

Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

ФІЗИЧНЕ ТА КОМПЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ОПТИЦІ

Методичні рекомендації
до лабораторних робіт

Чернівці
ЧНУ
2021

УДК 535.41(075.8)

M173

Друкується за ухвалою Вченої ради Інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича (протокол №9 від 24.09.2021)

M 173 Фізичне та комп'ютерне моделювання в оптиці: Методичні рекомендації до лабораторних робіт /Укл.: П.П.Максимяк.
– Чернівці: ЧНУ, 2021. – 32 с.

У даних методичних рекомендаціях наведено роботи лабораторного практикуму з курсу «Фізичне та комп'ютерне моделювання в оптиці». Зміст лабораторних робіт охоплює основні розділи курсу.

Всі програми для моделювання створено співробітниками та студентами кафедри кореляційної оптики

Призначена для студентів, що навчаються за спеціальністю 152 Метрологія та інформаційно-вимірвальна техніка
ОНП «Фотоніка: комп'ютерні оптичні системи»

УДК 535.41(075.8)

Навчальне видання

Фізичне та комп'ютерне моделювання в оптиці
Методичні рекомендації до лабораторних робіт

Укладач: Максимяк Петро Петрович

Відповідальний редактор Ангельський Олег В'ячеславович.

Зміст

1. Лабораторна робота №1. КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФРАКЦІЇ ОПТИЧНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НА ШОРСТКІЙ ПОВЕРХНІ ТА МЕТОДИ ЇЇ ДІАГНОСТИКИ.....3
2. Лабораторна робота №2. МАТЕМАТИЧНЕ ТА ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СВІТЛОРОЗСІЮВАННЯ НА БРОУНІВСЬКИХ ЧАСТИНКАХ.....11
3. Лабораторна робота №3. ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФРАКЦІЇ ОПТИЧНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НА ОДНОМІРНИХ ТА ДВОМІРНИХ ФРАКТАЛАХ.....22

Лабораторна робота №1

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФРАКЦІЇ ОПТИЧНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НА ШОРСТКІЙ ПОВЕРХНІ ТА МЕТОДИ ЇЇ ДІАГНОСТИКИ

Мета роботи: навчитись моделювати шорсткі поверхні, розраховувати розсіяні поля, визначати характеристики полів та встановлювати діагностичні зв'язки; перевірити ці зв'язки за допомогою фізичного моделювання.

Завдання до роботи

1. Вивчити класифікацію шорстких поверхонь.
2. Вивчити характеристики детермінованих, випадкових та хаотичних поверхонь.
3. Освоїти програму «Моделювання поверхні». (Всі параметри моделювання задаються викладачем).
4. Змоделювати шорстку поверхню та визначити статистичні та стохастичні параметри поверхні.
5. За допомогою програми «Розрахунок оптичних полів» розрахувати розсіяні поля для різних зон реєстрації та різних параметрів шорстких поверхонь.
6. Розрахувати характеристики поверхні задані викладачем за допомогою програми «Розрахунок параметрів полів». Вивести графіки характеристик.
7. Дослідити сингулярності в полі за допомогою програми «Накладання опорної хвилі».
8. Встановити діагностичні зв'язки між параметрами поля та поверхні.
9. За допомогою фізичного моделювання перевірити діагностичні зв'язки вказані викладачем.
10. Написати реферат по пунктах 1-3.

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

Моделювання поверхні

Розглянемо моделювання двох типів поверхонь: випадкових нефрактальних (ВН) та випадкових фрактальних (ВФ). Висоти випадкового об'єкту задаються генератором випадкових чисел, розподілених по нормальному закону.

Моделювання фрактальних поверхонь проводиться за допомогою алгоритму послідовних випадкових додавань, запропонованого Форсом. Згідно цього алгоритму, поверхня будується у вигляді квадратної сітки із стороною одиничної довжини та кількістю точок на стороні, рівній $2^n + 1$, де n - кількість кроків (циклів) у процедурі моделювання. Спочатку фіксується висота в чотирьох кутах сітки: $h(0,0) = h(0,1) = h(1,0) = h(1,1) = 0$. Далі використовується підпрограма, яка генерує незалежні гаусівські випадкові

числа ξ з нульовим середнім та дисперсією, яка зменшується з ростом циклу процедури моделювання:

$$\sigma_n^2 = (1/\sqrt{2})^{2nH} \sigma_0^2, \quad (1)$$

де: σ_0^2 - початкова дисперсія випадкових додавань; H - показник Херста.

На першому етапі отримується одне значення ξ , яке використовується як рівень поверхні в центрі сітки (1/2,1/2). Висоти в точках з координатами (0,1/2), (1/2,0), (1/2,1), (1,1/2), (1/4,1/4), (3/4,1/4), (1/4,3/4) та (3/4,3/4) отримуються шляхом інтерполяції – як середнє арифметичне висот в найближчих по діагоналях точках. Далі, 13 незалежних випадкових значень $\xi_{n=1}$ з дисперсією σ_1^2 додаються до висот, які вже є в перерахованих координатах сітки. Ця процедура повторюється потрібну кількість разів. Після кожного циклу алгоритм подвоює число точок, в яких задано висоту і зменшує на множник $1/\sqrt{2}$ відстань між цими точками. Значення показника Херста можна брати в межах $0 < H < 1$.

Розраховуються поляо НП та ФП розміром 1025 x 1025 пікселів. Далі для моделювання та розрахунків береться довільна частина цих поверхонь. Як правило, береться поверхня розміром 900x900 пікселів. З метою наближення змодельованих на комп'ютері випадкових та фрактальних поверхонь до реальних (які можна змодельювати фізично), застосовується процедура двомірного згладжування нерівностей висот по нормальному та експоненціальному законам з різними дисперсіями. Таким чином, отримуються плавні мікронерівності різного поперечного масштабу, які прописуються різною кількістю точок. Отримані рельєфи поверхонь $h(x, y)$ можна нелінійно трансформувати в розподіли $h^s(x, y)$, з різними степеневими коефіцієнтами: $s = 0,25; 0,5; 2$ та 4 . На рисунку 1 приведені деякі типові приклади змодельованих поверхонь.

На рисунку 1 приведені також функції розподілу висот нерівностей та параметри випадкових поверхонь: середньоарифметичне відхилення профілю поверхні від базової лінії – R_a , середньоквадратичне відхилення профілю – R_q , коефіцієнт асиметрії розподілу Sk , та коефіцієнт ексцесу Ku .
. Всі розглянуті вище приклади стосуються максимального розмаху нерівностей висот поверхні (різниця між максимальною та мінімальною висотами) $h_{\max} = 2$ мкм. В модельному експерименті h_{\max} мінявся від 100 нм до 10 мкм (в радіанах це буде від 0,5 до 50 рад.

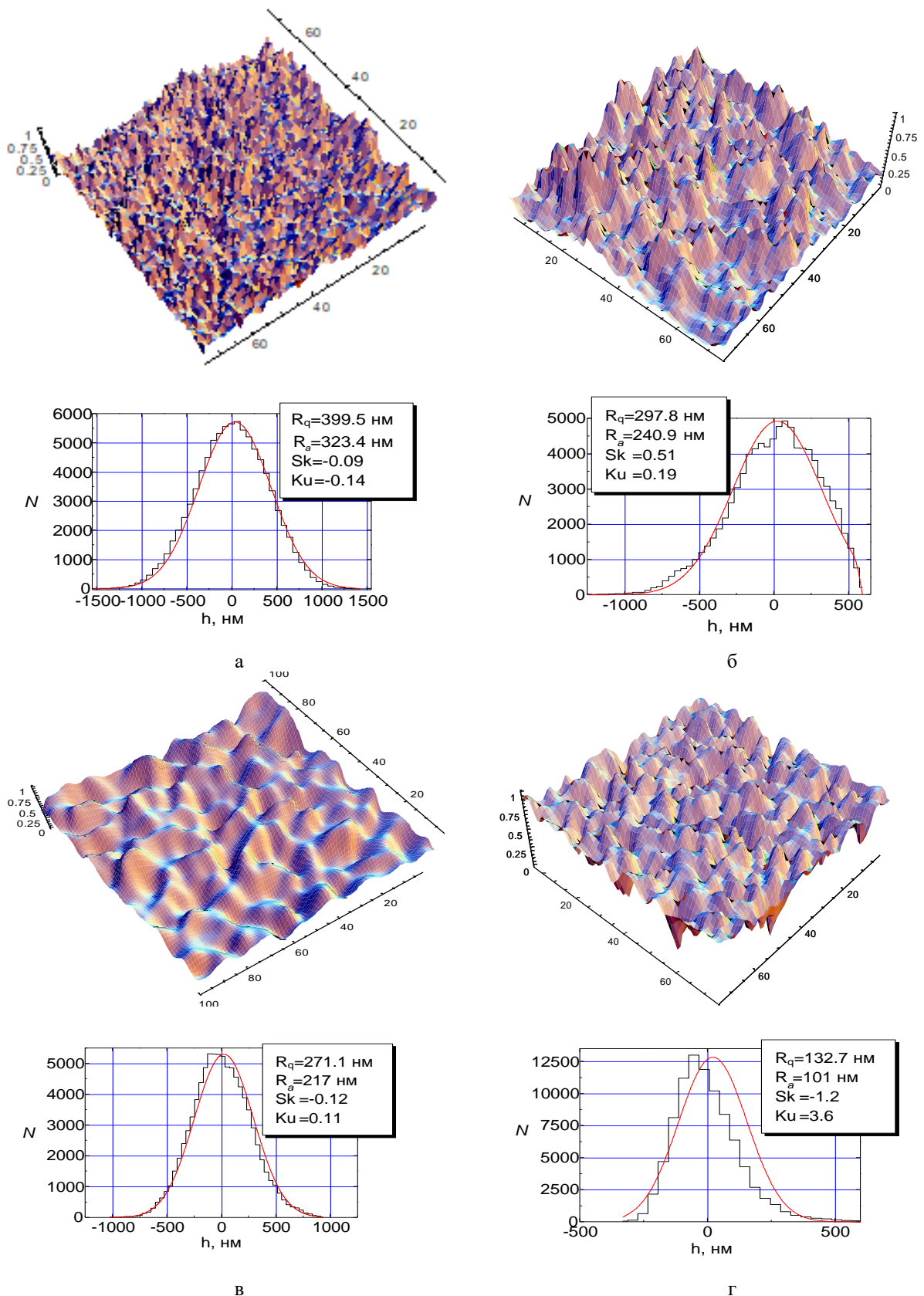


Рисунок 1. Приклади змодельованих поверхонь:
 F0 - фрактальна незгладжена поверхня (а); F3H1S - фрактальна поверхня, згладжена по нормальному закону по трьох пікселях, $s = 2$ (б); R3E - випадкова поверхня, експоненційно згладжена по трьох пікселях (в); R3H2R - випадкова поверхня, згладжена по нормальному закону по трьох пікселях, $s = 0,25$ (г).

Розрахунок поля оптичного випромінювання, дифрагованого на шорсткій поверхні

Застосовувалась наступна процедура розрахунку поля, дифрагованого на шорсткій поверхні.

