)$ цієї прямої від довільної точки $M_0(x_0; y_0)$ цієї прямої $\overrightarrow{M_0P} = \vec{n}$, то кінець P відкладеного вектора буде знаходитися в додатній півплощині даної прямої.*

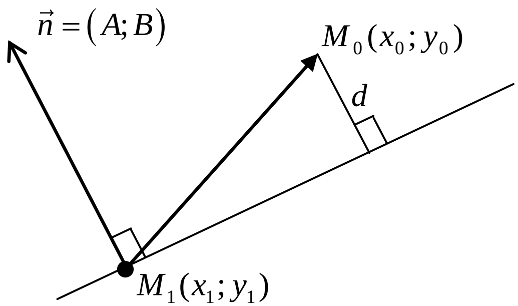


Доведення цієї теореми пропонуємо читачеві провести самостійно.

Знайдемо віддаль від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої γ, заданої у прямокутній декартовій системі координат рівнянням $Ax+By+C=0$.

Нехай $M_1(x_1;y_1)$ – деяка точка прямої γ, тобто $Ax_1+By_1+C=0$.

Віддаль d від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої γ дорівнює абсолютній величині $np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}$: $d=\left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|$.



Оскільки $\overrightarrow{M_1M_0}=\left(x_0-x_1;y_0-y_1\right)$, то

$$d=\frac{\left|(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n})\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=$$

$$\frac{\left|Ax_0+By_0-Ax_1-By_1\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Маємо:

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}} \tag{3.2.1}$$

Число $\delta^{(x_0;y_0)} = \dfrac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ називається *відхиленням точки* $(x_0; y_0)$ *від прямої* γ*:* $Ax + By + C = 0$.

Очевидно, що $d = \left|\delta^{M_0}\right|$.

3.2.2. Нормоване рівняння прямої

Нехай на площині π задана пряма лінія γ і фіксована прямокутна декартова система координат.

Означення. *Загальне рівняння прямої називається нормованим, якщо нормальний вектор цієї прямої одиничний.*

Нехай пряма γ має загальне рівняння: $Ax + By + C = 0$. Тоді її нормальним вектором є вектор $\vec{n} = \left(A; B\right)$, а його модуль

$$\left|\vec{n}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}\ .$$

Орт вектора $\vec{n}$ – це вектор

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right).$$

Помножимо обидві частини рівняння $Ax + By + C = 0$ на таке число $M \neq 0$, щоб нормальний вектор прямої став одиничним. Тоді $MAx + MBy + MC = 0$, але тепер $M^2 A^2 + M^2 B^2 = 1$ і тому $M^2 = \dfrac{1}{A^2 + B^2}$. Отже, існують два множники

$$M_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{A^2 + B^2}}\ , \qquad (3.2.2)$$

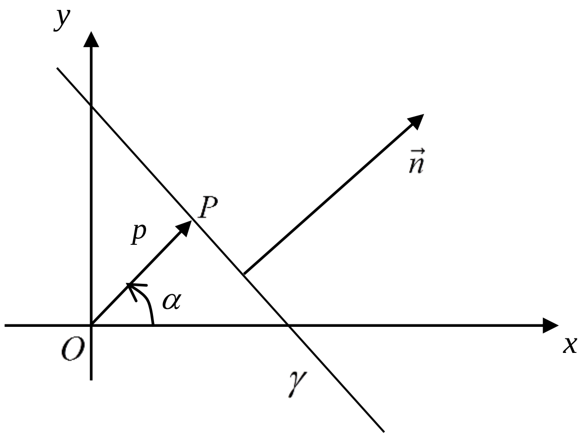
які загальне рівняння прямої зводять до нормованого вигляду. Домовимося обирати серед $M_{1,2}$ із (3.2.2) у випадку $C \neq 0$ той нормуючий множник, який задовольняє нерівність $M \cdot C < 0$. Нормоване рівняння прямої набуває вигляду

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

або

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha-p=0,\ p\geq 0. \qquad (3.2.3)$$

У рівнянні (3.2.3) $p=OP$ – віддаль від початку координат до прямої γ (у формулі (3.2.1) покладаємо $x_0=y_0=0$ та враховуємо, що $\left|\vec{n}\right|=\sqrt{A^2+B^2}=1$).



У рівнянні (3.2.3) $\cos\alpha$ і $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ – напрямні косинуси головного одиничного вектора $\vec{n}$ прямої γ. Дійсно, якщо $C<0$, то початок координат лежить у від'ємній півплощині відносно прямої, що задана нормованим рівнянням $Ax+By+C=0$. Отже, вектори $\overrightarrow{OP}$ і $\vec{n}=(A;B)$ не тільки колінеарні (обидва вектори перпендикулярні до прямої γ), але й однаково напрямлені. Тому кут α від осі Ox до вектора $\overrightarrow{OP}$ дорівнює куту α від вектора $\vec{i}=(1;0)$ до головного вектора

$\vec{n} = (A; B)$ даної прямої і $|\vec{n}| = 1$. Отже, координати вектора $\vec{n}$ такі: $A = \cos\alpha$ і $B = \sin\alpha$.

Приклади розв'язування задач

3.2.1. *З'ясувати, чи перетинає пряма* $3x - 4y + 5 = 0$ *відрізок* AB*, якщо* $A(1; 3)$ *і* $B(-4; 6)$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Обчислимо відхилення точок A і B від прямої, заданої рівнянням $3x - 4y + 5 = 0$ (див. п.3.2.1):

$$\delta^A = \frac{3\cdot 1 - 4\cdot 3 + 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3 - 12 + 5}{\sqrt{25}} = -\frac{4}{5} < 0,$$

$$\delta^B = \frac{3\cdot(-4) - 4\cdot 6 + 5}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{-12 - 24 + 5}{\sqrt{25}} = -\frac{31}{5} < 0.$$

Висновок: кінці відрізка A і B належать одній (від'ємній) півплощині, тому дана пряма відрізок AB не перетинає.

3.2.2. *Знайти віддаль між двома паралельними прямими*

$$3x + 4y - 12 = 0 \qquad a$$

$$3x + 4y + 13 = 0. \qquad b$$

Система координат прямокутна декартова.

Розв'язання. Шукану віддаль d знайдемо як віддаль від довільної точки прямої a до прямої b. Точка $A(0; 3)$ належить прямій a. Тоді віддаль від цієї точки до прямої (див. формулу (3.2.1)):

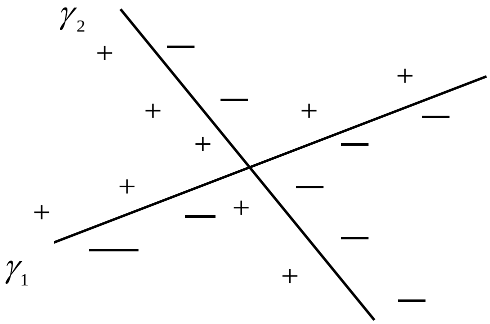
$$d = \frac{|3\cdot 0 + 4\cdot 3 + 13|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5.$$

3.2.3. *Скласти рівняння бісектрис кутів, що утворюються прямими* $3x - 4y + 7 = 0$, $5x + 12y - 1 = 0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Точка $M(x;y)$ лежить на одній із бісектрис кутів, утворених даними прямими тоді і тільки тоді, коли віддалі d_1 та d_2 від цієї точки M до даних прямих рівні, тобто

$$\frac{|3x-4y+7|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|5x+12y-1|}{\sqrt{5^2+12^2}}.$$

При підстановці замість змінних $\tilde{o}$ та y координат довільної точки $M(x;y)$ однієї із бісектрис вирази $3x-4y+7$ і $5x+12y-1$ мають однакові знаки (і перетворюються в нуль у точці перетину прямих); для всіх точок $M(x;y)$ іншої бісектриси ці вирази набувають значень різних знаків.



Отже, рівняння однієї з бісектрис

$$\frac{3x-4y+7}{5}=\frac{5x+12y-1}{13},$$

а рівняння іншої

$$\frac{3x-4y+7}{5}=-\frac{5x+12y-1}{13},$$

або $7x-56y+48=0$, $32x+4y+43=0$.

3.2.4. *Скласти рівняння бісектриси того кута між прямими* (1) $x+y-3=0$, (2) $7x-y+4=0$, *в якому лежить точка* $M_0(-1;5)$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Як і в попередній задачі, точка $M\left(x;y\right)$ лежить на одній із бісектрис кутів, утворених даними прямими тоді і тільки тоді, коли віддалі d_1 та d_2 від цієї точки M до даних прямих рівні, тобто

$$\frac{|x+y-3|}{\sqrt{2}}=\frac{|7x-y+4|}{\sqrt{50}},$$

$$|x+y-3|=\frac{1}{5}|7x-y+4|.$$

Задана точка $M_0(-1;5)$ по відношенню до двох даних прямих лежить у різнойменних півплощинах:

$$(1)\ \ -1+5-3>0,$$

$$(2)\ \ -7-5+4<0.$$

Отже, будь-яка точка $M\left(x;y\right)$ шуканої бісектриси теж володітиме цією властивістю. Тобто рівняння шуканої прямої:

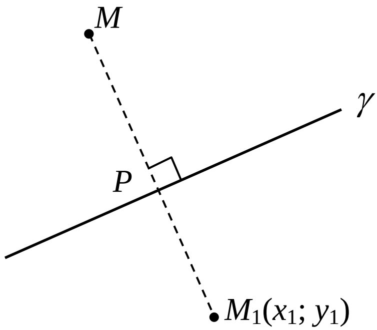
$$x+y-3=-\frac{1}{5}(7x-y+4),$$

$$5x+5y-15=-7x+y-4.$$

Рівняння бісектриси має вигляд $12x+4y-11=0$.

3.2.5. *Знайти точку, симетричну точці* $M(-2;9)$ *відносно прямої* $\gamma: 2x-3y+18=0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Шукану точку і її координати в заданій прямокутній декартовій системі координат позначимо $M_1(x_1;y_1)$.



Відстань від точки M до прямої γ дорівнює відстані від точки M_1 до цієї ж прямої: $\frac{|-4-27+18|}{\sqrt{13}}=\frac{|2x_1-3y_1+18|}{\sqrt{13}}$, тобто $|2x_1-3y_1+18|=13$.

Окрім того, вектор $\overrightarrow{MM_1}=\left(x_1+2; y_1-9\right)$ ортогональний до прямої γ, тобто колінеарний з її нормальним вектором $\vec{n}=\left(2;-3\right)$. Отже, координати вказаних векторів пропорційні: $\frac{x_1+2}{2}=\frac{y_1-9}{-3}$. Звідси $3x_1+2y_1-12=0$.

Для знаходження координат точки M_1 маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1+2y_1-12=0, \\ |2x_1-3y_1+18|=13. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знайдемо $y_1=\frac{12-3x_1}{2}$ і підставимо в друге рівняння:

$$\left|2x_1-3\frac{12-3x_1}{2}+18\right|=13,$$

$$|4x_1-36+9x_1+36|=26,$$

$$|13x_1| = 26.$$

Розглянемо обидва можливі випадки:

1) Якщо $x_1 = 2$, то $y_1 = 3$. Маємо точку з координатами $(2;3)$.

2) Якщо ж $x_1 = -2$, то $y_1 = 9$. Отримали задану в умові задачі точку $M(-2;9)$.

Отже, шукана точка: $M_1(2;3)$.

Зауваження. Інший спосіб розв'язання цієї задачі було запропоновано читачеві в першому параграфі цього розділу (задача 3.1.7).

3.2.6. *Центр симетрії квадрата знаходиться в точці* $M(-1;0)$*, рівняння однієї сторони* $x+3y-5=0$*. Написати рівняння інших сторін квадрата. Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Центр симетрії квадрата $M(-1;0)$ збігається із точкою перетину його діагоналей. Нехай рівняння відомої сторони – це рівняння прямої $AB: x+3y-5=0$ (див. рис.). Оскільки прямі AB і CD – паралельні, то рівняння прямої CD шукаємо у вигляді $x+3y+C=0,\ C\in\mathbb{R}$.

Центр симетрії квадрата рівновіддалений від кожної зі сторін квадрата і віддаль від точки $M(-1;0)$ до сторони $x+3y-5=0$ дорівнює

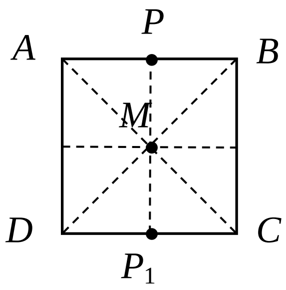
$$M_0P = \frac{|x_0+3y_0-5|}{\sqrt{10}} = \frac{|-1-5|}{\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}},$$

то $MP = MP_1 = \dfrac{6}{\sqrt{10}} = \dfrac{|-1+C|}{\sqrt{10}}$, $6 = |-1+C|$.

Розглянемо два можливі випадки:

1) Якщо $6 = 1-C$, то $C_1 = -5$. Рівняння прямої $x+3y-5=0$ є відомим з умови задачі рівнянням AB.

2) Якщо $6=-1+C$, то $C_2=7$. Таким чином, маємо рівняння сторони CD: $x+3y+7=0$.



Головний вектор прямої AB має координати $\vec{n}=(1;3)$. Оскільки система координат прямокутна декартова, то напрямний вектор $\vec{a}$ цієї прямої перпендикулярний до $\vec{n}$, має координати $\vec{a}=(3;-1)$ і є головним вектором для сторін AD та BC. Отже, рівняння цих сторін квадрата шукаємо у вигляді $3x-y+D=0,\ D\in\mathbb{R}$. Віддаль від точки $M(-1;0)$ до кожної з шуканих сторін теж дорівнює $\frac{6}{\sqrt{10}}$:

$$\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{|-3+D|}{\sqrt{10}},\ 6=|-3+D|.$$

Розглянувши знову два випадки, отримаємо $D_1=-3,\ D_2=9$. Тобто рівняння шуканих сторін

$$3x-y-3=0,\ 3x-y+9=0.$$

3.2.7. *Через точку перетину прямих* $3x+y+10=0,\ 4x+5y+6=0$ *провести пряму, віддалену від початку координат на віддаль 4. Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Запишемо нормоване рівняння шуканої прямої γ:

$$x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha - p = 0, \qquad (1)$$

де $\cos\alpha$ і $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ – напрямні косинуси головного одиничного вектора $\vec{n}$ прямої γ, а p – віддаль від початку координат до прямої γ, $p \geq 0$. За умовою задачі $p = 4$.

Оскільки вектор $\vec{n}$ – одиничний, тобто $|\vec{n}| = 1$, то для коефіцієнтів при невідомих рівняння (1) маємо:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \qquad (2)$$

Крім цього, пряма γ має проходити через точку C перетину двох заданих прямих $3x + y + 10 = 0$ та $4x + 5y + 6 = 0$. Координати точки C є розв’язком наступної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y + 10 = 0, \\ 4x + 5y + 6 = 0. \end{cases}$$

Отже, $C(-4;2)$ і $(-4) \cdot \cos\alpha + 2 \cdot \sin\alpha - 4 = 0$, тобто

$$\sin\alpha = 2 + 2\cos\alpha. \qquad (3)$$

Для знаходження напрямних косинусів головного одиничного вектора $\vec{n}$ прямої γ маємо таку систему двох рівнянь (2) і (3):

$$\begin{cases} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \\ \sin\alpha = 2 + 2\cos\alpha. \end{cases}$$

Отримуємо два розв’язки:

1) $(\cos\alpha)_1 = -\frac{3}{5}$. Тоді $(\sin\alpha)_1 = +\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$, бо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Таким чином, підставивши отримані значення в рівняння (1), маємо $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 4 = 0$, тобто перша пряма γ_1: $3x - 4y + 20 = 0$;

2) $(\cos\alpha)_2 = -1$, тобто $(\sin\alpha)_1 = 0$.

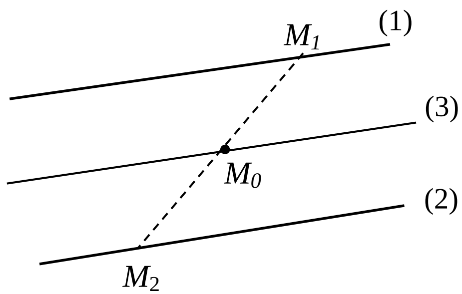
Рівняння прямої γ_2: $x - 4 = 0$.

3.2.8. *Скласти рівняння прямої, паралельної і рівновіддаленої від двох паралельних прямих* (1): $x + y - 1 = 0$, (2): $x + y - 13 = 0$. *Система координат афінна.*

Розв'язання. Скориставшись паралельністю шуканої прямої і заданих, можемо за головний вектор шуканої прямої взяти вектор $\vec{n} = (1;1)$. Маємо: (3): $x + y + C = 0,\ C \in \mathbb{R}$ – шукана пряма.

Виберемо на кожній з даних прямих довільним чином точку. Точка $M_1(0;1)$, очевидно, належить прямій (1), а $M_1(0;13)$ – прямій (2).

Пряма (3) проходитиме через середину будь-якого відрізка, кінці якого лежать на заданих прямих (1) і (2). Точка $M_0(0;7)$ є серединою відрізка M_1M_2 і тому $M_0(0;7)$ належатиме шуканій прямій. Отже, координати цієї точки задовольняють рівняння $x + y + C = 0$, тобто $0 + 7 + C = 0,\ C = -7$. Шукане рівняння $x + y - 7 = 0$.



3.2.9. *Знайти центр кола вписаного в трикутник, що обмежений осями координат і стороною* $3x-4y-5=0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Записавши рівняння прямої $3x-4y-5=0$ у відрізках, знайдемо точки перетину цієї прямої з осями координат: $\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{-\frac{5}{4}}=1$, $a_0=\frac{5}{3}$; $b_0=-\frac{5}{4}$. Отже, шукані точки

$A\left(\frac{5}{3};0\right)$, $B\left(0;-\frac{5}{4}\right)$.

Позначимо через C – центр кола. Ця точка, очевидно, належить четвертій чверті заданої прямокутної декартової системи координат (див. рис.).

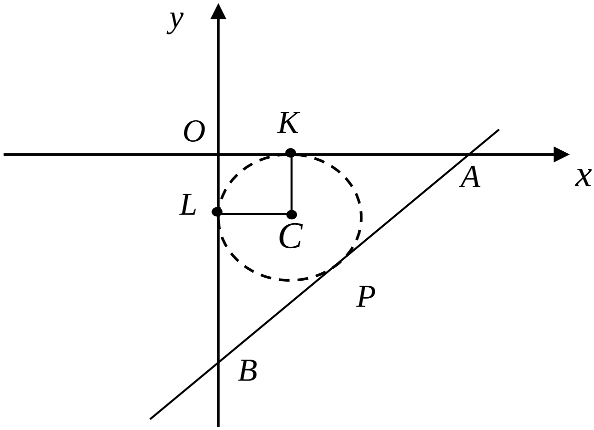
1-й спосіб. Розглянемо прямокутний трикутник AOB, довжина гіпотенузи якого:

$$AB=\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-\frac{5}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{25}{16}}=\frac{25}{12}.$$

Нехай r – радіус кола, вписаного в трикутник AOB. Зі шкільного курсу геометрії відомо, що радіус вписаного в прямокутний трикутник кола обчислюється за формулою $r=\frac{a+b-c}{2}$, де a,b – катети, c – гіпотенуза. Таким чином

$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{|a_0|+|b_0|-AB}{2}=\frac{\frac{5}{3}+\frac{5}{4}-\frac{25}{12}}{2}=\frac{5}{12}.$$

Отже, $r=KC=LC=OL=OK=\frac{5}{12}$ і $C(r;-r)$, $0\le r\le\frac{5}{4}$. Шукана точка $C\left(\frac{5}{12};-\frac{5}{12}\right)$.

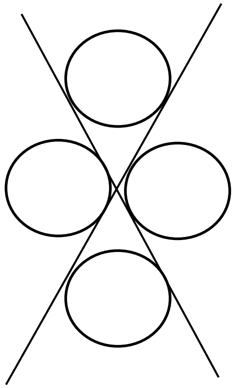


2-й спосіб. Скориставшись попередніми міркуваннями, зауважимо, що шукана точка має координати $C(r;-r)$ і рівновіддалена від усіх сторін трикутника AOB $(r = KC = LC = PC)$, тобто від прямих $x = 0$, $y = 0$ та $3x - 4y - 5 = 0$.

Скориставшись формулою віддалі від точки до прямої, маємо: $|r| = |-r| = \frac{|3r - 4\cdot(-r) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$, де $0 \le r \le \frac{5}{4}$. Легко переконатись, що звідси $r = \frac{5}{12}$ і $C\left(\frac{5}{12}; -\frac{5}{12}\right)$.

***3.2.10**. Знайти центр кола, що дотикається до двох даних прямих* $3x - 4y + 10 = 0$, $3x + 4y = 0$*, причому радіус кола* $r = 8$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Оскільки задані прямі не паралельні і не збігаються, то дана задача має чотири розв'язки (див. рис.).



Кожна із шуканих точок віддалена від кожної з двох заданих прямих на віддаль, що рівна радіусу кола, тобто дорівнює 8. Скористаємося формулою віддалі від точки до прямої:

$$\begin{cases} \dfrac{|3x-4y+10|}{\sqrt{9+16}}=8, \\ \dfrac{|3x+4y|}{\sqrt{9+16}}=8. \end{cases}$$

Врахувавши означення модуля дійсного числа, розглянемо чотири можливих випадки:

$$1)\ \begin{cases} \dfrac{3x-4y+10}{5}=8, \\ \dfrac{3x+4y}{5}=8. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} \dfrac{3x-4y+10}{5}=8, \\ \dfrac{3x-4y+10}{5}=-8. \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} \dfrac{3x-4y+10}{5}=-8, \\ \dfrac{3x+4y}{5}=8. \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} \dfrac{3x-4y+10}{5}=-8, \\ \dfrac{3x+4y}{5}=-8. \end{cases}$$

Розв’язавши кожну із цих систем окремо, отримаємо шукані центри кіл:

$$C_1(-\frac{5}{3};11\frac{1}{4}),\ \ C_2(-15;\frac{5}{4}),\ \ C_3(-\frac{5}{3};-8\frac{3}{4}),\ \ C_4(11\frac{2}{3};\frac{5}{4}).$$

3.2.11. *Знайти геометричне місце точок, розміщених усередині трикутника, сума відстаней яких до двох сторін трикутника рівна відстані до третьої сторони.*

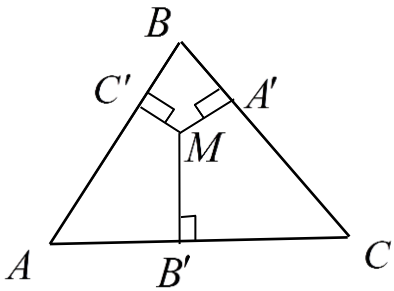
Розв’язання. Введемо довільним чином і зафіксуємо на площині прямокутну декартову систему координат. Нехай $M\left(x;y\right)$ – довільна точка, що належить заданому геометричному місцю точок.

Позначимо

$$h_1=h_1\left(x,y\right),\ h_2=h_2\left(x,y\right),\ h_3=h_3\left(x,y\right)$$

– віддалі від точки $M\left(x;y\right)$ до сторін BC, AC, AB трикутника ABC відповідно. За умовою задачі:

$$h_2\left(x,y\right)=h_3\left(x,y\right)+h_1\left(x,y\right). \qquad (1)$$



Якщо $h_3=0$ (тобто точка M співпадає з точкою C'), то $h_2=h_1$. Отже, точка C' рівновіддалена від двох інших сторін трикутника, тобто є основою бісектриси кута ACB даного трикутника. Аналогічно A' – основа бісектриси кута BAC.

Отже, шукана лінія є лінією, що з’єднує основи бісектрис внутрішніх кутів ACB і BAC трикутника.

Доведемо, що ця лінія – пряма. Нехай $\alpha(x,y)=0$, $\beta(x,y)=0$, $\gamma(x,y)=0$ – нормальні рівняння сторін BC, AC, AB відповідно трикутника ABC. Тоді віддалі $h_1=h_1(x,y)$, $h_2=h_2(x,y)$, $h_3=h_3(x,y)$ – це результат підстановки в нормальні рівняння координат точки $M(x;y)$, віддаль від якої до даних прямих ми шукаємо. Отже, рівність (1) рівносильна рівнянню:

$$\beta(x,y)=\lambda(x,y)+\alpha(x,y). \tag{2}$$

Рівняння (2) є, очевидно, рівнянням першого степеня, тобто визначає пряму.

Таким чином, шукане геометричне місце точок – це відрізок прямої, кінцями якого служать точки перетину бісектрис внутрішніх кутів трикутника, що належать до третьої сторони з протилежними цим кутам сторонами трикутника.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння прямих, рівновіддалених від трьох точок $(1;2),\ (3;0),\ (-4;-5)$. Система координат афінна.

(Відповідь: $5x-7y-3=0;\ x+y-3=0;\ 7x-5y-9=0$).

2. На прямій $x-3y+1=0$ знайти точку, рівновіддалену від двох заданих точок $(-3;1),\ (5;4)$.

(Відповідь: $(\frac{29}{18};\frac{47}{54})$).

3. Визначити розміщення прямої $x-7y+5=0$ відносно трикутника, вершини якого $A(3;1),\ B(-2;4),\ C(1;0)$. Система координат афінна.

(Відповідь: дана пряма перетинає сторони CB і BA, а також продовження сторони CA за точкою A).

4. Визначити положення прямої $2x-y+3=0$ відносно трикутника, сторони якого задані рівняннями $3x-y+4=0,\ 2x-y+1=0,\ x-2y=0$. Система координат афінна.

(Відповідь: пряма $2x-y+3=0$ паралельна стороні M_1M_3 і перетинає продовження сторін M_1M_2 і M_3M_2 за точкою M_2).

5. Довести, що пряма $2x+y+3=0$ перетинає відрізок, обмежений точками $A(-5;1)$ і $B(3;7)$.

6. Довести, що пряма $2x-3y+6=0$ не перетинає відрізок, обмежений точками $M_1(-2;-3)$ і $M_2(1;-2)$.

7. Встановити, чи лежать точка $M(1;-3)$ і початок координат з одного чи по різні боки відносно кожної з таких прямих: 1) $2x-y+5=0$; 2) $x-3y-5=0$; 3) $3x+2y-1=0$; 4) $x-3y+2=0$; 5) $10x+24y+15=0$.

(Відповідь:1) по один бік; 2) по різні боки; 3) по один бік; 4) по різні боки; 5) по різні боки).

8. У кожному з наступних випадків скласти рівняння прямої, що паралельна до двох даних паралельних прямих і проходить посередині між ними:

1) $3x-2y-1=0$, $3x-2y-13=0$;

2) $5x+y+3=0$, $5x+y-17=0$;

3) $2x+3y-6=0$, $4x+6y+17=0$;

4) $5x+7y+15=0$, $5x+7y+3=0$;

5) $3x-15y-1=0$, $x-5y-2=0$.

(Відповідь: 1) $3x-2y-7=0$; 2) $5x+y-7=0$; 3) $8x+12y+5=0$; 4) $5x+7y+9=0$; 5) $6x-30y-7=0$).

9. Знайти відстань між паралельними прямими в кожному з випадків:

1) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$; 2) $5x-12y+26=0$, $5x-12y-13=0$;

3) $4x-3y+15=0$, $8x-6y+25=0$; 4) $24x-10y+39=0$, $12x-5y-26=0$.

(Відповідь: 1) 2,5; 2) 3; 3) 0,5; 4) 3,5).

10. Дві сторони квадрата лежать на паралельних прямих $5x-12y-65=0$, $5x-12y+26=0$. Знайти його площу.

(Відповідь: 49 кв. од.).

11. Довести, що пряма $5x-2y-1=0$ паралельна до прямих $5x-2y+7=0$, $5x-2y-9=0$ і ділить відстань між ними навпіл.

12. Дано три паралельні прямі: $10x+15y-3=0$, $2x+3y+5=0$, $2x+3y-9=0$. Встановити, що перша з них лежить між двома іншими, і знайти відношення, в якому вона ділить відстань між ними.

(Відповідь: у відношенні $2:3$, рахуючи від другої прямої).

13. Через точку перетину прямих $3x+y+10=0$, $4x+5y+6=0$ провести пряму, що віддалена від початку координат на віддаль 4.

(Відповідь: $x+4=0$; $3x-4y+20=0$).

14. Дано вершини трикутника: $A(-10;-13)$, $B(-2;3)$ і $C(2;1)$. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного із вершини B на медіану, проведену із вершини C.

(Відповідь: 4).

15. Сторони AB, BC і CA трикутника ABC задані рівняннями $x+21y-22=0$, $5x-12y+7=0$, $4x-33y+146=0$. Знайти відстань від центра ваги цього трикутника до сторони BC.

(Відповідь: 3).

16. Знайти довжини висот трикутника, сторони якого задані рівняннями: $3x-4y-3=0$, $5x+12y+2=0$, $3x+4y+390=0$.

(Відповідь: $78;\ 273;\ 70$).

17. Скласти рівняння прямих, що паралельні прямій $7x-2y+4=0$ і віддалені від неї на відстань $\sqrt{53}$.

(Відповідь: $7x-2y+57=0;\ 7x-2y-49=0$).

18. Довести, що прямі $3x-7y+2=0$, $3x-7y+3=0$ паралельні, і знайти відстань між ними.

(Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{58}}$).

19. Точка $A(2;-5)$ є вершиною квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $x-2y-7=0$. Знайти площу цього квадрата.

(Відповідь: 5кв. од.).

20. Дано рівняння двох сторін прямокутника $3x-2y-5=0$, $2x+3y+7=0$ і одна з його вершин $A(-2;1)$. Знайти площу цього прямокутника.

(Відповідь: 6 кв. од.).

21. Скласти рівняння прямої, яка паралельна осі Oy і віддалена від точки $(3;5)$ на віддаль 7. (Відповідь: $x-10=0;\ x+4=0$).

22. Скласти рівняння прямої, що має кутовий коефіцієнт $k=-\dfrac{1}{2}$ і віддалена від початку координат на $\sqrt{5}$.

(Відповідь: $x+2y\pm 5=0$).

23. Через точку $(3;-1)$ провести пряму, що віддалена від точки $(2;-3)$ на $\frac{9}{\sqrt{17}}$.

(Відповідь: $x+4y+1=0$; $13x+16y-23=0$).

24. Знайти точки, рівновіддалені від бісектрис координатних кутів і від точки $(1;\sqrt{2})$.

(Відповідь: $(0;\sqrt{2})$ і $(0;3\sqrt{2})$).

25. На прямій $x+y-8=0$ знайти точки, рівновіддалені від точки $(2;8)$ і від прямої $x-3y+2=0$.

(Відповідь: $(3;5)$ і $(-37;45)$).

26. Усередині трикутника, який утворений прямими $7x+y-2=0$, $5x+5y-4=0$ і $2x-2y+5=0$, знайти точку, рівновіддалену від двох його сторін $7x+y-2=0$, $5x+5y-4=0$ і віддалену від третьої сторони $2x-2y+5=0$ на $\frac{3}{4}\sqrt{2}$.

(Відповідь: $(0;1)$).

27. Дано рівняння $x+y-5\sqrt{2}=0$, $x+y=0$ паралельних сторін ромба і точки $(3;5)$ і $(1;0)$, що лежать на двох інших його сторонах. Скласти рівняння двох інших сторін.

