Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації

Чернівці
Чернівецький національний університет
2021

УДК 531/534(072)

Друкується за ухвалою методичної ради
Навчально-наукового Інституту фізико-технічних та комп’ютерних наук
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича.

Теоретична механіка: метод. рекомендації / укл.: Ю.О. Сеті. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2021. – 74 с.

Викладаються методи теоретичного дослідження механічного руху матеріальних тіл та механічної взаємодії між ними, використовуючи основні закони і теореми класичної механіки.

Для студентів спеціальності Фізика та астрономія.

УДК 531/534(072)

1. ОСНОВИ КІНЕМАТИКИ

§1.1. Основні поняття кінематики

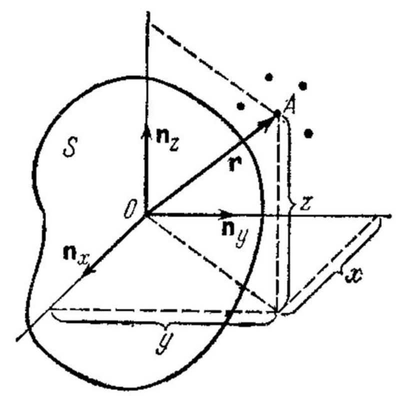
Для вивчення рухів реальних тіл, враховуючи їх складність, завжди потрібно абстрагуватися від несуттєвих деталей. З цією метою при встановленні основних закономірностей механічного руху використовуються спрощення, серед яких найважливіші наступні.

Матеріальна точка – це тіло безмежно малих розмірів. Практично це означає, що розміри такого тіла повинні бути значно меншими, ніж розміри, які характеризують рух цього тіла. Так, Землю при русі у Сонячній системі можна розглядати як матеріальну точку, оскільки радіуси Землі $R_з \approx 6400$км та Сонця $R_c \approx 700000$км значно менші за відстань між ними ($r \approx 150000000$км), отже $R_з/r \ll 1$, $R_c/r \ll 1$. Якщо ж розглядати рух Землі навколо своєї осі, то її вже не можна розглядати, як матеріальну точку.

Системою матеріальних точок називають сукупність тіл, кожне з яких є матеріальною точкою. Приклад – Галактика, зорі якої є матетіальними точками.

Абсолютно тверде тіло – система матеріальних точок, віддаль між якими не міняється при довільному переміщенні цієї системи.

Щоб охарактеризувати взаємне розташування точок у просторі використовується поняття *віддалі* між ними, яка вважається еталоном довжини. Тоді віддаль між двома точками рівна числу, яке показує скільки раз еталон довжини «вміщується» на відрізку прямої, яка з'єднує ці дві точки.



Нехай нас цікавить рух деякої системи матеріальних точок A. То для того, щоб вивчити такий рух, потрібно вибрати якусь іншу систему (S), що являє собою абсолютно тверде тіло. Тоді з системою S можна жорстко зв'язати три одиничних вектори $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$ із спільним початком O (так, як показано на рисунку). Тепер положення довільної точки системи A відносно системи S можна задати радіус-вектором $\vec{r}$ цієї точки. Розклавши радіус-вектор $\vec{r}$ по ортах, одержимо

$$\vec{r} = x\vec{n}_x + y\vec{n}_y + z\vec{n}_z . \tag{1.1}$$

Проекції радіус-вектора $\vec{r}$ на осі системи координат дають відповідні координати (x,y,z), які називають *декартовими*.

Відмітимо, що ми неявно нехтуємо впливом процесу вимірювання віддалі між точками на цю віддаль при написанні формули (1.1), що справедливо в теоретичній механіці і не допускається в квантовій механіці.

Отже, положення всіх точок системи A визначається, якщо відомі їх радіус-вектори. Якщо система A складається з N матеріальних точок, то по аналогії з (1.1) можна записати радіус-вектор довільної точки системи у вигляді:

$$\vec{r}_i = x_i\vec{n}_x + y_i\vec{n}_y + z_i\vec{n}_z; \qquad i = 1,2,3...N . \tag{1.2}$$

Тепер вивчимо особливість простору, в якому відбувається рух. Для цього розглянемо дві точки 1 і 2, які в деякій системі S характеризуються радіус векторами $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$

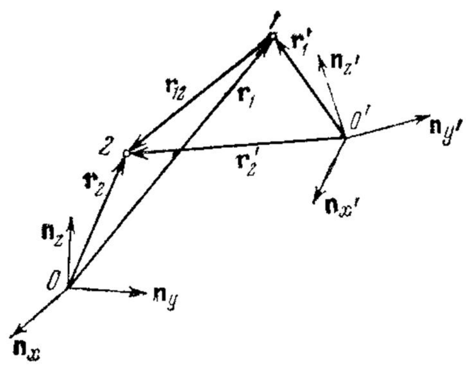
$$\begin{cases} \vec{r}_1 = x_1\vec{n}_x + y_1\vec{n}_y + z_1\vec{n}_z \\ \vec{r}_2 = x_2\vec{n}_x + y_2\vec{n}_y + z_2\vec{n}_z \end{cases} \tag{1.3}$$

Тоді віддаль між цими точками задається виразом

$$r_{12} = |\vec{r}_{12}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} . \tag{1.4}$$

Багаторазовий фізичний досвід з макроскопічними тілами при малих швидкостях дозволив сформулювати наступний *постулат*:

Величина просторового інтервалу відносно різних систем відліку, що рухаються довільним чином, одна і та ж в деякий момент часу.



Щоб записати цей постулат математично введемо систему S' (з ортами $\vec{n}'_x, \vec{n}'_y, \vec{n}'_z$ з початком в точці O'), яка довільно рухається відносно системи S.

Координати і радіус-вектори точок 1 і 2 в системі S' будуть:

$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 &= x'_1\vec{n}'_x + y'_1\vec{n}'_y + z'_1\vec{n}'_z \\ \vec{r}'_2 &= x'_2\vec{n}'_x + y'_2\vec{n}'_y + z'_2\vec{n}'_z \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Отже, віддаль між точками 1 і 2 в системі S' буде

$$r'_{12} = \left|\vec{r}'_{12}\right| = \left|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1\right| = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}. \qquad (1.6)$$

Згідно з сформульованим постулатом маємо:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}\,'_{12} \qquad (1.7)$$

або

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}\,, \qquad (1.7^*)$$

де $\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta x' = x'_2 - x'_1.$

Постулат (1.7) означає, що проекції радіус-векторів у системах S і S' пов’язані між собою ортогональними перетвореннями:

$$\begin{cases} \Delta x' = \theta_{x'x}\Delta x + \theta_{x'y}\Delta y + \theta_{x'z}\Delta z \\ \Delta y' = \theta_{y'x}\Delta x + \theta_{y'y}\Delta y + \theta_{y'z}\Delta z \\ \Delta z' = \theta_{z'x}\Delta x + \theta_{z'y}\Delta y + \theta_{z'z}\Delta z \end{cases} \qquad (1.8)$$

Тут коефіцієнти $\theta_{j'j}$ задовольняють умовам ортогональності:

$$\begin{cases} \theta^2_{x'x} + \theta^2_{x'y} + \theta^2_{x'z} = 1 \\ \theta^2_{y'x} + \theta^2_{y'y} + \theta^2_{y'z} = 1 \\ \theta^2_{z'x} + \theta^2_{z'y} + \theta^2_{z'z} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta_{x'x}\theta_{x'y} + \theta_{y'x}\theta_{y'y} + \theta_{z'x}\theta_{z'y} = 0 \\ \theta_{x'x}\theta_{x'z} + \theta_{y'x}\theta_{y'z} + \theta_{z'x}\theta_{z'z} = 0 \\ \theta_{x'y}\theta_{x'z} + \theta_{y'y}\theta_{y'z} + \theta_{z'y}\theta_{z'z} = 0 \end{cases} \qquad (1.9)$$

і рівні косинусам кутів між відповідними ортами систем S і S'.

В математиці прийнято називати простір з властивістю (1.7) евклідовим. Отже, простір в класичній механіці евклідовий.

З умови (1.7) випливає важливе співвідношення між радіус-векторами точки відносно різних систем відліку. Дійсно, нехай деяка точка в системі S характеризується радіус-вектором $\vec{r}$. Розглянемо також систему S', початок якої відносно системи S характеризується радіус-вектором $\vec{r}_{0'}$. Та ж сама точка в системі S' нехай характеризується радіус-вектором $\vec{r}\,'$. Тоді, згідно (1.7)

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{0'},$$

тобто

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{0'} \qquad (1.10)$$

Ці важливі співвідношення просторових координат справедливі лише в класичній механіці і порушуються в загальному випадку при досить великих швидкостях (коли $\upsilon \to c$).

При вивченні механічного руху використовується поняття часу.

Під поняттям часу розуміємо міру тривалості того чи іншого процесу, виражену в еталонних одиницях часу - секундах.

Знову ж таки, базуючись на практичному досвіді в класичній механіці *постулюється*: *Величина даного часового інтервалу однакова відносно різних систем, що довільно рухаються одна відносно одної.*

Це означає, що проміжки часу між початком і кінцем процесу у системах S і S' – однаковий

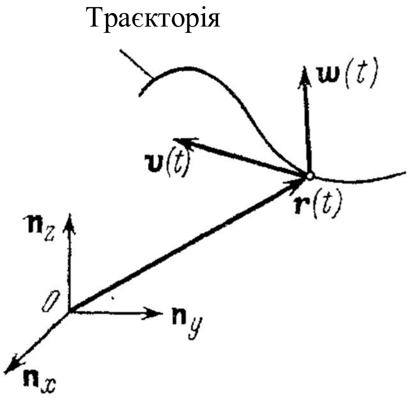
$$t_{12} = t'_{12}, \qquad \text{де} \qquad \begin{aligned} t_{12} &= t_2 - t_1 \\ t'_{12} &= t'_2 - t'_1 \end{aligned} \qquad (1.11)$$

При цьому вважається, що процес вимірювання часу не впливає на тривалість вимірювального процесу.

§1.2. Кінематичні характеристики руху

При розгляді руху матеріальної точки в деякій системі координат S її положення відносно цієї системи координат можна задати радіус-вектором як функцією часу

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{2.1}$$



Таке задання визначає *закон руху* матеріальної точки. Кінець радіус-вектора в просторі з часом описує лінію, по якій рухається точка - вона називається *траєкторією точки*.

Швидкістю точки $\vec{v}(t)$ відносно системи S називається похідна від радіус-вектора $\vec{r}(t)$ по часу при постійних ортах $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$:

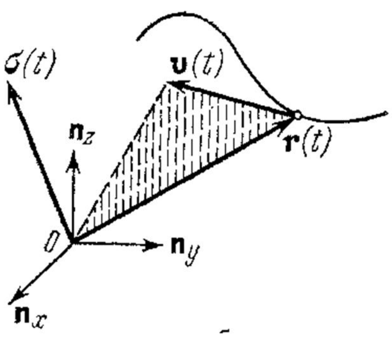
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \tag{2.2}$$

Вектор швидкості направлений по дотичній до траєкторії в даній точці.

Прискоренням $\vec{w}(t)$ точки відносно системи S називається похідна від швидкості $\vec{v}(t)$ по часу при постійних ортах $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$:

$$\vec{w}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \tag{2.3}$$

Прискорення направлене в сторону ввігнутості траєкторії.



Іноді використовують поняття секторної швидкості $\vec{\sigma}$, яка за означенням рівна приросту площі окресленої радіус-вектором за одиницю часу

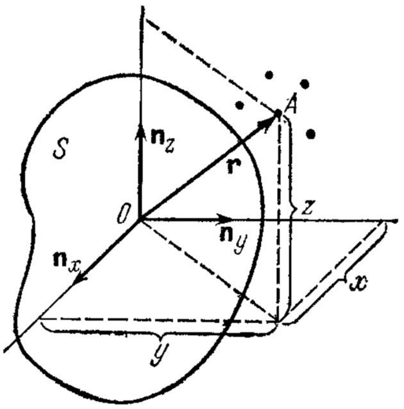
$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}\,\vec{v}]. \tag{2.4}$$

Вектор $\vec{\sigma}$ направлений так, щоб з його кінця поворот від $\vec{r}$ до $\vec{v}$ по найменшому куту відбувався проти годинникової стрілки. Абсолютна величина секторної швидкості дорівнює швидкості зміни площі, яку окреслює радіус-вектор точки за одиницю часу.

1.2.1 Кінематичні характеристики руху в декартовій системі координат

Ортами декартової системи координат є трійка одиничних фіксованих в просторі взаємно ортогональних векторів $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$. Радіус вектор в цій системі задається трьома координатами $x(t), y(t), z(t)$, як функціями часу.

$$\vec{r} = x\vec{n}_x + y\vec{n}_y + z\vec{n}_z. \tag{2.5}$$



Диференціюючи (2.5) по часу при постійних ортах $\vec{n}_x, \vec{n}_y, \vec{n}_z$ отримаємо швидкість

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{n}_x + \dot{y}\vec{n}_y + \dot{z}\vec{n}_z \tag{2.6}$$

та прискорення

$$\vec{w} = \ddot{x}\vec{n}_x + \ddot{y}\vec{n}_y + \ddot{z}\vec{n}_z. \tag{2.7}$$

Оскільки

$$\vec{v} = v_x\vec{n}_x + v_y\vec{n}_y + v_z\vec{n}_z,$$
$$\vec{w} = w_x\vec{n}_x + w_y\vec{n}_y + w_z\vec{n}_z,$$

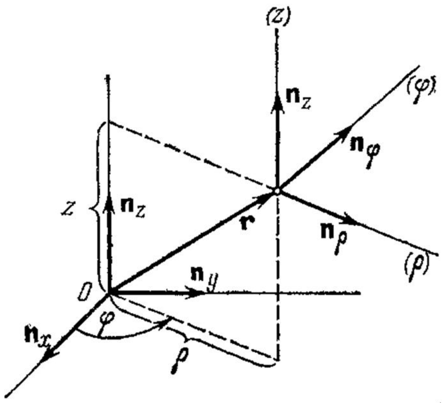
то отримуємо вирази для проекцій швидкості і прискорення:

$$\begin{matrix} v_x = \dot{x}, & v_y = \dot{y}, & v_z = \dot{z} \\ w_x = \ddot{x}, & w_y = \ddot{y}, & w_z = \ddot{z} \end{matrix} \tag{2.8}$$

Секторна швидкість визначається векторним добутком

$$\vec\sigma = \frac{1}{2}[\vec r\,\vec v] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec n_x & \vec n_y & \vec n_z \\ x & y & z \\ \dot x & \dot y & \dot z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\vec n_x(y\dot z - z\dot y) - \frac{1}{2}\vec n_y(x\dot z - z\dot x) + \frac{1}{2}\vec n_z(x\dot y - y\dot x). \qquad (2.9)$$

1.2.2 Кінематичні характеристики руху в циліндричній системі координат



Як видно з рисунка, у циліндричній системі координат при переміщенні точки відносно системи S міняються положення двох ортів $\vec n_r$ і $\vec n_j$. Причому, очевидно:

$$\vec r = \rho\vec n_\rho + z\vec n_z. \qquad (2.10)$$

Диференціюючи $\vec r(t)$ по часу, знайдемо швидкість

$$\dot{\vec r} = \vec v = \dot\rho\vec n_\rho + \rho\dot\varphi\vec n_\varphi + \dot z\vec n + z\dot{\vec n}_z. \qquad (2.11)$$

Використаємо зв'язок ортів циліндричної та декартової систем координат:

$$\begin{cases} \vec n_\rho = \vec n_x\cos\varphi + \vec n_y\sin\varphi \\ \vec n_\varphi = -\vec n_x\sin\varphi + \vec n_y\cos\varphi \\ \vec n_z = \vec n_z \end{cases} \qquad (2.12)$$

Так як

$$\dot{\vec n}_z = 0,$$

$$\dot{\vec n}_\rho = (-\vec n_x\sin\varphi + \vec n_y\cos\varphi)\dot\varphi = \dot\varphi\vec n_\varphi$$

то

$$\vec v = \dot\rho\vec n_\rho + \rho\dot\varphi\vec n_\varphi + \dot z\vec n_z. \qquad (2.13)$$

Оскільки ж

$$\vec v = v_\rho\vec n_\rho + v_\varphi\vec n_\varphi + v_z\vec n_z, \qquad (2.14)$$

то отримаємо компоненти швидкості

$$v_\rho = \dot\rho, \qquad v_\varphi = \rho\dot\varphi, \qquad v_z = \dot z. \qquad (2.15)$$

Диференціюючи (2.13) по часу одержимо прискорення

$$\vec w = \dot{\vec v} = \ddot\rho\vec n_\rho + \dot\rho\dot{\vec n}_\rho + \dot\rho\dot\varphi\vec n_\varphi + \rho\ddot\varphi\vec n_\varphi + \rho\dot\varphi\dot{\vec n}_\varphi + \ddot z\vec n_z. \qquad (2.16)$$

Врахувавши, що

$$\dot{\vec n}_\rho = \dot\varphi\vec n_\varphi, \quad \dot{\vec n}_\varphi = (-\vec n_x\cos\varphi - \vec n_y\sin\varphi)\dot\varphi = -\dot\varphi\vec n_\rho, \qquad (2.17)$$

то з (2.16) отримаємо

$$\vec w = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec n_\rho + (2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi)\vec n_\varphi + \ddot z\vec n_z; \qquad (2.18)$$

Так як

$$2\dot\rho\dot\varphi + \rho\ddot\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi),$$

то

$$\vec w = (\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2)\vec n_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi)\dot{\vec n}_\varphi + \ddot z\vec n_z. \qquad (2.19)$$

Оскільки

$$\vec w = w_\rho\vec n_\rho + w_\varphi\vec n_\varphi + w_z\vec n_z, \qquad (2.20)$$

то проекції прискорення в циліндричній системі координат будуть:

$$w_\rho = \ddot\rho - \rho\dot\varphi^2; \qquad w_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi); \qquad w_z = \ddot z. \qquad (2.21)$$

Знайдемо вираз для секторної швидкості згідно означення (2.4) та використавши (2.10) і (2.13)

$$\vec\sigma = \frac{1}{2}\left\{\rho^2\dot\varphi\left[\vec n_\rho \vec n_\varphi\right] + \rho\dot z\left[\vec n_\rho \vec n_z\right] + z\dot\rho\left[\vec n_z \vec n_\rho\right] + z\rho\dot\varphi\left[\vec n_z \vec n_\varphi\right]\right\}.$$

Отже,

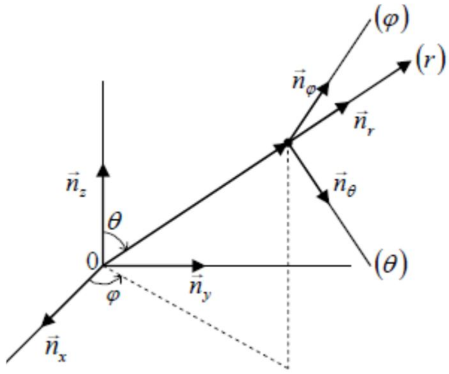
$$\vec\sigma = \frac{1}{2}(\rho^2\dot\varphi\vec n_z + (z\dot\rho - \rho\dot z)\vec n_\varphi - z\rho\dot\varphi\vec n_\rho). \qquad (2.22)$$

Так як
$$\sigma_z = \frac{\rho^2\dot\varphi}{2},$$
то
$$\frac{d\sigma_z}{dt} = \frac{1}{2}\left(2\dot\rho\rho\dot\varphi + \rho^2\ddot\varphi\right) = \frac{\rho}{2}\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi)$$
звідси
$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot\varphi) = \frac{2}{\rho}\frac{d\sigma_z}{dt}. \qquad (2.23)$$

Тепер порівнявши (2.23) з (2.21) отримаємо зв'язок проекцій w_φ та σ_z, який задається співвідношенням:

$$w_\varphi = \frac{2}{\rho}\frac{d\sigma_z}{dt}. \qquad (2.24)$$

1.2.2 Кінематичні характеристики руху в сферичній системі координат



У сферичній системі координат радіус-вектор точки задається функціями $r(t), \theta(t), \varphi(t)$. Розклад радіус-вектора по ортах сферичних координат визначається формулою

$$\vec r = r\vec n_r, \qquad (2.25)$$

де орти сферичної та декартової систем координат пов'язані виразами:

$$\begin{cases} \vec n_r = (\vec n_x\cos\varphi + \vec n_y\sin\varphi)\sin\theta + \vec n_z\cos\theta \\ \vec n_\theta = (\vec n_x\cos\varphi + \vec n_y\sin\varphi)\cos\theta - \vec n_z\sin\theta \\ \vec n_\varphi = -\vec n_x\sin\varphi + \vec n_y\cos\varphi \end{cases} \qquad (2.26)$$

Продиференціювавши (2.25) отримаємо швидкість та прискорення у сферичних координатах

$$\vec v = \dot{\vec r} = \dot r\vec n_r + r\dot\theta\vec n_\theta + r\dot\varphi\sin\theta\vec n_\varphi, \qquad (2.27)$$

$$\vec w = \dot{\vec v} = \ddot{\vec r} = [\ddot r - r(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\theta)]\vec n_r + [\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot\theta) - r\dot\varphi^2\sin\theta\cos\theta]\vec n_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi\sin^2\theta)\vec n_\varphi, \qquad (2.28)$$

які визначають секторну швидкість

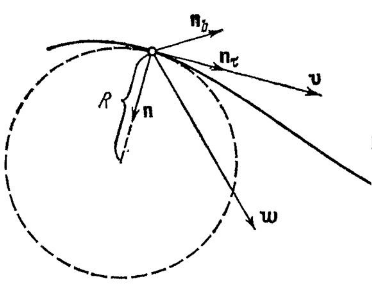
$$\vec\sigma = \frac{1}{2}(-r^2\dot\varphi\sin\theta\vec n_\theta +) + r^2\dot\theta\vec n_\varphi. \qquad (2.29)$$

§1.3. Природне задання руху точки

На відміну від розглянутого векторного задання, деколи використовують спосіб задання руху точки так, що радіус-вектор є функцією довжини дуги траєкторії λ, а саме λ задається як функція часу t.

$$\vec r = \vec r(\lambda), \qquad s = s(\lambda). \qquad (3.1)$$

З допомогою векторної функції $\vec r(\lambda)$ можна визначити орти, сукупність яких називають природним тригранником. Один із цих векторів, орт $\vec n_\tau$, направляється по приросту радіус-вектора $d\vec r$, який направлений по дотичній до траєкторії в даній точці. Так як з точністю до безмежно малих вищого порядку малості $|d\vec r| = d\lambda$, то



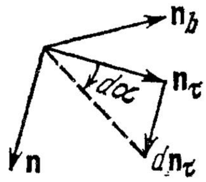
$$\vec{n}_\tau = \frac{d\vec{r}}{d\lambda}. \tag{3.2}$$

Другий орт $\vec{n}$ направимо по головній нормалі до траєкторії (вздовж приросту $d\vec{n}_\tau$). Щоб отримати $\vec{n}$ продиференціюємо (3.2) по λ:

$$\frac{d\vec{n}_\tau}{d\lambda} = \frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}\right|\vec{n}. \tag{3.3}$$

Звідси знаходимо орт $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \frac{1}{\left|\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}\right|}\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}. \tag{3.4}$$



Тепер виразимо $\vec{n}$ через радіус кривизни траєкторії R. Для цього згадаємо з диференційної геометрії, що R визначається як відношення приросту довжини дуги $d\lambda$ до кута $d\alpha$ між векторами $\vec{n}_\tau$ і $\vec{n}_\tau + d\vec{n}_\tau$

$$R = \frac{d\lambda}{d\alpha}. \tag{3.5}$$

Оскільки $|d\vec{n}_\tau| = d\alpha$ (що видно із рисунка) та $d\vec{n}_\tau = \vec{n}|d\vec{n}_\tau| = \vec{n}d\alpha$,

то
$$d\vec{n}_\tau = \vec{n}d\alpha \tag{3.6}$$

Підставимо (3.6) в (3.3), тоді

$$\frac{\vec{n}d\alpha}{d\lambda} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}\right|\vec{n}, \tag{3.7}$$

звідки
$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}\right|^{-1}.$$

Отже, тепер з (3.5) отримаємо радіус кривизни

$$R = \frac{1}{\left|\frac{d^2\vec{r}}{d\lambda^2}\right|}. \tag{3.8}$$

Тоді з (3.3) отримаємо кінцевий вираз для орта $\vec{n}$:

$$\vec{n} = R\frac{d\vec{n}_\tau}{d\lambda}. \tag{3.9}$$

Останній, третій орт, направимо по бінормалі до траєкторії і задамо векторним добутком двох перших ортів:

$$\vec{n}_b = [\vec{n}_\tau \times \vec{n}]. \tag{3.10}$$

Для прикладу проведемо розклад по природньому триграннику швидкості і прискорення. Для цього за означенням швидкості продиференціюємо (3.1)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \upsilon\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \upsilon\vec{n}_\tau.$$

Отже
$$\vec{v}(t) = \upsilon\vec{n}_\tau. \tag{3.11}$$

Тепер $\vec{w}$ одержимо дифереціюючи (3.11):

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\upsilon\vec{n}_\tau)}{dt} = \dot{\upsilon}\vec{n}_\tau + \upsilon\frac{d\vec{n}_\tau}{dt} = \dot{\upsilon}\vec{n}_\tau + \upsilon\frac{d\vec{n}_\tau}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dt} = \dot{\upsilon}\vec{n}_\tau + \upsilon^2\frac{d\vec{n}_\tau}{d\lambda}.$$

Оскільки із (3.9)

$$\frac{d\vec{n}_\tau}{d\lambda} = \frac{\vec{n}}{R},$$

то
$$\vec{w} = \ddot{s}\vec{n}_\tau + \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{n}. \qquad (3.12)$$

Врахувавши, що згідно з (3.11)
$$v = \dot{s},$$
кінцево отримаємо
$$\vec{v} = v\vec{n}_\tau, \qquad (3.13)$$
$$\vec{w} = \dot{v}\vec{n}_\tau + \frac{v^2}{R}\vec{n}. \qquad (3.14)$$

Остання формула визначає розклад прискорення на тангенціальну і нормальну складові (бінормальна складова завжди рівна нулю).

Всі фізичні величини, які ми розглянули в цьому розділі дозволяють розв’язувати задачі кінематики, тобто задачі того розділу класичної механіки, який не потребує інформації про чинники, що викликали рух точки.

2. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ЗАКОНИ ДИНАМІКИ

§2.1. Поняття сили і маси

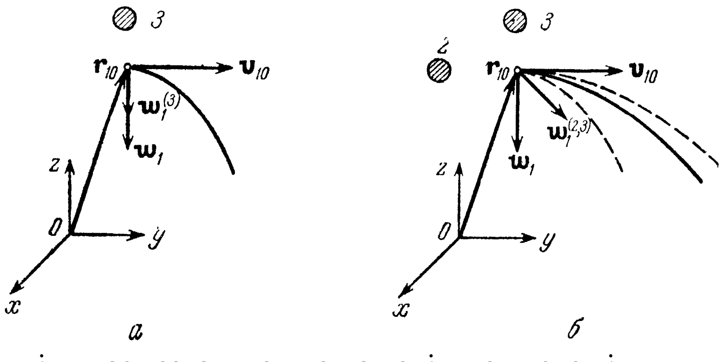
У попередньому розділі встановлено, як відповідними вимірюваннями визначити положення, швидкість, прискорення матеріальної точки. Тепер перейдемо до розгляду проблеми визначення причин руху. Практично це можна зробити так.

Припустимо, що відомі всі кінематичні характеристики матеріальної точки 1 у системі S. Увівши поблизу точки 1 іншу матеріальну точку 2 виявиться, що прискорення першої точки (а значить і всі інші характеристики) стнуть відмінними від тих, якими вони були за відсутності матеріальної точки 2 (тобто при віддаленні її на безмежність).

Узагальнення багаторічних дослідів привело до висновку:

У будь-якій системі координат наявність тіла 2 приводить до деякого прискорення тіла 1 і по мірі віддалення тіла 2 від 1 на безмежність це прискорення зникає
$$\vec{w}_1^{(2)}\Big|_{r_{12}\to\infty} \to 0. \qquad (1.1)$$

Досвід також показує, що прискорення $\vec{w}_1^{(2,3)}$, якого надають тілу 1 два інших тіла 2 і 3 одночасно, дорівнює векторній сумі прискорень $\vec{w}_1^{(2)}$ і $\vec{w}_1^{(3)}$, яких надають тілу 1 тіла 2 і 3 окремо
$$\vec{w}_1^{(2,3)} = \vec{w}_1^{(2)} + \vec{w}_1^{(3)}. \qquad (1.2)$$



Останнє твердження підлягає узагальненню на довільне число тіл.

Отже, на основі досвіду можна стверджувати, що тіла діють одне на інше і ця дія проявляється у виникненні прискорень, що мають властивості (1.1) та (1.2).

Таким чином ми підійшли до поняття сили.

Під силою, з якою матеріальна точка 2 діє на матеріальну точку 1, розуміють такий вплив точки 2 на 1, в результаті якого точка 1 набуває прискорення, що зникає при віддаленні на безмежність 2 від 1.

Оскільки сила, як характеристика впливу одного тіла на інше, є причиною прискорення, а останнє – величина векторна, то постулюється, що сила є величина векторна з тим же напрямком, що і викликане нею прискорення

$$\vec{F}_{21} \uparrow\uparrow \vec{w}_1^{(2)}, \tag{1.3}$$

де $\vec{F}_{21}$ - сила, з якою друге тіло діє на перше. Крім цього постулюється, що

$$\left.\vec{F}_{21}\right|_{r_{12}\to\infty} \to 0 \tag{1.4}$$

Постулюється також, що:

Сила $\vec{F}_1^{(2,3)}$*, з якою тіла 2 і 3 діють одночасно на тіло 1, рівна векторній сумі сил* $\vec{F}_{21}$ *і* $\vec{F}_{31}$*, що окремо діють на 1*

$$\vec{F}_1^{(2,3)} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}. \tag{1.5}$$

Якщо дія цих тіл не міняє прискорення тіла (1), то тоді:

$$\vec{F}_1^{(2,3)} = 0, \qquad \vec{w}_1^{(2,3)} = 0. \tag{1.6}$$

Для вимірювання сили, очевидно, потрібно ввести деяку силу-еталон. В якості такої сили можна, наприклад, розглядати таку силу, з якою на тіло діє певна пружина, прикріплена до нього одним кінцем і розтягнута до визначеної величини (λ_{et}). Тоді за допомогою цього еталону можна виміряти будь яку силу, що діє з боку тіла 2 на матеріальну точку 1.

Справді, якщо в результаті дії на точку 1 сили–еталона і тіла 2 прискорення матеріальної точки 1 рівне нулю, то це означає, що

$$\begin{cases} \vec{w}_1^{(et,2)} = \vec{w}_1^{(et)} + \vec{w}_1^{(2)} = 0 \\ \vec{F}_1^{(et,2)} = \vec{F}_{et} + \vec{F}_{21} = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

З останнього рівняння системи (1.7), очевидно як вимірюється сила $\vec{F}_{21}$ через еталонну силу

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{et}. \tag{1.8}$$

Якщо ж ми маємо кілька еталонних пружин, то розташовуючи їх під відповідними кутами, можна виміряти будь-яку силу. Користуючись вказаним способом вимірювання, експериментально були встановлені залежності деяких сил від різних фізичних величин. Розглянемо приклади таких залежностей для найчастіше вживаних сил.

а) Пружня сила, що діє з боку деформованої пружини 2 на матеріальну точку 1, яка прикріплена до одного з її кінців (при малій деформації пружини).

Ця сила пропорційна деформації пружини і направлена вздовж осі пружини

$$\vec{F}_{21} = -\chi(r_{21} - \lambda)\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}, \tag{1.9}$$

$\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$; χ - жорсткість пружини, λ -довжина пружини в нерозтягненому стані.

б) Сила Кулона, з якою заряд 2 (величиною e_2) діє на заряд 1 (величиною e_1). Якщо e_2 знаходиться в точці $\vec{r}_2$, а e_1 в $\vec{r}_1$, то

$$\vec{F}_{21} = \frac{e_1 e_2}{r_{21}^2}\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}, \qquad \vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \tag{1.10}$$

в) Сила Лоренца, яка діє на заряд e_1, що рухається з швидкістю $\vec{v}_1$ в електричному полі напруженості $\vec{E}(\vec{r}_1, t)$ і магнітному полі напруженості $\vec{H}(\vec{r}_1, t)$

$$\vec{F}_1 = e_1\vec{E}(\vec{r}_1, t) + \frac{e_1}{c}\left[\vec{v}_1 \vec{H}(\vec{r}_1, t)\right], \tag{1.11}$$

c – швидкість світла у вакуумі. Напруженості $\vec{E}$ і $\vec{H}$ в теоретичній механіці вважаються відомими функціями координати і часу.

