

Зміст

Вступ	8
Частина I. Теоретичні основи математичного моделювання	13
Розділ 1. Основні поняття та положення математично-го моделювання	13
1.1. Поняття моделі. Призначення моделей. Їх класифікація	13
1.1.1. Що таке модель?	13
1.1.2. Мета моделювання	15
1.1.3. Класифікація моделей	17
1.2. Основні вимоги до моделей	26
1.2.1. Властивості моделей	26
1.2.2. Адекватність та ефективність моделей	28
1.2.3. Вимоги до суб'єкта моделювання	29
1.3. Математичні моделі	31
1.3.1. Роль математичних моделей в науці і техніці	31
1.3.2. Поняття математичної моделі	34
1.3.3. Класифікація математичних моделей	36
1.3.4. Вимоги до математичних моделей	47
1.4. Етапи побудови математичних моделей	50
1.4.1. Обстеження об'єкта моделювання	51
1.4.2. Змістовна постановка задачі	52
1.4.3. Концептуальна постановка задачі	53
1.4.4. Математична постановка задачі	54
1.4.5. Вибір і обґрунтування методу розв'язування задач	60
1.4.6. Реалізація математичної моделі у вигляді програм для ЕОМ	62
1.4.7. Аналіз отриманих результатів. Верифікація моделі	66
1.4.8. Практичне використання побудованої моделі	70
1.4.9. Приклад побудови математичної моделі. Модель руху човна	70

1.5. Особливості методів моделювання неживої та живої природи	72
1.6. Ідентифікація моделей	76
1.7. Агрегування математичних моделей	82
1.8. Декомпозиція математичних моделей	85
1.9. Комп'ютерне моделювання. Програмні засоби моделювання	89
1.10. Імітаційні системи та моделі	94
Розділ 2. Принципи математичного моделювання	100
2.1. Простіші моделі. Основні підходи до їх побудови	100
2.1.1. Використання фундаментальних законів природи	100
2.1.2. Використання варіаційних принципів	107
2.1.3. Застосування ієрархічного підходу до створення моделей	109
2.1.4. Застосування аналогій при побудові моделей	112
2.1.5. Задачі для самостійної роботи	115
2.2. Математичні моделі системи “кулька–пружина”	118
2.2.1. Побудова простіших моделей на основі фундаментальних законів	118
2.2.2. Варіаційні принципи	121
2.2.3. Побудова математичної моделі системи “кулька–пружина” на основі принципу Гамільтона	124
2.2.4. Ієрархія математичних моделей системи “кулька–пружина”	126
2.2.5. Метод аналогій між механічними та електричними системами	138
2.3. Застосування теорії подібності для побудови математичних моделей	144
2.3.1. Знаходження критеріїв подібності явищ за наявності математичної моделі	145
2.3.2. Знаходження критеріїв подібності явища за відсутності його математичної моделі	150
2.3.3. Задачі для самостійної роботи	160
2.4. Елементи теорії ідентифікації моделей	164
2.4.1. Основні поняття	164
2.4.2. Параметрична ідентифікація нелінійних систем. Метод найменших квадратів	165
2.4.3. Ідентифікація моделей методом розв'язування обернених задач теорії диференціальних рівнянь	168
2.4.4. Метод передаточних функцій	170
2.4.5. Статистичні методи ідентифікації	173
2.4.6. Задачі для самостійної роботи	184

Розділ 3. Моделювання фізичної реальності	186
3.1. Побудова математичних моделей на основі рівнянь Лагранжа	186
3.1.2. Основні властивості функцій Лагранжа	188
3.1.3. Узагальнення рівняння Лагранжа	191
3.1.4. Приклади застосувань рівнянь Лагранжа	193
3.2. Математична модель теплообміну	200
3.3. Математичні моделі гідродинаміки	205
3.3.1. Основні поняття	205
3.3.2. Основні рівняння гідродинаміки	206
3.3.3. Початкові й граничні умови	215
3.3.4. Приклади застосувань рівнянь гідродинаміки	216
3.4. Математичні моделі електромагнітного поля. Рівняння Максвелла	221
3.5. Задачі для самостійної роботи	225
Розділ 4. Методи дослідження математичних моделей	231
4.1. Загальна характеристика методів	231
4.2. Методи асимптотичного аналізу	234
4.2.1. Основні поняття	234
4.2.2. Приклади асимптотичного аналізу	237
4.3. Асимптотичні методи Пуанкаре	243
4.3.1. Класичний метод Пуанкаре	243
4.3.2. Метод Пуанкаре для знаходження періодичних розв'язків квазілінійних систем	249
4.4. Метод усереднення	253
4.5. Побудова асимптотики для диференціальних рівнянь з ма- лим параметром при похідній	260
4.6. Розв'язки типу біжучої хвилі. Автомодельні розв'язки	265
4.6.1. Розв'язки типу біжучої хвилі	265
4.6.2. Автомодельні розв'язки	266
4.7. Числові методи	268
4.7.1. Роль числових методів у математичному моделюванні	268
4.7.2. Простіші числові методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь	270
4.7.3. Числові методи розв'язування моделей із розподіле- ними параметрами	272
4.8. Задачі для самостійної роботи	276

Частина II. Приклади застосувань математичного моделювання	279
Розділ 5. Простіші моделі руху тіл	279
5.1. Рух тіла під дією сили ваги в середовищі з опором	279
5.2. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту	283
5.3. Математична модель руху планет у Сонячній системі. Задача двох тіл	287
5.4. Математична модель маятника	295
5.5. Задачі для самостійної роботи	301
Розділ 6. Моделі електродинамічних процесів	307
6.1. Математичні моделі коливних електричних контурів	307
6.2. Рух електрона в однорідному електричному та магнітному полях	315
6.3. Задачі для самостійної роботи	319
Розділ 7. Моделі росту чисельності ізольованих популяцій	323
7.1. Модель Мальтуса	323
7.2. Логістичне рівняння	325
7.3. Узагальнення логістичного рівняння	328
7.4. Логістичне рівняння з фактором запізнення. Модель Хатчинсона	329
7.5. Інші моделі динаміки ізольованих популяцій	332
7.5.1. Модель росту Гомпертца	332
7.5.2. Популяції з ефектом Оллі	333
7.6. Задачі для самостійної роботи	337
Розділ 8. Аналіз двовимірних моделей динаміки чисельності популяцій	341
8.1. Класифікація типу взаємодій між популяціями	341
8.2. Система Лотки–Вольтерри "хижак–жертва"	342
8.3. Модель "хижак–жертва" з конкуренцією серед жертв	346
8.4. Модель Колмогорова	349
8.5. Моделі конкуренції	356
8.5.1. Модель Вольтерри для двох конкурентів	356
8.5.2. Узагальнення моделі конкуренції	358
8.6. Стохастична популяційна динаміка	361
8.7. Задачі для самостійної роботи	367
Розділ 9. Дискретні моделі популяцій	376
9.1. Вступ	376
9.2. Загальна модель дискретних популяцій	376
9.3. Дискретна логістична модель	381

9.4. Модель Рікера	386
9.5. Дискретна модель вікової структури. Модель Леслі	388
9.6. Задачі для самостійної роботи	393
Розділ 10. Математичні моделі біохімічних процесів	399
10.1. Математичні моделі хімічної кінетики	399
10.2. Дифузія в рідині	412
10.3. Задачі для самостійної роботи	415
Розділ 11. Математичне моделювання біомедичних процесів	419
11.1. Особливості математичного моделювання біомедичних проблем	419
11.2. Фармакокінетичні моделі	420
11.2.1. Однокамерна лінійна фармакокінетична модель	421
11.2.2. Однокамерна лінійна модель із крапельницею	423
11.3. Математична модель стану кісткової системи	423
11.4. Математичні моделі інфекційних захворювань	424
11.5. Моделі управління епідемічним процесом	428
11.6. Задачі для самостійної роботи	430
Розділ 12. Математичні моделі в економіці	436
12.1. Особливості математичного моделювання економічних систем	436
12.2. Міжгалузеві балансові моделі	437
12.2.1. Формалізація моделі	437
12.2.2. Дослідження моделі Леонт'єва	441
12.2.3. Деякі узагальнення моделі Леонт'єва	447
12.2.4. Двоїста задача міжгалузевого балансу	448
12.3. Моделі економічного росту. Модель Солоу	449
12.4. Моделі ціноутворення	457
12.4.1. Простіша дискретна модель ціноутворення	457
12.4.2. Модель цін із запізненням	459
12.5. Моделювання прибутку підприємства	461
12.6. Задачі для самостійної роботи	464
Розділ 13. Моделі соціальних та глобальних процесів	467
13.1. Математична модель гонки озброєнь між двома країнами	467
13.2. Модель бойових дій регулярних армій	470
13.3. Математичне моделювання глобальних процесів	474
13.3.1. Модель Форрестера "Світова динаміка"	474
13.3.2. Модифікації моделі Форрестера	479
13.4. Задачі для самостійної роботи	482
Додаток. Елементи теорії диференціальних рівнянь у задачах математичного моделювання	484
Список рекомендованої літератури	513

Вступ

У процесі пізнання та практичної діяльності людство широко застосовує різноманітні моделі. Моделювання – це універсальний метод наукового пізнання, що базується на побудові, дослідженні та використанні моделей об'єктів і явищ. Найбільш важливим різновидом моделювання є математичні моделі. В їх основі лежить припущення про те, що всі параметри, величини, початкові дані можна кількісно виміряти й описати математичними співвідношеннями.

Математичне моделювання – потужний інструмент розв'язування технологічних, інженерних і наукових проблем, що ґрунтується на використанні математичних моделей. Сучасні досягнення науки і техніки були б неможливими без побудови ефективних математичних моделей. Розумно керувати складними процесами в наш час теж неможливо без використання адекватних математичних моделей. Зараз епоха відповідальних рішень, які необхідно приймати не інтуїтивно, а на науковій основі з використанням математичних моделей.

Спеціаліст, що має математичну освіту, повинен пізнавати оточуючу реальність за допомогою математичного моделювання. Необхідність такого підходу в науково-технічній діяльності стала зрозумілою вже понад 100 років тому. Людська логіка, яка не використовує математичні символи, часто заплутується у словах і робить неправильні висновки. Виявити ці помилки деколи коштує великих затрат праці.

Поряд із традиційними областями використання математики, до сфери її застосування залучаються все нові й нові дисципліни. Дедалі більше з'являється наукових праць, в яких математики вивчають явища й процеси, які раніше не належали до сфери математичних застосувань, математичні моделі стали фундаментом досліджень.

Застосування методів математичного моделювання, як методології наукової та практичної діяльності, неодноразово доводило

достатньо високу ефективність. Наприклад, коли стала розвиватися швидкісна авіація, то конструктори зіткнулися з серйозною проблемою – явищем флаттера. Воно полягало в тому, що під час експериментальних польотів на деяких критичних режимах виникали різкі вібрації конструкції і літак за лічені хвилини розвалювався на куски. Причиною були резонансні явища, що викликалися взаємодією елементів конструкції літака і вихрових потоків повітря на великих швидкостях. Ця проблема була розв'язана академіком М. В. Келдишем¹, завдяки розробці математичної моделі цього явища.

В останні роки, внаслідок широкого впровадження обчислювальної техніки й відповідного програмного забезпечення, а особливо персональних комп'ютерів, методи математичного моделювання набули нового розвитку і стали широко використовуватися в повсякденній практиці. Особливо прагнення до математичної формалізації виявляється в тих сферах знання, де прямий експеримент, що дозволяє зібрати повну інформацію про об'єкт, практично неможливий. Наприклад, економіко-математичне моделювання є одним із сучасних підходів для аналізу розвитку народного господарства, його галузей, підприємств [38, 46, 58, 75].

Математичне моделювання – це галузь знань, де плідно поєднуються фундаментальні дослідження математики, інформатики із застосуванням в інших науках, тобто для розв'язування задач математичного моделювання необхідна відповідна математична й предметна підготовка, що не під силу одній людині. Тому для застосування методів математичного моделювання створюються цілі колективи, але очолює цей колектив, як правило, математик-прикладник. У зв'язку з цим, актуальним є завдання цілеспрямованої підготовки спеціалістів з математичного моделювання.

Математичні моделі будувалися і раніше, але тільки зараз систематично вивчаються принципи моделювання, тому що в руках спеціалістів з'явилися ЕОМ – потужний засіб розв'язування математичних задач. ЕОМ, як засоби одержання нових знань, збагатили й розширили інструментальний арсенал науки. Без комп'ютерів зараз неможливо уявити прикладної математики.

¹Келдиш М.В. (1911 – 1978) – радянський інженер, математик і механік.

Але впровадження комп'ютерної техніки саме по собі не може відмінити вивчення математичних основ моделювання. В останні десять років математичне моделювання виокремилось в самостійну дисципліну з притаманними їй об'єктами та методами дослідження й стало потужним засобом дослідження складних систем. До таких систем у наш час можна віднести технічні, біологічні, екологічні, соціально-економічні системи, які характеризуються нелінійністю, складністю та багатогранністю зв'язків між елементами системи.

В університетських математичних дисциплінах студентів навчають формалізованим теоріям математики, але недостатньо приділяють увагу набуттю досвіду математичного моделювання – оволодінню методами опису об'єктів та явищ мовою математики з метою подальшого їх вивчення засобами математики та інформатики. В більшості випадків, процес створення математичної моделі, тобто процес переходу від мови природи до мови математики залишається за „кадром”.

Ось чому невід'ємну частину математичної освіти повинно складати вміння будувати адекватні математичні моделі для дослідження реальних явищ. “Математичне моделювання” стало однією з основних дисциплін при підготовці спеціалістів з напрямів “Прикладна математика”, “Інформатика”. Предметом математичного моделювання є побудова й дослідження математичних моделей з метою пізнання реальності.

Математичне моделювання опирається на знання практично всіх розділів математики і вимагає доброї підготовки з математичного аналізу, диференціальних та різницевих рівнянь, алгебри, геометрії, теорії функцій, математичної фізики, теоретичної механіки, теорії управління, теорії стійкості, дискретної математики, обчислювальних методів та ін. Окрім цього, математичне моделювання потребує вміння програмувати на ЕОМ, активно використовувати знання з природничо-наукових дисциплін і поєднувати їх із застосуванням у різних галузях людської діяльності для одержання нових знань.

Мета даного посібника – дати основи теорії математичного моделювання, навчити різних підходів та принципів побудови математичних моделей реальних явищ і процесів, навести приклади

основних математичних моделей з різних сфер знань, показати, що математичні моделі дозволяють пізнавати реальність і сприяють розумінню суті процесу.

Побудова моделей і їх дослідження вимагає не тільки достатніх знань, але і деякого досвіду, мистецтва. І цьому теж треба вчитися. Тому оволодіння методологією математичного моделювання можливе лише при поєднанні вивчення теорії і розв'язування прикладних задач. У зв'язку із цим, для поглибленого засвоєння методів математичного моделювання в кінці кожного розділу наводиться список практичних завдань для самостійного розв'язування. Це буде сприяти кращому розумінню і більш глибокому засвоєнню теоретичних знань, а також розвитку в студентів творчого мислення.

Посібник складається з двох частин. В першій – теоретичній частині – даються основні поняття та положення математичного моделювання, викладаються принципи та методи математичного моделювання, описуються основні методи дослідження математичних моделей і наводяться основні фундаментальні моделі фізичної реальності. В другій – практичній частині – розглядаються математичні моделі з різних галузей наукової діяльності. Вона складається з дев'яти розділів.

Досі взірцем побудови моделей є механіка, тому в розділі 5 наводяться математичні моделі руху, які описуються класичними фундаментальними законами механіки. Тут вивчаються моделі руху під дією сили ваги, математичного маятника, процесів зовнішньої балістики, руху планет та ін. У розділі 6 розглядаються моделі електродинаміки, зокрема, математичні моделі електричних ланцюгів і руху електрона в електричному та магнітному однорідних полях. Розділи 7, 8, 9 присвячені вивченню математичних моделей екологічних систем. Серед них математичні моделі ізолюваних популяцій, модель В. Вольтерри для системи “хижак–жертва”, модель Колмогорова, дискретні моделі динаміки популяцій. У розділі 10 репрезентовані математичні моделі хімічних реакцій та ферментативної кінетики. Математичні моделі біомедичних процесів, зокрема моделі інфекційних захворювань, подані в розділі 11. Розділ 12 присвячений дослідженню деяких проблем економіки за допомогою математичних методів. У розділі 13 наве-

дені моделі деяких соціальних систем, зокрема глобальна модель світової динаміки.

Пропонований посібник базується на матеріалі курсу лекцій з математичного моделювання, що читається автором для студентів спеціальностей “Прикладна математика” та “Інформатика” в Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича, а також на власному досвіді розробки математичних моделей динаміки екологічних систем, що істотно впливає на характер розглядуваних прикладів моделювання.

Автор має надію, що посібник буде корисним не тільки студентам, а й широкому колу спеціалістів з прикладної математики, які спеціалізуються в галузі математичного і комп’ютерного моделювання реальних систем.

Вивчення наведених тут матеріалів варто розглядати як початкові кроки в математичному моделюванні. Водночас викладеного матеріалу достатньо, щоби зрозуміти можливості математичного моделювання в пізнанні й дослідженні реальності. Наведений список літератури дозволить значно поглибити знання з математичного моделювання.

Автор висловлює подяку співробітникам кафедри прикладної математики за допомогу в підготовці матеріалу. Добрих слів заслуговує робота Романенко Н.В. з підготовки комп’ютерного варіанту даного посібника.

Побажання і пропозиції щодо поліпшення структури та змісту навчального посібника надсилайте за адресою *vgm2006@mail.ru*

*Важко позбутися відчуття, що ці
математичні формули живуть незалежним
життям і володіють власним інтелектом,
що вони мудріші за нас, мудріші навіть за того,
хто їх відкрив, і що ми беремо з них більше,
аніж в них було закладено на початку.
Генріх Герц*

Частина I. Теоретичні основи математичного моделювання

Розділ 1. Основні поняття та положення математичного моделювання

1.1. Поняття моделі. Призначення моделей. Їх класифікація

1.1.1. Що таке модель?

Термін „модель” (від латинського *modulus* – міра, взірець, норма) широко використовується в науці та в повсякденному спілкуванні. Протягом усього життя людина постійно має справу з моделями, обдумуючи свої вчинки, подумки прокручуючи наслідки того чи іншого рішення. Так, з процесом моделювання ми зустрічаємося вже в дитинстві, коли з кубиків створюємо різні конструкції.

В оточуючому світі геометричних об'єктів не існує – точки, лінії, геометричні фігури є абстрактними поняттями, хоча їх виникнення пов'язане з описом і вивченням властивостей реальних тіл.

Сьогодні з поняттям моделі пов'язано широке коло об'єктів – від диференціальних рівнянь до зразків одягу, взуття. Під терміном „модель” у широкому значенні розуміють або образ об'єкта (в тому числі й умовний), або навпаки прообраз об'єкта. Поняття моделі як образа можна продемонструвати на прикладі глобуса (як модель земної кулі), фотографії, картини (як модель тих реальних об'єктів, які на них зображені). Для розуміння моделі, як прообразу, можна навести демонстровану модель автомобіля на

виставці, який згодом піде в серійне виробництво. Художник наживає моделлю людину, з якої пише картину.

Отже, в загальному випадку поняття „модель” використовується в протилежних значеннях, що не дає можливості чітко визначити поняття „модель” (існує багато різних визначень моделі). Це завдання не спроститься, якщо розглядати термін „модель” у науці: наприклад, існує теорія релейно-контактних схем, в якій термін „модель” використовується в протилежних значеннях. Опис релейно-контактної схеми у вигляді функцій алгебри логіки називається *теоретичною моделлю релейно-контактної схеми*, а саму релейно-контактну схему називають *експериментальною моделлю* функцій алгебри логіки. У математиці існує наука теорії моделей, в якій під моделлю розуміють деяку множину із заданим на ній набором властивостей і відношень.

У природничих науках моделями називають деякі допоміжні об'єкти дослідження, що застосовуються для аналізу вихідних реальних об'єктів-оригіналів. Тобто *модель* – це такий матеріальний або ідеальний об'єкт, який замінює об'єкт-оригінал з метою його дослідження, зберігаючи деякі важливі для даного дослідження властивості оригіналу. Модель забезпечує вивчення властивостей оригіналу, які цікавлять дослідника. Будь-які моделі – це лише відображення реального світу і вони можуть лише наближено описувати реальність.

Отже, під моделлю розуміють такий створений специфічний об'єкт матеріального або абстрактного характеру, що знаходиться у певній відповідності (схожості, подібності) до об'єкта-оригінала і відображає частину властивостей, характеристик, зв'язків об'єкта-оригінала, які є істотними для поставленої задачі. Цей об'єкт (модель) створюється з метою одержання або (та) збереження інформації про об'єкт-оригінал. Процес побудови, дослідження та використання моделі для вивчення об'єктів називається моделюванням [1].

Моделювання – одна з основних категорій пізнання. На ідеї моделювання базується будь-який метод пізнання. Моделювання – це дослідження явищ, об'єктів шляхом заміни їх більш зручною для дослідження системою, тобто побудови та дослідження моделей. Методи моделювання мають наділяти модель здатністю

відображати основні риси реального об'єкта, тобто встановлювати взаємооднозначну відповідність між моделлю і оригіналом.

Моделювання як засіб відображення дійсності зародилося ще в античну епоху і зараз важко назвати галузь науки, де б воно не використовувалося (в сучасній науці моделювання відіграє значну роль).