(Відповідь: $y=0$; $y=5$ і $20x+21y-20=0$; $20x+21y-165=0$. Вказівка: Визначити кутовий коефіцієнт невідомих сторін беручи до уваги, що відстані між протилежними сторонами ромба рівні між собою).

28. Довести, що через точку $P(2;7)$ можна провести дві прямі так, щоб їх відстані від точки $Q(1;2)$ дорівнювали 5. Скласти рівняння цих прямих.

(Відповідь: $5x+12y-94=0$, $y-7=0$).

29. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(2;0)$ і $B(-1;4)$. Скласти рівняння його сторін.

(Відповідь: умову задачі задовольняють два квадрати, симетрично розміщених відносно сторони AB. Рівняння сторін одного з них: $4x+3y-8=0$, $4x+3y+17=0$, $3x-4y-6=0$, $3x-4y+19=0$. Рівняння сторін другого: $4x+3y-8=0$, $4x+3y-33=0$, $3x-4y-6=0$, $3x-4y+19=0$).

30. Точка $A(5;-1)$ є вершиною квадрата, одна зі сторін якого лежить на прямій $4x-3y-7=0$. Скласти рівняння прямих, на яких лежать інші сторони квадрата.

(Відповідь: умову задачі задовольняють два квадрати; інші сторони одного з них лежать на прямих: $3x+4y-11=0$, $4x-3y-23=0$, $3x-4y-27=0$; інші сторони другого – на прямих: $3x+4y-11=0$, $4x-3y-23=0$, $3x+4y+5=0$).

31. Скласти рівняння сторін квадрата, дві паралельні сторони якого проходять через точки $(2;1)$ і $(3;5)$, а дві інші – через точки $(0;1)$ і $(-3;-1)$.

(Відповідь: $x-3y+1=0$; $x-3y+12=0$; $3x+y-1=0$; $3x+y+10=0$ і $7x+y-15=0$; $7x+y-26=0$; $x-7y+7=0$; $x-7y-4=0$).

32. Скласти рівняння сторін паралелограма $ABCD$, знаючи, що його діагоналі перетинаються в точці $M(1;6)$, а сторони $AB,\ BC,\ CD$ і DA проходять відповідно через точки $P(3;0),\ Q(6;6),\ R(5;9),\ S(-5;4)$. Система координат прямокутна декартова.

(Відповідь: $x+2y-3=0$; $2x-y-6=0$; $x+2y-23=0$; $2x-y+14=0$).

33. Знайти центр кола, вписаного в трикутник, сторони якого задані рівняннями $x+y+12=0$, $7x+y=0$, $7x-y+28=0$.

(Відповідь: $(-2;-6)$).

34. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими, які перетинаються:

1) $x-3y+5=0$, $3x-y-2=0$;

2) $x-2y-3=0$, $2x+4y+7=0$;

3) $3x+4y-1=0$, $5x+12y-2=0$.

(Відповідь: 1) $4x-4y+3=0$, $2x+2y-7=0$; 2) $4x+1=0$, $8y+13=0$; 3) $14x-8y-3=0$, $64x+112y-23=0$).

35. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку $P(2;-1)$ і разом із прямими $2x-y+5=0$, $3x+6y-1=0$ утворюють рівнобедрені трикутники.

(Відповідь: $x-3y-5=0$, $3x+y-5=0$. Вказівка: шукані прямі проходять через точку P перпендикулярно до бісектрис кутів, утворених двома даними прямими).

36. Визначити, чи лежить точка $M(1;-2)$ і початок координат в одному, суміжних чи вертикальних кутах, утворених при перетині двох прямих:

1) $2x-y-5=0$, $3x+y+10=0$;

2) $4x+3y-10=0$, $12x-5y-5=0$;

3) $x-2y-1=0$, $3x-y-2=0$.

(Відповідь: 1) в одному куті, 2) в суміжних кутах, 3) у вертикальних кутах).

37. Визначити, лежить точка $M(-3;2)$ усередині чи поза трикутником, сторони якого задані рівняннями $x+y-4=0$, $3x-7y+8=0$, $4x-y-31=0$.

(Відповідь: за межами трикутника).

38. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $3x-y-4=0$ і $2x+6y+3=0$, в якому лежить початок координат.

(Відповідь: $8x+4y-5=0$).

39. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $x-7y+5=0$ і $5x+5y-3=0$, суміжного з кутом, що містить початок координат.

(Відповідь: $x+3y-2=0$).

40. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $x+2y-11=0$ і $3x-6y-5=0$, в якому лежить точка $M(1;-3)$.

(Відповідь: $3x-19=0$).

41. Скласти рівняння бісектриси кута між прямими $2x-3y-5=0$ і $6x-4y+7=0$, суміжного з кутом, що містить точку $C(2;-1)$.

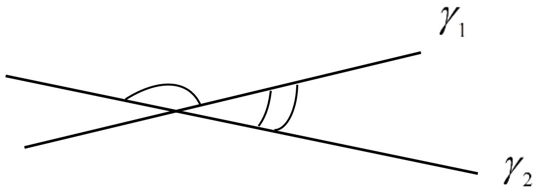
(Відповідь: $10x-10y-3=0$).

§3.3. Взаємне розташування прямих на площині

3.3.1. Кут між прямими

Важливою задачею є обчислення кута між двома прямими на площині. Нагадаємо основні означення шкільної геометрії.

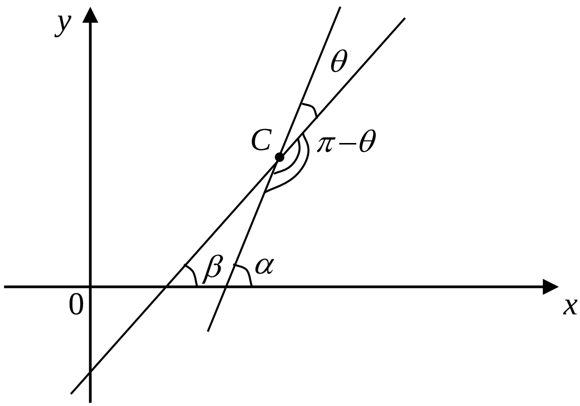
Прямі, що перетинаються, утворюють пару рівних гострих кутів і пару рівних тупих кутів.



Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює $\dfrac{\pi}{2}$.

Якщо прямі паралельні, то вважають, що кут між ними дорівнює 0.

Уведемо на площині довільним чином і зафіксуємо прямокутну декартову систему координат. Нехай прямі γ_1 та γ_2 задано в цій системі координат рівняннями $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$. Припустимо, що прямі не перпендикулярні до осі Ox і перетинаються в точці C.



Під *кутом між такими прямими* розумітимемо кут повороту навколо точки C однієї прямої до іншої прямої. Отже, дві прямі, що перетинаються, утворюють два кути, в сумі рівні π. Якщо ці прямі не взаємно ортогональні, то один із цих кутів гострий, а інший тупий.

Знайдемо формулу для обчислення кута між прямими. Якщо кут нахилу прямої γ_2 до вісі Ox дорівнює α, а прямої γ_1 – β, то очевидно, що кут θ між прямими γ_1 і γ_2 дорівнює $\pm(\alpha-\beta)$. Зокрема, при $\theta=\alpha-\beta$

$$tg\theta=\pm tg(\alpha-\beta)=\pm\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}=\pm\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Отже,

$$tg\theta=\pm\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Урахувавши властивості функції тангенс, отримуємо, що гострий кут між заданими прямими обчислюється за формулою

$$tg\theta=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Наприклад, знайдемо кут між прямими $5x+y+2=0$, $3x-2y-1=0$. Оскільки $k_1=-5,\ k_2=\frac{3}{2}$, то

$$tg\theta=\left|\frac{\frac{3}{2}+5}{1-\frac{15}{2}}\right|=\left|\frac{13}{-13}\right|=1.$$

Гострий кут між прямими дорівнює $\frac{\pi}{4}$; відповідно тупий кут дорівнює $\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$.

Легко бачити, що необхідною і достатньою умовою паралельності прямих є рівність $k_1 = k_2$.

Оскільки $\vec{a}_1 = (1; k_1)$, $\vec{a}_2 = (1; k_2)$ – напрямні вектори прямих γ_1 і γ_2 відповідно, то необхідною і достатньою умовою ортогональності цих прямих є умова

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right) = 1 + k_1 k_2 = 0,$$

або умова $k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$, тобто $k_1 k_2 = -1$.

Якщо прямі задані загальними рівняннями

$$\gamma_1 : \ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

$$\gamma_2 : \ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

відносно прямокутної декартової системи координат, то *гострий кут* між прямими шукаємо за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2\right)\right|}{\left|\vec{a}_1\right|\left|\vec{a}_2\right|} = \frac{\left|\left(\left(-B_1; A_1\right), \left(-B_2; A_2\right)\right)\right|}{\left|\vec{a}_1\right|\left|\vec{a}_2\right|} =$$

$$= \frac{\left|A_1 A_2 + B_1 B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Наприклад, для розглянутих раніше прямих $5x + y + 2 = 0$ і $3x - 2y - 1 = 0$, напрямні вектори: $\vec{a}_1 = (-1; 5)$, $\vec{a}_2 = (2; 3)$. Отже, $\cos\varphi = \dfrac{\left|-2 + 15\right|}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, тобто $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ – гострий кут між заданими прямими.

Зауваження. Очевидно, що

$$\cos\varphi = \frac{\left|\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left|\left(\left(A_1; B_1\right), \left(A_2; B_2\right)\right)\right|}{\left|\vec{n}_1\right|\left|\vec{n}_2\right|} =$$

$$= \frac{\left|A_1 A_2 + B_1 B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

де $\vec{n}_1 = \left(A_1; B_1\right), \vec{n}_2 = \left(A_2; B_2\right)$ – головні вектори прямих γ_1 і γ_2 відповідно.

Умова

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$$

є *необхідною і достатньою умовою ортогональності цих прямих*.

Умовою паралельності прямих γ_1 і γ_2 є співвідношення

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Зауваження. Оскільки головний вектор $\vec{n} = \left(A; B\right)$ прямої, заданої загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ відносно прямокутної декартової системи координат, перпендикулярний до цієї прямої і напрямлений у додатну півплощину даної прямої (див. теорему 3.2.2), то за формулою

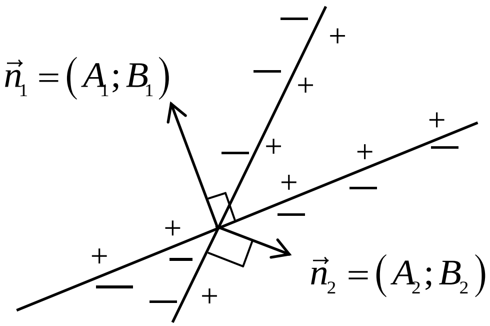
$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

обчислюється косинус того кута між двома прямими заданими загальними рівняннями

$$\gamma_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

$$\gamma_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

відносно прямокутної декартової системи координат, усередині якого лежать точки, що належать різнойменним півплощинам даних прямих (додатній півплощині однієї прямої і від’ємній півплощині другої). Якщо ж поміняти знаки в лівій частині одного з рівнянь прямих γ_1 і γ_2, то за допомогою цієї формули буде обчислюватись косинус кута, суміжного з кутом φ, бо при зміні знаків у лівій частині рівняння прямої додатна і від’ємна півплощини міняються місцями.



У багатьох задачах використовують поняття напрямленого кута між двома прямими в орієнтованій площині. Нагадаємо, що на площині задано орієнтацію, якщо вказано поворот на цій площині навколо фіксованої точки цієї площини, який вважається додатним.

Під *напрямленим кутом між прямими* розуміють кут повороту навколо їх спільної точки C однієї прямої до іншої прямої на менший кут між ними. Якщо цей поворот виконується проти годинникової стрілки, то напрямлений кут між прямими додатний; якщо ж за годинниковою стрілкою – від'ємний.

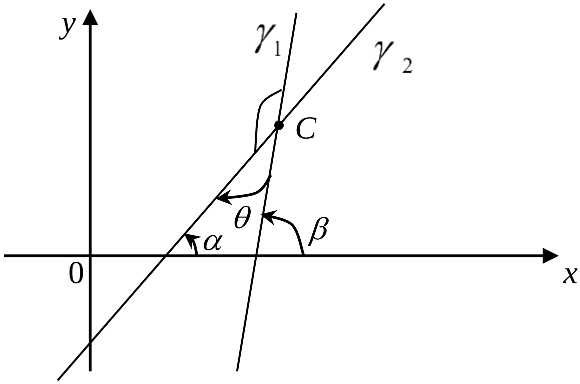
Пряму, відносно якої здійснюється поворот іншої прямої, назвемо першою; пряму, яку повертають навколо точки C відносно іншої прямої – другою.

Орієнтація кута залежить від того, яка з прямих перша, а яка – друга. Величина напрямленого кута змінюється в межах $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Якщо прямі не перпендикулярні, то $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ і для знаходження орієнтованого (напрямленого) кута досить знайти його тангенс.

Уведемо на площині довільним чином і зафіксуємо прямокутну декартову систему координат. Припустимо, що на площині задано дві прямі, що не перпендикулярні до осі Ox, перетинаються у точці C і утворюють із додатним напрямом осі Ox кути α та β.

Знайдемо додатний напрямлений кут θ між прямими (тобто поворот здійснюватимемо проти годинникової стрілки навколо точки C перетину прямих). Можливі два випадки.

I)

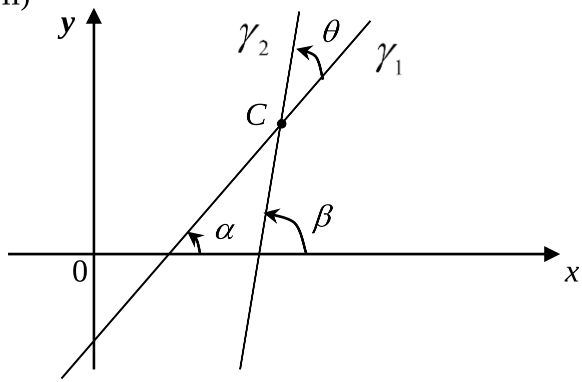


Кут від першої до другої прямої θ в цьому випадку є від'ємним, бо здійснюється за годинниковою стрілкою і $tg\theta = tg\left(\pi - \left(\beta - \alpha\right)\right)$, $k_1 = tg\beta$, $k_2 = tg\alpha$ – кутові коефіцієнти прямих. Тоді:

$$tg\theta = tg(\pi - (\beta - \alpha)) = -tg\left(\beta - \alpha\right) = -\frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Можливий інший випадок:

II)



Кут від першої до другої прямої в цьому випадку додатний: $\theta = \beta - \alpha$ і $k_1 = tg\alpha$, $k_2 = tg\beta$ – кутові коефіцієнти прямих, тобто

$$tg\theta = tg(\beta - \alpha) = \frac{tg\beta - tg\alpha}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Зауважимо, що в обох випадках I) і II) для знаходження тангенса напрямленого кута справедлива формула

$$tg\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

3.3.2. Взаємне розташування двох прямих на площині. Жмутки прямих на площині

Теорема 3.3.1. *Нехай відносно загальної декартової системи координат дано рівняння двох прямих*

$$\gamma_1 :\ A_1 x + B_1 y + C_1 = 0,$$

$$\gamma_2 :\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Тоді необхідною і достатньою умовою того, що ці прямі перетинаються, є умова: $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$.

Необхідна і достатня умова паралельності цих прямих:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Необхідна і достатня умова того, що прямі співпадають:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Доведення цієї теореми випливає безпосередньо з того, що виписані умови є необхідними і достатніми умовами того, що система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \end{cases}$$

має відповідно тільки один розв'язок, не має розв'язків або є неозначеною (має безліч розв'язків).

Означення. *Сукупність усіх паралельних між собою прямих, що лежать в одній площині, називається невласним жмутком прямих. Сукупність усіх прямих, які містять спільну точку (центр жмутка) і лежать в одній площині, називається власним жмутком прямих.*

Уведемо на площині довільним чином і зафіксуємо загальну декартову систему координат.

Теорема 3.3.2. *Для того, що три прямі, що задані загальними рівняннями*

$$\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1&=0, \\ A_2x+B_2y+C_2&=0. \\ A_3x+B_3y+C_3&=0 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

відносно загальної декартової системи координат, належали одному жмутку (власному чи невласному), необхідно і досить, щоб виконувалась умова

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}=0.$$

Доведення. Доведення необхідності. Дано: три прямі (3.3.1) належать одному жмутку. Доведемо, що $\Delta=0$.

Нехай прямі (3.3.1) належать одному власному жмутку. Отже, існує точка $(x_0;y_0)$, що належить усім цим прямим. Координати цієї точки задовольняють усі три рівняння (3.3.1):

$$\begin{aligned} A_1x_0+B_1y_0+C_1&=0, \\ A_2x_0+B_2y_0+C_2&=0. \\ A_3x_0+B_3y_0+C_3&=0. \end{aligned}$$

Таким чином, стовпці визначника Δ лінійно залежні, отже, $\Delta=0$.

Нехай прямі (3.3.1) належать одному невласному жмутку. Тоді перші два стовпці визначника Δ пропорційні (див. теорему 3.3.1), знову $\Delta = 0$.

Доведення достатності. Дано $\Delta = 0$. Доведемо, що прямі, які визначаються рівняннями (3.3.1), належать одному жмутку.

Доведення проведемо методом від супротивного. Припустимо, що задані прямі не належать одному жмутку; тоді серед них є такі, що перетинаються. Нехай, наприклад, перетинаються перша і друга прямі в точці $\left(x_0; y_0\right)$. Підставимо координати цієї точки

$$x_0 = \frac{-\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \text{ та } y_0 = \frac{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

в рівняння третьої прямої:

$$-A_3 \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} - B_3 \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + C_3 =$$

$$= \frac{A_3 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_3 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_3 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = 0.$$

Координати x_0, y_0 точки перетину двох перших прямих задовольняють рівняння третьої прямої, тобто точка $(x_0; y_0)$ належить третій прямій. Отже, задані прямі (3.3.1) належать одному жмутку (власному), усупереч припущенню. Теорема доведена.

Теорема 3.3.3. *Нехай у загальній декартовій системі координат задано дві різні прямі γ_1 та γ_2 загальними рівняннями*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0,\ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Для того, щоб третя пряма γ_3, задана відносно цієї ж загальної декартової системи координат загальним рівнянням $A_3x + B_3y + C_3 = 0$, належала жмутку, що визначається двома першими прямими, необхідно і досить, щоб ліва частина рівняння прямої γ_3 була лінійною комбінацією лівих частин рівнянь прямих γ_1 та γ_2.

Доведення. Доведення необхідності. Дано: пряма γ_3 належить жмутку, що визначається прямими γ_1 та γ_2. Доведемо, що існують два такі дійсні числа λ, μ, $|\lambda| + |\mu| \neq 0$, що при всіх значеннях x та y буде виконуватися тотожність

$$A_3x + B_3y + C_3 = \lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2).$$

Дійсно, якщо прямі γ_1, γ_2 та γ_3 належать одному жмутку, то $\Delta = 0$ (див. теорему 3.3.2). Перші два рядки визначника Δ лінійно незалежні, бо прямі γ_1 та γ_2 різні. Тоді третій рядок цього визначника є лінійною комбінацією двох його перших рядків (бо $\Delta = 0$). Отже, існують два такі дійсні числа λ, μ, $|\lambda| + |\mu| \neq 0$, що

$$A_3 = \lambda A_1 + \mu A_2,$$
$$B_3 = \lambda B_1 + \mu B_2,$$

$$C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2 .$$

Помножимо ліву і праву частини першої рівності на довільне число x, ліву і праву частини другої рівності – на довільне число y, ліву і праву частини третьої рівності – на число 1. Додамо три отримані рівності:

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = \lambda(A_1 x + B_1 y + C_1) + \mu(A_2 x + B_2 y + C_2) .$$

Доведення достатності. Дано:

$$A_3 x + B_3 y + C_3 = \lambda(A_1 x + B_1 y + C_1) + \mu(A_2 x + B_2 y + C_2)$$

(тотожність виконується при всіх значеннях x та y). Доведемо, що $\Delta = 0$.

Із заданої тотожності випливає, що

$$A_3 = \lambda A_1 + \mu A_2 ,$$

$$B_3 = \lambda B_1 + \mu B_2 ,$$

$$C_3 = \lambda C_1 + \mu C_2 ,$$

а отже, $\Delta = 0$, бо третій рядок цього визначника є лінійною комбінацією двох його перших рядків. Терема доведена.

Рівняння

$$\lambda(A_1 x + B_1 y + C_1) + \mu(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0, \ |\lambda| + |\mu| \neq 0 \qquad (3.3.2)$$

називається *рівнянням жмутка прямих*, а дві різні прямі, які мають рівняння $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ та $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, – *базовими прямими жмутка.*

Очевидно, якщо базові прямі жмутка паралельні, то жмуток невласний. Якщо ж базові прямі жмутка перетинаються, то жмуток власний.

Приклади розв'язування задач

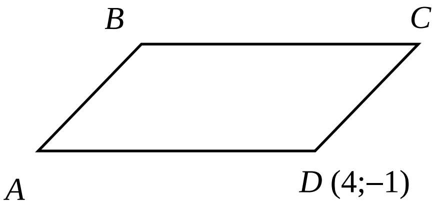
3.3.1. *Знаючи рівняння двох сторін паралелограма* $x - 3y = 0,\ 2x + 5y + 6 = 0$ *і одну з його вершин* $(4;-1)$*, скласти рівняння двох інших сторін паралелограма. Система координат афінна.*

Розв'язання. Перевіримо взаємне розміщення двох заданих прямих

(1): $x-3y=0$ і

(2): $2x+5y+6=0$.

Головні вектори $\overrightarrow{n_1}=(1;-3)$ і $\overrightarrow{n_2}=(2;5)$ відповідно прямих (1) і (2) неколінеарні, бо $\frac{1}{2}\neq-\frac{3}{5}$. Отже, прямі перетинаються і є суміжними сторонами паралелограма. Задана вершина $(4;-1)$, очевидно, не належить жодній із цих двох прямих.



Оскільки $ABCD$ – паралелограм, то

$$CD\parallel AB,\quad AD\parallel BC.$$

Тоді головний вектор $\overrightarrow{n_1}=(1;-3)$ прямої AB буде головним для прямої CD (п.3.3.2). Її рівняння має вигляд $1\cdot x-3y+C=0$. Точка $D\in CD$, тобто координати цієї точки задовольняють рівняння прямої $4+3+C=0,\ C=-7$. Отже, рівняння CD: $x-3y-7=0$. Аналогічно, головним вектором прямої AD є вектор $\overrightarrow{n_2}=(2;5)$ і рівняння цієї прямої: $2x+5y-3=0$.

3.3.2. *Дано рівняння двох сторін паралелограма* $x-y-1=0,\ x-2y=0$ *і точка перетину його діагоналей* $M(3;-1)$. *Скласти рівняння двох інших сторін паралелограма. Система координат афінна.*

Розв'язання. Як і в попередній задачі, перевіряємо, що задані прямі непаралельні, тобто лежать на суміжних сторонах паралелограма. Знайдемо точку перетину двох даних сторін, координати якої є розв'язком системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x-y-1=0, \\ x-2y=0. \end{cases}$$

Отже $x=2,\ y=1$, тобто точка $(2;1)$ – вершина паралелограма. Оскільки протилежні сторони в паралелограма паралельні, то рівняння двох інших сторін матимуть вигляд: $x-y+C_1=0,\ x-2y+C_2=0$. Відстані від точки M перетину діагоналей паралелограма до двох його паралельних сторін рівні: $\dfrac{|3-(-1)-1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|3-(-1)+C_1|}{\sqrt{2}}$. Звідси $3=|4+C_1|$. Маємо два випадки:

1) $3=4+C_1,\ C_1^1=-1$,

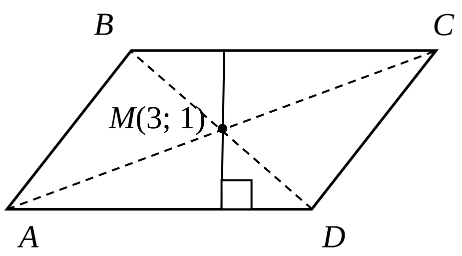
2) $3=-4-C_1,\ C_1^2=-7$.

Рівняння однієї із шуканих сторін таке: $x-y-7=0$. Зауважимо, що при $C_1^1=-1$ отримуємо рівняння однієї із заданих прямих, а саме: $x-y-1=0$.

Міркуємо аналогічно для іншої пари паралельних сторін паралелограма, тобто: $\dfrac{|3+2|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|3+2+C_2|}{\sqrt{5}}$, $5=|5+C_2|$. Звідси

1) $5=5+C_2,\ C_2^1=0$, $5=-5-C_2,\ C_2^2=-10$.

Рівняння іншої шуканої сторони має вигляд $x-2y-10=0$.

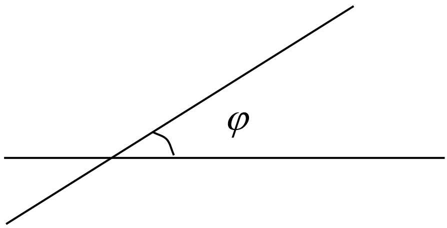


3.3.3. *Визначити кути між двома прямими, якщо відомо їх кутові коефіцієнти* $k_1 = \frac{1}{3},\ k_2 = -\frac{1}{2}$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Скористаємось результатами першого пункту цього параграфа. Для знаходження величини гострого кута між прямими, для яких задано їх кутові коефіцієнти, маємо формулу

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

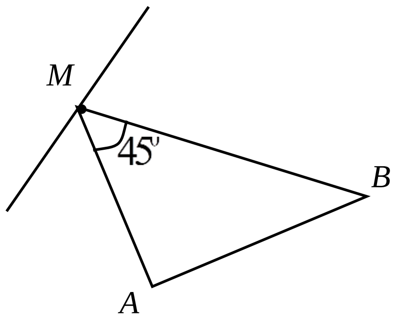
Отже, $tg\varphi = \left|\dfrac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}}\right| = \left|\dfrac{-3-2}{5}\right| = |-1| = 1$ і гострий кут між прямими дорівнює $\varphi = \frac{\pi}{4}$; відповідно тупий кут дорівнює $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.



3.3.4. *Дано дві точки* $A(3;3)$, $B(0;2)$. *На прямій* $x + y - 4 = 0$ *знайти точку* M, *з якої відрізок* AB *видно під кутом* 45°. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв’язання. Нехай координати шуканої точки $M\left(x_0; y_0\right)$. Тоді прямі AM і BM мають, відповідно, кутові коефіцієнти $k_1 = \dfrac{y_0 - 3}{x_0 - 3}$ та $k_2 = \dfrac{y_0 - 2}{x_0}$.

Скористаємось тим, що $\angle AMB = 45^\circ$ (див. рис.):



Тоді (див. п.3.3.1):

$$tg 45^\circ = 1 = \frac{\dfrac{y_0 - 2}{x_0} - \dfrac{y_0 - 3}{x_0 - 3}}{1 + \dfrac{(y_0 - 3)(y_0 - 2)}{(x_0 - 3)x_0}},$$

$$x_0^2 - 4x_0 + y_0^2 - 2y_0 = 0. \qquad (1)$$

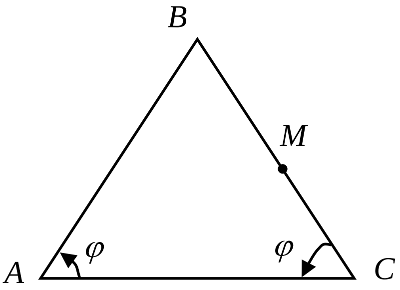
Врахувавши, що точка M повинна належати прямій $x + y - 4 = 0$ і задовольняти (1), її координати $\left(x_0; y_0\right)$ знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_0^2 - 4x_0 + y_0^2 - 2y_0 = 0, \\ y_0 = 4 - x_0. \end{cases}$$

Отримуємо $M_1\left(4;0\right)$ та $M_2\left(1;3\right)$.

3.3.5. *Дано рівняння основи рівнобедреного трикутника* $x + y - 1 = 0$ *і бічної сторони* $x - 2y - 2 = 0$. *Точка* $M(-2;0)$ *лежить на іншій бічній стороні. Знайти рівняння третьої* *сторони трикутника. Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Нехай φ – кут між основою AC і бічною стороною AB заданого трикутника.



Оскільки рівняння основи AC: $x+y-1=0$, тобто $y=-x+1$, то кутовий коефіцієнт прямої AC $k_1=-1$.

Аналогічно для бічної сторони AB: $2y=x-2$, $y=\frac{1}{2}x-1$, тобто $k_2=\frac{1}{2}$ – кутовий коефіцієнт прямої AB.

Скористаємось формулою для знаходження тангенса напрямленого кута між двома прямими (див. п.3.3.1):

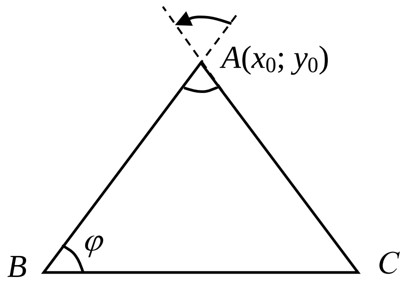
$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

Кутовий коефіцієнт прямої BC позначимо k і врахуємо, що кут між прямими BC і AC теж дорівнює φ, тобто $tg\varphi=3$ і $tg\varphi=\frac{k_1-k}{1+k_1k}$. Отже, $3=\frac{-1-k}{1-k}$, $3-3k=-1-k, \quad k=2$.

Пряма BC має кутовий коефіцієнт $k=2$ і, згідно з умовою задачі, проходить через точку $M(-2;0)$. Скориставшись рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом, отримуємо шукане рівняння третьої сторони трикутника: $y-0=2(x+2)$, $2x-y+4=0$.

3.3.6. *Дано вершини* $B(-2;1),\ C(4;5)$ *в основі рівнобедреного трикутника і косинус кута при його вершині* $\cos A = \dfrac{15}{17}$. *Знайти координати вершини* A. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Запропонуємо читачеві два способи розв'язання цієї задачі. Позначимо координати точки $A\left(x_0; y_0\right)$, а кут при основі – φ.



1-й спосіб. Скористаємося знаннями, набутими при вивченні векторної алгебри. (розділ 2) Обчислимо координати, відтак і скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Маємо:

$$\overrightarrow{AB} = (-2 - x_0; 1 - y_0),$$

$$\overrightarrow{AC} = (4 - x_0; 5 - y_0),$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (-2 - x_0)(4 - x_0) + (1 - y_0)(5 - y_0) =$$

$$= \sqrt{(2 + x_0)^2 + (1 - y_0)^2} \cdot \sqrt{(4 - x_0)^2 + (5 - y_0)^2} \cdot \frac{15}{17}.$$

Оскільки заданий трикутник – рівнобедрений, то $AB^2 = AC^2$, тобто в координатах

$$(2 + x_0)^2 + (1 - y_0)^2 = (4 - x_0)^2 + (5 - y_0)^2.$$

Для знаходження $A\left(x_0; y_0\right)$ маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt{(2+x_0)^2+(1-y_0)^2}\cdot\sqrt{(4-x_0)^2+(5-y_0)^2}\cdot\dfrac{15}{17}= \\ =(2+x_0)(4-x_0)+(1-y_0)(5-y_0), \\ (2+x_0)^2+(1-y_0)^2=(4-x_0)^2+(5-y_0)^2. \end{cases}$$

Пропонуємо читачеві переконатись самостійно, що $A_1(-7;15)$, $A_2(9;-9)$ – розв'язки цієї системи, а отже, і нашої задачі.