г) Сила опору середовища, що діє на тверде тіло при його русі в рідині чи газі, залежить від швидкості цього тіла відносно середовища і направлена протилежно до цієї швидкості

$$\vec{F}_1 = -k\vec{v}_1, \tag{1.12}$$

k - додатна константа, характерна для цього тіла і середовища.

Вивчаючи дослідним шляхом співвідношення між силою і викликаним нею прискоренням було сформульовано *фундаментальне твердження класичної механіки:*

У довільній системі відліку відношення сили до викликаного нею прискорення матеріальної точки є величиною постійною для даної матеріальної точки і називається інертною масою (або просто масою).

$$\frac{\vec{F}_{21}}{\vec{w}_1^{(2)}} = m_1 . \qquad (1.13)$$

Маса m_1 матеріальної точки (1) – величина додатна.

Розрахувавши відношення еталонної сили F_{et} до еталонного прискорення w_{et} знайдемо еталонну масу m_{et}, що дозволяє легко знайти масу будь-якого тіла.

Розглянемо ще один тип сил.

д) Сила тяжіння.

Сила гравітаційного тяжіння двох матеріальних тіл масами m_1 і m_2 пропорційна добутку мас цих тіл і обернено пропорційна квадрату відстані між ними

$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} . \qquad (1.14)$$

γ - додатній коефіцієнт, що визначається експериментально і називається гравітаційною сталою.

Сила тяжіння має важливу і унікальну особливість – прискорення, якого вона надає будь-якому тілу не залежить від маси цього тіла.

Розглянемо три тіла 1, 2 і et. Тоді прискорення тіла 1 в полі тяжіння тіла 2 буде

$$\vec{w}_1^{(2)} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = -\gamma \frac{m_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} , \qquad (1.15)$$

Тобто $\vec{w}_1^{(2)}$ не залежить від маси m_1 тіла 1.

Якщо ж замість тіла 1 помістити еталонне тіло з масою m_{et}, маса якого, взагалі кажучи, не дорівнює m_1, то отримаємо той же вираз, що й (1.15)

$$\vec{w}_{et} = \frac{\vec{F}_{et}}{m_{et}} = -\gamma \frac{m_2}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}} . \qquad (1.16)$$

Отже, згідно (1.15) і (1.16)

$$\vec{w}_1^{(2)} = \vec{w}_{et}^{(2)} . \qquad (1.17)$$

Тобто прискорення двох різних тіл в полі тяжіння третього, що розташовані на однаковій відстані від нього, рівні між собою. Оскільки це так, то

$$\frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = \frac{\vec{F}_{et}}{m_{et}}$$

отже

$$\frac{\vec{F}_{21}}{\vec{F}_{et}} = \frac{m_1}{m_{et}} . \qquad (1.18)$$

Відношення сил гравітаційного притягання двох тіл 1 і et до третього тіла 2 при однаковій відстані 1 і et відносно 2, рівне відношенню їх мас. Ця властивість зручна для вимірювання мас тіл.

Поряд з визначенням інертної маси в класичній механіці є поняття гравітаційної маси. Вона визначається через закон всесвітнього тяжіння. Для цього вводиться гравітаційна еталонна маса m_{et}^{gr}, а через неї вже може бути знайдена гравітаційна маса будь-якого тіла.

Переконаємось тепер в тому, що гравітаційна й інертна маси пропорційні.

Для цього помістимо тіла 1 і et з гравітаційними масами m_1^{gr} і m_{et}^{gr} на однакову відстань від тіла 2 з гравітаційною масою m_2^{gr}. Тоді з боку тіла 2 на два інші тіла будуть діяти сили

$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1^{gr} m_2^{gr}}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}; \qquad \vec{F}_{2et} = -\gamma \frac{m_{et}^{gr} m_2^{gr}}{r_{21}^2} \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}, \tag{1.19}$$

які викличуть прискорення $\vec{w}_1^{(2)}$ і $\vec{w}_{et}^{(2)}$ відповідно.

Взявши відношення сил до відповідних прискорень знайдемо інертні маси:

$$m_1 = \frac{\vec{F}_{21}}{\vec{w}_1^{(2)}}, \qquad m_{et} = \frac{\vec{F}_{21}}{\vec{w}_{et}^{(2)}}.$$

Згідно (1.17)

$$w_1^{(2)} = w_{et}^{(2)}.$$

Тоді

$$\frac{\vec{F}_{21}}{m_1} = \frac{\vec{F}_{2et}}{m_{et}}$$

або підставивши у цю рівність (1.19) отримаємо

$$m_1 = \left(\frac{m_{et}}{m_{et}^{gr}} \right) m_1^{gr}. \tag{1.20}$$

Звідси видно пропорційність інертної та гравітаційної мас. Ця важлива особливість неодноразово підтверджувалася експериментально з великою точністю.

§2.2. Закони Ньютона. Принцип відносності Галілея

Із найпростіших спостережень легко помітити, що рух матеріальної точки відносно різних систем може характеризуватись різними кінематичними особливостями. Так, відносно одних систем матеріальна точка може рухатись без прискорення, тоді як, в той же час, відносно інших – вона матиме прискорення. Перший тип систем особливий і специфічний.

Система відліку називається *інерціальною*, якщо ізольована матеріальна точка рухається відносно неї рівномірно і прямолінійно з довільного положення і з довільним напрямком швидкості, або перебуває в стані спокою. Наявність таких систем встановлюється експериментально з тією чи іншою степеню точності.

В інерціальній системі радіус-вектор є лінійною функцією часу

$$\vec{r} = \vec{v_0} t + \vec{r_0} \tag{2.1}$$

Узагальнення експериментального досвіду привело до формулювання трьох фундаментальних законів класичної механіки - законів Ньютона.

Перший закон Ньютона (закон інерції): інерційні системи відліку існують.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки): добуток маси матеріальної точки на її прискорення відносно інерціальної системи відліку рівне сумі всіх сил, що діють на дану точку з боку інших тіл

$$m_1 \vec{w_1} = \vec{F_1}, \qquad \vec{F_1} = \sum_{n=2}^{N} \vec{F_1}^{(n)}. \tag{2.2}$$

При цьому прискорення $\vec{w_1}^{(2 \dots N)}$ точки 1, викликане тілами 2…N, дорівнює векторній сумі прискорень $\vec{w_1}^{(2)} \dots \vec{w_1}^{(N)}$ в інерційній системі

$$\vec{w_1}^{(2 \dots N)} = \sum_{n=2}^{N} \vec{w_1}^{(n)}.$$

Пам'ятаючи, що $\vec{w_1}^{(2 \dots N)} = \sum_{n=2}^{N} \vec{w_1}^{(n)}$, $\vec{w} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$, а також застосовуючи 2-й закон до системи матеріальних точок отримаємо основний закон динаміки для системи матеріальних точок:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r_i}}{dt^2} = \vec{F_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, N. \tag{2.2'}$$

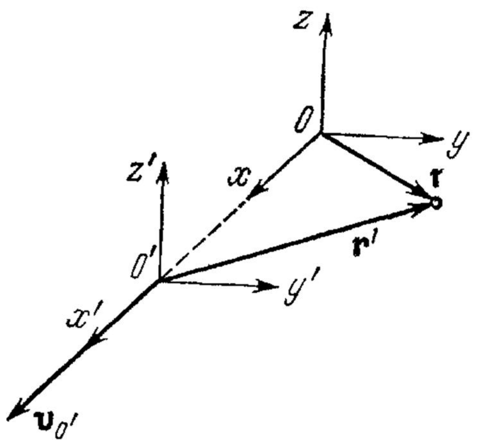
Третій закон Ньютона: сили, з якими дві матеріальні точки діють одна на другу, рівні по величині і направлені в протилежні сторони по прямій, що їх з'єднує

$$\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}} \qquad (2.3)$$

Треба завжди пам’ятати, що ці сили прикладені до різних тіл і не компенсують одна одну.

З другого і третього законів випливає, що дві довільні матеріальні точки надають одне одній прискорення, обернено пропорційні їх масам і направлені по прямій, що їх з’єднує

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{m_1}{m_2} \qquad (2.4)$$



Тепер розглянемо систему S', яка неприскорено рухається відносно інерціальної системи S. Це значить, що початок системи S' рухається рівномірно відносно S, а орієнтація її ортів не міняється з часом.

Нехай радіус-вектор матеріальної точки в системі S - $\vec{r}$, в S' - $\vec{r}'$, тоді

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_{0'}} + \vec{r}' \qquad (2.5)$$

де $\overrightarrow{r_{0'}} = \overrightarrow{v_{0'}}t + (\overrightarrow{r_{0'}})_0$ – радіус-вектор точки O' відносно O в момент часу t.

Щоб знайти швидкість продиференціюємо (2.5)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_{0'}}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt},$$

отже

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_{0'}} + \vec{v}' \qquad (2.6)$$

Диференціюючи (2.6) одержимо:

$$\vec{w} = \vec{w}' \qquad (2.7)$$

Отже, в обох системах прискорення точки однакове, а тому обидві системи інерціальні. Тому перетворення координат задається раніше встановленими перетвореннями Галілея:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \overrightarrow{v_{0'}}t \qquad (2.8)$$

$$t = t' \qquad (2.9)$$

На основі експериментальних спостережень Галілеєм був сформульований принцип відносності: *закони механіки однакові в довільних інерціальних системах*.

Оскільки маса в класичній механіці не залежить від системи відліку, а $\vec{w} = \vec{w}'$, то з принципу відносності Галілея слідує, що

$$\vec{F} = \vec{F}' \qquad (2.10)$$

тобто сили, що діють на матеріальну точку в різних інерціальних системах відліку рівні.

Отже, всі величини, що входять у II закон Ньютона не змінюються при переході від однієї інерціальної системи до іншої, тому принцип відносності Галілея ще можна сформулювати так: *рівняння Ньютона інваріантні відносно перетворень Галілея*.

Розглянуті нами поняття являють собою фундамент класичної механіки, вони неоднарозово перевірялись експериментально і в досить широкій області явищ можуть вважатись точними.

§2.3 Дві задачі динаміки

Виходячи з виду основного закону динаміки

$$m_i \frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} = \vec{F_i}, \qquad i = 1,2, \dots, N \qquad (3.1)$$

можна сформулювати дві задачі динаміки.

Перша задача динаміки (пряма задача): *по заданому закону руху матеріальної точки (чи системи матеріальних точок)* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *знайти сили, що приводять до цього руху.*

Ця задача легко розв’язується подвійним диференціюванням закону руху по часу і підстановкою в ліву частину рівняння

$$\frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} = \frac{\vec{F_i}}{m_i}, \qquad i = 1,2, \dots, N \qquad (3.2)$$

Друга задача динаміки (задача): по заданим силам, що діють на матеріальну точку (чи систему матеріальних точок) знайти закон її (їх) руху $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

В математичному відношенні ця задача є незрівнянно складнішою за першу, так як потребує розв'язування системи диференціальних рівнянь другого порядку. Для системи N матеріальних точок, на які накладено відомі сили, згідно II закону Ньютона справедливе рівняння

$$m_i \frac{d^2\vec{r_i}}{dt^2} = \vec{F_i}(\vec{r_i}, \vec{v_i}, t), \quad i = 1,2, \ldots \text{N} \tag{3.3}$$

де маси m_i та сили $\vec{F_i}$ відомі.

Як відомо з вищої математики, така система 3N диференціальних рівнянь другого порядку має розв'язки, які залежить від 6N довільних сталих

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(t, c_1 \ldots c_{6N}) \tag{3.4}$$

Залежність розв'язків від 6N сталих означає, що під дією заданих сил система матеріальних точок може здійснювати не єдиний, а цілий клас рухів. Однозначний вибір руху визначається початковими умовами.

В якості початкових умов повинні бути відомі:

$$\vec{r}_{i0} = \vec{r_i}(t_0); \quad \vec{v}_{i0} = \vec{v_i}(t_0) \qquad i = 1,2 \ldots N \tag{3.5}$$

Диференціюючи (3.4) по часу знайдемо

$$\vec{v_i} = \vec{v_i}(t, c_1 \ldots c_{6N}) \tag{3.6}$$

Тепер покладаючи в системах (3.4) і (3.6) початкове значення часу $t = t_0$, одержимо систему 6N рівнянь для знаходження всіх 6N сталих $c_1 \ldots c_{6N}$:

$$\begin{cases} \vec{r}_{i0} = \vec{r_i}(t_0, c_1 \ldots c_{6N}) \\ \vec{v}_{i0} = \vec{v_i}(t_0, c_1 \ldots c_{6N}) \end{cases} \quad i = 1,2 \ldots N \tag{3.7}$$

Якщо система 6N алгебраїчних рівнянь допускає розв'язок відносно $c_1 \ldots c_{6N}$ (а вважається, що це завжди так), то розв'язавши її ми знайдемо $c_1 \ldots c_{6N}$ у вигляді:

$$c_\alpha = c_\alpha(t_0, \vec{r}_{10}, \ldots \vec{r}_{N0}, \ \vec{v}_{10}, \ldots \ \vec{v}_{N0}\ ), \quad \alpha = 1 \ldots 6N \tag{3.8}$$

Тоді підставивши вже відомі константи c_α у (3.4) одержимо розв'язок оберненої задачі динаміки у стандартному виді:

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(t, \ t_0, \vec{r}_{10}, \ldots \vec{r}_{N0}, \vec{v}_{10}, \ldots \vec{v}_{N0}), \quad i=1 \ldots N \tag{3.9}$$

Таким чином, якщо відомі маси точок системи і сили, що діють на цю систему та початкові умови, то поведінка системи вже однозначна. В цьому і проявляється причинна обумовленість (детермінізм) механічного руху.

На закінчення відмітимо, що дуже важливе значення для розв'язання оберненої задачі динаміки має вдалий вибір системи координат, що може значно спростити аналітичні розрахунки.

3. ЗАГАЛЬНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

Як ми вже бачили, розв'язування основної задачі динаміки зводиться до інтегрування систем диференційних рівнянь із відповідними початковими умовами. Однак, у випадку достатньо складної системи або складної залежності сили від координат, знайти розв'язки такої системи рівнянь або дуже важко, або взагалі не вдається. В цьому випадку використовуються загальні теореми динаміки, які справедливі для будь-яких систем.

§3.1. Закони зміни і збереження імпульсу та моменту імпульсу матеріальної точки

Закони зміни і збереження імпульсу та моменту імпульсу приводять до інтегралів руху.

Інтегралом руху називається така функція часу, координат і швидкостей точок, яка при русі механічної системи зберігає постійне значення, визначене початковими умовами.

Інтеграли руху поділяють на перші і другі.

Перші інтеграли руху – це постійні функції, які залежать від швидкостей точок та часу.

Другі інтеграли руху – це постійні функції координат, часу і довільних констант.

Для системи N матеріальних точок є 6N незалежних перших або 3N других інтегралів, які еквівалентні розв'язку рівнянь руху. Отже, наявність інтегралів руху дає можливість понижувати порядок системи рівнянь.

На прикладі однієї матеріальної точки переконаємось, що закони збереження відіграють роль інтегралів руху.

а) *Закон зміни і збереження імпульсу матеріальної точки.*

Імпульсом називається величина $\vec{P} = m\vec{v}$, тому з другого закона Ньютона отримаємо:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F},$$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}.$$

Отже, отримали *закон зміни імпульсу*

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F}. \tag{1.1}$$

У координатній формі в декартовій системі (1.1) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} \dot{p}_x = F_x \\ \dot{p}_y = F_y \\ \dot{p}_z = F_z \end{cases} \tag{1.2}$$

Із (1.2) слідує, що *якщо проекція сили на нерухому вісь дорівнює нулю, то проекція імпульсу на цю ж вісь зберігається*. Тобто,

$$\text{якщо} \quad F_z = 0, \quad \text{то} \quad p_z = p_{z_0} = const. \tag{1.3}$$

У цьому випадку (1.3) являє собою один перший інтеграл руху.

Якщо дві проекції сили на нерухому вісь дорівнюють нулю, то маємо два перші інтеграли руху. Тобто,

$$\text{якщо} \quad F_x = 0; \quad F_y = 0, \quad \text{то} \quad p_x = p_{x_0}; \quad p_y = p_{y_0}. \tag{1.4}$$

Якщо ж всі три проекції сили на нерухому вісь дорівнюють нулю, то отримуються три перші інтеграли руху і має місце закон збереження імпульсу. Тобто,

$$\text{якщо} \quad \vec{F} = 0, \quad \text{то} \quad \vec{p} = \vec{p}_0. \tag{1.5}$$

Зауважимо, що якщо проекція сили на *рухому вісь* дорівнює нулю, то проекція імпульсу на цю вісь не обов’язково зберігається.

б) *Закони зміни і збереження моменту імпульсу точки.*

Розглянемо закон зміни імпульсу (1.1) і помножимо векторно на $\vec{r}$ його ліву і праву частини. У результаті одержимо

$$[\vec{r}\dot{\vec{p}}] = [\vec{r}\vec{F}]. \tag{1.6}$$

Уведемо моменти імпульсу $\vec{M}$ та сили $\vec{M}$ за означеннями

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}], \tag{1.7}$$

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{F}]. \tag{1.8}$$

І розрахуємо похідну від момента імпульсу за часом

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\vec{p}\right] + \left[\vec{r}\frac{d\vec{p}}{dt}\right] = m[\vec{v}\vec{v}] + [\vec{r}\dot{\vec{p}}],$$

звідки одержимо *закон зміни моменту імпульсу*

$$\dot{\vec{M}} = \vec{L}, \tag{1.9}$$

Похідна від моменту імпульсу матеріальної точки по часу рівна моменту сили, що діє на цю точку.

З (1.9) слідує, що якщо в довільний момент часу проекція моменту сили на нерухому вісь дорівнює нулю, то проекція моменту імпульсу на цю ж вісь зберігається. Наприклад,

$$\text{якщо} \quad L_z = 0, \text{ то} \quad M_z = M_{z_0} = const. \tag{1.10}$$

Відмітимо, що момент сили може дорівнювати нулю навіть коли $\vec{F} \neq 0$. Розглянемо приклади таких сил.

а) Сила, напрям якої в просторі постійний.

Вибираючи декартову систему так, щоб напрямок $\vec{F}$ збігався з $\vec{n}_z$, маємо

$$F_x = F_y = 0, \quad F_z = F \neq 0, \quad \vec{F} = F\vec{n}_z.$$

Тоді

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{n}_x & \vec{n}_y & \vec{n}_z \\ x & y & z \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} = yF\vec{n}_x - xF\vec{n}_y$$

звідки

$$L_x = yF \neq 0, \quad L_y = -xF \neq 0, \; L_z = 0,$$

отже

$$M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = M_{z_0} = const. \tag{1.11}$$

Це означає, що проекція моменту імпульсу на напрям моменту сили зберігається і є першим інтегралом руху.

б) Сила, лінія дії якої перетинає деяку нерухому вісь під прямим кутом.

Лінією дії називається пряма, вздовж якої направлений вектор сили.

Виберемо циліндричну систему координат, в якій лінія сили перпендикулярна до осі z. Тоді компоненти сили будуть:

$$F = F_\rho \neq 0, \quad F_\varphi = 0, \qquad F_z = 0.$$

Оскільки $\vec{r} = \rho\,\vec{n}_\rho + z\vec{n}_z$, то

$$\vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{n}_\rho & \vec{n}_\varphi & \vec{n}_z \\ \rho & 0 & z \\ F & 0 & 0 \end{vmatrix} == Fz\vec{n}_\varphi \;,$$

тобто

$$L_\rho = 0, \qquad L_\varphi = zF \neq 0, \qquad L_z = 0.$$

Так як $L_z = 0$, то

$$M_z = M_{z_0} = m\rho^2\dot{\varphi} = const. \tag{1.12}$$

Хоча $L_\rho = 0$, однак оскільки вісь $\vec{n}_\rho$ рухома, то $M_\rho \neq const$.

в) Центральна сила, лінії дії якої проходить через деяку нерухому точку.

Виберемо центр сили за початок координат. Оскільки у цьому випадку сила завжди проходить через початок координат, то вона направлена по радіус-вектору $\vec{r}$, а тому у сферичних координатах вона матиме вигляд:

$$\vec{F} = F\vec{n}_r\,.$$

Тому

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{F}] = F[\vec{r}\vec{n}_r] = 0$$

і в силу (1.9) $\dot{\vec{M}}$. Отже

$$\vec{M} = \vec{M}_0 = const \tag{1.13}$$

Моменти імпульсу точки відносно центра сили зберігається. Зберігаються і його окремі компоненти, однак вони не є незалежними. Дійсно, оскільки

$$\vec{M}\vec{v} = m[\vec{r}\vec{v}]\vec{v} = -m[\vec{v}\vec{v}]\vec{r} = 0,$$
$$\vec{M}\vec{r} = m[\vec{r} \times \vec{v}]\vec{r} = -m[\vec{r} \times \vec{v}]\vec{r} = 0,$$

то із трьох перших інтегралів незалежні лише два

З (1.13) слідує, що під дією центральної сили точка здійснює плоский рух. Дійсно, оскільки $\vec{M}$ постійний в часі, то він має постійну величину і напрям. Отже, вектори $\vec{r}$ і $\vec{v}$, які лежать в площині перпендикулярній до $\vec{M}$, незалежно від часу повинні в ній залишатись.

Розглянемо яку трактовку має рівність (1.13). Для цього згадаємо визначення секторної швидкості

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}\,\vec{v}],$$

тоді із (1.13) слідує, що

$$\vec{M} = m[\vec{r}\vec{v}] = 2m\vec{\sigma} = \vec{M}_0 = 2m\vec{\sigma}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma} = \vec{\sigma}_0 = const\,.$$

Якщо $\vec{\sigma} = \vec{n}_z \sigma_z$, то $\sigma_z = \sigma_{z_0}$, тобто проекція радіус-вектора у площині хоу за однакові проміжки часу описує однакові площі. Тому (1.13) ще називають *законом площ*.

§3.2. Закони зміни і збереження енергії

Закон зміни кінетичної енергії одержимо виходячи з основного рівняння динаміки помноживши його скалярно на $d\vec{r}$

$$m\dot{\vec{v}}d\vec{r} = \vec{F}d\vec{r} = dA, \tag{2.1}$$

тут dA - це елементарна робота сили $\vec{F}$ на переміщенні $d\vec{r}$.

Ліву частину (2.1) можна перетворити так:

$$m\dot{\vec{v}}d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = md\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = md\vec{v}\,\vec{v} = md\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dT$$

Тоді (2.1) запишеться так

$$dT = dA \tag{2.2}$$

- диференціал кінетичної енергії рівний елементарній роботі сили, що діє на точку.

З (2.2) одержимо

$$\dot{T} = \frac{dA}{dt}. \tag{2.3}$$

Похідна від кінетичної енергії по часу рівна потужності сили, що ді на точку.

Тут слід мати на увазі, що робота dA не завжди є повним диференціалом, а потужність не завжди є повною похідною. Повною похідною потужність є для випадку потенціальної сили з потенціалом U

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U \tag{2.4}$$

Відмітимо, що сила може бути потенціальною і в той же час явно залежати від часу. В теоретичній механіці крім потенціальних також розглядають гіроскопічні і дисипативні сили.

Гіроскопічна сила $\vec{F}_g$ - це сила, що лінійно залежить від швидкості точки і має напрямок перпендикулярний до цієї швидкості

$$\vec{F}_g = \alpha[\vec{v}\vec{a}]. \tag{2.5}$$

Гіроскопічні сили не виконують ніякої роботи. Прикладом гіроскопічних сил є сила Лоренца, що діє на заряд e з боку магнітного поля напруженості $\vec{H}$:

$$\vec{F} = \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{H}].$$

Її потужність

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v} = \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{H}]\vec{v} = -\frac{e}{c}[\vec{v}\vec{v}]\vec{H} = 0\,.$$

Отже, потужність, а значить і робота такої сили дорівнює нулю.

Дисипативна сила $\vec{F}_d$ - цесила, яка завжди направлена протилежно до швидкості тіла відносно середовища, яке викликає гальмування цього тіла

$$\vec{F}_d = -k\vec{v} \tag{2.6}$$

де k - додатна скалярна функція, яка залежить від положення і швидкості тіла.

Потужність дисипативної сили при переміщенні тіла відносно середовища, яке чинить опір, від'ємна:

$$\frac{dA}{dt} = \vec{F}_d\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}_d\vec{v} = -k\vec{v}^2\,. \tag{2.7}$$

Приклади дисипативних сил: сила тертя, сила опору повітря і т. д.

Тепер припустимо, що на точку діють потенціальні, гіроскопічні і дисипативні сили

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}U + \vec{F}_g + \vec{F}_d\,. \tag{2.8}$$

Розрахуємо потужність сил

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}d\vec{r}}{dt} = -\overrightarrow{grad}U\,\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{F}_g\,\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{F}_d\,\frac{d\vec{r}}{dt}\,.$$

У випадку явної залежності потенціала U від часу повний диференціал

$$dU = \overrightarrow{grad}U d\vec{r} + \frac{\partial U}{\partial t}dt\,,$$

тому

$$\overrightarrow{grad}U d\vec{r} = dU - \frac{\partial U}{\partial t}dt\,.$$

Отже, потужність сил рівна

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{dU}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t}\frac{dt}{dt} + \vec{F}_d\vec{v}$$

або

$$\frac{dA}{dt} = -\dot{U} + \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{F}_d\vec{v}\,. \tag{2.9}$$

Визначимо тепер повну енергію як суму потенціальної і кінетичної енергій

$$E = T + U \tag{2.10}$$

і скориставшись (2.3) знайдемо

$$\frac{dA}{dt} = \dot{T} = \dot{E} - \dot{U} \tag{2.11}$$

Тепер з (2.9) та (2.11) отримаємо *закон зміни енергії*:

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \vec{F}_d\vec{v} \tag{2.12}$$

Зміна повної енергії точки викликається явною залежність потенціальної сили від часу та дисипативними силами. Гіроскопічні сили не змінюють повну енергію системи.

Зміна повної енергії системи не означає її безслідне зникання або народження. Вона означає, що частина енергії перетворюється в немеханічну, в зв'язку з чим вона і не фігурує в математичному записі.

Якщо ж виявляється, що в системі на точку не діють дисипативні сили $\vec{F}_d = 0$, а потенціальні поля стаціонарні $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$, то з (2.12) слідує *закон збереження енергії*:

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = E_0 \tag{2.13}$$

Як видно, закон збереження енергії дає один перший інтеграл руху, який дозволяє знайти величину швидкості, як функцію положення точки.

§3.3. Рух точки у центрально-симетричному полі

Розглянемо рух матеріальної точки маси m, на яку діє центральна сила, що довільним чином залежить лише від віддалі між центром сили і рухомою точкою. Така сила може бути записана у вигляді:

$$\vec{F} = F(r)\vec{n} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}\,. \tag{3.1}$$

Ця сила є потенціальною оскільки задовольняє умову потенціальності $rot\vec{F} = 0$. Досліджувана сила також є стаціонарною, так як не залежить явно від часу. Бажаючи вивчити рух точки під дією центральної сили у загальному вигляді ми повинні були б розв'язувати систему трьох скалярних рівнянь другого порядку, що часом є складною задачею. Для уникнення математичних складнощів можна скористатись законами збереження і знайти перші інтеграли руху, що спростить розв'язання задачі.

Як відомо з попередніх тем, можна знайти три перших інтеграли руху з закону збереження моменту імпульсу

$$m[\vec{r}\times\vec{v}]=\vec{M}_0 \tag{3.2}$$

і ще один інтеграл руху з закону збереження енергії

$$\frac{mv^2}{2}+U(r)=E_0 \tag{3.3}$$

Із цих чотирьох перших інтегралів незалежними є лише три.

Тепер легко знайти, три других інтеграли, які дають розв'язок задачі.

Один другий інтеграл отримуємо з умови

$$\vec{M}_0\vec{r}=0, \tag{3.4}$$

що являє собою рівняння площини, в якій відбувався рух точки.

В довільному випадку рівняння (3.4) має вигляд

$$M_{0x}x+M_{0y}y+M_{0z}z=0, \tag{3.5}$$

де M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} - відомі коефіцієнти.

Знайдемо два інших других інтеграли. Для цього направимо вісь oz вздовж $\vec{M}_0$, тоді

$$\vec{M}_0=M_0\vec{n}_z \quad \Rightarrow \qquad M_0 z=0$$

отже $z=0$.

Перейдемо до циліндричних координат, де r=ρ при $z=0$:

$$\vec{r}=r\vec{n}_r,$$

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{r}\vec{n}_r+r\dot{\varphi}\vec{n}_\varphi .$$

Тоді

$$\vec{M}_0=m[\vec{r}\vec{v}]=m\begin{vmatrix}\vec{n}_r & \vec{n}_\varphi & \vec{n}_z\\ r & 0 & 0\\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & 0\end{vmatrix}=mr^2\dot{\varphi}\vec{n}_z .$$

В такій системі з (3.3) та (3.4) отримуються два перших інтеграли:

$$M_0=mr^2\dot{\varphi} \tag{3.6}$$

$$\frac{m}{2}\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)+U(r)=E_0 \tag{3.7}$$

З (3.6) визначимо $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi}=\frac{M_0}{mr^2}$$

і підставимо в (3.7), звідки отримаємо:

$$\dot{r}^2=\frac{2(E_0-U(r))}{m}-\frac{M_0^2}{m^2r^2}=\frac{2}{m}\left[E_0-\left(U(r)+\frac{M_0^2}{2mr^2}\right)\right].$$

Тепер введемо ефективну потенціальну енергію за означенням

$$U_{eff}(r)=U(r)+\frac{M_0^2}{2mr^2}. \tag{3.8}$$

У результаті отримаємо

$$\dot{r}^2=\frac{2}{m}\left(E_0-U_{eff}(r)\right). \tag{3.9}$$

Рівняння (3.9) легко розв'язується

$$\dot{r}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0-U_{eff}^{(r)}\right]};$$

$$\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0-U_{eff}^{(r)}\right]};$$

Звідки, інтегруючи знайдемо ще один другий інтеграл

$$t = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U_{eff}^{(r)}\right]}} + C. \qquad (3.10)$$

Знак перед інтегралом в (3.10) визначається знаком швидкості $\dot{r}$ у початковий момент часу. Знаючи явний вигляд $U(r)$ інтеграл (3.10) розраховується, що дозволяє явно знайти величину радіус-вектора як функцію часу. Маючи $r(t)$ з (3.6) одержимо

$$\dot{\varphi} = \frac{M_0}{mr^2(t)} \qquad (3.11)$$

звідки

$$\int d\varphi = \frac{M_0}{m}\int \frac{dt}{r^2(t)} + C_1$$

отже

$$\varphi = \frac{M_0}{m}\int \frac{dt}{r^2(t)} + C_1 \qquad (3.12)$$

Отже, виключаючи з (3.10) і (3.12) час, як параметр, знаходимо рівняння траєкторії точки $r(\varphi)$. Рівняння траєкторії також отримується так:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_0}{mr^2(t)},$$

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U_{eff}(r)\right]}.$$

Взявши відношення $\dot{\varphi}/\dot{r}$, отримаємо:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm\frac{M_0}{mr^2\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U_{eff}(r)\right]}}$$

або

$$\varphi = \pm\int \frac{M_0 dr}{r^2\sqrt{2m\left[E_0 - U_{eff}(r)\right]}} + C \qquad (3.13)$$

- рівняння траєкторії.

Сукупність трьох других інтегралів (3.6), (3.7) і (3.10) є розв'язками другої задачі динаміки. Цей розв'язок містить шість констант: $E_0, M_{0x}, M_{0y}, M_{0z}, z_0, \varphi_0$. Хоча вибір сталих не є єдино можливим, однак вибір постійних інтегрування, які містять енергію і момент імпульсу, має певну перевагу в тому, що він зручний при квантово-механічному розгляді задачі.

Отримані розв'язки у вигляді інтегралів руху придатні для будь-яких залежностей центрально-симетричних сил від модуля радіус-вектора.

Розглянемо деякі загальні характеристики руху, що слідують з якісного аналізу отриманих результатів.