Розглянемо пропускаючий об'єкт з шорсткою поверхнею. Такий варіант простіший для експериментальної реалізації. Для відбиваючих об'єктів підхід аналогічний. Відрізняються тільки в фазові затримки променів: для об'єкту на пропускання: $\varphi(x, y) = k(n-1)h(x, y)$, на відбивання: $\varphi(x, y) = 2kh(x, y)$, де $h(x, y)$ - рельєф шорсткої поверхні; n - показник заломлення матеріалу шорсткого об'єкту; $k = 2\pi/\lambda$ - хвильове число; λ - довжина хвилі.

Амплітуда та фаза поля, що отримується в результаті проходження плоскої хвилі фазового рельєфу шорсткої поверхні, розраховуються за допомогою подвійного дифракційного інтегралу Релея-Зомерфельда:

$$U(\xi, \zeta) = \frac{z}{i\lambda} \iint \frac{F(x, y)}{R^2(x, y, z, \xi, \zeta)} \times \exp\{-ik[R(x, y, z, \xi, \zeta) + (n-1)h(x, y)]\} dx dy, \quad (1)$$

де: $F(x, y)$ апертурна функція, що відповідає амплітудному пропусканню шорсткої поверхні;

$R(x, y, z, \xi, \zeta) = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \zeta)^2}$ - відстань між точкою на об'єкті та точкою в полі;

z - відстань між об'єктом та площиною спостереження;

x, y, ξ, ζ - прямокутні координати в площині об'єкту та в площині спостереження, відповідно (див рисунок 2).

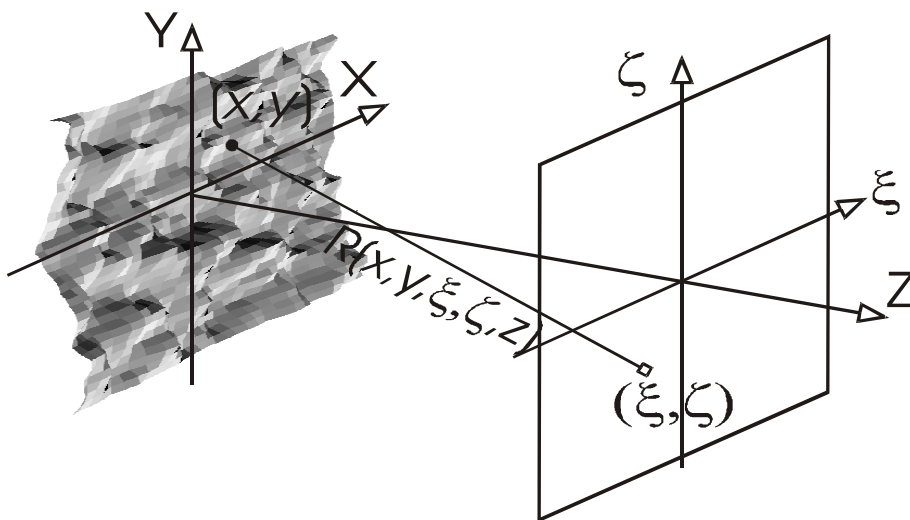


Рисунок 2. Формування поля дифрагованого на шорсткій поверхні.

На противагу дифракційному інтегралу Кіхгофа, інтеграл можна

застосовувати для довільних відстаней від об'єкту до площини спостереження.

В даному дослідженні замінюється інтегрування сумуванням, а об'єкт та поле дифракції в площині спостереження ділиться на елементарні площадки. Для отримання достовірних результатів, відстань між точками, на які розбивається об'єкт, повинна бути меншою $\lambda/2$. В процесі розрахунку поля дифрагованого випромінювання $U(\xi, \zeta)$, окремо розраховувалася його дійсна та уявна частини: $\text{Re}U(\xi, \zeta)$ та $\text{Im}U(\xi, \zeta)$. Комплексна амплітуда поля $U(\xi, \zeta)$, модуль амплітуди $A(\xi, \zeta)$, фаза $\varphi(\xi, \zeta)$ та інтенсивність $I(\xi, \zeta)$ результуючого поля визначалися із співвідношень:

$$U(\xi, \zeta) = \text{Re}U(\xi, \zeta) + i \text{Im}U(\xi, \zeta), \quad (2)$$

$$A(\xi, \zeta) = \sqrt{\text{Re}^2 U(\xi, \zeta) + \text{Im}^2 U(\xi, \zeta)}, \quad (3)$$

$$\varphi(\xi, \zeta) = \text{arctg} \frac{\text{Im}U(\xi, \zeta)}{\text{Re}U(\xi, \zeta)}, \quad (4)$$

$$I(\xi, \zeta) = \text{Re}^2 U(\xi, \zeta) + \text{Im}^2 U(\xi, \zeta). \quad (5)$$

З розподілів (2) - (5) визначалися всі можливі їх статистичні моменти та кореляційні функції. Важливими, з точки зору діагностики шорсткої поверхні, є наступні статистичні параметри поля: дисперсія амплітуди σ_A та фази σ_φ , змішаний момент квадрату фази та амплітуди $\langle \varphi^2 A \rangle$, індекс мерехтіння β^2 , коефіцієнти асиметрії Sk та ексцесу Ku розподілу інтенсивності поля, поперечна функція когерентності $\Gamma_\perp(\rho)$ та кореляційна функція інтенсивності $\Psi_I(\rho)$ поля.

Опис шорсткої поверхні в рамках моделі випадкового фазового екрану

Шорстка поверхня з розподілом висот $h(\rho)$ (де ρ - двомірний вектор) в рамках моделі ВФЕ характеризується кореляційною функцією фази поверхні:

$$\Psi_\Phi(\rho) = \sigma_{\varphi_0}^2 K(\rho), \quad (6)$$

максимальне значення якої визначається дисперсією фази пропускаючого об'єкта $\sigma_{\varphi_0}^2$, а хід – коефіцієнтом кореляції $K(\rho)$. Півширина кореляційної функції дає радіус кореляції l_{φ_0} . З формули (6) можна перейти до кореляційної функції висот поверхні:

$$\Psi_h(\rho) = \sigma_h^2 K(\rho), \quad (7)$$

де $\sigma_h = \frac{\lambda}{2\pi(n-1)}\sigma_{\varphi_0}$ - середньоквадратичне відхилення профілю від базової лінії (Rq).

Модель ВФЕ базується на наступних припущеннях: в зоні реєстрації присутні всі просторові частоти поля розсіяного випромінювання; дисперсія фази об'єкту мала - $\sigma_{\varphi_0}^2 < 1$; радіус кореляції неоднорідностей більший за довжину хвилі, $l_{\varphi_0} > \lambda$.

З моделі ВФЕ впливають наступні співвідношення між статистичними параметрами об'єкту та поля розсіяного випромінювання:

дисперсія фази σ_{φ}^2 та амплітуди σ_A^2 поля в зоні Фраунгофера

$$\sigma_A^2 = \sigma_{\varphi}^2 = 0.5\sigma_{\varphi_0}^2, \quad (8)$$

індекс мерехтіння (дисперсія інтенсивності) в зоні Фраунгофера дорівнює:

$$\beta_{\infty}^2 = 2\sigma_{\varphi_0}^2, \quad (9)$$

поперечна функція когерентності поля не міняється в залежності від зони реєстрації і визначається формулою:

$$\Gamma_{\perp}(\rho) = \exp\{\sigma_{\varphi_0}^2 [K_{\varphi_0}(\rho) - 1]\}, \quad (10)$$

Розглянуті співвідношення виконуються для гаусівського розподілу висот поверхні. Коли ж кількість нерівностей невелика або має місце відхилення закону їх розподілу від нормального, потрібно враховувати моменти вищих порядків як в структурі поверхні, так і в розподілі поля, розсіяного нею випромінювання.

Третій та четвертий статистичні моменти розподілу нерівностей шорсткої поверхні визначають коефіцієнт асиметрії k_a та ексцесу k_k функції розподілу:

$$k_a = \frac{1}{\sigma_h^3} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i^3, \quad (11)$$

$$k_k = \frac{1}{\sigma_h^2} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N h_i^4. \quad (12)$$

ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Діагностичні зв'язки між параметрами шорсткої поверхні і дифрагovanого поля, отримані в результаті комп'ютерного моделювання, перевірено за допомогою фізичного моделювання та реалізовано у вигляді двох приладів (*методи і прилади розроблено на кафедрі кореляційної оптики ЧНУ*):

1. Контроль шорсткості поверхні з вимірювань поперечної функції когерентності поля (опис роботи розміщено за посиланням: <https://studfile.net/preview/5467774/>)
2. Діагностика шорстких поверхонь по виміру дисперсії фази граничного поля (опис роботи розміщено за посиланням: <https://studfile.net/preview/5467776/>)

Список літератури

1. Ангельський О.В., Максимяк П.П. "Комп'ютерне та фізичне моделювання розсіювання світла неоднорідними об'єктами" Чернівці, "ЧНУ", 2017.-332 с.
2. Ахманов С.А., Дъяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. - М.: Наука, 1981. - 640 с.
3. Гудмен Дж. Статистическая оптика: Пер. с англ./ Под ред. Г.В.Скороцкого - М.: Мир, 1988. - 528 с.
4. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.2. Случайные поля / Под ред. С.М. Рытова - М.: Наука, 1978. - 464 с.
5. Angelsky O. V., Maksimyak P. P., Hanson S. The Use of Optical-Correlation Techniques for Characterizing Scattering Object and Media. - Bellingham: SPIE Press PM71, 1999. – 194 p.
6. М.Борн, Э.Вольф. Основы оптики. -М.: Наука, 1970.- 856 с.
7. Angelsky, O.V., Maksymyak, P.P., Zenkova, C.Y. et al. Current Trends in Development of Optical Metrology. Opt. Mem. Neural Networks 29, 269–292 (2020). <https://doi.org/10.3103/S1060992X20040025>

Лабораторна робота №2

МАТЕМАТИЧНЕ ТА ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СВІТЛОРОЗСІЮВАННЯ НА БРОУНІВСЬКИХ ЧАСТИНКАХ

Мета роботи: навчитись моделювати динамічні дисперсні середовища.

Завдання до роботи

1. Вивчити методи традиційного та динамічного світлорозсіяння в дисперсних середовищах.
2. Вивчити випадкові та фрактальні характеристики броунівського руху.
3. Освоїти програму «Моделювання дисперсного середовища».
4. Змоделювати дисперсне середовище (параметри середовища задануться викладачем).
5. Розрахувати розсіяні поля за допомогою програми «Розрахунок розсіяного поля» (зона реєстрації та характеристики системи задаються викладачем).
6. Визначити статистичні та стохастичні параметри розсіяного поля за допомогою програми «Розрахунок параметрів полів».
7. Побудувати випадковий фрактал за допомогою програми «Моделювання кластера» та визначити його фрактальну розмірність.
8. Провести фізичне моделювання динамічного розсіювання світла та визначити розмір гідрозолей сірки використовуючи програму «Обробка сигналів».
9. Написати реферат.

ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

Броунівський рух відноситься до випадкового процесу, що володіє фрактальними властивостями. Рух окремої броунівської частинки можна описати за допомогою випадкових блукань. Мандельброт зробив узагальнення броунівського для інших наук: фізики, біології, економіки, хімії, та інших і вперше ввів поняття узагальненого броунівського руху. Застосування методу нормованого розмаху, запропонованого Херстом, показує, що статистичні та стохастичні властивості багатьох явищ у природі найкраще описуються узагальненим броунівським рухом.

Одномірне блукання

Розглянемо частинку, що рухається уздовж осі Ox , переміщуючись на відстань x через кожні τ секунд. На мові броунівського руху x можна ототожнити з мікроскопічною довжиною (наприклад, розміром частинки), а τ - з мікроскопічним часом (часом зіткнень).

Нехай x - випадкова величина з нормальним розподілом ймовірностей:

$$p(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D\tau}\right). \quad (1)$$

Процес випадкового блукання в мікроскопічних масштабах можна описати наступним чином. Часова вісь розбивається на інтервали тривалістю τ . На кожному такому інтервалі крок зміщення x вибирається випадковим чином із ймовірністю $p(x, \tau)$. Іншими словами, ймовірність того, що x знаходиться в інтервалі $x + \Delta x$, дорівнює $p(x, \tau)dx$. Послідовність таких випадкових величин $\{x_i\}$ є набором незалежних гаусових випадкових чисел з дисперсією:

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x, \tau) dx = 2D_T\tau, \quad (2)$$

де D_T - коефіцієнт трансляційної дифузії.

З рівняння (2) випливає співвідношення Ейнштейна

$$D = \frac{1}{2\tau} \langle x^2 \rangle. \quad (3)$$

Це співвідношення справедливе при досить загальних припущеннях, навіть коли переміщення розділені неоднаковими інтервалами часу, а розподіл x може бути дискретний, неперервний або довільного виду.

Перейдемо до стандартного нормального випадкового процесу, замінивши $x/\sqrt{2D\tau}$ на x з нульовим середнім значенням і одиничною дисперсією. Координата частинки на осі x у момент $t = n\tau$ буде:

$$X(t) = \sum_{i=1}^n x_i. \quad (4)$$

В граничному випадку великих n і малих τ набір з випадкових чисел переходить у випадкову функцію $X(t)$, яку Б. Мандельброт назвав функцією Брауна і позначив $B(t)$. На рисунку 1 показано покрокову зміну координати положення броунівської частинки X .

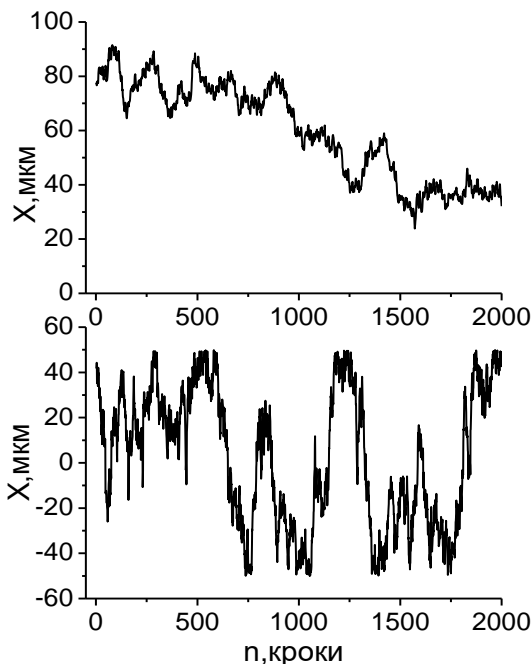


Рисунок 1. Покрокова зміна координати X положення броунівської частинки:
а) без відбивань;
б) з відбиваннями від стінок кювети.

Властивість подібності одновірних випадкових блукань

На практиці броунівський рух спостерігається з кінцевою роздільною здатністю. Тому є сенс розглянути випадок, коли координата частинки

записується через b -і проміжки часу, тобто, через інтервал $b\tau$, де b - деяке довільне число, а τ - часовий крок.

Якщо почати спостереження з кожного другого кроку, тобто $b=2$, то приріст координати частинки $x = x' + x''$ - це сума двох незалежних приростів.

Спільна ймовірність цих приростів виражається через функцію $p(x, \tau)$ за допомогою співвідношення:

$$p(x', x'', \tau) = p(x', \tau)p(x'', \tau). \quad (5)$$

Тобто сумісна густина ймовірності є добутком двох густин ймовірності для кожної із змінних. Інтегрування цієї сумісної густини ймовірності по всіх можливих парах значень x' та x'' , приводить до наступного виразу для густини ймовірності x :

$$p(x, 2\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x - x', \tau)p(x', \tau)dx' = \frac{1}{\sqrt{4\pi D 2\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D 2\tau}\right). \quad (6)$$

Отже, розподіл залишився нормальним з нульовим середнім, але з подвоєною дисперсією $\langle x^2 \rangle = 4D\tau$. Ці міркування легко узагальнюються на випадок довільного b :

$$p(x, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D b\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D b\tau}\right), \quad (7)$$

коли дисперсія зростає в b раз.

Ми прийшли до висновку, що яке б число b мікроскопічних часових кроків не розділяло моменти спостережень, прирости координати частинки завжди складають гаусівський випадковий процес з незалежними значеннями з $\langle x \rangle = 0$ і дисперсією:

$$\langle x^2 \rangle = 2Dt, \text{ якщо } t = b\tau. \quad (8)$$

Цей важливий для математичного та фізичного моделювання висновок, дозволяє не обов'язково строго прив'язуватися до конкретних параметрів руху реальної частинки при розрахунках, та не обов'язково добиватися максимальної частоти вимірювання при дослідженні броунівських процесів.

Часто броунівський рух ототожнюється з випадковим блуканням - процесом, що описує переміщення частинки в деякому фазовому просторі під впливом випадкового механізму.

Реєстрація траєкторії броунівської частинки в різних масштабах вказує на те, що броунівський рух самоподібний. А якщо час розглядати як додатковий вимір, то в цьому фазовому просторі траєкторія частинки самоафінна, а не самоподібна. Розходження цих понять полягає в тому, що для самоафінних траєкторій коефіцієнти подібності за часом і простором, по різних вимірах, можуть бути різні. У той час, як для самоподібних траєкторій ці коефіцієнти однакові для всіх вимірів.

Властивість броунівського руху не змінювати вигляд траєкторії при зміні масштабу називається масштабною інваріантністю. Цю властивість можна записати у вигляді, змінивши масштаб часу в b разів, а масштаб

довжини - у $b^{1/2}$ раз. Перетворення, які міняють масштаби часу і відстані в різних пропорціях, є афінними, а відповідні залежності, будуть самоафінними. Тоді, отримаємо наступне співвідношення подібності для густини ймовірності:

$$p(x' = b^{1/2}x, \tau' = b\tau) = b^{-1/2} p(x, \tau) \quad (9)$$

Множник $b^{-1/2}$ забезпечує правильне нормування густини ймовірності:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x', \tau') dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, \tau) dx = 1.$$

Розподіл імовірності координати частинки $X(t)$ знаходиться аналогічно ймовірності випадкового зміщення x (1):

$$P(X(t) - X(t_0)) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D|t - t_0|}} \exp\left(-\frac{[X(t) - X(t_0)]^2}{4D|t - t_0|}\right), \quad (10)$$

яке також задовольняє умові подібності:

$$P(b^{1/2}[X(bt) - X(bt_0)]) = b^{-1/2} P(X(t) - X(t_0)). \quad (11)$$

Знаючи розподіл ймовірності координати частинки, можна знайти наступні вирази для середнього значення координати та її дисперсії:

$$\begin{aligned} \langle X(t) - X(t_0) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta X P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 0, \\ \langle [X(t) - X(t_0)]^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta X^2 P(\Delta X, t - t_0) d\Delta X = 2D|t - t_0|, \end{aligned} \quad (12)$$

де: $X(t_0)$ - координата частинки в деякий початковий момент t_0 , а ΔX – приріст координати ($\Delta X = X(t) - X(t_0)$).

Наслідки співвідношення (10) ми використаємо пізніше при визначенні фрактальної розмірності броунівських процесів. Відомо, що фрактальну розмірність можна визначити із нахилу логарифмічної залежності структурної функції процесу. Нормальний розподіл координати зміщення броунівської частинки говорить про гаусівський хід кореляційної, а, отже і структурної функції процесу. А для таких процесів, нормальному розподілу підчиняється і спектр потужності процесу. Звідси висновок, який відмічено в роботах: фрактальну розмірність броунівського процесу можна визначити з нахилу логарифмічної залежності спектру потужності процесу.

Для опису броунівського руху Вінер ввів випадкову функцію $X(t)$. Розглянемо стандартний гаусівський процес з незалежними значеннями $\{x\}$. Нехай зміщення ΔX визначається виразом:

$$X(t) - X(t_0) \sim x|t - t_0|^H \quad (t \geq t_0) \quad (13)$$

для будь-яких моментів часу t і t_0 . H тут показник Херста.

Його емпірично отримав Херст, характеризуючи та кількісно оцінюючи різні випадкові природні процеси (емпіричний закон Херста). Для звичайного броунівського руху $H=1/2$. Це співвідношення служить визначенням випадкової функції і може бути застосоване в момент t_0 незалежно від того,

відомі значення $X(t)$ у більш ранні моменти часу, чи ні. Випадкова функція (13) неперервна, але вона не має похідних. Для зручності співвідношення (13) можна доповнити умовою $X(0)=0$.

Із співвідношень (10) випливає, що перетворена змінна ξ , визначається виразом:

$$\xi = \frac{X(t) - X(t_0)}{\sqrt{2D\tau(|t - t_0|/\tau)^H}}, \quad (14)$$

при всіх t і t_0 має гаусівський розподіл ймовірностей з нульовим середнім та одиничною дисперсією.

Мандельброт ввів поняття узагальненого броунівського руху, замінивши показник $H=1/2$ у випадковій функції $X(t)$ на дійсне число з інтервалу $0 < H < 1$ і позначивши цю функцію $B_H(t)$.

Узагальнений броунівський процес має нульове середнє зміщення $\langle B_H(t) - B_H(t_0) \rangle = 0$, а дисперсія приростів має вигляд (структурна функція процесу):

$$\langle [B_H(t) - B_H(t_0)]^2 \rangle = 2D\tau(|t - t_0|/\tau)^{2H} \sim |t - t_0|^{2H}. \quad (15)$$

Як видно, з часом дисперсія приростів росте.

Розглянуті співвідношення ми використали для моделювання броунівського руху та розрахунку його параметрів.

Комп'ютерне моделювання руху броунівської частинки та розсіяння світла на ній

Було розроблено програму для моделювання руху N броунівських частинок. Початкове положення частинок задавалося за допомогою рівноймовірного розподілу їх координат (X, Y, Z) в межах досліджуваного об'єму L^3 . Розмір частинок задавався гаусівською функцією розподілу з середнім значенням R_0 та дисперсією розмірів σ . Зміщення частинок x, y, z задавалися по нормальому закону (4.64), причому дисперсія зміщення частинки $\sqrt{2D\tau}$ залежала і від розміру частинки (Значення дисперсії $\sqrt{2D\tau}$ варіювалися на три порядки, проте, це не впливає на самоподібність броунівського руху. Координати частинок після кожного кроку визначалися за допомогою співвідношення (4). Таким чином, зсуви броунівської частинки за різні інтервали часу є незалежними; а її місцеположення, в різні моменти часу, залежить від попереднього. Якщо зміщення частинки по довільній координаті в сторону границі об'єму більше за її відстань до границі, то розраховувалося дзеркальне відбивання частинки від границі.