2-й спосіб. Знайдемо кутові коефіцієнти бічних сторін заданого трикутника:

кутовий коефіцієнт прямої AB: $k_1=\dfrac{y_0-1}{x_0+2}$;

кутовий коефіцієнт прямої AC: $k_2=\dfrac{y_0-5}{x_0-4}$.

За умовою задачі, $\cos A=\dfrac{15}{17}$. Тоді $tgA=\dfrac{\sin A}{\cos A}$ і

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{15}{17}\right)^2}=\frac{8}{17}.\ tgA=\frac{8/17}{15/17}=\frac{8}{15}.$$

З іншого боку, на підставі формули для знаходження тангенса напрямленого кута між двома прямими (див. п.3.3.1)

$$\frac{8}{15}=\frac{\dfrac{y_0-5}{x_0-4}-\dfrac{y_0-4}{x_0+2}}{1+\dfrac{y_0-5}{x_0-4}\cdot\dfrac{y_0-4}{x_0+2}},$$

$$\frac{8}{15}=\frac{(y_0-5)(x_0+2)-(y_0-1)(x_0-4)}{(x_0+2)(x_0-4)+(y_0-5)(y_0-1)},$$

$$8x_0^2+8y_0^2+44x_0+42y_0+186=0.$$

Оскільки заданий трикутник – рівнобедрений, то $AB^2=AC^2$, тобто в координатах

$$(2+x_0)^2+(1-y_0)^2=(4-x_0)^2+(5-y_0)^2.$$

Для знаходження $A\left(x_0;y_0\right)$ маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8x_0^2+8y_0^2+44x_0+42y_0+186=0, \\ (2+x_0)^2+(1-y_0)^2=(4-x_0)^2+(5-y_0)^2. \end{cases}$$

$A_1(-7;15)$, $A_2(9;-9)$ – розв'язки цієї системи, а отже, і нашої задачі.

Таким чином, існують два трикутники, що задовольняють умову задачі.

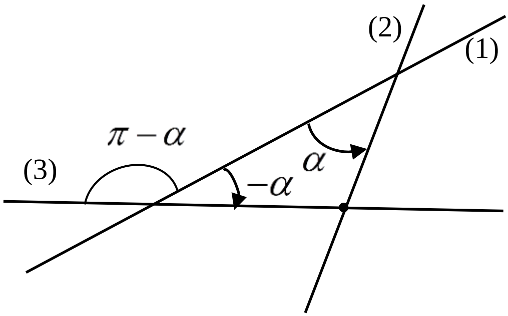
3.3.7. *Через початок координат провести прямі, які утворюють із прямою* $5x-6y+2=0$ *кути* $tg\alpha=\pm\dfrac{7}{6}$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. За умовою задачі шукані прямі проходять через початок координат, тобто точку $O(0;0)$. Знайдемо їх кутові коефіцієнти k_2 і k_3, визначивши попередньо, що кутовий коефіцієнт прямої $5x-6y+2=0$: $k_1=\dfrac{5}{6}$.

Оскільки, згідно з формулами зведення, для довільного кута θ виконується співвідношення $tg\left(\pi-\theta\right)=-tg\theta$ і за умовою задачі, $tg\alpha=\pm\dfrac{7}{6}$, то шукані прямі утворюють із заданою прямою два суміжні кути α та $\pi-\alpha$, або два напрямлені кути α та $-\alpha$, де $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Скористаємось формулою тангенса напрямленого кута між прямими, наведеною в першому пункті цього параграфа:

$$tg\theta=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$



Для першої з шуканих прямих із кутовим коефіцієнтом k_2 маємо: $\frac{7}{6}=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. Врахувавши, що $k_1=\frac{5}{6}$, з останнього співвідношення отримаємо: $\frac{7}{6}=\frac{k_2-\frac{5}{6}}{1+\frac{5}{6}k_2}$. Маємо: $k_2=72$.

Отже, рівняння першої із шуканих прямих: $72x-y=0$.

Аналогічно міркуємо у випадку іншої невідомої прямої, кутовий коефіцієнт якої позначено k_3:

$$-\frac{7}{6}=\frac{k_3-k_1}{1+k_1k_3},\quad -\frac{7}{6}=\frac{k_3-\frac{5}{6}}{1+\frac{5}{6}k_3},\quad k_3=-\frac{12}{71}.$$

Рівняння шуканої прямої: $12x+71y=0$.

3.3.8. *У жмутку прямих з базовими прямими* $x-4y+5=0,\quad 2x+y-7=0$ *знайти пряму, перпендикулярну до бісектриси другого і четвертого координатних кутів. Система координат прямокутна декартова.*

Розв’язання. Задані прямі є базовими прямими власного жмутка, оскільки вони не паралельні. Шукана пряма має рівняння (теорема 3.3.3):

$$\lambda(x-4y+5)+\mu(2x+y-7)=0,\ |\lambda|+|\mu|\neq 0.$$

Пряма $(\lambda+2\mu)x+(\mu-4\lambda)y+5\lambda-7\mu=0$ має кутовий коефіцієнт $k=\dfrac{\lambda+2\mu}{4\lambda-\mu}$, а кутовий коефіцієнт бісектриси $y=-x$ другого і четвертого координатних кутів дорівнює -1. Умова перпендикулярності прямих (див п.3.3.1): $\dfrac{\lambda+2\mu}{4\lambda-\mu}\cdot(-1)=-1$, тобто $\dfrac{\lambda+2\mu}{4\lambda-\mu}=1$ або $\lambda+2\mu=4\lambda-\mu$. Звідси $\lambda=\mu\neq 0$. Отже, рівняння шуканої прямої даного жмутка:

$$\lambda(x-4y+5)+\lambda(2x+y-7)=0.$$

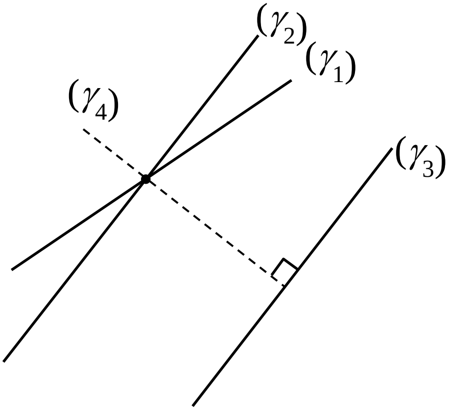
Поділивши останнє рівняння на $\lambda\neq 0$ і звівши подібні доданки, отримуємо: $3x-3y-2=0$ – шукана пряма.

3.3.9. *Через точку перетину прямих* $3x-y=0,\quad x+4y-2=0$ *провести пряму, перпендикулярну до прямої* $2x+7y=0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Для розв'язання цієї задачі можна, як і в попередній, використати рівняння (3.3.2) жмутка прямих. Пропонуємо читачеві провести ці міркування самостійно.

Запропонуємо дещо інший спосіб. Позначимо через k – кутовий коефіцієнт шуканої прямої, k_1 – кутовий коефіцієнт прямої $2x+7y=0$. З останнього рівняння $7y=-2x,\ y=-\dfrac{2}{7}x$, тобто $k_1=-\dfrac{2}{7}$.

Оскільки шукана пряма має бути перпендикулярною до прямої $2x+7y=0$, то для їх кутових коефіцієнтів виконується умова: $k_1k=-1$ (див. п.3.3.1). Таким чином, $k\cdot(-\dfrac{2}{7})=-1,\ k=\dfrac{7}{2}$.



Запишемо рівняння шуканої прямої з кутовим коефіцієнтом: $y - y_0 = \frac{7}{2}(x - x_0) \Rightarrow 2y - 7x + \left(-2y_0 + 7x_0\right) = 0$,

$7x - 2y + C = 0$, де $C = 2y_0 - 7x_0 \in \mathbb{R}$.

Скориставшись теоремою 3.3.2 для знаходження коефіцієнта C, отримуємо рівняння:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \\ -7 & 2 & C \end{vmatrix} = 0 \text{, тобто } C = -\frac{2}{13}.$$

Отже, рівняння прямої має вигляд $7x - 2y - \frac{2}{13} = 0$ або $91x - 26y - 2 = 0$.

3.3.10. *Дано дві прямі* $y = k_1 x + b_1$ *та* $y = k_2 x + b_2$. *Знайти геометричне місце середин відрізків, що відтинають дані прямі на прямих, паралельних осі ординат. Система координат афінна.*

Розв'язання. Нехай точка $M\left(x; y\right)$ – довільна точка заданого геометричного місця точок. Ордината y кожної такої точки $M\left(x; y\right)$ як точки, що є серединою відрізка, кінці якого мають ординати $y = k_1 x + b_1$ та $y = k_2 x + b_2$, обчислюється за формулою координат середини відрізка:

$$y = \frac{k_1 x + b_1 + k_2 x + b_2}{2} = \frac{k_1 + k_2}{2} x + \frac{b_1 + b_2}{2}.$$

Отже, рівняння шуканої лінії:

$$y = \frac{k_1 + k_2}{2} x + \frac{b_1 + b_2}{2},$$

тобто шуканим геометричним місцем точок є пряма, в якої кутовий коефіцієнт і відрізок, що відтинається на осі ординат, є середнім арифметичним кутових коефіцієнтів і відповідних відрізків заданих прямих.

Завдання для самостійної роботи

1. Встановити, які із заданих пар прямих будуть взаємно перпендикулярні:

1) $x - 2y + 3 = 0, \quad 2x + y - 5 = 0$;

2) $2x + 3y - 6 = 0, \quad 2x - 3y + 4 = 0$;

3) $3x + 7y + 4 = 0, \quad 7x - 3y + 2 = 0$;

4) $5x + 6y - 8 = 0, \quad 6x + 5y + 2 = 0$;

5) $x - y = 0, \quad x + y = 0$;

6) $x + 3 = 0, \quad y - 2 = 0$.

(Відповідь: 1), 3), 5), 6)).

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(7;4)$ перпендикулярно до прямої $3x - 2y + 4 = 0$.

(Відповідь: $2x + 3y - 26 = 0$).

3. Визначити кут між двома прямими:

1) $5x - y + 7 = 0$, $3x + 2y = 0$;

2) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$;

3) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$;

4) $3x + 2y - 1 = 0$, $5x - 2y + 3 = 0$.

(Відповідь: 1) $\varphi=\frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi=\frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi=0$ – прямі паралельні; 4) $\varphi=arctg\frac{16}{11}$).

4. На прямій $x+y-3=0$ знайти точку M так, щоб промені MA і MB, які виходять із цієї точки M і проходять через точки $A(-2;-1)$ і $B(1;3)$, утворювали з даною прямою рівні кути.

(Відповідь: $(\frac{2}{5};\frac{13}{5})$; $(\frac{4}{7};\frac{17}{7})$).

5. Через точку $(3;1)$ провести прямі, нахилені до прямої $2x+3y-1=0$ під кутом 45^0.

(Відповідь: $5x+y-16=0$; $x-5y+2=0$).

6. Через точку $(2;1)$ провести прямі, нахилені до прямої $2x+3y+4=0$ під кутом 45^0.

(Відповідь: $x-5y+3=0$; $5x+y-11=0$).

7. Точка $(-4;5)$ є вершиною квадрата, діагональ якого лежить на прямій $7x-y+8=0$. Скласти рівняння сторін та іншої діагоналі квадрата.

(Відповідь: рівняння сторін квадрата: $4x+3y+1=0$; $3x-4y+32=0$; $4x+3y-24=0$; $3x-4y+7=0$; рівняння діагоналі: $x+7y-31=0$).

8. Дано дві прямі $x+3y=0$ і $x-y+8=0$. Знайти третю пряму так, щоб друга з даних прямих була бісектрисою кута між першою та шуканою прямими.

(Відповідь: $3x+y+16=0$).

9. Дано вершина $B(-3;-1)$ рівнобедреного трикутника, вершина $C(2;1)$ в його основі і $\cos\varphi=\frac{3}{5}$ кута при вершині. Скласти рівняння сторін трикутника.

(Відповідь: $12x-y-23=0$; $26x-7y+71=0$; $2x-5y+1=0$, або $8x+9y-25=0$; $14x+23y+65=0$; $2x-5y+1=0$).

10. Визначити тангенси внутрішніх кутів трикутника, сторони якого задані рівняннями $x+2y=0$, $3x-y=0$, $x+y-1=0$.

(Відповідь: -7; 2; $\frac{1}{3}$).

11. Знайти косинус того кута між двома прямими $2x-7y+3=0$ та $x+5y=0$, в якому лежить дана точка $(3;1)$.

(Відповідь: $\cos\varphi=\frac{33}{\sqrt{53}\sqrt{26}}$).

12. В якому (гострому чи тупому) куті, утвореному прямими $2x-y+3=0$, $x-4y=0$, лежить точка $(2;-1)$.

(Відповідь: у тупому).

13. Визначити, який із кутів, гострий чи тупий, утворений двома прямими $3x-2y+5=0$ і $2x+y-3=0$, містить початок координат.

(Відповідь: гострий кут).

14. Визначити, який із кутів, гострий чи тупий, утворений двома прямими $3x-5y-4=0$ і $x+2y+3=0$, містить точку $M(2;-5)$.

(Відповідь: тупий кут).

15. Скласти рівняння бісектрис внутрішніх кутів трикутника, сторони якого задані рівняннями $3x-4y=0$, $4x-3y=0$, $5x+12y-10=0$.

(Відповідь: $x-y=0$; $7x-56y+25=0$; $77x+21y-50=0$).

16. Скласти рівняння бісектриси гострого кута між двома прямими $x-3y=0$, $3x-y+5=0$.(Відповідь: $4x-4y+5=0$).

17. Скласти рівняння бісектриси гострого кута, що утворений двома прямими $3x+4y-5=0$, $5x-12y+3=0$.

(Відповідь: $7x+56y-40=0$).

18. Скласти рівняння бісектриси тупого кута, утвореного двома прямими $x-3y+5=0$, $3x-y+15=0$.

(Відповідь: $x+y+5=0$).

19. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку перетину прямих $2x+y-3=0$, $7x-4y+2=0$. Система координат афінна.

(Відповідь: $5x-2y=0$).

20. Через точку перетину прямих $x+y-6=0$, $2x+y-13=0$ провести пряму, яка відтинає на осях координат рівні відрізки.

(Відповідь: $x+y-6=0$).

21. Через точку перетину прямих $3x-y=0$, $x+4y-2=0$ провести пряму, перпендикулярну до прямої $2x+7y=0$.

(Відповідь: $91x-26y-2=0$).

22. Через точку перетину прямих $3x-5y+2=0$, $5x-2y+4=0$ провести пряму, паралельну прямій $2x-y+4=0$. Система координат афінна.

(Відповідь: $38x-19y+30=0$).

23. Скласти рівняння прямих, що проходять через точку перетину прямих $x+y-4=0$, $2x+3y-9=0$ і нахилених до другої із даних прямих під кутом 45^0.

(Відповідь: $5x+y-16=0$; $x-5y+2=0$).

24. Через точку перетину прямих $2x+y=0$, $3x+7y-11=0$ провести пряму, яка утворює з прямою $x+4y=0$ кути, тангенси яких дорівнюють ± 2.

(Відповідь: $7x-6y+19=0$; $9x+2y+5=0$).

25. Скласти рівняння прямих, що віддалені від точки $(1;9)$ на віддаль 5 і нахилені до прямої $x-7y=0$ під кутом 45^0. Знайти вершини квадрата, утвореного цими прямими.

(Відповідь: $3x+4y-64=0$; $3x+4y-14=0$; $4x-3y-2=0$; $4x-3y+48=0$; $(0;16)$; $(8;10)$; $(2;2)$; $(-6;8)$).

26. Скласти рівняння прямих, що утворюють із віссю Oy кути, тангенси яких рівні ± 2 і які віддалені від початку координат на віддаль $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

(Відповідь: $x \pm 2y \pm 4 = 0$).

27. Дано рівняння бічних сторін рівнобедреного трикутника $7x - y + 4 = 0$, $x + y - 2 = 0$ і точка $(3;5)$ на його основі. Скласти рівняння основи.

(Відповідь: $3x + y - 14 = 0$).

28. Через точку $(1;1)$ провести прямі, що утворюють кут, тангенс якого рівний $\frac{2}{11}$ і які відтинають від прямої $x - y + 1 = 0$ відрізок довжиною $2\sqrt{2}$.

(Відповідь: $4x - 3y - 1 = 0$; $2x - y - 1 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$; $3x - 4y + 1 = 0$).

29. Дано дві суміжні вершини $A(-3;-1)$ і $B(2;2)$ паралелограма $ABCD$ і точка $Q(3;0)$ перетину його діагоналей. Скласти рівняння сторін цього паралелограма.

(Відповідь: $3x - 5y + 4 = 0$, $x + 7y - 16 = 0$, $3x - 5y - 22 = 0$, $x + 7y + 10 = 0$).

30. У паралелограмі $ABCD$ дано рівняння сторін AB: $3x + 4y - 12 = 0$ і AD: $5x - 12y - 6 = 0$ і точка $E(-2;\frac{13}{6})$ – середина сторони BC. Знайти рівняння інших сторін паралелограма. Система координат афінна.

(Відповідь: $9x + 12y + 20 = 0$; $5x - 12y + 36 = 0$).

31. Дано рівняння двох сторін прямокутника $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$ і рівняння його діагоналі $3x + 7y - 10 = 0$. Скласти рівняння решти сторін і другої діагоналі цього прямокутника.

(Відповідь: рівняння сторін прямокутника $2x-5y+3=0$, $2x-5y-26=0$; рівняння його діагоналі $7x-3y-33$).

32. Через точку $(15;6)$ провести пряму, що відтинає від прямих $5x-2y-5=0$, $2x+5y-2=0$ трикутник, площа якого рівна 29.

(Відповідь: $x-12y+57=0;\ 8x-9y-66=0$).

33. Скласти рівняння прямих, які паралельні прямій $x-3y=0$ і відтинають від двох прямих, що перетинаються $3x-2y-1=0$, $4x-5y+1=0$, трикутник, площа якого рівна $\frac{7}{2}$.

(Відповідь: $x-3y+9=0;\ x-3y-5=0$).

34. Дано рівняння медіан трикутника: $4x+y-6=0$, $2x+y-2=0$, $x-2=0$ і його площа $S=3$. Знайти вершини трикутника.

(Відповідь: $(2;-4);\ (1;2);\ (3;-4)$ або $(2;0);\ (3;-6);\ (1;0)$).

35. Точки $(-7;2)$ і $(3;0)$ є вершинами рівнобедреного трикутника, при яких кути трикутника рівні. Скласти рівняння сторін цього трикутника, знаючи, що площа його дорівнює 26.

(Відповідь: $2x-3y+20=0;$ $3x+2y-9=0;$ $x+5y-3=0$ або $2x-3y-6=0;$ $3x+2y+17=0;$ $x+5y-3=0$).

36. Знайти геометричне місце точок перетину діагоналей прямокутників, уписаних у трикутник так, що дві вершини прямокутника лежать на основі даного трикутника, а дві інші – на його бічних сторонах.

(Відповідь: Відрізок прямої, що з'єднує середину основи і середину висоти трикутника).

37. Знайти геометричне місце точок перетину діагоналей паралелограмів, уписаних у даний чотирикутник так, що сторони цих паралелограмів паралельні діагоналям чотирикутника.

(Відповідь: Пряма, яка з’єднує середини діагоналей).

38. Три вершини паралелограма, сторони якого залишаються паралельними даним напрямкам, ковзають по трьох даних прямих. Знайти геометричне місце точок четвертої вершини.

(Відповідь: пряма).

РОЗДІЛ 4
ПЛОЩИНА І ПРЯМА В ПРОСТОРІ
§4.1. Рівняння площини у координатному просторі
4.1.1. Різні види рівнянь площини

Площина π *називається колінеарною вектору* $\vec{a}$, *якщо* $\vec{a}=\vec{0}$ *або* $\vec{a}\in\pi$ $(\vec{a}\parallel\pi)$.

Зафіксуємо у просторі *загальну декартову систему координат* і складемо рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і колінеарна векторам $\vec{a}_1=(l_1;m_1;n_1)$ та $\vec{a}_2=(l_2;m_2;n_2)$, $\vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2$. Позначимо цю площину через α. Якщо $M(x;y;z)$ – довільна точка площини α, то вектори $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ компланарні. Тому в координатах

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.1.1)$$

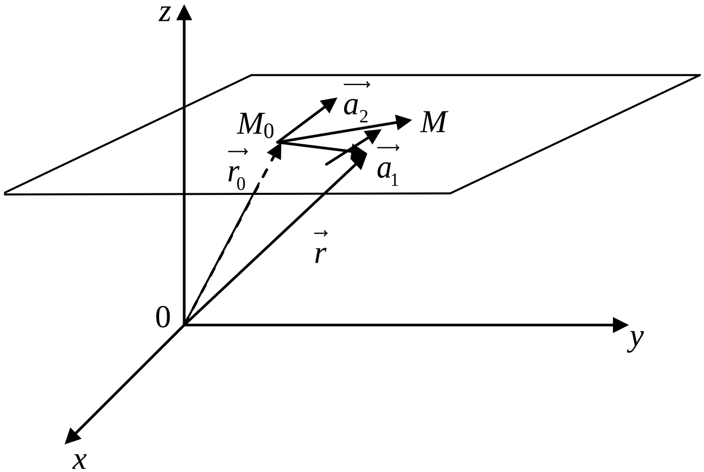
Рівняння (4.1.1) є рівнянням площини, яка проходить через задану точку і паралельна двом неколінеарним між собою векторам.

Зауваження. Якщо зафіксувати в просторі загальну декартову систему координат, то рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і колінеарна векторам $\vec{a}_1=(l_1;m_1;n_1)$ та $\vec{a}_2=(l_2;m_2;n_2)$, $\vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2$ можна записати у векторній формі. Справді, нехай $M(x;y;z)$ – довільна точка площини і $\vec{r}_0=\overrightarrow{OM_0}$, $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ – радіус – вектори точок M_0, M відповідно; тоді $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$. Отже, векторне рівняння площини α в загальній декартовій системі координат в просторі має вигляд:

$$\left(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)=0,$$

де $\left(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{a}_1,\vec{a}_2\right)$ — мішаний добуток компланарних векторів $\vec{r}-\vec{r}_0$, $\vec{a}_1$ та $\vec{a}_2$.

Зображення мішаного добутку в прямокутних декартових координатах відомо читачеві з розділу 2 даного посібника; це зображення збігається з формулою (4.1.1), у якій вектори $\vec{r}-\vec{r}_0$, $\vec{a}_1$ $\vec{a}_2$ задані своїми координатами в прямокутній декартовій системі координат.



При виведенні рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ колінеарно двом векторам $\vec{a}_1=\left(l_1;m_1;n_1\right)$ і $\vec{a}_2=\left(l_2;m_2;n_2\right)$, $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$, встановлено компланарність трьох векторів $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, де $M(x;y;z)$ – довільна точка площини. Оскільки $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$, то вектор $\overrightarrow{M_0M}$ лінійно виражається через вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$: $\overrightarrow{M_0M}=u\vec{a}_1+v\vec{a}_2$.

У координатах ця векторна рівність набуває вигляду:

$$x=x_0+ul_1+vl_2,$$

$$y=y_0+um_1+vm_2,$$

$$z=z_0+un_1+vn_2.$$

Ці рівняння *називаються координатно – параметричними рівняннями площини* в афінній системі координат в просторі.

Якщо $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ і $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ – радіус-вектори відповідно точок M і M_0 площини, то маємо

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + u\vec{a}_1 + v\vec{a}_2 ,$$

де $\{u, v\} \subset \mathbb{R}$ – параметри.

Це рівняння називається векторно – параметричним рівнянням площини.

Розкривши визначник у рівності (4.1.1) за елементами його першого рядка, матимемо

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (4.1.2)$$

де

$$A = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix},$$

$$D = -x_0 \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} - y_0 \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} - z_0 \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}.$$

Оскільки вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ не колінеарні, то хоча б один із визначників A, B, C відмінний від нуля.

Рівняння (4.1.2) називається *загальним рівнянням площини.*

Правильним є також наступне *твердження: у фіксованій загальній декартовій системі координат рівняння*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \ |A| + |B| + |C| \neq 0, \qquad (4.1.3)$$

є рівнянням площини.

Справді, нехай $(x_0; y_0; z_0)$ – деякий розв'язок рівняння (4.1.3), тобто

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (4.1.4)$$

Віднявши від рівняння (4.1.3) тотожність (4.1.4) одержимо рівняння, еквівалентне (4.1.3):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4.1.5)$$

Якщо вважати, наприклад, що $A \neq 0$, то останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.1.6)$$

(переконайтесь у цьому, розкривши визначник за елементами його першого рядка). Співставивши (4.1.6) з (4.1.1) робимо висновок, що (4.1.6) – рівняння площини, яка походить через точку $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ колінеарно векторам $\vec{a}_1 = \left(-B; A; 0\right)$ та $\vec{a}_2 = \left(-C; 0; A\right)$. Із умови $A \neq 0$ випливає, що $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ (визначник $\begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix} \neq 0$).

Зауваження. Зафіксуємо в просторі прямокутну декартову систему координат. Якщо точка $M(x; y; z) \in \alpha$, то площина α колінеарна вектору $\overrightarrow{M_0M} = \left(x-x_0; y-y_0; z-z_0\right)$. Тоді з (4.1.5) випливає, що вектор $\vec{n} = \left(A; B; C\right)$ ортогональний до площини α. Вектор $\vec{n}$ називається *нормальними* або *головним вектором площини* α. Співвідношення (4.1.5) можна також розуміти як рівняння площини, яка проходить через точку $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}$ (оскільки хоча б одна із сталих A, B, C відмінна від нуля, то вектор $\vec{n}$ ненульовий).

В загальній декартовій системі координат вектор $\vec{n} = \left(A; B; C\right)$ може й не бути перпендикулярним до площини, заданої рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$. Але, легко переконатись, що площина $Ax + By + Cz + D = 0$ не колінеарна вектору $\vec{n} = \left(A; B; C\right)$. Для доведення цього твердження використовують наступну умову колінеарності площини вектору.

Теорема 4.1.1. *Нехай відносно загальної декартової системи координат в просторі задано вектор* $\vec{a}=(l;m;n)$ *і площина своїм загальним рівнянням* $Ax+By+Cz+D=0$.

Тоді необхідна і достатня умова колінеарності даної площини вектору $\vec{a}$ *є такою*

$$Al+Bm+Cn=0.$$

Пропонуємо читачеві самостійно довести теорему 4.1.1.

Очевидними є твердження наступних двох терем.

Теорема 4.1.2. *Якщо площині належать точки* $M_1(x_1;y_1;z_1)$ *і* $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *і вона колінеарна такому вектору* $\vec{a}=(l;m;n)$, *що* $\overrightarrow{M_1M_2}\nparallel\vec{a}$ *, то ця площина має рівняння*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0. \qquad (4.1.7)$$

Рівняння (4.1.7) називається *рівнянням площини, яка проходить через дві задані точки і колінеарна заданому вектору.*

Теорема 4.1.3. *Нехай* $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$ *і* $M_3(x_3;y_3;z_3)$ *– точки, які не лежать на одній прямій (*$\overrightarrow{M_1M_2}\nparallel\overrightarrow{M_1M_3}$*). Рівняння площини* $(M_1M_2M_3)$ *має вигляд*

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (4.1.8)$$

Рівняння (4.1.8) називається *рівнянням площини, яка проходить через три задані точки, які не лежать на одній прямій.*

4.1.2. Неповні рівняння площини

Розглянемо часткові випадки розташування площини відносно заданої в просторі афінної системи координат.

Теорема 4.1.4. *Площина, яка паралельна координатній вісі* Ox*, має рівняння*

$$By + Cz + D = 0,$$

за умови, що $D \neq 0$ *і* $|B| + |C| > 0$.

Площина, яка паралельна координатній вісі Oy*, має рівняння*

$$Ax + Cz + D = 0,$$

за умови, що $D \neq 0$ *і* $|A| + |C| > 0$.

Площина, яка паралельна координатній вісі Oz*, має рівняння*

$$Ax + By + D = 0,$$

за умови, що $D \neq 0$ *і* $|A| + |B| > 0$.

Площина, яка містить початок координат, має рівняння

$$Ax + By + Cz = 0,$$

за умови, що $|A| + |B| + |C| > 0$.

Площина, яка паралельна координатній площині xOy*, має рівняння*

$$Cz + D = 0,$$

за умови, що $C \neq 0$, $D \neq 0$.

Площина, яка паралельна координатній площині xOz*, має рівняння*

$$By + D = 0,$$

за умови, що $B \neq 0$, $D \neq 0$.

Площина, яка паралельна координатній площині yOz*, має рівняння*

$$Ax + D = 0,$$

за умови, що $A \neq 0$, $D \neq 0$.

Площина, яка містить вісь Ox*, має рівняння*

$$By + Cz = 0,$$

за умови, що $|B| + |C| > 0$.

Площина, яка містить вісь Oy*, має рівняння*

$$Ax + Cz = 0,$$

за умови, що $|A| + |C| > 0$.

Площина, яка містить вісь Oz*, має рівняння*

$$Ax + By = 0,$$

за умови, що $|A| + |B| > 0$.

Координатні площини xOy, xOz, yOz *відповідно мають рівняння*

$$z = 0,\ y = 0 \text{ і } x = 0.$$

Доведення. Зауважимо спочатку очевидність твердження про те, що площина, яка містить початок координат, має рівняння $Ax + By + Cz = 0$, де $|A| + |B| + |C| > 0$. Для цього досить скористатись рівнянням (4.1.3) та тим, що йому задовольняють координати точки $O(0;0;0)$.

Доведемо далі, наприклад, що площина α, яка паралельна координатній вісі Ox, має рівняння $By + Cz + D = 0$ при $D \neq 0$ і $|B| + |C| > 0$. Дана площина колінеарна вектору $\vec{i} = (1;0;0)$, а, отже, її рівняння згідно (4.1.1) є таким:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладемо визначник, записаний в правій частині останнього співвідношення, за елементами його останнього рядка: $\begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$, тобто $n_1(y - y_0) - m_1(z - z_0) = 0$.

Позначивши $B = n_1$, $C = -m_1$ та $D = -y_0 n_1 + z_0 m_1$, отримаємо шукане рівняння $By + Cz + D = 0$, де $|B| + |C| > 0$ (див. (4.1.3)). Крім того, оскільки точка $O \notin \alpha$, то $D \neq 0$.

Інші твердження теореми 4.1.4 доводяться аналогічно .

Рівняння площини, що описуються в теоремі 4.1.4 називаються *неповними рівняннями площини*.

Якщо у рівнянні площини $Ax+By+Cz+D=0$ відомо, що $A\neq 0$, $B\neq 0$, $C\neq 0$, $D\neq 0$, то записавши його у вигляді $\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1$, дістанемо рівняння площини *«у відрізках»*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

де $a=-\frac{D}{A}$, $b=-\frac{D}{B}$, $c=-\frac{D}{C}$ – величини відрізків OM_1, OM_2 і OM_3, які відтинає площина на координатних осях $(M_1(a;0;0), M_2(0;b;0), M_3(0;0;c))$.