Знаючи $U(r)$ і побудувавши згідно (3.8) графік $U_{eff}(r)$ можна визначити область можливої зміни r. Дійсно, оскільки в класичній механіці величини $\vec{r}, \vec{v}, t$ дійсні, то завжди $\dot{r}^2 \geq 0$. Отже, з (3.9) слідує, що

$$E_0 \geq U_{eff}(r). \qquad (3.14)$$

Нерівність (3.14) визначає область можливої зміни r, а рівність

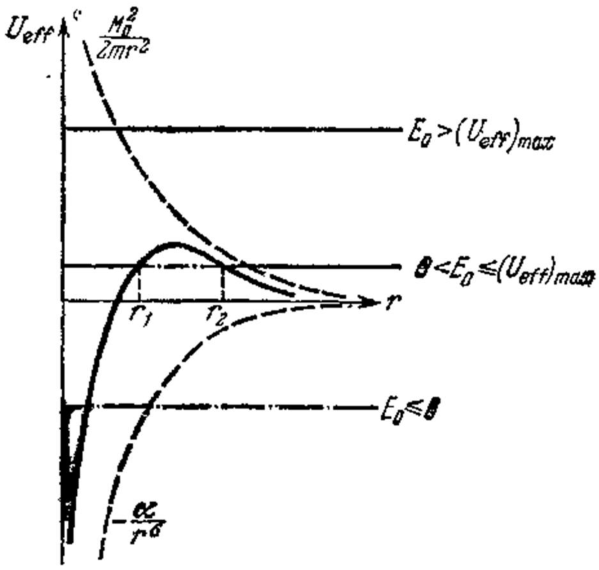
$$E_0 = U_{eff}(r) \qquad (3.15)$$

визначає границі області зміни r, які називаються *точками повороту*.

§3.4. Попадання на силовий центр

Розв'язана задача про рух матеріальної точки під дією потенціальної сили дозволяє проаналізувати важливе і цікаве питання про те, коли і при яких умовах (характері діючих сил) матеріальна точка може потрапити на силовий центр.

Нехай точка рухається в силовому полі з потенціалом



$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^5}, \qquad \alpha > 0 \qquad (4.1)$$

Цей потенціал описує міжмолекулярну взаємодію.

Ми вже знаємо, що точка може рухатися в тій частині простору, де виконується нерівність $E_0 \ge U_{eff}(r)$. Отже при заданому потенціалі $U(r)$ у залежності від початкової енергії E_0 точка може якісно міняти свій рух.

1) Якщо $E_0 > (U_{eff}(r))_{\max}$, то ця умова виконується для всіх значень r. Отже рух точки нічим не обмежений і вона може рухатися від силового центра і до безмежності.

2) Якщо $0 < E_0 \le (U_{eff}(r))_{\max}$, то рух відбувається або в області $r_0 \ge r_2$, або в області $r_0 \le r_1$, у залежності від початкового положення точки $r = r_0$.

Якщо $r_0 > r_2$, то точка може рухатися до безмежності, але ніколи не потрапить до силового центру через «силовий бар'єр». Якщо $r_0 < r_1$, то точка може рухатися в просторі, обмеженому радіусом r_1, потрапляючи і до силового центра. Силовий бар'єр не випускає точку за межі цієї області.

3) Якщо $E_0 < 0$, то для точки доступна лише область, що обмежується деяким околом силового центра і ним самим.

Щоб відповісти на питання про можливість падіння точки на силовий центр, запишемо нерівність $E_0 \ge U_{eff}$ у вигляді

$$r^2 E_0 \ge r^2 U(r) + \frac{M_0^2}{2m}. \qquad (4.2)$$

Звідки видно, що для того, щоб точка потрапила на силовий центр, топотрібно, щоб ця нерівність стверджувалася при $r \to 0$. Тоді умова падіння на силовий центр набуде вигляду:

$$\lim_{r \to 0} r^2 U(r) + \frac{M_0^2}{2m} \le 0. \qquad (4.3)$$

Якщо потенціал має степеневий характер

$$U = -\frac{\alpha}{r^n},$$

то умова (4.3) запишеться

$$-\lim_{r \to 0} \frac{\alpha r^2}{r^n} + \frac{M_0^2}{2m} \le 0$$

звідки

$$\alpha \lim_{r \to 0} \frac{1}{r^{n-2}} \ge \frac{M_0^2}{2m}. \qquad (4.4)$$

При $n = 2$ маємо

$$\alpha \ge \frac{M_0^2}{2m}. \qquad (4.5)$$

Очевидно, що нерівність (4.5) справедлива і при всіх $n > 2$, якщо $\alpha > 0$. Це означає, що тільки при досить швидкому падінні потенціалу біля силового центру (до нескінченості) матеріальна точка попаде на нього.

Умовою замкнутості траєкторії, очевидно, є те, що різниця між двома будь-якими кутами φ через n періодів повинна бути ратною 2π, тобто

$$n\Delta\varphi = 2\pi k, \qquad (4.6)$$

де $\Delta\varphi$ - зміна кута за період.

З іншого боку для знаходження $\Delta\varphi$ використаємо формулу (3.11) з попереднього параграфа і запишемо її у вигляді:

$$d\varphi = \frac{M_0}{mr^2(t)}dt$$

і виключимо dt, використавши

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U_{eff}^{(r)}\right]}}.$$

Тоді одержимо

$$d\varphi = \frac{\frac{M_0}{mr^2(t)}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U_{eff}^{(r)}\right]}}$$

Очевидно, що зміна кута $\Delta\varphi$ за період n рівний подвоєному інтегралу в межах від $r_{\min}$ до $r_{\max}$, так як тільки при цьому траєкторія замикається. Отже

$$2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M_0}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U_{eff}^{(r)}\right]}} = \frac{2\pi k}{n},$$

тобто умова замкнутості траєкторії буде:

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M_0}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U_{eff}^{(r)}\right]}} = \pi\frac{k}{n}. \qquad (4.7)$$

Тут k і n - цілі числа, $r_{\min} > 0$, $r_{\max} < \infty$ - значення координат r в точках повороту.

Аналіз показує, що *траєкторія буде завжди замкнутою незалежно від початкових умов лише для полів*:

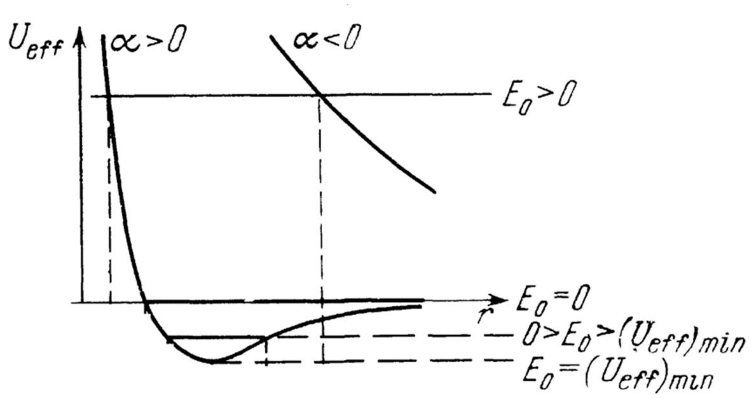
$$U \sim \frac{1}{r}; \qquad U \sim r^2.$$

Для полів інших типів траєкторія може бути замкнута лише за специфічних початкових умов.

§3.5. Рух під дією сили, що обернено пропорційна квадрату віддалі до центра сили. Закони Кеплера

У попередньому параграфі ми розглянули характеристики руху точки під дією центральної сили без конкретизації явного виду потенціальної енергії $U(r)$. Тепер вивчимо особливості руху у потенціальному полі з потенціалом

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \qquad (5.1)$$



Це досить типовий і виключно важливий потенціал, бо при $\alpha = +\gamma m_1 m_2$ він описує гравітаційну взаємодію точок з масами m_1 і m_2. При $\alpha = -e_1 e_2$ він описує силу взаємодії двох точкових зарядів. Для того, щоб краще зрозуміти цю задачу, проаналізуємо графік $U_{eff}(r)$ у залежності від знаку α і величини початкової енергії E_0.

1) Розглянемо випадок $\alpha < 0$.

Так як $U_{eff} \le E_0$ лише при $r \ge r_0$, то рух можливий лише в інфінітній області з повною енергією $E_0 > 0$. Траєкторією руху є гіпербола. Чим менше E_0, тим на більшій відстані від силового центра проходить орбіта точки. При $E_0 \to +0$ точка може рухатися лиже на безмежній відстані від силового центра. При $E_0 < 0$ рух взагалі неможливий.

2) Розглянемо випадок $\alpha > 0$.

А) При $E_0 > 0$ рух інфінітний по гіперболі в областях $r \ge r_1$.

Б) При $E_0 = 0$ рух інфінітний по параболі в областях $r \ge r_2$.

В) При $0 > E_0 > (U_{eff})_{\min}$ рух є фінітним в області $r_{3\min} \le r \le r_{5\max}$ по еліпсу.

Г) При $0 > E_0 = (U_{eff})_{\min}$ рух фінітний по колу радіуса r_4.

Тепер знайдемо траєкторію, або, як кажуть, орбіту точки. Для цього використаємо отримані в §3.3 формули:

$$d\varphi = \pm \frac{\frac{M_0}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - U_{eff})}}.$$

Підставивши сюди (5.1) і одержимо:

$$\varphi - C = \pm \int \frac{\frac{M_0}{mr^2} dr}{\sqrt{\frac{2E_0}{m} - \frac{2U}{m} - \frac{M_0^2}{m^2 r^2}}} = \pm \int \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2mE_0}{M_0^2} \pm \frac{2|\alpha| m}{M_0^2 r} - \frac{1}{r^2}}} \tag{5.2}$$

Знак (+) перед радикалом відповідає випадку $\alpha > 0$, а (-) - випадку $\alpha < 0$.

Отже, ввівши позначення *параметра орбіти*

$$P = \frac{M_0^2}{|\alpha| m} \tag{5.3}$$

формулу (5.2) запишемо у вигляді

$$\varphi - C = \mp \int \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{2mE_0}{M_0^2} \pm \frac{2}{\Pr} - \frac{1}{r^2}}}. \tag{5.4}$$

Проінтегруємо вираз (5.4). Для цього під коренем додамо і віднімемо величину $\frac{1}{P^2}$, тоді

$$\sqrt{\frac{2mE_0}{M_0^2} \pm \frac{2}{\Pr} - \frac{1}{r^2}} = \sqrt{\frac{2mE_0}{M_0^2} \pm \frac{2}{\Pr} - \frac{1}{P^2} + \frac{1}{P^2} - \frac{1}{r^2}} = \sqrt{\frac{\frac{2mE_0 P^2}{M_0^2} + 1}{P^2} - \left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{P}\right)^2}$$

Позначимо

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2mE_0P^2}{M_0^2} = 1 + \frac{2mE_0}{M_0^2}\frac{M_0^4}{m^2|\alpha|^2},$$

тобто

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E_0M_0^2}{m|\alpha|^2}} \tag{5.5}$$

- *ексцентриситет орбіти*.

Тепер (5.4) перепишемо тепер так:

$$\varphi - C = \mp\int \frac{d\left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{P}\right)}{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{P^2} - \left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{P}\right)^2}}.$$

Це табличний інтеграл типу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\arccos\frac{x}{a}.$$

Тому

$$\varphi - C = \mp\left[-\arccos\frac{P}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r} \mp \frac{1}{P}\right)\right],$$

або

$$\varphi - C = \pm\arccos\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{P}{r} \mp 1\right). \tag{5.6}$$

Так як косинус - парна функція, то в (5.6) знак (-) можна опустити і знайти:

$$\frac{P}{r} = \varepsilon\cos(\varphi - C) \pm 1.$$

Звідки отримується *рівняння орбіти*:

$$r = \frac{P}{\pm 1 + \varepsilon\cos(\varphi - C)}. \tag{5.7}$$

Знак (+) перед 1 у знаменнику відповідає притяганню ($\alpha > 0$), а знак (-) – відштовхуванню точок ($\alpha < 0$).

Рівняння (5.7) є кривою другого порядку, як слідує з аналітичної геометрії. В фокусі цієї кривої знаходиться початок координат. Величина константи С залежить від вибору напрямку полярної осі (початкова фаза). Якщо полярна вісь направлена на найближчу точку орбіти, то $C = 0$.

З аналітичної геометрії відомо, що у випадку притягання ($\alpha > 0$):

при $\varepsilon > 1$, рівняння орбіти (5.7) описує *гіперболу*,

при $\varepsilon = 1$, (5.7) описує *параболу*,

при $0 < \varepsilon < 1$, (5.7) описує *еліпс*,

при $\varepsilon = 0$, (5.7) описує *коло*.

У випадку відштовхування ($\alpha < 0$) траєкторія завжди буде гіперболічною.

Оскільки згідно (5.5) ексцентриситет ε визначається величиною і знаком початкової енергії E_0, то:

при $E_0 > 0$, $\varepsilon > 1$, - траєкторією є гіпербола,

при $E_0 = 0$, $\varepsilon = 1$, - траєкторією є парабола

при $0 > E_0 > (U_{eff})_{\min}$, $0 < \varepsilon < 1$, - траєкторією є еліпс,

при $0 > E_0 = (U_{eff})_{\min}$, $\varepsilon = 0$, - траєкторією є коло.

Розглянемо детальніше випадок руху по еліпсу, тобто коли:

$$\alpha > 0, \qquad 0 > E_0 > (U_{eff})_{\min}, \qquad (0<\varepsilon<1).$$

Тоді з рівняння (5.7) видно, що при $\cos(\varphi - C) = -1$ отримується $r = r_{\max}$, а при $\cos(\varphi - C) = +1$ - $r = r_{\min}$, тобто:

$$r_{\min} = \frac{P}{1+\varepsilon}, \qquad r_{\max} = \frac{P}{1-\varepsilon},$$

$$r_{\min} + r_{\max} = \frac{2P}{1-\varepsilon^2} = 2a \tag{5.8}$$

Звідси для великої півосі еліпса отримаємо

$$a = \frac{P}{1-\varepsilon^2} = \frac{\frac{M_0^2}{m\alpha}}{1-1-\frac{2E_0M_0^2}{m\alpha^2}} = -\frac{\alpha}{2E_0}$$

Поклавши $E_0 = -|E_0|$, отримаємо

$$a = \frac{\alpha}{2|E_0|}. \tag{5.9}$$

Величина малої півосі (b) визначається з відомих формул з аналітичної геометрії:

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2},$$

$$b = \frac{P}{1-\varepsilon^2}\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{P}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},$$

$$b = \frac{P}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{\frac{M_0^2}{m\alpha}}{\sqrt{1-1-\frac{2E_0M_0^2}{m\alpha^2}}} = \frac{\frac{M_0^2}{m\alpha}}{\sqrt{\frac{2|E_0|M_0^2}{m\alpha^2}}} = \frac{\frac{M_0^2}{m\alpha}}{\sqrt{\frac{2|E_0|}{m}\frac{M_0}{\alpha}}} = \frac{M_0}{\sqrt{2m|E_0|}}$$

$$b = \frac{M_0}{\sqrt{2m|E_0|}}. \tag{5.10}$$

Із формул (5.9) і (5.10) видно, що велика піввісь a залежить лише від величини повної енергії E_0, а мала, крім цього, ще й від повного моменту імпульсу M_0.

Знайдемо тепер закон руху точки по еліпсу. Для цього скористаємося отриманим раніше другим інтегралом руху:

$$t = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E_0 - U_{eff}(r)\right]}} + C,$$

де враховуємо покладемо $E_0 = -|E_0|$:

$$t_1 - C_1 = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{-\frac{2|E_0|}{m} - \frac{2U}{m} - \frac{M_0^2}{m^2r^2}}} = \pm\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2|E_0|}{mr^2}}\sqrt{-r^2 - \frac{Ur^2}{|E_0|} - \frac{M_0^2}{2m|E_0|}}} =$$

$$= \pm\int\sqrt{\frac{m}{2|E_0|}}\frac{rdr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha r}{|E_0|} - \frac{M_0^2}{2m|E_0|}}} = \pm\sqrt{\frac{m}{2|E_0|}}\int\frac{rdr}{\sqrt{-r^2+2ar-b^2}},$$

отже

$$t_1 - C_1 = \pm\sqrt{\frac{m}{2|E_0|}}\int\frac{rdr}{\sqrt{-r^2+2ar-b^2}}. \tag{5.11}$$

Щоб обчислити цей інтеграл зробимо підстановку:

$$r = a(1-\varepsilon\cos\xi) \tag{5.12}$$

де

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \tag{5.13}$$

Із (5.12) знайдемо

$$dr = a\varepsilon\sin\xi d\xi,$$

і підставимо в підінтегральний вираз (5.11):

$$\frac{rdr}{\sqrt{-r^2+2ar-b^2}} = \frac{a(1-\varepsilon\cos\xi)a\varepsilon\sin\xi d\xi}{\sqrt{-a^2(1-\varepsilon\cos\xi)^2+2a^2(1-\varepsilon\cos\xi)-b^2}} =$$

$$= \frac{a^2\varepsilon\sin\xi(1-\varepsilon\cos\xi)d\xi}{\sqrt{a^2-b^2-a^2\varepsilon^2\cos^2\xi}} = \frac{a^2\varepsilon\sin\xi(1-\varepsilon\cos\xi)d\xi}{\sqrt{a^2\varepsilon^2-a^2\varepsilon^2\cos^2\xi}} = \frac{a^2\varepsilon\sin\xi(1-\varepsilon\cos\xi)d\xi}{a\varepsilon\sqrt{1-\cos^2\xi}} =$$

$$= a(1-\varepsilon\cos\xi)d\xi$$

Тепер з (5.11) одержимо:

$$t - C_1 = \pm\sqrt{\frac{m}{2|E_0|}}(\xi-\varepsilon\sin\xi) = \pm\sqrt{\frac{ma^3}{|\alpha|}}(\xi-\varepsilon\sin\xi) \tag{5.14}$$

Вибираючи параметр ξ так, щоб він зростав із ростом t, причому щоб $t|_{\xi=0} = C_1 = 0$, одержимо закон руху точки в параметричній формі:

$$r = a(1-\varepsilon\cos\xi), \qquad t = \sqrt{\frac{ma^3}{|\alpha|}}(\xi-\varepsilon\sin\xi). \tag{5.15}$$

Виключивши із (5.15) параметр ξ знаходиться $r = r(t)$.

Визначимо період обертання точки по еліпсу виходячи із закону збереження моменту імпульсу:

$$M_0 = 2m\sigma_z = 2m\frac{dS}{dt},$$

$$2m\int_0^S dS = M_0\int_0^T dt,$$

$$2mS = M_0 T,$$

де dS - площа, яку окреслює радіус-вектор точки за час dt. Так як площа еліпса $S = \pi ab$, то $T = \frac{2m\pi ab}{M_0}$, отже

$$T^2 = \frac{4\pi^2m^2a^2b^2}{M_0^2} = 4\pi^2\frac{\alpha^2}{4E_0^2}\frac{M_0^2}{2m|E_0|}\frac{m^2}{M_0^2}$$

$$T^2 = \frac{\pi^2 m\alpha^2}{2|E_0|^3} = 4\pi^2\frac{ma^3}{\alpha}. \tag{5.16}$$

Отже

$$\sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} = \frac{T}{2\pi},$$

значить

$$t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\sin\xi).$$

Як видно з (5.16), період обертання по еліпсу залежить лише від великої півосі (тобто від повної енергії) і зовсім не залежить від малої піввісі (тобто повного моменту імпульсу).

Формули (5.7) та (5.16) і закон збереження моменту імпульсу в виді $\sigma_z = \sigma_{z0}$ являють собою три закони Кеплера з небесної механіки.

Дійсно, якщо (5.16) записати для двох тіл (T_1, m_1, a_1 і T_2, m_2, a_2), то одержимо уточнений третій закон Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{m_1 a_1^3}{m_2 a_2^3}.$$

§3.6. Рух центра мас механічної системи

Центром мас або центром інерції механічної системи N матеріальних точок називається уявна точка, яка ніби володіє масою, що дорівнює масі всієї системи, а її положення визначається радіус-вектором

$$\vec{r}_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}, \tag{6.1}$$

де m_i і $\vec{r}_i$ - маса і радіус-вектор і-тої точки системи, $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ - маса всієї системи, N – число матеріальних точок системи.

Швидкість центра мас $\vec{v}_m$ можна одержати, продиференціювавши ліву і праву частину (6.1) по часу:

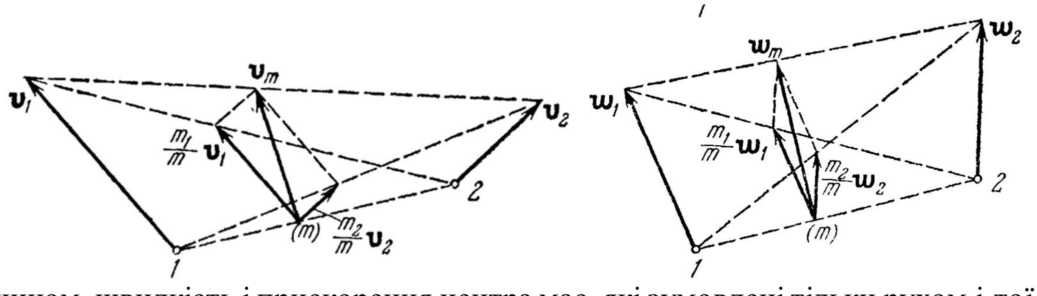
$$\vec{v}_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{m}. \tag{6.2}$$

Аналогічно знайдемо прискорення $\vec{w}_m$ центра мас:

$$\vec{w}_m = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{w}_i}{m}. \tag{6.3}$$

Із визначень (6.1)-(6.3) отримаємо деякі властивості швидкості і прискорення центра мас.

Швидкість і прискорення набуті центром мас в результаті руху і-тої точки, будуть дорівнювати $\frac{m_i}{m}\vec{v}_i$ і $\frac{m_i}{m}\vec{w}_i$ відповідно.



Таким чином, швидкість і прискорення центра мас, які зумовлені тільки рухом і-тої точки, є паралельними відповідно швидкості $\vec{v}_i$ і прискоренню $\vec{w}_i$ цієї точки і в m_i / m разів менші їх за величиною.

Рівняння руху центра мас можна отримати за допомогою рівнянь руху матеріальних точок, оскільки рух центра мас (уявної точки) зумовлений рухом окремих реальних точок механічної системи. Із (6.3) слідує, що

$$m\vec{w}_m = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{w}_i \tag{6.4}$$

В інерціальній системі відліку добуток маси будь-якої точки на її прискорення, згідно другого закону Ньютона, дорівнює силі, прикладеній до цієї точки, тобто

$$m_i \vec{w}_i = \vec{F}_i. \tag{6.5}$$

Звідси, добуток маси всієї системи на прискорення центра мас, згідно (6.4), повинен дорівнювати сумі всіх сил, які діють на окремі точки системи

$$m\vec{w}_m = \vec{F}, \tag{6.6}$$

де $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$, $\vec{F}_i$ - сила, яка діє на і-ту точку.

4. ЗАДАЧА ДВОХ ТІЛ І ТЕОРІЯ РОЗСІЮВАННЯ

§4.1. Задача двох тіл

Під задачею двох тіл зазвичай розуміють задачу про встановлення законів руху двох точок, що певним чином взаємодіють між собою через потенціальну енергію. Ця задача та її розв'язок використовується в небесній механіці, в теорії руху (вільного) супутників, в основі теорії зіткнень і розсіювання частинок, використовується вона в статичній механіці і т.д.

Будемо вивчати рух двох точок з масами m_1 та m_2, потенціальна енергія взаємодії U між якими залежить лише від відстані між ними, тобто $U = U(|\vec{r_1} - \vec{r_2}|)$. Зовнішні сили відсутні. Щоб вивчити рух точок потрібно знайти закони їх руху.

Нехай в деякій системі S з декартовими координатами x,y,z в довільний момент часу t перша точка знаходиться в просторі і характеризується радіус-вектором $\vec{r_1}$, а друга – $\vec{r_2}$. Сила, з якою друга точка ді на першу, очевидно, буде:

$$\vec{F}_{21}(|\vec{r_2} - \vec{r_1}|) = -\vec{\nabla}_1 U(|\vec{r_2} - \vec{r_1}|) \tag{1.1}$$

А сила, з якою перша точка діє на другу буде:

$$\vec{F}_{12}(|\vec{r_2} - \vec{r_1}|) = -\vec{\nabla}_2 U(|\vec{r_2} - \vec{r_1}|) \tag{1.2}$$

Тоді, згідно з другим законом Ньютона, рівняння руху обох частинок будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r_1}} = -\vec{\nabla}_1 U(|\vec{r_2} - \vec{r_1}|) \\ m_2\ddot{\vec{r_2}} = -\vec{\nabla}_2 U(|\vec{r_2} - \vec{r_1}|) \end{cases} \tag{1.3}$$

Для розв'язування цієї задачі використаємо метод інтегралів руху.

Оскільки за відсутності зовнішніх сил імпульс центра мас системи зберігається, то швидкість центра мас також зберігається:

$$\vec{v}_m = \vec{v}_{m0}, \tag{1.4}$$

де

$$\vec{v}_{m0} = \frac{m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20}}{m}, \quad m = m_1 + m_2.$$

Запишемо (1.4) у вигляді:

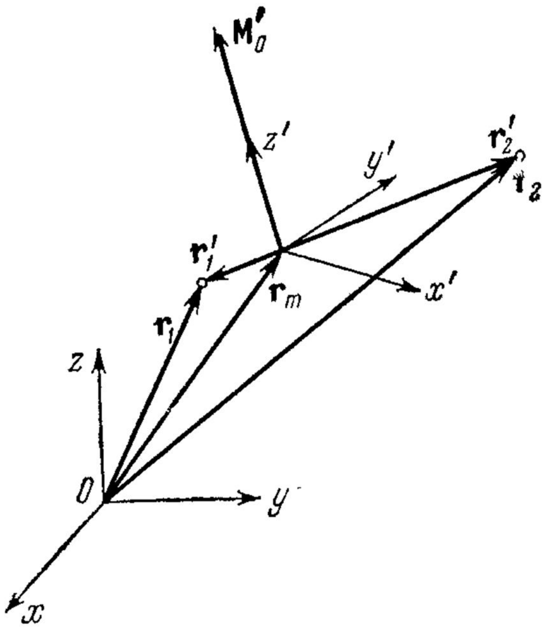
$$\frac{d\vec{r}_m}{dt} = \vec{v}_{m0}$$

$$\int d\vec{r}_m = \int \vec{v}_{m0} dt,$$

де $\vec{r}_m = \frac{m_1\vec{r_1} + m_2\vec{r_2}}{m}$.

Отже, одержимо у векторному вигляді закон зміни радіус-вектора центра мас системи:

$$\vec{r}_m = \vec{v}_{m0}t + \vec{r}_{m0}, \tag{1.5}$$



де $\overrightarrow{r_{m0}} = \frac{m_1\vec{r}_{10} + m_2\vec{r}_{20}}{m}$, $\vec{r}_{10}, \vec{r}_{20}, \vec{v}_{10}, \vec{v}_{20}$ – початкові радіус-вектори і початкові швидкості обох точок.

Із (1.5) очевидно, що центр мас двох точок рухається рівномірно і прямолінійно у площині, утвореній $\vec{r}_{m0}$ і $\vec{v}_{m0}$.

Тепер розглянемо рух обох точок відносно системи їх центра мас S_m – системи з початком координат у центрі мас, осі якої не міняють просторову орієнтацію відносно осей системи S.

Очевидно, що система центра мас S_m є інерціальною. Тоді швидкості та радіус-вектори точок у двох інерціальних системах (S і S_m) пов'язані відомими перетвореннями:

$$\begin{cases} \vec{r_i} = \overrightarrow{r_m} + \vec{r_i}', \\ \vec{v_i} = \overrightarrow{v_{m0}} + \vec{v_i}', \\ \vec{w_i} = \vec{w_i}', \end{cases} \quad (i = 1{,}2) \tag{1.6}$$

де штриховані вектори відносяться до системи S_m, а нештриховані – до S.

Враховуючи інваріантність рівнянь руху в інерціальних системах запишемо рівняння (1.3) у системі центра мас S_m:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r_1}}' = \vec{F}_{21}(|\vec{r_2}' - \vec{r_1}'|) \\ m_2\ddot{\vec{r_2}}' = \vec{F}_{12}(|\vec{r_2}' - \vec{r_1}'|) \end{cases} \tag{1.7}$$

Інтегрування рівнянь системи (1.7) значно спрощується, оскільки положення точок 1 і 2 у системі центра мас S_m визначаються через радіус-вектор центра мас, тобто

$$\vec{r_m}' = \frac{m_1\vec{r_1}' + m_2\vec{r_2}'}{m} = 0 \quad \rightarrow \quad m_1\vec{r_1}' + m_2\vec{r_2}' = 0. \tag{1.8}$$

Виразимо тепер радіус-вектор відстані між точками у системах S та S_m

$$\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = \vec{r_2}' - \vec{r_1}' \tag{1.9}$$

Із (1.8) маємо

$$\vec{r_2}' = -\frac{m_1}{m_2}\vec{r_1}', \qquad \vec{r_1}' = -\frac{m_2}{m_1}\vec{r_2}' \tag{1.10}$$

Підставимо (1.10) в (1.9) і одержимо

$$\vec{r} = \left(-\frac{m_1}{m_2} - 1\right)\vec{r_1}' = -\frac{m_1 + m_2}{m_2}\vec{r_1}' = -\frac{m}{m_2}\vec{r_1}',$$

$$\vec{r} = -\frac{m}{m_2}\vec{r_1}' = -\frac{m}{m_2}\left(-\frac{m_2}{m_1}\vec{r_2}'\right) = \frac{m}{m_1}\vec{r_2}',$$

$$\vec{r} = -\frac{m}{m_2}\vec{r_1}' = \frac{m}{m_1}\vec{r_2}'. \tag{1.11}$$

З (1.11) одержимо

$$\vec{r_1}' = -\frac{m_2}{m}\vec{r}, \qquad \vec{r_2}' = \frac{m_1}{m}\vec{r}. \tag{1.12}$$

Диференціюючи (1.8), (1.9), (1.11), (1.13) по часу одержимо співвідношення між швидкостями:

$$m_1\vec{v_1}' + m_2\vec{v_2}' = 0,$$

$$\vec{v} = \vec{v_2} - \vec{v_1} = \vec{v_2}' - \vec{v_1}',$$

$$\vec{v} = -\frac{m}{m_2}\vec{v_1}' = \frac{m}{m_1}\vec{v_2}'.$$

З останньої рівності отримаємо

$$\vec{v_1}' = -\frac{m_2}{m}\vec{v}, \qquad \vec{v_2}' = \frac{m_1}{m}\vec{v}. \tag{1.13}$$

Також визначивши з (1.12):

$$\vec{r} = \vec{r_2}' - \vec{r_1}' = -\frac{m}{m_2}\vec{r_1}' = \frac{m}{m_1}\vec{r_2}'$$

запишемо рівняння (1.7) у вигляді:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\vec{r_1}}' = \vec{F}_{21}\left(\left|-\dfrac{m}{m_2}\vec{r_1}'\right|\right) \\ m_2\ddot{\vec{r_2}}' = \vec{F}_{12}\left(\left|\dfrac{m}{m_1}\vec{r_2}'\right|\right) \end{cases} \tag{1.14}$$

Як бачимо, в рівняннях (1.14) змінні повністю розділились і обидва рівняння мають однакову структуру.