Програма дозволяла розраховувати шлях 50 000 броунівських частинок на 33 000 кроків. Ця інформація займає 15 Гбайт пам'яті на вінчестері комп'ютера. Причому, можна було записати координати шляху кожної частинки окремо для дослідження фрактального руху частинок, а також координати всіх частинок для кожного кроку при розрахунку поля оптичного розсіяного випромінювання.

Для розрахунку розподілу поля розсіяного випромінювання

використовувалися моделі розсіяння Релея та Релея-Дебая-Ганса. Особливістю розсіювання Релея та Релея-Дебая-Ганса є те, що розсіюється інтенсивність пропорційна R^6 . Релеївське розсіяння має додаткову перевагу: дозволяє, на відміну від розсіяння Релея-Дебая-Ганса та розсіяння Мі, розраховувати поле розсіяного випромінювання для довільного напрямку розсіяння та довільної функції розподілу частинок по розмірах. Єдина незручність при розгляді трьохмірного розсіювання – це необхідність враховувати поляризацію ортогональних компонент, які ведуть себе аналогічно випромінюванню диполя. Єдиний вихід в цьому випадку – опромінення циркулярно-поляризованим пучком.

Амплітуда поля в довільній точці простору (z_0, ξ, ζ) визначається як сума комплексних амплітуд поля, розсіяного всіма броунівськими частинками. Використовуючи співвідношення (1), отримуємо вираз для амплітуди поля:

$$U(\xi, \zeta, z_0) = \frac{4\pi^2 I_0}{\lambda^2} \left[\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2 + 2n_2^2} \right] \sum_{i=1}^N \frac{R_i^3 \exp(-ikr_i(x_i, y_i, z_i, \xi, \zeta, z_0))}{r_i(x_i, y_i, z_i, \xi, \zeta, z_0)}, \quad (16)$$

де: $r_i(x_i, y_i, z_i, \xi, \zeta, z_0) = \sqrt{(z_i - z_0)^2 + (x_i - \xi)^2 + (y_i - \zeta)^2}$ - відстань від i -ї броунівської частинки до точки спостереження; z_0 - відстань між площиною розсіюючого об'єму і площиною спостереження; $x_i, y_i, z_i, \xi, \zeta, z_0$ - прямокутні координати на площині об'єкту та на площині спостереження, відповідно; $k = 2\pi / \lambda$ - хвильове число; де λ - довжина хвилі.

Комплексна амплітуда поля розраховувалася та записувалася у вигляді $U = \text{Re}U + i\text{Im}U$. Далі визначалися амплітуда A , фаза φ та інтенсивність I поля із співвідношень:

$$A = \sqrt{\text{Re}^2 U + \text{Im}^2 U}, \quad \varphi = \arctg \frac{\text{Im}U}{\text{Re}U}, \quad I = \text{Re}^2 U + \text{Im}^2 U.$$

Визначення статистичних та стохастичних параметрів змодельованого поля розсіяного випромінювання, здійснювалося за допомогою методів та програм, розглянутих в другому розділі.

При фізичному моделюванні, можна експериментально реалізувати релеївське розсіяння та розсіяння Релея-Дебая-Ганса. В обох випадках для монодисперсних частинок, під одним і тим самим кутом розсіюється інтенсивність пропорційна R^6 . Відхилення індикатриси розсіяння частинок від сферичної, що є особливістю розсіяння Релея-Дебая-Ганса, дозволяє проводити незалежний контроль розміру частинок за індикатрисою розсіяння.

Таким особливостям, необхідним для фізичного моделювання, добре задовольняють гідрозолі сірки.

ФІЗИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СВІТЛОРОЗСІЯННЯ НА БРОУНІВСЬКИХ ЧАСТИНКАХ

Гідрозолі сірки

Гідрозолі сірки легко отримати шляхом змішування 1-н розчинів соляної кислоти та тіосульфату натрію. Молекулярно диспергована сірка утворює в крапельки переохолодженої сірки, які зростають по мірі старіння золю. Показник заломлення сірки відносно води рівний 1,44. Крапельки формуються після того, як буде досягнуто перенасичення розчину. Їх початкові радіуси мають розмір 0,01 мкм.

Відомо, що із старінням золів, змінюється колір світла, яке проходить крізь них. Ці зміни відповідають змінам нахилу кривих ослаблення. В той же час в діаграмі розсіяння з'являється все більше та більше максимумів, тобто все більше та більше забарвлених смуг, якщо використовується біле світло. Ці додаткові смуги називають спектрами Тіндаля вищих порядків.

При дослідженні розсіяння світла на гідрозолях сірки потрібно виділяти дві ситуації: малі частинки (0,05 мкм – 0,4 мкм) та великі частинки (0,5 мкм і більші). Індикатриса розсіяння на малих частинках відрізняється від релеївської, але не має складних мінімумів та максимумів, як у випадку великих частинок. Для визначення розміру малих частинок застосовують метод відношення інтенсивності розсіяного світла з ортогональними поляризаціями. Розмір великих частинок визначається по розташуванню максимумів в індикатрисі розсіяння світла.

Визначення розміру частинок гідрозолів сірки

Перед експериментальними дослідженнями, гідрозолі сірки необхідно прокалібрувати, тобто побудувати залежність розміру частинок від часу росту золю. Вважаючи, що розмір частинок гідрозолів сірки (0.01-2 мкм) відповідає частинкам Релея-Дебая-Ганса, їх калібровку ми провели за таблицями світлорозсіяння Шифріна. Суть калібровки полягає в порівнянні експериментально виміряних індикатрис розсіяння з теоретичними для конкретних параметрів частинок сірки.

Гідрозолі сірки отримувалися шляхом змішування по 10 мл 1-нормальних розчинів соляної кислоти та тіосульфату натрію в 1 л дистильованої води. Приблизно через 0,5 години після їх приготування в кюветі раптово утворюються центри світлорозсіяння. Це молекулярно диспергована сірка конденсується в крапельки переохолодженої сірки, які зростають по мірі старіння золю. Розбавлення утворених золів водою, зупиняє їх ріст і ми отримуємо монодисперсний набір сферичних частинок сірки, які здійснюють хаотичний броунівський рух.

Індикатриси світлорозсіяння гідрозолями сірки вимірювалися на гоніометричній установці, розглянутій нижче.

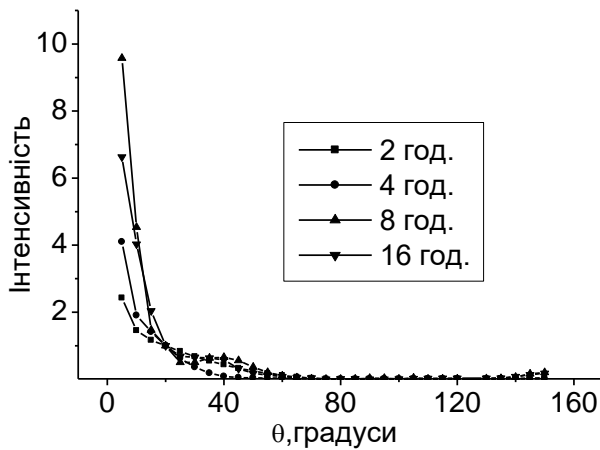


Рисунок 2. Нормовані по 20° індикатриси розсіяння для гідрозолей 2, 4, 8 та 16 годин росту

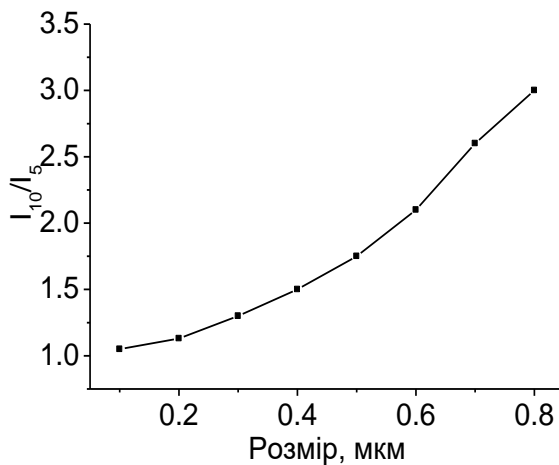


Рисунок 3. Теоретичні відношення інтенсивностей I_{10}/I_5 для різних розмірів частинок.

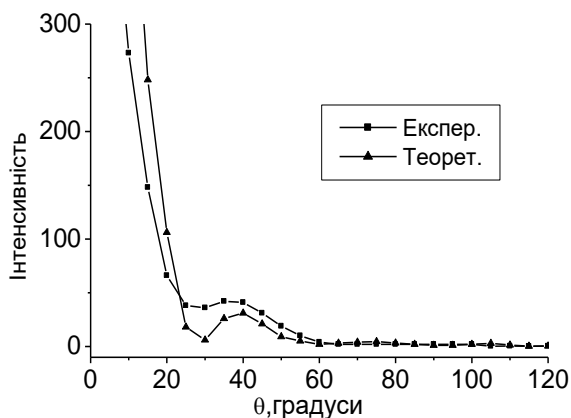


Рисунок 4. Теоретична та експериментальна індикатриси розсіяння частинок гідрозолей сірки розміром 0,8 мкм.

За початок відліку часу росту гідрозолей сірки приймався момент змішування 1-нормальних розчинів сірчаної кислоти та тіосульфату натрію у воді. Через кожен годину росту вимірювалась індикатриси розсіювання гідрозолями сірки.

Вимірювання індикатриси розсіяння проводилося через кожні 5° . На рисунку 2 приведені індикатриси розсіяння для 2, 4, 8 та 16 годин росту гідрозолей, пронормовані по інтенсивності, розсіяній під кутом 20° . Як видно з графіка, екстремуми в кутовій залежності інтенсивності розсіяного випромінювання з'являються для часу росту більше 8 годин.

Тому для гідрозолей сірки, молодших 10 годин, ми застосовували метод відношення інтенсивності розсіяного світла на кутах 5° та 10° . А для гідрозолей, "старших" 8 годин, ми співставляли положення екстремумів теоретичної та експериментальної індикатрис розсіяння. Оцінки показали, що 10-годинні частинки сірки мають розмір порядку 0,5 мкм. Цей розмір був граничним для двох методів порівняння індикатрис розсіяння.

На рисунку 3 приведені теоретичні відношення інтенсивностей для кутів розсіяння 10 та 5 градусів I_{10}/I_5 . Розмір частинок взято від 0,2 мкм до 0,8 мкм для забезпечення перекриття методів.