Приклади розв'язування задач

4.1.1. *Знайти орт нормального вектора до площини* $2x+2y-z+1=0$ *і косинуси кутів, утворених цим ортом з додатними напрями осей координат. Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Нормальний вектор даної площини $\vec{n}=\left(2;2;-1\right)$, а його орт $\vec{n}_0=\frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n}=\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$. Координати вектора $\vec{n}_0$ є його напрямними косинусами, тобто косинусами кутів α,β,γ, утворених цим ортом з додатними напрямами осей координат, тобто з векторами $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ відповідно: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=-\frac{1}{3}$.

4.1.2. *Скласти рівняння площини, яка відтинає на осях* Ox *і* Oy *відрізки, величини яких рівні 5 і –7 відповідно, та проходить через точку* $A(1;1;2)$. *Система координат афінна.*

Розв'язання. Використаємо рівняння площини у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, де $a=5$, $b=-7$. Маємо $\frac{x}{5}+\frac{y}{-7}+\frac{z}{c}=1$. Оскільки точка $A(1;1;2)$ має належати шуканій площині, то $\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{2}{c}=1$, $c=\frac{70}{33}$.

Рівняння шуканої площини $\frac{x}{5}-\frac{y}{7}+\frac{33\cdot z}{70}=1$, або, після спрощення, $14x-10y+33z-70=0$.

4.1.3. *Скласти рівняння площини* α*, що проходить через вісь* Oy *і рівновіддалена від точок* $A(2;7;3)$ *та* $B(-1;1;0)$. *Система координат афінна.*

Розв'язання. 1-й спосіб. Оскільки площина проходить через вісь Oy, то їй належить будь – яка точка цієї осі, наприклад, початок координат $O(0;0;0)$ і α компланарна напрямному вектору цієї осі $\vec{e}_2=(0;1;0)$. Крім того, оскільки точки A та B однаково віддалені від площини α, то можливі два випадки:

а) якщо точки A та B розташовані по один бік від площини, то пряма AB паралельна шуканій площині α, тобто α колінеарна вектору $\overrightarrow{AB}=(-3;-6;-3)$. Скористаємось рівнянням (1.1) площини, яка проходить через задану точку і паралельна двом неколінеарним між собою векторам:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -3 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Розкривши визначник в лівій частині останньої рівності за елементами третього рядка, отримаємо рівняння площини α: $x-z=0$.

б) якщо точки A та B розташовані по різні боки від площини, то шукана площина α проходить через середину відрізка AB, тобто через точку $M\left(\frac{1}{2};4;\frac{3}{2}\right)$. Скористаємось рівнянням (4.1.7) площини, яка проходить через дві задані точки O та M і колінеарна заданому вектору $\vec{e}_2=\left(0;1;0\right)$:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ \frac{1}{2}-0 & 4-0 & \frac{3}{2}-0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Розкривши визначник в лівій частині останньої рівності за елементами третього рядка, отримаємо рівняння площини α: $3x-z=0$.

2-й спосіб. В обох випадках а) та б) скористаємось тим, що оскільки шукана площина проходить через вісь Oy, то її рівняння є неповним. Площина, яка містить вісь Oy, має рівняння $Ax+Cz=0$, за умови, що $\left|A\right|+\left|C\right|>0$.

а) Оскільки площина α колінеарна вектору $\overrightarrow{AB}=\left(-3;-6;-3\right)$, а необхідна і достатня умова колінеарності площини $Ax+By+Cz+D=0$ вектору $\vec{a}=\left(l;m;n\right)$ має вигляд $Al+Bm+Cn=0$, то $-3A-3C=0$. Тоді $C=-A$ і рівняння площини α набуває вигляду $Cx-Cz=0$, де $C\neq 0$, тобто $x-z=0$.

б) Рівняння площини α шукаємо так само у вигляді $Ax+Cz=0$. Скористаємось тим, що точка $M\left(\frac{1}{2};4;\frac{3}{2}\right)$ належить площині α, тобто координати цієї точки задовольняють рівняння $Ax+Cz=0$: $\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}C=0$. Отже, $A=-3C$. Рівняння площини α у даному випадку є таким: $-3Cx+Cz=0$, де $C\neq 0$, тобто $3x-z=0$.

4.1.4. *Визначити об'єм піраміди, обмеженої координатними площинами і площиною* $2x-3y+6z-12=0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Піраміда, що обмежена координатними площинами і площиною $2x-3y+6z-12=0$ є трикутною пірамідою, у якої три суміжні грані є прямокутними трикутниками. Отже, її об'єм обчислюємо за формулою $V=\frac{1}{6}|a||b||c|$, де a,b,c – величини відрізків, що відтинає площина $2x-3y+6z-12=0$ на координатних осях Ox, Oy та Oz відповідно. Для знаходження значень a,b,c рівняння цієї площини зведемо до вигляду «у відрізках» $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Маємо: $2x-3y+6z=12$. Звідси $\frac{2x}{12}-\frac{3y}{12}+\frac{6z}{12}=1$, тобто $\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}+\frac{z}{2}=1$. Таким чином, $a=6$, $b=-4$, $c=2$ і, відповідно $|a|=6$, $|b|=4$, $|c|=2$. Об'єм тетраедра: $V=\frac{1}{6}|a||b||c|=\frac{1}{6}\cdot 6\cdot 4\cdot 2=8$ кубічних одиниць.

Завдання для самостійної роботи

1. Точка $P(2;-1;-1)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

(Відповідь: $2x-y-z-6=0$).

2. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $(3;4;-5)$ колінеарно двом векторам $(3;1;-1)$ і $(1;-2;1)$.

(Відповідь: $x+4y+7z+16=0$).

3. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $(3;7;2)$ колінеарно двом векторам $(4;1;2)$ і $(5;3;1)$.

(Відповідь: $5x-6y-7z+41=0$).

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $A(2;-1;3)$ та $B(3;1;2)$ колінеарно вектору $(3;-1;4)$.

(Відповідь: $x-y-z=0$).

5. Скласти рівняння площини, що проходить через вісь Oy і точку $(2;-5;1)$.

(Відповідь: $x-2z=0$).

6. Скласти рівняння площини, що проходить через дві точки $(7;2;-3)$ та $(5;6;-4)$ і паралельна осі Ox.

(Відповідь: $y+4z+10=0$).

7. Скласти рівняння площини, що проходить через дві точки $(2;-1;1)$ та $(3;1;2)$ і паралельна осі Oy.

(Відповідь: $x-z-1=0$).

8. Скласти рівняння площини, що проходить через дві точки $(1;7;8)$ та $(2;-6;-6)$ і паралельна осі Oz.

(Відповідь: $13x+y-20=0$).

9. Скласти рівняння площини, що проходить:

1) через точку $M_1(2;-3;3)$ паралельно площині xOy;

2) через точку $M_2(1;-2;4)$ паралельно площині xOz;

3) через точку $M_3(-5;2;-1)$ паралельно площині yOz.

(Відповідь: 1) $z-3=0$; 2) $y+2=0$; 3) $x+5=0$).

10. Написати рівняння площин, що проходять через осі координат колінеарно вектору $(3;-5;1)$.

(Відповідь: $5x+3y=0$, $x-3z=0$, $y+5z=0$).

11. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки:

а) $M_1(2;3;1), M_1(3;1;4), M_1(2;1;5)$;

б) $M_1(2;0;-1), M_1(-2;4;1), M_1(0;2;-1)$.

(Відповідь: а) $x+2y+z-9=0$; б) $x+y-2=0$).

12. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат і через точки $M_1(2;1;1)$, $M_2(-3;0;4)$.

(Відповідь: $4x-11y+3z=0$).

13. Скласти параметричні рівняння площини, що проходить через точку $(2;3;-5)$ і колінеарна векторам $(-5;6;4)$ та $(4;-2;0)$.

(Відповідь: $x=2-5u+4v$, $y=3+6u-2v$, $z=-5+4u$).

14. Написати загальне рівняння площини за її параметричними рівняннями в кожному з наступних випадків:

1) $x=2+3u-4v$, $y=4-v$, $z=2+3u$;

2) $x=u+v$, $y=u-v$, $z=5+6u-4v$.

(Відповідь: 1) $x-4y-z+16=0$; 2) $x+5y-z+5=0$).

15. Дано вершини тетраедра $A(2;1;0)$, $B(1;3;5)$, $C(6;3;4)$, $D(0;-7;8)$. Написати рівняння площини, що проходить через ребро AB і через середину ребра CD.

(Відповідь: $27x+11y+z-65=0$).

16. Дано вершини тетраедра $A(5;1;3)$, $B(1;6;2)$, $C(5;0;4)$, $D(4;0;6)$. Написати рівняння площини, що проходить через ребро AB паралельно до ребра CD.

(Відповідь: $10x+9y+5z-74=0$).

17. Дано вершини тетраедра $A(3;5;-1)$, $B(7;5;3)$, $C(9;-1;5)$, $D(5;3;-3)$. Написати рівняння площин, що рівновіддалені від усіх вершин тетраедра.

(Відповідь: сім площин $x-z-6=0$, $x+y-10=0$, $x+2y-z-8=0$, $2x+y-z-14=0$, $x-y-z-2=0$, $2x+y+z-16=0$, $5x+y-2z-28=0$).

18. Дано рівняння трьох граней паралелепіпеда $2x+3y+4z-12=0$, $x+3y-6=0$, $z+5=0$, і одна з його вершин $(6;-5;1)$. Скласти рівняння трьох інших граней паралелепіпеда.

(Відповідь: $2x+3y+4z-1=0$, $x+3y+9=0$, $z-1=0$).

19. Визначити відрізки, що відтинає площина $x-y+7z-4=0$ на осях координат.

(Відповідь: $a=4, b=-4, c=\frac{4}{7}$).

20. Визначити відрізки, що відтинає площина $3x-4y-24z+12=0$ на осях координат.

(Відповідь: $a=-4, b=3, c=\frac{1}{2}$).

21. Обчислити площу трикутника, що відтинає площина $5x-6y+3z+120=0$ від координатного кута xOy.

(Відповідь: $S=240$ кв. од.).

22. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $(3;5;-7)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки.

(Відповідь: $x+y+z-1=0$).

23. Визначити об’єм тетраедра, обмеженого координатними площинами і площиною $2x+3y+6z-18=0$.

(Відповідь: $V=27$ куб. од.).

24. Написати рівняння площини, що проходить через дві точки $A(3;5;1)$ і $B(7;7;8)$ та відтинає на осях координат Ox і Oy рівні відрізки.

(Відповідь: $7x+7y-6z-50=0$).

25. Написати рівняння площини, що проходить через дві точки $A(-1;4;-1)$ і $B(-13;2;-10)$ та відтинає на осях координат Ox і Oz ненульові відрізки рівної довжини.

(Відповідь: $2x-21y+2z+88=0$, $2x-3y-2z+12=0$).

26. Написати рівняння площин, що проходять через точку $M(4;3;2)$ і відтинають на осях координат відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

(Відповідь: $x+y+z-9=0$, $x-y-z+1=0$, $x-y+z-3=0$, $x+y-z-5=0$).

27. Написати рівняння площини, що відтинає на осі Oz відрізок $c=-5$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(-2;1;3)$.

(Відповідь: $2x-y-3z-15=0$).

28. Написати рівняння площини, що колінеарна вектору $\vec{l}=(2;1;-1)$ і відтинає на осях Ox та Oy відрізки $a=3$, $b=-2$.

(Відповідь: $2x-3y+z-6=0$).

29. Написати рівняння площини, яка перпендикулярна до площини $2x-2y+4z-5=0$ і відтинає на координатних осях Ox та Oy відрізки $a=-2$, $b=\dfrac{2}{3}$.

(Відповідь: $x-3y-2z+2=0$).

§4.2. Задача про взаємне розміщення площин в просторі

4.2.1. Взаємне розміщення двох площин

Знайдемо умови взаємного розміщення двох площин, заданих відносно загальної декартової системи координат в просторі рівняннями

$$\alpha: \qquad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\beta: \qquad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Якщо головні вектори $\vec{n}_1=\left(A_1;B_1;C_1\right)$ і $\vec{n}_2=\left(A_2;B_2;C_2\right)$ площин α і β колінеарні, тобто $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, але $\frac{D_1}{D_2}\neq\frac{A_1}{A_2}$, то площини паралельні. Справді, за вказаних умов система рівнянь площин α і β несумісна, то ж площини паралельні, бо не мають спільних точок.

Якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$, то площини α і β збігаються.

Якщо $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ або $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, або ж $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, то площини перетинаються.

Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{4.2.1}$$

за умови $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ або $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, або ж $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ задає пряму перетину двох площин простору.

4.2.2. Взаємне розміщення трьох площин

Сукупність всіх паралельних між собою площин утворює *невласний жмуток площин*. Сукупність всіх площин, які перетинаються по спільній прямій, утворює *власний жмуток*. Жмуток площин визначається двома різними (базовими) площинами, які йому належать. Якщо базові площини мають рівняння $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то довільна площина жмутка має рівняння

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

$$|\lambda|+|\mu|\neq 0. \qquad (4.2.2)$$

Рівняння (4.2.2) називається *рівнянням жмутка площин*.

Сукупність всіх площин, які паралельні фіксованій прямій простору і тих, що проходять через цю пряму, називається *невласною в'язкою площин*. Сукупність всіх площин, які мають одну спільну точку (*центр в'язки*), називається *власною в'язкою площин*.

Теорема 4.2.1. *Нехай три різні площини* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ *не належать одному жмутку. Для того, щоб площина* $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$ *належала в'язці, що визначається трьома заданими площинами, необхідно і досить, щоб ліва частина рівняння* $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$ *була лінійною комбінацією лівих частин трьох заданих рівнянь:*

$$A_4x+B_4y+C_4z+D_4=\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+$$

$$+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3z+D_3),$$

$$\{\alpha,\beta,\gamma\}\subset\mathbb{R},\ |\alpha|+|\beta|+|\gamma|\neq 0$$

(тотожно при всіх значеннях x, y, z*).*

Отже, рівняння будь–якої площини в'язки, що містить задані три площини, має вигляд

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+$$

$$+\gamma(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0, \qquad (4.2.3)$$

$$|\alpha|+|\beta|+|\gamma|\neq 0.$$

Рівняння (4.2.3) називається *рівнянням в'язки площин*.

Доведення. Доведення необхідності. Дано: площина $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$ входить у в'язку , що визначається площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,

$A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$. Доведемо, що існують такі числа $\{\alpha,\beta,\gamma\}\subset\mathbb{R}$, при яких співвідношення (4.2.3) перетворюється в тотожність.

Оскільки задані три площини не належать одному жмутку, то ранг матриці

$$M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} \tag{4.2.4}$$

дорівнює, очевидно, трьом. Оскільки площина $A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0$ входить до в’язки, що визначається трьома заданими площинами, то

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0. \tag{4.2.5}$$

Дійсно, у випадку належності чотирьох площин одній власній в’язці, існує точка $(x_0;y_0;z_0)$ (центр в’язки), координати якої задовольняють рівняння кожної з чотирьох площин:

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0,\qquad A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0,$$
$$A_3x_0+B_3y_0+C_3z_0+D_3=0,\ A_4x_0+B_4y_0+C_4z_0+D_4=0.$$

Отже, стовпці визначника Δ є лінійно залежними.

Якщо ж чотири площини належать невласній в’язці, то існує ненульовий вектор $(l;m;n)$, колінеарний всім заданим площинам:

$$A_1l+B_1m+C_1n=0,\ A_2l+B_2m+C_2n=0,$$
$$A_3l+B_3m+C_3n=0,\ A_4l+B_4m+C_4n=0.$$

Отже, лінійно залежними є перші три стовпці визначника Δ.

Із (4.2.4) та (4.2.5) випливає, що четвертий рядок визначника Δ є лінійною комбінацією перших трьох його рядків:

$$\begin{aligned} A_4 &= \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3, \\ B_4 &= \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3, \\ C_4 &= \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3, \\ D_4 &= \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma D_3. \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Отже, існують такі числа $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{R}$, $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0$, при яких співвідношення (4.2.3) перетворюється в тотожність.

Доведення достатності. Дано: існують такі числа $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset \mathbb{R}$, при яких співвідношення (4.2.3) перетворюється в тотожність. Доведемо, що площина $A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0$ входить у в'язку, що визначається площинами

$$\begin{aligned} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0, \\ A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 &= 0. \end{aligned}$$

Оскільки співвідношення (4.2.3) є тотожністю відносно x, y, z, то з (4.2.3) випливають рівності (4.2.6), тобто $\Delta = 0$. Тоді задані чотири площини належать одній в'язці. Доведемо це.

Якщо ранг матриці

$$N = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{pmatrix}$$

дорівнює трьом, то серед заданих чотирьох площин є три такі, що мають єдину спільну точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Нехай, наприклад,

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

тоді це будуть три перші площини.

Перші три рядки матриці

$$S = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{pmatrix}$$

лінійно незалежні. Оскільки $\Delta = 0$, то останній рядок є лінійною комбінацією перших трьох

$$A_4 = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3,$$
$$B_4 = \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3,$$
$$C_4 = \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3,$$
$$D_4 = \alpha D_1 + \beta D_2 + \gamma D_3;$$

звідки випливає тотожність при всіх x, y, z:

$$A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = \alpha(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1) +$$
$$+\beta(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2) + \gamma(A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3) = 0.$$

Із цієї тотожності випливає, що точка $M_0\left(x_0; y_0; z_0\right)$, яка є перетином перших трьох площин, належить і четвертій площині, тобто дані чотири площини належать одній власній в'язці.

Якщо $rg\, N < 3$ (а, отже, $\Delta = 0$), то серед головних векторів $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, $\vec{n}_3$, $\vec{n}_4$ даних площин є не більше двох лінійно незалежних.

Нехай $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ лінійно незалежні, отже, неколінеарні, а вектори $\vec{n}_3$ і $\vec{n}_4$ – їх лінійні комбінації:

$$\vec{n}_3 = \lambda \vec{n}_1 + \mu \vec{n}_2,\ \vec{n}_4 = \lambda' \vec{n}_1 + \mu' \vec{n}_2, \qquad (4.2.7)$$
$$\{\lambda, \mu\} \subset \mathbb{R},\ \{\lambda', \mu'\} \subset \mathbb{R}.$$

Система рівнянь

$$\begin{cases} A_1 l + B_1 m + C_1 n = 0, \\ A_2 l + B_2 m + C_2 n = 0 \end{cases}$$

має ненульовий розв'язок (наприклад, $l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $m = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$). Із співвідношень (4.2.7) маємо: $A_3 l + B_3 m + C_3 n = 0$, $A_4 l + B_4 m + C_4 n = 0$, тобто дані чотири площини належать одній невласній в'язці, бо ненульовий вектор $(l; m; n)$ колінеарний до кожної з цих площин.

Якщо $rg\, N = 1$, то чотири задані площини колінеарні, а отже теж належать одні в'язці. Теорема доведена.

Зауваження. Із доведення, проведеного вище, випливає: для того, щоб чотири площини, задані в афінній системі координат в просторі рівняннями $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$, $A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$, $A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 = 0$, належали одній в'язці (власній або невласній), необхідно і досить, щоб

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклади розв'язування задач

4.2.1. *Скласти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин* $x + 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$ *і відтинає на осях* Ox *і* Oy *рівні відрізки. Система координат афінна.*

Розв'язання. Дані дві площини і шукана належать одному власному жмутку площин і тому рівняння $\alpha(x+2y+3z-4)+\beta(3x+z-5)=0$, $\{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{R}$, $|\alpha|+|\beta|\neq 0$ визначає і шукану площину, яка відтинає на осі Oy $(x=z=0)$ відрізок $\dfrac{4\alpha+5\beta}{2\alpha}$, а на осі Ox відрізок $\dfrac{4\alpha+5\beta}{\alpha+3\beta}$, із рівності яких $\dfrac{4\alpha+5\beta}{2\alpha}=\dfrac{4\alpha+5\beta}{\alpha+3\beta}$ отримаємо $3\beta=\alpha$. Отже, $3\beta(x+2y+3z-4)+\beta(3x+z-5)=0, \beta\neq 0$, або

$$6x+6y+10z-17=0.$$

Останнє рівняння є рівнянням шуканої площини.

4.2.2. *Скласти рівняння площини, що проходить через лінію перетину площин* $2x-z=0$, $x+y-z+5=0$ *перпендикулярно до площини* $7x-y+4z-3=0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Дані дві площини і шукана площина π належать одному власному жмутку площин і тому рівняння $\alpha(2x-z)+\beta(x+y-z+5)=0$, $\{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{R}$, $|\alpha|+|\beta|\neq 0$ визначає і шукану площину, головний вектор якої $\vec{n}=\left(2\alpha+\beta;\beta;-\alpha-\beta\right)$. Оскільки площини π і $7x-y+4z-3=0$ – перпендикулярні, то площина $7x-y+4z-3=0$ колінеарна вектору

$$\vec{n}=\left(2\alpha+\beta;\beta;-\alpha-\beta\right),$$

тобто

$$7\cdot\left(2\alpha+\beta\right)+\left(-1\right)\cdot\beta+4\cdot\left(-\alpha-\beta\right)=0.$$

З останнього співвідношення маємо: $\beta=-5\alpha$, де $\{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{R}$, $|\alpha|+|\beta|\neq 0$. Отже,

$$\alpha\cdot(2x-z)+\left(-5\alpha\right)\cdot(x+y-z+5)=0,\ \alpha\neq 0,$$

або

$$3x+5y-4z+25=0.$$

Останнє рівняння є рівнянням шуканої площини π.

4.2.3. *Дано рівняння граней тетраедра*

$$1)\ x+2y+z+2=0,\ 2)\ x+y-1=0,$$
$$3)\ x-y-z=0,\ 4)\ 3x+z+1=0.$$

Написати рівняння площини, яка проходить через ребро, що визначається двома першими гранями, і через середину ребра, що визначається двома останніми гранями. Система координат афінна.

Розв'язання. Шукана площина π, по-перше, належить власному жмутку, що визначається площинами 1) та 2), тобто її рівняння: $\alpha\left(x+2y+z+2\right)+\beta\left(x+y-1\right)=0$, $\left\{\alpha,\beta\right\}\subset\mathbb{R}$, $\left|\alpha\right|+\left|\beta\right|\neq 0$. По-друге, потрібно визначити дві вершини A та B тетраедра, що визначають ребро, через середину M якого проходитиме шукана площина. Це, очевидно, будуть точки перетину площин 1), 3), 4) (точка A) та 2), 3), 4) (точка B). Нагадаємо, що сукупність всіх площин, які мають одну спільну точку, називається власною в'язкою площин. Отже, потрібно знайти центри A та B в'язок площин 1), 3), 4) та 2), 3), 4) відповідно. Для знаходження координат точки A, розв'яжемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x+2y+z+2=0, \\ x-y-z=0, \\ 3x+z+1=0. \end{cases}$$

Маємо $A\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{1}{2}\right)$.

Аналогічно, координати точки B визначаємо із системи

$$\begin{cases} x+y-1=0, \\ x-y-z=0, \\ 3x+z+1=0, \end{cases}$$

тобто $B\left(0;1;-1\right)$.

Тоді середина ребра AB, тобто точка M, має координати: $M\left(-\frac{1}{4};0;-\frac{1}{4}\right)$.

Оскільки знайдена точка M належить площині π, то її координати задовольняють рівняння

$$\alpha(x+2y+z+2)+\beta(x+y-1)=0,\ \{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{R},\ |\alpha|+|\beta|\neq 0.$$

Таким чином: $\alpha\left(-\frac{1}{4}+0-\frac{1}{4}+2\right)+\beta\left(-\frac{1}{4}+0-1\right)=0$, тобто $\alpha=\frac{5}{6}\beta$.

Отже, $\frac{5}{6}\beta(x+2y+z+2)+\beta(x+y-1)=0$, $\beta\neq 0$, або $11x+16y+5z+4=0$.

Останнє рівняння є рівнянням шуканої площини π.

4.2.4. *Знайти необхідну і достатню умову того, щоб три площини, рівняння яких в афінній системі координат в просторі:*

$$(\alpha):\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$(\beta):\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$
$$(\gamma):\quad A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

1. *Мають одну спільну точку.*
2. *Проходять через одну пряму.*
3. *Попарно паралельні.*
4. *Утворюють «призму», тобто лінія перетину двох площин паралельна третій площині.*
5. *Задовольняють умову: дві площини паралельні, а третя їх перетинає.*

Розв'язання. 1. Для того, щоб три площини мали одну спільну точку, необхідно і досить, щоб існувала рівно одна точка, координати якої задовольняють рівняння трьох заданих площин, тобто сумісною і означеною має бути така система рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0. \end{cases} \tag{4.2.8}$$

З курсу алгебри відомо, що означеність системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими рівносильна умові

$$rg\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}=3.$$

2. Якщо три задані площини проходять через одну пряму (a), то система (4.2.8) має безліч розв'язків, що є координатами точок цієї прямої. Але пряма (a) може бути задана як перетин будь яких двох із трьох площин $(\alpha),(\beta),(\gamma)$ (див. п.4.2.1). Отже, для того, щоб три площини проходили через одну пряму необхідно і досить, щоб система рівнянь (4.2.8) була неозначеною і мала рівно два лінійно незалежні рівняння. Тоді, згідно з теоремою Кронекера – Капеллі:

$$rg\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}=rg\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}=2.$$

3. Необхідна і достатня умова паралельності площин (α) та (β) має вигляд: $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$ і $\dfrac{D_1}{D_2}\neq\dfrac{A_1}{A_2}$ (див. п.4.2.1). Аналогічно і для інших пар площин: (α) та (γ), (γ) та (β). Отже, система (4.2.8) – несумісна, при чому

$$rgM = rg\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 1,$$

$$rg\bar{M} = rg\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2,$$

бо в матриці $\bar{M}$ перші три стовпці попарно пропорційні, але не пропорційні з четвертим її стовпцем.

4. Якщо три площини попарно перетинаються, то система (4.2.8) несумісна, отже ранги матриць M та $\bar{M}$ не співпадають. При цьому задані три площини не належать одному жмутку, тобто ранг матриці

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

дорівнює трьом (див. п.4.2.2), а

$$rgM = rg\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = 2,$$

бо задані площин не паралельні ($rgM \neq 1$) і ранг матриці M не може бути рівний трьом (в силу несумісності системи рівнянь (4.2.8)). При цьому ранг кожної з матриць

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

дорівнює 2, бо площини попарно перетинаються.

5. Як і у попередньому випадку $rg\bar{M} = 3$, а $rgM = 2$, але ранг однієї із матриць

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

дорівнює одиниці, бо є дві взаємно паралельні площини.

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, які з наступних пар рівнянь задають паралельні площини:

1) $2x-3y+5z-7=0$, $2x-3y+5z+3=0$;

2) $4x+2y-4z+5=0$, $2x+y-2z-3=0$;

3) $x+3y+2z-1=0$, $2x+6y-4z+1=0$.

(Відповідь: 1),2) – паралельні).

2. Встановити, при яких значеннях l та m наступні пари рівнянь будуть визначати паралельні площини:

1) $2x+ly+3z-5=0$, $mx-6y-6z+2=0$;

2) $mx+3y-2z-1=0$, $2x-5y-lz=0$.

(Відповідь: 1) $l=3, m=-4$; 2) $l=-3\frac{1}{3}, m=-1\frac{1}{5}$).

3. Визначити взаємне розташування площин в кожному наступному випадку:

1) $2x-4y+5z-21=0$, $x-3z+18=0$, $6x+y+z-30=0$;

2) $x+2y-3z=0$, $3x+6y-9z+10=0, 2x+4y-6z-1=0$;

3) $3x-y+2z+1=0$, $7x+2y+z=0$, $15x+8y-z-2=0$;

4) $5x-2y+4=0$, $3x+z-5=0$, $8x-2y+z+7=0$;

5) $6x+2y+12z-3=0, 5y-7z-10=0, 3x+y+6z+12=0$.

(Відповідь: 1) Три площини перетинаються в точці $(3;5;7)$; 2) три площини попарно паралельні; 3) три площини проходять через одну пряму; 4) площини попарно перетинаються і лінія перетину кожних двох площин паралельна третій площині; 5) перша і третя площини паралельні, друга площина їх перетинає).

4. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат паралельно площині $5x-3y+2z-3=0$.

(Відповідь: $5x-3y+2z=0$).

5. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(3;-2;-7)$ паралельно площині $2x-3z+5=0$.

(Відповідь: $2x-3z-27=0$).

6. Через точку $(2;1;-3)$ провести площину паралельно площині $5x-2y+3z-4=0$.

(Відповідь: $5x-2y+3z+1=0$).

7. Через точку $(x_0;y_0;z_0)$ провести площину паралельно площині $Ax+By+Cz+D=0$.

(Відповідь: $A(x-x_0)+B(y-y)_0+C(z-z_0)=0$).

8. Довести, що три площини $x-2y+z-7=0$, $2x+y-z+2=0$, $x-3y+2z-11=0$ мають одну спільну точку, і обчислити її координати.

(Відповідь: $x=1$, $y=-2$, $z=2$).

9. Довести, що три площини $7x+4y+7z+1=0$, $2x-y-z+2=0$, $x+2y+3z-1=0$ проходять через одну пряму.

10. Довести, що три площини $2x-y+3z-5=0$, $2x+y+2z-1=0$, $4x+3y+z+2=0$ перетинаються по трьох різних паралельних прямих.

11. Визначити, при яких значеннях a та b площини $2x-y+3z-1=0$, $x+2y-z+b=0$, $x+ay-6z+10=0$: 1) мають одну спільну точку; 2) проходять через одну пряму; 3) перетинаються по трьох різних паралельних прямих.

(Відповідь: 1) $a\neq 7$; 2) $a=7, b=3$; 3) $a=7, b\neq 3$).

12. Написати рівняння площини, що проходить через початок координат і через лінію перетину площин $2x+5y-6z+4=0$, $3x+2z+6=0$.

(Відповідь: $6x+9y-22z=0$).

13. Написати рівняння площини, що проходить через точку $(-3;1;0)$ і через пряму $x+2y-z+4=0$, $3x-y+2z-1=0$.

(Відповідь: $20x+19y-5z+41=0$).

14. Через лінію перетину площин $6x-y+z=0$, $5x+3z-10=0$ провести площину, що паралельна осі Ox.

(Відповідь: $5y+13z-60=0$).

15. Скласти рівняння площини, що перпендикулярна до площини $x+3y+5z-10=0$ і проходить через лінію перетину даної площини з площиною xOy.

(Відповідь: $x+3y-2z-10=0$).

16. В жмутку, що визначається площинами $2x+y-3z+2=0$ та $5x+5y-4z+3=0$, знайти дві перпендикулярні одна до одної площини, одна з яких проходить через точку $(4;-3;1)$.

(Відповідь: $3x+4y-z+1=0$, $x-2y-5z+3=0$).

17. В жмутку, що визначається площинами $3x+y-2z-6=0$ та $x-2y+5z-1=0$, знайти площини, які перпендикулярні до даних площин.

(Відповідь: $41x-19y+52z-68=0$,
$33x+4y-5z-63=0$).

18. Довести, що три площини $x+2y-z-4=0$, $3x-2y+3z-6=0$, $4y-3z+3=0$ утворюють призму, і написати рівняння площини, що проходить через лінію перетину перших двох граней призми і паралельна її третій грані.

(Відповідь: $4y-3z-3=0$).