Підставляючи (1.12) в ліві частини (1.14), одержимо

$$\begin{cases} -\dfrac{m_1 m_2}{m}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{21}(|\vec{r}|) \\ \dfrac{m_2 m_1}{m}\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}(|\vec{r}|) \end{cases} \tag{1.15}$$

Тепер уводячи приведену масу

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

і врахувавши, що згідно з ІІІ законом Ньютона $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, обидва рівняння (1.15) тотожно еквівалентні одне одному

$$\mu\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}(|\vec{r}|). \tag{1.16}$$

Це рівняння являє собою рівняння руху однієї точки (уявної) в заданому полі, центр сил якого знаходиться в центрі мас системи двох точок. Отже, *задача двох тіл зводиться до еквівалентної задачі про рух одного тіла (μ-точки – уявної точки з масою μ і радіус-вектором $\vec{r}$) у центрально-симетричному полі з нерухомим центром.*

Ми вже знаємо, що в полі центральної сили мають місце закони збереження повної енергії системи і моменту імпульсу. Отже

$$E' = E_0', \qquad \vec{M}' = \overrightarrow{M_0}', \tag{1.17}$$

де $E' = T' + U'$; $\vec{M}' = \mu[\vec{r}' \cdot \vec{v}']$

Далі, використовуючи закони збереження (1.17) можна одержати закон руху (μ-точки), використовуючи результати §3.3 про рух точки в полі центральної симетрії та зробивши формальні заміни:

$$m \to \mu; \quad \overrightarrow{M_0} \to \overrightarrow{M_0}'; \quad E_0 \to E_0'. \tag{1.18}$$

Тоді, згідно раніше розвинутій теорії, отримаємо

$$\overrightarrow{M_0}' \cdot \vec{r} = 0, \tag{1.19}$$

$$t = \pm \int \frac{dr}{\left[\dfrac{2}{\mu}\left(E_0' - \mathrm{U}_{eff}(r)\right)\right]^{1/2}} + c_1, \tag{1.20}$$

$$\varphi = \frac{M_0'}{\mu}\int \frac{dt}{r^2(t)} + c_2, \tag{1.21}$$

$$\varphi = \pm \int \frac{\dfrac{M_0'}{\mu r^2}dr}{\left[\dfrac{2}{\mu}\left(E_0' - \mathrm{U}_{eff}(r)\right)\right]^{1/2}} + c_3, \tag{1.22}$$

де

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{{M_0'}^2}{2\mu r^2} \tag{1.23}$$

Рівняння (1.19) описує площину, в якій рухається μ-точка. Ця площина перпендикулярна до $\overrightarrow{M_0}'$ і співпадає з площиною x'o'y'. Інтеграли руху (1.20) та (1.21) визначають положення μ-точки у площині x'o'y' в будь-який момент часу (в полярних координатах), тобто визначають:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \tag{1.24}$$

Тоді підставивши (1.24) в (1.12) одержимо:

$$\vec{r_1}'(t) = -\frac{m_2}{m}\vec{r}(t); \qquad \vec{r_2}'(t) = \frac{m_1}{m}\vec{r}(t)$$

і згідно (1.6) отримаємо

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_m} + \overrightarrow{r_1}'; \qquad \overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r_m} + \overrightarrow{r_2}'$$

Отже, закони руху точок масами m_1 та m_2 отримуються у вигляді

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_1}(t) = \overrightarrow{r_{m0}} + \overrightarrow{v_{m0}}t - \dfrac{m_2}{m}\vec{r}(t) \\ \overrightarrow{r_2}(t) = \overrightarrow{r_{m0}} + \overrightarrow{v_{m0}}t + \dfrac{m_1}{m}\vec{r}(t) \end{cases} \tag{1.25}$$

і визначаються через відомі величини.

Диференціюванням (1.25) по часу одержуються швидкості точок

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1}(t) = \overrightarrow{v_{m0}} - \dfrac{m_2}{m}\vec{v}(t) \\ \overrightarrow{v_2}(t) = \overrightarrow{v_{m0}} + \dfrac{m_1}{m}\vec{v}(t) \end{cases} \tag{1.26}$$

З (1.25) слідує, що центр мас точок рухається рівномірно і прямолінійно, а обидві точки відносно системи центра мас (вісь z' якої направлена вздовж моменту кількості руху системи) здійснюють рух у площині, перпендикулярній до $\overrightarrow{M_0}'$. Траєкторії руху обох точок подібні. Центр подібності знаходиться в центрі мас, а співвідношення подібності рівні співвідношенню мас.

Розглянемо висновки задачі двох тіл на прикладі системи з потенціальною енергією

$$U = -\frac{\alpha}{r}. \tag{1.27}$$

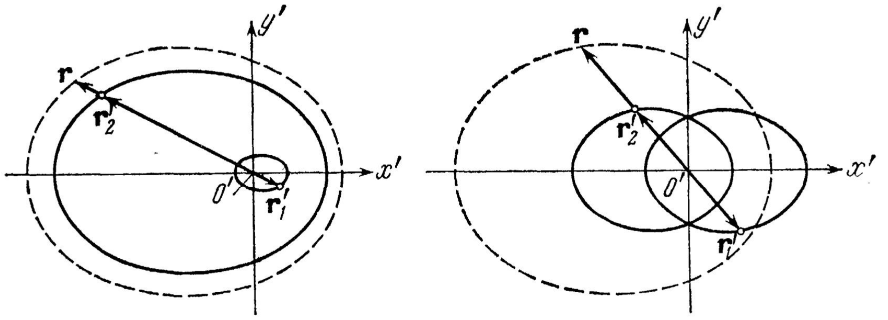
Щоб вивчити рух реальних точок 1 і 2 відносно системи центра мас S_m, розглянемо їх рух по еліптичних орбітах при різних співвідношеннях мас m_1 і m_2.

а) Нехай $m_2 \ll m_1$, тоді згідно (1.12) маємо

$$\overrightarrow{r_1}' = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \approx -\frac{m_2}{m_1}\vec{r}\,, \tag{1.28}$$

$$\overrightarrow{r_2}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} = \frac{m_1 + m_2 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \approx \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right)\vec{r}. \tag{1.29}$$

Формула (1.28) показує, що еліпс першої (важчої) точки приблизно в $(m_2/\,m_1)$ раз відрізняється від еліпса μ-точки. Оскільки в (1.28) знаки $\overrightarrow{r_1}'$ та $\vec{r}$ протилежні, то це означає, що еліпси μ-точки і m_1-точки мають взаємно обернене розташування. Еліпс важчої точки (1) малий. З (1.29) видно, що еліпс другої (легкої) точки лише трохи менший від еліпса μ-точки і має подібне розташування.



$(m_2 \ll m_1)$ $(m_2 = m_1)$

б) Нехай $m_2 = m_1$,
тоді

$$\overrightarrow{r_1}' = -\frac{m_2}{2\,m_2}\vec{r} = -\frac{\vec{r}}{2}; \qquad \overrightarrow{r_2}' = \frac{m_1}{2\,m_1}\vec{r} = \frac{\vec{r}}{2}. \tag{1.30}$$

Отже, обидві точки описують в два рази менші еліпси ніж еліпс μ-точки, направлені перигеями у протилежні сторони від центра мас.

Випадок (а) дає уявлення про картину обертання планет навколо сонця; випадок (б) - обертання двох близьких (подвійних) зір з однаковими масами.

§4.2. Пружне розсіювання частинок

Розглядаючи задачі різних розділів фізики часто потрібно розв'язувати проблему розсіювання частинок. Зокрема вона виникає в фізиці атомного ядра, теорії елементарних частинок тощо. Щоб підійти до класичного розв'язання задачі будемо діяти так.

Нехай у просторі рухаються дві частинки масами m_1 і m_2 з відомими у початковий момент часу (t=-∞) швидкостями.

$$\overrightarrow{v_1}^- = \overrightarrow{v_1}(t)|_{t\to-\infty}; \qquad \overrightarrow{v_2}^- = \overrightarrow{v_2}(t)|_{t\to-\infty} \tag{2.1}$$

Індекси (-) означають, що стан частинок розглядається до розсіювання, знак (+) – стан після розсіювання. Швидкості в (2.1) є швидкостями відносно деякої інерціальної системи координат, яку називають лабораторною системою або Л-системою.

Нехай відомо, що швидкості частинок направлені так, що обидві точки наближаються. Якщо частинки можуть взаємодіяти між собою (через відому потенціальну енергію взаємодії), то в залежності від характеру взаємодії через досить великий проміжок часу після початку руху частинки можуть наблизитись, а потім розійтися в просторі - відбувається процес розсіювання. Якщо внутрішня енергія частинок у процесі розсіяння залишається незмінною, то таке розсіяння частинок називається пружним. Може ж бути і так, що в результаті взаємодії частинки зливаються (при $t\to\infty$ віддаль між ними прямує до нуля) або залишаються на обмеженій відстані, тоді кажуть, що відбувся процес захоплення частинок.

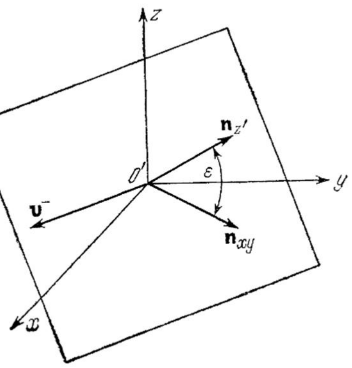
Будемо вважати, що до розсіювання частинки були так далеко, що взаємодією між ними можна нехтувати.

Для розв'язання задачі повинна бути відома орієнтація площини, в якій рухаються точки відносно системи центра їх мас S_m (Ц-системи). Також повинна бути відома прицільна відстань ρ^- -мінімальна відстань між точками в Ц-системі, на яку б наблизились точки, якщо б між ними не було взаємодії.

Якщо швидкості частинок до розсіювання відомі, то орієнтація площини руху точок відносно S_m визначається одним скалярним параметром. Дійсно по відомих швидкостях $\overrightarrow{v_1}^-$ і $\overrightarrow{v_2}^-$ можна знайти вектор

$$\vec{v}^- = \overrightarrow{v_2}^- - \overrightarrow{v_1}^-, \tag{2.2}$$

який лежить у площині руху частинок відносно системи S_m. Орієнтацію площини руху точок (σ) відносно Ц-системи можна задати так.



За відомим вектором $\vec{v}^-$ можна побудувати два одиничних вектори – перший ($\vec{n}_{xy}$), який перпендикулярний до $\vec{v}^-$ і лежить в площині хо'у, другий - $\vec{n}_z$, який перпендикулярний до $\vec{v}^-$, тобто перпендикулярний до площини руху точок і відхилений на кут ε відносно вектора $\vec{n}_{xy}$. Отже, параметр ε повністю визначає площину руху точок (х'о'у').

Тепер можна точно сформулювати задачу розсіювання двох частинок.

Для двох частинок з відомими масами m_1 і m_2 та швидкостями до розсіювання $\overrightarrow{v_1}^-$ і $\overrightarrow{v_2}^-$ в Л-системі координат та з потенціалом взаємодії $U(r)$, кутом ε, що визначає орієнтацію площини руху відносно системи центра мас, а також прицільною віддалю ρ^-, яка характеризує відносне розташування точок до розсіювання в системі центра мас, потрібно встановити величини і напрямки швидкостей $\overrightarrow{v_1}^+$ і $\overrightarrow{v_2}^+$ після розсіювання (при $t\to+\infty$):

$$\overrightarrow{v_1}^+ = \overrightarrow{v_1}(t)|_{t\to+\infty}; \qquad \overrightarrow{v_2}^+ = \overrightarrow{v_2}(t)|_{t\to+\infty} \tag{2.3}$$

Задача розсіювання є частковим випадком задачі двох тіл тому далі використаємо її рпезультати. Врахувавши час $t\to+\infty$ у співвідношеннях (1.13) і (1.26) з попереднього параграфа, справедливих для довільного моменту часу, і використовуючи умову збереження швидкості центра мас частинок, одержимо

$$\overrightarrow{v_1}'^+ = -\frac{m_2}{m}\vec{v}^+; \qquad \overrightarrow{v_2}'^+ = \frac{m_1}{m}\vec{v}^+, \tag{2.4}$$

$$\overrightarrow{v_1}^+ = \overrightarrow{v_m}^- - \frac{m_2}{m}\vec{v}^+; \qquad \overrightarrow{v_2}^+ = \overrightarrow{v_m}^- + \frac{m_1}{m}\vec{v}^+, \tag{2.5}$$

де $\overrightarrow{v_1}'^+$, $\overrightarrow{v_2}'^+$ – швидкості точок після розсіяння відносно системи S_m, $\overrightarrow{v_m}^- = (m_1\overrightarrow{v_1}^- + m_2\overrightarrow{v_2}^-)/m$ – швидкість центра мас.

У вирази (2.4) та (2.5) входить один невідомий вектор - $\vec{v}^+$ – різниця швидкостей точок після розсіяння. Величину цього вектора можна знайти використовуючи закон збереження енергії відносно системи S$_m$. Дійсно, з (1.17) можна отримати

$$\frac{\mu(v^+)^2}{2} + U^+ = \frac{\mu(v^-)^2}{2} + U^- \tag{2.6}$$

де U^-, U^+ – значення потенціальної енергії взаємодії частинок до і після розсіяння відповідно. Оскільки як до розсіяння, так і після, частинки знаходяться на безмежно великій відстані одна від одної, то ці значення енергії рівні

$$U^- = U^+ \tag{2.7}$$

Тоді з (2.6) одержимо

$$v^- = v^+ \tag{2.8}$$

Враховуючи (2.8), невідомий вектор $\vec{v}^+$ можна представити у вигляді

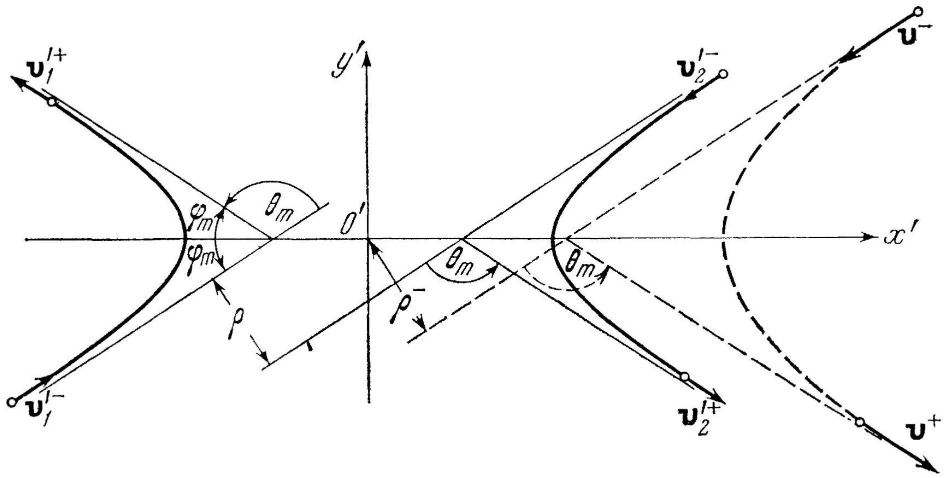
$$\vec{v}^+ = v^- \, \vec{n}_{\theta m} \tag{2.9}$$

де $v^- = |\overrightarrow{v_2}^- - \overrightarrow{v_1}^-|$ є відомою величиною, а $\vec{n}_{\theta m}$ – одиничний вектор, направлений по вектору $\vec{v}^+$ або по вектору $\overrightarrow{v_2}'^+$, що слідує з (2.4).

Орт $\vec{n}_{\theta m}$ можна визначити використовуючи розв'язок задачі двох тіл. Дійсно, обчислюючи інтеграл (1.22) в межах від r_{min} до ∞, одержимо φ_m – кут між асимптотою траєкторії і апсидою

$$\varphi_m = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\frac{M_0{}'}{\mu r^2} dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}[E_0' - \mathrm{U}_{eff}(r)]}} \tag{2.10}$$

де r_{min} визначається з рівняння $E_0' = \mathrm{U}_{eff}(r)$.



Інтеграл (2.10) визначає кут φ_m як функцію $E_0', M_0{}'$ і приведеної маси μ при відомій потенціальній енергії $U(r)$. Постійні величини E_0' і $M_0{}'$ можуть бути знайдені через v^- - величину різниці швидкостей точок до розсіяння, і ρ^- - прицільну відстань. Наприклад, використовуючи (1.17) і вважаючи потенціальну енергію на безмежності рівною нулю, одержимо

$$E_0' = \frac{\mu(v^-)^2}{2}. \tag{2.11}$$

Величину моменту імпульсу відносно системи центра мас запишемо у вигляді

$$M_0' = \mu r v \sin(\vec{r}\vec{v})|_{t\to-\infty}.$$

Звідси, враховуючи, що

$$r \sin(\vec{r}\vec{v})|_{t\to-\infty} = \rho^- \tag{2.12}$$

одержимо

$$M_0' = \mu \rho^- v^- \tag{2.13}$$

Співвідношення (2.11), (2.13) та (2.10) дають можливість знайти кут φ_m як функцію заданих величин і визначити кути відхилення швидкостей першої і другої частинок у системі центра мас. Ці кути є рівними між собою оскільки в заданій системі імпульс двох частинок завжди дорівнює нулю. Тому швидкості обох частинок в довільний момент часу направлені в протилежні сторони. Таким чином кут між векторами $\overrightarrow{v_1}'^{+}$ і $\overrightarrow{v_1}'^{-}$ дорівнює куту між $\overrightarrow{v_2}'^{+}$ і $\overrightarrow{v_2}'^{-}$. Цей кут називається кутом розсіяння в системі центра мас і позначається θ_m. Між кутами φ_m і θ_m існує співвідношення, яке для центрально-симетричної взаємодії має наступний вигляд

$$\theta_m = \pi - 2\varphi_m \qquad (2.14)$$

Співвідношення (2.4) і (2.5) з урахуванням (2.9)-(2.14) дають розв'язок задачі про розсіяння двох частинок:

$$\overrightarrow{v_1}'^{+} = -\frac{m_2}{m} v^{-}\vec{n}_{\theta m}; \qquad \overrightarrow{v_2}'^{+} = \frac{m_1}{m} v^{-}\vec{n}_{\theta m}, \qquad (2.15)$$

$$\overrightarrow{v_1}^{+} = \overrightarrow{v_m}^{-} - \frac{m_2}{m} v^{-}\vec{n}_{\theta m}; \qquad \overrightarrow{v_2}^{+} = \overrightarrow{v_m}^{-} + \frac{m_1}{m} v^{-}\vec{n}_{\theta m}, \qquad (2.16)$$

де одиничний вектор $\vec{n}_{\theta m}$ визначається кутами ε і θ_m. Кут ε задає орієнтацію площини руху відносно системи центра мас при заданих векторах $\overrightarrow{v_2}^{-}$ і $\overrightarrow{v_1}^{-}$, а кут θ_m є кутом розсіяння частинок в системі центра мас.

Залежність кута θ_m від величин ρ^{-}, v^{-} і характеру взаємодії визначається інтегралом

$$\theta_m = \pi - 2\int_{r_{min}}^{\infty} \frac{\rho^{-}}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{1-\frac{2U(r)}{\mu(v^{-})^2}-\frac{(\rho^{-})^2}{r^2}}}, \qquad (2.17)$$

де r_{min} - корінь рівняння $1-\frac{2U(r)}{\mu(v^{-})^2}-\frac{(\rho^{-})^2}{r^2}=0$.

Таким чином, співвідношення (2.16) і (2.17) дають розв'язок задачі про пружне розсіяння двох частинок. Ця задача є частковим випадком задачі двох тіл, коли необхідно знайти тільки швидкості частинок після розсіяння. Тому в задачі про розсіяння необхідно мати меншу інформацію відносно початкових умов у порівнянні з задачею двох тіл.

Розглянемо ще одну особливість задачі розсіяння. Розв'язок у вигляді (2.16) одержано на основі законів збереження. Тому швидкості після розсіяння $\overrightarrow{v_1}^{+}$, $\overrightarrow{v_2}^{+}$ є одними і тими ж функціями швидкостей до розсіяння $\overrightarrow{v_1}^{-}$, $\overrightarrow{v_2}^{-}$ і кутів ε, θ_m при довільній центральній взаємодії частинок. З іншого боку, $\overrightarrow{v_1}^{+}$, $\overrightarrow{v_2}^{+}$, як функції швидкостей $\overrightarrow{v_1}^{-}$, $\overrightarrow{v_2}^{-}$, кута ε і прицільної відстані ρ^{-}, будуть різними для різних взаємодій, оскільки залежність θ_m від ρ^{-} і v^{-} визначається видом потенціальної енергії $U(r)$. Тільки в одному випадку кут відхилення в системі центра мас має постійне значення при довільній потенціальній енергії взаємодії $U(r)$ - це випадок лобового зіткнення, коли

$$\rho^{-} = 0, \qquad \varphi_m = 0, \qquad \theta_m = \pi \qquad (2.18)$$

Тоді вектор $\vec{n}_{\theta m}$ направлений протилежно до вектора v^{-}:

$$\vec{n}_{\theta m} = -\frac{\vec{v}^{-}}{v^{-}} \qquad (2.19)$$

Підставляючи (2.19) у (2.16) одержимо розв'язок задачі про розсіяння частинок у випадку їх лобового зіткнення

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1}^{+} = \frac{m_1-m_2}{m}\overrightarrow{v_1}^{-} + \frac{2m_2}{m}\overrightarrow{v_2}^{-}, \\ \overrightarrow{v_2}^{+} = \frac{2m_1}{m}\overrightarrow{v_1}^{-} + \frac{m_2-m_1}{m}\overrightarrow{v_2}^{-}. \end{cases} \qquad (2.20)$$

5. РІВНЯННЯ ЛАГРАНЖА

§5.1 Основна задача динаміки невільної частинки і поняття про зв'язки

У попередніх розділах ми розглянули лише один клас задач, де діючі на систему точок сили вважаються відомими функціями координат, швидкостей і часу. А задача зводилася до розв'язання рівняння руху

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1,\ldots\vec{r}_N,\vec{v}_1,\ldots\vec{v}_N,t), \qquad i = 1,2,\ldots N.$$

Що стосується початкових умов, то вони могли бути довільними.

Однак, в механіці існує і має велике практичне застосування інший широкий клас задач, в якому крім відомих сил ще розглядаються невідомі сили як функції координат, швидкостей і часу. Методи розв'язання таких задач розглядав д'Аламбер і кінцево сформулював Лагранж наприкінці вісімнадцятого століття. Ці специфічні сили пов'язані з наявністю деяких обмежень на рух точки, що називають *зв'язками*. Взагалі, зв'язком називають обмеження, які накладаються на положення та швидкості точок, що не витікають з рівняння руху. Вони виражаються деякими рівняннями зв'язку - співвідношеннями між радіус-векторами, швидкостями та прискореннями точок, які задають певні обмежуючі поверхні в просторі. Сили, що виникають з боку зв'язків і діють на матеріальну точку системи називаються *реакціями зв'язків*.

Зв'язки бувають голономні (інтегровані):

$$f(\vec{r}_1,...\vec{r}_N,t)=0\,, \tag{1.1}$$

неголономні (неінтегровані), звільнюючі, незвільнюючі, а також стаціонарні і нестаціонарні (явно залежні від часу).

Введене понять про зв'язки і їх реакції дозволяє сформувати *основну задачу механіки невільної системи N матеріальних точок* з голономними зв'язками як задачу про знаходження законів руху $\vec{r}_i(t)$, $(i=1,2,...N)$ точок системи і реакцій зв'язків $\vec{R}_i$ по заданих силах $\vec{F}_i$ і заданих k рівняннях голономних зв'язків $f_\alpha(\vec{r}_1,...,\vec{r}_N,t)$, $(\alpha=1,...,k)$.

Отже, при розв'язанні такого типу задач в праву частину основного рівняння динаміки крім активних сил $\vec{F}_i$ ще повинні входити сили реакції зв'язку $\vec{R}_i$ (пасивні)

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i=\vec{F}_i+\vec{R}_i\,, \qquad (i=1,2,...N) \tag{1.2}$$

Тепер означимо дійсні, можливі і віртуальні переміщення на прикладі однієї точки, на яку накладено один голономний зв'язок $f(\vec{r},t)=0$.

Під *дійсними переміщеннями* $d\vec{r}$ точки розуміють безмежно мале переміщення цієї точки під дією як заданих сил, так і реакцій зв'язку. Дійсні переміщення відбуваються протягом часу dt у відповідності з рівнянням руху і рівнянням зв'язку.

Можливими переміщеннями назвемо переміщення $d\vec{r}$ точки, яке допускається зв'язком. На відмінну від дійсних переміщень, можливі переміщення задовольняють тільки рівнянням зв'язку. Дійсне переміщення завжди є одним із можливих.

Диференційне рівняння, якому підпорядковані можливі переміщення точки, одержимо взявши диференціал від лівої частини рівняння зв'язку $f(\vec{r},t)=0$ і прирівнявши його до нуля:

$$df=\vec{\nabla}f d\vec{r}+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0$$

Віртуальним переміщенням $\delta\vec{r}$ називається уявне безмежно мале переміщення точки, яке допускається зв'язком у даний фіксований момент часу. Віртуальні переміщення не володіють тривалістю. Диференційне рівняння, якому підпорядковані віртуальні переміщення точки, одержимо, взявши диференціал від лівої частини рівняння зв'язку $f(\vec{r},t)=0$ у фіксований момент часу, тобто розрахувавши варіацію $f(\vec{r},t)$ і прирівнявши її до нуля:

$$\delta f=\vec{\nabla}f\,\delta\vec{r}=0$$

З останнього рівняння видно, що сукупність віртуальних переміщень співпадає з можливими переміщеннями при стаціонарних зв'язках, тобто при $\frac{\partial f}{\partial t}=0$.

Якщо сума робіт всіх реакцій зв'язків на віртуальних переміщеннях N точок системи дорівнює нулю

$$\delta A_R=\sum_{i=1}^{N}\vec{R}_i\delta\vec{r}_i=0\,, \tag{1.3}$$

то зв'язки називаються *ідеальними*.

Сили реакцій k ідеальних зв'язків в (1.2) визначаються з додаткових умов - рівнянь зв'язку

$$f_\alpha(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...\vec{r}_N,t)=0, \quad (\alpha=1,2,...,k)$$

для яких справедливо

$$\delta f_\alpha = 0 \rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}_i}\delta\vec{r}_i = 0,$$

або

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i f_\alpha \delta\vec{r}_i = 0. \tag{1.4}$$

Домножимо (1.4) на невизначений множник Лагранжа (λ_α) і просумуємо по α від 1 до k (k – число зв'язків), й отриманий результат віднімемо від (1.3). В результаті одержимо:

$$\sum_{i=1}^{N} \left\{ \vec{R}_i - \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \right\} \delta\vec{r}_i = 0$$

тобто

$$\vec{R}_i = \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha. \tag{1.5}$$

Підставляючи (1.5) в (1.2) одержимо:

$$\begin{cases} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha, \\ f_\alpha(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) = 0. \end{cases} \qquad (\alpha = 1,...,k, \quad i = 1,...,N) \tag{1.6}$$

Рівняння (1.6) – це *рівняння Лагранжа першого роду*, яке дає розв'язок задачі про рух невільної системи N матеріальних точок з k ідеальними голономними зв'язками.

Як і у випадку вільної системи, важливе значення при розв'язуванні конкретних задач про рух невільної системи мають закони збереження імпульсу, моменту імпульсу та енергії.

Закон зміни імпульсу

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F} + \vec{R}. \tag{1.7}$$

Закон зміни моменту імпульсу

$$\dot{\vec{M}} = \vec{L} + \vec{L}_R. \tag{1.8}$$

Закон зміни енергії

$$\dot{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{d} \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_i \vec{v}_i \tag{1.9}$$

де $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{вн.} + \vec{F}_i^{зовн.}; \vec{R}_i = \vec{R}_i^{вн.} + \vec{R}_i^{зовн.}$.

Застосування цих законів спрощує розв'язування задачі динаміки невільної системи.

§5.2 Рівняння Лагранжа другого роду

Рівняння Лагранжа першого роду дозволяє вивчити рух матеріальних точок системи під дією сил і зв'язків, а також встановити величину сил реакції зв'язків. Однак, в більшості задач така інформація виявляється непотрібною. Достатньо знайти лише закон руху точок по заданих зв'язках. Для розв'язання таких задач зручно використовувати узагальнені (незалежні) координати, які б ураховували вплив зв'язків. Рівняння руху системи матеріальних точок, записане в узагальнених координатах, називається *рівнянням Лагранжа другого роду*. Значення цих рівнянь виходить далеко за межі теоретичної механіки.

Одержимо рівняння Лагранжа другого роду для механічної системи N матеріальних точок, на яку накладено k ідеальних голономних зв'язків. Рух такої системи описується рівнянням Лагранжа першого роду:

$$\begin{cases} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum\limits_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha, \\ f_\alpha(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N, t) = 0. \end{cases} \qquad (\alpha = 1,...,k, \quad i = 1,...,N) \tag{2.1}$$

Щоб одержати рівняння Лагранжа другого роду необхідно виключити рівняння зв'язку. Для цього домножимо рівняння руху на віртуальне переміщення $\delta\vec{r}_i$ і просумуємо по всіх точках системи від 1 до N:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \delta\vec{r}_i. \tag{2.2}$$

Остання сума в (2.2) дорівнює віртуальній роботі реакції зв'язку, яка для ідеальних зв'язків рівна нулю

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha \vec{\nabla}_i f_\alpha \delta\vec{r} = 0. \tag{2.3}$$

Тому з (2.2) одержимо

$$\sum_{i=1}^{N} \left\{ m_i \ddot{\vec{r}}_i - \vec{F}_i \right\} \delta\vec{r}_i = 0 \tag{2.4}$$

- *загальне рівнянням механіки або рівнянням д'Аламбера-Лагранжа.*

Запишемо тепер рівняння (2.4) у незалежних узагальнених координатах. Кількість незалежних узагальнених координат співпадає з числом степеней вільності системи (у випадку системи N матеріальних точок з k зв'язками s=3N-k).

В якості незалежних узагальнених координат вибираються довільні s координат $q_1,...,q_s$, які однозначно визначають положення системи в довільний момент часу. Для цього вони повинні задовольняти двом умовам:

1) Радіуси-вектори точок системи повинні бути однозначними функціями узагальнених координат $q_1,...,q_s$:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1,...,q_s,t), \qquad i = 1,2,...,N \tag{2.5}$$

причому із 3N скалярних функцій (x_1, x_2,… x_{3N}) s функцій повинні бути незалежні, що забезпечується якобіаном:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial q_1}, & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial q_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_s}{\partial q_1} & \dots & \dfrac{\partial x_s}{\partial q_s} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.6}$$

де $x_1,...,x_s$ - проекції відповідних радіус-векторів точок системи, взяті в довільному порядку, наприклад.

2) Незалежні координати $q_1,...,q_s$ повинні бути вибрані з урахуванням рівнянь зв'язків, тобто функції (2.5) повинні задовольняти рівнянням зв'язків:

$$f_\alpha(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N,t)\Big|_{\substack{\vec{r}_1 \to \vec{r}_1(q_1,...,q_s,t) \\ \vec{r}_N \to \vec{r}_N(q_1,...,q_s,t)}} = 0, \qquad \alpha = 1,...,k. \tag{2.7}$$

Представимо загальне рівняння механіки (2.4) у формі рівняння відносно незалежних координат і їх похідних. Для цього з урахуванням (2.5) знайдемо $\delta\vec{r}_i$

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j, \qquad i = 1,2,...,N \tag{2.8}$$

Підставимо (2.8) у (2.4) і одержимо:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{\vec{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} - \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \delta q_j = 0, \tag{2.9}$$

Один із доданків (2.9) являє собою узагальнену силу Q_j

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}. \tag{2.10}$$

Величини Q_j є заданими функціями узагальнених координат, швидкостей і часу. Дійсно, всі $\vec{F}_i$ визначені як функції $(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t)$, а всі $\vec{r}_i$ і $\vec{v}_i$ згідно (2.5) є функціями $q, \dot{q}, t$.

Перший доданок у (2.9) перетворимо так, щоб показати, що він залежить від кінетичної енергії системи. Для цього доданок $\ddot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}$ виразимо з наступного співвідношення:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\right) = \ddot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} + \dot{\vec r}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\right)$$

звідки

$$\ddot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\right) - \dot{\vec r}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\right). \qquad (2.11)$$

У (2.11) входить швидкість $\dot{\vec r}_i$, яку знайдемо, як функцію узагальнених координат, користуючись (2.5)

$$\dot{\vec r}_i = \frac{d\vec r_i(q_1,\dots,q_s,t)}{dt} = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_l}\frac{\partial q_l}{\partial t} + \frac{\partial \vec r_i}{\partial t},$$

отже

$$\dot{\vec r}_i = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_l}\dot q_l + \frac{\partial \vec r_i}{\partial t}. \qquad (2.12)$$

Із (2.12) видно, що швидкості матеріальних точок є лінійними функціями узагальнених швидкостей $\dot q_l$.

Тепер розрахуємо $\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}$, використовуючи (2.12)

$$\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j} = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_l}\frac{\partial \dot q_l}{\partial \dot q_j} + \frac{\partial}{\partial \dot q_j}\left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial t}\right) = \sum_{l=1}^{s} \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_l}\delta_{lj} = \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j},$$

отже

$$\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j} = \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}, \qquad i = 1,\dots,N,\ j = 1,\dots,s \qquad (2.13)$$

Тут

$$\delta_{jl} = \frac{\partial q_j}{\partial q_l} = \begin{cases} 1, & j = l \\ 0, & j \ne l \end{cases}, \qquad q_j, q_l = q_1,\dots,q_s \qquad (2.14)$$

- δ-символ Кронекера.