Упродовж розвитку науки по-різному оцінювали процес пізнання за допомогою моделювання. Був час, коли деякі філософи вважали неможливим моделювання природних процесів, оскільки, на їхню думку, природні та штучні процеси підпорядковуються різним закономірностям. Вони вважали, що відобразити природу можна тільки за допомогою логіки, міркувань. А ось через кілька століть девізом англійського королівського наукового товариства став лозунг „Нічого словами”, тобто визнавалися тільки висновки, які були підкріплені експериментальними або математичними дослідженнями. В англійській мові досі до поняття „наука” не належать знання, які ми називаємо гуманітарними науками (вони віднесені до категорії мистецтв), хоча гуманітарні науки теж використовують методи моделювання, наприклад моделювання історичних процесів.

Був час, коли поняття „модель” стосувалося тільки матеріальних об'єктів, наприклад моделі корабля. У ХХ ст. поняття моделі стає більш загальним, воно охоплює як реальні матеріальні, так й ідеальні моделі.

1.1.2. Мета моделювання

Процедура моделювання застосовувалася людством здавна, але роль і значення його постійно зростає в наш час і привертає увагу широкого кола спеціалістів. Підвищений інтерес до моделювання зумовлений тією роллю, яку моделі відіграють у пізнанні. Моделювання є найбільш ефективним методом наукових досліджень та практичної діяльності людини.

Найважливішим і найбільш розповсюдженим призначенням моделей є їх застосування для вивчення й дослідження складних систем та процесів і полягає в тому, щоб виявити найсуттєвіші фактори, які формують ті чи інші властивості реального об'єкта,

його структуру, оскільки сама модель відображає лише деякі основні характеристики вихідного об'єкта.

Моделі, які описують форму об'єкта моделювання, його структуру, складові частини, зв'язки між ними, називають *структурними*, а моделі, які відображають процеси, що відбуваються в об'єкті та описують механізм функціонування об'єкта моделювання, – *функціональними*.

Метою моделювання є опис поведінки системи, побудова теорій та перевірка різних припущень і гіпотез для з'ясування принципів функціонування системи, використання моделей для передбачення майбутнього системи.

Варто зазначити, що деякі об'єкти і явища взагалі не можуть бути вивчені безпосередніми натурними експериментами. Неприпустимі, наприклад, експерименти з економікою країни, з екологічними системами, з технологічними процесами, шкідливими для людини, фізичними процесами на інших планетах тощо.

Багато експериментів нездійсненні через свою дороговизну або ризик для людини. Як правило, в наш час дослідження на моделях передують проведенню складних експериментів. Більше того, експерименти на моделях із застосуванням ЕОМ дозволяють розробити план натурних експериментів, з'ясувати терміни проведення спостережень та моменти проведення вимірювань, оцінити вартість експерименту, дослідити гіпотетичні об'єкти або реальні об'єкти в гіпотетичних умовах. Моделювання дає виграш у часі, скорочуючи в багато разів терміни проведення натурних експериментів. Натурні експерименти, що тривають місяцями, на ЕОМ проводяться за кілька хвилин.

Не менш важливе призначенням моделей є те, що за їх допомогою вчаться правильно керувати об'єктом шляхом апробації різних варіантів управління на моделі цього об'єкта (використовувати для цього реальний об'єкт часто буває недоцільно, важко або нереально, а саме коли існує ризик привести об'єкт до небажаного стану). Наприклад, навчитися керувати сучасним літаком безпечніше, швидше і дешевше на тренажері (моделі).

Якщо властивості об'єкта з часом змінюються, то особливо значення набуває завдання прогнозування стану цього об'єкта під дією різних факторів. Наприклад, при проектуванні та екс-

платуації складної технічної системи важливо вміти прогнозувати надійність функціонування як усїєї системи, так і окремих її підсистем.

Моделювання дозволяє варіювати параметрами системи й середовища в досить широких межах, дає економію засобів при проектуванні систем, усуває зайві витрати людських і матеріальних ресурсів. Отже, ми можемо зробити висновок, що модель необхідна для того, щоб:

- зрозуміти, яка будова конкретного об'єкта, яка його структура, якими є основні властивості, принципи його функціонування та взаємодії з навколишнім світом;

- навчитися керувати об'єктом або процесом, пізнавати найкращі способи управління за заданими цілями та критеріями;

- прогнозувати прямі й непрямі наслідки реалізації різних способів і форм управління об'єктами та системами.

1.1.3. Класифікація моделей

Класифікацію методів моделювання й моделей можна здійснювати за різними ознаками: за сферою застосування, за характером об'єктів, за формою подання інформації, за засобами моделювання. Будь-яка така класифікація умовна, оскільки вона відображає тільки деяку сторону процесу моделювання. Оскільки нас цікавить роль математичних моделей у дослідженні систем, то дамо класифікацію моделей за засобами моделювання [1] (рис. 1.1).

За засобами моделювання методи моделювання поділяються на дві великі групи: методи ідеального (мисленого, теоретичного) моделювання та методи матеріального моделювання.

Ідеальне моделювання первинне щодо матеріального (спочатку у свідомості людини формується ідеальна модель, а потім на її основі будується матеріальна модель). Знайомство з видами моделювання почнемо з матеріального, оскільки воно більш наочне і простіше для розуміння. Моделі в цьому випадку або будуються дослідниками, або відбираються з навколишнього світу.

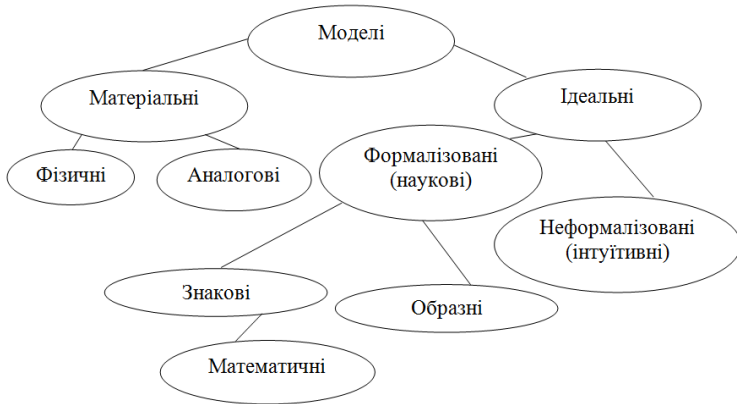


Рис. 1.1. Класифікація моделей за засобами моделювання

Матеріальне моделювання

Моделювання називається матеріальним тоді, коли дослідження об'єкта здійснюються на матеріальних аналогах, зв'язок яких з оригінальними об'єктами має матеріальний характер.

Основними різновидами матеріального моделювання є натурне (фізичне) й аналогове моделювання. При цьому всі види матеріального моделювання базуються на властивостях геометричної або фізичної подібності, тобто деяка матеріальна конструкція може замінити об'єкт-оригінал тільки тоді, коли між оригіналом і моделлю буде встановлено відношення подібності.

Дві геометричні фігури подібні, якщо відношення всіх відповідних довжин однакові, а відповідні кути рівні. Прикладами геометрично подібних фігур є макети в архітектурі, моделі кораблів тощо. Якщо відомий коефіцієнт пропорційності – масштаб, то простим множенням на коефіцієнт пропорційності можна розрахувати розміри іншої фігури, яка геометрично подібна до даної. Масштабні коефіцієнти, які характеризують пропорційність відношення відповідних параметрів, називаються *коефіцієнтами подібності*.

Відношення пропорційності довжин можна сформулювати інакше. Якщо ввести систему прямокутних координат, то при геометричній подібності всі координати одного об'єкта пропорційні

відповідним координатам другого об'єкта:

$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{y_A}{y_B} = \frac{z_A}{z_B},$$

де (x_A, y_A, z_A) , (x_B, y_B, z_B) – координати відповідних точок об'єктів A і B .

Подальшим розвитком і узагальненням геометричної подібності є поняття афінної подібності. При афінній подібності для відповідних точок об'єктів (x_A, y_A, z_A) , (x_B, y_B, z_B) справедливі співвідношення

$$\frac{x_A}{x_B} = m_x, \quad \frac{y_A}{y_B} = m_y, \quad \frac{z_A}{z_B} = m_z,$$

тобто маємо нерівність масштабів по окремих координатах – це означає деформацію геометричних фігур (наприклад, коло перетворюється на еліпс).

Фізичне моделювання використовує подібність між реальним об'єктом і відповідною фізичною моделлю. Поняття подібності фізичних процесів є розвитком афінної подібності.

Нехай фізичний процес A характеризується певною залежністю $F(P_1, P_2, \dots, P_n) = 0$ між сукупністю параметрів P_1, P_2, \dots, P_n , що характеризують процес. Розглянемо цю функціональну залежність в узагальненому координатному просторі x_1, x_2, \dots, x_n , де параметри P_1, P_2, \dots, P_n вимірюються в цих координатах.

Нехай у цій системі відбувається ще один фізичний процес, який описується функціональною залежністю $f(R_1, R_2, \dots, R_n) = 0$, де R_1, R_2, \dots, R_n – його параметри.

Якщо при цьому всі відповідні параметри пропорційні, тобто

$$\frac{P_1}{R_1} = m_1, \quad \frac{P_2}{R_2} = m_2, \dots, \quad \frac{P_n}{R_n} = m_n,$$

то процеси A і B подібні.

Але не всі масштабні коефіцієнти m_1, m_2, \dots, m_n подібних фізичних процесів можуть набувати незалежних значень. Тому для ідентифікації подібності процесів вводять критерії подібності, які є функціями (комбінаціями) параметрів процесу.

Масштабні коефіцієнти m_1, m_2, \dots, m_n в узагальненому випадку можуть бути чисельно різними для певних груп подібних процесів. А критерії подібності набувають однакових значень для усіх подібних процесів у відповідних точках узагальненого координатного простору x_1, x_2, \dots, x_n .

Пропорційність параметрів є окремим випадком подібності фізичних процесів. У загальному випадку під подібністю розуміють таку взаємооднозначну відповідність між процесами, за якої відомі правила переходу параметрів, що характеризують один з процесів, до відповідних параметрів, що характеризують інший процес.

Отже, два явища фізично подібні, якщо за знайденими кількісними характеристиками одного явища можна знайти характеристики іншого явища шляхом їх множення на деякі сталі, що називаються константами подібності. Згідно з теорією подібності, два явища фізично подібні, якщо вони якісно однакові та характеризуються однаковими значеннями деяких безрозмірних параметрів, що складені з фізичних величин. Наприклад, протікання в'язкої рідини в двох трубах подібне, якщо для них однакове значення безрозмірного параметра, що називається числом Рейнольдса Re , яке характеризує відношення сил інерції до сил в'язкості. Умова рівності чисел Re є критерієм подібності для протікання в'язких рідин.

Фізичне моделювання виникло більше століття тому саме з натурних моделей кораблів. У середині XIX ст. моделювання стало розвиватися як наукова дисципліна, а самі моделі використовувалися при проектуванні нових технічних систем. Середина XIX ст. пов'язана з переходом від парусних човнів до парових кораблів. Для парусних човнів у результаті багаторічного досвіду методом проб і помилок були вироблені оптимальні параметри форми корпусу та парусів.

З'ясувалося, що використання парових машин вимагає принципової зміни конструкції кораблів. Одна з основних задач – це задача зниження опору руху корабля. Прямий експеримент розв'язування цієї задачі неможливий, зважаючи на те, що будівництво крейсера тривало кілька років, а його вартість була значною. Не піддавалась ця задача і теоретичному розв'язуванню, хо-

ча на той час була розвинута гідромеханічна теорія. Подібні задачі з необхідною точністю розв'язуються тільки зараз на сучасних потужних обчислювальних комплексах на основі складних числових методів та математичних моделей.

Тому кораблебудівникам необхідно було знайти більш швидкий і дешевший, порівняно з традиційним методом проб, спосіб пошуку оптимальних параметрів корабля. Вихід був знайдений у моделюванні. Протягуючи в басейнах невеликі моделі майбутніх кораблів і вимірюючи необхідні параметри, знайшли раціональні параметри форми корпусу корабля й потужності парової машини. Профіль корпусу корабля, що впливає на характеристики швидкості руху корабля, значно легше підібрати за допомогою моделі.

При цьому фізична модель створюється за строгими законами теорії подібності. Теорія подібності дозволила виконати перенесення результатів випробувань малих за розміром геометрично подібних моделей на реальні кораблі.

Таке експериментальне дослідження гідродинамічних характеристик кораблів за допомогою масштабних моделей стало першим в історії прикладом наукової методології моделювання і стимулювало розвиток теорії подібності для її застосування до цілого ряду явищ іншої фізичної природи.

У наш час методи натурного (фізичного) моделювання знаходять широке застосування для вивчення динаміки фізичних процесів, проектування технічних систем, дослідження причин великих аварій, катастроф тощо. Наприклад, при створенні нового літака зменшену фізичну модель літака поміщають в аеродинамічну трубу, всередині якої створюється потік повітря з такою швидкістю, з якою повинна летіти модель. Спеціальні пристрої фіксують навантаження на окремі елементи конструкції. Проведені дослідження з моделями в аеродинамічній трубі дозволяють вивчити особливості обтікання фюзеляжу повітряними потоками, знайти за допомогою датчиків величини напружень, які виникають в різних місцях конструкції, відтворити раціональну форму корпусу літака та окремих вузлів. Дослідження моделей літальних апаратів в аеродинамічній трубі на основі теорії подібності дає змогу створювати самі літальні апарати.

Отже, фізичне моделювання – це таке моделювання, при якому реальному об'єкту ставиться у відповідність його збільшений або зменшений матеріальний аналог однієї й тієї ж самої природи, що передбачає дослідження (як правило, в лабораторних умовах) за допомогою подальшого перенесення властивостей процесів і явищ з моделі на реальний об'єкт на основі теорії подібності.

В останній чверті XIX ст. виникло аналогове моделювання. Аналоговими є моделі, в яких властивості реального об'єкта передаються іншою властивістю об'єкта, що має іншу фізичну природу. Аналогове моделювання можливе внаслідок однаковості деяких закономірностей для величин різної природи.

У процесі математизації природничих наук стало очевидним, що цілий ряд явищ різної природи описуються однаковими (аналогічними) за формою математичними моделями. Такі моделі, які задовольняють одному й тому ж математичному співвідношенню (наприклад, диференціальному рівнянню) незалежно від фізичної природи системи об'єктів вважаються *аналоговими*. Числові значення коефіцієнтів диференціальних рівнянь, крайові умови, праві частини в кожному конкретному випадку свої, жорстко пов'язані з властивостями реальної системи, але динамічні властивості таких систем аналогічні.

Як приклад аналогових моделей можна навести електричні та механічні коливання, які з точки зору математики описуються однаковими математичними співвідношеннями, але належать до якісно різних фізичних процесів. Тому вивчати механічні коливання можна за допомогою електричної схеми і навпаки. Весь ранній період формування наукових уявлень про електромагнітні явища базувався на механічних аналогіях, потім це експериментально перевірялось і набувало форми законів (наприклад, закон Біо-Савара-Лапласа).

До числа цікавих прикладів можна віднести відому в теорії пружності аналогію Прандтля. Прандтлем було доведено, що рівняння для напружень у задачі про кручення стержня довільного поперечного перерізу ідентичні рівнянням, що описують прогин нерозтягнутої мембрани, що натягнута на пружний контур тієї ж форми під дією рівномірного навантаження. Це дозволяє заміни-

ти непрості експерименти визначення напружень у скручуваному стержні простими вимірами прогинів мембрани.

Гідродинамічні та теплові процеси можна вивчати, досліджуючи параметри електричного поля, оскільки, по-перше, обидва явища описуються диференціальним рівнянням Лапласа² в частинних похідних і, по-друге, експериментальні дослідження електричного поля значно простіші від досліджень у гідродинаміці.

Багато явищ у природі мають одні й ті ж математичні моделі, тому на основі досвіду математичного моделювання, банку обчислювальних алгоритмів і програм, можна швидко та ефективно розв'язувати нові задачі моделювання.

Отже, аналогове моделювання – це моделювання, що базується на аналогії процесів і явищ, які мають різну фізичну природу, але описуються однаковими за формою математичними співвідношеннями, логічними структурними схемами.

Ідеальне (абстрактне) моделювання

У ХІХ ст. одночасно з матеріальним моделюванням інтенсивно розвивалося й ідеальне моделювання. Ідеальне моделювання базується не на матеріальній аналогії між моделлю і об'єктом, а на ідеальній, мислимій, і завжди має творчий характер.

Ідеальні моделі є абстрактними конструкціями, які побудовані засобами мислення свідомості, тобто моделі побудовані засобами мови. При ідеальному моделюванні використовуються символи, слова, терміни, поняття. Прикладами таких моделей можуть служити літературні описи природи. Такі описи володіють усіма властивостями моделей – вони спрощують дійсність, але передають подібні людські відчуття, переживання. Наше знання про якесь явище можна розглядати як ідеальну модель цього явища.

При цьому для більш точного опису моделей створюються спеціалізовані мови. Зауважимо, що в поняття модель не входять усі побудовані абстракції, поки вони не будуть інтерпретовані до матеріальних, або інформаційних об'єктів реальності.

Методи ідеального моделювання можна умовно розбити на два основних типи: неформалізоване (інтуїтивне) та формалізоване (наукове) [1].

²Лаплас П'єр Симон (1749 – 1827) – французький математик, фізик і астроном.

Наукове моделювання – це завжди логічно обґрунтоване моделювання, яке використовує деякі припущення про об’єкт, що прийняті як гіпотези, на основі спостережень за об’єктом моделювання та здогадок про причинно-наслідкові зв’язки.

При формалізованому моделюванні моделями служать системи знаків і образів, разом з якими визначаються і правила їх інтерпретації. Якщо як моделі використовуються системи знаків, то таке моделювання називається знаковим – це можуть бути рисунки, графіки, креслення, ієрогліфи, набори символів.

Важливим видом знакового моделювання є математичне моделювання. При використанні математичного моделювання модель записується у вигляді сукупностей математичних співвідношень, перетворення яких здійснюється на основі правил математики. Математична модель – це наближений опис класу явищ за допомогою математичної символіки.

Іншою формою формалізованого моделювання є образне моделювання, в якому моделі будуються з деяких образів, наприклад, зіткнення молекул розглядається як зіткнення двох пружних кульок – відбувається мислений експеримент. З появою суперЕОМ з продуктивністю в мільярд і більше операцій за секунду і графічних станцій з’явилася можливість достатньо ефективного маніпулювання образами.

Розглядаючи наукове моделювання, необхідно зрозуміти зміст таких термінів, як „модель” і „теорія”.

Модель – це інструмент, за допомогою якого можна досліджувати поведінку та властивості конкретного об’єкта.

Теорія – більш абстрактне, ніж модель, поняття. Основною метою теорії є пояснення поведінки або властивостей не конкретного об’єкта, а деякої групи об’єктів. Теорія містить систему конкретних моделей і законів цілих класів явищ і процесів. Прикладами теорій можна назвати теорію твердого тіла, квантову теорію, теорію відносності, теорію коливань, теорію стійкості тощо.

При створенні конкретної моделі використовуються знання, закони, рівняння з відповідної теорії, а при створенні моделей складних процесів часто доводиться використовувати кілька теорій, які можуть належати й до різних галузей знань.

Інтуїтивне (неформалізоване) моделювання – це моделювання, що ґрунтується на інтуїтивному уявленні про об'єкт дослідження і не піддається формалізації.

Як найбільш яскраво виражений приклад інтуїтивної моделі навколишнього світу можна вважати життєвий досвід людини, її вміння і знання. Довільне емпіричне знання (отримане з експерименту або зі спостереження) без пояснення причин і механізмів спостережуваного явища теж інтуїтивне.

Варто підкреслити важливу роль інтуїції, інтуїтивних моделей у науці. Нове знання не може бути одержано тільки методами формальної логіки. Народження принципово нових наукових ідей не може бути зведено до процесів формально-логічного виведення висновків із множини вже відкритих фактів, гіпотез, теорій.

З цього приводу висловлювався Пуанкаре³: „Чиста логіка привела б нас тільки до тавтології; вона не могла би створити нічого нового; сама по собі вона не може дати початок жодній науці... Для того, щоб створити арифметику, як і для того, щоб створити геометрію або якусь іншу науку, потрібно дещо інше, ніж чиста логіка. Для позначення цього у нас немає іншого слова, крім слова „інтуїція”.

Навіть у самій абстрактній галузі фундаментальної науки – математиці – інтуїція відіграє важливу роль: „Ви повинні здогадатися про теорему, перш ніж ви її доведете ...; доведення відкривається ... теж за допомогою здогадки”. Математику рухають вперед в основному ті, хто володіє даром інтуїції, а не строгих доведень.

Ще й зараз прийняття рішень в економічних системах здійснюється на основі деяких уявлень на інтуїції (якщо не застосовувалося математичне моделювання). Але такий підхід до прийняття рішень може привести до помилок, не всі здогадки, ідеї витримують перевірку експериментами й методами формальної логіки. Водночас інтуїтивне й наукове моделювання не можна в жодному випадку протиставляти одне одному, вони добре доповнюють одне одного. Тому зараз проводяться роботи по створенню людино-машинних систем, в яких творчий потенціал неформаль-

³Пуанкаре Анрі (1854 – 1912) – французький математик, фізик, астроном і філософ.

ного мислення, досвід людини поєднується з точними розрахунками на ЕОМ на основі математичних моделей.

У цих діалогових людино-машинних системах людина приймає рішення, а обчислювальна система забезпечує необхідну інформацію, зіставляє варіанти, відшукує оптимуми та взагалі виконує всі формальні операції й процедури. Такі людино-машинні системи називають *імітаційними, або евристично-алгоритмічними*. При імітаційному моделюванні математична модель являє собою алгоритм функціонування об'єкта, що реалізований у вигляді програмного комплексу для ЕОМ, тобто на комп'ютері відбувається імітація реального процесу. Імітаційні системи виявилися найбільш ефективним засобом розв'язування великих системних задач (з недостатньою інформацією про об'єкт). Ці задачі складні, оскільки містять тисячі змінних, а з іншого боку, характеризуються невизначеністю, слабким вивченням внутрішніх механізмів (так звані слабоструктуровані задачі).