19. Дано три площини: $2x+3y-4z+5=0$, $2x-z+3=0$, $x+y-z=0$. Через лінію перетину двох перших площин провести площину так, щоб лінія її перетину з третьою площиною була перпендикулярна лінії перетину першої і другої площин.

(Відповідь: $24x+21y-33z+50=0$).

20. Дано рівняння граней тетраедра:

1) $x+2y-3z-6=0$, 2) $2y+5z-4=0$,

3) $3x+z+1=0$, 4) $x+2y=0$.

Написати рівняння площини, що проходить через ребро, яке визначається двома першими гранями, паралельно протилежному ребру тетраедра.

(Відповідь: $16x+50y-3z-132=0$).

21. Скласти рівняння площини, що проходить через точку перетину трьох площин $x-y=0$, $x+y-2z+1=0$, $2x+z-4=0$ і

1) містить вісь Oy;

2) паралельна площині xOz;

3) проходить через початок координат і точку $(2;1;7)$.

(Відповідь: 1) $10x-7z=0$; 2) $6y-7=0$; 3) $39x-29y-7z=0$).

22. Яка необхідна і достатня умова того, що чотири площини $A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1,2,3,4$, утворюють тетраедр?

(Відповідь: $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix} \neq 0$,

$\begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_4 & B_4 & C_4 \\ A_1 & B_1 & C_1 \end{vmatrix} \neq 0$).

§4.3. Геометричний зміст нерівностей $Ax+By+Cz+D<0$ та $Ax+By+Cz+D>0$. Задача про віддаль від точки до площини

4.3.1. Геометричний зміст нерівностей $Ax+By+Cz+D<0$ та $Ax+By+Cz+D>0$

Зафіксуємо в просторі загальну декартову систему координат.

Кожна площина, яка задається рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$, поділяє координатний простір на два півпростори. До одного півпростору відносяться точки координатного простору, які своїми координатами задовольняють нерівність $Ax+By+Cz+D<0$, а до іншого півпростору – точки, координати яких задовольняють нерівність $Ax+By+Cz+D>0$.

Означення. *Півпростір, для координат усіх точок якого* $Ax+By+Cz+D>0$*, називається додатним.*

Означення. *Півпростір, для координат усіх точок якого* $Ax+By+Cz+D<0$*, називається від'ємним.*

Крім того, якщо відкласти головний вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ площини $Ax+By+Cz+D=0$ від довільної точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ цієї площини $\overrightarrow{M_0P}=\vec{n}$, то кінець P цього вектора буде знаходитися в додатному півпросторі від даної площини.

Доведення сформульованих вище тверджень проводяться аналогічно до доведення відповідних тверджень у випадку прямої на площині.

4.3.2. Задача про віддаль від точки до площини

Зафіксуємо в просторі прямокутну декартову систему координат.

Знайдемо віддаль від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини α, заданої загальним рівнянням $Ax+By+Cz+D=0$.

Віддаль d від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини α збігається з $\left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|$, де $\vec{n}=(A;B;C)$ – нормальний вектор площини α, а $M_1(x_1;y_1;z_1)$ – деяка точка площини α і тому $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$. Але

$$\left|np_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\frac{\left|(\overrightarrow{M_1M_0},\vec{n})\right|}{|\vec{n}|}.$$

Отже,

$$d=\frac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=$$

$$=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

4.3.3. Нормоване рівняння площини

Зафіксуємо в просторі прямокутну декартову систему координат.

Означення. *Загальне рівняння площини* $Ax+By+Cz+D=0$ *називається нормованим, якщо її нормальний вектор одиничний.*

Якщо помножити обидві частини загального рівняння площини на нормуючий множник

$$M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

обравши у *M* такий знак, що $M\cdot D<0$, то отримаємо *нормоване рівняння площини*

$$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+z\cdot\cos\gamma-p=0,$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – напрямні косинуси нормального вектора площини, а *p* – віддаль від початку координат до площини.

Число $\delta^{M_0}:=x_0\cdot\cos\alpha+y_0\cdot\cos\beta+z_0\cdot\cos\gamma-p$ називається *відхиленням точки* $M_0(x_0;y_0;z_0)$ *від площини* α, заданої рівнянням $x \cdot \cos\alpha + y \cdot \cos\beta + z \cdot \cos\gamma - p = 0$. Очевидно, $d = \left|\delta^{M_0}\right|$.

Приклади розв'язування задач

4.3.1. *Скласти рівняння бісекторної площини того кута між двома площинами* $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, $x - z - 5 = 0$, *в якому лежить початок координат. Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Як відомо, точка $M(x; y; z)$ є точкою бісекторної площини кута між двома площинами тоді і тільки тоді, коли віддалі від цієї точки до кожної з площин рівні між собою. Скориставшись цією властивістю та формулою віддалі від точки до площини, отримаємо рівняння обох бісекторних площин двох заданих площин $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, $x - z - 5 = 0$. Отже,

$$\frac{|3x + 5y - 4z + 1|}{5\sqrt{2}} = \frac{|x - z - 5|}{\sqrt{2}}, \qquad (4.3.1)$$

або:

$$2x - 5y - z - 26 = 0 \ (\alpha),$$

$$8x + 5y - 9z - 24 = 0 \ (\beta).$$

За умовою задачі, потрібно вибрати ту із бісекторних площин α чи β, яка ділить навпіл двогранний кут між двома заданими площинами, в якому розташований початок координат $O(0;0;0)$. Зауважимо, що по відношенню до площини $3x + 5y - 4z + 1 = 0$ точка O розташована в додатному півпросторі, а по відношенню до площини $x - z - 5 = 0$ – у від'ємному. Отже, кожна точка шуканої бісекторної площини теж повинна володіти цією властивістю. Тому, розкриваючи знаки абсолютних величин у виразі (4.3.1), один із підмодульних виразів залишаємо без зміни, а в іншому знаки в кожному із доданків змінюємо на протилежні. Отримаємо:

$3x+5y-4z+1=-5\left(x-z-5\right)$, тобто $8x+5y-9z-24=0$. Шуканою бісекторної площиною є площина β.

4.3.2. *Дано три площини* $A_k x+B_k y+C_k z+D_k=0$, $k=1,2,3$. *Знайти віддаль від точки їх перетину до площини* $A_4 x+B_4 y+C_4 z+D_4=0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Координати x_0, y_0, z_0 точки M_0 перетину трьох заданих площин є розв'язком означеної системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z=-D_1, \\ A_2x+B_2y+C_2z=-D_2, \\ A_3x+B_3y+C_3z=-D_3. \end{cases}$$

Застосувавши формули Крамера, маємо:

$$x_0=\frac{\triangle_1}{\triangle}=\frac{-\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\triangle},$$

$$y_0=\frac{\triangle_2}{\triangle}=\frac{-\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\triangle},$$

$$z_0=\frac{\triangle_3}{\triangle}=\frac{-\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\triangle},$$

де $\triangle$ – головний визначник останньої системи, тобто

$$\triangle=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Згідно з формулою віддалі від точки до площини та правилом розкриття визначника за елементами його рядка, шукана віддаль:

$$d=\frac{\left|A_4x_0+B_4y_0+C_4z_0+D_4\right|}{\sqrt{A_4^{\ 2}+B_4^{\ 2}+C_4^{\ 2}}}=$$

$$=\frac{\left|A_4\cdot\triangle_1+B_4\cdot\triangle_2+C_4\cdot\triangle_3+D_4\cdot\triangle\right|}{\Delta\cdot\sqrt{A_4^{\ 2}+B_4^{\ 2}+C_4^{\ 2}}}=$$

$$=\operatorname{mod}\frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\cdot\sqrt{A_4^{\ 2}+B_4^{\ 2}+C_4^{\ 2}}}.$$

4.3.3. *Скласти рівняння площини, віддаленої від початку координат на віддаль* $\sqrt{29}$ *і перпендикулярної до прямої перетину площин* $2x-y+z=0$ *та* $6x-y+7z-4=0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Шукана площина α перпендикулярна до прямої перетину площин $2x-y+z=0$ та $6x-y+7z-4=0$, тобто паралельна нормальним векторам $\vec{n}_1=(2;-1;1)$ та $\vec{n}_2=(6;-1;7)$ даних площин. Отже, головний вектор площини α колінеарний вектору $\left[\vec{n}_1,\vec{n}_2\right]=(-6;-8;4)$. Маємо: $\vec{n}=(3\lambda;4\lambda;-2\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$.

Запишемо загальне рівняння площини α :

$$3\lambda\cdot x+4\lambda\cdot y+\left(-2\lambda\right)\cdot z+D=0, \qquad (4.3.2)$$

де $D\in\mathbb{R}$ – невідомий коефіцієнт цього рівняння. Нормуємо рівняння (4.3.2):

$$\pm\frac{3\lambda}{\sqrt{29\lambda^2}}\cdot x\pm\frac{4\lambda}{\sqrt{29\lambda^2}}\cdot y\pm\frac{-2\lambda}{\sqrt{29\lambda^2}}\cdot z\pm\frac{D}{\sqrt{29\lambda^2}}=0.$$

Нагадаємо, що в нормованому рівнянні площини модуль вільного члена співпадає з віддаллю від початку координат до цієї площини і за умовою задачі $\left|\frac{D}{\sqrt{29\lambda^2}}\right|=\sqrt{29}$, тобто $D=\pm 29\lambda$. Скористаємось отриманим співвідношенням, запишемо (4.3.2): $3\lambda\cdot x+4\lambda\cdot y+\left(-2\lambda\right)\cdot z\pm 29\lambda=0$, де $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\neq 0$. Отже, існує дві площини, що задовольняють умову задачі і їх рівняння такі:

$$3x+4y-2z\pm 29=0.$$

4.3.4. *Знайти центр і радіус кулі, вписаної в тетраедр, обмежений площинами координат і площиною* $11x-10y-2z-57=0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Центр даної кулі – точка $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ простору, віддалена на віддаль, що дорівнює її радіусу $R>0$ від чотирьох граней тетраедра, тобто від площини $11x-10y-2z-57=0$ та від координатних площин $x=0$, $y=0$, $z=0$. Тому координати x_0,y_0,z_0 цієї точки та радіус R кулі задовольняють співвідношення:

$$\frac{\left|11x_0-10y_0-2z_0-57\right|}{\sqrt{11^2+10^2+\left(-2\right)^2}}=\frac{\left|x_0\right|}{1}=\frac{\left|y_0\right|}{1}=\frac{\left|z_0\right|}{1}=R. \qquad (4.3.3)$$

Оскільки рівняння однієї із граней тетраедра, а саме $11x-10y-2z-57=0$, після приведення до вигляду «у відрізках» записується так: $\frac{x}{\frac{57}{11}}+\frac{y}{\frac{-57}{10}}+\frac{z}{\frac{-57}{2}}=1$, то абсциса x_0 точки M_0 приймає додатне значення, а ордината y_0 і апліката z_0 – від'ємні. Таким чином, точка M_0 розташована у восьмому октанті і, очевидно, $R<\frac{57}{11}$. Тоді з (4.3.3) маємо:

$$\begin{cases} \frac{|11x_0-10y_0-2z_0-57|}{15}=R, \\ x_0=R, \\ y_0=-R, \\ z_0=-R. \end{cases}$$

Врахувавши три останні рівняння цієї системи, її перше рівняння запишемо у вигляді:

$|11R-10\cdot(-R)-2\cdot(-R)-57|=15R$, або $|23R-57|=15R$.

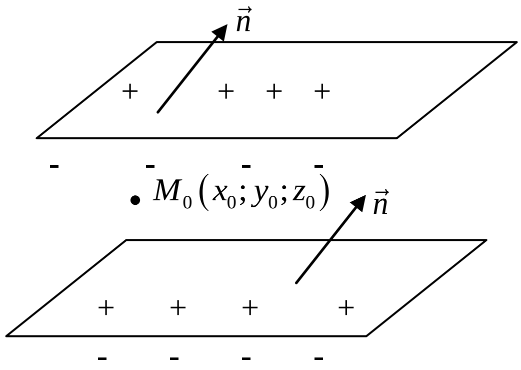
Оскільки $0<R<\frac{57}{11}$, то останнє рівняння рівносильне такому: $23R-57=-15R$. Отже, $R=\frac{57}{38}=\frac{3}{2}$ і центр кулі: $M_0\left(\frac{3}{2};-\frac{3}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

4.3.5. *Знайти необхідну і достатню умову того, що точка* $(x_0;y_0;z_0)$ *лежить між двома паралельними площинами:*

$$Ax+By+Cz+D=0,\ Ax+By+Cz+E=0,\ (D\neq E)$$

Система координат афінна.

Розв'язання. Оскільки головні вектори двох заданих паралельних площин мають рівні координати $\vec{n}=(A;B;C)$, то довільна точка, що розташована між даними площинами буде лежати в різнойменних півпросторах по відношенню до цих площин.



Отже, необхідна і достатня умова того, що точка $\left(x_0;y_0;z_0\right)$ лежить між двома паралельними площинами є такою:

$$\left(Ax_0+By_0+Cz_0+D\right)\left(Ax_0+By_0+Cz_0+E\right)<0\,.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Визначити, які з наступних рівнянь площин є нормованими:

1) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-5=0$; 2) $\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}z-3=0$;

3) $\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y+\frac{2}{7}z+5=0$; 4) $-\frac{6}{7}x+\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z-5=0$;

5) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}z-3=0$; 6) $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}z+1=0$;

7) $\frac{5}{13}y-\frac{12}{13}z-1=0$; 8) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+3=0$;

9) $x-1=0$; 10) $y+2=0$;

11) $-y-2=0$; 12) $z-5=0$.

(Відповідь: площини 1), 4), 5), 7), 9), 11) і 12) задані нормованими рівняннями).

2. Записати нормовані рівняння площин

1) $2x-2y+z-18=0$; 2) $\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z+3=0$;

3) $4x-6y-12z-11=0$; 4) $-4x-4y+2z+1=0$;

5) $5y-12z+26=0$; 6) $3x-4y-1=0$;

7) $y+2=0$; 8) $-x+5=0$; 9) $-z+3=0$; 10) $2z-1=0$.

(Відповідь:

1) $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{1}{3}z-6=0$; 2) $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-3=0$;

3) $\frac{2}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{6}{7}z-\frac{11}{14}=0$; 4) $\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}z-\frac{1}{6}=0$;

5) $-\frac{5}{13}y+\frac{12}{13}z-2=0$; 6) $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-\frac{1}{5}=0$;

7) $-y-2=0$; 8) $x-5=0$; 9) $z-3=0$; 10) $z-\frac{1}{2}=0$).

3. Записати нормовані рівняння площин

1) $2x-y+z-1=0$; 2) $x+y-2z+2=0$;

3) $x+2y-3z+3=0$.

(Відповідь: 1) $\frac{2}{\sqrt{6}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{1}{\sqrt{6}}z-\frac{1}{\sqrt{6}}=0$;

2) $-\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{1}{\sqrt{6}}y+\frac{2}{\sqrt{6}}z-\frac{2}{\sqrt{6}}=0$;

3) $-\frac{1}{\sqrt{6}}x-\frac{2}{\sqrt{6}}y+\frac{3}{\sqrt{6}}z-\frac{3}{\sqrt{6}}=0$).

4. Для кожної з наступних площин обчислити кути α, β, γ і віддаль p від початку координат (див. п.4.3.3):

1) $x+y\sqrt{2}+z-10=0$; 2) $x-y-z\sqrt{2}+16=0$;
3) $x+z-6=0$; 4) $y-z+2=0$.

(Відповідь: 1) $\alpha=60^0$, $\beta=45^0$, $\gamma=60^0$, $p=5$; 2) $\alpha=120^0$, $\beta=60^0$, $\gamma=45^0$, $p=8$;3) $\alpha=45^0$, $\beta=90^0$, $\gamma=45^0$, $p=3\sqrt{2}$; 4) $\alpha=90^0$, $\beta=135^0$, $\gamma=45^0$, $p=\sqrt{2}$.)

5. Знайти відхилення

1) точки $(1;-2;1)$ від площини $2x-y+2z-4=0$;

2) точки $(2;1;0)$ від площини $x+2y+2z+2=0$;

3) точки $(-3;1;-2)$ від площини $2x-3y-z+1=0$.

(Відповідь: 1) $\frac{2}{3}$; 2) 2;3)$-\frac{6}{\sqrt{14}}$).

6. Визначити віддалі від точок $A(3;5;1)$, $B(7;-1;2)$, $C(2;0;4)$ до площини $x+2y-2z+5=0$.

(Відповідь: 1) $\frac{16}{3}$; 2) 2; 3) $\frac{1}{3}$).

7. Обчислити віддаль d від точки $P(-1;1;-2)$ до площини, що проходить через три точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$ і $M_3(4;-5;-2)$. (Відповідь: $d=4$).

8. Визначити, розташована точка $Q(2;-1;1)$ і початок координат по один чи по різні боки відносно кожної з наступних площин:
1) $5x-3y+z-18=0$; 2) $2x+7y+3z+1=0$;
3) $x+5y+12z-1=0$; 4) $2x-y+z+11=0$;
5) $2x+3y-6z+2=0$; 6) $3x-2y+2z-7=0$.

(Відповідь: 1), 2), 4) по один бік; 3), 5), 6) по різні боки).

9. Довести, що площина $3x-4y-2z+5=0$ перетинає відрізок, обмежений точками $M_1(3;-2;1)$ і $M_2(-2;5;2)$.

10. Довести, що площина $5x-2y+z-1=0$ не перетинає відрізок, обмежений точками $M_1(1;4;-3)$ і $M_2(2;5;0)$.

11. В кожному з наступних випадків обчислити віддаль між паралельними площинами:
1) $x-2y-2z-12=0$, $x-2y-2z-6=0$;
2) $2x-3y+6z-14=0$, $4x-6y+12z+21=0$;
3) $2x-y+2z+9=0$, $4x-2y+4z-21=0$;
4) $16x+12y-15z+50=0$, $16x+12y-15z+25=0$;
5) $30x-32y+24z-75=0$, $15x-16y+12z-25=0$;
6) $6x-18y-9z-28=0$, $4x-12y-6z-7=0$.

(Відповідь: 1) $d=2$; 2) $d=3,5$; 3) $d=6,5$; 4) $d=1$; 5) $d=0,5$; 6) $d=\dfrac{5}{6}$).

12. Дві грані куба лежать на площинах $2x-2y+z-1=0$. $2x-2y+z+5=0$. Обчислити об'єм цього куба.

(Відповідь: 8 куб. од.).

13. Скласти рівняння бісекторних площин кутів між двома площинами $7x+y-6=0$, $3x+5y-4z+1=0$.

(Відповідь: $4x-4y+4z-7=0$, $10x+6y-4z-5=0$.)

14. Написати рівняння площин, що паралельні площині $Ax+By+Cz+D=0$ і віддалені від неї на віддаль d.

(Відповідь: $Ax+By+Cz+D\pm d\sqrt{A^2+B^2+C^2}=0$).

15. Знайти віддаль між двома площинами $Ax+By+Cz+D_1=0$ і $Ax+By+Cz+D_2=0$.

(Відповідь: $d=\dfrac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$).

16. Дано вершини тетраедра $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$ і $D(4;1;2)$. Обчислити довжину висоти, опущеної із вершини D на грань ABC.

(Відповідь: $\dfrac{1}{\sqrt{11}}$).

17. На осі Oy знайти точку, віддалену від площини $x+2y-2z-2=0$ на віддаль $d=4$.

(Відповідь: умову задачі задовольняють дві точки $(0;7;0)$ та $(0;-5;0)$).

18. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки $(1;-2;0)$ і від площини $3x-2y+6z-9=0$.

(Відповідь: умову задачі задовольняють дві точки $(0;0;-2)$ та $\left(0;0;-6\dfrac{4}{13}\right)$).

19. На осі Ox знайти точки, рівновіддалені від двох площин $12x-16y+15z+1=0$, $2x+2y-z-1=0$.

(Відповідь: $(2;0;0)$, $\left(\dfrac{11}{43};0;0\right)$).

20. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки $(2;3;4)$ і від площини $2x+3y+x-17=0$.

(Відповідь: $(0;0;3)$).

21. На осі Oy знайти точки, рівновіддалені від двох площин $x+y-z+1=0$, $x-y+z-5=0$.

(Відповідь: $(0;-3;0)$).

22. Скласти рівняння площини, яка паралельна площині $2x+y-4z+5=0$ і віддалена від точки $(1;2;0)$ на віддаль $\sqrt{21}$.

(Відповідь: $2x+y-4z+17=0$, $2x+y-4z-25=0$).

23. Скласти рівняння площин, паралельних площині $2x-2y-z-3=0$ і віддалених від неї на віддаль $d=5$.

(Відповідь: $2x-2y-z-18=0$, $2x-2y-z+12=0$).

24. В кожному з наступних випадків скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох паралельних площин:

1) $4x-y-2z-3=0$, $4x-y-2z-5=0$;

2) $3x+2y-z+3=0$, $3x+2y-z-1=0$;

3) $5x-3y+z+3=0$, $10x-6y+2z+7=0$.

(Відповідь: 1) $4x-y-2z-4=0$; 2) $3x+2y-z+1=0$; 3) $20x-12y+4z+13=0$).

25. На лінії перетину двох площин $2x-y+z-8=0$, $4x+3y-z+14=0$ знайти точки, віддалені від площини $2x+3y-6z-10=0$ на віддаль 7.

(Відповідь: $(0;-3;5)$ та $\left(\frac{98}{23};-\frac{363}{23};-\frac{375}{23}\right)$).

26. На прямій, по якій перетинаються площина $2x-3y+4z-5=0$ з площиною xOz знайти точки, віддалені від площини $2x+y-z+3=0$ на віддаль $\sqrt{6}$.

(Відповідь: $\left(-\frac{31}{10};0;\frac{14}{5}\right)$ та $\left(\frac{17}{10};0;\frac{2}{5}\right)$).

27. В кожному з наступних випадків скласти рівняння площин, що ділять навпіл двогранні кути, утворені двома площинами, які перетинаються:

1) $x-3y+2z-5=0$, $3x-2y-z+3=0$;

2) $5x-5y-2z-3=0$, $x+7y-2z+1=0$;

3) $2x-3y+5z+3=0$, $2x-10y+4z-2=0$.

(Відповідь: 1) $4x-5y+z-2=0$, $2x+y-3z+8=0$; 2) $x-3y-1=0$, $3x+y-2z-1=0$; 3) $3x-6y+7z+2=0$, $x+4y+3z+4=0$).

28. В кожному із наступних випадків визначити, чи розташована точка $M(2;-1;3)$ і початок координат в одному, в суміжних або вертикальних двогранних кутах, утворених у результаті перетину двох площин:

1) $2x-y+3z-5=0$, $3x+2y-z+3=0$;

2) $2x+3y-5z-15=0$, $5x-y-3z-7=0$;

3) $x+5y-z+1=0$, $2x+17y+z+2=0$.

(Відповідь: 1) точка M і початок координат розташовані в суміжних кутах; 2) точка M і початок координат розташовані в одному куті; 3) точка M і початок координат розташовані у вертикальних кутах).

29. В кожному із наступних випадків визначити, чи розташовані точки $M(2;-1;3)$ і $N(1;2;-3)$ в одному, в суміжних або вертикальних двогранних кутах, утворених у результаті перетину двох площин:

1) $3x-y+2z-3=0$, $x-2y-z+4=0$;

2) $2x-y+5z-1=0$, $3x-2y+6z-1=0$.

(Відповідь: 1) 1) точки M і N розташовані у суміжних кутах; 2) точки M і N розташовані у вертикальних кутах).

30. Написати рівняння площини, що ділить навпіл той двогранний кут між площинами $2x-14y+6z-1=0$ та $3x+5y-5z+3=0$, в якому лежить початок координат.

(Відповідь: $8x-4y-4z+5=0$).

31. Написати рівняння площини, що ділить навпіл той двогранний кут між площинами $2x-y+2z-3=0$ та $3x+2y-6z-1=0$, в якому лежить точка $M(1;2;-3)$.

(Відповідь: $23x-y-4z-24=0$).

32. Скласти рівняння площини, що перпендикулярна до вектора $(l;m;n)$ і віддалена від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ на віддаль d.

(Відповідь:

$l(x-x_0)+m(y-y_0)+n(z-z_0)\pm d\sqrt{l^2+m^2+n^2}=0$).

33. Написати рівняння площини, що відтинає на осях координат відрізки, пропорційні до чисел 1, 2, 3, і віддалена від точки $(3;5;7)$ на віддаль 4.

(Відповідь: $6x+3y+2z-75=0$, $6x+3y+2z-19=0$).

34. Всередині трикутника, який відтинають від площини xOy площини $3x+2y+4z-7=0$, $2x-5y+1=0$, $5x+y-\sqrt{3}z+6=0$, знайти точку, рівновіддалену від цих площин.

(Відповідь: $\left(-\frac{17}{53};\frac{63}{53};0\right)$).

35. Написати рівняння площини, що проходить через точку $A(5;2;0)$ і віддалена від точки $B(6;1;-1)$ на віддаль 1 і від точки $C(0;5;4)$ на віддаль 3.

(Відповідь: $x+2y+2z-9=0$, $y-2=0$).

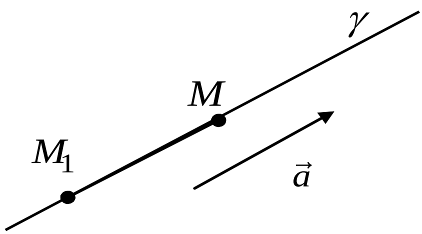
36. Через лінію перетину площин $x+28y-2z+17=0$, $5x+8y-z+1=0$ провести площину , віддалену від початку координат на віддаль 1.

(Відповідь: $3x-4y-5=0$, $387x-164y-24z-421=0$).

§4.4. Пряма в просторі

4.4.1. Канонічні рівняння прямої у просторі

Зафіксуємо в просторі афінну систему координат.



Задання точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ на прямій γ і ненульового вектора $\vec{a}=(l;m;n)$, що колінеарний цій прямій, однозначно визначає пряму γ, оскільки довільна точка $M(x;y;z)$ прямої γ визначає вектор

$$\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;y-y_1;z-z_1),$$

колінеарний $\vec{a}$. Отже, рівняння

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \qquad (4.4.1)$$

є рівняннями прямої в просторі. Ці рівняння називаються *канонічними рівняннями прямої у просторі*.

4.4.2. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки. Параметричні рівняння прямої

Якщо на прямій γ відомо дві різні точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і $M_2(x_2;y_2;z_2)$, то за її напрямний вектор можна обрати вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ і тому рівняння (4.4.1) набувають вигляду

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (4.4.2)$$

Рівняння (4.4.2) *називають рівняннями прямої, яка проходить через дві точки.*

Якщо у рівняннях (4.4.1) через t позначити величину відношень, то одержимо рівняння

$$x = x_1 + lt,$$
$$y = y_1 + mt, \qquad (4.4.3)$$
$$z = z_1 + nt, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ці рівняння називаються *координатно –параметричними рівняннями прямої у просторі, а t – параметром.* Нехай $\vec{r} = (x; y; z)$ і $\vec{r}_1 = (x_1; y_1; z_1)$ – радіус-вектори відповідно точок M і M_1 прямої γ, тоді рівняння (4.4.3) набувають векторно – параметричної форми

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + t\vec{a},\ t \in \mathbb{R}. \qquad (4.4.4)$$

Рівняння (4.4.4) називається *векторно – параметричним рівнянням прямої у просторі*.

4.4.3. Пряма в просторі як лінія перетину двох площин

Як зазначалось в п.4.2.2, пряму γ в загальній декартовій системі координат в просторі можна задати рівняннями двох площин

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

що перетинаються по цій прямій (за умови $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ або $\frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, або ж $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$).

Для того, щоб записати канонічне рівняння прямої, заданої двома площинами, що перетинаються, спочатку знаходять будь – який розв'язок x_0, y_0, z_0 системи

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ належить прямій γ, що є лінією перетину площин α та β.

Вектор $\vec{a}$ з координатами

$$\vec{a} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right)$$

є напрямним вектором цієї прямої, бо він ненульовий і кожна з площин α та β колінеарна з ним. Доведемо, наприклад, що площина α колінеарна вектору $\vec{a}$. Перевіримо виконання необхідної і достатньої умови, сформульованої в теоремі 4.1.1. Дійсно:

$$A_1 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_1 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Аналогічно $A_2 \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} - B_2 \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} + C_2 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$.

Отже, вектор $\vec{a}$ колінеарний прямій γ і тому її канонічні рівняння можна записати так:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} .$$

Зауважимо, що в прямокутній декартовій системі координат вектор $\vec{a}$ співпадає із векторним добутком головних векторів $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ площин α та β відповідно:

$$\vec{a} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

Приклади розв'язування задач

4.4.1. *Дано рівняння руху точки* $M(x;y;z)$ *:* $x=3-4t$, $y=5+3t$, $z=-2+12t$. *Визначити її швидкість* v. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Якщо в заданих параметричних рівняннях прямої параметр t розглядати як час, то рівняння $x=3-4t$, $y=5+3t$, $z=-2+12t$ будуть визначати прямолінійний і рівномірний рух точки $M(x;y;z)$. Швидкість v цієї точки постійна і визначається за формулою $v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$, де l,m,n – координати напрямного вектора прямої. Отже, $v=\sqrt{(-4)^2+3^2+12^2}=13$.

4.4.2. *Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки* $A(1;2;3)$ *на площину* $3x+2y-z-5=0$*. Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. В прямокутній системі координат головний вектор $(3;2;-1)$ площини $3x+2y-z-5=0$ перпендикулярний до неї. Отже, для шуканої прямої відомо точку $A(1;2;3)$ та напрямний вектор $(3;2;-1)$. Скориставшись (4.4.1), запишемо канонічні рівняння прямої у просторі: $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}$.

4.4.3. *Записати рівняння прямої, що проходить через точку* $(2;1;0)$ *і перетинає дві прямі:*

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3} \text{ і } \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}.$$

Система координат афінна.

Розв'язання. Шукану пряму можна розглядати як пряму, по якій перетинаються дві площини α та β, що проходять через дану точку і одну з даних прямих. Маємо:

1) площина α проходить через точки $(2;1;0)$ і $(-1;1;0)$ і паралельна вектору $\vec{a}=(2;1;3)$. Рівняння площини α:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0,\ 3y-z-3=0.$$

2) площина β проходить через точки $(2;1;0)$ і $(2;-2;0)$ і паралельна вектору $\vec{b}=(3;4;1)$. Рівняння площини β:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0,\ x-3z-2=0.$$

Шукану пряму в просторі задаємо як лінію перетину двох знайдених площин: $3y-z-3=0$, $x-3z-2=0$.

4.4.4. *Знайти пряму b, що є проекцією прямої a: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{1}$ на площину α: $x+2y+3z+4=0$. Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Оскільки пряма b, що є проекцією a на площину α, лежить в площині α, то рівняння $x+2y+3z+4=0$ є одним із рівнянь, що буде визначати пряму b.

Друге рівняння – це рівняння проектуючої площини β, яка проходить через дану пряму (проходить через точку $(2;-2;1)$, колінеарна вектору $(3;4;1)$) і перпендикулярна до площини α (колінеарна вектору $(1;2;3)$). Рівняння площини β є таким:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

або $5x-4y+z-19=0$. Рівняння шуканої проекції b: $x+2y+3z+4=0$, $5x-4y+z-19=0$

Завдання для самостійної роботи

1. Записати канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(2;0;-3)$ паралельно: 1) вектору $\vec{a}=(2;-3;5)$; 2) прямій $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+1}{-1}$; 3) осі Ox; 4) осі Oy; 5) осі Oz.