Тепер запишемо (2.11) з використанням (2.13) і у другому доданку поміняємо порядок диференціювання. Тоді одержимо:

$$\ddot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}_i \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}\right) - \dot{\vec r}_i \frac{\partial}{\partial q_j}\frac{d\vec r_i}{dt},$$

$$\ddot{\vec r}_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}_i \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}\right) - \dot{\vec r}_i \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial q_j}. \qquad (2.15)$$

Підставляючи (2.15) в рівняння (2.9) одержимо:

$$\sum_{j=1}^{s} \left\{ \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\frac{d}{dt}\left(\dot{\vec r}_i \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}\right) - \dot{\vec r}_i \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial q_j} \right] - Q_j \right\} \delta q_j = 0, \qquad j = 1 - s. \qquad (2.16)$$

Тепер знайдемо кінетичну енергію системи, як функцію узагальнених координат. Для цього використаємо означення кінетичної енергії системи N матеріальних точок

$$T = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\dot{\vec r}_i^{\,2}}{2}. \qquad (2.17)$$

Знайдемо похідні від T по узагальнених координатах та швидкостях:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\frac{\partial \dot{\vec r}_i^{\,2}}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec r}_i\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial q_j}, \tag{2.18}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\frac{\partial \dot{\vec r}_i^{\,2}}{\partial \dot q_j}=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\vec r}_i\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}. \tag{2.19}$$

Отже, (2.16) із врахуванням (2.18) і (2.19) запишеться так:

$$\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}-Q_j\right\}\delta q_j=0 \tag{2.20}$$

З останнього рівняння, в силу незалежності варіації δq_j, отримаємо *рівняння Лагранжа другого роду*:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j,\qquad j=1,\dots,s \tag{2.21}$$

Рівняння Лагранжа другого роду – це система s рівнянь, які не містять реакцій зв'язку і справедливі для системи з голономними ідеальними зв'язками. Невідомими у рівняннях (2.21) є узагальнені координати q_j як функції часу, їх число рівне числу степеней вільності системи.

Якщо сили, що діють на систему є потенціальними з потенціалом $U(\vec r_1,\dots,\vec r_N,t)$, то оскільки

$$\vec F_i=-\nabla_i U(\vec r_1,\dots,\vec r_N,t), \tag{2.22}$$

то узагальнені сили (2.10) запишуться як

$$Q_j=\sum_{i=1}^{N}\vec F_i\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}=-\frac{\partial U}{\partial q_j},\qquad j=1,\dots,s. \tag{2.23}$$

Тоді рівняння *Лагранжа другого роду (у випадку потенціальних сил)* набуде вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial U}{\partial q_j}. \tag{2.24}$$

Для розв'язування задач про рух невільних систем дуже важливе значення має раціональний вибір системи координат, в якій би ці рівняння мали найпростіший вигляд. Дійсно, якщо узагальнена координата q_j вибрана так, що кінетична енергія *T* явно від неї не залежить, а відповідна їй узагальнена сила рівна нулю, тобто

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=0,\qquad\qquad Q_j=0 \tag{2.25}$$

тоді рівняння (2.21) приводить до першого інтеграла руху:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}=f(q,\dot q,t)=const. \tag{2.26}$$

Якщо задані сили є потенціальними, то умова (2.25) запишеться у вигляді:

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=0,\qquad\qquad \frac{\partial U}{\partial q_j}=0. \tag{2.27}$$

Координати, від яких не залежать кінетична і потенціальна енергії, тобто виконуються умови циклічності (2.27), називаються циклічними. Циклічність координат залежить від симетрії задачі, а отже і від раціонального вибору системи координат.

При розв'язуванні конкретних задач доцільно вибрати найбільше число циклічних координат, при цьому система рівнянь (2.21) спроститься максимально. Розв'язавши її отримаються залежності узагальнених координат від часу і постійних величин C_α:

$$q_j=q_j(C_1,C_2,\dots,C_{2s},t). \tag{2.28}$$

Загальний розв'язок (2.28) дає можливість знайти закон руху системи і реакції зв'язку як функції часу: з (2.6) отримуються закони руху $\vec r_i$, диференціюючи які знаходяться швидкості $\vec v_i$ та прискорення $\vec w_i$. Далі з рівнянь Лагранжа першого роду одержуються реакції зв'язку:

$$\vec R_i(t) = m_i \vec w_i(t) - \vec F_i(t). \tag{2.28}$$

Отже, рівняння Лагранжа другого роду дозволяє знайти розв'язок оберненої задачі динаміки.

§5.3 Рівняння руху вільної точки у циліндричній системі координат

Виходячи з рівняння Лагранжа другого роду отримаємо у циліндричній системі координат рівняння руху матеріальної точки, на яку діє сила $\vec F$. Оскільки точка володіє 3 степенями вільності, то в якості незалежних координат можна вибрати довільні 3 координати, зокрема циліндричні координати ρ, φ, z.

Тоді радіус-вектор та швидкість точки у незалежних координатах мають вигляд

$$\vec r = \rho \vec n_\rho + z \vec n_z, \tag{3.1}$$

$$\dot{\vec r} = \dot\rho \vec n_\rho + \rho\dot\varphi \vec n_\varphi + \dot z \vec n_z. \tag{3.2}$$

Тоді кінетична енергія точки:

$$T = \frac{m\dot r^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2\right). \tag{3.3}$$

Використавши зв'язок між ортами декартової і циліндричної систем

$$\begin{cases} \vec n_\rho = \vec n_x \cos\varphi + \vec n_y \sin\varphi \\ \vec n_\varphi = -\vec n_x \sin\varphi + \vec n_y \cos\varphi \\ \vec n_z = \vec n_z \end{cases}$$

знайдемо узагальнені сили Q_ρ, Q_φ, Q_z по відомій силі $\vec F$:

$$\begin{aligned} Q_\rho &= \vec F \frac{\partial \vec r}{\partial \rho} = \vec F \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \vec n_\rho + z\vec n_z\right) = \vec F \vec n_\rho = F_\rho, \\ Q_\varphi &= \vec F \frac{\partial \vec r}{\partial \varphi} = \vec F \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\rho \vec n_\rho + z\vec n_z\right) = \vec F \rho \frac{\partial \vec n_\rho}{\partial \varphi} = \rho \vec F \vec n_\varphi = \rho F_\varphi, \\ Q_z &= \vec F \frac{\partial \vec r}{\partial z} = \vec F \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \vec n_\rho + z\vec n_z\right) = \vec F \vec n_z = F_z, \end{aligned} \tag{3.4}$$

де F_ρ, F_φ, F_z - проекції сили $\vec F$ у циліндричній системі координат.

З (3.4.) видно, що узагальнені сили Q_ρ та Q_z співпадають з відповідними проекціями відомої сили $\vec F$, а узагальнена сила Q_φ рівна моменту сили відносно осі z.

Тепер знайдемо похідні від кінетичної енергії по незалежних координатах та швидкостях:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \rho} = m\rho\dot\varphi^2, \quad \dfrac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \dfrac{\partial T}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial \dot\rho} = m\dot\rho, \quad \dfrac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = m\rho^2\dot\varphi, \quad \dfrac{\partial T}{\partial \dot z} = m\dot z. \end{cases} \tag{3.5}$$

Нарешті з рівнянь Лагранжа одержимо рівняння руху вільної матеріальної точки у циліндричній системі координат:

$$\begin{cases} m\left(\ddot\rho - \rho\dot\varphi^2\right) = F_\rho, \\ m\dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot\varphi\right) = \rho F_\varphi, \\ m\ddot z = F_z. \end{cases} \tag{3.6}$$

§5.4. Рівняння руху вільної точки у сферичній системі координат

Отримаємо у сферичній системі координат рівняння руху матеріальної точки під дією сили $\vec F$. Незалежними координатами виберемо сферичні координати r, θ, φ. Тоді радіус-вектор та швидкість точки у цих координатах матимуть відомий вигляд

$$\vec r = r\vec n_r, \tag{4.1}$$

$$\dot{\vec r} = \dot r \vec n_r + r\dot\theta \vec n_\theta + r\sin\theta\dot\varphi\, \vec n_\varphi . \tag{4.2}$$

Кінетична енергія буде:

$$T = \frac{m\dot{\vec r}^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2 + r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right). \tag{4.3}$$

Використавши відомий зв'язок між ортами декартової і сферичної систем

$$\begin{cases} \vec n_r = (\vec n_x \cos\varphi + \vec n_y \sin\varphi)\sin\theta + \vec n_z\cos\theta \\ \vec n_\theta = (\vec n_x \cos\varphi + \vec n_y \sin\varphi)\cos\theta - \vec n_z\sin\theta \\ \vec n_\varphi = -\vec n_x\sin\varphi + \vec n_y\cos\varphi \end{cases}$$

розрахуємо узагальнені сили:

$$\begin{aligned} Q_r &= \vec F\frac{\partial\vec r}{\partial r} = \vec F\frac{\partial(r\vec n_r)}{\partial r} = \vec F\vec n_r = F_r, \\ Q_\theta &= \vec F\frac{\partial\vec r}{\partial \theta} = \vec F\frac{\partial(r\vec n_r)}{\partial \theta} = \vec F r\frac{\partial\vec n_r}{\partial\theta} = r\vec F\vec n_\theta = rF_\theta, \\ Q_\varphi &= \vec F\frac{\partial\vec r}{\partial \varphi} = \vec F\frac{\partial(r\vec n_r)}{\partial \varphi} = \vec F r\frac{\partial\vec n_r}{\partial\varphi} = r\sin\theta\vec F\vec n_\varphi = r\sin\theta F_\varphi, \end{aligned} \tag{4.4}$$

де F_r, F_θ, F_φ - компоненти сили у сферичних координатах.

Знайдемо похідні від кінетичної енергії по незалежних координатах та швидкостях:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial r} = mr\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2\right), & \dfrac{\partial T}{\partial\theta} = mr^2\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2, & \dfrac{\partial T}{\partial\varphi} = 0, \\ \dfrac{\partial T}{\partial\dot r} = m\dot r, & \dfrac{\partial T}{\partial\dot\theta} = mr^2\dot\theta, & \dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = mr^2\sin^2\theta\dot\varphi. \end{cases} \tag{4.5}$$

Тоді рівняння руху вільної точки у сферичній системі координат отримаються у вигляді:

$$\begin{cases} m\left[\ddot r - r\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\dot\varphi^2\right)\right] = F_r, \\ m\left\{\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot\theta\right) - r^2\sin\theta\cos\theta\dot\varphi^2\right\} = rF_\theta, \\ m\dfrac{d}{dt}\left(r^2\sin^2\theta\dot\varphi\right) = r\sin\theta F_\varphi . \end{cases} \tag{4.6}$$

§5.5 Структура рівнянь руху в незалежних координатах. Функція Лагранжа

У попередньому параграфі відмічалося, що питання вибору незалежних координат має важливе значення, так як цей вибір впливає на структуру рівнянь руху Лагранжа. Тому питання про вибір незалежних координат вимагає вивчення структури цих рівнянь. Щоб вивчити її спочатку розглянемо структуру кінетичної енергії в узагальнених координатах.

У декартовій системі кінетична енергія системи N матеріальних точок є однорідною і додатною квадратичною формою від швидкостей точок

$$T = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i\dot{\vec r}_i^{\,2}}{2}. \tag{5.1}$$

Це видно із означення (5.1), так як $m_i > 0$ та $\dot{\vec r}_i^{\,2} \ge 0$. Причому T=0 лише тоді, коли всі $\vec v_i = 0$. Однак, виявляється, що кінетична енергія в узагальнених координатах є неоднорідною квадратичною формою. Щоб переконатися в цьому, використаємо зв'язок

$$\vec r_i = \vec r_i(q_1,\ldots,q_s,t) \tag{5.2}$$

і перейдемо в (5.1) до змінних узагальнених координатах. Для цього знайдемо

$$\dot{\vec r}_i = \frac{d\vec r_i}{dt} = \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial t} + \frac{\partial \vec r_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial \vec r_i}{\partial t} \tag{5.3}$$

і підставимо в (5.1). У результаті отримаємо

$$T = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\dot q_j + \frac{\partial \vec r_i}{\partial t}\right)^2 = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_k}\dot q_j\dot q_k + 2\frac{\partial \vec r_i}{\partial t}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\dot q_j + \left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial t}\right)^2\right). \tag{5.4}$$

Увівши позначення:

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_k}, \qquad a_j = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec r_i}{\partial t} \tag{5.5}$$

запишемо (5.4) у вигляді:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,r=1}^{s} a_{jk}\dot q_j \dot q_k + \sum_{j=1}^{s} a_j \dot q_j + \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial t}\right)^2, \tag{5.6}$$

або

$$T = T^{(2)} + T^{(1)} + T^{(0)}, \tag{5.6'}$$

де

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}\dot q_j \dot q_k, \qquad T^{(1)} = \sum_{j=1}^{s} a_j \dot q_j, \qquad T^{(0)} = \sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{2}\left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial t}\right)^2 . \tag{5.7}$$

Наявність в (5.6) $T^{(1)}$ та $T^{(0)}$ робить кінетичну енергію неоднорідною в узагальненій системі координат. Якщо ж

$$\frac{\partial \vec r_i}{\partial t} = 0, \tag{5.8}$$

то, очевидно $T^{(1)} = T^{(0)} = 0$, і форма T стає однорідною. Умова (5.8) завжди виконується у випадку стаціонарних зв'язків. Тоді $T = T^{(2)}$. Як легко переконатись, коефіцієнти $a_{jk} = a_{kj}$ симетричні і додатньо визначені. Тому $T^{(2)} = 0$ лише тоді, коли всі $\dot q_j = 0$.

У попередніх розділах, розглядаючи різноманітні сили, ми виділили клас потенціальних сил, які мають характерні властивості. Виявляється, що в фізиці зустрічається ще один важливий клас сил, які називаються *узагальнено-потенціальними*:

$$\vec F_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\right) - \frac{\partial U}{\partial \vec r_i}, \tag{5.9}$$

де узагальнений потенціал U є функцією від координат та швидкостей: $U = U(\vec r, \dot{\vec r})$. Прикладом такої сили є сила Лоренца, з якою електромагнітне поле діє на рухомий заряд.

Знайдемо узагальнені сили за означенням

$$Q_j = \sum_{i=1}^{N}\vec F_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N}\left\{\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\right)\right]\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial \vec r_i}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\right\} \tag{5.10}$$

Розрахуємо похідні в (5.10), використавши тотожність

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\frac{\partial \dot{\vec r}}{\partial \dot q_j}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\right)\right]\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j} + \frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}\right),$$

і врахуємо встановлену раніше рівність $\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}$, тоді

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}\right)=\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\right)\right]\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\right).$$

Звідси отримується

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\right)\right]\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial q_j}. \tag{5.11}$$

Підставивши (5.11) у (5.10), одержимо:

$$Q_j=\sum_i\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial U}{\partial \dot{\vec r}_i}\frac{\partial \dot{\vec r}_i}{\partial q_j}-\frac{\partial U}{\partial \vec r_i}\frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}\right\}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Отже, узагальнено-потенціальні сили завжди можна представити у вигляді:

$$Q_j=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial U}{\partial q_j}. \tag{5.12}$$

Узагальнений потенціал, що визначає силу виду (5.12), є лінійною функцією координат та швидкостей точок, тому представимо його у загальному вигляді

$$U=U^{(1)}+U^{(0)}, \tag{5.13}$$

де $$U^{(1)}=\sum_{j=1}^{s}u_j(q)\dot q_j;\qquad U^{(0)}=u(q).$$

Тут функції u_j та u залежні лише від координат q і часу t.

Тепер розрахуємо похідні у (5.12):

$$\frac{\partial U}{\partial q_j}=\frac{\partial u}{\partial q_j}+\frac{\partial}{\partial q_j}\sum_{k=1}^{S}u_k\dot q_k=\frac{\partial u}{\partial q_j}+\sum_{k=1}^{S}\frac{\partial u_k}{\partial q_j}\dot q_k,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial u}{\partial \dot q_j}+\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\sum_{k=1}^{S}u_k\dot q_k=\sum_{k=1}^{S}u_k\frac{\partial \dot q_k}{\partial \dot q_j}=\sum_{k=1}^{S}u_k\delta_{kj}=u_j,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot q_j}\right)=\frac{du_j}{dt}=\sum_{k=1}^{S}\frac{\partial u_j}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial t}+\frac{\partial u_j}{\partial t}$$

Отже, з (5.12) отримаємо:

$$Q_j=\sum_{k=1}^{S}\frac{\partial u_j}{\partial q_k}\dot q_k-\sum_{k=1}^{S}\frac{\partial u_k}{\partial q_j}\dot q_k-\frac{\partial u}{\partial q_j}+\frac{\partial u_j}{\partial t} \tag{5.14}$$

Вводячи антисиметричний тензор

$$\gamma_{jk}=\frac{\partial u_j}{\partial q_k}-\frac{\partial u_k}{\partial q_j}, \tag{5.15}$$

запишемо узагальнену силу у вигляді

$$Q_j=-\frac{\partial u}{\partial q_j}+\frac{\partial u_j}{\partial t}+\sum_{k=1}^{S}\gamma_{jk}\dot q_k \tag{5.16}$$

або

$$Q_j=Q_j^{(0)}+Q_j^{(0)}, \tag{5.17}$$

де $$Q_j^{(0)}=-\frac{\partial u}{\partial q_j}+\frac{\partial u_j}{\partial t},\qquad Q_j^{(1)}=\sum_{k=1}^{S}\gamma_{jk}\dot q_k.$$

Отже, узагальнені сили є лінійними формами узагальнених швидкостей.

Коли узагальнена сила складається з узагальненої потенціальної сили і дисипативної сили вона має вигляд:

$$Q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial U}{\partial q_j} + Q_j^d \tag{5.18}$$

Введемо *функцію Лагранжа*

$$L = T - U\,. \tag{5.19}$$

У загальному випадку $L = L(q_1,..., q_s, \dot{q}_1,..., \dot{q}_s, t)$.

Згідно з (5.6') та (5.13) структура функції Лагранжа така

$$L = T^{(2)} + \left(T^{(1)} - U^{(1)}\right) + \left(T^{(0)} - U^{(0)}\right). \tag{5.20}$$

Використавши отримане раніше рівняння Лагранжа другого роду (2.21):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1,...,s$$

та (5.18) і (5.19) рівняння *Лагранжа другого роду* зведеться до вигляду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^d,\ j = 1,...,s\,. \tag{5.21}$$

Можна показати, що у випадку, коли дисипативні сили пропорційні лінійній формі швидкостей, тобто:

$$\vec{F}_i^d = -k_i \dot{\vec{r}}_i, \qquad k_i > 0,\ \ i = 1,2,...,N,$$

то узагальнені сили визначаються функцією Релея

$$Q_j^d = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j}, \tag{5.22}$$

де

$$D = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i (\dot{\vec{r}}_i)^2}{2} \tag{5.23}$$

– *дисипативна функція Релея.*

Структура функції D подібна до структури кінетичної енергії, тобто

$$D = D^{(2)} + D^{(1)} + D^{(0)}, \tag{5.24}$$

де

$$D^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} b_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k, \qquad D^{(1)} = \sum_{j=1}^{s} b_j \dot{q}_j, \qquad \mathrm{D}^{(0)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{2}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2. \tag{5.25}$$

$$b_{jk} = \sum_{i=1}^{N} k_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \qquad b_j = \sum_{i=1}^{N} k_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}. \tag{5.26}$$

§5.6 Закони зміни та збереження узагальненого імпульсу й узагальненої енергії

Закон зміни і збереження узагальненого імпульсу знайдемо з рівнянь Лагранжа другого роду. Під узагальненим імпульсом будемо розуміти величину, яка має розмірність імпульсу і визначається так

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}. \tag{6.1}$$

Отже, рівняння Лагранжа другого роду являють собою *закони зміни узагальнених імпульсів*:

$$\frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_j} + Q_j^d\,. \tag{6.2}$$

Із (6.2) слідує, що якщо функція Лагранжа від координати q_j явно не залежіть (координата циклічна) і відповідна узагальнена дисипативна сила відсутня, то узагальнений імпульс зберігається, тобто

$$\text{якщо } \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad Q_j^d = 0, \qquad \text{то } p_j = p_{j0} = const. \tag{6.3}$$

Встановимо тепер закон зміни узагальненої енергії по аналогії із законом зміни енергії. Домножимо рівняння Лагранжа другого роду на узагальнену швидкість і просумуємо по всіх степенях вільності:

$$\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right\} = \sum_{j=1}^{s} Q_j^d \dot{q}_j . \tag{6.4}$$

Перетворимо це рівняння так, щоб зліва стояла повна похідна від деякої функції по часу. Для цього перший доданок зліва визначимо з тотожності

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

звідки

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j$$

і підставимо його в (6.4):

$$\sum_{j=1}^{s}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j - \frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j\right\} = \sum_{j=1}^{s} Q_j^d \dot{q}_j \tag{6.5}$$

Тепер перетворимо ліву частину (6.5), виходячи з того, що функція Лагранжа є функцією від $(q_j, \dot{q}_j, t)$. Тоді:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t}\right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{6.6}$$

Визначаючи звідси суму двох перших доданків справа

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial t}$$

і підставляючи у (6.5) одержимо:

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - \frac{dL}{dt} + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s} Q_j^d \dot{q}_j . \tag{6.7}$$

Уведемо функцію

$$H = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j - L, \tag{6.8}$$

яка називається *узагальненою енергією.*

Отже з (6.7) отримаємо закон зміни узагальненої енергії:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} Q_j^d \dot{q}_j . \tag{6.9}$$

Виходячи з (6.9) сформулюємо *закон збереження узагальненої енергії:* *Якщо функція Лагранжа явно від часу не залежить, а дисипативні сили відсутні, то узагальнена енергія зберігається.* Тобто

$$H = H_0 = const \qquad \text{якщо} \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = 0,\ Q_j^d = 0.$$

Вивчимо структуру узагальненої енергії, виходячи із (6.8). Для цього розрахуємо:

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\dot q_j=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\left(T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)}-U^{(1)}-U^{(0)}\right)}{\partial \dot q_j}\dot q_j=$$

$$\sum_{j=1}^{s}\dot q_j\left\{\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{s}a_{kl}\dot q_k\dot q_l+\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\sum_{k=1}^{s}a_k\dot q_k+\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}m_i\left(\frac{\partial \vec r_i}{\partial t}\right)^2\right]-\frac{\partial}{\partial \dot q_j}\sum_{k=1}^{s}u_k\dot q_k-\frac{\partial u}{\partial \dot q_j}\right\}=$$

$$=\sum_{j=1}^{s}\dot q_j\left\{\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{s}a_{kl}\left(\dot q_l\delta_{kj}+\dot q_k\delta_{lj}\right)+\sum_{k=1}^{s}a_k\delta_{kj}-\sum_{k=1}^{s}u_k\delta_{kj}\right\}=$$

$$=\sum_{k,j=1}^{s}a_{kj}\dot q_k\dot q_j+\sum_{j=1}^{s}a_j\dot q_j-\sum_{j=1}^{s}u_j\dot q_j=2T^{(2)}+T^{(1)}-U^{(1)}$$

Отже

$$\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\dot q_j=2T^{(2)}+T^{(1)}-U^{(1)}\,. \qquad (6.10)$$

Оскільки

$$L=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)}-U^{(1)}-U^{(0)},$$

тоді

$$H=2T^{(2)}+T^{(1)}-U^{(1)}-T^{(2)}-T^{(1)}-T^{(0)}+U^{(1)}+U^{(0)}=T^{(2)}-T^{(0)}+U^{(0)}\,.$$

Отже, структура узагальненої енергії наступна:

$$H=T^{(2)}-T^{(0)}+U^{(0)}\,. \qquad (6.11)$$

Тобто узагальнена енергія не містить лінійних форм узагальнених швидкостей, тоді як повна енергія їх містить:

$$E=T+U=T^{(2)}+T^{(1)}+T^{(0)}+U^{(1)}+U^{(0)}\,. \qquad (6.12)$$

Порівняння (6.11) та (6.12) показує, що H та E співпадають лише тоді, коли $T^{(1)}=T^{(0)}=U^{(1)}=0$, а це справедливо коли радіус-вектори точок, як функції незалежних координат, явно від часу не залежать, тобто при $\partial \vec r_i/\partial t=0$. Отже H=E для систем з стаціонарними зв'язками.

Відмітимо, що $\partial L/\partial t=0$ не обов'язково може бути зумовлено умовою $\partial \vec r_i/\partial t=0$. Може статись так, що $\partial \vec r_i/\partial t\neq 0$, а $\partial L/\partial t=0$, тоді за відсутності дисипативних сил, тобто при $Q_j^d=0$, інтеграл узагальненої енергії H (як це слідує з (6.9)) буде постійним, тоді як повна енергія E буде мінятися.

Якщо поряд з умовою збереження узагальненої енергії виконується і умова $\partial \vec r_i/\partial t=0$, то закони збереження узагальненої і повної енергій співпадають, тобто $H=E=E_0=const$.

6. ЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ

§6.1 Вільні одномірні коливання

В цьому розділі вивчимо рух механічної системи біля положень її рівноваги, коли система здійснює рух з досить малими швидкостями і в досить малій просторовій області. Теорія таких коливань має значення не лише для задач теоретичної механіки, а проникає в усі області фізики.

Коливання можна вивчати як на основі рівняння Ньютона, так і Лагранжа. Однак, так як рівняння Лагранжа є більш універсальне, то будемо виходити з нього.

Почнемо вивчати теорію коливань найпростішої системи. Для цього розглянемо систему з однією степеню вільності, на яку накладено стаціонарні голономні зв'язки. Щоб скласти і розв'язати рівняння руху (рівняння коливань) потрібно записати кінетичну та потенціальну енергії й узагальнені сили у залежності від узагальненої координати (q). При цьому не будемо конкретизувати явний вигляд T, U та Q, а скористаємось їх загальними властивостями, проаналізованими у попередньому розділі.

Отже, розглядається найпростіша система, яка характеризується однією узагальненою координатою (q), а отже описується одним рівнянням Лагранжа II роду. Згідно структури кінетичної енергії, оскільки для стаціонарних зв'язків справедливо $\frac{d\vec{r}}{dt} = 0$, то $T^{(1)} = T^{(0)} = 0$ і тому

$$T = T^{(2)} = \frac{1}{2} a_{11}(q)\dot{q}^2. \quad (1.1)$$

Тут коефіцієнт a_{11} від часу явно не залежить, а є функціями лише координати q.

Нехай на систему діють стаціонарні потенціальні сили з потенціалом U і дисипативні сили F^d, пропорційні першій степені швидкостей точок системи. Тобто

$$U = u(q); \quad Q^p = -\frac{\partial u}{\partial q}; \quad D = \frac{1}{2} b_{11}(q)\,\dot{q}^2; \quad Q^d = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = -b_{11}(q)\dot{q}. \quad (1.2)$$

Тоді згідно визначення узагальненої сили

$$Q = -\frac{\partial U}{\partial q} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = -\left(\frac{\partial U}{\partial q} + b_{11}(q)\,\dot{q}\right). \quad (1.3)$$

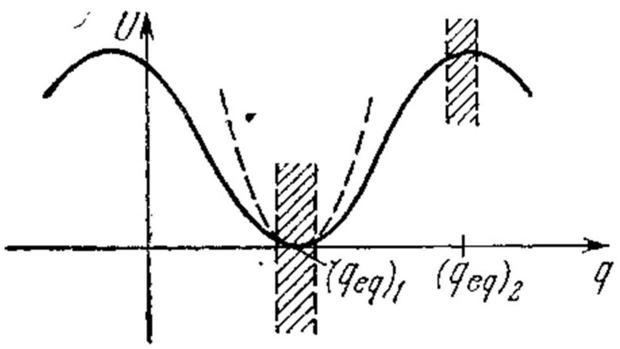
Припустимо, що сили і зв'язки такі, що система має хоча б одне положення рівноваги з координатою q_{eq}. Оскільки в положенні рівноваги ($q = q_{eq}$; $\dot{q} = 0$) узагальнена сила буде рівна нулю ($Q = 0$), то з (1.3) отимаємо

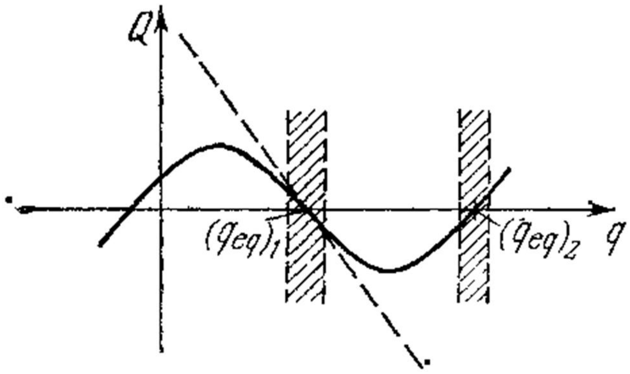
$$\left.\left(\frac{\partial U}{\partial q} + b_{11}(q)\,\dot{q}\right)\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} = 0.$$

Тобто умова знаходження системи у рівновазі зводиться до вимоги, що її потенціальна енергія повинна бути екстремальною, тобто

$$\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_{eq}} = 0. \quad (1.4)$$

Причому екстремум може бути як максимумом так і мінімумом функції.





Розглянемо тепер властивості малих околів положень рівноваги.

Нехай система має два положення екстремуму: мінімум в точці $(q_{eq})_1$ і максимум в точці $(q_{eq})_2$. Для того, щоб зрозуміти як буде поводити себе система в околі цих точок зобразимо графік залежності узагальненої сили Q від координати q. Очевидно, що в рівновазі в точках $(q_{eq})_1$ та $(q_{eq})_2$ сила буде дорівнювати нулю.

Розглянемо окіл точки $(q_{eq})_1$. Лівіше від цієї точки: $\frac{\partial U}{\partial q} < 0$, отже сила більше додатною. Правіше $(q_{eq})_1$ $\frac{\partial U}{\partial q} > 0$ і сила більше нуля. Отже, в околі $(q_{eq})_1$:

$$Q|_{q<(q_{eq})_1} > 0, \qquad Q|_{q>(q_{eq})_1} < 0\,.$$

Це означає, що при намаганні системи зменшити величину координати сила діє в бік збільшення координати, а при намаганні системи збільшити величину координати сила діє в сторону її зменшення. Тобто в околі мінімуму потенціальної енергії сила завжди намагається повернути систему в положення рівноваги.

В околі $(q_{eq})_2$: $\quad Q|_{q<(q_{eq})_2} < 0$ і $Q|_{q>(q_{eq})_2} > 0\,.$

Отже, в околі максимуму потенціальної енергії при зменшенні координати чи при її збільшенні виникає сила, що підтримує цю тенденцію. Тобто сила сприяє виведенню системи із положення рівноваги.

Тому приходимо до такого загального висновка: якщо при досить малому відхиленні системи від положення рівноваги і при досить малому значенні швидкості система не вийде за межі як завгодно малого околу положення рівноваги, то таке положення називається стійким. Умовою стійкої рівноваги є мінімум потенціальної енергії в даній точці.

Враховуючи це, розкладемо T, U і D в ряд Тейлора в околі точки стійкої рівноваги по малих зміщеннях ($\xi = q - q_{eq}$) і малих швидкостях ($\dot{\xi} = \dot{q}$) з точністю до величин другого порядку малості включно.

Оскільки кінетична енергія є функцією двох змінних (q і $\dot{q}$), тому її розклад в ряд Тейлора здійснюється так:

$$T = T(q,\dot{q}) = T\left(q = q_{eq}, \dot{q} = 0\right) + \frac{1}{1!}\left[\left.\frac{\partial T}{\partial q}\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} \left(q - q_{eq}\right) + \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} \dot{q}\right]$$
$$+ \frac{1}{2!}\left\{\left.\frac{\partial^2 T}{\partial q^2}\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} \left(q - q_{eq}\right)^2 + 2\left.\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \dot{q}}\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} \left(q - q_{eq}\right)\dot{q} + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2}\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} \dot{q}^2\right\} \qquad (1.5)$$

Розрахуємо похідні від кінетичної енергії, користуючись (1.1):

$T\left(q = q_{eq}, \dot{q} = 0\right) = 0$,

$\left.\frac{\partial T}{\partial q}\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} = 0$, $\quad \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} = 0$, $\quad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial q^2}\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} = 0$,

$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \dot{q}}\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} = 0$, $\quad \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2}\right|_{\substack{q=q_{eq}\\ \dot{q}=0}} = a_{11}\left(q = q_{eq}\right)$.