1.2. Основні вимоги до моделей

1.2.1. Властивості моделей

1. *Модель являє собою 4-елементну конструкцію:*

- об'єкт оригінал;
- суб'єкт, який досліджує реальний об'єкт;
- задача, яку розв'язує суб'єкт;
- мова опису або спосіб матеріального відтворення моделі.

Основну роль тут відіграє задача, яка визначає характер моделі. Поза контекстом задачі або класу задач поняття моделі не має змісту.

2. *Кожному реальному об'єкту відповідає множина в рівній мірі адекватних, але різних за змістом моделей, пов'язаних із різними задачами.* Наприклад, для генератора можна розглядати задачі розрахунку електричних характеристик, дослідження теплових характеристик, або оцінки надійності його роботи.

3. *Пара задача-об'єкт теж має множину моделей.* На одній і тій же інформації будуються різні за формою моделі, наприклад, одному й тому ж явищу можуть бути співставлені таблиця даних, графік, аналітична формула, аналогова модель тощо.

4. Довільний об'єкт дослідження складний і характеризується нескінченною кількістю параметрів та зв'язків. При побудові моделей дослідник завжди виходить з поставленої задачі для свого дослідження і враховує найсуттєвіші для цієї задачі фактори. Тому будь-яка модель не тотожна об'єкту-оригіналу і неповна, оскільки вона не враховує багато факторів. Відкинуті фактори, незважаючи на свою малість, у сукупності можуть призвести до значних відмінностей між об'єктом і моделлю.

Модель, за визначенням, є лише подібністю до об'єкта оригіналу, в інформаційному плані модель бідніша – тому не може існувати поняття точної моделі. Модель – не дійсність, вона лише відображає дійсність. Ми можемо підвищувати точність моделі, наприклад, збільшуючи кількість і складність рівнянь, але все одно не досягнемо абсолютної точності.

5. Як властивість моделі можна розглядати потенційність моделі (від. лат. *potential* - сила). Модель – це засіб для отримання нових знань про об'єкт дослідження. Ця властивість фігурує в визначенні моделі М. М. Моїсеєва⁴ [65]: „Під моделлю ми будемо розуміти спрощене, якщо хочете, упаковане знання, яке дає досить визначену інформацію про предмет (явище). Модель можна розглядати як спеціальну форму кодування інформації. На відміну від звичайного кодування, коли відома вся вихідна інформація, а ми лише переводимо її на іншу мову, – модель... кодує і ту інформацію, якої люди ще не знали. Можна сказати, що модель містить у собі потенційне знання, яке людина може ... використовувати у своїх практичних життєвих потребах”.

Отже, будь-яка модель являє собою інформаційне утворення. Модель є джерелом інформації про об'єкт. Відомо чимало випадків, коли створення і використання моделей дозволили зробити нові відкриття. Як приклад можна навести відкриття планети Нептун на основі розрахунків, виконаних із використанням закону всесвітнього тяжіння (моделі) і даних про рух планети Уран.

У наш час на основі результатів теоретичного моделювання відкриті „чорні діри” в астрофізиці, кварки у фізиці елементарних частинок, які ще прямо не підтверджені експериментально, та ін.

⁴Моїсеєв М.М. (1917 – 2000) – радянський вчений в області механіки і прикладної математики.

1.2.2. Адекватність та ефективність моделей

Описання (лінгвістичне чи математичне) якого-небудь процесу можливе тільки до певного рівня деталізації, тому будь-яке дослідження реального об'єкта зводиться до побудови моделі цього об'єкта. Модель повинна правильно, з необхідною повнотою й достовірністю відображати вихідний об'єкт, – від цього залежить успіх модельного дослідження. Питання про відповідність моделі об'єкта-оригіналу належить до числа важливих у сфері модельної методології. Жодна, навіть найбільш довершена модель (в тому числі і математична) не може бути тотожною реальності. Природа значно багатша, ніж будь-які моделі. Модель, за допомогою якої вдається вивчити властивості реального об'єкта, називається *адекватною об'єкту*. Адекватність означає, що вимоги точності, правильності, істинності моделі виконані лише тією мірою, яка необхідна для розв'язання даної задачі. В деяких випадках навіть удається ввести міру адекватності, тобто вказати спосіб, який визначає, яка з двох моделей більш наближена до об'єкта. Найбільш природним шляхом установаження адекватності моделей є їх практична експлуатація, тобто верифікацію моделей реальних процесів або явищ можна здійснити лише шляхом порівняння результатів, які дає модель із реальними даними, а ступінь збігу цих результатів і визначає точність моделі. Адекватні моделі є, як правило, значним науковим досягненням.

Процес моделювання здійснюється в умовах діалектичної взаємодії двох протилежних сторін. З одного боку, потрібно більш повно й точно відтворювати в моделі властивості й характеристики об'єкта, тому слід враховувати максимум факторів, щоб не опустити суттєве. Наслідком такого підходу є зростання складності моделі – збільшується кількість змінних, кількість зв'язків, обсяг вихідних даних. Велика кількість змінних зменшує ступінь розуміння явища.

З іншого боку, модель повинна бути зручною для дослідження, тобто ефективною (економічною). Практика показує, що ефективність моделі знаходиться в оберненій залежності від її складності. Кожну додаткову змінну, кожен додатковий параметр у математичному описі об'єкта потрібно оплачувати високою ціною, то-

му деколи доводиться огрубляти модель, навіть якщо доведеться знехтувати деякою точністю. Найкраща якість моделей досягається як розумний компроміс між близькістю моделі до оригіналу (адекватністю) та простотою, що забезпечує зручність її використання (ефективністю).

Надмірна точність моделей на практиці не менш шкідлива, ніж її неповнота. Оптимальне співвідношення точності й простоти моделі визначається багатьма факторами, серед яких домінує зміст задачі.

Математичним способом визначити співвідношення повноти та простоти не вдається через неможливість формалізувати ці фактори, тут важливу роль відіграють неформальні методи. Вибір кількості параметрів моделі є неформальним актом і ґрунтується на досвіді й інтуїції дослідника.

У випадку математичного моделювання визначальним фактором ефективності моделі є обраний математичний апарат. Прикладна математика надає досліднику широкий вибір математичних конструкцій, що можуть бути використані при побудові та дослідженні моделей. Але якість результатів залежить від того, наскільки вдало здійснено цей вибір.

З практики відомо, що час, який витрачається на розв'язування задачі, може коливатися в десятки разів у залежності від обраної моделі, від професійного рівня її постановки, від алгоритмів розв'язування, тому ефективність моделі залежить від суто суб'єктивного моменту, і чим складніший об'єкт, тим сильніша ця залежність.

1.2.3. Вимоги до суб'єкта моделювання

У кожному конкретному випадку якість математичної моделі залежить від дослідника – необхідно зрозуміти фізичну суть явища та створити адекватний математичний опис. Різні дослідники, описуючи один і той самий процес з однією й тією ж метою, можуть прийти до різних математичних моделей. Побудова моделей – процедура неформальна і сильно залежить від досвіду та таланту дослідника.

Суб'єкту моделювання необхідно, з одного боку, досконало

уявляти задачу, глибоко вивчити об'єкт моделювання. Процеси, що протікають в об'єкті моделювання, потрібно не тільки добре знати, але й відчувати. З іншого боку, досліднику, який будує модель, необхідно активно володіти величезним апаратом прикладної математики, використовувати ЕОМ і алгоритми, писати програми для ЕОМ. Ще одна група вимог пов'язана з неформальними елементами моделювання: творчістю, винахідливістю, професійною інтуїцією.

Процес побудови моделі вимагає використання великого обсягу формалізованих наукових знань, методів, фундаментальної фізико-математичної підготовки та неформалізованих підходів.

Сумістити всі ці вимоги в одній особі майже неможливо, тому при розв'язуванні комплексних задач великої складності суб'єкт моделювання являє собою групу спеціалістів різного профілю. Цій групі, що створює модель, обов'язково потрібний математик, який виконує опис моделі на мові, зрозумілій ЕОМ, і забезпечує користувачам зручну форму отриманих результатів.

Процес побудови моделей не можна повністю формалізувати, на етапі побудови моделей визначальну роль відіграють неформальні евристичні здібності людського інтелекту.

Як зазначає Шеннон⁵, „Мистецтвом моделювання можуть оволодіти ті, хто володіє оригінальним мисленням, винахідливістю і глибокими знаннями систем фізичних явищ, які потрібно моделювати.

Не існує чітких правил, як потрібно формулювати задачу на самому початку моделювання. Не існує магічних формул для розв'язування таких питань, як вибір параметрів, співвідношень, що описують поведінку системи, а також критеріїв оцінки ефективності моделі.” [105].

Необхідно мати велику інтуїцію, щоб змогти визначити, що є важливим у даному дослідженні, але при дослідженні складних явищ інтуїції замало, необхідні методики, системи знань, які б дозволили використовувати досвід, і певні принципи для побудови математичних моделей.

⁵Шеннон Клод (1916 – 2001) – американський інженер і математик.

1.3. Математичні моделі

1.3.1. Роль математичних моделей у науці і техніці

Історія розвитку науки ясно показує, що кожний суттєвий новий крок в дослідженні природи пов'язаний з розвитком нових математичних теорій. Математичне моделювання – це технологія дослідження реальних процесів і явищ на їх математичних моделях. Роль математичного моделювання як методу пізнання реальності різко зросла останнім часом у зв'язку з ускладненням об'єктів дослідження.

Сутність цієї методології полягає в заміні об'єкта, що досліджується, його образом (деяким еквівалентом) – математичною моделлю – і подальшим вивченням моделі як методами математичного аналізу (аналітично), так і за допомогою обчислювально-логічних алгоритмів, які реалізуються на електронних обчислювальних машинах. Робота не з самим об'єктом (явищем, процесом), а з його моделлю дає можливість ґрунтовно, відносно швидко і без суттєвих витрат, вивчати його властивості й поведінку в будь-яких мислимих ситуаціях.

Математичне моделювання – найвища форма моделювання, воно є найбільш універсальним, найбільш застосовним, найефективнішим, економічним і потужним засобом пізнання процесів та явищ, тому що цей шлях моделювання опирається на могутні методи математики та можливості ЕОМ. Практична реалізація можливостей математичного моделювання й обчислювального експерименту істотно підвищує ефективність науково-технічних розробок, особливо при створенні принципово нових машин, пристроїв, матеріалів, технологій, що дозволяє скоротити затрати часу та матеріальних ресурсів. Математичне моделювання разом із застосуванням ЕОМ призвело до бурхливого розвитку сучасного інформаційного суспільства.

Принципово важливо те, що математичне моделювання дозволило об'єднати формальне й неформальне мислення, тобто здатність ЕОМ у багато разів швидше, точніше і краще від людини здійснювати формальні операції з властивостями людського інтелекту (інтуїції, догадки тощо).

Математичне моделювання зародилося і розвинулося у фізиці і

найбільш довершеними результатами математичного моделювання є моделі фізичної реальності, тому, стикаючись із проблемою створення математичних моделей у нетрадиційних галузях природознавства, необхідно використовувати той досвід математичного моделювання, який накопичений класичним природознавством, тобто уже існує в таких науках, як фізика, механіка, астрономія. В цьому досвіді є щось об'єктивне, що не залежить від конкретної ситуації.

Як приклад математичної моделі можна навести класичну механіку Ньютона⁶, яка описує рух і досліджує основні закони матеріального об'єкта. Відтоді, як Ньютон запропонував використовувати математичні знання для вивчення оточуючого світу, була створена величезна кількість різноманітних математичних моделей.

Неможливо уявити собі сучасну науку без широкого використання математичного моделювання. Фактично всі сучасні розділи фізики присвячені побудові й дослідженню математичних моделей фізичних об'єктів і явищ. Так, фізики-ядерники до проведення експериментів виконують серйозні дослідження із застосуванням математичних моделей. Далі за результатами теоретичного дослідження планується проведення експериментів, коли вже відомо, де і коли можна очікувати якихось ефектів і що потрібно реєструвати. Такий підхід дозволяє підвищити ефективність експерименту.

Застосування математичного моделювання в техніці дозволяє на порядок зменшити матеріальні затрати, що зв'язані з проектуванням, виготовленням та експлуатацією технічних об'єктів.

Математичне моделювання дає можливість вивчати як надто швидкі, так і повільні процеси, які несумірні з можливостям нашого сприйняття, наприклад, атомні та термоядерні реакції. За допомогою моделювання можна вивчати об'єкти, які ще або вже не існують. Зокрема, методами математичного моделювання була відновлена картина процесів при падінні Тунгуського метеорита, і на основі результатів моделювання було пояснено наслідки падіння космічного тіла.

⁶Ньютон Ісаак (1642 – 1727) – англійський фізик, математик, механік і астроном.

У випадку, коли прямий натурний експеримент практично неможливий, наприклад, при вивченні явищ мікро- і макросвіту, методи математичного моделювання єдино можливі. Неможливо, наприклад, побудувати якісь механічні аналоги тих явищ, які відбуваються у квантовій і релятивістській фізиці, тому на перший план тут висувається математичне моделювання.

Математичне моделювання наслідків ядерної війни довело, що в результаті заповнення атмосфери можливе значне глобальне похолодання („ядерна зима”) і, як наслідок, вимирання всього живого.

Крім традиційних галузей використання математики, до сфери її застосувань залучаються все нові й нові дисципліни, в тому числі й соціальні. Технічні, екологічні, економічні та інші системи, які вивчаються сучасною наукою, більше не піддаються дослідженню (з потрібною повнотою й точністю) звичайними теоретичними методами. Натурні експерименти теж не завжди можуть бути здійснені. Тому, як правило, значних успіхів у біології, хімії, екології останнім часом досягнуто з розробкою і дослідженням математичних моделей біологічних, хімічних, екологічних систем. Математика підняла на новий рівень ці науки. З'явилася можливість на науковій основі підходити до багатьох екологічних, соціальних, медичних проблем, зокрема, імплантації і заміни людських органів, прогнозування епідемій, розробки планів ліквідації великих катастроф. Особливо велику роль відіграє математичне моделювання при розв'язуванні задач керування, на його основі відбувається аналіз і синтез систем керування.

Останнім часом інтенсивно розвивається математичне моделювання в задачах нанотехнологій. При розв'язуванні таких задач виникають системи з мільйона та більше рівнянь, що описують рух молекул і атомів.

Математичне моделювання – це ідеальне знакове формальне моделювання, при якому опис об'єкта здійснюється на мові математики, а дослідження моделі проводиться з використанням математичних методів та ЕОМ.

1.3.2. Поняття математичної моделі

Основним поняттям математичного моделювання є поняття математичної моделі. Поняття математичної моделі, як і ряд інших понять, що використовуються в математичному моделюванні, не мають строгого формального визначення. В це поняття вкладають конкретний зміст, з яким пов'язаний наближений опис якогонебудь явища чи процесу оточуючого світу за допомогою математичної символіки.

Л. Карно свого часу зазначав, що символи – це не тільки запис думки, засіб її відображення й закріплення, вони діють на саму думку і до деякої міри спрямовують її, і буває достатньо перетворити їх на папері, згідно з відомими простими правилами, для того, щоб безпомилково досягнути нових істин.

Математична модель – це абстракція реальності, в якій відношення між елементами реальності, що цікавлять дослідника, замінені відповідними відношеннями між математичними категоріями. Ці відношення, як правило, подаються у формі рівнянь, нерівностей між змінними, що характеризують функціонування реальної системи. Математичні моделі дозволяють проникнути в суть досліджуваного явища, а також здійснювати його прогнозування та управління.

В достатньо загальному випадку, об'єкт моделювання можна охарактеризувати векторами зовнішніх, внутрішніх і вихідних параметрів. Довільна математична модель дозволяє за заданими вхідними даними визначити значення вихідних параметрів об'єкта чи явища. Тому можна припустити, що суть будь-якої математичної моделі – це відображення множини Ω_x значень вхідних параметрів X і внутрішніх параметрів $G \in \Omega_g$ на множину значень Ω_y вихідних параметрів Y . Отже, математичну модель можна розглядати як деякий зв'язок між причиною і наслідком. Сформулюємо визначення математичної моделі.

Під математичною моделлю будемо розуміти деяке операторне співвідношення $Y = A(X, G)$, яке дозволяє за відповідними значеннями вхідних параметрів X і внутрішніх параметрів G встановити вихідні значення параметрів Y об'єкта моделювання, тобто оператор моделі A відображає множини X, G в Y ,

$X \in \Omega_x, G \in \Omega_g, Y \in \Omega_y$, де $\Omega_x, \Omega_g, \Omega_y$ – множини допустимих значень вхідних внутрішніх та вихідних параметрів модельованого об'єкта [1].

Наприклад, співвідношення $U = IR$, що встановлює зв'язок між падінням напруги U на резисторі, його опором R і протікаючим струмом I , є математичною моделлю резистора (закон Ома). Тут опір R є внутрішнім параметром, тоді, якщо задано I , то I – вхідний параметр, а U – вихідний параметр.

Залежно від природи модельованого об'єкта множинами $\Omega_x, \Omega_g, \Omega_y$ можуть бути довільні математичні об'єкти (числа, вектори, тензори, функції, множини тощо). Поняття оператора A у визначенні трактується широко. Це може бути як деяка функція, що зв'язує вхідні й вихідні дані, так і системи алгебраїчних, диференціальних, інтегро-диференціальних або інтегральних рівнянь. Це може бути алгоритм, сукупність правил, таблиць тощо. Інколи інформація про внутрішні параметри відсутня або внутрішня будова надто складна, тоді математична модель такого об'єкта має вигляд $Y=AX$. Побудова математичної моделі конкретного явища – це найбільш істотний і складний етап наукового дослідження, що являє собою типову обернену задачу: за деякими непрямими проявами явища необхідно вгадати тип операторного рівняння. І цей аспект цілком неформальний – тут надто багато залежить від інтуїції та досвіду дослідника.

Математичні моделі дозволяють звести дослідження реального об'єкта до розв'язування математичної задачі, відкриваючи можливості використання математичного аналізу та сили ЕОМ. Роль ЕОМ настільки велика, що термін “математичне моделювання” тепер розуміють більш широко і він належить до важливої галузі прикладної математики, що містить у собі як розробку, дослідження математичних моделей, так і створення обчислювальних алгоритмів та програм для розв'язування задач. Моделювання на ЕОМ значно дешевше за інші види моделювання і дозволяє одержувати результати з більшою точністю.

Етапи розвитку багатьох природничо-наукових напрямків – це побудова послідовності чимраз точніших і повніших моделей. Використання математичного моделювання можна хронологічно розбити на три етапи його розвитку.

Елементи математичного моделювання використовувались із самого початку виникнення точних наук. Основу сучасного моделювання заклав Ньютон, застосовуючи методи математики до розв'язування задач природознавства. Друге народження цієї методології припало на кінець 40-х – початок 50-х рр. XX ст. і було зумовлено появою ЕОМ, необхідністю вивчення ядерних реакцій та моделювання космічних польотів. Математичне моделювання справилося з цією задачею: ядерні вибухи та польоти ракет і супутників були спочатку здійснені у надрах ЕОМ за допомогою математичних моделей, і лише потім – на практиці.

Зараз математичне моделювання вступає у третій принципово важливий етап свого розвитку – воно вбудовується у структури інформаційного суспільства. Історія методології математичного моделювання переконує: вона може й має бути інтелектуальним ядром інформаційних технологій, усього процесу інформатизації суспільства. Без володіння інформаційними ресурсами не можна навіть уявити розв'язання масштабних проблем, які стоять перед світовою спільнотою. Однак інформація як така мало що дає для аналізу і прогнозу, для прийняття рішень і контролю за їх виконанням. Потрібні надійні способи переробки інформаційної сировини на готовий продукт, тобто на точне знання.

1.3.3. Класифікація математичних моделей

Стрімкий розвиток методів математичного моделювання і багатогранність галузей їх використання призвели до появи великої кількості моделей різного типу. Тому виникає необхідність у класифікації математичних моделей. Класифікацію математичних моделей можна здійснювати в залежності від [1]:

- характеру відображуваних властивостей об'єкта;
- способу побудови моделі;
- складності об'єкта моделювання;
- оператора моделі;
- вхідних та вихідних параметрів;
- мети моделювання;
- способу дослідження моделі.

Класифікація в залежності від характеру відображуваних властивостей об'єкта. В залежності від характеру відображуваних властивостей об'єкта розрізняють структурні та функціональні моделі. *Структурні* моделі відображають структуру елементів об'єкта. Вони можуть мати форму матриць, графів, списків і виражати взаємне розміщення елементів у просторі. *Функціональні* моделі відображають процеси функціонування об'єкта. Вони частіше за все є рівняннями.

Класифікація в залежності від способу побудови моделі. За способом побудови функціональні математичні моделі поділяються на *теоретичні* і *емпіричні*. Перші створюються на основі різноманітних принципів моделювання в результаті вивчення властивостей об'єкта. При їх побудові застосовуються фундаментальні закони природи, наприклад, закони збереження маси, енергії, імпульсу руху та ін. Теоретичні моделі більш універсальні, вони справедливі для широких діапазонів зміни параметрів.

Емпіричні моделі є результатом обробки в алгоритмічній або аналітичній формі вхідних та вихідних даних експерименту. Тобто побудова емпіричної математичної моделі зводиться до розв'язування задач ідентифікації. На основі статистичного аналізу експериментальних даних або спостережень можна будувати регресійні моделі. Цей метод базується на теорії математичної статистики і широко використовується в економіці, соціології, психології та інших областях.