(Відповідь: 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$;
3) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$;
5) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$).

2. Записати канонічні рівняння прямої, що проходить через дві дані точки: 1) $(1;-2;1)$, $(3;1;-1)$; 2) $(3;-1;0)$, $(1;0;-3)$.

(Відповідь: 1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$;2) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$).

3. Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(1;-1;-3)$ паралельно: 1) до вектора $\vec{a}=(2;-3;4)$; 2) до прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-1}{0}$; 3) до прямої $x=3t-1$, $y=-2t+3$, $z=5t+2$.

(Відповідь: 1) $x=2t+1$, $y=-3t-1$, $z=4t-3$; 2) $x=2t+1$, $y=4t-1$, $z=-3$ 3) $x=3t+1$, $y=-2t-1$, $z=5t-3$).

4. Записати параметричні рівняння прямої, що проходить через дві дані точки $(3;-1;2)$, $(2;1;1)$.

(Відповідь: $x=t+2$, $y=-2t+1$, $z=t+1$).

5. Визначити точки перетину з координатними площинами прямої, що проходить через дві точки $M_1(-6;6;-5)$ та $M_2(12;-6;1)$.

(Відповідь: $(9;-4;0)$, $(3;0;-2)$, $(0;2;-3)$).

6. Дано вершини трикутника $A(3;6;-7)$, $B(-5;2;3)$ і $C(4;-7;-2)$. Скласти параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

(Відповідь: $x=5t+4$, $y=-11t-7$, $z=-2$).

7. Дано вершини трикутника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$ і $C(-5;14;-3)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

(Відповідь: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+7}{-8}$).

8. Дано вершини трикутника $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$ і $C(5;1;-7)$. Скласти параметричні рівняння його висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону.

(Відповідь: $x=3t+3$, $y=15t+1$, $z=19t-3$).

9. Скласти рівняння прямих, утворених перетином площини $5x-7y+2z-3=0$ з координатними площинами.

(Відповідь: $5x-7y-3=0$, $z=0$; $5x+2z-3=0$, $y=0$; $7y-2z+3=0$, $x=0$).

10. Скласти рівняння прямої, утвореної перетином площини $3x-y-7z+9=0$ з площиною, що проходить через вісь Ox і точку $E(3;2;-5)$.

(Відповідь: $3x-y-7z+9=0$, $5y+2z=0$).

11. Знайти точки перетину прямої $\begin{cases} 2x+y-z-3=0, \\ x+y+z-1=0 \end{cases}$ з координатними площинами.

(Відповідь: $(2;-1;0)$; $\left(1\frac{1}{3};0;-\frac{1}{3}\right)$; $(0;2;-1)$).

12. Дано точки перетину прямої з двома координатними площинами $(0;y_1;z_1)$ та $(x_2;0;z_2)$. Обчислити координати точки перетину цієї ж прямої з третьою координатною площиною.

(Відповідь: $\left(-\frac{x_2 z_1}{z_2-z_1};\frac{y_1 z_2}{z_2-z_1};0\right)$).

13. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(2;3;-5)$ паралельно прямій $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$

(Відповідь: $\frac{x-2}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+5}{-5}$).

14. Записати канонічні рівняння наступних прямих:

1) $\begin{cases}x-2y+3z-4=0,\\ 3x+2y-5z-4=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}5x+y+z=0,\\ 2x+3y-2z+3=0.\end{cases}$

(Відповідь: 1) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{7}=\frac{z}{4}$; 2) $\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}$).

15. Записати параметричні рівняння наступних прямих:

1) $\begin{cases}2x+3y-z-4=0,\\ 3x-5y+2z+1=0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+2y-z-6=0,\\ 2x-y+z+1=0.\end{cases}$

(Відповідь: 1) $x=t+1$, $y=-7t$, $z=-19t-2$; 2) $x=-t+1$, $y=3t+2$, $z=5t-1$).

16. Визначити, при якому значенні D пряма $\begin{cases}2x+3y-z+D=0,\\ 3x-2y+2z-6=0\end{cases}$ перетинає:

1) вісь Ox;

2) вісь Oy;

3) вісь Oz.

(Відповідь: 1) $D=-4$; 2) $D=9$; 3) $D=3$).

17. Знайти співвідношення, які мають задовольняти коефіцієнти рівняння прямої

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

для того, щоб ця пряма була паралельна: 1) осі Ox; 2) осі Oy; 3) осі Oz.

(Відповідь: 1) $A_1 = A_2 = 0$ і принаймні одне із чисел D_1, D_2 відмінне від нуля;

2) $B_1 = B_2 = 0$ і принаймні одне із чисел D_1, D_2 відмінне від нуля;

3) $C_1 = C_2 = 0$ і принаймні одне із чисел D_1, D_2 відмінне від нуля).

18. Скласти рівняння проекцій прямої $\begin{cases} x + 2y - 3z - 5 = 0, \\ 2x - y + z + 2 = 0 \end{cases}$ на координатні площини.

(Відповідь: $7x - y + 1 = 0$, $z = 0$; $5x - z - 1 = 0$, $y = 0$; $5y - 7z - 12 = 0$, $x = 0$).

19. Скласти рівняння проекцій прямої $\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0, \\ x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ на площину $2x - y + z - 1 = 0$.

(Відповідь: $2x - 4y - 8z + 1 = 0$, $2x - y + z - 1 = 0$).

20. Записати рівняння площини, що проходить через початок координат і пряму $x = 3 - 2t$, $y = 1 + t$, $z = t$. Система координат афінна.

(Відповідь: $x - 3y + 5z = 0$).

21. Записати рівняння площини, що проходить через точку $(-3;1;0)$ і пряму $x + 2y - z + 4 = 0$, $3x - y + 2z - 1 = 0$.

(Відповідь: $20x + 19y - 5z + 41 = 0$).

22. Записати рівняння площини, що проходить через точку $(-2;3;0)$ і пряму $x = 1$, $y = 2 + t$, $z = 2 - t$.

(Відповідь: $x-3y-3z+11=0$).

23. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_1\left(\vec{r}_1\right)$ і пряму $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$.

(Відповідь: $\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)\left(\vec{r}_1-\vec{r}_0\right)\vec{a}=0$ або $\vec{r}=\vec{r}_1+u\left(\vec{r}_1-\vec{r}_0\right)+v\vec{a}$).

§4.5. Взаємне розміщення прямих та площин у просторі

4.5.1. Взаємне розміщення двох прямих у просторі

Введемо в просторі загальну декартову систему координат і охарактеризуємо взаємне розміщення двох прямих, рівняння яких у даному координатному просторі такі:

$$\gamma_1: \ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\gamma_2: \ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Очевидними є наступні достатні умови взаємного розміщення γ_1 і γ_2.

1. Точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ належить прямій γ_1, а точка $M_2(x_2;y_2;z_2)$ належить прямій γ_2. Якщо вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1=(l_1;m_1;n_1)$ і $\vec{a}_2=(l_2;m_2;n_2)$ некомпланарні, тобто

$$\Delta=(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{a}_1,\vec{a}_2)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\neq 0,$$

то прямі γ_1 і γ_2 мимобіжні.

2. Якщо $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$, то вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}_1=(l_1;m_1;n_1)$ і $\vec{a}_2=(l_2;m_2;n_2)$ компланарні. Тоді:

а) якщо $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$, то пряма γ_1 паралельна прямій γ_2.

б) якщо $\vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ та вектори $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \overrightarrow{M_1M_2}$ є компланарними, тобто $\Delta=0$, то прямі γ_1 і γ_2 перетинаються.

в) якщо ж $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, то прямі γ_1 і γ_2 збігаються.

Наведені достатні ознаки взаємного розміщення двох прямих у просторі є і необхідними. Необхідність вказаних ознак доводиться методом від супротивного.

4.5.2. Взаємне розміщення прямої і площини в просторі

Зафіксуємо в просторі афінну систему координат та охарактеризуємо взаємне розміщення прямої

$$\gamma:\ \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$

і площини

$$\pi:\ Ax+By+Cz+D=0.$$

Пряму γ задамо координатно – параметричними рівняннями і розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x=x_1+lt, \\ y=y_1+mt, \\ z=z_1+nt, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases}$$

Значення параметра t знаходимо з рівняння $\lambda t+\mu=0$, яке одержуємо після підстановки замість x,y,z у останньому рівнянні їхніх параметричних зображень з перших трьох рівнянь системи. Тут $\lambda=Al+Bm+Cn$ і $\mu=Ax_1+By_1+Cz_1+D$. Зауважимо, що $\lambda=(\vec{a},\vec{n})$, де $\vec{a}$ – напрямний вектор прямої γ, а $\vec{n}$ – головний вектор площини π.

Якщо $\lambda\neq 0$, то рівняння $\lambda t+\mu=0$ має єдиний розв’язок $t=-\dfrac{\mu}{\lambda}$. Отже, пряма γ перетинає площину π у точці

$$A_2\left(x_1-\frac{l\mu}{\lambda};\ y_1-\frac{m\mu}{\lambda};\ z_1-\frac{n\mu}{\lambda}\right).$$

Якщо $\lambda=0$ (тобто $Al+Bm+Cn=0$) і $\mu=Ax_1+By_1+Cz_1+D\neq 0$, то рівняння $\lambda t+\mu=0$ розв’язків немає, а пряма γ паралельна площині π.

Якщо $\lambda = 0$ і $\mu = 0$, то рівняння $\lambda t + \mu = 0$ має безліч розв'язків (будь – яке дійсне число t є його розв'язком). Це означає, що пряма γ лежить у площині π.

4.5.3. Кут між двома площинами

Нехай відносно прямокутної системи координат задано дві площини їх загальними рівняннями

$$\pi_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\pi_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Означення. *Кутом між площинами, що перетинаються, називається кут між прямими, утвореними при перетині цих площин третьою площиною, перпендикулярною до прямої перетину даних площин.*

Позначимо нормальні вектори даних площин $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ відповідно. Нехай φ — кут між площинами π_1 і π_2. Можливими є два випадки:

1. Кут φ між площинами дорівнює куту $\psi, 0 < \psi < \dfrac{\pi}{2}$ між їх нормальними векторами $\vec{n}_1$ та $\vec{n}_2$. Тоді

$$\cos\varphi = \cos\psi = |\cos\psi|, \text{ бо } \cos\psi > 0.$$

2. Кут φ є доповняльним до кута між нормальними векторами: $\varphi = \pi - \psi$. Тоді

$\cos\varphi = \cos(\pi - \psi) = -\cos\psi = |\cos\psi|$, бо в цьому випадку $\dfrac{\pi}{2} < \psi < \pi$ і, отже $\cos\psi < 0$.

В обох випадках

$$\cos\varphi = |\cos\psi| = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Формула

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

є формулою обчислення косинуса кута φ між площинами π_1 і π_2. Очевидно, якщо площини взаємно перпендикулярні, тобто двогранний кут між ними дорівнює 90^0, а $\cos 90^0 = 0$, то із останньої формули випливає *умова перпендикулярності двох площин*: площини $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ взаємно перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли виконується рівність

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

4.5.4. Кут між двома прямими в просторі

Нехай відносно прямокутної декартової системи координат у просторі дві прямі задано канонічними рівняннями :

$$a_1:\ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$a_2:\ \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Означення. *Кутом між прямими, що перетинаються, називається менший із кутів, утворених при їх перетині.*

Якщо прямі мимобіжні, то кут між ними дорівнює куту між прямими, що перетинаються і, відповідно, паралельними кожній із даних мимобіжних прямих. Кут між паралельними прямими вважається рівним 0^0.

Таким чином, дві прямі у просторі (якщо вони не перпендикулярні) утворюють між собою два кути: гострий і тупий. Сума цих кутів рівна π. Отже, для знаходження цих кутів достатньо знайти один із них, наприклад гострий.

Розглянемо два можливі випадки:

1. Якщо гострий кут φ між прямими дорівнює куту α між їх напрямними векторами $\vec{a}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ і $\vec{a}_2 = (l_2; m_2; n_2)$, то

$$\cos\varphi = \cos\alpha = |\cos\alpha|,$$

бо $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, а, отже, косинус цього кута невід'ємний.

2. Гострий кут φ між прямими є доповняльним до кута α між напрямними векторами. Тоді $\varphi = \pi - \alpha$, де $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, і

$$\cos\varphi = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha = |\cos\alpha|.$$

Об’єднуючи результати для обох випадків, отримуємо формулу для знаходження косинуса кута між двома прямими

$$\cos\varphi = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}},$$

наслідком якої є необхідна і достатня умова взаємної перпендикулярності двох прямих a_1 та a_2:

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

4.5.5. Кут між прямою і площиною в просторі

Нехай відносно прямокутної декартової системи координат в просторі задано площину π своїм загальним рівнянням і пряму a – канонічними рівняннями:

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$a: \ \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

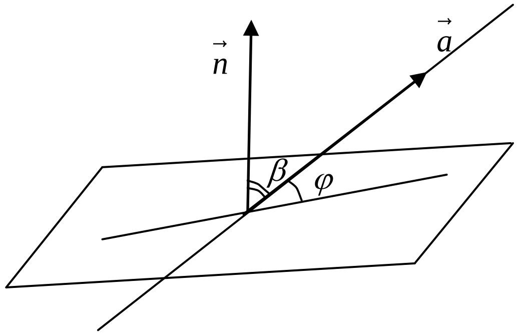
Нормальним вектором площини π є вектор $\vec{n} = (A; B; C)$, напрямним вектором прямої – вектор $\vec{a} = (l; m; n)$.

Означення. *Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою і її проекцією на цю площину.*

Позначимо кут між векторами $\vec{n} = (A; B; C)$ та $\vec{a} = (l; m; n)$ через β і розглянемо два можливі випадки співвідношень між значеннями кутів φ та β.

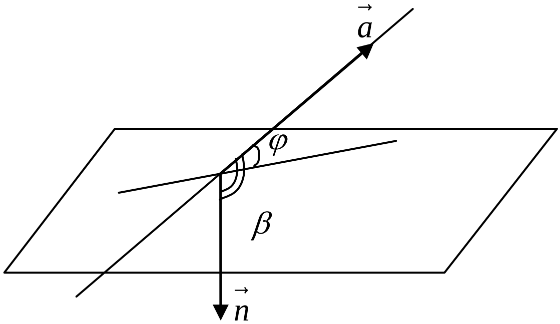
1. Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta, \ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то

$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta = \left|\cos\beta\right|$, бо кут β — гострий.



2. Якщо $\varphi = \beta - \frac{\pi}{2}$, то

$\sin\varphi = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = -\cos\beta = \left|\cos\beta\right|$, оскільки кут β — тупий.



В обох випадках $\sin\varphi = \left|\cos\beta\right| = \dfrac{\left|\left(\vec{n}, \vec{a}\right)\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{a}\right|}$, або

$$\sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \qquad (4.5.1)$$

– формула для обчислення синуса кута між прямою і площиною.

Пряма a та площина π паралельні тоді й лише тоді, коли нормальний вектор площини і напрямний вектор прямої перпендикулярні, тобто їх скалярний добуток дорівнює нулеві:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

У цьому випадку вважається, що кут між прямою і площиною дорівнює 0^0, і формула (4.5.1) також справедлива.

Пряма a перпендикулярна до площини π тоді і тільки тоді, коли нормальний вектор площини і напрямний вектор прямої колінеарні, тобто

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Якщо $\vec{n} \,||\, \vec{a}$, то $\vec{n} = \lambda\vec{a}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тоді

$$\sin\varphi = |\cos\beta| = \frac{|(\vec{n}, \vec{a})|}{|\vec{n}||\vec{a}|} = \frac{\lambda|\vec{a}|^2}{\lambda|\vec{a}|^2} = 1.$$

Але якщо пряма перпендикулярна до площини, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (відповідно $\beta = 0^0$) і $\sin\varphi = 1$. Отже, і в цьому випадку формула (4.5.1) справджується. Таким чином, у будь – якому випадку кут між прямою і площиною обчислюється за формулою (4.5.1).

Приклади розв'язування задач

4.5.1. *Скласти рівняння прямої, що лежить в площині* α *:* $y + 2z = 0$ *і перетинає прямі*

$a:\qquad x = 1 - t,\ \ y = t,\ \ z = 4t;$

$b:\qquad x = 2 - t,\ \ y = 4 + 2t,\ \ z = 1.$

Система координат афінна.

Розв'язання. Прямі a і b мимобіжні (див. п.4.5.1), бо їх напрямні вектори $\vec{a}=(-1;1;4)$ і $\vec{b}=(-1;2;0)$ та вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=(1;4;1)$ не є компланарними, оскільки

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1+8+2+16=25\neq 0 .$$

Тут точка $M_1(1;0;0)$ належить прямій a і $M_2(2;4;1)$ належить b.

Знайдемо точки перетину даної площини α і прямих a та b. Саме через ці дві точки і пройде шукана пряма.

Точка A перетину α та a має координати, які задовольняють систему $\begin{cases} x=1-t, \\ y=t, \\ z=4t, \\ y+2z=0. \end{cases}$.

Звідси $A(1;0;0)$. Аналогічно з системи

$$\begin{cases} x=2-t, \\ y=4+2t, \\ z=1, \\ y+2z=0 \end{cases}$$

знаходимо $B(5;-2;1)$ – точку перетину прямої b і площини α.

Для знаходження рівняння шуканої прямої використаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки: $\dfrac{x-1}{5-1}=\dfrac{y-0}{-2-0}=\dfrac{z-0}{1-0}$, $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}=t$.

Звідси дістаємо параметричні рівняння прямої: $x=1+4t$, $y=-2t$, $z=t$.

4.5.2. *Знайти точку* A', *симетричну точці* $A(2;7;1)$ *відносно площини* α *:* $x-4y+z+7=0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Пряма AA' перпендикулярна до площини α, а тому нормальний вектор площини α $\vec{n}=(1;-4;1)$ є напрямним вектором прямої AA'. Отже:

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-7}{-4}=\frac{z-1}{1}=t,$$

тобто $x=2+t, y=7-4t, z=1+t,$ – параметричні рівняння прямої AA'. Знайдемо точку O – проекцію точки A на площину α із системи рівнянь

$$\begin{cases} x=2+t, \\ y=7-4t, \\ z=1+t, \\ x-4y+z+7=0. \end{cases}$$

Маємо $O(3;3;2)$. Крім того, точка O – середина відрізка AA'. Отже, координати x_0, y_0, z_0 точки A' знаходимо із співвідношень

$$3=\frac{2+x_0}{2},\ \ 3=\frac{7+y_0}{2},\ \ 2=\frac{1+z_0}{2}.$$ Тобто $A'(4;-1;3)$.

4.5.3. *Знайти проекцію точки* $M_0(3;2;1)$ *на пряму* $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z}{2}$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Складемо рівняння площини α, що проходить через дану точку $M_0(3;2;1)$ перпендикулярно даній прямій: $1(x-3)+1(y-2)+2(z-1)=0$, або $x+y+2z-7=0$.

Проекцією точки M_0 на задану пряму буде точка P перетину цієї прямої і площини α. Координати точки P є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} x+y+2z-7=0, \\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{2}. \end{cases}$$

Зауважимо, що для спрощення процесу розв'язання останньої системи, зручно рівняння прямої записати у параметричному вигляді:

$$\begin{cases} x+y+2z-7=0, \\ \qquad x=2+t, \\ \qquad y=-3+t, \\ \qquad z=2t. \end{cases}$$

Підставимо в перше рівняння системи значення змінних x, y, z із трьох її наступних рівнянь: $2+t-3+t+4t-7=0$, $t=\dfrac{4}{3}$. Отже, координати точки P: $x=2+\dfrac{4}{3}=\dfrac{10}{3}$, $y=-3+\dfrac{4}{3}=-\dfrac{5}{3}$, $z=\dfrac{8}{3}$.

4.5.4. *Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного із точки $M(-1;0;4)$ на пряму*

$$a: \qquad x=1+t,\ y=2t,\ z=4-t.$$

Система координат прямокутна декартова.

Розв'язання. Шукана пряма є перетином двох площин α та β, де α – площина, що проходить через точку M і перпендикулярна до прямої a; β – площина, що проходить через точку M і пряму a. Рівняння цих площин такі:

α: $1\cdot(x+1)+2\cdot(y-0)-1\cdot(z-4)=0$,

$$\beta: \quad \begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-4 \\ 1+1 & 0-0 & 4-4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Після спрощення отримаємо

$$x+2y-z+5=0,\ \ y+2z-8=0.$$

Зауважимо, що шукану пряму ми задали як перетин двох площин. Знайдемо канонічні рівняння цієї прямої. Для цього визначимо координати її напрямного вектора $\vec{a}$ і довільну її точку M_0.

Координати точки M_0 шукаємо як частковий розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} x+2y-z+5=0, \\ y+2z-8=0, \end{cases}$$

наприклад $M_0(-1;0;4)$.

Напрямним вектором прямої є векторний добуток нормальних векторів площин α та β, а саме $\vec{a}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]$, де $\vec{n}_1=(1;2;-1)$, $\vec{n}_2=(0;1;2)$. Тоді $\vec{a}=(5;-2;1)$. Отже, канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x+1}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z-4}{1}.$$

4.5.5. *Записати параметричні рівняння спільного перпендикуляра до двох прямих, що задані рівняннями* $x=3t-7$, $y=-2t+4$, $z=3t+4$ *і* $x=t+1$, $y=2t-8$, $z=-t-12$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Визначимо взаємне розташування двох заданих прямих

$$a: \quad x=3t-7,\ y=-2t+4,\ z=3t+4;$$

$$b: \quad x=t+1,\ y=2t-8,\ z=-t-12.$$

Для цього обчислимо визначник (див. п.4.5.1)

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -7-1 & 4+8 & 4+12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -8 & 12 & 16 \end{vmatrix}=232\neq 0$$

Оскільки $\Delta\neq 0$, то прямі a та b мимобіжні. Спільним перпендикуляром до цих прямих є пряма c, напрямний вектор якої дорівнює векторному добутку напрямних векторів

$\vec{a}=(3;-2;3)$ та $\vec{b}=(1;2;-1)$ відповідно прямих a та b, тобто $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-4;6;8)\,||\,(2;-3;-4)=\vec{c}$.

Пряму c шукаємо як перетин двох площин: $c=\alpha\cap\beta$, де α – площина, що містить пряму a і колінеарна вектору $\vec{c}$; β – площина, що містить пряму b і колінеарна вектору $\vec{c}$. Рівняння площин:

$$\alpha:\begin{vmatrix} x+7 & y-4 & z-4 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}=0,\ 17x+18y-5z+67=0;$$

$$\beta:\begin{vmatrix} x-1 & y+8 & z+12 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix}=0,\ 11x-2y+7z+57=0.$$

Для знаходження параметричних рівнянь спільного перпендикуляра залишилось знайти координати довільної його точки, тобто частковий розв'язок системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 17x+18y-5z+67=0, \\ 11x-2y+7z+57=0. \end{cases}$$

Покладаючи, наприклад, $z=0$, отримуємо: $x=-5$, $y=1$.

Отже, параметричні рівняння спільного перпендикуляра до двох заданих прямих такі: $x=2t-5$, $y=-3t+1$, $z=-4t$.

4.5.6. *При якому значенні* C *пряма* $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ *паралельна площині* $2x-y+Cz-2=0$? *Система координат афінна.*

Розв'язання. Знайдемо напрямний вектор $\vec{a}$ даної прямої, скориставшись результатами, отриманими в п.4.4.3:

$$\vec{a}=\left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}\right)=(-5;-8;-1).$$

Далі, згідно з п.4.5.2, якщо координати $(2;-1;C)$ головного вектора площини $2x-y+Cz-2=0$ і координати вектора $\vec{a}$ задовольняють співвідношення $-5\cdot 2+(-8)\cdot(-1)+(-1)\cdot C=0$, $C=-2$, то задана пряма або паралельна даній площині або лежить у цій площині. Для того, щоб уточнити взаємне розміщення прямої та площини, дамо відповідь на питання про кількість розв'язків при $C=-2$ такої системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0, \\ 2x-y+Cz-2=0, \end{cases} \text{тобто} \begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0, \\ 2x-y-2z-2=0. \end{cases}$$

Оскільки

$$rg\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}=2 \text{ і } rg\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}=3,$$

то остання система несумісна. Отже, при $C=-2$ пряма

$$\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$$

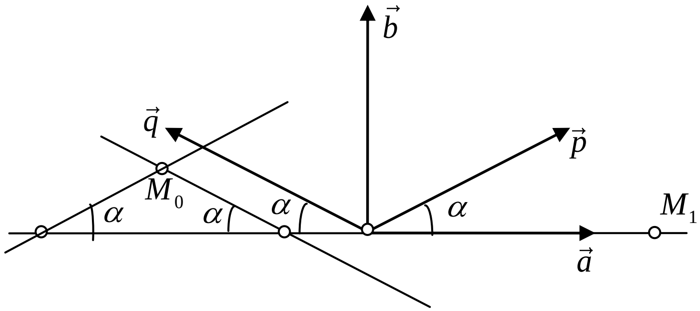
паралельна площині $2x-y+Cz-2=0$.

4.5.7. *Записати векторно – параметричне рівняння прямої* a, *що проходить через точку* M_0, *радіус – вектор якої* $\overrightarrow{OM_0}=\vec{r}_0$, *перетинає під гострим кутом* α *пряму* b, *що проходить через точку* M_1, *радіус – вектор якої* $\overrightarrow{OM_1}=\vec{r}_1$, *і колінеарна одиничному вектору* $\vec{a}$. *Точка* M_0 *не належить прямій* b. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Вектор $\left[\left[\vec{r}_0-\vec{r}_1,\vec{a}\right],\vec{a}\right]$ лежить в площині α, що проходить через точку M_0 і пряму b, і перпендикулярний до вектора $\vec{a}$. Вектор

$$\vec{b} = \frac{\left[\left[\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}\right], \vec{a}\right]}{\left\|\left[\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}\right]\right\|}$$

є одиничним вектором, що лежить в площині α і перпендикулярний до $\vec{a}$.



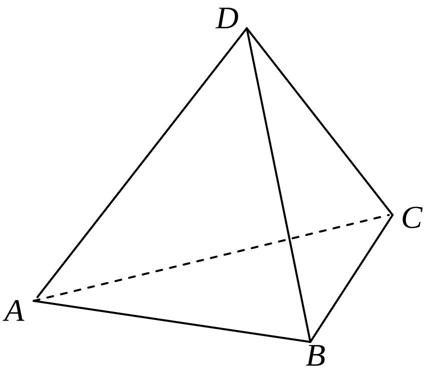
Вектори $\vec{p} = \vec{a}\cos\alpha + \vec{b}\sin\alpha$ і $\vec{q} = -\vec{a}\cos\alpha + \vec{b}\sin\alpha$ – одиничні напрямні вектори шуканих прямих (таких прямих існує рівно дві). Рівняння шуканих прямих:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\left(\vec{a}\cos\alpha + \frac{\left[\left[\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}\right], \vec{a}\right]}{\left\|\left[\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}\right]\right\|}\sin\alpha\right),$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\left(-\vec{a}\cos\alpha + \frac{\left[\left[\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}\right], \vec{a}\right]}{\left\|\left[\vec{r}_0 - \vec{r}_1, \vec{a}\right]\right\|}\sin\alpha\right).$$

4.5.8. *Обчислити кути, що утворюють протилежні ребра тетраедра з вершинами* $A(3;-1;0)$, $B(0;-7;3)$, $C(-2;1;-1)$, $D(3;2;6)$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Протилежні ребра тетраедра розташовані на прямих: AB і DC; AC і BD; AD і BC (див. рисунок).



Напрямними векторами цих прямих є, відповідно, такі вектори $\overrightarrow{AB}=(-3;-6;3)$ і $\overrightarrow{DC}=(-5;-1;-7)$; $\overrightarrow{AC}=(-5;2;-1)$ і $\overrightarrow{BD}=(3;9;3)$; $\overrightarrow{AD}=(0;3;6)$ і $\overrightarrow{BC}=(-2;8;-4)$. Скористаємось формулою для знаходження кута між прямими (див., п.4.5.4):

$$\cos\varphi_1=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{DC}\right|}=$$

$$=\frac{\left|-3\cdot(-5)+(-6)\cdot(-1)+3\cdot(-7)\right|}{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+3^2}\cdot\sqrt{(-5)^2+(-1)^2+(-7)^2}}=0.$$

Отже, $\varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$. Аналогічно знаходимо:

$$\cos\varphi_2=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{BD}\right|}=0,\ \varphi_2=\frac{\pi}{2}\ \text{та}\ \cos\varphi_3=\frac{\left|\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=0,$$

$\varphi_3=\dfrac{\pi}{2}$.

Таким чином, протилежні ребра AB і DC; AC і BD; AD і BC тетраедра попарно взаємно перпендикулярні.

4.5.9. *Через лінію перетину площин:* $x+5y+z=0$ *і* $x-z+4=0$ *провести площину* π*, яка утворює кут* 45^0 *з площиною* $x-4y-8z+12=0$*. Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Скориставшись рівнянням жмутка площин (див. п.4.2.2), рівняння шуканої площини шукаємо у вигляді $\alpha(x+5y+z)+\beta(x-z+4)=0$, де $|\alpha|+|\beta|\neq 0$, тобто $(\alpha+\beta)x+5\alpha y+(\alpha-\beta)z+4\beta=0$. Головний вектор шуканої площини π має координати $\vec{n}=(\alpha+\beta;5\alpha;\alpha-\beta)$. Без втрати загальності міркувань, можна вважати, що вектор $\vec{n}$ – одиничний: $(\alpha+\beta)^2+(5\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2=1$, тобто: $27\alpha^2+2\beta^2=1$.

Площини π і $x-4y-8z+12=0$ мають утворювати кут 45^0, тобто (див. п.4.5.3):

$$\frac{|1\cdot(\alpha+\beta)+(-4)\cdot 5\alpha+(-8)\cdot(\alpha-\beta)|}{1\cdot\sqrt{81}}=\cos 45^0,$$

$$|-27\alpha+9\beta|=\frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Для знаходження невідомих $\{\alpha,\beta\}\subset\mathbb{R}$ отримали систему:

$$\begin{cases}|-27\alpha+9\beta|=\dfrac{9\sqrt{2}}{2},\\ 27\alpha^2+2\beta^2=1,\end{cases}$$

яка рівносильна сукупності таких систем:

$$1)\ \begin{cases}-3\alpha+\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ 27\alpha^2+2\beta^2=1,\end{cases}\ \text{та }2)\begin{cases}-3\alpha+\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ 27\alpha^2+2\beta^2=1.\end{cases}$$

Легко переконатися, що розв’язками першої системи є $\alpha_1 = 0$, $\beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ та $\alpha_2 = -\frac{2\sqrt{2}}{15}$, $\beta_2 = \frac{\sqrt{2}}{10}$. Відповідно отримуємо такі два рівняння шуканих площин:

$$\pi_1: \quad x - z + 4 = 0,$$
$$\pi_2: \quad x + 20y + 7z - 12 = 0.$$

Розв'язки другої системи: $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = \frac{2\sqrt{2}}{15}$ та $\alpha_4 = \frac{2\sqrt{2}}{15}$, $\beta_4 = -\frac{\sqrt{2}}{10}$. При підстановці їх у рівняння $\alpha\left(x + 5y + z\right) + \beta\left(x - z + 4\right) = 0$ шуканої площини, знову отримуємо рівняння площин π_1 та π_2.