Для частинок, з розмірами більшими 0.5 мкм, використовувався метод порівняння екстремумів

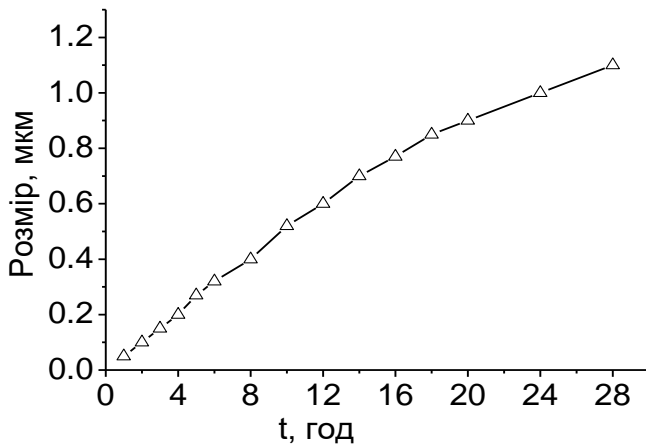


Рисунок 5. Залежність розміру частинок гідрозолів сірки від часу їх росту.

співпадання першого максимуму на куті 40 градусів для теоретичної та експериментальної індикатрис розсіювання. Отже, дійсно, часу росту в 18 години відповідає розмір частинок 0,8 мкм. Подібна процедура проводилась для часів росту гідрозолей сірки від 8 до 28 годин.

На рисунку 5 наведено градувальну залежність розмірів частинок гідрозолей сірки від часу їх росту.

Дотримання відхилення температури оточуючого середовища в межах $\pm 5^{\circ}\text{C}$, приводить до відхилення розмірів гідрозолей не більше ніж на 2%.

Оптична схема для фізичного моделювання

Індикатриси світлорозсіювання гідрозолями сірки вимірювалися на гоніометричній установці, показаній на рисунку 6, з апертурою прийому $0,2^{\circ}$.

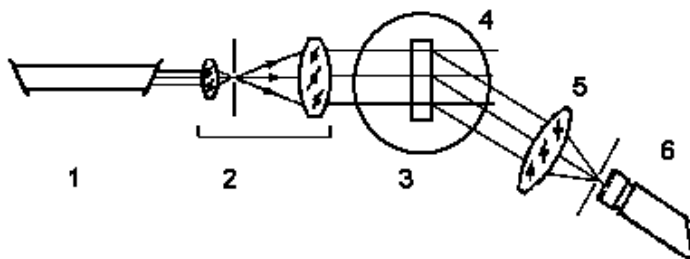


Рисунок 6. Схема вимірювання індикатриси розсіювання частинками гідрозолів сірки:

- 1 – лазер; 2 – телескопічна система;
- 3 – гоніометр; 4 – кювета з гідрозолями сірки;
- 5 – приймальна система; 6 – фотоприймач

На столику 3 гоніометричної установки розміщувалась кювета 4 з розчином гідрозолів сірки, які опромінювалися паралельним пучком He-Ne лазера 1. Плоский хвильовий фронт формувався за допомогою телескопічної системи 2, що складається з мікрооб'єктива $5\times$, об'єктива з фокусною відстанню 18 см та мікронної діафрагми з діаметром 16 мкм в спільній фокальній площині між ними. Площина поляризації лазерного випромінювання була ортогональною до напрямку розсіювання. За допомогою гоніометра здійснювалось кутове сканування інтенсивності розсіяного випромінювання. Прийом розсіяного випромінювання, заданої кутової апертури, здійснювався за допомогою

експериментально виміряних індикатрис з теоретичними. На прикладі частинок гідрозолей сірки, розміром 0,8 мкм, індикатриси розсіювання яких показано на рисунку 4, співставимо експериментально отриману індикатрису розсіювання для часу росту 18 годин з теоретичною індикатрисою (отриманою з таблиць Шифріна для частинок, розміром 0,8 мкм та показником заломлення 1.44).

На рисунку спостерігається

приймальної системи 5, що складається з об'єктива, з фокусною відстанню 25 см, та діафрагми, розміром 0,8 мм, в його фокальній площині. Далі випромінювання потрапляло на фотоприймач 6, сигнал якого підсилювався операційним підсилювачем та через АЦП вводився в комп'ютер.

Основні співвідношення для фізичного моделювання

Записаний сигнал був вихідним для визначення розмірів частинок гідрозолей сірки. Для цього визначалась часова кореляційна функція сигналу:

$$I(t) = \exp(-2U^2Dt),$$

де коефіцієнт дифузії визначається за формулою:

$$D = kT / 6\pi\eta r,$$

де: T - температура Кельвіна; k - постійна Больцмана;
 η - динамічна в'язкість середовища; r - радіус частинки.

$U = \frac{4\pi}{\lambda} n \cdot \sin \frac{\varphi}{2}$ - параметер розсіювання, φ - кут розсіяння;

n - показник заломлення розчинника.

Для гаусового розподілу спектральна густина функції кореляції для некогерентного розсіяння має вигляд лоренцівського контура, напівширина якого визначається формулою

$$\Delta\omega_{1/2} = U^2 D_T.$$

Тому, далі знаходимо напівширину функції кореляції часових флуктуацій інтенсивності і для відомих у нашому експерименті T , k , η , φ , n та λ , визначаємо радіус кореляції гідрозолей сірки.

Звіт має включати:

1. Короткий реферат.
2. Основні формули.
3. Результати моделювання, обробки та досліджень.
4. Графіки, характеристики.

Контрольні запитання

1. Які ви знаєте теорії розсіяння дисперсними середовищами? Дайте коротку їх характеристику.
2. Характеристики випадкових та фрактальних блукань броунівських часток.
3. Алгоритм моделювання дисперсного середовища.
4. Алгоритм розрахунку розсіяного поля.
5. Алгоритм визначення параметрів поля.

6. Фрактальна модель броунівського руху.
7. Динамічне світлорозсіювання.

Список літератури

1. Ангельський О.В., Максимяк П.П. "Комп'ютерне та фізичне моделювання розсіювання світла неоднорідними об'єктами" Чернівці, "ЧНУ", 2017.-332 с.
2. Ахманов С.А., Дъяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. - М.: Наука, 1981. - 640 с.
3. Гудмен Дж. Статистическая оптика: Пер. с англ./ Под ред. Г.В.Скороцкого - М.: Мир, 1988. - 528 с.
4. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику. Ч.2. Случайные поля / Под ред. С.М. Рытова - М.: Наука, 1978. - 464 с.
5. Angelsky O. V., Maksymyak P. P., Hanson S. The Use of Optical-Correlation Techniques for Characterizing Scattering Object and Media. - Bellingham: SPIE Press PM71, 1999. – 194 p.
6. М.Борн, Э.Вольф. Основы оптики. -М.: Наука, 1970.- 856 с.
7. Angelsky, O.V., Maksymyak, P.P., Zenkova, C.Y. et al. Current Trends in Development of Optical Metrology. Opt. Mem. Neural Networks 29, 269–292 (2020). <https://doi.org/10.3103/S1060992X20040025>

Лабораторна робота №3

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФРАКЦІЇ ОПТИЧНОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ НА ОДНОМІРНИХ ТА ДВОМІРНИХ ФРАКТАЛАХ

Мета роботи: навчитись моделювати одномірні та двохмірні фрактали, розраховувати розсіяне поле та визначати характеристики розсіяних полів та їх особливості; експериментально досліджувати дифракцію оптичного випромінювання на одномірних та двохмірних фракталах.

Завдання до роботи

1. Вивчити класифікацію фракталів.
2. Вивчити характеристики детермінованих, випадкових та хаотичних фракталів.
3. Освоїти програми розрахунку фракталів та полів: двохмірних «Моделювання 2D-фракталів», одномірних «Моделювання смуг Кантора» та мультифракталів «Моделювання мультифракталів Кантора».
4. Змоделювати фрактали (параметри і тип фракталів задані викладачем).
5. Розрахувати розсіяні поля (зона реєстрації та характеристики фракталу задані викладачем).
6. Знайти особливості в розсіяному полі (пониження рівня фракталу та зони саморепродукції).
7. Провести експериментальні дослідження дифракції оптичного випромінювання на одномірних та двохмірних фракталах.
7. Написати реферат по пунктах 1-3.

Класифікація фракталів

Всі природні фрактальні структури, на відміну від математичних фракталів, мають обмежений рівень. Тому їх називають передфракталами N -го порядку (де N скінченне ціле число).

Фрактальні властивості мають багато типів природних структур. В оптиці часто зустрічаються фрактальні апертури, фрактальні поверхні, фрактальні лінії та інше. Кожна з цих структур може бути віднесена до однієї з двох груп: регулярні (детерміновані) та випадкові (статистичні) фрактали.

Інша властивість фракталів пов'язана із їх самоподібністю або самоафінністю. Якщо при однаковій зміні масштабу по всіх координатах, будова фракталу повторюється, то це самоподібне перетворення. Якщо ж масштаб перетворення для різних координат різний, то це самоафінне перетворення. Очевидно, що самоафінне перетворення включає самоподібне.

Комп'ютерне моделювання дифракції світла на смугах Кантора

Побудова смуг Кантора

Смуги Кантора можуть отримуватись діленням смуги на m рівних частин та вилученням деяких з них так, щоб M смуг залишилось. Повторюючи цю процедуру n раз, ми отримуємо смуги Кантора n -го рівня (рисунок 1).

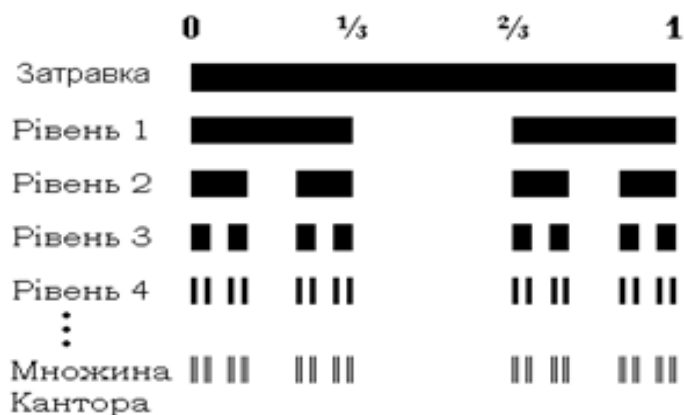


Рисунок 1. Смуги Кантора

Фрактальна розмірність смуг Кантора визначається як:
$$d_f = \frac{\ln M}{\ln m}.$$

В нашому випадку $m=3$, $M=2$. Тому, $D_f = 0,6309$.

Розрахунок дифрагованого поля

Використовуючи формулу Релея-Зоммерфельда для одновимірного випадку, амплітуду поля, дифрагованого на смугах Кантора, можна записати у вигляді (рисунок 2):

$$U(\xi) = \frac{z}{\sqrt{i\lambda}} \int \frac{F(x)}{R^{3/2}(x, \xi)} \exp(-ikR(x, \xi)) dx. \quad (1)$$

Рівняння (1) можна замінити сумою скінченної кількості доданків.