Поєднання теоретичних міркувань якісного характеру з обробкою результатів спостереження приводить до змішаного типу математичних моделей, що називаються *напівемпіричними*. При побудові таких моделей використовують теорію розмірностей, зокрема π -теорему, яка стверджує, що залежність між розмірними фізичними величинами можна звести до залежності між меншою кількістю безрозмірних величин – критеріїв подібності й на основі експериментів відновити цю залежність.

Класифікація в залежності від складності об'єкта моделювання. Об'єктом моделювання може виступати як деяке матеріальне тіло так і природний технічний процес або явище. Тому всі об'єкти моделювання можна розподілити на дві групи: *прості* та *об'єкти-системи*.

Для простого об'єкта при моделюванні не розглядається внутрішня будова об'єкта, не виділяються його складові елементи, наприклад, простим об'єктом є матеріальна точка у класичній механіці.

Для складних систем характерна наявність великої кількості взаємодіючих між собою елементів і водночас з оточуючим середовищем вони взаємодіють як єдине ціле. При цьому зв'язок елемента A з B може відрізнятись від зв'язку елемента B з A . Якщо система має N елементів, то кількість зв'язків між елементами дорівнює $N(N - 1)$. Якщо всі N елементів мають по M станів, то загальна кількість станів для такої системи дорівнює M^N . Ця обставина свідчить, з одного боку, про складність системи й багатоваріантність її поведінки, з іншого боку, – про наявність значних труднощів при вивченні й моделюванні такої системи. Моделі об'єктів-систем, які враховують властивості та поведінку окремих елементів, а також зв'язки між ними, називаються структурними. *Структурні динамічні моделі* виділяють в окремий клас – імітаційні моделі, при цьому системи складаються зі скінченної кількості елементів зі скінченною кількістю станів та скінченною кількістю зв'язків. Моделювання взаємодій елементів системи здійснюється за допомогою алгоритму, що реалізується на ЕОМ.

Класифікація в залежності від оператора моделі. Математичні моделі можуть бути як *алгоритмічними*, так і *аналітичними*, тобто оператор A може бути алгоритмом або записуватися у вигляді деяких функціональних співвідношень і логічних умов. Якщо зв'язки між параметрами об'єкта можна виразити в аналітичній формі, то маємо аналітичні математичні моделі.

При алгоритмічному підході сам об'єкт розбивається на деякі елементи. У цьому випадку система математичних співвідношень для об'єкта-системи в цілому не записується, а замінюється деяким алгоритмом, який моделює поведінку системи через взаємодію моделей окремих елементів системи. Алгоритм, на основі вхідних даних, дозволяє відтворити реальні явища в системі й узнати поведінку складної системи в конкретній ситуації.

Застосування алгоритмічних моделей можливе лише при наявності ЕОМ, а їх використання аналогічне проведенню експери-

ментів із реальним об'єктом, тільки замість експерименту з реальним об'єктом проводять обчислювальний експеримент із алгоритмічною моделлю. Задавши конкретний набір значень вхідних параметрів моделі, в результаті обчислювального експерименту одержують конкретний набір наближених значень вихідних параметрів. Для дослідження поведінки об'єкта при новому наборі вихідних даних необхідно провести новий обчислювальний експеримент.

Безперечною перевагою алгоритмічних моделей є відсутність принципів обмежень на складність моделей, що дозволяє використовувати їх для дослідження систем довільної складності.

Більше того, для проведення обчислювальних експериментів з математичною моделлю, на її основі розробляють алгоритм, який реалізується у вигляді програми, тобто в процесі математичного моделювання аналітичну модель перетворюють в алгоритмічну.

Оператор A може бути *лінійним* або *нелінійним*. Лінійні моделі більш прості для дослідження. В лінійних моделях параметри об'єкта зв'язані лінійними співвідношеннями. Із властивості лінійності випливає властивість суперпозиції (від лат. *superposition* – накладання) розв'язків, тобто для двох різних входів x_1 та x_2 має місце співвідношення $A(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1Ax_1 + c_2Ax_2$. Маючи частинні розв'язки, можна, як правило, побудувати загальний розв'язок рівняння. Лінійні рівняння реально описують процеси, що протікають однаково при різних зовнішніх збуреннях. При збільшенні інтенсивності таких збурень, зміни в системі пропорційно зростають, але нових якостей не виникає. Область застосування лінійних моделей досить широка. Вона охоплює класичну і квантову механіку, електродинаміку, аналітичну хімію та біологію. Але лінійна поведінка системи властива відносно простим об'єктам.

Реальним системам, як правило, притаманна нелінійна багатогранна поведінка. Це зв'язано з нелінійною поведінкою характеристик явища, з великою кількістю різних факторів, що впливають на системи, зі зміною характеру взаємодії в самому об'єкті при зміні його стану тощо. Серед цих факторів знайдуться такі, для яких не буде виконуватись принцип суперпозиції, тобто результат дії кількох факторів у нелінійному процесі нерівнозначний сумі

результатів, які викликаються цими факторами, що діють окремо. В результаті цього в нелінійній системі виникає кілька стійких стаціонарних станів, а весь простір розбивається на області притягання. Між стаціонарними станами можливі переходи або під впливом зовнішньої дії, коли змінюється положення системи в просторі станів і вона опиняється в області притягання іншого стаціонарного стану, або при зміні параметрів системи, коли змінюються характеристики самих стаціонарних станів.

Загальний розв'язок нелінійних рівнянь можна знайти лише в окремих випадках, а окремі частинні розв'язки не можуть повністю відображати характер поведінки об'єкта. Малі зміни параметрів можуть призвести до неочікувано великих змін розв'язків нелінійних рівнянь і буде мати місце якісно інша поведінка системи. Аналіз таких моделей набагато складніший порівняно з лінійними системами. Світ нелінійних моделей для сучасної науки більш перспективний у плані відкриття нових закономірностей і опису поведінки складних явищ. Методи дослідження нелінійних моделей у наш час швидко розвиваються. Оскільки нелінійні задачі вдається розв'язати аналітично лише в окремих випадках, то для їх дослідження використовуються числові методи.

Зауважимо, що при певних умовах, наприклад при розгляді процесів у деякому малому околі вибраних точок, нелінійні системи можуть моделюватися лінійними співвідношеннями через лінеаризацію системи в околі цих точок. Але потрібно враховувати той факт, що лінеаризація може призвести до суттєвого спотворення реальних властивостей об'єкта.

В залежності від вигляду оператора математичні моделі можна розподілити на *прості* та *складні* (рис. 1.2). Прості моделі частіше є результатом узагальнення й аналізу експериментальних даних. На основі аналізу таких даних формулюється гіпотеза про можливий функціональний зв'язок вхідних і вихідних параметрів. Після цього дана гіпотеза перевіряється на експериментальному матеріалі, уточнюється ступінь адекватності. Якщо результати перевірки незадовільні, то прийнята гіпотеза відкидається й замінюється новою. Як приклади простих моделей можна навести деякі закони фізики (закон Ньютона, закон Ома, закон Гука).

Модель, яка містить системи звичайних диференціальних

(СЗДР), інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь (ІДР), диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП) уже не є простою. Для свого дослідження вони вимагають застосування достатньо складних методів. Такі моделі можна поділити на моделі з зосередженими параметрами (різницеві рівняння, звичайні диференціальні рівняння) та з розподіленими параметрами (рівняння з частинними похідними, інтегральні рівняння, рівняння з запізненням). Іноді складна модель може бути зведена до простої, наприклад, якщо:

- система математичних рівнянь може бути аналітично розв’язана,
- результати обчислювальних експериментів зі складною моделлю апроксимовані деякою алгебраїчною залежністю, наприклад, методом найменших квадратів.

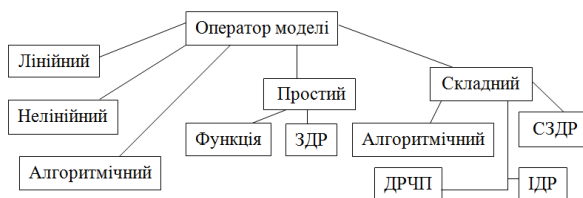


Рис. 1.2. Класифікація в залежності від оператора моделі

Класифікація в залежності від параметрів. Прийняття необхідних факторів і відкидання другорядних факторів – відповідальний момент при побудові будь-якої моделі.

Усі фактори моделі повинні бути описані (в якісному або кількісному відношенні), тоді вони набувають статусу змінних моделі. Параметри моделі, які описують стан і поведінку об’єкта моделювання, поділяються на ряд множин, що не перетинаються (рис. 1.3):

- сукупність вхідних (керованих) параметрів Ω_x ;
- сукупність параметрів зовнішнього середовища Ω (некерованих). Некеровані параметри змінюють свої значення довільно, а отже, спонтанно змінюється стан об’єкта;
- сукупність внутрішніх (власних) параметрів об’єкта Ω_I ;
- сукупність вихідних характеристик Ω_y .

Кількість параметрів усіх типів у математичних моделях скінченна. При цьому кожний із параметрів може мати різну математичну природу (бути постійною величиною або функцією, бути скаляром чи вектором). Незалежними змінними часто є координати точок тривимірного простору та час.

Вхідні параметри X , параметри зовнішнього середовища E , внутрішні характеристики G об'єкта належать до незалежних (екзогенних) величин. Вихідні параметри Y є залежними (ендогенними) величинами.

У цілому оператор моделі A перетворює екзогенні параметри в ендогенні $A : \{X, E, G\} \rightarrow Y$. В залежності від типу множин параметрів моделі класифікуються і самі моделі. Така класифікація дається в нижче наведеній таблиці 1.1.

Таблиця 1.1. Класифікація моделей у залежності від параметрів

Статичні моделі	Динамічні моделі
Дискретні моделі	Неперервні моделі
Стаціонарні моделі	Нестаціонарні моделі
Детерміновані моделі	Стохастичні моделі

За своєю природою характеристики об'єктів можуть бути як *кількісними*, так і *якісними*. Для кількісної характеристики вводяться числа. Кількісні значення параметра можуть виражатися дискретними або неперервними величинами. Модель називається *дискретною*, якщо стан її виходів і входів змінюється лише в дискретні моменти часу; якщо ж вхідні і вихідні змінні змінюються неперервно, то модель називається *неперервною*.

За характером зміни параметри можуть бути детермінованими й стохастичними (невизначеними). Для *детермінованих величин* кожному параметру відповідає конкретне число або відповідна функція. Тобто детерміновані параметри повністю визначені, вони дають можливість однозначно визначати стан системи. Детерміновані моделі будуються на основі фізичних законів, що мають місце в досліджуваному процесі. *Стохастичні параметри* мають своїми значеннями випадкові величини, які задані густиною ймовірності. Для аналізу стохастичних математичних моделей застосовують методи теорії ймовірності, випадкових процесів і математичної статистики.

Поділ параметрів на *стаціонарні* й *нестаціонарні* використовується для моделей, в яких одним із незалежних аргументів може бути *час*. Для стаціонарних систем параметри не змінюються в часі. Стаціонарні математичні моделі описують явища, в яких протікають сталі процеси. До сталих процесів відносяться і періодичні процеси, для яких деякі параметри залишаються незмінними, а інші змінюються коливним чином. Наприклад, математична модель системи “кулька–пружина” при наявності тільки сили пружності є стаціонарним процесом.

Якщо одним із істотних незалежних параметрів виступає *час*, то модель називається *нестаціонарною*. Такі моделі, як правило, складніші за стаціонарні. Нестаціонарні математичні моделі деяких об’єктів часто можна привести до нелінійного диференціального рівняння або системи вигляду

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), t > 0$$

з початковою умовою $x(t) = x_0$ при $t = t_0$.

Якщо параметри об’єкта змінюються повільно так, що на деякому проміжку часу цією зміною можна знехтувати, то маємо *квазістаціонарну* математичну модель.

Модель називається *динамічною*, якщо поведінка вихідного сигналу залежить не тільки від вхідного сигналу в поточний момент часу, але й від попередніх значень входу. Символічно це можна записати так $y = F(x(s), s \leq t)$, де F – оператор моделі. Це означає, що модель володіє пам’яттю (інерційністю). У протилежному випадку – модель *статична*, тобто статична модель не враховує зміни в часі. Наприклад, формула підйомної сили крила літака в дозвуковому діапазоні, що припадає на одиницю довжини розмаху крила,

$$P = c(\alpha) \frac{\rho v^2}{2} b,$$

де P – підйомна сила; ρ , v – густина і швидкість повітряного потоку; b – хорда профіля крила; α – кут атаки, є статичною, оскільки, всі параметри, що характеризують ці процеси постійні в часі. Статична математична модель може бути окремим рівнянням або системою рівнянь. Якщо зміни параметрів об’єкта відбуваються

настільки повільно, що в деякий момент часу ними можна знехтувати, то модель називається *квазістатичною*. Перехід системи з одного статичного стану або сталого процесу в інший називається перехідним процесом.

Поділ моделей на *одновимірні*, *двовимірні*, *тривимірні* застосовується до моделей, серед параметрів яких є просторові координати. Як правило, збільшення розмірності моделі приводить до збільшення кількості математичних співвідношень. Особливо складні в реалізації тривимірні моделі, які вимагають високопродуктивних ЕОМ. При реалізації тривимірних моделей потрібно розв'язувати системи великої розмірності, наприклад 10 тис. рівнянь і більше (“прокляття розмірності” за Белманом⁷). Реалізація таких моделей стала можливою лише з появою ЕОМ і спеціальних обчислювальних методів.

З погляду інформативності, змінні поділяються на *спостережувані* (безпосередньо або опосередковано вимірювані) та *неспостережувані* (принципово або технічно невимірювані). Неспостережувані змінні недоступні для контролю і спостереження, вони виявляють себе тільки через зміну стану об'єкта. Компенсація збурень неспостережуваних змінних можлива лише в системах зі зворотним зв'язком.

Класифікація в залежності від мети моделювання.

Метою *дескриптивних моделей* (від латинського *descriptio* – опис) є побудова законів зміни параметрів реального об'єкта. Наприклад, модель руху матеріальної точки описується другим законом Ньютона і має вигляд $m \frac{d^2x}{dt^2} = F$. Задаючи положення і швидкість у початковий момент часу (вхідні параметри), масу (власний параметр), закон зміни сил (зовнішня дія), можна визначити швидкість і координати матеріальної точки в довільний момент часу (вихідні параметри).

Дескриптивні моделі – це реалізація описових, пояснюючих моделей, вони дають розуміння структури реального об'єкта, закони його розвитку та властивості, опис взаємодії з навколишнім середовищем. Одержані моделі описують залежність вихідних величин від значень вхідних параметрів.

⁷ Белман Річард (1920 – 1984) – американський математик.

Оптимізаційні моделі призначені для визначення оптимальних за деяким критерієм параметрів об'єкта і для пошуку найкращого режиму керування деяким процесом. Частина параметрів моделі належить до параметрів керування, змінюючи які, можна отримувати різні варіанти наборів значень вихідних величин. Метою оптимізаційних моделей є пошук таких припустимих значень параметрів, при яких критерій вибору досягає найкращих результатів.

Як правило, дані моделі складаються з однієї або кількох дескриптивних моделей і деякого критерію, що забезпечує порівняння між собою різних значень вихідних величин з метою вибору найкращого варіанта. Прикладом оптимізаційної моделі може служити моделювання запуску ракети з поверхні Землі з метою підйому на задану висоту за мінімальний час при обмеженнях на величину імпульсу двигуна, час його роботи, початкову й кінцеву масу ракети.

Моделі управління призначені для прийняття ефективних рішень у різних сферах цілеспрямованої діяльності людини.

На відміну від оптимальних моделей, де критерій вибору відомий і шуканий розв'язок забезпечує екстремальність цього критерію, у моделях управління необхідно мати специфічні критерії оптимальності, які дозволяють проводити порівняння альтернатив при різних невизначеностях у задачі. Ці моделі необхідні для того, щоб прогнозувати прямі та побічні наслідки реалізації різних способів управління та дій на об'єкт. Критерій оптимальності в задачах управління заздалегідь не фіксується.

Класифікація в залежності від методів дослідження. Для дослідження моделей застосовуються різноманітні методи (рис. 1.3).

Метод дослідження моделі називають *аналітичним*, якщо він дозволяє знайти вихідні величини у вигляді аналітичних виразів. Частковим випадком аналітичних виразів є алгебраїчні вирази, в яких використовуються арифметичні операції, піднесення до степеня, добування коренів. Аналітичні методи дослідження моделі більш цінні, оскільки дозволяють вивчати властивості об'єкта моделювання, їх якісну поведінку, застосовуючи методи математичного аналізу.

На жаль, відомі на сьогоднішній день математичні методи дозволяють отримати аналітичні розв'язки лише для нескладних математичних моделей. У більшості випадків при дослідженні моделей застосовують алгоритмічні підходи, які дозволяють отримувати лише наближені значення шуканих параметрів.

За допомогою числових методів сукупність математичних рівнянь замінюється скінченновимірним аналогом. Це частіше за все досягається дискретизацією вихідних співвідношень, тобто переходом від функції неперервного аргументу до функцій дискретного аргументу. Після дискретизації вихідної задачі будується обчислювальний алгоритм для розв'язування дискретної задачі. Отриманий розв'язок дискретної задачі приймається за наближений розв'язок вихідної задачі.

При *імітаційному підході* сам об'єкт дослідження розбивається на окремі елементи. У цьому випадку система математичних рівнянь для об'єкта-системи в цілому не записується, а замінюється деяким алгоритмом, який моделює його поведінку. Моделями окремих елементів можуть виступати як аналітичні, так і алгебраїчні співвідношення.

Алгоритмічні моделі не дозволяють отримати розв'язок в аналітичній формі, що ускладнює процес аналізу результатів моделювання, їх застосування можливе лише при наявності ЕОМ. Дослідження математичної моделі, побудованої у вигляді алгоритмів, аналогічне проведенню експериментів із реальним об'єктом, тільки замість реального експерименту з об'єктом проводиться обчислювальний експеримент із його моделлю. Задаючи конкретний набір значень вихідних параметрів моделі, у результаті обчислювального експерименту отримують наближення значення шуканих параметрів.

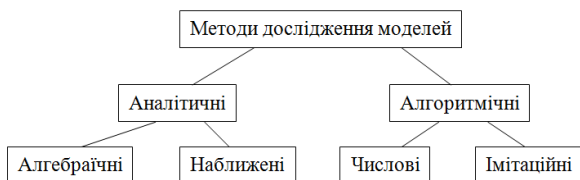


Рис. 1.3. Класифікація в залежності від методів дослідження

1.3.4. Вимоги до математичних моделей

Математичні моделі будуть ефективними, якщо вони задовольняють певні вимоги. Наведемо основні з них.

Повнота математичної моделі полягає в тому, що вона дає принципово нову можливість за допомогою математичних методів відобразити достатньою мірою саме ті характеристики й особливості об'єкта, які цікавлять дослідника. Наприклад, з рівняння, що описує динаміку системи кулька–пружина можна однозначно визначити частоту коливань, тому ця модель – повна, а для визначення амплітуди – неповна, оскільки потрібні додаткові дані.

Точність математичної моделі дає можливість забезпечити прийнятний збіг реальних і знайдених з моделі значень вихідних параметрів. Нехай y_i^m і y_i^e – значення, що знайдені з моделі і взяті з експерименту відповідно для i -того вихідного параметра. Тоді відносна похибка моделі за цим параметром дорівнює

$$\varepsilon_i = \frac{|y_i^m - y_i^e|}{|y_i^e|}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Для кількісної характеристики точності математичної моделі можна використовувати норму $\|\varepsilon\| = (\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2)^{\frac{1}{2}}$, або $\|\varepsilon\| = \max_i |\varepsilon_i|$.

У загальному випадку похибка моделювання визначається за формулою

$$\Delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4,$$

де δ_1 – похибка моделі, δ_2 – похибка обчислювальної схеми, δ_3 – накопичувальна похибка обчислень, δ_4 – похибка викликана недостатчею вихідної інформації. Тобто точність результатів не може бути вищою за точність вихідних даних і точність проміжних обчислень.

Похибка δ_1 зумовлена спрощеннями, які мають місце при переході від реального об'єкта нескінченної складності до математичної моделі – об'єкта скінченної складності.

Похибка δ_2 – спричинена обчислювальною реалізацією математичної моделі: спрощення при переході від вихідних рівнянь до різницьових.

Похибка δ_3 – це накопичення обчислювальної похибки за рахунок скінченного представлення чисел в ЕОМ. При великих обсягах обчислень похибка машинних обчислень може суттєво спотворювати розрахункові результати і давати недостовірні дані.

Похибка δ_4 характеризує детальність задання вихідної інформації. Інколи через об'єктивні причини вхідні параметри визначені з похибкою в десятки відсотків, частина параметрів узагалі може бути невідомою. Модель в цьому випадку може бути сформульована з інформаційними “дірками”. Для усунення інформаційних “дір” у моделях необхідно підбирати недостаючу інформацію. Ця проблема інколи вимагає розв'язування обернених задач.

Вимога *робастності* (від англ. *robust* – міцний, стійкий) означає стійкість моделі до похибок вхідних даних, тобто здатність нівелювати ці похибки. Дані можуть бути відомі лише з більшою або меншою точністю і така ситуація не повинна суттєво впливати на результати моделювання.