Отже, через лінію перетину площин: $x + 5y + z = 0$ і $x - z + 4 = 0$ проходить дві площини $x - z + 4 = 0$ та $x + 20y + 7z - 12 = 0$, які утворюють кут 45^0 з площиною $x - 4y - 8z + 12 = 0$.

Завдання для самостійної роботи

1. Довести паралельність наступних прямих:

1) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ і $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

2) $x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=t-7$ і $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0, \end{cases}$ і $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y-3z-9=0. \end{cases}$

2. Довести перпендикулярність наступних прямих:

1) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ і $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$

2) $x=2t+1$, $y=3t-2$, $z=-6t+1$ і $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z=4=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0, \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$

3. Знайти гострий кут між прямими:

$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$ і $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$.

(Відповідь: 60^0).

4. Знайти тупий кут між прямими: $x=3t-2$, $y=0$, $z=-t+3$ і $x=2t-1$, $y=0$, $z=t-3$.

(Відповідь: 135^0).

5. Визначити косинус кута між прямими:

$$\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0, \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$$

(Відповідь: $\cos\varphi=\pm\dfrac{4}{21}$).

6. Довести, що прямі, задані параметричними рівняннями $x = 2t - 3$, $y = 3t - 2$, $z = -4t + 6$ і $x = t + 5$, $y = -4t - 1$, $z = t - 4$, перетинаються.

7. Дано прямі $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$ і $\dfrac{x-3}{l} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-7}{2}$. При якому значенні параметра l вони перетинаються?

(Відповідь: $l = 3$).

8. Встановити, які з наступних пар прямих мимобіжні, паралельні або співпадають; якщо прямі паралельні, написати рівняння площини, що проходить через них; якщо прямі перетинаються, написати рівняння площини, що їх містить і знайти їх спільну точку.

1) $x = 1 + 2t$, $y = 7 + t$, $z = 3 + 4t$ і
$x = 6 + 3t$, $y = -1 - 2t$, $z = -2 + t$;

2) $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = -t$ і $x = -2t$, $y = -5 + 3t$, $z = 4$;

3) $x = 2 + 4t$, $y = -6t$, $z = -1 - 8t$ і
$x = 7 - 6t$, $y = 2 + 9t$, $z = 12t$;

4) $x = 1 + 9t$, $y = 2 + 6t$, $z = 3 + 3t$ і
$x = 7 + 6t$, $y = 6 + 4t$, $z = 5 + 2t$;

5) $x + z - 1 = 0$, $3x + y - z + 13 = 0$ і
$x - 2y + 3 = 0$, $y + 2z - 8 = 0$;

6) $2x + 3y = 0$, $x + z - 8 = 0$ і $z - 4 = 0$, $2x + 3z - 7 = 0$;

7) $x + y + z - 1 = 0$, $y + 4z = 0$ і
$2x + 3y + 6z - 6 = 0$, $3x + 4y + 7z = 0$;

8) $3x + y - 2z - 6 = 0$, $41x - 19y + 52z - 68 = 0$ і
$x - 2y + 5z - 1 = 0$, $33x + 4y - 5z - 63 = 0$;

9) $x = 9t$, $y = 5t$, $z = -3 + t$ і $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0; \end{cases}$

10) $x = t$, $y = -8 - 4t$, $z = -3 - 3t$ і $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x - y + 2z = 0; \end{cases}$

11) $x = 3 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = 4$ і $\begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ x + y - z + 4 = 0; \end{cases}$

12) $x = -2 + 3t$, $y = -1$, $z = 4 - t$ і $\begin{cases} 2y - z + 2 = 0, \\ x - 7y + 3z - 17 = 0. \end{cases}$

(Відповідь: 1) перетинаються в точці $(-3;5;-5)$ і лежать в площині $9x + 10y - 7z - 58 = 0$; 2) мимобіжні; 3) паралельні і лежать в площині $5x - 22y + 19z + 9 = 0$; 4) співпадають; 5) перетинаються в точці $(-3;0;4)$ і лежать в площині $3x + 4y + 5z - 11 = 0$; 6) мимобіжні; 7) паралельні і лежать в площині $4x + 3y = 0$; 8) співпадають; 9) співпадають; 10) паралельні і лежать в площині $12x - 3y + 8z = 0$; 11) мимобіжні; 12) перетинаються в точці $(10;-1;0)$ і лежать в площині $x - 7y + 3z - 17 = 0$).

9. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(-4;-5;3)$ і перетинає дві прямі $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}$.

(Відповідь: $\frac{x+4}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-3}{-1}$).

10. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(2;3;1)$ і перетинає прямі $x + y = 0$, $x - y + z + 4 = 0$ і $x + 3y - 1 = 0$, $x + z - 2 = 0$. Система координат афінна.

(Відповідь: $x - 9y + 5z + 20 = 0$, $9x - 3y + 10z - 19 = 0$).

11. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(-1;2;3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a} = (6;-2;-3)$ і перетинає пряму $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-5}$.

(Відповідь: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}$).

12. Скласти рівняння прямої, що лежить в площині $y+2z=0$ і перетинає прямі $x=1-t$, $y=t$, $z=4t$ і $x=2-t$, $y=4+2t$, $z=1$. Система координат афінна.

(Відповідь: $x=1+4t$, $y=-2t$, $z=t$).

13. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(3;-1;-4)$, перетинає вісь Oy і паралельна площині $y+2z=0$. Система координат афінна.

(Відповідь: $4x+3z=0$, $y+2z+9=0$).

14. Скласти рівняння прямої, що колінеарна прямій $x-3y+z=0$, $x+y-z+4=0$ і перетинає дві прямі $x=3+t$, $y=-1+2t$, $z=4t$ і $x=-2+3t$, $y=-1$, $z=4-t$. Система координат афінна.

(Відповідь: $2y-z+2=0$, $x-7y+3z-17=0$).

15. Скласти рівняння прямої, що проходить через початок координат і перетинає дві прямі $x=t$, $y=1-t$, $z=3+t$ і $x=2+2t$, $y=3-t$, $z=4+3t$. Система координат афінна.

(Відповідь: $4x+3y-z=0$, $13x+2y-8z=0$).

16. Дано рівняння руху точки $M(x;y;z)$

$$x=5-2t,\ y=-3+2t,\ z=5-t.$$

Визначити віддаль d, яку пройде точка за проміжок часу від $t_1=0$ до $t_2=7$.

(Відповідь: $d=21$).

17. Довести, що пряма $x=3t-2$, $y=-4t+1$, $z=4t-5$ паралельна площині $4x-3y-6z-5=0$.

18. Довести, що пряма $\begin{cases}5x-3y+2z-5=0,\\ 2x-y-z-1=0\end{cases}$ лежить в площині $4x-3y+7z-7=0$.

19. Знайти точку перетину прямої і площини:

1) $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$, $2x+3y+z-1=0$;

2) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$;

3) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$, $x+2y-2z+6=0$.

(Відповідь: 1) $(2;-3;6)$, 2) пряма паралельна площині, 3) пряма лежить в площині).

20. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(\vec{r}_0)$ і перетинає дві прямі $\vec{r}=\vec{r}_k+\vec{a}_k t$, $k=1,2$.

(Відповідь: $(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{r}_1-\vec{r}_0,\vec{a}_1)=0$, $(\vec{r}-\vec{r}_0,\vec{r}_2-\vec{r}_0,\vec{a}_2)=0$).

21. Знайти проекцію точки $M_0(\vec{r}_0)$ на пряму $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$.

(Відповідь: $\vec{r}_1+\frac{(\vec{r}_0-\vec{r}_1,\vec{a})}{\vec{a}^2}\vec{a}$).

22. Знайти проекцію точки $M(1;-1;-2)$ на пряму $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

(Відповідь: $M_1(3;2;4)$).

23. Знайти проекцію точки $A(1;2;8)$ на пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$. Визначити точку, симетричну точці $A(1;2;8)$ відносно заданої прямої.

(Відповідь: $P(3;-1;1)$, $A_1(5;-4;-6)$).

24. Знайти проекцію точки $M_0(\vec{r}_0)$ на площину $(\vec{r},\vec{n})=D$.

(Відповідь: $\vec{r}_0+\frac{D-(\vec{r}_0,\vec{n})}{\vec{n}^2}\vec{n}$).

25. Знайти проекцію точки $M\left(1;-3;2\right)$ на площину $2x+5y-3z-19=0$.

(Відповідь: $P\left(3;2;-1\right)$).

26. Знайти проекцію точки $M\left(2;-1;3\right)$ на площину $x+2y-z-3=0$. Визначити точку, симетричну точці $M\left(2;-1;3\right)$ відносно заданої площини.

(Відповідь: $P\left(3;1;2\right)$, $M_1\left(4;3;1\right)$).

27. Знайти необхідну і достатню умову того, що пряма $x=x_0+lt$, $y=y_0+mt$, $z=z_0+nt$ перетинає трикутник, вершини якого $M_k\left(x_k;y_k;z_k\right)$, $k=1,2,3$. Система координат афінна.

(Відповідь: числа $\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix}$

мають бути одного знаку).

28. Знайти точку перетину прямої $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$ з площиною $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{b}u+\vec{c}v$.

(Відповідь: $\vec{r}_0+\vec{a}\dfrac{\left(\vec{r}_1-\vec{r}_0,\vec{b},\vec{c}\right)}{\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)}$).

29. Знайти точку перетину прямої $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{a}t$ з площиною $\left(\vec{r},\vec{n}\right)=D$.

(Відповідь: $\vec{r}_0+\vec{a}\,\dfrac{D-(\vec{r}_0,\vec{n})}{(\vec{a},\vec{n})}$).

30. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-4;-1)$ і середину відрізка прямої

$$\begin{cases} 3x+4y+5z-26=0, \\ 3x-3y-2z-5=0, \end{cases}$$

розташованого між площинами $5x+3y-4z+11=0$, $5x+3y-4z-41=0$.

(Відповідь: $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z+1}{3}$).

31. Скласти канонічні рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно до площини $6x-3y-5z+2=0$.

(Відповідь: $\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{y+3}{-3}=\dfrac{z+5}{-5}$).

32. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;-1;-1)$ перпендикулярно до прямої $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+2}{4}$.

(Відповідь: $2x-3y+4z-1=0$).

33. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1;-2;1)$ перпендикулярно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+3y-z+2=0. \end{cases}$.

(Відповідь: $x-2y-5z=0$).

34. При якому значенні m пряма $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x-3y+6z+7=0$?

(Відповідь: $m=-3$).

35. Знайти проекцію прямої $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z-1}{1}$ на площину $x+2y+3z+4=0$.

(Відповідь: $x+2y+3z+4=0; 5x-4y+z-19=0$).

36. Знайти кут між прямою $x=5+6\mathrm{t}, y=1-3\mathrm{t}, \mathrm{z}=2+\mathrm{t}$ та площиною $7x+2y-3\mathrm{z}+5=0$.

(Відповідь: $\arcsin\dfrac{33}{\sqrt{46}\sqrt{62}}$).

37. Знайти кут між прямою $x+y-\mathrm{z}=0, 2x-3y+\mathrm{z}=0$ та площиною $3x+5y-4\mathrm{z}+2=0$.

(Відповідь: $\arcsin\dfrac{1}{10\sqrt{19}}$).

38. Визначити, де лежить початок координат: всередині гострого чи тупого кута, утвореного двома площинами $x-2y+3z-5=0$ та $2x-y-z+3=0$.

(Відповідь: початок координат лежить всередині гострого кута).

39. Визначити, де лежить точка $M\left(3;2;-1\right)$: всередині гострого чи тупого кута, утвореного двома площинами $5x-y+z+3=0$ та $4x-3y+2z+5=0$.

(Відповідь: точка M лежить всередині тупого кута).

40. Знайти кут між двома площинами $3x+y-2z+4=0$, $x-7y+2z=0$, в якому лежить точка $\left(1;1;1\right)$.

(Відповідь: $\arccos\left(-\dfrac{4}{3\sqrt{21}}\right)$).

41. Скласти рівняння площини, що ділить навпіл гострий двогранний кут, утворений площинами $3x-4y+6z-2=0$ з площиною yOz.

(Відповідь: $\left(3+\sqrt{61}\right)x-4y+6z-2=0$).

42. Написати рівняння площини, що ділить навпіл гострий двогранний кут між площинами $2x-3y-4z-3=0$ та $4x-3y-2z-3=0$.

(Відповідь: $x-y-z-1=0$).

43. Написати рівняння площини, що ділить навпіл тупий двогранний кут між площинами $3x-4y-z+5=0$ та $4x-3y+z+5=0$.

(Відповідь: $x+y+2z=0$).

44. Через початок координат провести площину, перпендикулярну до площини $5x-2y+5z-10=0$ і таку, що утворює з площиною $x-4y-8z+12=0$ кут $\alpha=45^0$.

(Відповідь: $x+20y+7z=0$ і $x-z=0$).

45. Знайти необхідну і достатню умову того, що точка $(x_0;y_0;z_0)$ лежить в гострому куті, утвореному двома площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ та $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, що перетинаються і не є взаємно перпендикулярні.

(Відповідь:

$$(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)\times$$
$$\times(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)<0$$).

§4.6. Віддаль від точки до прямої в просторі. Найкоротша віддаль між двома прямими

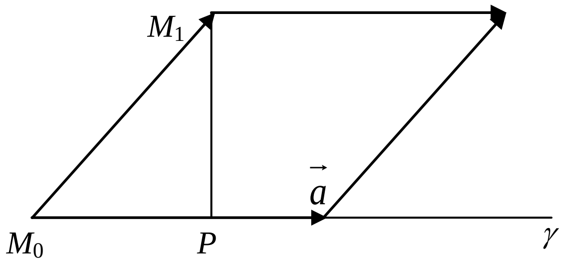
4.6.1. Віддаль від точки до прямої в просторі

Нехай відносно прямокутної декартової системи координат у просторі пряму γ задано канонічними рівняннями:

$$\gamma: \ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

та відомо координати точки $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$. Якщо M_1 належить прямій γ, то віддаль від точки M_1 до цієї прямої дорівнює нулеві.

Розглянемо випадок, коли точка $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$ не належить прямій γ. Тоді шукана віддаль d дорівнює довжині відрізка M_1P, де точка P є точкою перетину прямої γ та перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на дану пряму.



Відкладемо початок напрямного вектора $\vec{a}=\left(l;m;n\right)$ прямої γ від її точки $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$. Тоді, очевидно, d — висота паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\left(l;m;n\right)$ та $\overrightarrow{M_0M_1}$, дорівнює площі цього паралелограма, поділеній на довжину основи (довжину вектора $\vec{a}$). Використовуючи геометричну властивість векторного добутку, отримуємо:

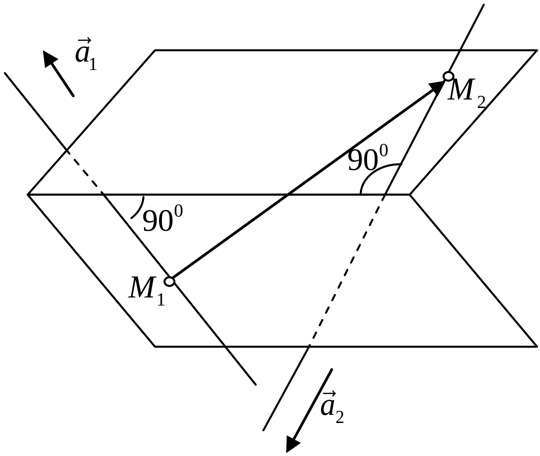
$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{a}\right]\right|}{|\vec{a}|}, \tag{4.6.1}$$

або в координатній формі:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ n & l \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ l & m \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

4.6.2. Найкоротша віддаль між двома прямими

Якщо дві прямі мимобіжні, то, як відомо з курсу шкільної геометрії, найкоротша віддаль між ними дорівнює довжині відрізка спільного перпендикуляра до даних двох прямих, кінці якого лежать на цих прямих. Звідси, найкоротша віддаль між двома мимобіжними прямими дорівнює величині ортогональної проекції будь – якого відрізка M_1M_2, кінці якого лежать на цих прямих, на будь – яку пряму, перпендикулярну до двох даних.



Задамо дві мимобіжні прямі канонічними рівняннями

$$a_1: \ \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$a_2: \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

відносно прямокутної декартової системи координат в просторі. Найкоротша віддаль d між ними дорівнює абсолютній величині проекції вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\right),$$

початок $M_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$ та кінець $M_2\left(x_2;y_2;z_2\right)$ якого лежать відповідно на першій і на другій прямих, на третю пряму, паралельну вектору

$$\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]=\left(\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}\right),$$

який перпендикулярний до напрямних векторів $\vec{a}_1=\left(l_1;m_1;n_1\right)$ та $\vec{a}_2=\left(l_2;m_2;n_2\right)$ даних прямих.

Оскільки

$$\left|\left(\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right],\overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|=\left\|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right\|\left|np_{\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]}\overrightarrow{M_1M_2}\right|=\left\|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right\|d,$$

то

$$d=\frac{\left|\left(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|}{\left\|\left[\vec{a}_1,\vec{a}_2\right]\right\|}=\frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}. \quad (4.6.2)$$

Зауважимо, що формула (4.6.2) справджується і для двох прямих, що перетинаються: чисельник перетворюється в нуль, знаменник відмінний він нуля, тобто $d=0$ згідно із означенням найкоротшої віддалі між прямими, що перетинаються.

Якщо ж дві прямі паралельні, то найкоротша віддаль між ними дорівнює віддалі від будь – якої точки першої прямої до другої прямої.

Приклади розв'язування задач

4.6.1. *Знайти відстань від точки* $M_1(1;3;5)$ *до прямої* a, *по якій перетинаються площини* $2x+y+z-1=0$, $3x+y+2z-3=0$. *Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Для знаходження віддалі від точки $M_1(1;3;5)$ до заданої прямої, потрібно спочатку знайти координати деякої точки на цій прямій та її напрямний вектор.

Знайшовши довільний частковий розв'язок системи

$$\begin{cases} 2x+y+z-1=0, \\ 3x+y+2z-3=0, \end{cases}$$

наприклад, $x_0=2, y_0=-3, z_0=0$, маємо координати точки $M_0(2;-3;0)\in a$.

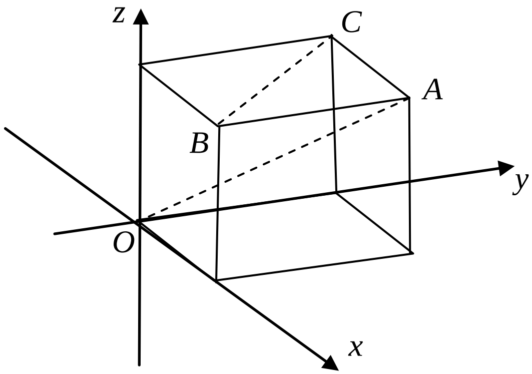
Згідно з постановкою задачі, в просторі задано прямокутну декартову систему координат. Отже, напрямним вектором прямої a є вектор $\vec{a}=[\vec{n}_1,\vec{n}_2]=(1;-1;-1)$, де $\vec{n}_1=(2;1;1)$, $\vec{n}_2=(3;1;2)$ – головні вектори площин, лінія перетину яких – пряма a (див. п.4.4.3).

Скориставшись формулою (4.6.1) в координатній формі, маємо

$$d=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 3-(-3) & 5-0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 5-0 & 1-2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 1-2 & 3-(-3) \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=\sqrt{14}.$$

4.6.2. *Знайти найкоротшу віддаль між діагоналлю куба і діагоналлю його грані, що не перетинає дану діагональ куба, якщо ребро куба дорівнює* 1.

Розв'язання. Введемо в просторі прямокутну декартову систему координат таким чином, щоб початок координат, наприклад, співпадав з вершиною куба, з якої проведено дану діагональ цього куба, а додатні півосі розташовувались би на прямих, на яких лежать ребра куба, що виходять із вказаної вершини.



Отже, діагональ куба розташована на прямій OA і, відповідно, діагональ грані куба, що не перетинає OA, проходить, наприклад, через вершини куба B та C. Зауважимо, що координати вказаних точок такі: $O(0;0;0)$; $A(1;1;1)$, $B(1;0;1)$, $C(0;1;1)$. Задача зводиться до задачі знаходження віддалі між мимобіжними прямими OA та BC.

Скористаємось формулою (4.6.2), позначивши:

$$\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA} = (1;1;1),$$

$$\vec{a}_2 = \overrightarrow{BC} = (-1;1;0),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OB} = (1;0;1).$$

Отже, шукана віддаль:

$$d = \frac{\left|\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right)\right|}{\left|\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2\right]\right|} = \frac{\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\left|(-1;-1;2)\right|} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

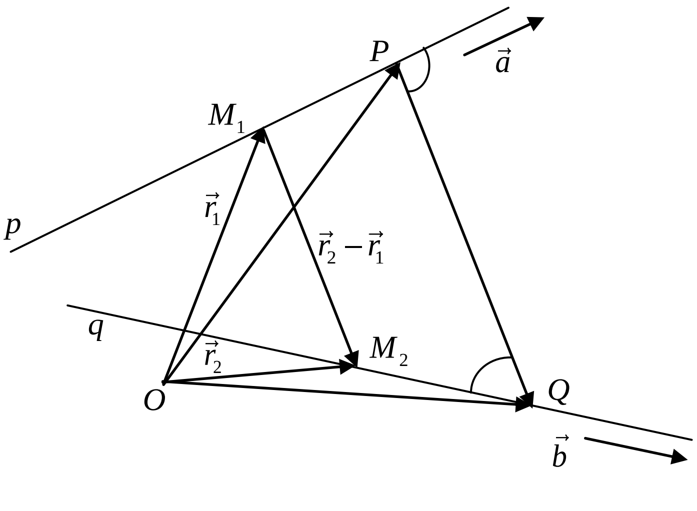
4.6.3. *Пряма p з напрямним вектором $\vec{a}$ проходить через точку M_1, радіус-вектор якої $\overrightarrow{OM_1} = \vec{r}_1$; пряма q з напрямним* *вектором* $\vec{b}$ *проходить через точку* M_2*, радіус-вектор якої* $\overrightarrow{OM_2} = \vec{r}_2$*. Прямі* p *та* q *неколінеарні. Задано радіус-вектори точок* P *та* Q*, що лежать відповідно на прямих* p *та* q*, якщо*

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r}_1 + \frac{\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right),\vec{b}\right)}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}\vec{a},$$

$$\overrightarrow{OQ} = \vec{r}_2 + \frac{\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right),\vec{a}\right)}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}\vec{b}.$$

Довести, що відрізок PQ *є відрізком спільного перпендикуляра до даних двох прямих. Система координат прямокутна декартова.*

Розв'язання. Зауважимо, що $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$ (див. рисунок).



Врахуємо задані в умові вирази для радіус-векторів $\overrightarrow{OP}$ і $\overrightarrow{OQ}$ точок P та Q, що лежать відповідно на прямих p та q. Скористаємось також відомою формулою для обчислення подвійного векторного добутку та співвідношенням, що випливає з неї (див. розділ 2), а саме:

$$\left[[\vec{q},\vec{r}],[\vec{p},\vec{c}]\right] = \vec{p}\left([\vec{q},\vec{r}],\vec{c}\right) - \vec{c}\left([\vec{q},\vec{r}],\vec{p}\right) =$$
$$= \vec{p}\left(\vec{q},\vec{r},\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{q},\vec{r},\vec{p}\right).$$

Тоді:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 +$$
$$+\frac{\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right),\vec{a}\right)}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}\vec{b} - \frac{\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right),\vec{b}\right)}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 +$$
$$+\frac{1}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}\left(\vec{b}\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right),\vec{a}\right) - \vec{a}\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right),\vec{b}\right)\right) =$$
$$= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \frac{1}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}\left[\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{r}_2-\vec{r}_1\right],\left[\vec{b},\vec{a}\right]\right] =$$
$$= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 - \frac{1}{\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2}\left(\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)\left[\vec{a},\vec{b}\right]^2 - \left[\vec{a},\vec{b}\right]\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1,\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)\right) =$$
$$= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 - \left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right) + \left[\vec{a},\vec{b}\right]\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1,\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right) =$$
$$= \left[\vec{a},\vec{b}\right]\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1,\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right).$$

Вектор $\overrightarrow{PQ} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1,\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right)$ колінеарний до векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто перпендикулярний до кожного з них. Це й доводить, що відрізок PQ є відрізком спільного перпендикуляра до даних двох прямих p та q.

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти віддаль від точки $(1;2;5)$ до кожної з наступних прямих:

1) $x=t, y=1-2t, z=3+t$;

2) $x+y-z+2=0$, $4x-3z+3=0$.

(Відповідь: 1) $\sqrt{\frac{35}{6}}$; 2) $8\sqrt{\frac{3}{26}}$).

2. Знайти віддаль від точки $(1;2;3)$ до прямої:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}.$$

(Відповідь: 5).

3. Знайти віддаль від точки $(2;3;-1)$ до наступних прямих:

1) $\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$;

2) $x=t+1, y=t+2, z=4t-13$;

3) $\begin{cases} 2x-2y+z+3=0, \\ 3x-2y+2z+17=0. \end{cases}$

(Відповідь: 1) 21; 2) 6; 3) 15).

4. Знайти рівняння і довжину висоти трикутника, утвореного перетином площини $3x-y+4z-12=0$ з координатними площинами, за умови, що вершина трикутника належить осі Oz.

(Відповідь: $x+3y=0$, $3x-y+4z-12=0$, $h=\sqrt{\frac{117}{5}}$).

5. Знайти найкоротшу віддаль між двома прямими:

1) $x=3+t, y=1-t, z=2+2t$ і $x=-t, y=2+3t, z=3t$;

2) $x+y-z+1=0$, $x+y=0$ і $x-2y+3z-6=0$, $2x-y+3z-6=0$;

3) $x+2y-z+1=0$, $2x-3y+z-4=0$ і $x+y+z-9=0$, $2x-y-z=0$.

(Відповідь: 1) $\dfrac{18}{\sqrt{110}}$; 2) 0 (прямі перетинаються); 3) $\dfrac{16}{\sqrt{102}}$).

6. Знайти найкоротшу віддаль між двома прямими:

1) $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y+4}{4}=\dfrac{z+3}{-2}$ і $\dfrac{x-21}{6}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z-2}{-1}$;

2) $x=2t-4, y=-t+4, z=-2t-1$ і $x=4t-5, y=-3t+5, z=-5t+5$;

3) $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+5}{2}=\dfrac{z-1}{-2}$, і $x=6t+9, y=-2t, z=-t+2$.

(Відповідь: 1) 13; 2) 3; 3) 7).

7. Знайти віддаль між двома паралельними прямими

$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{z}{2}$ і $\dfrac{x-7}{3}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$.

(Відповідь: 3).

8. Переконатись, що прямі

$$\frac{x+7}{3}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-9}{4} \text{ та } \begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0 \end{cases}$$

паралельні і знайти віддаль між ними. (Відповідь: 25).

Використана і рекомендована література

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979. – 511 с.
2. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1968. – 911 с.
3. Бакельман И.Я. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М.: Просвещение, 1976. – 511 с.
4. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. –М.: Наука, 1964. – 440 с.
5. Білоусова В.П. Аналітична геометрія. –К.: Вища школа, 1973. – 326 с.
6. Городецький В.В., Боднарук С.Б. Алгебра та геометрія в теоремах і задачах: Навчальний посібник. Частина І. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2009. – 336 с.
7. Городецький В.В., Боднарук С.Б., Лучко В.С. Аналітична геометрія. Системи координат. Найпростіші задачі аналітичної геометрії: навчальний посібник у 4-х част., - Ч1, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2011. – 92 с.
8. Городецький В.В., Боднарук С.Б., Довгей Ж.І. Аналітична геометрія: навчальний посібник: у 4 ч. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. – Ч.2. Елементи векторної алгебри – 100 с.
9. Городецький В.В., Боднарук С.Б. Аналітична геометрія. Площина і пряма в просторі: навчальний посібник: у 4 ч., – Ч.4, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2013. — 96 с.
10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. –М.: Наука, 1981. – 232 с.
11. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Изд-во Московского университета. 1961. – 232 с.
12. Конет І. М., Мойко В.В., Сорич В.А. Алгебра та геометрія / За ред. І.М. Конета. – Кам’янець – Подільський : Абетка – НОВА, 2003. – 452 с.
13. Моденов П.С. Аналитическая геометрия. –М.: Просвещение, 1966. – 366 с.
14. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. –М.: Наука, 1976. – 384 с.
15. Погорєлов О.В. Геометрія: Навч. посібник для 7-11 кл. серед. шк. – 9-те вид. – К.: Рад. шк., 1990. – 287 с.

ЗМІСТ

ДОДАТКИ

Контрольна робота. Тема «Декартові системи координат на прямій. Системи координат на площині та в просторі»

Варіант 1

1. Відрізок, обмежений точками $A(-2)$ і $B(19)$, розділений на три рівні частини. Визначити координати точок поділу.
(Відповідь: (5) і (12)).

2. Знайти координати точок, які симетричні точкам $A(2;3)$, $B(-3;2)$ відносно: 1) осі Ox; 2) осі Oy; 3) початку координат; 4) бісектриси першого координатного кута; 5) бісектриси другого координатного кута.
(Відповідь: 1) $A(2;-3)$, $B(-3;-2)$; 2) $A(-2;3)$, $B(3;2)$; 3) $A(-2;-3)$, $B(3;-2)$; 4) $A(3;2)$, $B(2;-3)$; 5) $A(-3;-2)$, $B(-2;3)$.

3. Дано вершини трикутника $A(-1;-3)$, $B(3;-5)$ і $C(-5;7)$. Визначити координати середин його сторін.
(Відповідь: $(2;-4)$, $(-1;1)$, $(-2;2)$).

4. Дано точки $A(3;-1)$ і $B(2;1)$. Визначити координати точки M, симетричній точці A відносно точки B.
(Відповідь: $M(1;3)$).

5. Знайти координати вершин трикутника, знаючи середини його сторін $M(1;-1)$, $N(-2;4)$ і $P(-3;2)$.
(Відповідь: $(0;-3)$, $(2;1)$, $(-6;7)$).

6. Дано три послідовні вершини паралелограма $A(4;-4)$, $B(6;-2)$, $C(0;4)$. Визначити координату четвертої вершини D, яка протилежна до B.
(Відповідь: $D(-2;2)$).

7. Відрізок прямої, обмежений точками $A(-1;8;3)$ і $B(9;-7;-2)$, розділений точками C, D, E, F на п'ять рівних частин. Знайти координати цих точок.
(Відповідь: $C(1;5;2)$, $D(3;2;1)$, $E(5;-1;0)$, $F(7;-4;-1)$).