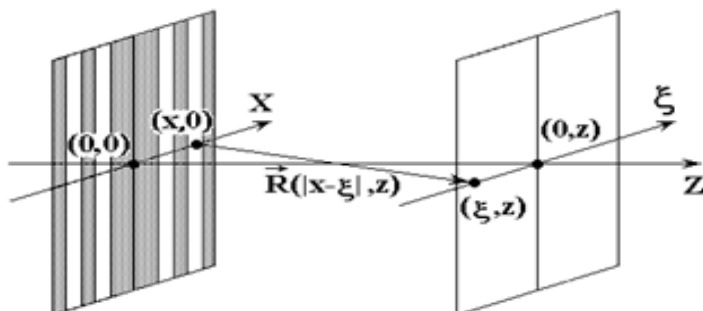


Рисунок 2. Схема розрахунку поля дифрагованого випромінювання.

Для адекватної апроксимації неперервних структур об'єкта і поля відповідними дискретними розподілами, крок розбиття об'єкту Δx та крок дискретизації дифракційного поля $\Delta \xi$ повинні бути менші за довжину хвилі оптичного випромінювання.

Схема фізичного моделювання

Експериментальні вимірювання розподілу інтенсивності поля випромінювання дифрагованого на смугах Кантора проводилися в оптичній схемі поданій на рисунку 3.

Досліджуваний об'єкт (5) освітлювався плоскою хвилею, сформованою мікрооб'єктивом 2, мікродіафрагмою 3 та об'єктивом 4. Інтенсивність дифрагованого випромінювання реєструвалася скануючим пристроєм, на якому закріплені фотодетектор (7) та мікродіафрагма (6). Сигнал із фотодетектора, за допомогою аналогово-цифрового перетворювача (8), вводився в комп'ютер (9). При необхідності сканування поля в площині об'єкту, його зображення проектувалося в площину дослідження.

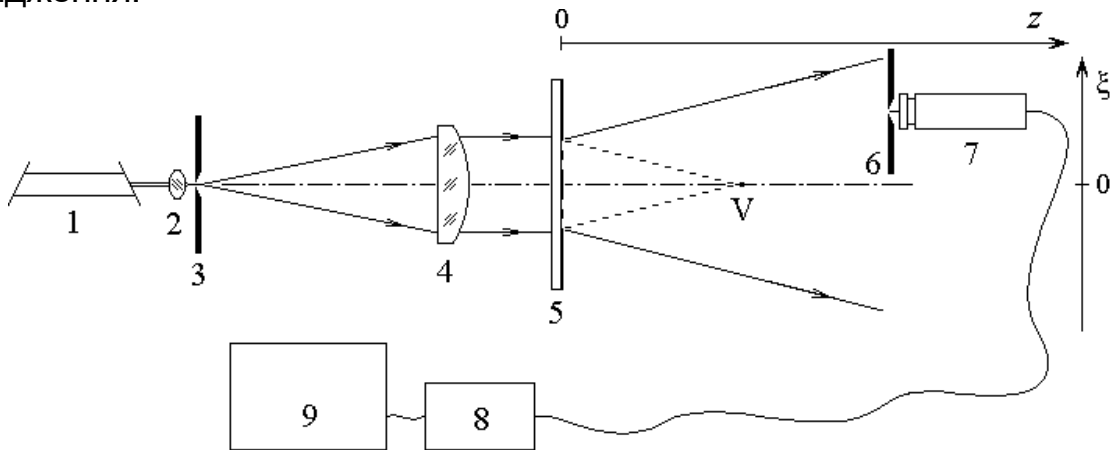


Рисунок 3. Оптична схема дослідження дифракції: 1 – гелій-неоновий лазер ($\lambda = 0,6328$ мкм); 2, 4 – об'єктиви; 3, 6 – мікродіафрагми; 5 – об'єкт дослідження з амплітудним пропусканням заданим розподілом смуг Кантора; 7 – фотодетектор (ФЕП, або лінійка приймачів); 8 – аналогово-цифровий перетворювач; 9 – комп'ютер.

В лабораторній роботі досліджуються смуги Кантора з першого по шостий рівень виготовлені фотолітографічним методом. Загальний розмір об'єкту складав 7,62 мм, розмір мінімального елементу фракталу 6-го рівня був 10 мкм.

Лінійка фотоприймачів мала 1024 елемента та роздільну здатність 25 ліній/мм.

Особливості розподілу інтенсивності поля випромінювання, дифрагованого на смугах Кантора

Дослідження поля випромінювання, дифрагованого на смугах Кантора, дозволило виявити в ньому ряд особливостей. Відомо, що в полі випромінювання, дифрагованому на решітці, на певних відстанях від неї відтворюється будова решітки. І хоч смуги Кантора не є періодичними, на відстанях аналогічних зонам саморепродукції, спостерігалися певні особливості в поведінці поля.

На рисунку 4 подані результати розрахунку інтенсивності поля, дифрагованого на смугах Кантора 5-го рівня. Можна помітити, що на відстані

$Z=5.4$ мкм поле нагадує фрактал, але 4-го рівня. Контури фракталу в полі зашумлені. На відстані $Z=13$ мкм відтворюється 3-й рівень, на відстані $Z=54$ мкм – другий рівень, на відстані $Z=120$ мкм – 1 рівень. Тобто для фракталу 5-го рівня, в полі дифрагованого випромінювання, спостерігались фрактали всіх 4-х нижчих рівнів. Для об'єктів інших рівнів спостерігається цей самий ефект. Використання вейвлет-перетворення дозволило вилучити шум в зображенні різних порядків (рисунок 4).

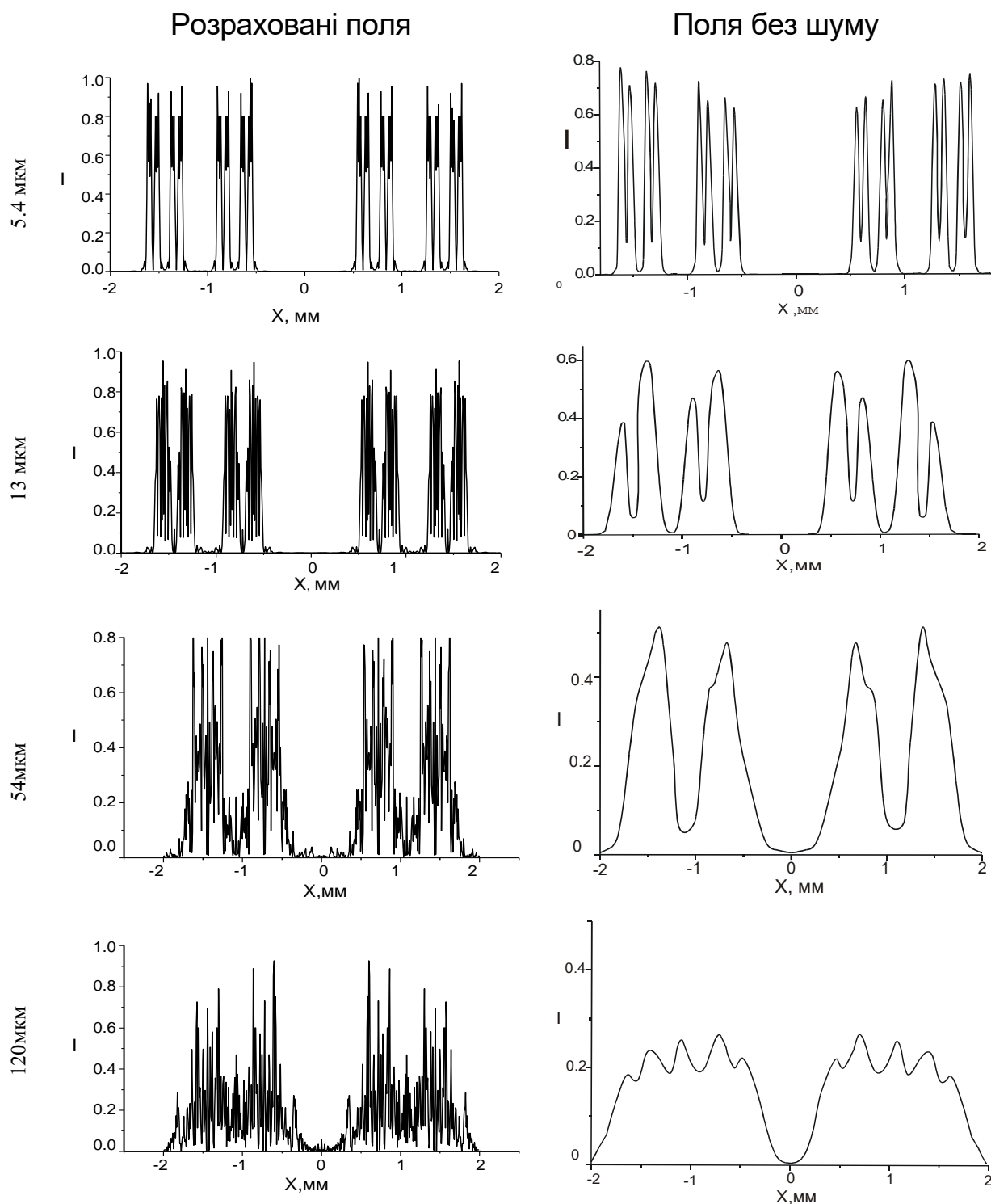


Рисунок 4. Розподіли інтенсивності поля, дифрагованого на смугах Кантора 5-го рівня.

Відстані до зони реєстрації, на яких відтворюється структура фракталу з рівнем на одиницю меншим, оцінюється з емпіричного співвідношення:

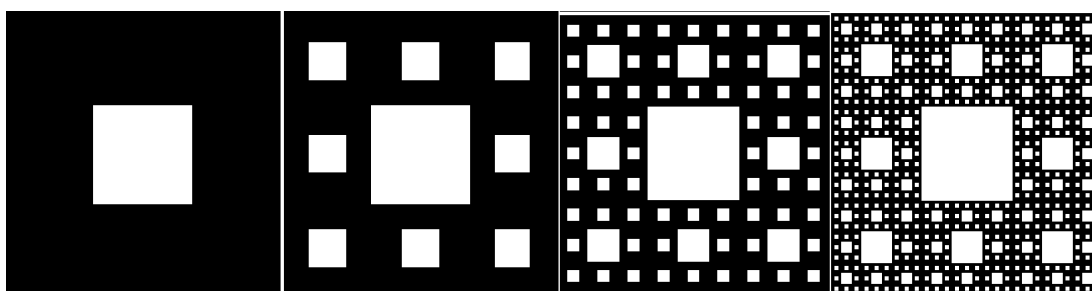
$$z \approx 2d^2 / \lambda, \quad (2)$$

де d - розмір мінімального елемента.

Результати комп'ютерного моделювання та експериментальних досліджень добре узгоджуються.

Моделювання та експериментальні дослідження серветок Серпинського

Процедура побудови серветок Серпинського подібна до процедури побудови смуг Кантора, з тою різницею, що серветки Серпинського є двомірним фракталом.



1-й рівень

2-й рівень

3-й рівень

4-й рівень

Рисунок 5. Серветки Серпинського 4-х рівнів.

