ПРО КОРЕКТНУ РОЗВ'ЯЗНІСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Городецький Василь Васильович,
доктор фізико-математичних наук, професор,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
v.gorodetskiy@chnu.edu.ua
Колісник Руслана Степанівна,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
r.kolisnyk@chnu.edu.ua
Мартинюк Ольга Василівна,
доктор фізико-математичних наук, професор,
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
Чернівці, Україна
o.martynyuk@chnu.edu.ua

Різні функціональні простори можна трактувати як позитивні на негативні відносно L_2, побудовані за функціями від оператора диференціювання або множення на незалежну змінну, або як проективні чи індуктивні границі таких просторів. Теорію просторів основних та узагальнених елементів, які будуються за функціями довільного спряженого оператора, у своїх працях розвинули М. Л. Горбачук та В. І. Горбачук.

У цій роботі розглядаються простори узагальнених елементів, які ототожнюються з формальними рядами Фур'є і будуються за невід'ємним самоспряженим оператором у гільбертовому просторі, спектр якого є суто дискретним. Для диференціально-операторного рівняння першого порядку ставиться нелокальна багатоточкова за часом задача у випадку, коли відповідна умова задовольняється в позитивному або негативному просторах, які побудовані за таким оператором (таку задачу можна розуміти як певне узагальнення абстрактної задачі Коші для зазначеного диференціально-операторного рівняння). Встановлюється коректна розв'язність зазначеної задачі, при цьому будується фундаментальний розв'язок та досліджується його структура і властивості. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів і прикладних задач, дослідженням таких нелокальних задач займалося багато математиків, використовуючи при цьому різні методи та підходи. У процесі досліджень одержані важливі результати щодо постановки, коректної розв'язності та побудови розв'язків, сформульовані умови регулярності та нерегулярності граничних умов для важливих випадків диференціально-операторних рівнянь.

У цій роботі досліджується диференціально-операторне рівняння

$$u'(t) + Bu(t) = 0, \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

де B- лінійний і неперервний оператор у просторі $H_\infty\langle m_n\rangle$, побудований за неперервною функцією $F:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $B\varphi:=\sum_{k=1}^{\infty}F(\lambda_k)c_k(\varphi)e_k$, $\lambda_k=G(k)$, $\varphi\in D(B)=\left\{\varphi\in H:\sum_{k=1}^{\infty}F^2(\lambda_k)|c_k(\varphi)|^2\equiv\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(B\varphi)|^2<\infty\right\}$.

Під розв'язком рівняння (1) розуміємо функцію $u:(0,T]\to H_\infty\langle m_n\rangle$, сильно диференційовну в H, яка задовольняє рівняння (1). Розглянемо задачу: знайти функцію u, яка є розв'язком рівняння (1) та задовольняє умову

$$\mu\cdot u(0)-\sum_{k=1}^{m}\mu_k B_k u(t_k)=g,\ g\in H, \tag{2}$$

де $\{t_1,\ldots,t_m\}\subset(0,T]$, $\{\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_m\}\subset(0,\infty)$, $m\in\mathrm{N}$,– фіксовані числа, причому $\mu>\sum_{k=1}^{m}\mu_k$, $t_1<\ldots<t_m\le T$, $B_1,\ldots,B_m$- оператор в Н, побудовані за функціями $g_1,\ldots,g_m$, що задовольняють певні умови.

Теорема 1. Задача (1), (2) коректно розв'язна, її розв'язок задається формулою $u(t)=G(t)*g,\ t\in(0,T]$, $g\in H$, причому $u(t)\in H_\infty\langle m_n\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$.

Із властивості згортки випливає, що $u(t)=G(t)*g\in H_\infty\langle m_n\rangle$, якщо $g\in H'_\infty\langle m_n\rangle$ (при кожному $t\in(0,T]$). Тоді $u(t)$ є розв'язком рівняння (1), який задовольняє умову (2), де $g\in H'_\infty\langle m_n\rangle$, у тому сенсі, що

$$\mu\lim_{t\to+0}u(t)-\sum_{n=1}^{m}\mu_n\lim_{t\to t_n}B_n u(t)=g,\ g\in H'_\infty\langle m_n\rangle, \tag{3}$$

границі в (3) розглядаються в просторі $H'_\infty\langle m_n\rangle$.

Теорема 2. Задача (1), (3) коректно розв'язна, її розв'язок задається формулою

$$u(t)=G(t)*g,\ t\in(0,T],\ g\in H'_\infty\langle m_n\rangle,$$

$u(t)\in H_\infty\langle m_n\rangle$ при кожному $t\in(0,T]$.