Отже, із точністю до величин другого порядку малості включно кінетична енергія набуде вигляду:

$$T = \frac{1}{2} a_{11}\left(q_{eq}\right) \cdot \dot{q}^2,$$

тобто

$$T = \frac{1}{2} a_{11}\left(q_{eq}\right) \cdot \dot{\xi}^2. \qquad (1.6)$$

Різниця між записами (1.6) та (1.1) суттєва, хоча формально вони ніби однакові. Справа в тому, що в (1.1) коефіцієнт $a_{11}(q)$ є функцією координати q, що ускладнює розв'язання рівняння руху, а в (1.6) $a_{11}\left(q_{eq}\right)$ – це вже просто число, що значно спрощує рівняння Лагранжа.

Розклад$U(q)$ в ряд, очевидно, буде мати вигляд:

$$U(q) = u\left(q_{eq}\right) + \frac{1}{1!}\left.\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)\right|_{q=q_{eq}} \left(q - q_{eq}\right) + \frac{1}{2!}\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right)\right|_{q=q_{eq}} \left(q - q_{eq}\right)^2.$$

Оскільки величина $u\left(q_{eq}\right)$ постійна, то вибравши її за початок відліку енергії, далі можна покласти її рівною нулю, отже:

$$U = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right)\right|_{q=q_{eq}} \xi^2 \,. \qquad (1.7)$$

Легко побачити, що по аналогії з розкладом кінетичної енергії T для функції Релея D маємо:

$$D = \frac{1}{2} b_{11}\left(q_{eq}\right) \cdot \dot{\xi}^2. \qquad (1.8)$$

Тепер запишемо рівняння Лагранжа в околі точки мінімуму потенціальної енергії, тобто в околі точки стійкої рівноваги $\left(q_{eq}\right)_1$:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = Q,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial \xi} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\xi}}\,. \qquad (1.9)$$

Покладаючи $a_{11} = a_{11}(q_{eq})$, $b_{11} = b_{11}(q_{eq})$, $c_{11} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right)\Big|_{q=q_{eq}}$, знайдемо:

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{\xi}} = \frac{\partial}{\partial\dot{\xi}}\left(\frac{1}{2}a_{11}\dot{\xi}^2 - \frac{1}{2}c_{11}\xi^2\right) = a_{11}\dot{\xi},$$

$$\frac{da_{11}\dot{\xi}}{dt} = a_{11}\ddot{\xi},$$

$$\frac{\partial(T-U)}{\partial\xi} = -c_{11}\xi,$$

$$\frac{\partial D}{\partial\dot{\xi}} = b_{11}\dot{\xi}.$$

Підставивши розраховані похідні в (1.9), одержимо рівняння лінійних коливань системи з однією спепеню вільності під дією стаціонарних потенціальних і дисипативних сил відносно положення стійкої рівноваги:

$$a_{11}\ddot{\xi} + b_{11}\dot{\xi} + c_{11}\xi = 0. \tag{1.10}$$

Це лінійне однорідне диференційне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Завдання далі зводиться до розв'язування рівняння коливань (1.10). Будемо шукати його розв'язок у вигляді:

$$\xi = ce^{\lambda t} \tag{1.11}$$

де c і λ – невідомі константи.

Із (1.11) знайдемо:

$$\dot{\xi} = c\lambda e^{\lambda t}; \qquad \ddot{\xi} = c\lambda^2 e^{\lambda t}$$

і підставимо в (1.10) та скоротивши на множник $ce^{\lambda t}$ (тривіальний розв'язок $c = 0$ не розглядаємо) одержимо характеристичне рівняння для визначення λ:

$$a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} = 0 \tag{1.12}$$

Позначимо:

$$\mu = \frac{b_{11}}{2a_{11}}, \qquad \omega_0^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}. \tag{1.13}$$

Величина μ називається *коефіцієнтом затухання*.

Введені μ і ω_0^2 додатні величини оскільки всі $a_{11} > 0$, $b_{11} > 0$, $c_{11} > 0$.

Рівняння (1.12) тепер матиме вид:

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{1.14}$$

Це рівняння має два розв'язки:

$$\lambda^{\pm} = -\mu \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$$

Позначивши

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \tag{1.15}$$

одержимо

$$\lambda^{\pm} = -\mu \pm i\omega \tag{1.16}$$

Величина ω називається *власною частотою коливань*.

Із (1.15) видно, що при $\omega_0 > \mu$, ω дійсне і тому λ^+ і λ^- є комплексними взаємноспряженими коренями ($\lambda^+ = \lambda^{-*}$). Якщо ж $\omega_0 < \mu$, то $\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}$ уявне, отже обидва $\lambda^{\pm}$ є дійсними. У випадку $\omega_0 = \mu$ настає виродження ($\lambda^+ = \lambda^-$), яке ми не розглядаємо.

Наявність двох розв'язків (1.16) відповідає двом частковим розв'язкам рівняння (1.10)

$$\xi^+ = c^+e^{\lambda^+ t}; \qquad \xi^- = c^-e^{\lambda^- t}.$$

Тут λ^+, λ^-, c^+, c^- можуть бути комплексними.

Якщо узагальнена координата вибрана дійсною, то загальний розв'язок рівняння шукається як дійсна частина від лінійної комбінації незалежних розв'язків ξ^+ та ξ^-:

$$\xi = Re(c^+e^{\lambda^+ t} + c^-e^{\lambda^- t}) \tag{1.17}$$

а) Випадок $\omega_0 > \mu$.

Оскільки у цьому випадку c^+ і c^- комплексні, то запишемо їх у вигляді

$$c^+ = a^{(1)} + ib^{(1)}; \quad c^- = a^{(2)} + ib^{(2)}$$

тоді маємо:

$$\xi = Re\{(a^{(1)} + ib^{(1)})e^{-\mu t}e^{i\omega t} + (a^{(2)} + ib^{(2)})e^{-\mu t}e^{-i\omega t}\}$$
$$= e^{-\mu t}Re\{(a^{(1)} + ib^{(1)})(\cos\omega t + i\sin\omega t) + (a^{(2)} + ib^{(2)})(\cos\omega t - i\sin\omega t)\}$$
$$= e^{-\mu t}[(a^{(1)} + a^{(2)})\cos\omega t + (b^{(2)} - b^{(1)})\sin\omega t].$$

Позначимо

$$c_1 = a^{(1)} + a^{(2)}; \;\; c_2 = b^{(2)} - b^{(1)}$$

тоді

$$\xi = e^{-\mu t}(c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t), \qquad (1.18)$$

де c_1 і c_2 – дійсні постійні, які визначаються початковими умовами. Розв'язок (18) можна звести до вигляду:

$$\xi = ae^{-\mu t}\cos(\omega t + \alpha). \qquad (1.19)$$

Розв'язок (1.19) описує затухаючі ($e^{-\mu t}$ приводить до зменшення амплітуди) гармонічні (ω=const) коливання з амплітудою a, частотою ω, фазою α та коефіцієнтом затухання μ.

б) Випадок $\mu > \omega_0$.

У цьому випадк λ має два дійсні і різні корені λ_1 і λ_2, а саме

$$\lambda_{1,2} = -\mu_{1,2}, \qquad (1.20)$$

де

$$\mu_{1,2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega_0^2}.$$

Отже

$$\xi = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t},$$

або

$$\xi = c_1e^{-\mu_1 t} + c_2e^{-\mu_2 t} \qquad (1.21)$$

де c_1 і c_2 – дійсні постійні.

Як видно з (1.21) величина ξ з часом зменшується. Такий рух називається аперіодичним затухаючим. Він характеризується двома коефіцієнтами затухання μ_1 і μ_2.

Характерною особливістю лінійної теорії коливань є те, що

1) власна частота і коефіцієнт затухання не залежать від початкових умов;
2) в розв'язку відсутні «обертони», тобто кратні власні частоти;
3) має місце суперпозиція – загальний розв'язок є сумою часткових.

Перша властивість приводить до цікавої особливості – ізохронності: при початковій швидкості рівній нулю, незалежно від величини початкового відхилення, система переходить в рівноважне положення за однаковий проміжок часу. Щоб переконатись в цьому, виразимо параметри a і α з (1.19) через ξ_0 і $\dot{\xi}_0$. Для цього розглянемо (1.19) в початковий момент часу $t = 0$

$$\xi_0 = a\cos\alpha \qquad (1.22)$$

Також знайдемо швидкість

$$\dot{\xi} = -a\mu e^{-\mu t}\cos(\omega t + \alpha) - a\omega e^{-\mu t}\sin(\omega t + \alpha),$$

і запишемо її в початковий момент часу

$$\dot{\xi}_0 = -a\mu\cos\alpha - a\omega\sin\alpha \qquad (1.23)$$

Із (1.22) і (1.23) знайдемо:

$$(\dot{\xi}_0 + \mu\xi_0)^2 = (a\omega\sin\alpha)^2,$$
$$(\dot{\xi}_0 + \mu\xi_0)^2 = a^2\omega^2(1 - \cos\alpha^2),$$
$$(\dot{\xi}_0 + \mu\xi_0)^2 = \omega^2a^2 - \omega^2{\xi_0}^2.$$

Отже

$$a^2 = {\xi_0}^2 + \frac{(\dot{\xi}_0 + \mu\xi_0)^2}{\omega^2}. \qquad (1.24)$$

Розділивши (1.23) на (1.22) отримаємо

$$tg\alpha = -\frac{\dot{\xi}_0 + \mu\xi_0}{\omega\xi_0}. \qquad (1.25)$$

За умови $\dot{\xi}_0 = 0$, з (1.24) та (1.25) одержимо:

$$a = \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\omega^2}}\xi_0\,, \qquad tg\alpha = -\frac{\mu}{\omega}. \tag{1.26}$$

Інтервал часу, протягом якого система перейде в положення рівноваги, визначиться з умови, що $\xi_{eq} = 0$, тобто $e^{-\mu t}\cos(\omega t + \alpha) = 0$. За скінченний проміжок часу ця рівність виконається лише якщо

$$\cos(\omega\Delta t + \alpha) = 0$$

звідки

$$\omega\Delta t + \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \Delta t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Врахувавши з (1.26), що

$$\alpha = -arctg\,\frac{\mu}{\omega}$$

одержимо

$$\Delta t = \frac{\pi}{2\omega}\left(1 + \frac{2}{\pi}arctg\,\frac{\mu}{\omega}\right) \tag{1.27}$$

звідси видно, що Δt не залежить від величини початкового відхилення ξ_0.

§6.2 Власні і головні коливання системи під дією потенціальних сил

Ми вже розглянули коливання системи з однією степеню вільності. Тепер вивчимо коливання системи з s степенями вільності під дією стаціонарних потенціальних сил та з ідеальними голономними зв'язками за умови, що система має хоча б одне положення стійкої рівноваги ($(q_j)_{eq}$). За узагальнені координати виберемо $\xi_j = q_j - (q_j)_{eq}$. Тоді узагальнені швидкості $\dot{\xi}_j = \dot{q}_j$ ($j = 1,2 \dots s$). Розглянемо рух системи в малому околі положення рівноваги.

Оскільки система стаціонарна, то кінетична T і потенціальна U енергії, розкладені в ряд Тейлора в околі положення рівноваги з точністю до величин другого порядку малості, мають загальний вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}\,\dot{\xi}_j\dot{\xi}_k\,, \tag{2.1}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} c_{jk}\,\xi_j\xi_k. \tag{2.2}$$

Тут $a_{jk} = a_{kj}$, $c_{jk} = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi_j\partial\xi_k}$ – постійні величини взяті в положенні рівноваги, симетричні відносно перестановки індексів j та k. Вважатимемо, що хоч один з c_{jk} не рівний нулю.

Складемо тепер рівняння Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{\xi}_i}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial\xi_i} = 0, \quad i = 1,2,\dots s$$

або

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}\left(\frac{\partial\dot{\xi}_j}{\partial\dot{\xi}_i}\dot{\xi}_k + \dot{\xi}_j\frac{\partial\dot{\xi}_k}{\partial\dot{\xi}_i}\right)\right\} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} c_{jk}\left(\frac{\partial\xi_j}{\partial\xi_i}\xi_k + \xi_j\frac{\partial\xi_k}{\partial\xi_i}\right) = 0 \tag{2.3}$$

Врахувавши, що

$$\delta_{ji} = \frac{\partial\xi_j}{\partial\xi_i} = \frac{\partial\dot{\xi}_j}{\partial\dot{\xi}_i},$$

рівняння (2.3) приводиться до вигляду:

$$\sum_{k=1}^{s}(a_{ik}\,\ddot{\xi}_k + c_{ik}\xi_k) = 0, \quad i = 1,2,\dots s. \tag{2.4}$$

Будемо шукати розв'язок системи (2.4) у вигляді

$$\xi_k = c_k e^{\lambda t}. \tag{2.5}$$

Тоді підставивши $\dot{\xi}_k = c_k \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{\xi}_k = c_k \lambda^2 e^{\lambda t}$ у (2.4) одержимо систему характеристичних рівнянь

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{ik}\lambda^2 + c_{ik})c_k = 0, \quad i = 1,2, \dots s \tag{2.6}$$

для знаходження коефіцієнтів c_k.

Як відомо з вищої алгебри система алгебраїчних рівнянь типу (2.6)

$$\begin{cases} (a_{11}\lambda^2 + c_{11})c_1 + (a_{12}\lambda^2 + c_{12})c_2 + \dots + (a_{1s}\lambda^2 + c_{1s})c_s = 0 \\ (a_{21}\lambda^2 + c_{21})c_1 + (a_{22}\lambda^2 + c_{22})c_2 + \dots + (a_{2s}\lambda^2 + c_{2s})c_s = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ (a_{s1}\lambda^2 + c_{s1})c_1 + (a_{s2}\lambda^2 + c_{s2})c_2 + \dots + (a_{ss}\lambda^2 + c_{ss})c_s = 0 \end{cases} \tag{2.6$'$}$$

має нетривіальні розв'язки, коли детермінант її дорівнює нулю

$$\Delta(\lambda) = \det(a_{ik}\lambda^2 + c_{ik}) = 0. \tag{2.7}$$

Розкривши цей детермінант, ми одержуємо характеристичне рівняння степені $2s$ відносно невідомих λ, яке має $2s$ коренів, або, як кажуть, $2s$ власних значень λ_α $(\alpha = 1,2, \dots 2s)$. При кожному знайденому власному значенні λ_α буде своє співвідношення між амплітудами c_k, тому підставляючи конкретне значення кореня λ_α в (2.6) отримаємо систему рівнянь для визначення амплітуд c_k^α, що належать власним значенням λ_α:

$$\sum_{k=1}^{s} (a_{ik}\lambda_\alpha^2 + c_{ik})c_k^\alpha = 0, \qquad i = 1,2, \dots s \tag{2.8}$$

або

$$\begin{cases} (a_{11}\lambda_\alpha^2 + c_{11})c_1^\alpha + (a_{12}\lambda_\alpha^2 + c_{12})c_2^\alpha + \dots + (a_{1s}\lambda_\alpha^2 + c_{1s})c_s^\alpha = 0 \\ (a_{21}\lambda_\alpha^2 + c_{21})c_1^\alpha + (a_{22}\lambda_\alpha^2 + c_{22})c_2^\alpha + \dots + (a_{2s}\lambda_\alpha^2 + c_{2s})c_s^\alpha = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ (a_{s1}\lambda_\alpha^2 + c_{s1})c_1^\alpha + (a_{s2}\lambda_\alpha^2 + c_{s2})c_2^\alpha + \dots + (a_{ss}\lambda_\alpha^2 + c_{ss})c_s^\alpha = 0 \end{cases} \tag{2.8$'$}$$

З системи рівнянь (2.8) знаходяться всі c_k^α, де індекс α вказує, що коефіцієнти c_k знайдені для $\lambda = \lambda_\alpha$. Перебираючи всі $2s$ значень коренів λ_α одержимо всі можливі розв'язки c_k^α. Отже, повний розв'язок буде дорівнювати дійсній сумі всіх $2s$ лінійно незалежних розв'язків

$$\xi_k = Re \sum_{\alpha=1}^{2s} c_k^\alpha e^{\lambda_\alpha t} \,. \tag{2.9}$$

Виходячи із закону збереження енергії можна показати, що у випадку консервативних систем (в яких потенціальна енергія явно від часу не залежить, а дисипативні сили відсутні) всі корені (λ) є тільки уявними. Причому вони є попарно спряженими.

$$\lambda_\alpha^+ = +i\omega_\alpha; \qquad \lambda_\alpha^- = -i\omega_\alpha, \quad \alpha = 1,2, \dots s \tag{2.10}$$

Тут ω_α – дійсні величини, які називаються власними частотами системи, а власні значення (λ) тепер можна перенумерувати від 1 до s. Тому (2.9) запишеться так:

$$\xi_k = Re \sum_{\alpha=1}^{s} \left\{ c_k^{\alpha+} e^{i\omega_\alpha t} + c_k^{\alpha-} e^{-i\omega_\alpha t} \right\}. \tag{2.11}$$

Тут, як вже відмічалось, значення амплітуд c_k^α визначаються із однорідної системи рівнянь (2.8). Ця процедура здійснюється так.

Оскільки нас цікавить нетривіальний розв'язок, то хоч одна з усіх амплітуд c_k^α повинна бути не рівною нулю. Нехай $c_s^\alpha \neq 0$. Тоді будь-яка інша k-та амплітуда c_k^α (k=1,2,… $s-1$) визначається через c_s^α за відомим з вищої алгебри співвідношенням Крамера

$$c_k^\alpha = \frac{\Delta_k^\alpha}{\Delta_s^\alpha} c_s^\alpha, \tag{2.12}$$

де Δ_k^α і Δ_s^α відповідно алгебраїчні доповнення k-го і s-го стовпчиків, взяті для будь-якої строчки характеристичного детермінанту (2.7) (але для однієї в обох випадках). Так як амплітуди c_s^α довільні, то ввівши позначення

$$c_\alpha = \frac{c_s^\alpha}{\Delta_s^\alpha}$$

можна записати

$$c_k^\alpha = c_\alpha \Delta_k^\alpha, \qquad k = 1,2, \dots s \tag{2.13}$$

Величини Δ_k^α є деякими функціями від квадратів λ_α, тому вони є дійсними величинами, що задовольняють умову

$$\Delta_k(+i\omega_\alpha) = \Delta_k(-i\omega_\alpha) = \Delta_k, \quad k = 1,2, \dots s, \ \alpha = 1,2, \dots s. \tag{2.14}$$

Отже розв'язки ξ_k тепер запишуться так:

$$\xi_k = Re\sum_{\alpha=1}^{s}\left\{c_\alpha^+ \Delta_k e^{+i\omega_\alpha t} + c_\alpha^- \Delta_k e^{-i\omega_\alpha t}\right\}. \tag{2.15}$$

Вираз (2.15) завжди можна представити у вигляді

$$Re\left\{c_\alpha^+ e^{+i\omega_\alpha t} + c_\alpha^- e^{-i\omega_\alpha t}\right\} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha), \tag{2.16}$$

де a_α і β_α – довільні дійсні сталі.

Тепер загальний розв'язок (2.15) запишемо в виді:

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \Delta_k \, \theta_\alpha, \tag{2.17}$$

де

$$\theta_\alpha = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha). \tag{2.18}$$

Отже, власні коливання системи, що описуються розв'язками ξ_k, являють собою накладання гармонічних коливань з власними частотами ω_α. Функції θ_α є строго періодичними функціями часу, але ξ_k, взагалі кажучи, не є такими. Що стосується власних частот ω_α, то вони характеризують систему в цілому, і їх не можна ототожнювати з частотою якої-небудь точки системи.

Із (2.17) видно, що величини ξ_k і θ_α пов'язані лінійним перетворенням, тому координати θ_α можуть бути взяті за незалежні змінні.

Координати θ_α називаються головними або нормальними координатами. Відповідно гармонічні коливання із власними частотами ω_α системи називаються головними або нормальними коливаннями.

Нормальні координати задовольняють наступній системі рівнянь:

$$\ddot{\theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \theta_\alpha = 0, \qquad \alpha = 1,2, \dots s, \tag{2.19}$$

яка називається *рівнянням Лагранжа в головних координатах.*

Кожне з рівнянь системи (2.19) є рівнянням лише відносно однієї головної координати θ_α, тому цій системі рівнянь відповідає функція Лагранжа, яка є сумою парціальних функцій L_α, кожна з яких залежить лише від своєї координати θ_α і її похідної $\dot{\theta}_\alpha$. Тобто в головних координатах Лагранжіан системи має вид:

$$L = \sum_{\alpha=1}^{s} L_\alpha, \tag{2.20}$$

де

$$L_\alpha = T_\alpha - U_\alpha, \qquad T_\alpha = \frac{a_\alpha}{2}\dot{\theta}_\alpha^2, \qquad U_\alpha = \frac{c_\alpha}{2}\theta_\alpha^2.$$

Введення головних координат рівносильно одночасному приведенню двох квадратичних форм T і U до канонічного виду. Дійсно, T і U у випадку незалежних координат задаються з допомогою двох симетричних матриць.

$$\|a_{jk}\| = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} \dots & a_{ss} \end{matrix}\right\| \qquad \|c_{jk}\| = \left\|\begin{matrix} c_{11} & c_{12} \dots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} \dots & c_{2s} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{s1} & c_{s2} \dots & c_{ss} \end{matrix}\right\|$$

Якщо одна з двох квадратичних форм додатньо визначена, то деяким лінійним перетворенням обидві форми завжди можна привести до канонічного виду і при цьому матриці перетворюються до діагональних матриць

$$\|a_\alpha\| = \left\|\begin{matrix} a_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & a_2 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & a_s \end{matrix}\right\| \qquad \|c_\alpha\| = \left\|\begin{matrix} c_1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & c_2 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots & c_s \end{matrix}\right\|$$

Отже, для систем з ідеальними голономними зв'язками і консервативними потенціальними силами завжди можна ввести головні координати.

§ 6.3 Власні коливання системи під дією потенціальних, гіроскопічних і дисипативних сил

Розглянемо механічну систему з s степенями вільності, на яку накладені ідеальні голономні стаціонарні зв'язки і діють потенціальні, гіроскопічні та дисипативні сили. Вивчемо коливання системи в околі положення стійкої рівноваги.

Кінетична (T) і потенціальна (U) енергії та дисипативна функція Релея (D) розглядуваної системи мають вигляд:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} a_{jk}(q)\dot{q}_j\,\dot{q}_k,$$

$$U = u^{(0)}(q) + \sum_{j=1}^{s} u_j(q)\dot{q}_j, \tag{3.1}$$

$$D = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{s} b_{jk}(q)\dot{q}_j\,\dot{q}_k,$$

де всі функції a_{jk}, $u^{(0)}$, u_j, b_{jk} залежать від координат. Крім цього коефіцієнти a_{jk} і b_{jk} симетричні відносно перестановок індексів j та k.

Розкладаючи T, U, D в околі положення стійкої рівноваги з точністю до членів другого порядку малості включно, одержується рівняння, яке описує коливання системи з s степенями вільності під дією потенціальних, гіроскопічних та дисипативні сил

$$\sum_{k=1}^{s}\left\{a_{jk}\ddot{\xi}_k + \left(b_{jk} - \gamma_{jk}\right)\dot{\xi}_k + c_{jk}\xi_k\right\} = 0, \quad j = 1,2,\dots s, \tag{3.2}$$

де $\gamma_{jk} = \frac{\partial u_j}{\partial q_k} - \frac{\partial u_k}{\partial q_j}$ – антисиметричні коефіцієнти, $c_{jk} = \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial q_j \partial q_k}$. У системі рівнянь (3.2) коефіцієнти a_{jk}, b_{jk}, c_{jk} розраховані в положенні рівноваги і є просто числами.

Загальна процедура розв'язування рівняння (3.2) аналогічна методу, викладеному у попередньому параграфі про коливання системи під дією потенціальних сил.

Будемо шукати розв'язок (3.2) у виді:

$$\xi_k = c_k e^{\lambda t}, \quad k = 1,2,\dots,s. \tag{3.3}$$

У результаті з (3.2) одержимо характеристичне рівняння для амплітуд c_k:

$$\sum_{k=1}^{s}\left\{a_{jk}\lambda^2 + \left(b_{jk} - \gamma_{jk}\right)\lambda + c_{jk}\right\}c_k = 0, \qquad j = 1,2,\dots s. \tag{3.4}$$

Система (3.4) має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник рівний нулю, тобто

$$det\left\{a_{jk}\lambda^2 + \left(b_{jk} - \gamma_{jk}\right)\lambda + c_{jk}\right\} = 0. \tag{3.5}$$

– це характеристичне рівняння, яке представляє собою алгебраїчне рівняння степені 2s відносно λ і має 2s коренів, тобто 2s власних значень λ_α ($\alpha = 1,2,\dots,2s$). Для кожного власного значення λ_α отримується своє співвідношення між амплітудами c_k:

$$\sum_{k=1}^{s}\left\{a_{jk}\lambda_\alpha^2 + \left(b_{jk} - \gamma_{jk}\right)\lambda_\alpha + c_{jk}\right\}c_k^\alpha = 0, \tag{3.6}$$

де індекс α в c_k^α вказує на приналежність амплітуди власному значенню λ_α.

Загальний розв'язок системи рівнянь (3.2) запишемо у виді дійсної частини від суми всіх часткових розв'язків.

$$\xi_k = Re\sum_{\alpha=1}^{2s} c_k^\alpha e^{\lambda_\alpha t}, \quad k = 1,2,\dots s. \tag{3.7}$$

Кожне із власних значень λ_α може бути або комплексним (і тоді спряжене йому число також буде коренем характеристичного рівняння) або дійсним. Тому кожне із власних значень λ_α можна записати у формі:

$$\omega_{0\alpha} > \mu_\alpha: \qquad \lambda_\alpha^\pm = -\mu_\alpha \pm i\omega_\alpha, \ \ \omega_\alpha = \sqrt{\mu_\alpha^2 - \omega_{0\alpha}^2}, \tag{3.8}$$

$$\mu_\alpha > \omega_{0\alpha}: \qquad \lambda_\alpha^\pm = -\mu_\alpha^\pm, \ \ \mu_\alpha^\pm = \mu_\alpha \pm \sqrt{\mu_\alpha^2 - \omega_{0\alpha}^2}, \tag{3.9}$$

де $\mu_\alpha, \mu_\alpha^+, \mu_\alpha^-$ - додатні числа.

Проаналізуємо розв’язок (3.7) у залежності від величин μ_α.

1) Якщо дисипація енергії досить мала (b_{jk} – малі), то всі корені λ можна розбити на пари комплексно спряжених коренів. Тоді загальний розв’язок

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^{s} e^{-\mu_\alpha t} Re\{c_\alpha^+ \Delta_k(\lambda_\alpha^+) e^{i\omega_\alpha t} + c_\alpha^- \Delta_k(\lambda_\alpha^-) e^{-i\omega_\alpha t}\} = \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha e^{-\mu_\alpha t} \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha) \tag{3.10}$$

буде описувати затухаючі коливання системи, які є накладанням гармонічних коливань.

2) Якщо дисипація енергії відсутня (тобто всі $b_{jk} = 0, \mu_\alpha = 0$), то $\lambda_\alpha^\pm = \pm i\omega_\alpha$ і система буде здійснювати незатухаючі гармонічні коливання:

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^{s} Re\{c_\alpha^+ \Delta_k(+i\omega_\alpha) e^{+i\omega_\alpha t} + c_\alpha^- \Delta_k(-i\omega_\alpha) e^{-i\omega_\alpha t}\} = \sum_{\alpha=1}^{s} a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \beta_\alpha), \tag{3.11}$$

3) Якщо дисипація енергії достатньо велика (b_{jk} – достатньо великі, тобто $\mu_\alpha > \omega_{0\alpha}$), то всі λ – дійсні. В цьому випадку система здійснює аперіодичний рух, який описується розв’язком:

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^{s} \{e^{-\mu_\alpha^+ t} Re[c_\alpha^+ \Delta_k(\lambda_\alpha^+)] + e^{-\mu_\alpha^- t} Re[c_\alpha^- \Delta_k(\lambda_\alpha^-)]\}, \ \ k = 1,2, \dots s. \tag{3.12}$$

§ 6.4 Вимушені коливання

Розглянемо механічну систему з s степенями вільності з ідеальними голономними зв’язками. Припустимо, що поряд із стаціонарними потенціальними і дисипативними силами на систему діють нестаціонарні сили, тобто сили, які явно залежать від часу. В цьому випадку система поряд із власними коливаннями буде здійснювати ще й вимушені коливання. Щоб одержати рівняння руху такої системи потрібно записати рівняння Лагранжа в околі положення стійкої рівноваги за процедурою, аналогічною розглянутій у попередніх параграфах. У результаті отримаємо рівняння коливань системи з s степенями вільності під дією нестаціонарних сил

$$\sum_{k=1}^{s} \{a_{jk}\ddot{\xi}_k + (b_{jk} - \gamma_{jk})\dot{\xi}_k + c_{jk}\xi_k\} = Q_j^l(t), \quad j = 1,2, \dots s, \tag{4.1}$$

де $Q_j^l(t)$ – задані сили, як функції часу.

Через наявність нестаціонарних сил отримали неоднорідну систему диференціальних рівнянь. З теорії диференційних рівнянь відомо, що розв’язок системи (1.1) є сумою загального розв’язку однорідної системи і частинного розв’язку неоднорідної системи. Розв’язок однорідної системи рівнянь

$$\sum_{k=1}^{s} \{a_{jk}\ddot{\xi}_k + (b_{jk} - \gamma_{jk})\dot{\xi}_k + c_{jk}\xi_k\} = 0, \quad j = 1,2, \dots s$$

описує власні коливання системи і був отриманий та проаналізований у попередньому параграфі. Тому далі розглянемо тільки частинний розв’язок системи (1.1), який буде описувати вимушені коливання.

Щоб виявнити основні риси систем, які коливаються вимушеним чином, розглянемо найпростіший приклад такої системи – систему з однією степеню вільності, на яку діє вимушуючи сила, що гармонічно залежить від часу

$$Q_l(t) = Q_l\cos(\omega_l t + \beta_l)$$

У цьому випадку рівняння руху має вигляд

$$a_{11}\ddot{\xi}_1 + b_{11}\dot{\xi}_1 + c_{11}\xi_1 = Q_l\cos(\omega_l t + \beta_l), \tag{4.2}$$

де Q_l, ω_l, β_l – відповідно амплітуда, частота і фаза вимушуючої сили.