Спочатку розглядається квадрат з одиничною площею, який ділиться на b^2 квадратиків. Потім вилучається a квадратиків і залишається $b^2 - a$ площадок. Ця процедура є одиничним кроком побудови серветки Серпинського і називається генератором цього фракталу. Повторюючи крок генерації N разів, будемо мати серветку Серпинського N -го рівня (рисунок 5). Виходячи з цієї процедури, фрактальна розмірність d_f серветок Серпинського визначиться як:

$$d_f = \frac{\ln(b^2 - a)}{\ln b}. \quad (3)$$

Коли $b = 3$ і $a = 1$, маємо $d_f = 1.893$.

Поле дифрагенованого випромінювання розраховувалося з використанням дифракційного інтегралу, який добре працює незалежно від зони реєстрації і дає результати, які досить близькі до експериментальних. Розрахунок дифракції плоскої хвилі на килимах Серпинського, по двомірному інтегралу Релея-Зомерфельда:

$$U^3(\xi, \zeta, z) = \frac{z}{i\lambda} \iint \frac{F(x, y)}{R^2(x, y, \xi, \zeta, z)} \exp(-ikR(x, y, \xi, \zeta, z)) dx dy. \quad (4)$$

Розподіл інтенсивності $I(\xi, \zeta) = |U(\xi, \zeta)|^2$ знаходиться з розрахованого значення амплітуди поля $U(\xi, \zeta)$.

Саморепродукція та пониження рівня фрактальності в дифрагованому полі

Для кількісного аналізу експериментальних результатів і комп'ютерного моделювання, корисним виявилось використання взаємної поздовжньої кореляційної функції інтенсивності дифрагованого поля $I(\xi, \zeta, z)$ та розподілу пропускання досліджуваного транспаранта $I_0(\xi, \zeta)$:

$$\Psi_I(z) = \frac{\langle I_0(\xi, \zeta) \cdot I(\xi, \zeta, z) \rangle}{\langle I_0(\xi, \zeta) \cdot I(\xi, \zeta, 0) \rangle}. \quad (5)$$

Експериментальні дослідження поля дифрагованого на 2D фракталі виконувалися в схемі, показаній на рисунку 6.

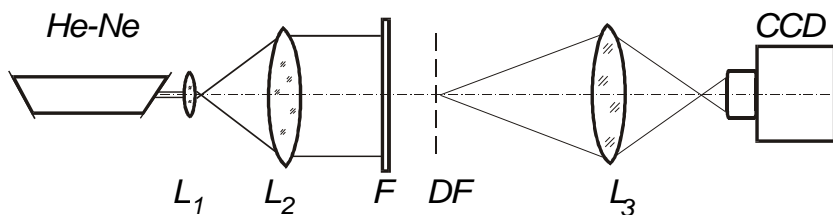


Рисунок 6. Схема для експериментальних досліджень поля дифрагованого на 2D фракталі.

Плоска хвиля, сформована телескопічною системою L_1-L_2 з випромінювання He-Ne лазера ($\lambda=0,6328$ мкм), освітлює досліджуваний фрактал F . Довільна площина дифрагованого поля DF , проектується об'єктивом L_3 на площину прийому CCD камери. Далі розподіл інтенсивності поля вводиться в комп'ютер. Досліджувані фрактали виготовлялися фотолітографічним методом у вигляді фотошаблону розміром 2 x 2 мм.

Для експериментального вимірювання функції поздовжньої взаємної кореляції в площині DF розміщувався транспарант і мірялась сумарна інтенсивність випромінювання, що пройшло через систему. На рисунку 7 показані функції поздовжньої взаємної кореляції поля, дифрагованого на серветці Серпинського 4-го рівня та транспарантами чотирьох типів: регулярними транспарантами з розміром елементів 25 мкм, 74 мкм, 222 мкм (що є складовими будови серветки Серпинського 4 рівня) та серветкою Серпинського 4-го рівня. Спостерігається періодична кореляція дифрагованого поля з регулярними структурами. Це свідчить про існування в полі, дифрагованому на серветках Серпинського, зон, аналогічних зонам саморепродукції, притаманним регулярним структурам. Розташування цих зон визначається наступним співвідношенням:

$$z = 2m(3d)^2 / \lambda, \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

d - розмір елементу регулярної структури.

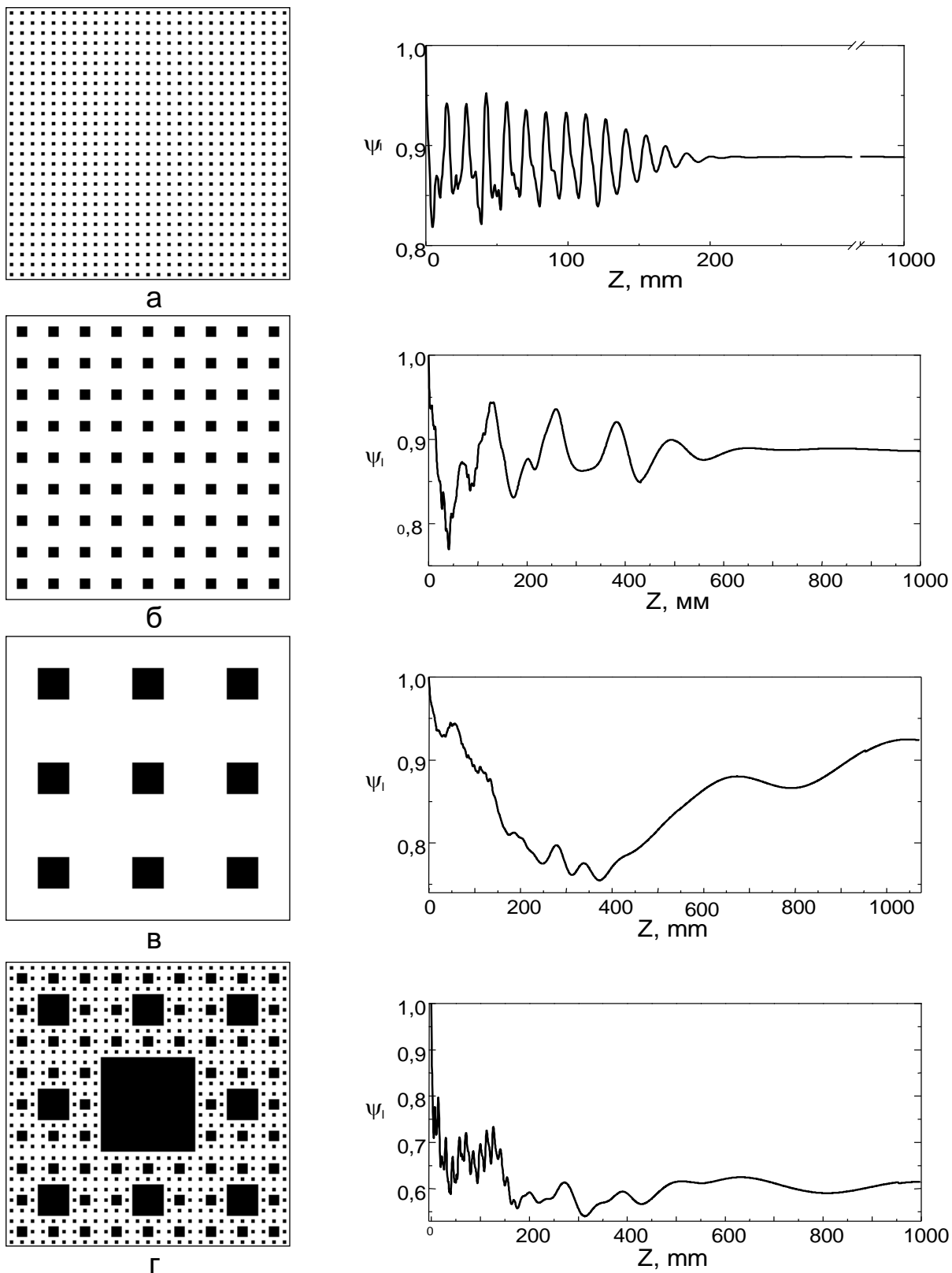
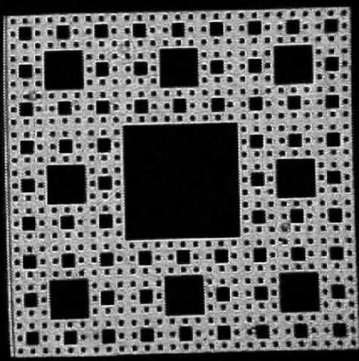
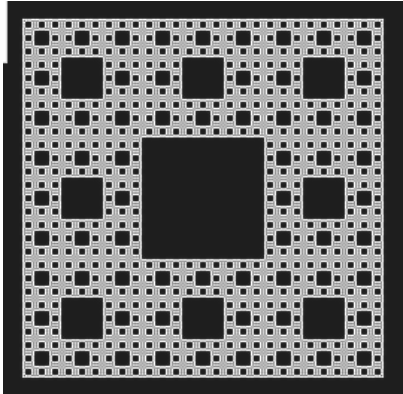
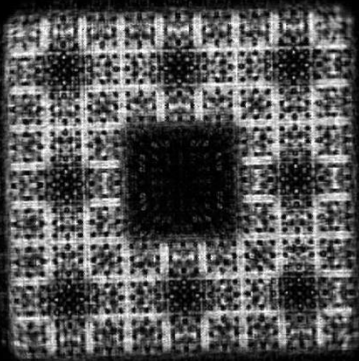
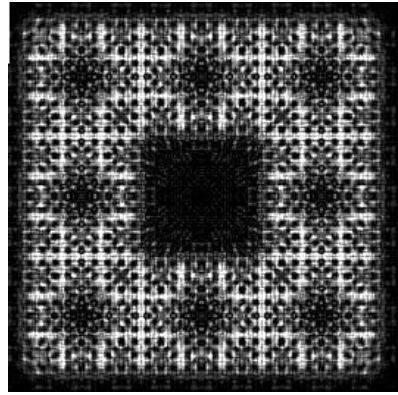
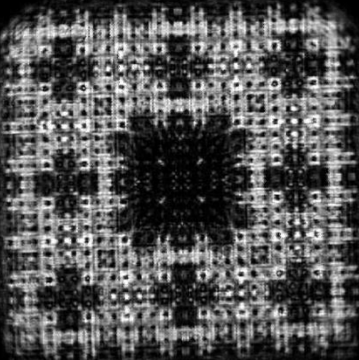
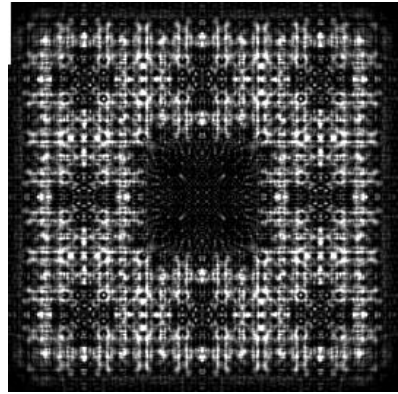


Рисунок 7. Функції подовжньої взаємної кореляції для регулярних транспарантів з розміром елементів 25 мкм (а), 74 мкм (б), 222 мкм (в) та серветки Серпинського 4-го рівня (г).