Адекватність математичної моделі – це здатність правильно якісно й кількісно описувати ті характеристики об'єкта, які є важливими для поставленої задачі. В деяких прикладних галузях (наприклад, біології, соціології), в яких кількісні закономірності ще не встановлені, математичні моделі мають, в основному, якісний характер, тому під адекватністю варто розуміти лише правильний якісний опис поведінки об'єктів. Слід пам'ятати, що модель адекватна при виборі одних характеристик і не адекватна при виборі інших характеристик того ж об'єкта, тобто всіляка адекватність відносна і має свої межі застосування. Математична модель не може бути адекватною на всій множині значень параметрів. Завжди існує область адекватності моделі, яка задається діапазоном значень параметрів, у межах яких вона адекватна реальному об'єкту. Нехтування цим правилом може призвести до грубих помилок – приписування реальним об'єктам тих властивостей, якими вони насправді не володіють. Так, при дослідженні економіко-математичних моделей необхідно чітко уявити собі, що виробничі функції є достатньо умовним описом реальних властивостей виробничих одиниць економічної системи, тому при інтерпретації і використанні результатів моделювання не можна виходити за межі адекватності моделі.

Ефективність (достатня простота). Модель повинна бути зручною для дослідження, тобто достатньо простою, але не простішою, ніж це можливо. Спрощення моделі можна проводити доти, поки модель продовжує відображати необхідні властивості процесів. Майже завжди є такі ситуації, коли в результаті спрощень можна одержати неправдоподібні результати.

Простота моделі досягається за рахунок того, що вона розглядає тільки деякі сторони об'єкта і може пояснити тільки те, що в неї закладено, причому часто тільки якісно або наближено кількісно. Для простоти необхідно враховувати лише суттєві фактори. Які фактори є суттєвими, а якими можна знехтувати залежить від особливостей розв'язуваної задачі та досвіду дослідника.

Але, не зважаючи на це, роль математичного моделювання досить велика, оскільки вона приводить до розуміння суті процесу. Коли потрібні більш точні результати, то це вимагає уточнення й ускладнення моделі та проведення обчислювальних експериментів. Простота (економічність) моделі означає, що існуючі засоби математики і комп'ютерної техніки дають можливість за прийнятний час і з допустимими затратами ресурсів, з необхідною точністю провести якісний або кількісний (у залежності від постановки задачі) аналіз математичних моделей. Ясно, що вимога простоти в деякому розумінні протилежна вимозі адекватності. Як правило, чим більш адекватна модель, тим вона менш ефективна, хоча бувають випадки, коли ускладнення моделі може призвести до погіршення адекватності. Тому на практиці потрібно знаходити розумний компроміс між адекватністю і ефективністю.

Продуктивність пов'язана з тим, що модель містить різні параметри компонент об'єкта, включає функціональні залежності, описує зв'язки між фізичними величинами. Всі ці параметри називаються вихідними даними моделі, вони визначають ті результати, які ми одержимо з моделі. Вимога продуктивності полягає в тому, що у реальних умовах вихідні дані мають бути відомими, тобто їх можна виміряти, обчислити або знайти в довідниках. Якщо реально одержати вихідні дані неможливо, то після вивчення математичної моделі ми можемо дізнатися тільки про властивості об'єкта, хоча інколи і властивості конкретного об'єкта можуть бути неясними.

1.4. Етапи побудови математичних моделей

Останнім часом спостерігається поява великої кількості математичних моделей для різних процесів. Особливістю математичних моделей, які створюються в наш час, є те, що вони використовуються для складних систем взаємодіючих елементів, тому це призводить до ускладнення моделей, до необхідності сумісного використання багатьох теорій та сучасних ЕОМ.

Створення математичних моделей – це складна задача, яка вимагає співпраці багатьох спеціалістів як у предметній області, що пов'язана з об'єктом моделювання, так і в області прикладної математики, сучасних числових методів та програмування.

Процес моделювання не можна повністю формалізувати і для побудови моделей визначну роль відіграють неформальні евристичні прийоми людського інтелекту.

Складність математичного моделювання полягає саме в тому, що при побудові математичних моделей необхідно поєднувати математичні і спеціальні знання. Побудова математичних моделей – це пошук компромісу між урахуванням якомога більшої кількості факторів реального процесу та можливістю подальшого аналізу математичної моделі.

Математичні моделі, особливо ті, що використовують числові методи й обчислювальну техніку, вимагають для свого створення значних інтелектуальних, фінансових і часових затрат.

Широке впровадження обчислювальної техніки в усі сфери людської діяльності призвело до інтенсивного використання математичних моделей. Часто доводиться створювати цілий спектр моделей одного й того ж об'єкта. Необхідність масового створення моделей вимагає деякої сукупності правил і підходів, які б дозволили знизити затрати на створення моделей та уникнути можливих помилок. Подібну сукупність правил можна було б назвати технологією створення математичних моделей.

Процес створення нової моделі невід'ємний від експериментування з нею. Якісна модель, як правило, виникає лише після багатьох ітерацій типу модель–експеримент–поліпшення моделі.

Процес створення математичної моделі необхідно розглядати як послідовність етапів, зображених на рис. 1.4. Наведена послі-

довніть етапів має загальний і універсальний характер, хоча в окремих випадках вона може змінюватися.

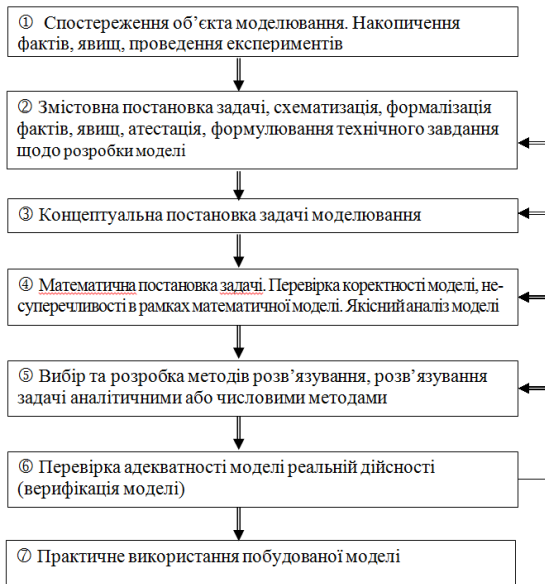


Рис. 1.4. Етапи побудови математичної моделі

1.4.1. Обстеження об'єкта моделювання

Необхідність у новій моделі може виникнути у зв'язку з проведенням наукових досліджень, виконанням проектних і конструкторських робіт на виробництві, створенням систем управління й контролю. Організацію, яка зацікавлена у створенні нової математичної моделі і вивченні об'єкта моделювання, називають *замовником*. Після прийняття рішень про необхідність створення нової моделі замовник знаходить виконавця свого замовлення. Виконавцем, як правило, виступає робоча група, яка складається зі спеціалістів різного профілю: прикладних математиків, спеціалістів із предметної галузі, програмістів.

Далі ця група розпочинає досліджувати об'єкт моделювання. Основною метою цього етапу є:

- детальне вивчення об'єкта моделювання з метою виявлення основних факторів, механізмів, що суттєво впливають на його поведінку, вибір тих факторів, які піддаються формалізації;

- виділення та опис внутрішніх і зовнішніх зв'язків об'єкта;
- визначення параметрів, які дозволяють описувати об'єкт моделювання;
- збір й перевірка експериментальних даних, проведення в разі необхідності нових експериментів;
- аналіз і порівняння між собою побудованих раніше моделей об'єкта;
- аналіз і узагальнення всього накопиченого матеріалу.

Цей етап важливий і відповідальний – чим повнішу інформацію вдається зібрати про об'єкт на етапі дослідження, тим чіткіше можна виконати змістовну постановку задачі, повніше врахувати набутий досвід та знання, уникнути багатьох складностей на майбутніх етапах розробки моделі. Постановка задачі виходить з тих знань, що одержані в результаті спостережень і вивчення об'єкта, а також з тієї практичної проблеми, яку необхідно розв'язати.

1.4.2. Змістовна постановка задачі

На основі зібраної інформації про об'єкт моделювання виконавець разом із замовником формулюють змістовну постановку задачі моделювання, яка, як правило, не буває остаточною й може уточнюватися та конкретизуватися в процесі розробки моделі. Замовнику – представнику спеціальної області знань, як правило, важко пояснити в зрозумілій математику формі сутність проблеми. Тому прикладний математик повинен чітко й однозначно зрозуміти всі вимоги замовника та переконатися в їх суперечливості.

Підготувати якомога повніший список питань, на які повинна відповісти нова модель, є самостійною проблемою, яка вимагає для свого розв'язування співпраці відповідних спеціалістів. Джерелом інформації для формування списку питань можуть бути бесіди з замовником, наявна зібрана інформація про об'єкт, а також моделі, що були створені раніше. Спеціалісти-постановники задач повинні вміти з великого обсягу слабоформалізованої інформації про об'єкт моделювання із різних, можливо, нечітко сформульованих вимог замовника до моделі виділити те головне, що може бути дійсно реалізоване.

Необхідно добре обдумати, конкретизувати, уточнити задачу,

подивитись на неї з різних точок зору і так сформулювати проблему, щоб отриманий розв'язок був корисним і його можна було б знайти. Від коректності поставленої задачі на цьому етапі залежить успіх усього дослідження. Невдала постановка задачі може призвести до одержання непотрібних або тривіальних результатів. І тут значну роль відіграє досвід застосування методології математичного моделювання.

Крім цього, виконавець повинен вміти оцінити терміни та вартість реалізації нової моделі, інакше реалізація проекту побудови моделі може бути невдалою.

З перерахованих вище вимог бачимо, наскільки велика відповідальність лягає на постановників задач, тому як керівника групи доцільно рекомендувати саме математика-прикладника. З цього приводу Г. Біркгоф зазначає, що прикладники-математики „здатні до глибокого спілкування з іншими вченими, інженерами і знайомі з силою і обмеженнями цифрових машин, ... покликані стати вождями завтрашнього математичного світу”.

Отже, змістовну постановку задачі моделювання складає перелік сформульованих у словесній формі основних питань про об'єкт моделювання, які цікавлять замовника.

Весь зібраний у результаті обстеження матеріал про об'єкт, змістовна постановка задачі моделювання, додаткові вимоги до реалізації моделі й подання результатів дослідження оформляються у вигляді технічного завдання щодо проектування і розробки моделі.

1.4.3. Концептуальна постановка задачі

На основі змістовної моделі розробляється концептуальна постановка задачі моделювання, яка служить основою концептуальної моделі об'єкта. Концептуальна постановка задачі моделювання формулюється, як правило, робочою групою без замовника, на основі технічного завдання, зібраних даних про об'єкт моделювання й вимог до майбутньої моделі. На цьому етапі проводиться поділ усіх діючих у цьому явищі факторів на головні, які обов'язково повинні враховуватись, і другорядні, які на початку дослідження можуть бути відкинуті.

Концептуальна модель (при дослідженні природничих проблем таку модель називають ще фізичною) являє собою деяку ідеалізовану модель об'єкта, що записана в термінах конкретних природничих дисциплін. Для цього на першому кроці наукового пізнання формується сукупність гіпотез, припущень про поведінку об'єкта, про взаємодію його з навколишнім середовищем, про зміну його внутрішніх параметрів.

Гіпотеза – це припущення або логічний висновок, що отримується з аналізу вже відомих фактів. Для обґрунтування гіпотез можуть бути наведені деякі теоретичні доводи і експериментальні дані про об'єкт. У виборі й обґрунтуванні гіпотез значною мірою проявляється мистецтво та досвід членів групи. На основі прийнятих гіпотез визначаються параметри, що описують стан системи, різного роду обмеження, яким задовольняють ці параметри. Це можуть бути елементи будь-якої множини X , яка називається *фазовим простором даної системи*. Правильний вибір фазового простору значною мірою визначає кінцевий результат. До вибору фазових змінних висувається ряд вимог, головна з них полягає в тому, що задання початкового стану, тобто точки $x_0 \in X$, повинно однозначно визначати еволюцію системи (зміну її стану з часом).

Процес створення концептуальної моделі на сьогодні не формалізований, тобто не існує точних правил її створення. Різні предметні області мають свої особливості.

Концептуальна постановка задачі моделювання – це сформульований у термінах конкретних дисциплін (фізики, хімії, біології і т.д.) перелік основних питань, які цікавлять замовника, а також припущень, гіпотез відносно властивостей і поведінки об'єкта моделювання.

1.4.4. Математична постановка задачі

Після того, як визначені математичні величини, що описують процес, явище чи систему, переходять до пошуку математичних співвідношень, які зв'язують ці математичні величини. Формулювання співвідношень здійснюється на основі зроблених припущень, висунутих гіпотез, законів, яким підпорядковуються ці явища.

Закінчена концептуальна постановка задачі моделювання дозволяє сформулювати математичну задачу моделювання, яка містить сукупність різних математичних співвідношень, що описують поведінку, властивості об'єкта моделювання, взаємозв'язки між елементами об'єкта. При цьому потрібно намагатися, щоб математична модель була зручною для подальшого дослідження. Варто зауважити, що математик-прикладник при складанні моделі повинен орієнтуватися на структуру і зміст доступної йому вихідної інформації. Інакше можемо одержати математичний конструкт, який ніколи не знайде практичного застосування.

Математична постановка задачі моделювання – це сукупність математичних співвідношень, які описують поведінку і властивості об'єкта моделювання (тобто нашій представлення про об'єкт набувають математичної форми).

Сукупність математичних співвідношень визначає вигляд оператора моделі. Найбільш простий вигляд оператор моделі має у випадку алгебраїчних рівнянь. Подібні моделі можна назвати моделями апроксимаційного типу, оскільки для їх побудови використовують різні методи апроксимації експериментальних даних про поведінку, залежно від вхідних параметрів, параметрів зовнішнього середовища та внутрішніх параметрів об'єкта. Однак моделі такого типу мають обмежену сферу застосування. При вивченні природи нам постійно доводиться спостерігати явища, які залежать від часу. Такі явища називаються *процесами*. Часто математичні моделі процесів описуються диференціальними рівняннями з додатковими умовами. Диференціальні рівняння мають неперервний характер і їх безпосереднє розв'язування на ЕОМ неможливе, оскільки ЕОМ є пристроями дискретного типу. Тому необхідно попередньо здійснювати дискретизацію поставленої задачі й застосовувати числові методи для їх розв'язування.

Для створення математичних моделей складних систем і процесів потрібно використовувати великий обсяг знань, що накопичився в цій дисципліні. У багатьох галузях знань (механіці, фізиці, біології) прийнято виділяти закони для об'єктів даної галузі знань і співвідношення, які описують поведінку окремих елементів або їх сукупностей, наприклад, рівняння балансу маси, кількості імпульсу, енергії, які справедливі за певних умов для будь-яких тіл.

Рівняння цього класу підтверджені великою кількістю експериментів і добре вивчені. Необхідно зазначити, що ці співвідношення є основним елементом – серцевиною будь-якої математичної моделі. Помилки у виборі визначальних співвідношень приводять до неправильних результатів моделювання.

При побудові математичних моделей постійно потрібно враховувати суперечливі вимоги: модель повинна бути достатньо повною і в той же час допускати її дослідження за допомогою існуючих математичних і комп'ютерних засобів. Академік А.М. Тихонов⁸ зазначав, що в багатьох випадках правильно побудована математична модель розв'язує проблему моделювання більше, ніж на половину. Побудова математичної моделі – це найбільш істотний, найбільш складний етап наукового дослідження, який не піддається формалізації [94].

Для контролю правильності отриманої системи математичних співвідношень необхідно виконати ряд перевірок [1].

Контроль розмірностей. У математичному моделюванні розглядувані величини, як правило, мають розмірність. Характеристики об'єкта вимірюються в деяких одиницях, що мають певний зміст, наприклад маса вимірюється в кг, температура в градусах і т.д. Числові значення розмірних одиниць залежать від вибору одиниць вимірювання. Серед одиниць вимірювання виділяють величини з незалежною (основною) розмірністю, а розмірності інших величин виражають через основні. Так наприклад, для опису механічних явищ у системі СІ незалежними одиницями є метр, кілограм, секунда – розмірності довжини, маси і часу. На відміну від них, розмірність кінетичної енергії визначається через розмірності основних одиниць за формулою $[E] = [m][x][t]^{-2} = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$. Символ $[f]$ означає розмірність величини f .

Згідно з правилом контролю розмірностей 1) прирівнюватися, зв'язуватися в нерівність й додаватися можуть тільки величини однакової розмірності; 2) якщо розмірність деякої величини вже відома, то такою вона має бути і в математичній моделі; 3) аргумент у трансцендентній функції має бути безрозмірним (наприклад, $\sin(x)$); 4) обчислення можуть здійснюватися над величина-

⁸Тихонов А.М. (1906 – 1993) – радянський математик і геофізик.

ми однієї й тієї ж системи одиниць (необхідно перевіряти фізичний зміст усіх співвідношень).

Це правило може бути використано для визначення невідомої розмірності деякої величини. Її легко одержати з формули, що містить цю величину та інші величини, розмірності яких відомі. Наприклад, знайдемо розмірність коефіцієнта теплопровідності з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}.$$

Оскільки диференціал будь-якої величини має ту ж розмірність, що й сама величина, то, прирівнюючи розмірності лівої і правої частин формули, одержуємо

$$\frac{[\theta]}{[t]} = [a]^2 \frac{[\theta]}{[x]^2} \Rightarrow [a]^2 = \frac{[x]^2}{[t]}.$$

Контроль порядків полягає в грубій оцінці порядків величин, які фігурують у математичних співвідношеннях. За допомогою грубих оцінок можна одержувати характерні значення величин, що входять у рівняння, і зрозуміти, які вирази є відносно малими. Якщо їх відкинути, то після розв'язування спрощених рівнянь можна зрозуміти, чи відкинуті члени дійсно малі.

Контроль характеру залежностей. Напря́м і швидкість зміни вихідних параметрів моделі, які впливають із математичних співвідношень, повинні бути такими, як це впливає з фізичного змісту моделі.

Контроль законів збереження. Якщо математична модель будувалась на основі закону збереження, то цій же властивості повинен задовольняти і розв'язок рівняння. Якщо при побудові моделі були враховані втрати енергії, то такій же властивості повинен задовольняти і розв'язок. Як правило, аналоги фундаментальних законів повинні зберігатися і при переході до обчислювального алгоритму.

Контроль екстремальних ситуацій. При цьому необхідно продивитися, якого вигляду набувають математичні співвідношення, якщо параметри моделі наближаються до гранично допустимих значень – частіше за все до нуля або до нескінченності.

У подібних екстремальних ситуаціях модель часто спрощується, а математичні співвідношення стають більш наочними і можуть бути перевіреними. Наприклад, відсутність навантажень приводить до відсутності деформацій.

Контроль граничних умов. Передбачає перевірку того, що вони використані при побудові розв'язків і що значення вихідних параметрів моделі задовольняють дані умови.

Контроль математичної замкнутості полягає в перевірці того, що вписана система математичних співвідношень дає можливість, і при тому однозначно розв'язати поставлену математичну задачу, тобто за початковим станом системи можна однозначно визначити її наступні стани. Наприклад, для знаходження n невідомих із системи алгебраїчних рівнянь потрібно перевірити, що кількість незалежних рівнянь дорівнює n . Якщо рівнянь менше n , то така система має безліч розв'язків і потрібно сформулювати додаткові вимоги, щоб розв'язок знаходився однозначно. Якщо ці рівняння отримуються з експериментів та спостережень, то можлива постановка задачі, при якій кількість рівнянь перевищує n , а самі рівняння задовольняються лише наближено, тоді розв'язок шукається методом найменших квадратів.

Якщо задача звелась до відшукування розв'язків диференціального рівняння, то необхідно перевірити, чи поставлені додаткові (початкові, граничні) умови однозначно визначають розв'язок, тобто перевірити, чи модель є замкнутою.

Властивість математичної замкнутості системи тісно пов'язана з введеним Адамаром поняттям коректно поставленої математичної задачі – задачі, для якої розв'язок існує, єдиний і неперервно залежить від вхідних даних, тобто малій зміні вхідних даних відповідає достатньо мала зміна розв'язку. Числові методи виправдано застосовувати лише до коректно поставлених задач. Необхідно зазначити, що не всі задачі, які виникають на практиці, є коректними. Наприклад, у прикладних застосуваннях математики часто виникають системи лінійних алгебраїчних рівнянь, але такі системи можуть виявитися погано обумовленими, тобто малі зміни вхідних даних можуть істотно змінювати розв'язок, а оскільки параметри системи отримуються з експериментів, то можна одержати недостовірні розв'язки.

Доведення коректності математичної задачі є складною математичною проблемою, її можна розв'язати лише для деяких класів математичних задач. Найпростіший спосіб розпізнавання поганої обумовленості полягає в перерахунку розв'язків при довільній зміні вхідних даних у межах її точності. Якщо результати при цьому будуть сильно відрізнятися, то математична задача погано обумовлена і модель потрібно змінити.

Для прикладу наведемо системи, в яких вільні члени відрізняються в п'ятій значущій цифрі

$$\left\{ \begin{array}{l} 100x_1 + 500x_2 = 1700, \\ 15x_1 + 75,01x_2 = 255 \end{array} \right. \quad , \quad \left\{ \begin{array}{l} 100x_1 + 500x_2 = 1700, \\ 15x_1 + 75,01x_2 = 255,03. \end{array} \right.$$

Розв'язок першої системи $x_1=17$, $x_2=0$, а другої – $x_1=2$, $x_2=3$. Зауважимо, що визначник матриць цих систем дорівнює одиниці.

Математична модель коректна, якщо для неї виконуються всі контрольні перевірки розмірності, порядків, характеру залежностей, екстремальних ситуацій, граничних умов, фізичного змісту та математичної замкнутості.