Запишемо рівняння (4.2) у комплексній формі

$$a_{11}\ddot{\xi}_1 + b_{11}\dot{\xi}_1 + c_{11}\xi_1 = Q_l e^{i(\omega_l t+\beta_l)}. \tag{4.3}$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (4.3) будемо шукати у вигляді:

$$\xi_l = a_l e^{i\Delta\beta_l} e^{i(\omega_l t+\beta_l)}. \tag{4.4}$$

Підставимо (4.4) у (4.3):

$$(-i\omega_l)^2 a_{11} a_l e^{i\Delta\beta_l} e^{i(\omega_l t+\beta_l)} + i\omega_l b_{11} a_l e^{i\Delta\beta_l} e^{i(\omega_l t+\beta_l)} + c_{11} a_l e^{i\Delta\beta_l} e^{i(\omega_l t+\beta_l)} = Q_l e^{i(\omega_l t+\beta_l)},$$

Звідки, скоротивши на $e^{i(\omega_l t+\beta_l)}$, знайдемо комплексну амплітуду

$$a_l e^{i\Delta\beta_l} = \frac{Q_l}{c_{11} - a_{11}\omega_l{}^2 + i b_{11}\omega_l}.$$

Позначивши

$$\Delta = c_{11} - a_{11}\omega_l{}^2 + i b_{11}\omega_l \tag{4.5}$$

одержимо

$$a_l e^{i\Delta\beta_l} = \frac{Q_l}{\Delta}. \tag{4.6}$$

Домножимо і поділимо праву частину (6) на комплексно спряжену до знаменника (Δ^*)величину

$$a_l e^{i\Delta\beta_l} = \frac{Q_l\Delta^*}{|\Delta|^2}. \tag{4.7}$$

Із (4.7) легко знайти дійсну амплітуду (a_l) і різницю фаз ($\Delta\beta_l$), як функції частоти (ω_l) вимушуючої сили. Для цього візьмемо від (4ю7) комплексно спряжене

$$a_l e^{-i\Delta\beta_l} = \frac{Q_l\Delta}{|\Delta|^2} \tag{4.7'}$$

і перемножимо ліві і праві частини (4.7) і (4.7')

$$a_l{}^2 = \frac{Q_l{}^2\Delta^*\Delta}{|\Delta|^2|\Delta|^2}$$

звідки

$$a_l = \frac{Q_l}{|\Delta|}. \tag{4.8}$$

Підставимо (4.5) у (4.8)

$$a_l = \frac{Q_l}{\sqrt{(c_{11} - \omega_l{}^2 a_{11})^2 + (\omega_l b_{11})^2}} = \frac{Q_l}{a_{11}\sqrt{\left(\frac{c_{11}}{a_{11}} - \omega_l{}^2\right)^2 + \omega_l{}^2\left(\frac{b_{11}}{a_{11}}\right)^2}}.$$

Отже

$$a_l = \frac{Q_l}{a_{11}\sqrt{\left(\frac{c_{11}}{a_{11}} - \omega_l{}^2\right)^2 + \omega_l{}^2\left(\frac{b_{11}}{a_{11}}\right)^2}}. \tag{4.9}$$

Введемо позначення

$$\omega_0{}^2 = \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad \mu = \frac{b_{11}}{2a_{11}} \tag{4.10}$$

й кінцево отримаємо вираз для амплітуди вимушених коливань

$$a_l = \frac{Q_l}{a_{11}\sqrt{(\omega_0{}^2 - \omega_l{}^2)^2 + 4\mu^2\omega_l{}^2}}\,. \tag{4.11}$$

Щоб знайти зміну фази ($\Delta\beta_l$) запишемо (4.7) із врахуванням (4.8):

$$e^{i\Delta\beta_l} = \frac{\Delta^*}{|\Delta|} \tag{4.12}$$

звідки

$$\cos\Delta\beta_l + i\sin\Delta\beta_l = \frac{-\omega_l{}^2 a_{11} - i\omega_l b_{11} + c_{11}}{|\Delta|},$$

$$\cos\Delta\beta = \frac{c_{11} - \omega_l{}^2 a_{11}}{|\Delta|}, \qquad \sin\Delta\beta = \frac{-\omega_l b_{11}}{|\Delta|},$$

$$tg\Delta\beta_l = \frac{-\omega_l b_{11}}{c_{11} - \omega_l{}^2 a_{11}} = \frac{-\frac{b_{11}}{a_{11}}\omega_l}{\frac{c_{11}}{a_{11}} - \omega_l{}^2} = -\frac{2\mu\omega_l}{\omega_0{}^2 - \omega_l{}^2}.$$

Отже різниця фаз вимушених коливань та вимушуючої сили отримується у вигляді

$$\Delta\beta_l = -arctg\,\frac{2\mu\omega_l}{\omega_0{}^2 - \omega_l{}^2}\,. \tag{4.13}$$

Формули (4.11) і (4.13) визначають амплітуду a_l і різницю фаз $\Delta\beta_l$ як функції частоти вимушуючої сили ω_l. Функції $a_l(\omega_l)$ і $\Delta\beta_l(\omega_l)$ називаються амплітудною і фазовою характеристиками відповідно. Підставляючи їх у (4.4) та виділивши дійсну частину одержимо частинний розв'язок рівняння вимушених коливань у вигляді:

$$\xi_l = a_l(\omega_l)\cos[\omega_l t + \beta_l + \Delta\beta_l(\omega_l)]\,. \tag{4.14}$$

Розв'язок (4.14) описує вимушені коливання системи. Проаналізуємо його.

Із (4.14), (4.13) і (4.11) видно, що амплітуда вимушеного коливання a_l залежить від амплітуди вимушуючої сили Q_l і частот ω_l та ω_0. Якщо $\omega_l \approx \omega_0$ і затухання достатньо мале ($\mu^2 \ll \omega_0{}^2$), то має місце резонанс, тобто різке зростання амплітуди вимушених коливань. Неважко бачити, що вимушені коливання по фазі завжди відстають від вимушуючої сили, тобто ($\Delta\beta_l$) завжди від'ємне.

Нехай вимушуюча сила має постійну амплітуду (Q_l), а її частота (ω_l) може змінюватись від 0 до ∞. Тоді

1) Якщо частота ω_l дуже мала, тобто $\omega_l \approx 0$, і разом з тим $\omega_l \ll \omega_0$, тоді із (4.11) і (4.13) слідує:

$$a_l|_{\omega_l=0} = \frac{1}{a_{11}}\frac{Q_l}{\omega_0^2}, \qquad \Delta\beta_l|_{\omega_l=0} = -arctg\,0 = 0.$$

2) Якщо $0 < \omega_l < \omega_0$, то знаменник у (4.11) із збільшенням ω_l зменшується, а отже a_l зростає.

Із (4.13) видно, що зі зростанням ω_l аргумент тангенса зростає. Це значить, що $\Delta\beta_l$ спадає від 0 до ($-\pi/2$).

3) Знайдемо значення ω_l, при якому амплітуда буде максимальною. Це станеться при найменшому значенні знаменника в (4.11). Тобто коли:

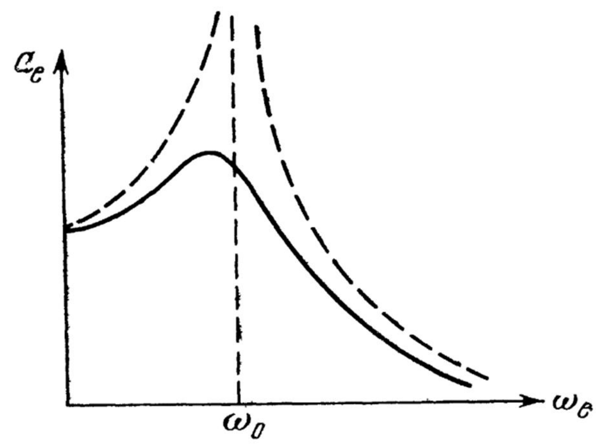
$$[(\omega_0^2 - \omega_l^2)^2 + 4\mu^2\omega_l{}^2]'=0$$

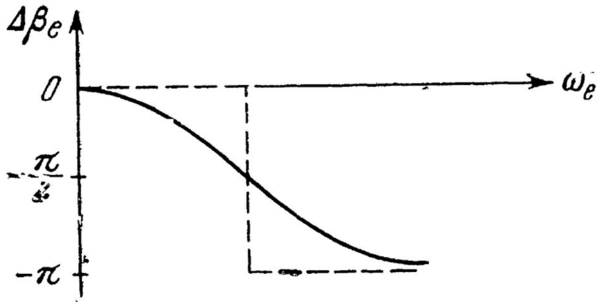
звідки

$$-4\omega_l(\omega_0^2 - \omega_l^2) + 8\mu^2\omega_l = 0$$

Не розглядаючи тривіальний випадок $\omega_l = 0$ отримаємо $\omega_l^2 = \omega_0^2 - 2\mu^2$ – частота, яка задовольняє умові максимум амплітуди вимушених коливань. Тоді

$$a_l|_{\omega_l^2=\omega_0^2-2\mu^2} = \frac{Q_l}{a_{11}}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_0^2 - 2\mu^2)^2 + 4\mu^2\omega_0^2 - 8\mu^4}} = \frac{Q_l}{a_{11}}\frac{1}{\sqrt{4\mu^4 - 8\mu^4 + 4\mu^2\omega_0^2}}.$$





Значить

$$\max a_l = a_l|_{\omega_l^2=\omega_0^2-2\mu^2} = \frac{Q_l}{a_{11}}\frac{1}{2\mu\sqrt{\omega_0^2-\mu^2}}.$$

Визначимо в цьому випадку $\Delta\beta_l$:

$$\Delta\beta_l|_{\omega_l^2=\omega_0^2-2\mu^2} = -arctg\left(\frac{\sqrt{\omega_0^2-2\mu^2}}{\mu}\right).$$

3) При подальшому зростанні ω_l знаменник (4.11) починає зростати, а амплітуда a_l спадає. Так, при $\omega_l = \omega_0$ одержимо

$$a_l|_{\omega_l=\omega_0} = \frac{Q_l}{a_{11}2\mu\omega_0},$$

$$\Delta\beta_l|_{\omega_l=\omega_0} = -arctg\left(\frac{2\mu\omega_0}{0}\right) = arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

4) У граничному випадку при $\omega_l \to \infty$:

$$a_l|_{\omega_l\to\infty} = \frac{Q_l}{a_{11}\infty} \to 0,$$

$$\Delta\beta_l|_{\omega_l\to\infty} = -arctg\left(\frac{\infty}{(\infty)^2}\right) = -arctg(0) = -\pi.$$

Відмітимо, що в граничному випадку, коли затуханням можна знехтувати ($\mu = 0$) одержимо:

$$a_l = \frac{Q_l}{a_{11}|\omega_0^2-\omega_l^2|}, \qquad \Delta\beta_l = \begin{cases} 0, & \omega_l < \omega_0 \\ -\pi, & \omega_l > \omega_0 \end{cases}$$

Отже, коливання описуються розривним зв'язком

$$\xi_l = \frac{Q_l}{a_{11}|\omega_0^2-\omega_l^2|}\begin{cases} \cos(\omega_l t+\beta_l) \\ \cos(\omega_l t+\beta_l-\pi) \end{cases} \tag{4.15}$$

Цей випадок ($\mu = 0$) на рисунку зображено штриховою лінією. Правда в природі він, очевидно, не реалізується, оскільки немає ідеальних коливних бездисипативних систем.

Резонансні властивості вимушених коливань мають колосальне застосування на практиці для побудови підсилювачів за рахунок збільшення амплітуди, а отже і енергії коливань.

У випадку, коли вимушуюча сила є довільною функцією часу $Q_l(t)$, яка може бути розкладена в ряд Фур'є

$$Q_l(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n \cos(n\omega_l t + {\beta_l}^{(n)}) \tag{4.16}$$

частковий розв'язок рівняння вимушених коливань може бути записаний у вигляді

$$\xi_l = \sum_{n=0}^{\infty} a_l(Q_n, n\omega_l)\cos\left[n\omega_l t + {\beta_l}^{(n)} + \Delta\beta_l(n\omega_l)\right] \tag{4.17}$$

Якщо ж $Q_l(t)$ піддається розкладу в інтеграл Фур'є, то в цьому випадку можна отримати загальну формулу для розв'язку ξ_l в інтегральному виді.

Тепер на основі попереднього розглянемо вимушені коливання системи із s степенями вільності, на яку діють s нестаціонарних сил, що гармонійно міняються з часом:

$$Q_j^l(t) = Q_j^l\cos(\omega_l t + \beta_l),\ j = 1,2,\dots s. \tag{4.18}$$

Нехай ці сили мають лише різні амплітуди Q_j^l, але однакові частоти ω_l і фази β_l.

Далі перейшовши до комплексних величин будемо шукати частинні розв'язки ξ_k ($k = 1,2,\dots s$) рівняння (4.1) у вигляді

$$\xi_k = a_k^l e^{i\Delta\beta_k^l} e^{i(\omega_l t+\beta_l)}, \tag{4.19}$$

Позначивши $\lambda_l = i\omega_l$ знайдемо:

$$\dot{\xi}_k = \lambda_l a_k^l e^{i\Delta\beta_k^l} e^{i(\omega_l t+\beta_l)}, \quad \ddot{\xi}_k = {\lambda_l}^2 a_k^l e^{i\Delta\beta_k^l} e^{i(\omega_l t+\beta_l)}.$$

Підставляючи вирази (4.19) і (4.18) у рівняння (4.1) отримаємо

$$\sum_{k=1}^{s}\{a_{jk}\lambda_l{}^2 + (b_{jk} - \gamma_{jk})\lambda_l + c_{jk}\}a_k^l e^{i\Delta\beta_k^l} = Q_j^l. \qquad (4.20)$$

Система (4.20) є системою s лінійних рівнянь відносно комплексних амплітуд $a_k^l e^{i\Delta\beta_k^l}$, розв'язок якої задається формулою (метод Крамера)

$$a_k^l = \frac{\Delta^k(\lambda_l)}{\Delta(\lambda_l)}, \quad k = 1,2, \dots s \qquad (4.21)$$

де $\Delta(\lambda_l)$ – характеристичний детермінант взятий для $\lambda = \lambda_l$ з коефіцієнтами лівої частини (4.20), а $\Delta^k(\lambda_l)$ – той же детермінант із k-м стовпцем, заміненим на відповідні амплітуди сили $Q_1^l, Q_2^l, \dots Q_s^l$.

Так як характеристичне рівняння має 2s коренів (λ_α), то $\Delta(\lambda_l)$ можна представити у вигляді добутку:

$$\Delta(\lambda_l) = a\prod_{\alpha=1}^{2s}(\lambda_l - \lambda_\alpha), \qquad (4.22)$$

де a – деяка постійна.

Якщо всі корені рівняння (4.22) комплексні, то тоді є попарно спряжені співмножники, які можна записати у вигляді:

$$(\lambda_l - \lambda_\alpha^+)(\lambda_l - \lambda_\alpha^-) = \lambda_l^2 - \lambda_l(\lambda_\alpha^+ + \lambda_\alpha^-) + \lambda_\alpha^+\lambda_\alpha^-.$$

Оскільки

$$\lambda_\alpha^\pm = -\mu_\alpha \pm i\omega_\alpha, \qquad \lambda_l = i\omega_l,$$

то

$$\lambda_\alpha^+ + \lambda_\alpha^- = -2\mu_\alpha,$$

$$\lambda_\alpha^+\lambda_\alpha^- = (-\mu_\alpha + i\omega_\alpha)(-\mu_\alpha - i\omega_\alpha) = \mu_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 = \omega_{0\alpha}^2.$$

Отже

$$(\lambda_l - \lambda_\alpha^+)(\lambda_l - \lambda_\alpha^-) = \omega_{0\alpha}^2 - \omega_l^2 + 2i\omega_l\mu_\alpha.$$

Тоді (4.22) можна записати у вигляді:

$$\Delta(\lambda_l) = a\prod_{\alpha=1}^{s}[(\omega_{0\alpha}^2 - \omega_l^2) + 2i\mu_\alpha\omega_l]. \qquad (4.23)$$

Домножаючи чисельник і знаменник правої частини (4.21) на $\Delta^*(\lambda_l)$ отримаємо, що амплітуди a_k^l обернено пропорціональні добутку $[\Delta(\lambda_l)\Delta^*(\lambda_l)]$ характерних резонансних співмножників. Оскільки ж

$$\Delta(\lambda_l)\Delta^*(\lambda_l) \sim \prod_{\alpha=1}^{s}[(\omega_{0\alpha}^2 - \omega_l^2)^2 + 4\mu_\alpha^2\omega_l^2], \qquad (4.24)$$

то згідно з (4.21) очевидно, що при досить малому затуханні μ_α кожна амплітуда a_k^l буде мати s резонансних піків на s частотах

$$\omega_l \approx \omega_{0\alpha}, \qquad \alpha = 1,2, \dots s.$$

Якщо затухання прямують до нуля, тобто $\mu_\alpha \to 0$, то

$$a_k^l \sim \frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{s}(\omega_{0\alpha}^2 - \omega_l^2)} \qquad (4.25)$$

і при $\omega_l = \omega_{0\alpha}$ піки амплітуди вимушених коливань прямують до безмежності.

§6.5 Вимушені коливання. Метод Крилова-Боголюбова

При вивченні особливостей лінійних коливань системи з одним степенем вільності, на яку накладені голономні стаціонарні зв'язки і діють задані стаціонарні сили, нами здійснювався розклад в ряд кінетичної та потенціальної енергій і дисипативної функції Релея в околі положення стійкої рівноваги з точністю до членів другого порядку малості включно. Це приводило до лінійного рівняння коливань. В багатьох задачах виникає необхідність дослідження коливань з досить великими амплітудами і швидкостями. У таких випадках лінійне наближення є недостатнім і необхідно враховувати наступні доданки розкладів, що призводить до нелінійних рівнянь. Якщо відхилення від положення рівноваги і швидкості точок не дуже великі, то відповідні рівняння будуть описувати малі нелінійні коливання. Характерною особливістю нелінійних коливань є наявність «обертонів», тобто частот, кратних основній частоті.

Якщо в нелінійному рівнянні знехтувати нелінійним додатком, то отримаємо лінійне рівняння, розв'язком якого у випадку $\omega_0 > \mu$ є функція

$$\varphi = a_0 e^{-\mu t}\cos(\omega t + \psi_0),$$

де $\omega^2 = \omega_0^2 - \mu^2$. Якщо не нехтувати нелінійним додатком, а врахувати його малу величину в порівнянні з лінійним додатком, пропорціональним φ, то можна допустити, що розв'язок, який описує нелінійні коливання, є близьким до розв'язку лінійного рівняння, тобто

$$\varphi \approx \mathrm{a}\cos\psi, \tag{5.1}$$

де a, ψ – невідомі амплітуда і фаза нелінійного коливання.

Вважаючи, що величина узагальненої сили у нелінійному наближенні менша величини тієї ж сили в лінійному наближенні отримаємо, що перша похідна фази ψ по часу або частота $\dot{\psi}$ нелінійних коливань буде меншою власної частоти ω_0 його лінійних коливань і буде залежати від амплітуди коливань. У зв'язку з цим допустимо, що для власних нелінійних коливань має місце залежність

$$\dot{\psi} = \omega(a), \tag{5.2}$$

де $\omega(a)$ – невідома функція, вигляд якої визначається видом узагальненої сили.

Допущення про зміну амплітуди нелінійного коливання також пов'язана з допущенням (5.1) про близькість нелінійного та лінійного коливань протягом одного періоду коливань. У лінійному наближенні амплітуда коливань змінюється за законом

$$a = a_0 e^{-\mu t}$$

і задовольняє рівнянню

$$\dot{a} = -\mu a.$$

Тому будемо вважати, що в загальному випадку похідна від амплітуди нелінійних коливань є функцією амплітуди, тобто

$$\dot{a} = f(a). \tag{5.3}$$

За рахунок нелінійності рівняння руху його загальний розв'язок не зводиться до суми часткових розв'язків. Тому принцип суперпозиції не має місця. Це є особливістю нелінійних малих коливань або слабо нелінійних коливань.

Розглянемо рівняння слабо нелінійних власних одновимірних коливань виду

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2\xi = \varepsilon Q(\xi, \dot{\xi}), \tag{5.4}$$

де ε – параметр, який відповідає за малу величину функції $\varepsilon Q(\xi, \dot{\xi})$ у порівнянні з лінійним доданком. Порядок малості доданків у цьому та наступних рівнях визначається так, щоб при $\varepsilon \to 0$ мав місце випадок лінійних гармонічних коливань. Одним із методів пошуку розв'язку цього рівняння є метод Крилова-Боголюбова, суть якого викладений нижче.

Враховуючи (5.1) розв'язок рівняння (5.4) будемо шукати у вигляді ряду

$$\xi = a\cos\psi + \varepsilon\xi_1(a, \psi) + \varepsilon^2\xi_2(a, \psi) + \cdots, \tag{5.5}$$

де $\varepsilon\xi_1, \varepsilon^2\xi_2$ є невідомими функціями амплітуди a і періодичними функціями фази ψ. Амплітуда a і фаза ψ є невідомими функціями часу і підлягають диференціальним рівнянням (5.3) та (5.2). Запишемо їх у вигляді розкладу в ряд

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon f_1(a) + \varepsilon^2 f_2(a) + \cdots, \\ \dot{\psi} &= \omega_0 + \varepsilon\omega_1(a) + \varepsilon^2\omega_2(a) + \cdots \end{aligned} \tag{5.6}$$

Праві частини цих рівнянь можуть бути визначені, оскільки ряд (5.5), в якому a і ψ як функції часу визначаються рівняннями виду (5.6), повинен задовольняти вихідному рівнянню (5.4). Невідомі функції $\varepsilon\xi_1, \varepsilon^2\xi_2, \dots, \varepsilon f_1, \varepsilon^2 f_2, \dots, \varepsilon\omega_1, \varepsilon^2\omega_2, \dots$ визначається певним чином довільно, що можна виключити, якщо вимагати, щоб амплітуда a була повною амплітудою основної гармоніки. Тоді її функції $\varepsilon\xi_1, \varepsilon^2\xi_2, \dots$ не будуть мати доданків, пропорціональних $\cos\psi$ і $\sin\psi$, і будуть задовольняти умовам:

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n\,(a,\psi)\cos\psi\,d\psi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \varepsilon^n \xi_n\,(a,\psi)\sin\psi\,d\psi = 0, \quad (n = 1,2,\dots). \tag{5.7}$$

Загальна схема розв'язування вихідного рівняння (5.4) полягає у знаходженні функцій $\varepsilon f_1, \varepsilon\omega_1, \varepsilon\xi_1 \dots$ за заданою функцією εQ. При цьому амплітуда a і фаза ψ як функції часу будуть визначатися за знайденими функціями $\varepsilon f_1, \varepsilon\omega_1 \dots$ через рівняння (5.6).

Знайдемо розв'язок вихідного рівняння (5.4) у першому наближенні. Для цього одержимо величину $\dot{\xi}$ і $\ddot{\xi}$ як функції a і ψ з точністю до ε включно. Диференціюючи перші два доданки ряду (5.5) по часу, отримаємо

$$\dot{\xi} = \dot{a}\cos\psi - a\sin\psi\,\dot{\psi} + \varepsilon\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial\xi_1}{\partial\psi}\dot{\psi}\right). \tag{5.8}$$

Враховуючи, що a і ψ задовольняють рівняння (5.6), та підставляючи їх в (5.8) з тією ж точністю одержимо

$$\dot{\xi} = -\omega_0 a\sin\psi + \varepsilon\left(f_1\cos\psi - \omega_1 a\sin\psi + \omega_0\frac{\partial\xi_1}{\partial\psi}\right). \tag{5.9}$$

Тепер диференціюючи (5.9) по часу, отримаємо $\ddot{\xi}$:

$$\begin{gathered}\ddot{\xi} = -\omega_0\dot{a}\sin\psi - \omega_0\,a\cos\psi\,\dot{\psi} + \\ +\varepsilon\left(\frac{\partial f_1}{\partial a}\dot{a}\cos\psi - f_1\sin\psi\,\dot{\psi} - \frac{\partial\omega_1}{\partial a}\dot{a}a\sin\psi - \omega_1\dot{a}\sin\psi - \omega_1\,a\cos\psi\,\dot{\psi} + \right. \\ \left. +\omega_0\frac{\partial^2\xi_1}{\partial a\partial\psi}\dot{a} + \omega_0\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2}\dot{\psi}\right).\end{gathered} \tag{5.10}$$

Підставляючи (5.6) в (5.10), знайдемо $\ddot{\xi}$ з точністю до ε включно

$$\ddot{\xi} = -\omega_0^2 a\cos\psi + \varepsilon\left(-2\omega_0 a\omega_1\cos\psi - 2\omega_0 f_1\sin\psi + \omega_0^2\frac{\partial^2\xi_1}{\partial\psi^2}\right). \tag{5.11}$$

Співвідношення (5.11) і (5.5) дають можливість визначити ліву частину вихідного рівняння (5.4) як функцію a і ψ. Для знаходження з точністю до ε правої частини (5.4) як функції a і ψ необхідно розкласти $\varepsilon Q(\xi,\dot{\xi})$ в ряд у точці $(a\cos\psi, -\omega_0 a\sin\psi)$:

$$\varepsilon Q(\xi,\dot{\xi}) = \varepsilon Q(a\cos\psi, -\omega_0 a\sin\psi). \tag{5.12}$$

Підставляючи (5.5), (5.11) і (5.12) у рівняння (5.4) із точністю пропорційною ε одержимо

$$\omega_0^2\left(\varepsilon\xi_1 + \frac{\partial^2\varepsilon\xi_1}{\partial\psi^2}\right) = 2\omega_0 a\varepsilon\,\omega_1\cos\psi + 2\omega_0\varepsilon f_1\sin\psi + \varepsilon Q_0(a,\psi), \tag{5.13}$$

де $\varepsilon Q_0(a,\psi) = \varepsilon Q(a\cos\psi, -\omega_0 a\sin\psi)$.

Співвідношення (5.13) дає можливість визначити невідомі функції $\varepsilon f_1, \varepsilon\omega_1, \varepsilon\xi_1$ за заданою функцією εQ_0. Дійсно, представимо задану функцію εQ_0 і невідому функцію $\varepsilon\xi_1$, вважаючи їх періодичними функціями ψ, у вигляді ряду Фур'є.

$$\varepsilon Q_0(a,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}[\varepsilon\beta_n(a)\cos n\psi + \varepsilon\alpha_n(a)\sin n\psi], \tag{5.14}$$

де $\varepsilon\beta_n(a)$ і $\varepsilon\alpha_n(a)$ – відомі коефіцієнти Фур'є, і

$$\varepsilon\xi_1(a,\psi) = \sum_{n=0}^{\infty}[\varepsilon\nu_n(a)\cos n\psi + \varepsilon\gamma_n(a)\sin n\psi], \tag{5.15}$$

де $\varepsilon\nu_n(a), \varepsilon\gamma_n(a)$ – коефіцієнти Фур'є, які підлягають визначенню, а коефіцієнти $\varepsilon\nu_1$ і $\varepsilon\gamma_1$, згідно (5.7) дорівнюють

$$\varepsilon\nu_1 = \varepsilon\gamma_1 = 0\,. \tag{5.16}$$

Підставляючи (5.14) і (5.15) у (5.13) та прирівнюючи коефіцієнти при однакових гармоніках, знайдемо $\varepsilon f_1, \varepsilon\omega_1$ та коефіцієнти $\varepsilon\nu_n$ і $\varepsilon\gamma_n$:

$$\varepsilon f_1 = -\frac{\varepsilon\alpha_1}{2\omega_0}, \qquad \varepsilon\omega_1 = -\frac{\varepsilon\beta_1}{2\omega_0 a}, \tag{5.17}$$

$$\varepsilon\nu_0 = \frac{\varepsilon\beta_0}{\omega_0^2}, \quad \varepsilon\nu_n = \frac{\varepsilon\beta_n}{(1-n^2)\omega_0^2}, \quad \varepsilon\gamma_n = \frac{\varepsilon\alpha_n}{(1-n^2)\omega_0^2}, \quad (n = 2,3,\dots). \tag{5.18}$$

Використовуючи (5.17) з (5.6) одержимо диференціальне рівняння для амплітуди і фази

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon\alpha_1(a)}{2\omega_0}, \qquad \dot{\psi} = \omega_0 - \frac{\varepsilon\beta_1(a)}{2\omega_0 a}. \tag{5.19}$$

Отже, у першому наближенні похідна амплітуди і частоти по часу визначається коефіцієнтами Фур'є заданої функції $\varepsilon Q_0(a,\psi)$, тобто коефіцієнтами Фур'є правої нелінійної частини вихідного рівняння, взятої з точністю до ε. Похідна амплітуди визначається коефіцієнтом Фур'є при $\sin\psi$, а похідна фази визначається коефіцієнтом Фур'є при $\cos\psi$.

Підстановка (5.18) у (5.15) приводить до визначення функції

$$\varepsilon\xi_1 = \frac{\varepsilon\beta_0(\alpha)}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_0^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}\left[\varepsilon\beta_n(a)\cos n\psi + \varepsilon\alpha_n(a)\sin n\psi\right]. \tag{5.20}$$

Розв'язуючи систему рівнянь (5.19) одержимо амплітуду a і фазу ψ як функції часу і початкових значень a_0, ψ_0. Використовуючи ці функції та співвідношення (5.5) і (5.20) отримаємо розв'язок вихідного рівняння (5.4) у вигляді

$$\xi = a(t)\cos\psi(t) + \varepsilon\xi_1(a(t), \psi(t)). \tag{5.21}$$

Проводячи аналогічні обчислення з точністю до ε^2 можна отримати розв'язок у другому наближенні.

7. РІВНЯННЯ ГАМІЛЬТОНА

§7.1 Канонічні рівняння Гамільтона

Отримані нами раніше рівняння Лагранжа другого роду являють собою систему диференційних рівнянь другого порядку відносно s узагальнених координат як функцій часу. Цим рівнянням можна співставити еквівалентну систему 2s диференційних рівнянь першого порядку, де в якості невідомих взяті 2s функцій часу, з яких s узагальнених координат (q) і s узагальнених імпульсів (p). Такі змінні називають канонічними, а відповідна система рівнянь руху називається канонічними рівняннями Гамільтона.

Той фактор, що узагальнені координати q і узагальнені імпульси p входять в структуру канонічних рівнянь Гамільтона в певному розумінні симетрично, дозволив розвинути ефективні методи розв'язування складних рівнянь руху і, головне, зробити перехід від класичної до квантової механіки.

З попереднього відомо, що рух механічної системи з голономними ідеальними зв'язками у полі узагальнено-потенціальних сил та дисипативних сил визначений, якщо відома функція Лагранжа $L(q,\dot{q},t)$, що входить до рівняння Лагранжа. Далі покажемо, що рух системи також визначається, якщо відома узагальнена енергія системи $H(q,p,t)$.

Відмітимо, що раніше ми евели узагальнену енергію за означенням

$$H = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t).$$

Вона є функцією $(q,\dot{q},t)$. Тепер же уведемо узагальнену енергію як функцію (q,p,t) або *функцію Гамільтона* за правилом

$$H(q,p,t) = \left\{\sum_{i=1}^{s} p_i\dot{q}_i - L\right\}_{\dot{q}\to\dot{q}(q,p,t)}, \tag{1.1}$$

Розглянемо приклад встановлення явного вигляду гамільтоніана системи. Знайдемо H для матеріальної точки масою m, що вільно рухається у потенціальному полі $U(x,y,z)$. Оскільки точка вільна, то в декартовій системі координат її кінетична енергія буде

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

Тоді її лагранжіан $L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = T - U$, тобто

$$L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}) = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - U(x,y,z). \tag{1.2}$$

Тепер розрахуємо узагальнений імпульс за означенням $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot q_i}$:

$$p_x = m\dot x, \qquad p_x = m\dot y, \qquad p_x = m\dot z, \tag{1.3}$$

і запишемо гамільтоніан H згідно (1.1)

$$H(q,p,t) = \left\{ p_x\dot x + p_y\dot y + p_z\dot z - L \right\}_{\dot q \to \dot q(q,p,t)} =$$

$$= \left\{ p_x\dot x + p_y\dot y + p_z\dot z - \frac{m}{2}\left(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2\right) + U(x,y,z) \right\}_{\dot q \to \dot q(q,p,t)}$$

Перейшовши від змінної $\dot q$ до p користуючись (1.3) одержимо

$$H(q,p,t) = \left\{ \frac{p_x^2}{m} + \frac{p_y^2}{m} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x,y,z) \right\} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + U(x,y,z).$$

Отже, в декартовій системі координат гамільтоніан вільної частинки в потенціальному полі має вигляд:

$$H(x,y,z,p_x,p_y,p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + U(x,y,z). \tag{1.4}$$

Виконавши аналогічні викладки отримуються гамільтоніани вільної частинки в потенціальному полі у циліндричній та сферичній системах координат у вигляді:
циліндрична:

$$H(\rho,\varphi,z,p_\rho,p_\varphi,p_z) = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\varphi^2 + p_z^2\right) + U(\rho,\varphi,z),$$

сферична:

$$H(r,\theta,\varphi,p_r,p_\theta,p_\varphi) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right) + U(r,\theta,\varphi).$$

Отримаємо рівняння Гамільтона. Для цього знаючи, що $H(q_1 ... q_s, p_1 ... p_s, t)$, знайдемо повний диференціал від Н:

$$dH = \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{1.5}$$

З іншого боку знайдемо dH із визначення узагальненої енергії, де врахуємо що $L = L(q,\dot q,t)$:

$$dH = \sum_{i=1}^{s} \dot q_i dp_i + \sum_{i=1}^{s} p_i d\dot q_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^{s} \frac{\partial L}{\partial \dot q_i} d\dot q_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{1.6}$$

Оскільки ліві частини (1.5) і (1.6) рівні, то рівні і їх праві частини. Прирівнюючи вирази біля однакових диференціалів у (1.5) та (1.6), отримаємо:

$$\dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{1.7}$$

Тепер використаємо рівняння Лагранжа другого роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^d$$

і запишемо його у виді

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{dp_i}{dt} - Q_i^d$$

або

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot p_i - Q_i^d \tag{1.8}$$

Підставивши (1.8) у друге рівняння (1.7) отримаємо *канонічні рівняння Гамільтона*:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i^d . \qquad i=1,\dots,s. \tag{1.9}$$

Звідси очевидно, що рівняння руху Гамільтона є більш симетричної форми ніж рівняння Лагранжа другого роду. При заданому явному вигляді потенціальної енергії таку систему диференційних рівнянь буває простіше розв’язати, ніж систему рівнянь другого порядку (рівняння Лагранжа другого роду).