На рисунку 8 видно саморепродукцію мінімальних елементів фракталу в дифрагованому полі для $z = 18$ мм, як для розрахованих, так і для експериментально отриманих полів.

Фізичне моделювання	Комп'ютерне моделювання
	<p style="text-align: center;">Z=0</p> 
	<p style="text-align: center;">Z=18 мм</p> 
	<p style="text-align: center;">Z=36 мм</p> 

а)

б)

Рисунок 8. Інтенсивності експериментально отриманих (а) та розрахованих (б) полів, дифрагованих на серветці Серпинського 4-го рівня.

Крім саморепродукції в дифрагованому полі було виявлено ефект пониження рівня фракталу. Так, міряючи функцію поздовжньої кореляції поля, дифрагованого на серветці Серпинського 4-го рівня та транспаранта у вигляді серветки Серпинського нижчих рівнів, отримали максимуми кореляційної функції для зони реєстрації, що визначається наступним співвідношенням:

$$z_n \approx (N - n)3^{(N-n+1)} d_{\min}^2 / \lambda, \quad (6)$$

де: N – рівень фракталу-об'єкту; n – рівень фракталу в полі, d_{\min} – мінімальний елемент фракталу.

На рисунку 9 показано інтенсивності експериментально отриманих дифрагованих полів для зон реєстрації, яким відповідають максимуми функцій позовжньої взаємної кореляції для транспарантів третього (а) ($z=9$ мм) та другого (б) ($z=63$ мм) рівнів. В цих полях проглядаються зашумлені контури фракталів третього та другого рівнів.

Застосування процедури вейвлет-перетворення дозволяє дещо покращити зображення фракталів. Ми використовували де пакет MatLab, програму Wavelet Toolbox, процедуру 2-D Denoising.

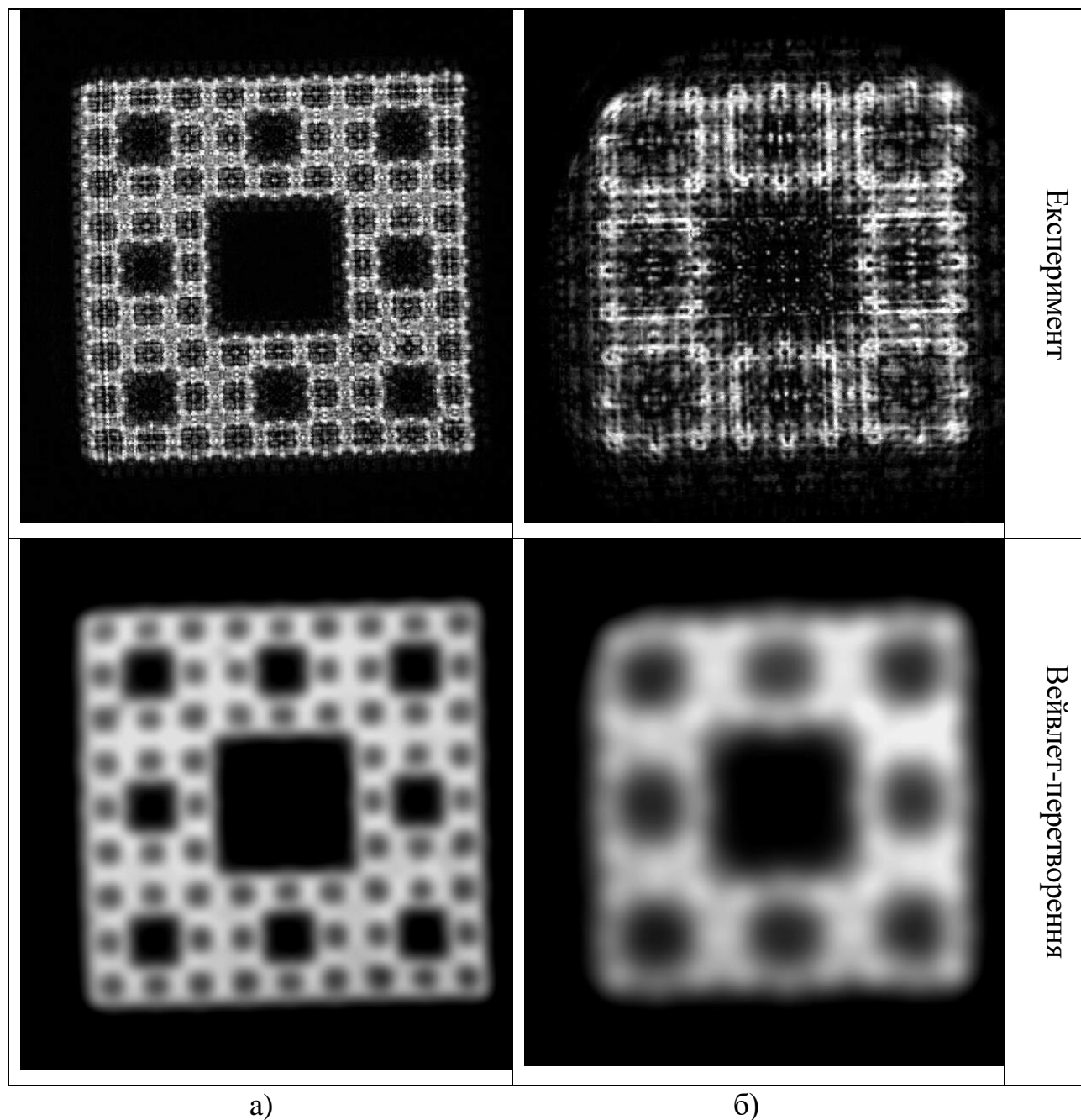


Рисунок 9. Експериментально отримані інтенсивності дифрагованих полів в

зонах пониження рівня фракталу: $z=9$ мм (а) та $z=53$ мм (б) та вейвлет-перетворення від них.

Таким чином, в полі оптичного випромінювання, дифрагованому на серветках Серпинського, спостерігалась саморепродукція елементів будови фракталу та пониження його рівня з віддаленням зони реєстрації, як теоретично, так і експериментально.

Моделювання та виготовлення фрактальних об'єктів

Побудова

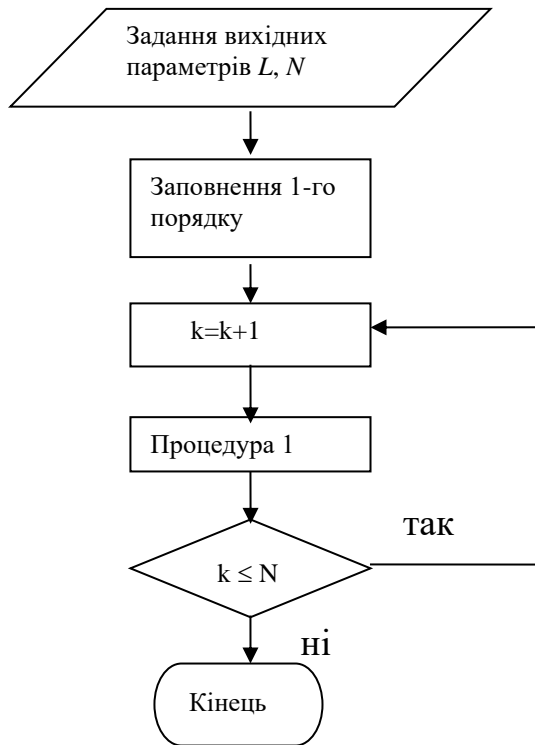


Рисунок 10. Алгоритм побудови модельного об'єкту.

Розглянемо моделювання на прикладі серветок Серпинського. Найпростішим методом є опис об'єкту у вигляді двомірного масиву, в якому пропускання об'єкта задається у вигляді нулів та одиниць (1 – об'єкт пропускає, 0 – об'єкт не пропускає). Хоч така процедура моделювання не є складною, отриманий масив потребує великого об'єму пам'яті. Тому був використаний інший алгоритм, в якому фрактальний об'єкт описується за допомогою координат вершини квадрату та довжини його сторони. Блок-схему даного алгоритму подано на Рисунку 10.

Вихідними параметрами при моделюванні є порядок фракталу N та геометричний розмір L . Число k – це номер заповнюваного порядку. Заповнення першого порядку проводилось безпосереднім заданням

координат вершини і довжини вирізуваного отвору. Для заповнення вищих порядків використовувалась “Процедура 1”. Дана процедура, використовуючи дані моделювання попереднього рівня, визначає координати вершин і розмір фракталу того рівня, що заповнюється в даний момент.

З метою оптимізації використання пам'яті комп'ютера був задіяний динамічний масив. У процесі моделювання застосовані типові алгоритми побудови двомірних об'єктів: переносу, масштабування та рекурсії.

Виготовлення

Для проведення експерименту необхідно було виготовити, з досить високою точністю, об'єкти невеликих розмірів. Мінімальний елемент фракталу повинен бути співрозмірним з довжиною хвилі оптичного

випромінювання. Технологія фотолітографії дозволяє це зробити. Фотошаблони апертур Коха, смуг Кантора та килимів Серпинського виготовлялись за координатами та ескізом, що видала програма моделювання фракталів. Координати зображення фракталів вводились за допомогою САПР КД "Рапіра-4" в ЕОМ СМ-4. Далі, за допомогою координатографу КПА-1200, на плівці проводилось виготовлення шаблонів з певним масштабом. З цієї плівки, методом фотодруку, з певним зменшенням було отримано фотошаблони на фотоемульсії, яка нанесена на скляну платівку. Точність виготовлення таких зразків складала 1 мкм.

Звіт має включати:

1. Короткий реферат.
2. Основні формули.
3. Результати моделювання, обробки та досліджень.
4. Графіки, характеристики.

Контрольні запитання

1. Які фрактали ви знаєте?
2. Які особливості детермінованих, випадкових та хаотичних фракталів?
3. Які алгоритми програм розрахунку фракталів та полів: двохмірних «Моделювання 2D-фракталів», одновимірних «Моделювання смуг Кантора» та мультифракталів «Моделювання мультифракталів Кантора»?
4. Які ви знаєте особливості в полі оптичного випромінювання розсіяному на 1D та 2D фракталах?

Список літератури

1. Ангельський О.В., Максимяк П.П. "Комп'ютерне та фізичне моделювання розсіювання світла неоднорідними об'єктами" Чернівці, "ЧНУ", 2017.-332 с.
2. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. - М.: Наука, 1981. - 640 с.
3. Ю.И.Неймарк, З.С. Ланда Б.С. Стохастические и хаотические колебания, М.Наука, 1987.
4. Федер Е. Фракталы, - М.:Мир,1991
5. Angelsky O. V., Maksymyak P. P., Hanson S. The Use of Optical-Correlation Techniques for Characterizing Scattering Object and Media. - Bellingham: SPIE Press PM71, 1999. – 194 p.
6. М.Борн, Э.Вольф. Основы оптики. -М.: Наука, 1970.- 856 с.
7. Angelsky, O.V., Maksymyak, P.P., Zenkova, C.Y. et al. Current Trends in Development of Optical Metrology. Opt. Mem. Neural Networks 29, 269–292 (2020). <https://doi.org/10.3103/S1060992X20040025>