Доведення теорем існування та єдиності складає один із найважливіших кроків цього дослідження. Достатньо згадати, скільки інтелектуальних сил людство витратило на нерозв'язні задачі. Однак, якщо доведено, що задача не має розв'язку, а фізичне явище все ж існує, то необхідно проаналізувати причину такої невідповідності. Вона може бути викликана недосконалою моделлю, або неадекватністю математичного апарату. Наприклад, багато крайових задач математичної фізики при недостатньо гладких початкових і крайових умовах не мають класичного розв'язку. Подолати ці труднощі вдається в рамках концепції узагальнених функцій. На жаль, для актуальних складних задач, які пропонує сьогодення наука, подібні дослідження вдається виконати лише в окремих випадках.

Але варто розуміти, що жодні математичні утворення, якими б витонченими вони не були, не можуть замінити при побудові моделі чіткого розуміння проблеми, точної постановки задачі, змістовного вивчення об'єкта-оригінала та взаємодії його з оточуючим середовищем.

1.4.5. Вибір і обґрунтування методу розв'язування задач

Коли модель створена, переходять до знаходження розв'язку задачі, який зводиться до відшукування деяких залежностей шуканих величин від вхідних параметрів моделі. На цьому етапі важливу роль відіграє математичний апарат, необхідний для аналізу математичної моделі. При цьому необхідно розробити або використати раніше створені алгоритми для аналізу даної моделі.

Прикладна математика надає досліднику широкий вибір математичних методів, що можуть бути використані при дослідженні конкретних математичних моделей. Серед цих методів є кращі та гірші й потрібно уміти їх відрізнити. Всі методи розв'язування задач можна поділити на *аналітичні* та *алгоритмічні*.

Аналітичні методи більш зручні для наступного аналізу результатів, але застосовні лише для відносно простих моделей. Аналітичні методи дослідження базуються на різноманітному математичному апараті. Серед аналітичних методів необхідно відзначити якісні методи дослідження динамічних систем, що дозволяють якісно оцінити ряд основних характеристик системи. На практиці інколи не потрібний точний кількісний розрахунок, а можна обмежитися якісною картиною поведінки явища, особливо це важливо при моделюванні біологічних систем, де значення параметрів початкових умов не можуть бути точно задані і від математичної моделі вимагається з'ясування якісних характеристик, а саме, чи існують у системи стани рівноваги, чи вони стійкі, як змінюється характер стійкості при зміні параметрів. Важливу роль серед аналітичних методів відіграють методи збурень, які дозволяють послідовно уточнювати розв'язок. Однак у багатьох застосуваннях для моделювання складних процесів виникає ряд обмежень, що пов'язані зі складністю, нелінійністю. У цьому випадку недостатньо аналітичного апарату, а потрібні ефективні числові методи дослідження математичних моделей, тобто реалізувати великий потенціал математичного моделювання неможливо без потужних засобів автоматизації обчислень, якими є сучасні комп'ютери. Так, без комп'ютерів було б неможливо детально проаналізувати складні фізичні процеси, що виникають при розробці джерел атомної енергії, розрахувати траєкторії супутників та кос-

мічних кораблів. Прив'язування комп'ютера до розв'язання задачі дослідження деякого об'єкта і означає створення комп'ютерної моделі, яка дозволяє проводити обчислювальні експерименти.

Розв'язки, отримані за допомогою алгоритмічних методів, не зводяться до точних аналітичних розв'язків відповідної задачі. Алгоритмічні методи більш трудомісткі в реалізації, вимагають глибоких знань методів обчислювальної математики, наявності бібліотеки програмного забезпечення, потужної обчислювальної техніки.

Числові методи можуть застосовуватися лише для коректних математичних задач, що істотно для застосування даних методів у математичному моделюванні. Спільним для числових методів є зведення математичної задачі до скінченновимірної, це частіше за все досягається дискретизацією вихідної задачі, тобто переходом від функції неперервного аргументу до функції дискретного аргументу. Числовий розв'язок реалізується у вигляді обчислювального алгоритму. Алгоритм повинен давати розв'язок задачі за допустимий машинний час.

Важливою характеристикою алгоритму є його точність, тобто можливість отримувати розв'язок задачі з заданою точністю $\epsilon > 0$ за скінченну кількість дій. На практиці задовольняються деяким компромісом між точністю і величиною машинного часу. Для будь-якої математичної задачі, як правило, можна запропонувати кілька алгоритмів, за допомогою яких можна отримати розв'язки з заданою точністю, але за різну кількість операцій. Алгоритми, які витрачають меншу кількість дій для досягнення однакової точності, будемо називати більш економічними або більш ефективними.

Велике різноманіття числових методів значною мірою ускладнює вибір того чи іншого методу в кожному конкретному випадку. Вибір конкретного методу зумовлений тим, який із них більше підходить для даної моделі з точки зору забезпечення ефективності, стійкості і точності результатів.

Вибраний метод розв'язування задачі повинен бути розрахований на такі вхідні дані, які можна виміряти з необхідною точністю. Якщо вхідні дані містять похибки, то немає змісту використовувати числові методи високої точності.

Помилка у виборі обчислювального методу через похибки заокруглення може призвести до одержання недостовірних результатів. Наприклад, при розв'язуванні диференціальних рівнянь при неправильному виборі методу з часом можуть з'явитися сильно осцилюючі розв'язки, але це не означає, що таким стає реальний процес, швидше за все обчислювальний метод став нестійким.

Більше того, ефективність одного й того ж методу може істотно відрізнятись від застосування його різними спеціалістами, часто ефективність числових методів, розроблених програм визначається інтуїтивно, що напрацьовується впродовж багатьох років.

Однак кожна комп'ютерна реалізація відповідає конкретним заданим параметрам системи, і при цьому можуть бути загублені важливі якісні властивості моделі, пов'язані насамперед з асимптотичною поведінкою розв'язку, тому, перш ніж застосовувати числові методи, потрібно задачу дослідити аналітичними методами. Тобто дослідження математичної моделі повинно, як правило, поєднувати як обчислювальні, так і аналітичні методи.

1.4.6. Реалізація математичної моделі у вигляді програм для ЕОМ

У наш час математичні моделі служать основою для створення програмних комплексів при розв'язуванні різних задач. Це приводить до реалізації моделі у вигляді програм для ЕОМ.

Процес створення надійного та ефективного програмного забезпечення не менш складний, ніж розробка математичної моделі. Для створення програм необхідно володіти сучасними алгоритмічними мовами, технологіями програмування, наявним програмним забезпеченням, знаннями можливостей обчислювальної техніки, особливостями реалізації на ЕОМ методів обчислювальної математики. Сучасне програмування є самостійною наукою з своїми фундаментальними принципами, підходами і методами.

Процес створення програмного забезпечення можна розбити на ряд етапів:

- розробка технічного завдання щодо створення програмного забезпечення;
- проектування структури програмного комплексу;

- кодування алгоритму;
- тестування й налагоджування;
- проведення розрахунків і аналіз результатів, прийняття рішення про подальше доопрацювання програмного комплексу чи здачу в експлуатацію;
- супровід і експлуатація.

У **технічному завданні** щодо розробки програмного забезпечення дається опис задачі, математична постановка задачі, визначається система програмування та вимоги до апаратного забезпечення, формулюються основні вимоги до взаємодії користувача з програмою, описуються вхідні та вихідні змінні, для вихідних змінних визначається форма їх представлення (числова, графічна, текстова), наводяться тестові приклади, на яких здійснюється налагодження й тестування програмного комплексу.

Проектування програми. На етапі проектування формується загальна структура програмного комплексу. Вся програма розподіляється на програмні модулі. Для програмного модуля формулюються вимоги й розробляється алгоритм. Визначається схема взаємодії програмних модулів, яка називається *схемою потоків даних* програмного комплексу. Розробляється план тестування окремих модулів і програмного комплексу в цілому.

Більшість програм, які реалізують математичні моделі, складається з трьох основних частин:

- препроцесор (підготовка і перевірка вхідних даних моделі);
- процесор (розв'язування задачі);
- постпроцесор (відображення отриманих результатів).

Лише для відносно простих моделей ці три частини можуть бути об'єднані у вигляді однієї програми. Такі програми пишуться, як правило, одним автором і жорстких вимог до таких програм не виникає.

Інша справа – великі програми для розв'язування складних науково-технічних проблем. Наприклад, при розв'язуванні сучасних задач з моделювання поведінки рідин, газів, твердих тіл жодна з цих частин може містити в собі цілий комплекс програм. Такі програми створюються колективами висококваліфікованих програмістів і вимагають великих часових затрат. Тому такі програми повинні пройти стадію проектного обґрунтування.

При проектуванні програм розробляються схеми розрахунків, які встановлюють послідовність виконання окремих модулів, схеми обміну даними між окремими модулями, визначаються структури вхідних та вихідних даних.

При проектуванні схем обміну даними між модулями необхідно визначити вхідні, вихідні (глобальні) та внутрішні (локальні) дані. Обмін даними повинен бути оптимізований і зведений до мінімуму, оскільки він вимагає великих додаткових ресурсів процесорного часу, каналів передачі даних.

При проектуванні програм необхідно мати на увазі, що на ефективність процесу (як обміну даними, так і всього обчислювального процесу) впливає апаратура та архітектура ЕОМ.

Якісні, надійні, легко модифіковані програмні комплекси можна створювати при наявності добре продуманої стратегії розвитку програмного комплексу.

Програмування модулів. Модульність є основним принципом створення програмних систем. *Програмний модуль* – це окрема функціонально закінчена програмна одиниця. Модульний принцип дозволяє виконувати відокремлене програмування окремих частин проекту й відокремлене налагодження програмних модулів. Потім за допомогою драйверної програми програмні модулі об'єднуються в єдину програму для розв'язання прикладної задачі.

Великого значення необхідно надавати використанню сучасних технологій програмування – це в першу чергу дає підвищення надійності програмного забезпечення та збільшення продуктивності праці програміста. Дуже відповідальним моментом є вибір мови програмування. Цей вибір робиться між проблемно-орієнтованими мовами програмування високого рівня і мовами низького рівня. Перші враховують специфіку задачі і процесу програмування. Вони зручні для розробки програм, скорочують терміни створення програм, зменшують кількість помилок, роблять програму наглядною. Другі дозволяють забезпечити високу якість об'єктних програм, оскільки вони відображають специфіку архітектури конкретної обчислювальної машини. Інколи застосовують двостадійне програмування: спочатку програма пишеться на мові високого рівня, а потім переписується на автокоді.

Програмні модулі повинні задовольняти принциповим вимогам: розширюваність, адаптивність і переносимість. Властивість *розширюваності* передбачає можливість доповнення програмного комплексу новими модулями. *Адаптивність* – це здатність програмного комплексу оптимально налаштуватися на існуючі програмні ресурси і максимально повно використовувати їх. *Переносимість* – це здатність модуля до функціонування в різних програмно-апаратних середовищах.

Важливим фактором, що визначає надійність і терміни створення програмного комплексу для розв'язування задач певного класу, є наявність розвинутої бібліотеки сумісних між собою програмних модулів, при цьому програми отримуються більш надійними і створюються в більш короткі терміни.

Для ефективної розробки програмного забезпечення в галузі математичного моделювання насамперед необхідно звернути увагу на створення таких стандартних бібліотек програм:

- наближені й числові методи;
- засоби підготовки вихідних даних (препроцесор);
- засоби візуалізації і подання результатів (постпроцесори).

Налагодження і тестування програм. Особливу увагу при розробці програмного забезпечення необхідно приділяти налагодженню програм. Розрізняють синтаксичне, арифметичне та методичне налагодження.

Синтаксичні помилки виникають при неправильному використанні конструкцій мови програмування й легко усуваються інструментальними засобами.

Арифметичне налагодження ставить собі за мету перевірити повне співпадання обчислювального алгоритму і створеної програми. Основний засіб арифметичного налагодження – це різні допоміжні налагоджувачі програми, які дозволяють переривати роботу програми в потрібному місці та забезпечити виведення необхідної інформації.

Методичне налагодження передбачає одночасну перевірку алгоритмів і програми – перевірку на тестах. Для тестів можуть бути використані модельні задачі, що мають аналітичні розв'язки, або задачі меншої розмірності, для яких уже існують працюючі програми. Можливо є тести, що базуються на іншій математич-

ній моделі. На цьому етапі налагодження здійснюють контроль і за внутрішніми властивостями алгоритму і моделі. Наприклад, здійснюється перевірка законів збереження, формулювання яких у різних галузях знань досить різноманітне. Немає змісту поліпшувати алгоритм і комп'ютерну програму, якщо не виконуються закони збереження. З іншого боку, цей вид контролю є тільки необхідним, але не достатнім.

Проведення обчислень. Завершуюча стадія математичного моделювання – це проведення обчислювальних експериментів на ЕОМ. За допомогою обчислювальних експериментів можна одержати інформацію, яка цікавить дослідника. Але результатами моделювання можуть бути мільйони чисел, тому виникає проблема їх інтерпретації та збереження. Частково полегшити обробку таких даних допоможуть числові таблиці. Використання графічних систем забезпечить візуалізацію одержаної числової інформації, що сприятиме концентрованому сприйняттю інформації.

1.4.7. Аналіз отриманих результатів. Верифікація моделі

Робота математика-прикладника не закінчується в той момент, коли він одержує серію формул або таблиці чисел. Необхідно ще здійснити зворотний перехід з мови математики на мову тієї науки, на якій формулювалася задача. При аналізі результатів важливо зрозуміти, чому і як все відбувається, як впливають параметри на процеси. Отриману інформацію потрібно перевірити всіма доступними експериментальними й теоретичними засобами.

Після побудови й дослідження модель обов'язково проходить етап верифікації (від лат. “верус” – істинний і “фаціо” – роблю), тобто порівняння результатів з іншими відомими фактами, та перевірку на експериментальному матеріалі, який не використовувався при її створенні. Перш за все від моделі вимагається адекватність, тобто відповідність результатів, отриманих зі створеної моделі, і натурних даних. Адекватність дає можливість відкривати нові властивості й закономірності реального об'єкта за допомогою створеної моделі.

Треба мати на увазі, що будь-яка модель адекватна за деяких умов, у деяких рамках, оскільки модель не є копією реальності,

тобто модель має межі свого застосування і їх важливо знати. Наприклад, модель Річардсона гонки озброєнь (див. розділ 13) не працює в ситуаціях, пов'язаних з ядерною зброєю, оскільки ядерна зброя створює необмежену загрозу не тільки для противника, а й для всієї наземної біоти.

Верифікацію математичної моделі деякого реального процесу, або явища можна здійснити лише шляхом порівняння результатів прогнозування, що одержані з моделі з реальним протіканням процесу, або з незалежних теоретичних досліджень модельованого об'єкта. Для цього на створеній моделі відтворюють ряд модельних явищ, процесів, для яких є достовірний експериментальний матеріал, і при збігові результатів розрахунку в межах точності спостережень з експериментальними даними модель вважається адекватною. Інакше необхідно уточнювати вихідні концепції і припущення, а потім знову верифікувати модель. Застосування критерію практики до оцінки математичних моделей дозволяє зробити висновок про правильність припущень, покладених в основу моделі.

Модель повинна давати правильний якісний та кількісний опис об'єкта. Специфіка проблеми полягає в тому, що відповідність моделі реальному об'єкту завжди повинна бути лише за суттєвими для даної ситуації ознаками. Адекватні моделі часто дають добрий збіг з оригіналом і за неврахованими факторами (побічна адекватність).

Перед перевіркою адекватності моделі необхідно переконатися в правильному комплексному функціонуванні всіх алгоритмів і програм моделі, виконати незалежне тестування й налагодження всіх окремих алгоритмів.

Перевірка адекватності моделі ставить собі за мету:

1. Переконатися в справедливості гіпотез, вихідних припущень, сформульованих на етапах концептуальної та математичної постановки. Переходити до перевірки гіпотез можна лише після перевірки одержаних результатів.

2. Переконатися, що точність отриманих результатів відповідає необхідним вимогам.

Питання точності моделювання залежить від вимог, які ставляться до моделі, та від призначення моделі. Для моделей, які

призначені для отримання оцінок, задовільною вважається точність 10-15 %. Для моделей, призначених для використання в контролюючих системах, необхідна точність має бути 1 – 2 %.

Розрізняють ще якісні та кількісні співпадання результатів порівняння. При якісному співпаданні вимагається лише співпадання деяких характеристик особливостей (наприклад, наявність екстремальних точок, монотонність функції). Питання про кількісне порівняння можна ставити лише після задовільної відповіді на питання про якісне співпадання результатів. При необхідності кількісного співпадання велике значення необхідно надавати точності вихідних даних для моделювання.

Джерелом неадекватності моделі можуть бути:

- занадто сильні спрощення про об'єкт, неврахування факторів, які з тих чи інших причин вважаються другорядними (наприклад, через їх малість), а в дійсності вони є суттєвими;

- вихід параметрів за припустимі межі значень, які визначаються системою гіпотез;

- неточно встановлені константи й параметри у використаних математичних співвідношеннях;

- неправильна або необґрунтована система вихідних гіпотез.

При виникненні проблем з адекватністю моделі необхідно усувати джерела неадекватності моделі, тобто проводити уточнення моделі. Наприклад, класичні рівняння математичної фізики (рівняння теплопровідності, хвильове рівняння, рівняння Лапласа⁹) є лінійними. Вони можуть розглядатися лише як перше наближення до істинних законів природи. Часто поведінка суцільного середовища описується нелінійними рівняннями. Нелінійні процеси значно складніші, ніж лінійні. До числа характерних властивостей нелінійних моделей належить пороговість, при якій система якісно змінює свій стан, якщо зовнішні дії перевищують деяку критичну величину. Однак лінеаризуючи нелінійні рівняння в околі деякого розв'язку, ми одержуємо класичні рівняння математичної фізики. В деяких ситуаціях методи лінеаризації прийнятні, а в інших – ні. Довільна математична модель може бути

⁹Лаплас П'єр Симон (1749 – 1827) – французький математик, фізик і астроном.

подана у вигляді схеми, кожен блок якої може вдосконалюватися незалежно від інших, тому апробація блока може проводитися самостійно. Апробацію моделей треба проводити на реальних даних, аналіз результатів апробації може служити для подальшого уточнення моделі. В першу чергу необхідно уточнити значення констант і вихідних параметрів моделі. Якщо на цьому кроці не досягли успішних результатів, то подальшою єдиною можливістю поліпшення моделі є зміна прийнятої системи гіпотез, тобто повернення до другого етапу розробки моделі, а це може привести до зміни математичної постановки задачі, зміни методів її розв'язування, цілковитої переробки програмного забезпечення. Усі ці дії називаються налагодженням моделі.

Уточнювати моделі можна до нескінченності, послідовно коректуючи їх. Інтуїтивно зрозуміло, що, ускладнюючи модель, ми підвищуємо її адекватність реальному процесу. Однак ця закономірність проявляється лише у вигляді загальної тенденції. Інколи ускладнення моделі тільки погіршує її властивості й робить її практично непридатною. Інколи модель доводиться не уточнювати, а, по суті, перебудовувати її на новій основі. Правда, модельована система може бути настільки складна, а поведінка її настільки багатогранна, що прийнята система гіпотез може привести не тільки до кількісних, але й до якісних відмінностей результатів моделювання від поведінки системи в реальних умовах. При цьому підвищення адекватності моделі може бути неможливим через нерозвиненість математичних методів або неможливість побудови аналітичного опису системи та зв'язків між елементами системи.

Цей етап моделювання дуже важливий. На цьому етапі ми повинні прийняти рішення про прийняття моделі або про внесення змін до моделі. Не можна думати, що цим можна знехтувати. Ще більш небезпечний випадок, коли при розв'язуванні реальної задачі за допомогою неперевіреної моделі отримуються правдоподібні результати, а за інших умов модель може дати якісно неправильні результати, тобто при трактуванні результатів моделювання важливо не переоцінити загальність її висновків.

Нарешті, зауважимо, що у випадку відомої достатньо апробованої моделі питання верифікації для нас не виникає. Наприклад, ми не будемо перевіряти на адекватність другий закон Ньютона

чи моделі Максвелла. Питання верифікації істотно у тому випадку, коли ми будуємо нову модель або розширюємо межі застосування вже відомої моделі.

1.4.8. Практичне використання побудованої моделі

Після усунення усіх недоліків тріаду “модель–алгоритм–програма” можна використовувати як робочий інструмент для проведення обчислювальних експериментів і розробки на основі одержаної інформації практичних рекомендацій щодо застосування моделі.

Моделі призначаються для опису параметрів деякого явища або процесу, для вивчення закономірностей змін цих параметрів і використовуються:

- для вивчення властивостей поведінки об’єкта при різних вхідних даних;
- як блоки моделей у системах автоматизованого проектування та управління;
- при побудові оптимізаційних моделей складних систем і комплексів.

Працюючи з моделлю, дослідники починають добре розуміти властивості об’єкта, можуть пояснити поведінку об’єкта. Детальний аналіз моделі дозволить з’ясувати область застосування моделі, оцінити можливість спрощення моделі з метою підвищення ефективності та напряду подальшого розвитку моделі. На основі моделей розробляють узагальнену теорію реального об’єкта.

1.4.9. Приклад побудови математичної моделі.

Модель руху човна

Змістовна постановка. Човен штовхнули від берега і при початковій швидкості відпустили його. Необхідно дослідити рух човна.

Концептуальна постановка. Розглядається поступальний рух човна з початковою швидкістю v_0 , під дією сили ваги mg , архімедової сили N_A і сили опору руху F_r . Човен тримається на плаву (рух по вертикалі відсутній), тому архімедова виштовхувальна

сила зрівноважує силу ваги mg . Розробку моделі будемо здійснювати при таких припущеннях:

- човен здійснює поступальний рух у горизонтальній площині;
- човен приймемо за матеріальну точку маси m , положення якої збігається з центром мас (матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можемо знехтувати);
- рух човна під дією прикладених сил описується основним рівнянням динаміки (другим законом Ньютона);
- величина сили опору води F_r прямо пропорційна швидкості човна і протилежна за напрямом ($F_r = -\mu v$, де μ - коефіцієнт пропорційності).