Розглянемо питання про те, який вигляд в канонічних змінних мають закони зміни узагальненого імпульсу та функцій Гамільтона.

Як видно з другого рівняння (1.7), частинні похідні від Лагранжіана (L) та гамільтоніана (H) по координатах одночасно рівні нулю. Це значить, що коли якась координата є циклічною відносно L, то вона циклічна і відносно H. Тоді з (1.9) отримується *закон збереження узагальненого імпульсу*:

$$p_i = p_{i0} \quad \text{якщо} \quad \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \quad \text{та} \quad Q_i^d = 0 . \tag{1.10}$$

З останньої рівності (1.7) також видно, що частинні похідні від L і H по t теж одночасно перетворюються в нуль. Тому, користуючись отриманим раніше законом збереження енергії

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} Q_j^d \dot{q}_j$$

та останнім співвідношенням (1.7) одержимо *закон зміни функції Гамільтона*

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s} Q_j^d \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{1.11}$$

з якого слідує *закон збереження функції Гамільтона*:

$$H = H_0 \quad \text{якщо} \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{та} \quad Q_j^d = 0 ,\ j = 1,\dots,s . \tag{1.12}$$

§7.2 Фазовий простір і теорема Ліувілля

Поняття фазового простору, яке ми далі розглянемо, має важливе значення, оскільки воно виходить далеко за рамки теоретичної механіки. Особливо велику роль фазовий простір відіграє в статистичній фізиці.

Введемо поняття *фазового простору* – як простору 2s вимірів, координатними осями якого є узагальнені координати (q_j) та узагальнені імпульси (p_j) механічної системи ($j=1,\dots,s$, s – число степеней вільності системи).

Під станом механічної системи будемо розуміти сукупність всіх узагальнених координат і узагальнених імпульсів в заданий момент часу. Тоді стан системи у деякий момент часу у фазовому просторі зобразиться однією фазовою точкою. З зміною часу фазова точка рухається у фазовому просторі і описує фазову траєкторію.

Якщо задано гамільтоніан системи H, дисипативні сили Q_j^d і початкові значення координат (q_{j0}) та імпульсів (p_{j0}) то за допомогою рівнянь Гамільтона можна визначити швидкості зміни координат і імпульсів в початковий момент часу t_0 :

$$\dot{q}_{j,0} = \left.\frac{\partial H}{\partial p_j}\right|_{q_0, p_0, t_0}, \qquad \dot{p}_{j,0} = -\left.\frac{\partial H}{\partial q_j}\right|_{q_0, p_0, t_0} + \left.Q_j^d\right|_{q_0, p_0, t_0}, \qquad j = 1,\dots,s \tag{2.1}$$

а тоді по рівняннях Гамільтона можна знайти q_j і p_j у довільний момент часу.

Однією з головних переваг фазового простору є те, що через кожну точку цього простору проходить лише одна фазова траєкторія даної механічної системи. Це є наслідком єдиності розв’язку рівнянь Гамільтона. Такої властивості не має простір конфігурації, тобто простір, ортами якого є узагальнені координати q_j.

Тепер згадаємо, що одна і та ж система під дією одних і тих же сил у залежності від початкових умов може здійснювати не єдино можливий, а цілий клас рухів. У зв’язку з цим доцільно розглянути безмежну сукупність однакових механічних систем, які відрізняються між собою лише початковими умовами.

Отже, розглядається безмежна сукупність точних копій реальних механічних систем з однаковими гамільтоніанами і дисипативними силами, але різними початковими умовами. Така віртуальна сукупність систем називається *ансамблем Гіббса*.

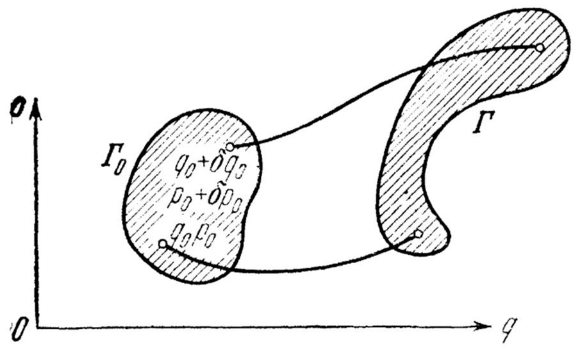
Нехай в момент часу t_0 ансамбль Гіббса заповнює область фазового простору γ_0. Об'єм цієї області визначається інтегралом:

$$\Gamma_0 = \int_{\gamma_0}\cdots\int dq_{10}\ldots dq_{s0}\, dp_{10}\ldots dp_{s0}\,. \tag{2.2}$$

У момент часу $t = t_0 + \Delta t$ ансамбль характеризується $(q_1 \ldots q_s, p_1 \ldots p_s)$ і займає іншу область γ фазового простору об'ємом:

$$\Gamma = \int_{\gamma}\cdots\int dq_1\ldots dq_s\, dp_1\ldots dp_s\,. \tag{2.3}$$

На рисунку приведений приклад переміщення копій системи у двовимірному фазовому просторі з початкового об'єму Γ_0 у кінцевий Γ.



Зрозуміло, що оскільки з часом координати і імпульси системи змінюються, то кожна фазова точка буде зміщуватися в фазовому просторі. Отже, і в кожен момент часу системи-копії, тобто ансамблі, будуть заповнювати собою деякий об'єм тієї чи іншої області фазового простору. Ця область з часом буде змінюватися. Постає питання: чи міняється величина об'єму фазового простору з часом? Щоб відповісти на це питання знайдемо співвідношення між величинами (Γ) і (Γ_0), або закон зміни фазового об'єму ансамблю Гіббса. Для цього скористаємось тим, що змінні $q_1 \ldots q_s, p_1 \ldots p_s$, що характеризують систему в момент часу t є однозначними функціями від початкових змінних $q_{10} \ldots q_{s0}, p_{10} \ldots p_{s0}$. Тоді інтеграл по ($\gamma$) можна перевести в інтеграл по (γ_0) з відповідним якобіаном переходу Д:

$$\Gamma = \int_{\gamma_0}\cdots\int Д\, dq_{10}\ldots dq_{s0}\, dp_{10}\ldots dp_{s0}\,, \tag{2.4}$$

де якобіан переходу

$$Д = \frac{\partial(q_1,\ldots,q_s,p_1,\ldots,p_s)}{\partial(q_{10},\ldots,q_{s0},p_{10},\ldots,p_{s0})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial q_{10}} & \frac{\partial q_1}{\partial q_{20}} \ldots \frac{\partial q_1}{\partial q_{s0}} & \frac{\partial q_1}{\partial p_{10}} \ldots \frac{\partial q_1}{\partial p_{s0}} \\ \frac{\partial q_2}{\partial q_{10}} & \frac{\partial q_2}{\partial q_{20}} \ldots \frac{\partial q_2}{\partial q_{s0}} & \frac{\partial q_2}{\partial p_{10}} \ldots \frac{\partial q_2}{\partial p_{s0}} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial q_s}{\partial q_{10}} & \frac{\partial q_s}{\partial q_{20}} \ldots \frac{\partial q_s}{\partial q_{s0}} & \frac{\partial q_s}{\partial p_{10}} \ldots \frac{\partial q_s}{\partial p_{s0}} \\ \frac{\partial p_1}{\partial q_{10}} & \frac{\partial p_1}{\partial q_{20}} \ldots \frac{\partial p_1}{\partial q_{s0}} & \frac{\partial p_1}{\partial p_{10}} \ldots \frac{\partial p_1}{\partial p_{s0}} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial p_s}{\partial q_{10}} & \frac{\partial p_s}{\partial q_{20}} \ldots \frac{\partial p_s}{\partial q_{s0}} & \frac{\partial p_s}{\partial p_{10}} \ldots \frac{\partial p_s}{\partial p_{s0}} \end{vmatrix}. \tag{2.5}$$

Функції $q_1 \ldots q_s, p_1 \ldots p_s$ є функціями початкових значень $q_{10},\ldots,q_{s0},p_{10},\ldots,p_{s0}$ і часу t і водночас є розв'язками рівнянь руху. Тобто:

$$q_j = q_j(q_{10},\ldots,q_{s0},p_{10},\ldots,p_{s0},t), \qquad p_j = p_j(q_{10},\ldots,q_{s0},p_{10},\ldots,p_{s0},t). \tag{2.6}$$

Співставивши (2.4) з (2.2) бачимо, що вся зміна об'єму, який займає ансамбль Гіббса, полягає в зміні якобіана Д з часом.

Знайдемо швидкість зміни об'єму Г з часом виходячи із (2.4):

$$\dot{\Gamma} = \frac{d\Gamma}{dt} = \int_{\gamma_0}\cdots\int \frac{dД}{dt}\, dq_{10},\ldots,dp_{s0} = \int_{\gamma_0}\cdots\int \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Д}{\Delta t}\, dq_{10},\ldots,dp_{s0}\,, \tag{2.7}$$

де зміна Якобіана $\Delta Д$ визначається $\Delta Д = Д(t_0+\Delta t) - Д(t_0)$.

Якщо в момент t_0 система характеризувалася сукупністю канонічних змінних $q_{10},\ldots,q_{s0},p_{10},\ldots,p_{s0}$, то в близький момент ($t = t_0 + \Delta t$) вона буде характеризуватися, з точністю до величини першого порядку малості, сукупністю змінних:

$$q_j = q_{j0} + \dot{q}_{j0}\Delta t, \qquad p_j = p_{j0} + \dot{p}_{j0}\Delta t\,. \tag{2.8}$$

Знайдемо тепер похідні:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial q_j}{\partial q_{i0}} = \delta_{ji} + \frac{\partial \dot{q}_{j0}}{\partial q_{i0}}\Delta t, && \frac{\partial q_j}{\partial p_{i0}} = \frac{\partial q_{j0}}{\partial p_{i0}} + \frac{\partial \dot{q}_{j0}}{\partial p_{i0}}\Delta t,\\ &\frac{\partial p_j}{\partial q_{i0}} = \frac{\partial p_{j0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{j0}}{\partial q_{i0}}\Delta t, && \frac{\partial p_j}{\partial p_{i0}} = \delta_{ji} + \frac{\partial \dot{p}_{j0}}{\partial p_{i0}}\Delta t. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Отже, якобіан переходу буде:

$Д(t_0) = 1,$

$$Д(t_0+\Delta t) = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial \dot{q}_{10}}{\partial q_{10}}\Delta t & \frac{\partial \dot{q}_{10}}{\partial q_{20}}\Delta t & \ldots & \frac{\partial \dot{q}_{10}}{\partial q_{s0}}\Delta t & \frac{\partial \dot{q}_{10}}{\partial p_{10}}\Delta t & \ldots & \frac{\partial \dot{q}_{10}}{\partial p_{s0}}\Delta t \\ \frac{\partial \dot{q}_{20}}{\partial q_{10}}\Delta t & 1+\frac{\partial \dot{q}_{20}}{\partial q_{20}}\Delta t & \ldots & \frac{\partial \dot{q}_{20}}{\partial q_{s0}}\Delta t & \frac{\partial \dot{q}_{20}}{\partial p_{10}}\Delta t & \ldots & \frac{\partial \dot{q}_{20}}{\partial p_{s0}}\Delta t \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \dot{p}_{s0}}{\partial q_{10}}\Delta t & \frac{\partial \dot{p}_{s0}}{\partial q_{20}}\Delta t & \ldots & \frac{\partial \dot{p}_{s0}}{\partial q_{s0}}\Delta t & \frac{\partial \dot{p}_{s0}}{\partial p_{10}}\Delta t & \ldots & 1+\frac{\partial \dot{p}_{s0}}{\partial p_{s0}}\Delta t \end{vmatrix} = 1 + \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}}\right)\Delta t\,. \tag{2.10}$$

Відмітимо, що в (2.10) члени порядку Δt появляються тільки за рахунок діагональних елементів якобіану.

Тепер знайдемо:

$$\dot{Д} = \frac{dД}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{Д(t_0+\Delta t) - Д(t_0)}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \dot{q}_{i0}}{\partial q_{i0}} + \frac{\partial \dot{p}_{i0}}{\partial p_{i0}}\right). \tag{2.11}$$

Кожна підсистема ансамблю Гіббса підкоряється рівнянням Гамільтона, тому згідно (1.1) одержимо:

$$\dot{Д} = \sum_{i=1}^{s}\left(\left.\frac{\partial^2 H}{\partial q_{i0}\partial p_{i0}}\right|_{q_0,p_0,t_0} - \left.\frac{\partial^2 H}{\partial q_{i0}\partial p_{i0}}\right|_{q_0,p_0,t_0} + \frac{\partial Q_i^d}{\partial p_{i0}}\right) = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial Q_i^d}{\partial p_{i0}}\,.$$

Так як вибір часу t_0 довільний, то отриманий результат можна узагальнити на довільне t:

$$\dot{Д} = \sum_{i=1}^{s}\frac{\partial Q_i^d}{\partial p_i} \tag{2.12}$$

Отже, швидкість зміни фазового об'єму буде:

$$\dot{\Gamma} = \int_{\gamma_0}\cdots\int \frac{\partial Q_i^d}{\partial p_i}\, dq_{10},\ldots,dq_{s0}dp_{10},\ldots,dp_{s0}\,. \tag{2.13}$$

Звідси слідує закон збереження фазового об'єму сформульований у вигляді *теореми Ліувілля*:

Фазовий об'єм ансамблю механічної системи з узагальнено-потенціальними силами і голономними зв'язками за відсутності дисипативних сил зберігається, тобто

$$\Gamma = \Gamma_0 \qquad \text{якщо} \qquad Q_i^d = 0, \qquad i = 1,\ldots, s.$$

§7.3 Дужки Пуассона

З попереднього матеріалу вже відома важлива роль перших інтегралів руху для розв’язання основної задачі динаміки. Тому виникає питання: як пересвідчитися, що деяка функція від узагальнених координат, імпульсів і часу є інтегралом системи? Виявляється, що в гамільтоновому формалізмі є можливість одержати відповідь на це питання через дужки Пуассона.

Отже, знайдемо необхідну і достатню умову того, що деяка функція $f(q,p,t)$ з часом не міняється, тобто є інтергалом руху

$$f(q,p,t)=const. \qquad (3.1)$$

Нехай (3.1) має місце, тоді повна похідна від f по часу повинна дорівнювати нулю

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i\right\}=0 \qquad (3.2)$$

Використавши тепер рівняння руху у формі гамільтона (покладаючи $Q^d=0$)

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial P_i}, \qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (3.3)$$

і ввівши поняття *дужок Пуассона*:

$$[f,H]=\sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right\} \qquad (3.4)$$

перепишемо (3.2) у вигляді:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+[f,H]=0. \qquad (3.5)$$

Це необхідна і достатня умова того, щоб функція $f(q,p,t)$ була першим інтегралом системи.

У загальному випадку дужка Пуассона може бути складена для двох довільних функцій від канонічних змінних:

$$[f_1,f_2]=\sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial q_i}\frac{\partial f_2}{\partial p_i}-\frac{\partial f_1}{\partial p_i}\frac{\partial f_2}{\partial q_i}\right\} \qquad (3.6)$$

Із визначення (3.6) отримуються властивості дужки Пуассона:

1) $[f_1,f_1]=0,$
2) $[f_1,f_2]=-[f_2,f_1],$
3) $[f_1,f_2+f_3]=[f_1,f_2]+[f_1,f_3],$
4) $\frac{\partial}{\partial t}[f_1,f_2]=\left[\frac{\partial f_1}{\partial t},f_2\right]+\left[f_1,\frac{\partial f_2}{\partial t}\right],$
5) $[f_1,f_2 f_3]=[f_1,f_2]f_3+[f_1,f_3]f_2,$
6) $[f_1,[f_2,f_3]]+[f_3,[f_1,f_2]]+[f_2,[f_3,f_1]]=0.$

Остання властивість 6) називається *тотожністю Пуассона*. Вона дозволяє довести *теорему Пуассона*:

Якщо функції $f_1(q,p,t)$ і $f_2(q,p,t)$ є першими інтегралами канонічних рівнянь Гамільтона, то і дужка Пуассона $[f_1,f_2]$ також буде інтегралом цих рівнянь, тобто

$$[f_1,f_2]=const. \qquad (3.8)$$

Теорема Пуассона дає можливість по відомих інтегралах руху шукати нові. Доведемо цю теорему.

Оскільки f_1 і f_2 - інтеграли руху, то для них справедливі рівності

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+[f_1,H]=0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial t}+[f_2,H]=0. \qquad (3.9)$$

Тепер складемо з функцій f_1, f_2 і гамільтоніана H тотожність Пуассона

$$[f_1,[f_2,H]]+[H,[f_1,f_2]]+[f_2,[H,f_1]]=0\,. \tag{3.10}$$

У першій та третій дужках Пуассона врахуємо (3.9):

$$-\left[f_1,\frac{\partial f_2}{\partial t}\right]+[H,[f_1,f_2]]+\left[f_2,\frac{\partial f_1}{\partial t}\right]=0$$

Врахувавши властивість 2) отримаємо:

$$-\left[f_1,\frac{\partial f_2}{\partial t}\right]+[H,[f_1,f_2]]-\left[\frac{\partial f_1}{\partial t},f_2\right]=0$$

звідки використавши 4) одержимо:

$$\frac{\partial}{\partial t}[f_1,f_2]+[[f_1,f_2],H]=0\,. \tag{3.11}$$

З цієї рівності слідує, що згідно умови (3.5) дужка $[f_1, f_2]$ є інтегралом руху системи.

Також важливу роль відіграють, так звані, фундаментальні дужки Пуассона, тобто дужки від канонічних змінних:

$$[q_i,q_j]=0, \qquad [p_i,p_j]=0, \qquad [q_i,p_j]=\delta_{ij} \tag{3.12}$$

Вони мають важливі квантово механічні аналоги – комутаторні співвідношення Гейзенберга.

Одержимо на основі рівняння Пуассона одне з основних рівнянь статистичної механіки.

Розглянемо ансамбль Гіббса механічної системи у фазовому просторі. Ймовірність того, що дана механічна система перебуває в фазовому об'ємі $\delta\Gamma$ визначається відношенням числа систем ансамблю Гіббса δN, що точно перебувають в цьому об'ємі до числа всіх систем ансамблю *N*, що перебувають в усій фазовій області $\Delta\Gamma$. Тоді густина ймовірності Д визначається як відношення ймовірності до величини об'єму $\delta\Gamma$

$$Д=\frac{\delta N}{N\delta\Gamma} \tag{3.13}$$

Ця функція залежить від (2s+1) змінних q, p, t.

Розглянемо деяке число δN систем у моменти часу t_0 і t. Вони будуть займати деякі фазові об'єми $(\delta\Gamma)_{t_0}$ та $(\delta\Gamma)_t$ відповідно. Густина ймовірності знаходження цих систем у фазових об'ємах згідно (3.13) буде визначатись

$$Д_{t_0}=\frac{\delta N}{N(\delta\Gamma)_{t_0}}, \qquad Д_t=\frac{\delta N}{N(\delta\Gamma)_t}\,. \tag{3.14}$$

Так як число систем δN однакове в обидва моменти часу, то з (3.14) маємо:

$$Д_{t_0}(\delta\Gamma)_{t_0}=Д_t(\delta\Gamma)_t$$

Оскільки згідно теореми Ліувілля $(\delta\Gamma)_{t_0}=(\delta\Gamma)_t$ за відсутності дисипативних сил, то одержимо, що

$$Д_{t_0}=Д_t \tag{3.15}$$

тобто густина ймовірності є інтегралом руху канонічних рівнянь.

Це означає, що густина ймовірності задовольняє рівнянню:

$$\frac{dД}{dt}=0 \qquad \text{або} \qquad \frac{dД}{dt}+[Д,H]=0\,. \tag{3.16}$$

Рівняння (3.16) являє собою одне із основних рівнянь в статистичній механіці. Це рівняння по формі аналогічне рівнянню неперервності для нестискуваної рідини.

§7.4 Рівняння Гамільтона-Якобі

Рівняння руху системи у формалізмі Лагранжа і Гамільтона мають вигляд звичайних диференційних рівнянь. Однак, можна записати рівняння руху механічної системи у полі узагальнено-потенціальних сил з голономними зв'язками у формі рівнянь в частинних похідних. Таке рівняння руху називається *рівнянням Гамільтона-Якобі*. Воно іноді дозволяє спростити процедуру розв'язання задачі про рух механічної системи. Рівняння Гамільтона-Якобі має пряму аналогію, яка допускає перехід в область квантової механіки. Основний метод розв'язування рівняння Гамільтона-Якобі - це метод розділення змінних, який має своїм частинним випадком метод циклічних координат.

Суть методу Гамільтона-Якобі полягає в тому, що вводиться деяка функція *S*, яка називається *дією*

$$S = \int_{t_0}^{t} L(q, \dot{q}, t)dt \,. \tag{4.1}$$

Як буде показано далі, іункція дії дозволяє знайти розв'язки канонічних рівнянь Гамільтона. Будемо вважати, що $Q_i^d = 0$.

Отже, необхідно скласти рівняння, якому б задовольняла функція дії і встановити, як з її допомогою, після розв'язування цих рівнянь, отримати розв'язки канонічних рівнянь руху.

Спочатку розглянемо властивості функції дії і вивчимо питання як по відомих розв'язках канонічних рівнянь визначити саму функцію дії.

Отже, припустимо, що відомі розв'язки канонічних рівнянь Гамільтона:

$$q = q(q_0, p_0, t_0, t) \,, \tag{4.2}$$

$$p = p(q_0, p_0, t_0, t) \,. \tag{4.3}$$

Тобто відомо узагальнені координати і імпульси, як деякі функції від початкових узагальнених координат і імпульсів (q_0, p_0), початкового моменту часу t_0, та часу *t*. В (4.2) і (4.3) під *q* та *p* будемо розуміти всю сукупність $q_1,..., q_s$ та $p_1,..., p_s$.

Продиференціювавши рівняння (4.2) по часу, знайдемо швидкість:

$$\dot{q} = \dot{q}(q_0, p_0, t_0, t) \,. \tag{4.4}$$

Підставляючи (4.2) і (4.4) у (4.1) одержимо:

$$S = \int_{t_0}^{t} L\big(q(q_0, p_0, t_0, t), \dot{q}(q_0, p_0, t_0, t), t_0, t\big)dt = S(q_0, p_0, t_0, t) \,. \tag{4.5}$$

Таким чином, отримана дія *S* є функцією початкових координат, імпульсів, початкового моменту часу і самого часу *t*. З іншого боку дію можна виразити через координати *q*, час *t* і початкові координати q_0 та початковий момент часу t_0.

Дійсно, оскільки функції (4.2) однозначні, то з них можна знайти

$$p_0 = p_0(q, t, q_0, t_0) \,. \tag{4.6}$$

Тепер підставляючи (4.6) в (4.5), одержимо:

$$S = S(q_0, t_0, q, t) \,. \tag{4.7}$$

А підставивши (4.6) у (4.3) одержимо:

$$p = p(q, t, q_0, t_0) \,. \tag{4.8}$$

Тепер знайдемо зв'язок *p* та p_0 з дією *S* і покажемо, що дія є потенціалом поля імпульсів. З цією метою знайдемо варіацію дії (4.1) при фіксованих *t* і t_0:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \delta L(q, \dot{q}, t)dt = \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{s} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j \right\} dt \,. \tag{4.9}$$

Оскільки черговість операцій диференціювання і варіювання незалежні, то

$$\delta \dot{q}_j = \delta \frac{dq_j}{dt} = \frac{d}{dt}\delta q_j \,. \tag{4.10}$$

Тепер другий доданок правої частини (4.9) перетворимо так:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\delta q_j \,,$$

і використовуючи рівність

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\delta q_j$$

одержимо

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{d}{dt}\delta q_j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j . \tag{4.11}$$

Підставляючи (4.11) в (4.9) і помінявши операції інтегрування та сумування місцями, одержимо:

$$\begin{aligned} \delta S &= \sum_{j=1}^{s}\int_{t_0}^{t}\left\{\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right)\delta q_j + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right)\right\}dt = \\ &= \sum_{j=1}^{s}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\right)\delta q_j\, dt + \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Bigg|_{t_0}^{t} . \end{aligned} \tag{4.12}$$

Так як вираз у першому доданку (4.12) описує рівняння Лагранжа другого роду за відсутності дисипативних сил, то

$$\delta S = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right)_t - \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\right)_{t_0} . \tag{4.13}$$

Врахувавши визначення узагальненого імпульсу $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$, (4.13) набуває вигляду

$$\delta S = \sum_{j=1}^{s} p_j \delta q_j - \sum_{j=1}^{s} p_{j_0}\delta q_{j_0} \tag{4.14}$$

З іншого боку варіація функції дії може бути розрахована при фіксованих t і t_0 виходячи з її загального представлення (4.7)

$$\delta S = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial S}{\partial q_j}\delta q_j + \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial S}{\partial q_{j_0}}\delta q_{j_0} \tag{4.15}$$

Прирівнюючи (4.14) і (4.15) одержимо зв'язок функції дії з узагальненими імпульсами

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \qquad p_{j_0} = -\frac{\partial S}{\partial q_{j_0}} . \tag{4.16}$$

Співвідношення (4.16) показують, що дія $S(q_0, t_0, q, t)$ як функція початкових і кінцевих положень є потенціалом «поля імпульсів», а самі p_j і p_{j0} являють собою розв'язки канонічних рівнянь Гамільтона.

Таким чином, ми знаємо як знайти функцію дії S по відомих розв'язках канонічних рівнянь. Однак, більш цікавим і потрібним є інший випадок – пошук функції S, якщо розв'язок рівнянь руху невідомий. Очевидно, що це можна здійснити тоді, коли відоме рівняння для функцій S. Отримаємо це рівняння. Для цього скористаємось означенням дії S (4.1). Тоді

$$\frac{dS}{dt} = L(q, \dot{q}, t) \tag{4.17}$$

З другого боку, знайдемо повну похідну від $S(q_0, t_0, q, t)$ по часу t:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial S}{\partial q_j}\dot{q}_j . \tag{4.18}$$

Тепер прирівнявши (4.17) та (4.18) одержимо

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial S}{\partial q_j}\dot{q}_j - L(q, \dot{q}, t) = 0 , \tag{4.19}$$

звідки, врахувавши (4.16) та те, що $H = \sum_{j=1}^{s} p_j \dot{q}_j - L$, отримаємо рівняння для визначення S:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0$$

або

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, q_2, ..., q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) = 0\,. \qquad (4.20)$$

Рівняння (4.20), в гамільтоніані якого замість відповідних узагальнених імпульсів стоять частинні похідні від функції дії, називається *рівнянням Гамільтона-Якобі*.

Для розв'язання задачі про рух механічної системи важливе практичне значення має *теорема Якобі*:

Якщо деяка функція $S(q,t,\alpha)$ *є повним інтегралом рівнянь Гамільтона-Якобі, то розв'язок канонічних рівнянь Гамільтона визначається співвідношеннями:*

$$\begin{aligned} &a)\ p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}, \\ &b)\ \beta_j = \frac{\partial S}{\partial \alpha_j}, \end{aligned} \qquad (4.21)$$

де α *і* β *відомий набір параметрів.*

Співвідношення (4.21а) визначають імпульси $p_j = p_j(q,t,\alpha)$, а співвідношення (4.21б) являють собою другі інтеграли канонічних рівнянь виду $\beta_j = \beta_j(q,t,\alpha)$. Звідси можна знайти координати (q) як функції 2s довільних постійних і часу.

Теорема Якобі дає метод пошуку розв'язків задачі про рух механічної системи з узагальненими потенціальними силами і голономними ідеальними зв'язками. Для цього по відомій функції Гамільтона складається рівняння Гамільтона-Якобі, відшукується повний інтеграл цього рівняння і, використовуючи співвідношення (4.21), знаходяться розв'язки задачі (q, p).

Розглянемо застосування теореми Якобі для знаходження розв'язку задачі про вільній рух точки у потенціальному полі U.

Отже спочатку необхідно записати рівняння Гамільтона-Якобі. Для цього запишемо Гамільтоніан системи.

Декартова система координат:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(x,y,z),$$

$$H = \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\} + U(x,y,z)\,. \qquad (4.22)$$

Циліндрична система координат:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\varphi^2 + p_z^2\right) + U(\rho,\varphi,z),$$

$$H = \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\} + U(\rho,\varphi,z)\,. \qquad (4.23)$$

Сферична система координат:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2\right) + U(\rho,\theta,\varphi),$$

$$H = \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\} + U(\rho,\theta,\varphi)\,. \qquad (4.24)$$

Тепер, згідно з рівнянням Гамільтона-Якобі (4.20), одержимо рівняння для функції *S*.

Декартова система координат:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\} + U(x,y,z) = 0\,. \qquad (4.25)$$

Циліндрична система координат:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}+U(\rho,\varphi,z)=0. \qquad (4.26)$$

Сферична система координат:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+U(r,\theta,\varphi)=0. \qquad (4.27)$$

Очевидно, що розв’язок розглядуваної задачі доцільно шукати у декартовій системі. Вибравши початок відліку енергії так, щоб $U(x,y,z)=0$, отримаємо

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right\}=0. \qquad (4.28)$$

Повний інтеграл цього рівняння буде:

$$S=\alpha_0 t+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z, \qquad (4.29)$$

де число незалежних постійних α рівне числу незалежних змінних.

Підставивши (4.29) в (4.28) одержимо

$$\alpha_0=-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{2m},$$

отже

$$S=-\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{2m}t+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z. \qquad (4.30)$$

Тепер знайдемо узагальнені імпульси згідно (4.21а):

$$p_x=\frac{\partial S}{\partial x}=\alpha_1,\ p_y=\frac{\partial S}{\partial y}=\alpha_2,\ p_z=\frac{\partial S}{\partial z}=\alpha_3. \qquad (4.31)$$

Другі інтеграли знайдемо з умов (4.21б):

$$\beta_1=\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=-\frac{\alpha_1}{m}t+x,\quad \beta_2=\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=-\frac{\alpha_2}{m}t+y,\quad \beta_3=\frac{\partial S}{\partial \alpha_3}=-\frac{\alpha_3}{m}t+z. \qquad (4.32)$$

Перепозначивши постійні:

$$\alpha_1=p_{x0},\qquad \alpha_2=p_{y0},\qquad \alpha_3=p_{z0},$$
$$\beta_1=x_0,\qquad \beta_2=y_0,\qquad \beta_3=z_0,$$

одержимо розв’язок рівнянь у вигляді:

$$\begin{cases} p_x=p_{x0}, & x=x_0+\dfrac{p_{x0}}{m}t,\\ p_y=p_{y0}, & y=y_0+\dfrac{p_{y0}}{m}t,\\ p_z=p_{z0}, & z=z_0+\dfrac{p_{z0}}{m}t. \end{cases} \qquad (4.33)$$

Аналогічно розв’язуються й інші задачі.

Література

1. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. Из. 3-е. - Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1978. - 574 с.
2. Бондаренко А. А., Дубінін О. О., Переяславцев О. М. Теоретична механіка. Ч.1. Статика. Кінематика. Київ : Знання, 2004. - 599 с.
3. Бондаренко А. А., Дубінін О. О., Переяславцев О. М. Теоретична механіка. Ч.2. Динаміка. - Київ : Знання, 2004. - 590 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
5. Ольховский И.И., Павленко Ю.Г., Кузьменков Л.С. Задачи по теоретической механике для физиков. – М.: Из-во Московского университета, 1977. – 389 с.
6. Коткин Г.Л., Сербо В.Г. Сборник задач по классической механике. – М.: Наука, 1977. – 205 с.
7. Павловський М.А. Теоретична механіка. 2-ге вид. К., 2004. – 510 с.
8. Гаральд Іро. Класична механіка. Львів. 1999. – 464 с.
9. Петкевич В.В. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1981. – 496 с.
10. Гольдстейн Г. Классическая механика. – М.: Наука, 1975. – 415 с.
11. Бугаєнко Г.О. Теоретична механіка. К., 1991. – 226 с.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Методичні рекомендації

Укладач ***Сеті Юлія Олександрівна***

Відповідальний за випуск ***Ткач М.В.***