Варіант 2

1. Визначити координати кінців A і B відрізка, який точками $P(-25)$ і $Q(-9)$ розділений на три рівні частини.
(Відповідь: $A(7)$ і $B(-41)$).
2. Знайти координати точок, які симетричні точкам $D(-3;-5)$, $E(-4;6)$ відносно: 1) осі Ox; 2) осі Oy;
3) початку координат; 4) бісектриси першого координатного кута; 5) бісектриси другого координатного кута.
(Відповідь: 1) $D(-3;5)$, $E(-4;6)$; 2) $D(3;-5)$, $E(4;6)$;
3) $D(3;5)$, $E(4;-6)$; 4) $D(-5;-3)$, $E(6;-4)$; 5) $D(5;3)$, $E(-6;4)$).
3. Дано вершини трикутника $A(3;-7)$, $B(5;2)$ і $C(-1;0)$. Знайти координати середин його сторін.
(Відповідь: $(4;-2{,}5)$, $(2;1)$, $(1;-3{,}5)$).
4. Дано дві точки $A(2;-1)$, $B(1;1)$. Знайти координати точки N, що симетрична точці B відносно точки A.
(Відповідь: $N(3;-3)$).
5. Знайти координати вершин трикутника, якщо середини його сторін $P(3;-2)$, $Q(1;6)$ і $R(-4;2)$.
(Відповідь: $(-2;-6)$, $(8;2)$, $(-6;10)$).
6. Дано три вершини паралелограма: $A(3;1)$, $B(4;6)$ і $C(-4;3)$. Визначити координати четвертої вершини D, яка протилежна до B.
(Відповідь: $(-5;-2)$).

7. Визначити координати відрізка, який точками $C(2;0;2)$ і $D(5;-2;0)$ розділено на три рівні частини.
(Відповідь: $A(-1;2;4)$, $B(8;-4;-2)$).

Контрольна робота. Тема «Задача про віддаль між двома точками»

Варіант 1

1. Довести, що трикутник із вершинами $A(3;-1;2)$, $B(0;-4;2)$, $C(-3;2;1)$ рівнобедрений.
2. На осі абсцис знайти точку, відстань від якої до точки $A(-3;4;8)$ дорівнює 12.
(Відповідь: $(5;0;0)$ і $(-11;0;0)$).
3. Дано вершини трикутника $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ і $C(-4;7;5)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.
(Відповідь: $\frac{2\sqrt{74}}{3}$).
4. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(3;-7)$ і $B(-1;4)$. Обчислити його площу.
(Відповідь: 137).
5. Довжина сторони ромба дорівнює $5\sqrt{10}$, дві його протилежні вершини – точки $P(4;9)$ і $Q(-2;1)$. Обчислити площу цього ромба.
(Відповідь: 150).
6. На осі абсцис знайти таку точку M, відстань від якої до точки $N(2;-3)$ дорівнює 5.
(Відповідь: $M_1(6;0)$ і $M_2(-2;0)$).

7. Обчислити відстань між двома точками $M(3;0)$, $N(1;-2)$ за умови, що координатний кут $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$.

(Відповідь: $d = 2$).

7. Відносно косокутної системи координат із кутом $\omega = \dfrac{\pi}{3}$ дано трикутник: $A(0;0)$, $B(7;4)$, $C(-1;6)$. Обчислити довжину медіани, яка проведена з вершини A.

(Відповідь: $AM = 7$).

Варіант 2

1. Довести, що трикутник із вершинами $A(3;-1;6)$, $B(-1;7;-2)$, $C(1;-3;2)$ – прямокутний.

2. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1;-3;7)$ і $B(5;7;-5)$.

(Відповідь: $(0;2;0)$).

3. Знайти довжину бісектриси внутрішнього кута A трикутника ABC, заданого вершинами $A(4;-5)$, $B(-2;3)$, $C(0;-2)$.

(Відповідь: $\dfrac{14}{3}\sqrt{2}$).

4. Дано дві протилежні вершини квадрата $P(3;5)$ і $Q(1;-3)$. Обчислити його площу.

(Відповідь: 34).

5. Сторона ромба дорівнює $5\sqrt{2}$, дві його протилежні вершини точки – $P(3;-4)$ і $Q(1;2)$. Обчислити довжину висоти цього ромба.

(Відповідь: $4\sqrt{2}$).

6. На осі ординат знайти таку точку M, відстань від якої до точки $N(-8;13)$ дорівнює 17.

(Відповідь: $M_1(0;28)$ і $M_2(0;-2)$).

7. Відносно косокутної системи координат із кутом $\omega = \frac{\pi}{3}$ дано трикутник: $A(0;0)$, $B(7;4)$, $C(-1;6)$. Обчислити довжину медіани, яка проведена з вершини A.
(Відповідь: $AM = 7$).

Контрольна робота. Тема «Задача про віддаль між двома точками»

Варіант 1

1. Довести, що трикутник із вершинами $A(3;-1;2)$, $B(0;-4;2)$, $C(-3;2;1)$ рівнобедрений.
2. На осі абсцис знайти точку, відстань від якої до точки $A(-3;4;8)$ дорівнює 12.
(Відповідь: $(5;0;0)$ і $(-11;0;0)$).
3. Дано вершини трикутника $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ і $C(-4;7;5)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.
(Відповідь: $\frac{2\sqrt{74}}{3}$).
4. Дано дві суміжні вершини квадрата $A(3;-7)$ і $B(-1;4)$. Обчислити його площу.
(Відповідь: 137).
5. Довжина сторони ромба дорівнює $5\sqrt{10}$, дві його протилежні вершини – точки $P(4;9)$ і $Q(-2;1)$. Обчислити площу цього ромба.
(Відповідь: 150).

6. На осі абсцис знайти таку точку M , відстань від якої до точки $N(2;-3)$ дорівнює 5.

(Відповідь: $M_1(6;0)$ і $M_2(-2;0)$).

7. Обчислити відстань між двома точками $M(3;0)$, $N(1;-2)$ за умови, що координатний кут $\omega = \dfrac{2\pi}{3}$.

(Відповідь: $d = 2$).

7. Відносно косокутної системи координат із кутом $\omega = \dfrac{\pi}{3}$ дано трикутник: $A(0;0)$, $B(7;4)$, $C(-1;6)$. Обчислити довжину медіани, яка проведена з вершини A.

(Відповідь: $AM = 7$).

Варіант 2

1. Довести, що трикутник із вершинами $A(3;-1;6)$, $B(-1;7;-2)$, $C(1;-3;2)$ прямокутний.

2. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1;-3;7)$ і $B(5;7;-5)$.

(Відповідь: $(0;2;0)$).

3. Знайти довжину бісектриси внутрішнього кута A трикутника ABC, заданого вершинами $A(4;-5)$, $B(-2;3)$, $C(0;-2)$.

(Відповідь: $\dfrac{14}{3}\sqrt{2}$).

4. Дано дві протилежні вершини квадрата $P(3;5)$ і $Q(1;-3)$. Обчислити його площу.

(Відповідь: 34).

5. Сторона ромба дорівнює $5\sqrt{2}$, дві його протилежні вершини точки – $P(3;-4)$ і $Q(1;2)$. Обчислити довжину висоти цього ромба.

(Відповідь: $4\sqrt{2}$).
6. На осі ординат знайти таку точку M , відстань від якої до точки $N(-8;13)$ дорівнює 17 .
(Відповідь: $M_1(0;28)$ і $M_2(0;-2)$).

7. Відносно косокутної системи координат із кутом $\omega = \frac{\pi}{3}$ дано трикутник: $A(0;0)$, $B(7;4)$, $C(-1;6)$. Обчислити довжину медіани, яка проведена з вершини A .
(Відповідь: $AM = 7$).

Контрольна робота. Тема «Полярна, сферична і циліндрична системи координат»

Варіант 1

1. Побудувати точки, задані полярними координатами: $A_1\left(2;\frac{\pi}{3}\right)$, $A_2\left(1;\frac{\pi}{4}\right)$, $A_3\left(3;-\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Знайти відстань між двома точками, заданими в полярних координатах: $A\left(2;\frac{\pi}{12}\right)$, $B\left(1;\frac{5\pi}{12}\right)$.

(Відповідь: $d = \sqrt{3}$).
3. Полюс полярної системи координат співпадає з початком прямокутної декартової системи координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю абсцис. У полярній системі координат дано точки $M_1\left(6;\frac{\pi}{2}\right)$, $M_2(5;0)$, $M_3\left(2;\frac{\pi}{4}\right)$. Знайти декартові координати цих точок.

(Відповідь: $M_1(0;6)$, $M_2(5;0)$, $M_3(\sqrt{2};\sqrt{2})$).

4. Полюс полярної системи координат співпадає з початком прямокутної декартової системи координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю абсцис. У декартовій системі координат дано точки $M_1(1;5)$, $M_2(-3;0)$. Знайти полярні координати цих точок.

(Відповідь: $M_1\left(5;\dfrac{\pi}{2}\right)$, $M_2(3;\pi)$).

5. В полярній системі координат дано точки $A\left(8;-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ і $B\left(6;\dfrac{\pi}{3}\right)$. Обчислити полярні координати середини відрізка, який сполучає точки A і B.

(Відповідь: $\left(1;-\dfrac{2\pi}{3}\right)$).

6. В полярній системі координат дано дві суміжні вершини квадрата $M_1\left(12;-\dfrac{\pi}{10}\right)$ і $M_2\left(3;\dfrac{\pi}{15}\right)$. Визначити його площу.

(Відповідь: $9(17-4\sqrt{3})$).

7. Одна з вершин трикутника OAB знаходиться в полюсі, дві інші точки $A\left(5;\dfrac{\pi}{4}\right)$ і $B\left(4;\dfrac{\pi}{12}\right)$. Знайти площу цього трикутника.

(Відповідь: 5).

8. Побудувати точки, циліндричні координати яких $A_1\left(3;\dfrac{\pi}{6};1\right)$, $A_2\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\pi}{2};2\right)$, $A_1(3;\pi;-1)$.

9. Знайти сферичні координати точок за їхніми прямокутними координатами: $A(-8;-4;1)$, $B(-2;-2;-1)$.

(Відповідь: $A\left(9;-\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right);\arcsin\frac{1}{9}\right)$,

$B\left(3;-\frac{3\pi}{4};\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$).

Варіант 2

1. Побудувати точки, задані полярними координатами: $A_1\left(3;\frac{\pi}{6}\right)$, $A_2\left(2;-\frac{\pi}{4}\right)$, $A_3\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.

2. Знайти відстань між двома точками, заданими в полярних координатах: $A\left(4;\frac{\pi}{5}\right)$, $B\left(6;\frac{6\pi}{5}\right)$.

(Відповідь: $d=10$).

3. Полюс полярної системи координат співпадає з початком прямокутної декартової системи координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю абсцис. У полярній системі координат дано точки $M_4\left(10;-\frac{\pi}{3}\right)$, $M_5\left(8;\frac{2\pi}{3}\right)$,

$M_6\left(12;-\frac{\pi}{6}\right)$. Знайти декартові координати цих точок.

(Відповідь: $M_4(5;-5\sqrt{3})$, $M_5(-4;4\sqrt{3})$, $M_6(6\sqrt{3};-6)$).

4. Полюс полярної системи координат співпадає з початком прямокутної декартової системи координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю абсцис. У декартовій системі координат дано точки $M_4\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$, $M_5\left(1;-\sqrt{3}\right)$. Знайти полярні координати цих точок.

(Відповідь: $M_4\left(2;-\frac{3}{4}\pi\right)$, $M_5\left(2;-\frac{\pi}{3}\right)$).

5. В полярній системі координат дано точки $A\left(12;\frac{4\pi}{9}\right)$ і $B\left(12;-\frac{2\pi}{9}\right)$. Обчислити полярні координати середини відрізка AB.

(Відповідь: $\left(6;\frac{\pi}{9}\right)$).

6. В полярній системі координат дано дві протилежні вершини квадрата $P\left(6;-\frac{7\pi}{12}\right)$ і $Q\left(4;\frac{\pi}{6}\right)$. Визначити його площу.

(Відповідь: $2(13+6\sqrt{2})$).

7. Обчислити площу трикутника, вершини якого $A\left(3;\frac{\pi}{8}\right)$, $B\left(8;\frac{7\pi}{24}\right)$ і $C\left(6;\frac{5\pi}{8}\right)$ задані в полярних координатах.

(Відповідь: $3(4\sqrt{3}-1)$).

8. Побудувати точки, циліндричні координати яких $A_1\left(2;\frac{\pi}{3};4\right)$, $A_2\left(\frac{1}{4};\frac{\pi}{2};1\right)$, $A_1(-3;\pi;1)$.

9. Знайти сферичні координати точок за їхніми прямокутними координатами: $C(0;-4;3)$, $D(1;-1;-1)$.

(Відповідь: $C\left(5;-\frac{\pi}{2};\arcsin\frac{3}{5}\right)$, $D\left(\sqrt{3};-\frac{\pi}{4};\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$).

Контрольна робота. Тема «Поняття про лінію на площині та її рівняння»

Варіант 1

1. Написати рівняння геометричного місця точок, які знаходяться на відстані a від осі Oy.
(Відповідь: прямі $x \pm a = 0$).
2. Вивести рівняння геометричного місця точок, абсолютна величина різниці віддалей яких до двох даних точок $F_1(-5;0)$ і $F_2(5;0)$ – величина стала й дорівнює 6.
(Відповідь: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$).
3. Знайти геометричне місце точок, сума квадратів відстаней яких до трьох даних точок – величина стала.
(Відповідь: коло, центр якого співпадає з центром ваги системи із трьох даних точок, в яких розміщені рівні маси).
4. Визначити геометричне місце середин відрізків дотичних до кола $x^2 + y^2 = R^2$, які знаходяться між осями координат.
(Відповідь: $R^2(x^2 + y^2) = 4x^2y^2$).
5. Написати в полярних координатах рівняння прямої, яка перпендикулярна до полярної осі й відтинає на ній відрізок $OA = a$.
(Відповідь: $r = \frac{a}{\cos\varphi}$).

Варіант 2

1. Написати рівняння геометричного місця точок, які знаходяться на відстані b від осі Ox.
(Відповідь: прямі $y \pm b = 0$).

2. Вивести рівняння геометричного місця точок, сума віддалей яких до двох даних точок $F_1(-3;0)$ і $F_2(3;0)$ є величиною сталою, що дорівнює 10.

(Відповідь: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$).

3. Знайти геометричне місце точок, сума квадратів відстаней яких до сторін прямокутника стала, за умови, що цьому геометричному місцю належить одна з вершин прямокутника.

(Відповідь: коло, описане навколо даного прямокутника).

4. Знайти геометричне місце точок, добуток відстаней яких до двох сталих точок $F_1(-b;0)$ і $F_2(b;0)$ – величина стала й дорівнює a^2 (овал Кассіні).

(Відповідь: $(x^2+y^2)^2-2b^2(x^2-y^2)=a^4-b^4$).

5. Написати рівняння кола радіусом a в полярних координатах, прийнявши за полюс точку O на колі, а за полярну вісь діаметр OA.

(Відповідь: $r=2a\cos\varphi$).

Контрольна робота. Тема «Вектори. Лінійні операції над векторами. Лінійна залежність векторів.»

Варіант 1

1. Дано: $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$ і $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$.

(Відповідь: 20).

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi=30^0$, $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=4$. Знайти $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$.

(Відповідь: $|\vec{a}+\vec{b}|=5, |\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$).

3. Знайти вершини трикутника, знаючи середини його сторін $M(1;-1)$, $N(-2;4)$ і $P(-3;2)$.
(Відповідь: $(0;-3),(2;1),(-6;7)$).
4. З однієї точки площини відкладені вектори $\vec{a}=(-12;16)$ та $\vec{b}=(12;5)$. Знайти координати одиничного вектора, відкладеного з тієї ж точки, який ділить кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ навпіл.
(Відповідь: $\left(\frac{3}{\sqrt{130}};\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$).
5. Знаючи радіус-вектори $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3$ вершин трикутника, знайти радіус-вектор точки перетину його медіан.
(Відповідь: $\vec{r}=\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3}{3}$).
6. Дано вершини трикутника $A(3;-4)$, $B(2;-1)$, $C(5;8)$. Знайти точку перетину бісектриси внутрішнього кута B зі стороною AC.
(Відповідь: $\left(\frac{7}{2};-1\right)$).

Варіант 2

1. Дано: $|\vec{a}|=13$, $|\vec{b}|=19$ і $|\vec{a}+\vec{b}|=24$. Знайти $|\vec{a}-\vec{b}|$.
(Відповідь: 22).
2. Визначити $|\vec{a}+\vec{b}|$ і $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні, причому $|\vec{a}|=5$ і $|\vec{b}|=12$.
(Відповідь: 13 та 13).
3. Знайти вершини трикутника, якщо середини його сторін $P(3;-2)$, $Q(1;6)$ і $R(-4;2)$.
(Відповідь: $(-2;-6),(8;2),(-6;10)$).

4. Два вектори $\vec{a} = (2;-3;6)$ і $\vec{b} = \left(-1;2;-2\right)$ виходять з однієї точки. Визначити координати вектора $\vec{c}$, напрямленого по бісектрисі кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, за умови, що $|\vec{c}| = 3\sqrt{42}$.
(Відповідь: $\vec{c} = \left(-3;15;12\right)$).

5. Знаючи радіус-вектори $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ трьох послідовних вершин паралелограма, знайти радіус-вектор $\vec{r}$ точки перетину діагоналей паралелограма.
(Відповідь: $\vec{r} = \dfrac{\vec{r}_1 + \vec{r}_3}{2}$).

6. Знайти довжину бісектриси внутрішнього кута A трикутника ABC, заданого вершинами $A(4;-5)$, $B(-2;3)$, $C(0;-2)$.
(Відповідь: $\dfrac{14}{3}\sqrt{2}$).

Контрольна робота. Тема «Скалярне множення векторів»

Варіант 1

1. Нехай $\left|\vec{a}\right| = 13, \left|\vec{b}\right| = 19, \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = 24$. Знайти $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$.
(Відповідь: 22).

2. Обчислити скалярний добуток $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$, якщо $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, де $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.
(Відповідь: $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -5$).

3. Дано вершини трикутника $A(0;-1;4)$, $B(-3;-1;0)$, $C(4;-1;1)$. Визначити його внутрішній кут при вершині B.

(Відповідь: 45^0)

4. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 4\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 6$ і $(\vec{m}\,\hat{,}\,\vec{n}) = \dfrac{\pi}{4}$.

(Відповідь: $|\vec{a} + \vec{b}| = 30, |\vec{a} - \vec{b}| = 2\sqrt{593}$).

5. Відомо, що $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5.$ При якому значенні α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

(Відповідь: $\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$).

6. Вектор $\vec{x}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3;2;2)$ і $\vec{b} = (18;-22;-5)$, утворює з віссю Oy тупий кут. Знайти його координати, якщо $|\vec{x}| = 14$.

(Відповідь: $\vec{x} = (-4;-6;12)$).

Варіант 2

1. Нехай $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 12$, а кут між векторами $\vec{a}$ та $\overleftarrow{b}$ – прямий. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$ і $|\vec{a} + \vec{b}|$.

(Відповідь: $|\vec{a} - \vec{b}| = 13$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$).

2. В трикутнику ABC дано довжини його сторін $BC = 5$, $CA = 6$, $AB = 7$. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$.

(Відповідь: -19).

3. Відомо, що $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5.$ При якому значенні α вектори $\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ взаємно перпендикулярні

(Відповідь: $\alpha = \pm\frac{3}{5}$).

4. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}$, де $\vec{p}$ і $\vec{q}$ – одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

(Відповідь: $\frac{\pi}{4}$).

5. Дано вершини чотирикутника $A(2;-1;2)$, $B(2;5;0)$, $C(-3;2;1)$ і $D(-4;-4;3)$. Знайти кут між його діагоналями AC і BD.

(Відповідь: $\frac{\pi}{2}$).

6. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи що він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2;3;-1)$ і $\vec{b} = (1;-2;3)$ та задовольняє умову $(\vec{x}, \vec{c}) = -6$ де $\vec{c} = (2;-1;1)$.

(Відповідь: $\vec{x} = (-3;3;3)$).

Контрольна робота. Тема «Векторний добуток векторів»

Варіант 1

1. Знайти площу трикутника, координати вершин якого відомі: $A(-2;1;2)$, $B(3;-3;4)$, $C(1,0,9)$.

(Відповідь: $\sqrt{391{,}5}$ кв.од.).

2. Дано $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ та $(\vec{a}, \vec{b}) = 12$. Обчислити $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$.

(Відповідь:16).

3. При якому значенні λ вектори $\vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b}$ та $\vec{p} = 4\vec{a} - \lambda\vec{b}$ будуть колінеарні, за умови, що $\vec{a}$ та $\vec{b}$ - неколінеарні.

(Відповідь:12).

4. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(4;-2;-3)$ і $\vec{b}=(0;1;3)$, утворює з віссю Oy гострий кут. Знаючи, що $\left|\vec{x}\right|=26,$ знайти його координати.

(Відповідь: $\vec{x}=\left(6;24;-8\right)$).

5. Площа трикутника ABC дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{2}$. Дві його вершини лежать у точках $A(2;-1;3)$ і $B(1;2;1)$. Знайти координати вершини C, якщо вона лежить на осі Oz.

(Відповідь: $\left(0;0;2\right)$).

Варіант 2

1. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}=\left(3;-5;-2\right)$ та $\vec{b}=\left(3;2;-10\right)$.

(Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{78}$).

2. Дано $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=26$ і $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=72$. Обчислити $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

(Відповідь: ± 30).

3. Знайти вектор $\vec{x}$, знаючи, що він перпендикулярний до векторів $\vec{a}=(2;-3;1)$ і $\vec{b}=(1;-2;3)$ і задовольняє умову $\left(\vec{x},\vec{c}\right)=10$, де $\vec{c}=(1;2;-7)$.

(Відповідь: $\vec{x}=\left(7;5;1\right)$).

4. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{s}$ та $\vec{t}$, якщо відомо, що вектори $\vec{p}=\vec{s}+2\vec{t}$ і $\vec{q}=5\vec{s}-4\vec{t}$ взаємно перпендикулярні.

(Відповідь: $\frac{\pi}{3}$).

5. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярний до осі Oz і до вектора $\vec{a}=(16;-30;6)$, утворює гострий кут із віссю Ox. Знаючи, що $|\vec{c}|=17$, знайти його координати.
(Відповідь: $\vec{c}=(15;8;0)$).

Контрольна робота. Тема «Мішаний добуток трьох векторів. Подвійний векторний добуток»

Варіант 1

1. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(3;2;2)$, $\vec{b}=(1;-1;3)$ та $\vec{c}=(1;9;-11)$;
(Відповідь: так).
2. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=(3;4;0)$, $\vec{b}=(0;-3;1)$ та $\vec{c}=(0;2;5)$.
(Відповідь: 51).
3. Вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, що утворюють праву трійку, взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, обчислити $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.
(Відповідь: 24).
4. Точки $A(-1,3,-2)$, $B(-2,6,2)$, $C(-1,7,1)$, $D(2;6;-5)$ є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник плоский, та знайти його площу.
(Відповідь: $\sqrt{74}$).
5. Об'єм піраміди $V=2$, три її вершини лежать у точках $A(2;1;3)$, $B(3;3;2)$, $C(1;2;4)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі Oz.
(Відповідь: $D_1(0;0;1), D_2(0;0;9)$).

6. Дано вектори $\vec{a}=(2;-3;1)$, $\vec{b}=(-3;1;2)$ і $\vec{c}=(1;2;3)$. Обчислити $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]$ і $\left[\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right]$.
(Відповідь: $(-7;14;-7)$, $(10;13;19)$)

Варіант 2

1. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(5;-1;3)$, $\vec{b}=(2;1;2)$, $\vec{c}=(3;-1;-2)$.
(Відповідь: ні).
2. З'ясувати, чи лінійно залежні вектори $\vec{a}=(1;2;3)$, $\vec{b}=(4;5;6)$, $\vec{c}=(7;8;9)$.
(Відповідь: так).
3. З'ясувати, чи лежать точки $A(3;3;2)$, $B(7;1;5)$, $C(1;1;2)$ та $D(3;2;3)$ в одній площині.
(Відповідь: ні).
4. Знайти об'єм піраміди за відомими координатами її вершин: $A_1(2,1,-2)$, $A_2(3,3,3)$, $A_3(1,1,2)$, $A_4(-1,-2,-3)$.
(Відповідь: $\frac{1}{6}$ куб.од.).
5. У тетраедрі з вершинами в точках $A(2;2;1)$, $B(3;1;2)$, $C(3;3;2)$ і $D(4;5;-3)$ обчислити висоту $h=\left|\overrightarrow{DE}\right|$.
(Відповідь: $3\sqrt{2}$).
6. Довести тотожність $\left[\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right]=\vec{b}\left(\vec{a},\vec{c}\right)-\vec{a}\left(\vec{b},\vec{c}\right)$

Контрольна робота. Тема «Пряма на площині»

Варіант 1

1. Сторони AB, BC і AC трикутника ABC задано рівняннями (в цій задачі і надалі під рівнянням сторін розумітимемо рівняння прямих, на яких лежать сторони) $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Визначити координати його вершин.
(Відповідь: $A(2;-1)$, $B(-1;3)$, $C(2;4)$).

2. Скласти рівняння прямої, яка має кутовий коефіцієнт 3 і відтинає на осі ординат відрізок, рівний 4. Система координат афінна.
(Відповідь: $3x-y+4=0$).

3. Написати рівняння прямої, що паралельна до прямої $2x+5y=0$ і утворює разом з осями координат трикутник, площа якого дорівнює 5.
(Відповідь: $2x+5y\pm10=0$).

4. Знайти точку Q, симетричну точці $P(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.
(Відповідь: $Q(11;-11)$).

5. Дано дві вершини трикутника $A(-6;2)$, $B(2;-2)$ і точку $H(1;2)$ перетину його висот. Знайти координати вершини С.
(Відповідь: $C(2;4)$).

6. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими, які перетинаються:
$x-3y+5=0$, $3x-y-2=0$;
(Відповідь: $4x-4y+3=0$, $2x+2y-7=0$).

Варіант 2

1. Дано рівняння двох сторін паралелограма $8x+3y+1=0$, $2x+y-1=0$ і рівняння однієї із його діагоналей $3x+2y+3=0$. Визначити координати вершин цього паралелограма.
(Відповідь: $(1;-3)$, $(-2;5)$, $(5;-9)$ і $(8;-17)$).

2. Скласти рівняння прямої, яка відтинає на осі Ox відрізок, що дорівнює 3 і проходить через точку $(-5;3)$. Система координат афінна.
(Відповідь: $3x+8y-9=0$).

3. Площа трикутника $S=1,5$ кв. од.; дві його вершини – точки $A(2;-3)$ і $B(3;-2)$, центр ваги цього трикутника належить прямій $3x-y-8=0$. Визначити координати третьої вершини C.
(Відповідь: $C_1(1;-1)$ або $C_2(-2;-10)$).

4. Знайти точку M_1, симетричну точці $M_2(8;-9)$ відносно прямої, що проходить через точки $A(3;-4)$ і $B(-1;-2)$.
(Відповідь: $M_1(10;-5)$).

5. В трикутнику ABC відомі сторона AB: $4x+y-12=0$, висота BH: $5x-4y-15=0$ і висота AH: $2x+2y-9=0$. Написати рівняння двох інших сторін і третьої висоти.
(Відповідь: $x-y-3=0$ (BC), $4x+5y-20=0$ (AC), $3x-12y-1=0$ (CH)).

6. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими, які перетинаються:
2) $x-2y-3=0$, $2x+4y+7=0$;

(Відповідь: $4x+1=0$, $8y+13=0$).

Контрольна робота. Тема «Площина в просторі»

Варіант 1

1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $(3;5;-7)$ і відтинає на осях координат рівні відрізки.

(Відповідь: $x+y+z-1=0$).

2. Написати рівняння площини, що проходить через початок координат і через лінію перетину площин $2x+5y-6z+4=0$, $3x+2z+6=0$.

(Відповідь: $6x+9y-22z=0$).

3. На осі Oz знайти точку, рівновіддалену від точки $(1;-2;0)$ і від площини $3x-2y+6z-9=0$.

(Відповідь: умову задачі задовольняють дві точки $(0;0;-2)$ та $\left(0;0;-6\frac{4}{13}\right)$).

4. Знайти кут між двома площинами $3x+y-2z+4=0$, $x-7y+2z=0$, в якому лежить точка $(1;1;1)$.

(Відповідь: $\arccos\left(-\frac{4}{3\sqrt{21}}\right)$).

5. Написати рівняння площини, що ділить навпіл тупий двогранний кут між площинами $3x-4y-z+5=0$ та $4x-3y+z+5=0$.

(Відповідь: $x+y+2z=0$).

Варіант 2

1. Визначити об'єм тетраедра, обмеженого координатними площинами і площиною $2x+3y+6z-18=0$.

(Відповідь: $V=27$ куб. од.).

2. Написати рівняння площини, що проходить через точку $(-3;1;0)$ і через пряму $x+2y-z+4=0$, $3x-y+2z-1=0$.

(Відповідь: $20x+19y-5z+41=0$).

3. На осі Oy знайти точку, віддалену від площини $x+2y-2z-2=0$ на віддаль $d=4$.

(Відповідь: умову задачі задовольняють дві точки $(0;7;0)$ та $(0;-5;0)$).

4. Визначити, де лежить точка $M(3;2;-1)$: всередині гострого чи тупого кута, утвореного двома площинами $5x-y+z+3=0$ та $4x-3y+2z+5=0$.

(Відповідь: точка M лежить всередині тупого кута).

5. Написати рівняння площини, що ділить навпіл гострий двогранний кут між площинами $2x-3y-4z-3=0$ та $4x-3y-2z-3=0$.

(Відповідь: $x-y-z-1=0$).

Контрольна робота. Тема «Пряма в просторі»

Варіант 1

1. Дано вершини трикутника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$ і $C(-5;14;-3)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

(Відповідь: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+7}{-8}$).

2. Довести паралельність наступних прямих:

$\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

3. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $(2;3;1)$ і перетинає прямі $x+y=0$, $x-y+z+4=0$ і $x+3y-1=0$, $x+z-2=0$. Система координат афінна.

(Відповідь: $x-9y+5z+20=0$, $9x-3y+10z-19=0$).

4. Знайти проекцію точки $A(1;2;8)$ на пряму $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$. Визначити точку, симетричну точці $A(1;2;8)$ відносно заданої прямої.

(Відповідь: $P(3;-1;1)$, $A_1(5;-4;-6)$).

5. Знайти віддаль від точки $(2;3;-1)$ до наступної прямої

$\frac{x-5}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+25}{-2}$.

(Відповідь: 21).

Варіант 2

1. Дано вершини трикутника $A(1;-2;-4)$, $B(3;1;-3)$ і $C(5;1;-7)$. Скласти параметричні рівняння його висоти, опущеної з вершини B на протилежну сторону.

(Відповідь: $x=3t+3$, $y=15t+1$, $z=19t-3$).

2. Довести паралельність наступних прямих:

$x=2t+5$, $y=-t+2$, $z=t-7$ і $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$

3. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M_1(-1;2;3)$ перпендикулярно до вектора $\vec{a} = (6;-2;-3)$ і перетинає пряму $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-5}$.

(Відповідь: $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z+3}{6}$).

4. Знайти проекцію точки $M(2;-1;3)$ на площину $x+2y-z-3=0$. Визначити точку, симетричну точці $M(2;-1;3)$ відносно заданої площини.

(Відповідь: $P(3;1;2)$, $M_1(4;3;1)$).

5. Знайти віддаль від точки $(2;3;-1)$ до наступної прямої: $x = t+1, y = t+2, z = 4t-13$;

(Відповідь: 6).