Потрібно визначити швидкість човна як функцію від часу.

Математична постановка. Знайти розв'язок задачі Коші¹⁰, заданої у вигляді

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu v, \quad v(0) = v_0. \quad (1.4.1)$$

Розв'язування задачі. Для визначення швидкості проінтегруємо рівняння (1.4.1). З урахуванням початкових умов маємо

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{\mu}{m}t\right).$$

Розглянемо числове розв'язування даної математичної задачі. Для цього диференціальне рівняння апроксимуємо різницевою схемою (явна схема Ейлера)

$$\frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx -\frac{\mu}{m}v(t).$$

Звідси маємо співвідношення $v(t + \Delta t) = v(t) - \frac{\mu}{m}v(t) \Delta t$, за допомогою якого при малих Δt можна обчислювати наближений розв'язок задачі (1.4.1).

При цьому важливим є дослідження умов, за яких одержаний розв'язок володіє заданою точністю. Дана модель дозволяє достатньо просто одержати оцінку точності розв'язку, тому що відомий аналітичний розв'язок задачі, який можна прийняти за точний. У цьому прикладі математична модель виводиться з фізичних законів, на основі яких відбувається процес. ▲

¹⁰Коші Огюстен Луї (1789 – 1857) – французький математик, механік.

1.5. Особливості методів моделювання неживої та живої природи

Необхідно зазначити, що в наш час математичне моделювання інтенсивно проникає в усі сфери наукового знання, зокрема, математичні моделі будуються в економічних, соціологічних та інших галузях традиційно гуманітарних дисциплін.

Уперше математичні моделі з'явилися у фізиці та механіці. Причому вони пояснювали не тільки вже відомі факти, але й дозволяли передбачати нові явища та ефекти. Наприклад, закони Ньютона являють собою математичну модель руху зі швидкостями малими порівняно зі швидкістю світла. Ці моделі протягом 200 років зарекомендували себе як моделі, які з високим ступенем точності описують відповідні явища. Про це свідчать точні передбачення затемнень Сонця і Місяця на багато десятиріч уперед, відкриття раніше невідомих планет Нептуна і Плутона. Математична модель електромагнітного поля відкрила існування електромагнітних хвиль.

У даний час теорію математичних моделей фізики вивчає математична фізика. Вона знаходиться на стику фізики й математики та є фізичною за своїм змістом і математичною – за використаними методами. Ось що сказав Луї де Бройль про предмет математичної фізики: „Математична фізика – це поглиблене вивчення фізичних теорій розумом, витонченим у математичних міркуваннях, з метою вдосконалення цих теорій, надання їм більшої строгості, а також пошуку нових тем для суто математичних досліджень”.

Для фізичної матерії основними принципами відбору варіантів поведінки є фундаментальні закони природи (збереження речовини, енергії, імпульсу). При побудові математичних моделей потрібно вибрати фазові змінні й записати закони збереження в цих змінних. Але самі по собі закони збереження не виділяють єдиного руху, їх недостатньо для замкнутого опису реальних процесів. Нагадаємо, що *модель замкнута*, якщо за початковим станом системи можна однозначно визначити всі її наступні стани.

У фізиці, механіці для замикання моделі використовують інші принципи, що звужують множину можливих рухів, тобто всякого

роду обмеження, наприклад початкові та граничні умови.

Крім фізичної матерії, існують ще жива матерія та соціальна матерія – суспільство. На рівні живої матерії процес моделювання починається теж із запису законів збереження (балансових співвідношень). Наприклад, якщо взяти екологічну систему, то тут закони збереження виражаються в термінах „хто кого поїдає”. Живій матерії властиві дії мети, тому додаткові умови відбору формуються на понятті зворотного зв'язку. Функціонування будь-якого живого організму можливе лише при певних зовнішніх умовах. Це означає, що при різних умовах живий організм повинен поводити себе так, щоб його стан не вийшов з тієї області параметрів, які забезпечують можливості існування організму. Область припустимих змін параметрів, при яких живий організм може існувати, називається областю гомеостазиса, а множина їх критичних значень – їх границею. Будь-який живий організм володіє „датчиками”, що дозволяють йому оцінити свій стан відносно границь гомеостазису. Механізм зворотних зв'язків властивий живій матерії, він формує реакцію організмів, які дозволяють їм відходити від границь гомеостазису в його середину. Одержавши інформацію про оточуючий світ (вектор x), організм формує свої дії (вектор u) залежно від одержаної інформації, тобто маємо функцію поведінки $u = f(x)$.

Таким чином живий організм, зберігаючи свій гомеостазис, породжує механізм відбору реальної поведінки. Отже, описати функціонування живої системи неможливо без використання принципів зворотних зв'язків, які називаються ще функціями поведінки. Доповнюючи закони біології, екології, хімії, функції поведінки дозволяють замкнути модель.

Окремо розглянемо особливості математичного моделювання екологічних систем. Математична екологія є достатньо обширною галуззю прикладної математики й зумовлено це тим, що методи математичного моделювання застосовуються до великої кількості екологічних об'єктів і розв'язують широкий спектр екологічних задач.

Для опису екосистем застосовують методи з різних областей математичного аналізу. Найбільш широке розповсюдження одержав підхід, що базується на апараті диференціального та інте-

грального числення. Диференціальні та різницеві рівняння описують причинно-наслідкові зв'язки в екосистемі та дозволяють вивчати динаміку процесів у режимі реального часу. Такі моделі називаються *описовими*. При цьому принципіальна складність полягає в тому, що не існує правил виведення самих рівнянь. Процедури їх побудови базуються на напівемпіричних закономірностях, припущеннях, аналогіях.

Технічні труднощі, що виникають при моделюванні, пов'язані з розмірністю задач, оскільки для біологічних угруповань, що використовують численні ресурси, потрібен підбір сотень параметрів і аналіз систем з десятків рівнянь. Але практика показує, що надто детальний опис багатокomпонентних систем часто приводить до одержання неправдоподібних результатів через використання великої кількості неточно визначених параметрів. Тому часто застосовують прийоми зниження кількості змінних – їх агрегування або в модель уводять тільки домінуючі фактори.

Такий підхід дозволяє вивчати біологічні системи лише в якісному плані, тобто дає можливість зрозуміти динамічні ефекти в поведінці системи. Такі моделі називаються *якісними моделями*.

Методами стохастичного моделювання, що базуються на інструменті теорії ймовірності й математичної статистики, можна реалізувати дескриптивні моделі, які дозволяють одержати інформацію про взаємозв'язки між найбільш важливими змінними, що описують екосистеми. Серед статистичних методів використовують ті, що не враховують час як змінну (проста, множинна, лінійна і нелінійна кореляція і регресія, дисперсійний і факторний аналізи) і динамічні методи, що враховують часову змінну (аналіз Фур'є, кореляційний і спектральний аналізи).

Для практичних цілей застосовують імітаційні моделі складних систем. Вони дозволяють враховувати всю наявну інформацію і тим самим прогнозувати поведінку системи або розв'язувати оптимізаційні задачі експлуатації популяцій. Програмна реалізація дозволяє за допомогою послідовності обчислювальних експериментів імітувати процес функціонування системи на ЕОМ.

Принципіально іншим є метод моделювання, що базується на застосуванні екстремальних принципів, згідно з якими в природі реалізуються лише ті стани системи, які надають екстремального

значення функції (функціоналу), що визначає розвиток системи й називається *цільовою* функцією.

Найвідоміший варіаційний принцип – це принцип Гамільтона, згідно з яким кожна механічна система веде себе так, щоб функціонал дії (інтеграл по часу від функції Лагранжа) був мінімальним. В екології є спроби використання цього варіаційного методу, а також багатьох інших. Серед них принцип максимуму мальтузіанського параметра, принцип оптимальної конструкції, принцип виживання та ін.

Серед методів математичного моделювання, що застосовуються в екології, варто виділити методи клітинних автоматів. Вони застосовуються для моделювання рослинного покриву та нерівномірного розподілу популяції по території.

Клітинні автомати – це динамічні моделі з дискретним часом, простором і станами. Простий клітинний автомат визначається сіткою L , простором станів Q , шаблоном сусідніх кліток і функцією переходів. Кожна клітка з сітки L може знаходитися в стані з простору Q . Клітки можуть з'єднуватися різними способами, в найпростішому випадку вони утворюють квадратну сітку. Клітки можуть одночасно змінювати свій стан в дискретні моменти часу. Наступний стан клітки залежить від станів оточуючих її сусідів і функції переходу. Функція переходу визначається формулою

$$a_{t+1}^s = f(a_t^u),$$

де a_t^s – стан клітки в момент часу t ; U – множина кліток, що є сусідніми з кліткою s ; f – функція переходу.

В останнє десятиліття широкого розповсюдження для хімічних, медичних, медико-біологічних, екологічних досліджень набули методи нейронних мереж. В екології вони застосовуються для моделювання динаміки риб, процесу відтворення фітопланктону тощо.

На суспільному рівні організації матерії виникає нове явище – трудова діяльність, тому при моделюванні процесів, що протікають у людському суспільстві, ми повинні певним чином описувати процедури обробки інформації. Людина на основі інформації приймає рішення, але залежність „реакція = f (сигнал)” складна й неоднозначна.

Крім того, в суспільстві існують різні групи людей, колективів, які мають свої цілі (часто антагоністичні) й різні засоби досягнення цих цілей, тому математичний опис функції зворотного зв'язку – це своєрідна проблема. Частіше за все, ми не можемо формалізувати суспільні процеси і сьогодні знаходимося лише на підступах до розв'язання цієї задачі.

Але, незважаючи на таку складність, математичне моделювання суспільного життя вже широко застосовується. І в біологічних, і в соціальних системах математичні моделі служать не стільки для одержання точних кількісних характеристик (як у неживій природі), скільки для знаходження оцінок припустимих границь наших дій, тенденцій їх розвитку.

1.6. Ідентифікація моделей

Важливим етапом моделювання є ідентифікація моделей. Термін "ідентифікація" походить від латинського слова *identifico*, що в перекладі означає ототожнюю, розпізнаю. Ідентифікація означає ототожнення моделі об'єкту-оригіналу.

Ідентифікація – це розділ математичного моделювання, в якому вивчаються методи побудови математичних моделей, які достатньо точно відображають дійсність. Найбільш загальне визначення ідентифікації дано Заде, який визначив ідентифікацію як встановлення відповідності між даною реальною системою і системою, яка обрана користувачем з деякої множини систем (моделей).

Мета ідентифікації – це побудова ефективної моделі, яка буде адекватною реальній дійсності. Методи ідентифікації – це процедури побудови адекватної (в деякому розумінні) моделі системи на основі експериментальних даних.

Для практичного використання модель повинна бути ідентифікована на основі експериментальних даних. Ідентифіковані моделі використовуються в подальшому для аналізу й оптимізації процесів поведінки реальних систем, планування його розвитку, тому дослідникам необхідно вміти будувати адекватні математичні моделі систем так, щоб адекватність забезпечувалася для найбільш характерних умов функціонування даної системи.

Задача ідентифікації формулюється так: нехай у результаті експериментів над деяким об'єктом заміряні вхідні X_1, X_2, \dots, X_n та вихідні Y_1, Y_2, \dots, Y_m змінні. Потрібно визначити вид (структуру) і значення параметрів оператора A , який ставить у відповідність змінним X змінні Y .

У зв'язку з цим у теорії ідентифікації прийнято розрізняти дві задачі: задачу ідентифікації в широкому розумінні (структурна ідентифікація) і задачу ідентифікації у вузькому розумінні (параметрична ідентифікація).

У першому випадку вважається невідомою структура й параметри оператора A , в другому – лише параметри цього оператора.

Задача структурної ідентифікації полягає у виборі структури (класу) моделі за спостереженнями об'єкта, тобто у виборі вигляду й характеру математичних співвідношень, які утворюють математичну модель. Оскільки під моделлю розуміють співвідношення $Y = A(X)$, де X – вхідні, Y – вихідні параметри, то задача структурної ідентифікації полягає в побудові (синтезі) модельного оператора A . Точніше: при ідентифікації ставиться задача визначення не самого оператора A , а його наближеного значення, тобто його оцінки A^* за результатами спостереження, так щоб A^* був близьким до A в розумінні деякого критерію. Задача визначення класу оператора (функції) важко формалізується і вимагає евристичних пошуків. Загального підходу до розв'язування задач структурної ідентифікації немає і для його створення, мабуть, потрібний оригінальний математичний апарат. Нині теорія структурної ідентифікації ще далека до свого завершення.

Якщо структура оператора A уже відома, то потрібно ще на основі експериментальних даних знайти значення параметрів цієї структури, бо структура моделі – це ще не сама модель.

Задача параметричної ідентифікації полягає у визначенні параметрів оператора A (коефіцієнтів рівнянь) при обраній його структурі.

Практика показує, що для належної ідентифікації моделі складного процесу потрібно витратити на порядок більше зусиль, ніж на розробку самої моделі. Інколи інформація, необхідна для ідентифікації, відсутня, деколи для ідентифікації необхідно організувати спеціальні дослідження, експерименти.

Після проведення експериментів формується матриця результатів спостережень

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{n1} & y_1 \\ x_{1N} & \dots & x_{nN} & y_N \end{pmatrix},$$

де n – кількість вхідних даних, N – кількість дослідів, x_{ij} – значення i -ої змінної в j -му експерименті, y_j – значення вихідної змінної.

Нехай структура оператора відома, необхідно знайти числові значення коефіцієнтів, що входять до моделі (параметрів моделі).

Задача параметричної ідентифікації полягає у відшуванні таких оцінок параметрів математичної моделі, які забезпечують найкращу в деякому розумінні близькість розрахункових Y_p і експериментальних значень Y_e при однакових значеннях вихідної змінної X . Реалізація пошуку параметрів математичної моделі, взагалі кажучи, є громіздкою задачею і як правило вимагає застосування числових методів для знаходження екстремальних значень функцій і функціоналів. Окрім того, ці задачі можуть бути некоректними і не завжди приводять до єдиного розв'язку.

Як приклад кількісної міри близькості моделі й оригіналу частіше за все використовується сума квадратів різниць теоретичних і експериментальних даних

$$I = \sum_{j=1}^N (y_{jp} - y_{je})^2.$$

Метод найменших квадратів полягає у виборі оцінок невідомих параметрів, що мінімізують вираз I і є методом оцінювання невідомих параметрів теоретичних моделей за експериментальними даними. Авторами цього методу вважаються К. Гаусс¹¹ і Лежандр¹². Перші застосування елементів методу та його назва належать Лежандру (1806 р.), але обґрунтування цього методу та його розвиток були зроблені Гауссом.

Наведемо деякі приклади ідентифікації систем. Спочатку розглянемо задачу структурної ідентифікації.

¹¹Гаусс Карл (1777 – 1855) – німецький математик, механік, фізик і астроном.

¹²Лежандр Андрієн Марі (1752 – 1833) – французький математик.

Приклад 1.6.1. Нехай тіло масою m падає вертикально вниз із деякої висоти. Сила тертя, яка діє на тіло, пропорційна величині швидкості: $F = -\alpha v$, де $a = \text{const} > 0$ – коефіцієнт тертя. Потрібно визначити процес зміни швидкості від часу.

Нехай $v(t)$ – швидкість тіла в момент часу t . На тіло діють дві протилежно направлені сили: сила ваги $P = mg$ та сила тертя F .

На основі другого закону Ньютона можна виписати диференціальне рівняння, тобто визначити структуру математичних співвідношень, які складають математичну модель:

$$m \frac{dv}{dt} = F = P + F_B, \quad \text{або} \quad m \frac{dv}{dt} = -\alpha v + mg. \quad (1.6.1)$$

Структуру моделі (1.6.1) ми отримали на основі фізичного закону.

Проінтегрувавши рівняння (1.6.1), одержуємо

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} + C e^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

Якщо тіло починає рух із нульовою швидкістю $v(0) = 0$, то $C = -\frac{mg}{\alpha}$ і

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right).$$

Задача параметричної ідентифікації полягає в підборі параметрів m , α так, щоб функція $v(t)$ у найкращий спосіб у деякому розумінні наближала експериментальні дані. \blacktriangle

Розглянемо приклад застосування методу найменших квадратів для ідентифікації параметрів рівнянь стану.

Приклад 1.6.2. Нехай для деякого елемента системи відомо, що рівняння стану є диференціальним рівнянням першого порядку

$$\frac{du_{\text{вих}}}{dt} + \theta u_{\text{вих}} = \gamma u_{\text{вх}}, \quad u_{\text{вих}}(0) = u_0, \quad (1.6.2)$$

де $u_{\text{вих}}(t)$ – вихідний сигнал; $u_{\text{вх}}(t)$ – вхідний сигнал; θ , γ – постійні величини.

Теоретичний закон зміни величини $u_{\text{вих}}^T(t)$ при $t \in [0, T]$ подамо у вигляді рівняння із заданою початковою умовою u_0 :

$$u_{\text{вих}}^T(t, \theta, \gamma) = u_0 e^{-\theta t} + \gamma \int_0^t u_{\text{вх}}(s) h(t-s) ds,$$

де $h(t) = e^{-\theta t}$ – фундаментальний розв’язок рівняння (1.6.2).

Нехай ми провели експеримент – на вхід ланки системи подали відомий сигнал $u_{\text{вх}}(t)$, а на виході заміряли сигнал $u_{\text{вих}}^*(t)$. Тоді ідентифікація параметрів θ , γ за методом найменших квадратів відбувається в результаті мінімізації функції

$$L(\theta, \gamma) = \int_0^T (u_{\text{вих}}^T(s, \theta, \gamma) - u_{\text{вих}}^*(s))^2 \mu(s) ds$$

за параметрами θ , γ . Вагова функція $\mu(t)$ обирається з деяких евристичних міркувань при збереженні умов $\mu(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$, $\int_0^T \mu(s) ds = 1$. Для динамічних систем метод ідентифікації і його алгоритм пов’язаний з інтегральним критерієм відповідності моделі реальності.

Необхідна умова мінімуму функції $L(\theta, \gamma)$ приводить до системи двох нелінійних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \int_0^T u_{\text{вих}}^T(s, \theta, \gamma) \frac{du_{\text{вих}}^T(s, \theta, \gamma)}{d\theta} \mu(s) ds &= \\ &= \int_0^T u_{\text{вих}}^*(s) \frac{du_{\text{вих}}^T(s, \theta, \gamma)}{d\theta} \mu(s) ds, \\ \int_0^T u_{\text{вих}}^T(s, \theta, \gamma) \frac{du_{\text{вих}}^T(s, \theta, \gamma)}{d\gamma} \mu(s) ds &= \\ &= \int_0^T u_{\text{вих}}^*(s) \frac{du_{\text{вих}}^T(s, \theta, \gamma)}{d\gamma} \mu(s) ds, \end{aligned}$$

з якої знайдемо параметри θ , γ . ▲

Приклад 1.6.3. Розглянемо модель процесу, при якому швидкість зміни деякої величини лінійно залежить від її поточного стану, тобто математичною моделлю процесу є система лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b, \quad (1.6.3)$$

де $x(t)$ – n -вимірний вектор, A – постійна $n \times n$ -матриця, b – постійний вектор. Задача полягає в ідентифікації параметрів A та b за спостереженнями $x(t)$.

Нехай вимірюється стан системи в моменти часу $t=\tau i$, $i=0,1, \dots, m$, де τ фіксована величина (часовий крок), тобто маємо набір спостережуваних значень $x(0), x(\tau), \dots, x(m\tau)$.

Відповідно до формули Коші для розв'язку системи (1.6.3), маємо

$$x(t) = e^{A\tau}(x(t-\tau) + \int_0^\tau e^{-As} b ds). \quad (1.6.4)$$

Уведемо позначення $C=e^{A\tau}$, $D = e^{A\tau} \int_0^\tau e^{-As} b ds$ і перепишемо (1.6.4) у вигляді

$$x(t) = Cx(t-\tau) + D. \quad (1.6.5)$$

У момент часу $t+\tau$ маємо

$$x(t+\tau) = Cx(t) + D. \quad (1.6.6)$$

Віднімаючи співвідношення (1.6.5), (1.6.6), дістанемо

$$x(t+\tau) - x(t) = C(x(t) - x(t-\tau)).$$

Позначимо $x(t+\tau)-x(t)=y(t+\tau)$, тоді одержимо, що $y(t+\tau)=Cy(t)$, або, записуючи останнє співвідношення для $t=\tau, 2\tau, \dots, (m-1)\tau$, дістанемо векторний запис $(y_2, \dots, y_m)=C(y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$, де $y_k=y(k\tau)$, $k=1,2, \dots, m$.

Для знаходження матриці C необхідно, щоб існувала обернена матриця для матриці $(y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$. Оскільки $y(t)$ – n -вимірний вектор, то має виконуватися рівність $m-1 = n$, тобто $m = n + 1$, і умова $\det(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$. При цьому $C=(y_2, \dots, y_{n+1})(y_1, y_2, \dots, y_n)^{-1}$, а вектор $D=x(\tau)-Cx(0)$.

Отже, матриця $C = e^{A\tau}$ може бути знайдена за $n+1$ вимірюванням величини $x(t)$. Ця властивість системи називається *ідентифікованістю*. Зауважимо, що при цьому виникають проблеми зі знаходженням матриці A , оскільки матричний логарифм має неоднозначність: для однієї і тієї ж матриці C існує зчисленна кількість дійсних логарифмів. ▲

1.7. Агрегування математичних моделей

У даний час математичне та імітаційне моделювання стало одним із найбільш розповсюджених і ефективних методів дослідження складних реальних явищ та процесів.

При моделюванні дослідник має справу, як правило, зі складними об'єктами, які характеризуються величезною кількістю змінних і параметрів, точна кількість яких невідома. Крім того, часто відсутні або неповні експериментальні дані про параметри, без яких модель не може бути адекватною.

Уже на етапі вибору параметрів моделі виникає питання, які саме змінні системи необхідно включити в модель, скільки їх має бути. Очевидно, що включення в модель усіх елементів привело б її до надзвичайної складності, ускладнило б роботу з нею, її розуміння та інтерпретацію одержаних результатів, поставило б вимоги до експериментальної інформації. Тому вже на етапі моделювання виникає проблема агрегування моделі. При агрегуванні параметри спрощеної моделі подають як агрегати величин вихідної моделі у вигляді нових змінних. Агрегування здійснюється так, щоб одержана більш проста математична модель описувала тільки головні риси реального об'єкта. Інколи агреговані моделі будуються для вивчення топологічних властивостей вихідної системи, наприклад, коли необхідно визначити, чи система стійка в цілому.

Під агрегуванням компонент системи будемо розуміти процедуру об'єднання однорідних за якимись ознаками компонент у блоки (агрегати), кожний з яких є компонентою нової моделі, більш ефективної для дослідження.

Часто агреговані змінні вводяться як суми деяких компонент вихідних невідомих величин, в інших випадках беруться зважені суми, а також агреговані змінні можуть бути введені штучним способом.

Якість агрегування перевіряється шляхом зіставлення результатів відтворення однієї й тієї ж ситуації на двох моделях. При агрегуванні висувуються різні гіпотези відносно принципів його реалізації. Перевірка гіпотез здійснюється шляхом проведення обчислювальних експериментів на моделях.

У загальному випадку задача агрегування ставиться так. Нехай задана динамічна система

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in E_x. \quad (1.7.1)$$

Системі (1.7.1) поставимо у відповідність деяку іншу систему

$$\dot{z} = \Phi(z), \quad z \in E_z. \quad (1.7.2)$$

Кажуть, що система (1.7.2) одержана в результаті агрегування системи (1.7.1), якщо

$$\dim E_x > \dim E_z$$

й існує сур'єктивне відображення

$$\varphi : E_x \rightarrow E_z, \quad z = \varphi(x),$$

таке, що, якщо $\dot{x} = F(x)$, то $\frac{d}{dt}\varphi(x(t)) = \Phi(\varphi(x(t)))$.

Проблема агрегування досить актуальна при моделюванні різних систем. Нею займаються хіміки для опису багатокомпонентних реакцій, економісти для моделювання складних економічних систем, у теорії автоматичного управління при дослідженні динаміки складних систем, у теоретичній фізиці тощо. Ідея агрегування є основною при побудові систем імітації.

Найбільш повно в даний момент теорія агрегування розроблена для моделювання економічних систем. Причини цього такі:

- велика розмірність, недостатність інформації;
- більшість економічних задач при спробі їх розв'язування за допомогою детальних неагрегованих моделей були б нерозв'язні навіть на сучасних ЕОМ.

Модель міжгалузевого балансу, або модель витрати–випуск, є традиційною областю застосування методів агрегування. При побудові цієї моделі неминуче виникають питання вибору рівня деталізації, способів класифікації галузей, а також питання розробки методів обчислення коефіцієнтів прямих затрат. Множини вихідних змінних розбиваються на підмножини, які розглядаються в подальшому як агреговані змінні.

Вихідна статична модель міжгалузевого балансу (модель Леонтьєва) розмірності n має вигляд

$$X = AX + Y, \quad (1.7.3)$$

де $X = \text{colop}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – вектор повного випуску, $Y = \text{colop}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – вектор кінцевого випуску, $A = \|a_{ij}\|_1^n$ – матриця коефіцієнтів прямих затрат.

Агрегування моделі (1.7.3) полягає в побудові аналогічної матриці Q розмірності $m < n$, яка зв'яже агрегований повний випуск $P = \text{colop}(p_1, p_2, \dots, p_m)$ з агрегованим кінцевим випуском $R = \text{colop}(r_1, r_2, \dots, r_m)$, тобто

$$P = QP + R.$$

Матриця Q називається агрегованою матрицею прямих витрат.

Існують різні прийоми агрегування математичних моделей – від інтуїтивних до строго теоретично обґрунтованих. Пояснимо цей факт на агрегуванні екологічних систем.

Проблема агрегування в математичному моделюванні екологічних систем розв'язується за кількома напрямками:

1. Розділити екосистему на види. Такий поділ екосистеми може привести до появи в моделі 100, 1000 змінних і зробити її незручною для дослідження.

2. В екології зазвичай системи мають ієрархічну (вертикальну) структуру, тому тут можливе агрегування, при якому кожна група змінних одного трофічного рівня об'єднуються в одну змінну таким чином, що агреговані змінні конструюються з деякої множини початкових змінних, які належать одному рівню, тобто як агреговані змінні розглядають або сумарні біомаси, або загальні чисельності всіх видів одного трофічного рівня. Але такі моделі мало придатні для розв'язування практичних задач і можуть мати лише теоретичний інтерес. Крім цього, неоднозначно може бути визначене поняття трофічного рівня.

3. Поділ системи за трофічними характеристиками. Але і цей поділ важко здійснити, оскільки в різних видів одні характеристики можуть співпадати, а інші – ні. В цих умовах представники

одного виду можуть належати до різних груп. Так, деякі види зоопланктону можуть кормитися як фітопланктоном, так і зоопланктоном, і внаслідок цього розділені на різні групи, але водночас за рештою характеристик вони не розрізняються між собою.

4. Агрегування шляхом введення заміни змінних, так щоб праві частини агрегованих моделей можна було б представити в агрегованих змінних.

В екології проблема агрегування ще ускладнюється істотною нелінійністю систем. Нелінійність ускладнює пошук математичного опису агрегованої системи.

Наведемо приклад агрегування математичної моделі.

Приклад 1.7.1. Нехай ми маємо динамічну систему з неперервним часом, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1, \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 + x_2 - x_3. \end{cases}$$

Запровадимо заміну змінних $z_1 = x_1 + x_2$, $z_2 = x_3$, тоді вихідну систему шляхом додавання двох перших рівнянь можна записати в агрегованій формі

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_1 + z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = z_1 - z_2, \end{cases}$$

яка простіша для дослідження. ▲

1.8. Декомпозиція математичних моделей

При формалізації складних процесів і явищ у багатьох прикладних областях виникають задачі, в яких кількість змінних і зв'язків вимірюється сотнями і тисячами.

Для розв'язування великих задач використовують ЕОМ. Однак використання ЕОМ ставить ряд істотних проблем. Зокрема, через високу розмірність задачі може не вистачити оперативної пам'яті або розв'язування задачі може вимагати астрономічних затрат машинного часу, або, що найбільш суттєво, може відбуватися накопичення похибок, що призведе до недостовірних результатів.

Одержати розв'язок такої задачі стає нереальним. У підході, що базується на агрегуванні, виникають проблеми, пов'язані з вибором агрегатів, проблеми по відновленню інформації про вихідні змінні за агрегатами, проблеми адекватності моделі. Особливо це актуально при розв'язуванні задач у реальному режимі часу. При розв'язуванні задач великої розмірності розв'язок можна одержати, використовуючи декомпозицію, тобто зведення вихідної задачі до сукупності задач з меншими розмірностями.

Проблеми зниження розмірності для багатовимірних задач стали інтенсивно вивчатися на початку 60-х років минулого століття. Перші багатовимірні задачі виникли в математичній економіці через широку номенклатуру продукції та значну кількість видів використовуваних ресурсів. Були розроблені інтерактивні методи декомпозиції для блочних задач лінійного програмування, які описують ієрархічні моделі економічного планування. Пізніше стали пропонуватися різні способи пониження розмірності для великих динамічних систем, що описуються диференціальними рівняннями у звичайних і частинних похідних.

Декомпозиція – це розбиття вихідного об'єкта на більш прості об'єкти, як правило, тієї ж природи, що й вихідний об'єкт, причому сукупність більш простих об'єктів еквівалентна вихідному об'єкту, тобто декомпозиція передбачає подальше поєднання складових частин.

Декомпозиція і агрегування є основними методами дослідження складних систем. Укажемо ще на одну причину розробки методів декомпозиції. Високі вимоги до швидкодії і достовірності розв'язування задач при управлінні технологічними об'єктами привели до розробки багатопроцесорних обчислювальних комплексів. На основі методів декомпозиції з'являються можливості будувати числові алгоритми з організацією паралельних обчислень. Завдяки розпаралелюванню декомпозиція приводить до істотного зменшення машинних ресурсів при розв'язуванні багатовимірних задач.

Декомпозиція математичних моделей – це розбиття складної математичної моделі на ряд незалежних більш простих моделей. Для декомпозиції математичних моделей використовуються методи розділення змінних, методи розділення рухів за тем-

пами їх зміни, методи малого параметра (див. розділ 4) та ін. Розрізняють також точні та наближені методи декомпозиції.

Покажемо, як працює метод декомпозиції для диференціальних рівнянь. Нехай математичною моделлю деякого керованого процесу є диференціальне рівняння вигляду

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n, u_1, u_2, \dots, u_r), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.8.1)$$

де $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – вектор фазових змінних (внутрішні змінні), $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ – вектор управління (зовнішні змінні). Параметри u знаходяться в розпорядженні керуючих органів, за їх допомогою можна цілеспрямовано направляти процес. Модель (1.8.1) має достатньо загальний вигляд, дуже багато процесів управління описуються цими рівняннями.

Початковий стан процесу $(t_0, y(t_0))$ і відомі на $[t_0, T]$ величини $u(t)$ повністю визначають на цьому відрізку фазові змінні y_1, y_2, \dots, y_n . Будемо вважати, що праві частини $f_i(t, y, u), i = 1, 2, \dots, n$, системи (1.8.1) неперервно диференційовані за y_1, y_2, \dots, y_n і неперервні за t, u_1, u_2, \dots, u_r в деякій області M $n + 1$ -вимірному простору.

Щоб з (1.8.1) отримати еквівалентну систему, зробимо заміну змінних

$$z_i = g_i(t, y), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.8.2)$$

Для здійснення заміни необхідно, щоб (1.8.2) була достатньо гладкою. Припустимо, що $g(t, y)$ є взаємо однозначним (бієктивним) відображенням, тобто існує обернене перетворення $y_i = (g_i(t), z)^{-1}, i = 1, 2, \dots, n$, яке внаслідок бієктивності теж гладке.

У результаті переходу до фазових змінних z_i одержимо

$$\frac{dz_i}{dt} = \varphi_i(t, z_1, z_2, \dots, z_n, u_1, u_2, \dots, u_r), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.8.3)$$

Якщо система (1.8.3) буде мати вигляд

$$\frac{dz_k}{dt} = \varphi_k(t, z_1, z_2, \dots, z_m, u_1, u_2, \dots, u_q), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\frac{dz_l}{dt} = \varphi_l(t, z_{m+1}, z_{m+2}, \dots, z_n, u_{q+1}, \dots, u_r), \quad l = m + 1, \dots, n,$$

то це і є декомпозицією системи (1.8.1) на дві замкнені незалежні системи, вони не зв'язані між собою, мають меншу розмірність, ніж вихідна система, і можуть розв'язуватися в паралель.

Більш загальний випадок декомпозиції системи (1.8.1) – це випадок, коли замкнена лише одна із систем

$$\frac{dz_k}{dt} = \varphi_k(t, z_1, z_2, \dots, z_m, u_1, u_2, \dots, u_q), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

$$\frac{dz_l}{dt} = \varphi_l(t, z_1, \dots, z_m, z_{m+1}, z_{m+2}, \dots, z_n, u_1, \dots, u_q, u_{q+1}, \dots, u_r),$$

$$l = m + 1, \dots, n.$$

Замкнена лише перша система, друга система стане замкненою, якщо туди підставити розв'язки $z_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$.

Приклад 1.8.1. Проілюструємо процес декомпозиції на конкретному прикладі. Нехай нам задана система двох диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \quad (1.8.4)$$

Поділимо обидва рівняння на y_2 , дістанемо

$$\frac{1}{y_2} \frac{dy_1}{dt} = a_{11} \frac{y_1}{y_2} + a_{12}, \quad \frac{1}{y_2} \frac{dy_2}{dt} = a_{21} \frac{y_1}{y_2} + a_{22}. \quad (1.8.5)$$

Зробимо тепер заміну змінних $z_1 = \frac{y_1}{y_2}$, $z_2 = y_2$. Враховуючи (1.8.5), одержимо

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{y_1}{y_2} \right) = \frac{1}{y_2^2} \left(\frac{dy_1}{dt} y_2 - y_1 \frac{dy_2}{dt} \right) = \frac{1}{y_2} \frac{dy_1}{dt} - \frac{1}{y_2} \frac{dy_2}{dt} \frac{y_1}{y_2} = \\ &= a_{11} \frac{y_1}{y_2} + a_{12} - \frac{y_1}{y_2} (a_{21} \frac{y_1}{y_2} + a_{22}) = a_{11} z_1 + a_{12} - z_1 (a_{21} z_1 + a_{22}). \end{aligned}$$

З другого рівняння системи (1.8.4), враховуючи заміну змінних, маємо

$$\frac{dz_2}{dt} = \frac{dy_2}{dt} = a_{21} z_2 z_1 + a_{22} z_2 = (a_{21} z_1 + a_{22}) z_2.$$

Тобто декомпозиція системи (1.8.4) має вигляд

$$\frac{dz_1}{dt} = a_{11}z_1 + a_{12} - z_1(a_{21}z_1 + a_{22}),$$

$$\frac{dz_2}{dt} = (a_{21}z_1 + a_{22})z_2. \blacktriangle$$

1.9. Комп'ютерне моделювання. Програмні засоби моделювання

Застосування технології математичного моделювання передбачає застосування обчислювальних методів і комп'ютерної техніки. Удосконалення комп'ютерної техніки привело до появи сучасних ЕОМ із великим обсягом пам'яті й високою швидкістю виконання арифметичних операцій. У результаті виникла матеріальна база для становлення і швидкого розвитку математичного моделювання, з'явилися реальні можливості використання обчислювального експерименту не тільки з існуючими об'єктами, але й при проектуванні нових складних систем. Комп'ютерне моделювання і обчислювальний експеримент широко використовується в математичному моделюванні процесів і явищ. Математичне моделювання разом із сучасною обчислювальною технікою робить реальним обчислювальний експеримент, тобто, склавши програму за алгоритмом функціонування об'єкта, на ЕОМ можна проводити серію обчислювальних експериментів – тим самим досліджувати властивості об'єкта, аналізувати альтернативи, перевіряти припущення, програвати різноманітні сценарії, знаходити оптимальні параметри і режими роботи, прогнозувати поведінку тощо. Обчислювальний експеримент став основою наукових відкриттів.

За допомогою модельних експериментів можна вивчати такі об'єкти, для яких натурні експерименти неможливі. Обчислювальні експерименти проводять не з реальними об'єктами, а з математичними моделями. Завдяки обчислювальним експериментам скорочуються терміни дослідження, знижуються матеріальні затрати. Комп'ютерні моделі застосовуються для розв'язування найскладніших проблем, наприклад, керований термоядерний синтез, моделювання еволюції Всесвіту, розв'язування соціально-економічних задач, моделювання складних технічних систем. Так,

обчислювальний експеримент дозволив знизити затрати на проведення натурних аеродинамічних випробувань аеробуса й добитися зменшення аеродинамічного опору на 20% порівняно з існуючими аналогами.

Отже, під комп'ютерною моделлю розуміють програму, яка може інтерпретуватися комп'ютером і відтворювати на комп'ютері процес або явище відповідно до математичного опису. Програмна реалізація математичної моделі може бути доповнена службовими програмами.

Для успішного розв'язування задач моделювання необхідне відповідне математичне забезпечення. При реалізації комп'ютерної моделі важливим моментом є вибір інструментальних програмних засобів. Нині існує багато програмних засобів, що дозволяють реалізувати задачі математичного, зокрема імітаційного, моделювання. Це й мови програмування різного рівня, й універсальні математичні пакети (MathCad, Matlab, Mathematica, Maple та ін.), і спеціалізовані засоби візуального моделювання (Vissim, Powersim, AnyLogic та ін.). Але необхідно мати на увазі, що при моделюванні можуть виникати проблеми, розв'язування яких не завжди можна довіряти універсальним математичним пакетам.

Універсальні математичні пакети. До переваг математичних пакетів варто віднести простий і зручний інтерфейс, широкую бібліотеку вбудованих функцій і числових методів, можливість символічних обчислень, графічні засоби подання результатів, а також можливість інтеграції з програмними засобами візуального моделювання. Математичні пакети є інструментальними засобами, які дозволяють реалізувати як аналітичне, так і імітаційне моделювання різних систем.

Серед математичних пакетів найбільш простим у засвоєнні з точки зору користувачького інтерфейсу і достатньо потужним засобом моделювання є система MathCad (з'явилась в 1984 р.). MathCad – це популярна система комп'ютерної математики, що призначена для автоматизації розв'язування математичних задач у різних галузях науки, техніки й освіти. Використовуючи вбудовані алгоритми, MathCad дозволяє розв'язувати багато різних математичних задач без використання програмування.

Система дозволяє виконувати числові й символні обчислення, операції зі скалярними величинами, векторами і матрицями, переводити величини однієї розмірності в іншу, вона володіє засобами дво- та тривимірної графіки, можливістю інтеграції з основними офісними і конструкторськими програмами.

У системі MathCad введена можливість розширення її функціями, що реалізуються самостійно розробленими програмами. Крім цього, існують засоби розширення, які представлені додатковими бібліотеками, електронними книгами, пакетами розширення. Це дозволяє налаштувати систему на ефективне розв'язування різноманітних задач.

Поряд із MathCad широке розповсюдження одержав пакет Matlab. Середовище Matlab є потужною інструментальною системою, яка ввібрала в себе не тільки передовий досвід розвитку числових методів розв'язування задач, але і величезний досвід математики. Особливо детально пророблені алгоритми матричних операцій, що звільняє користувача від програмування операцій з векторами та матрицями і надає широкі можливості числового моделювання лінійних, нелінійних систем великої розмірності. Для їх розв'язування використовуються ітераційні алгоритми. В базовій системі Matlab добре представлені методи для роботи з розрідженими матрицями, засоби спектрального аналізу, методи обробки зображень тощо. Matlab включає в себе більш, ніж 30 спеціалізованих бібліотек для розв'язування задач прикладної математики, а також графічні засоби для візуалізації результатів моделювання з ефектами анімації та аудифікації даних.

Matlab – найбільш повний і ефективний інструмент аналітичного та імітаційного моделювання (проекування) складних систем. Саме в сфері математичного моделювання Matlab дозволяє повністю використовувати всі сучасні досягнення комп'ютерних технологій. Мова Matlab – високоефективна мова програмування для науково-технічних розрахунків.

Одна з найважливіших проблем при реалізації математичного моделювання в середовищі Matlab – підготовка моделі. Модель представляється у формі графічного або табличного опису. При цьому об'єкт потрібно подати у вигляді окремих компонентів, далі необхідно передбачити зв'язки між компонентами та встано-

вити їх параметри. При запуску моделі на виконання автоматично створюється система рівнянь, що описує об'єкт і здійснюється виведення результатів.

Пакетом розширення сучасних версій середовища Matlab є пакет візуального програмування Simulink. Засобами Simulink можна розв'язувати задачі математичного моделювання складних динамічних систем у фізиці, електротехніці, біології та інших галузях науки і техніки. Він дозволяє здійснювати моделювання поведінки динамічних систем шляхом графічної зборки будь-якої системи з окремих блоків, що зберігаються в бібліотеках Simulink і відповідають елементам структурної чи функціональної схеми системи. Моделлю в Simulink є блочна діаграма, що містить компоненти системи у вигляді окремих блоків і підсистем з відповідним описом їх властивостей. Складні рівняння стану, що складають модель системи, формуються автоматично.

Бібліотека компонентів достатньо широка, вона включає джерела сигналів з будь-якими часовими залежностями, інтегруючі та диференціюючі блоки, масштабуючі, лінійні та нелінійні перетворення характеристик тощо.

Програмний засіб Simulink є представником візуально-орієнтованих засобів програмування. На всіх етапах роботи, особливо при підготовці моделі, користувач не має справи зі звичайним програмуванням. Програма в кодах автоматично генерується в процесі введення вибраних блоків, компонент, їх з'єднань і задання їх параметрів. Користувач за допомогою миші переносить необхідні блоки з бібліотеки на робочий стіл пакета Simulink і з'єднує лініями (каналами) входи і виходи блоків. Параметри і характеристики блоків налаштовуються в інтерактивному режимі. Засоби графічної анімації Simulink дозволяють наочно показувати результати моделювання.

Разом із базовою системою Matlab, що має найбільш довершені алгоритми матричних обчислень, Simulink є потужним інструментом пізнання реальності засобами моделювання.

Комп'ютерна система Maple – теж потужний засіб математичного моделювання. Вона містить ефективні числові та символні підсистеми. Вона призначена до розв'язування широкого спектра математичних задач як аналітичними, так і числовими методами.

Система моделювання Vissim. Система моделювання Vissim (Visual Simulator) призначена для розв'язування задач математичного моделювання фізичних і технічних об'єктів.

Інтерфейс програми Vissim являє собою інтерактивний віртуальний стенд, що забезпечує побудову моделей з окремих блоків, запуск моделювання, управління ним і контроль результатів.

До моделі Vissim можуть бути під'єднані через додаткові комп'ютерні плати фізичні пристрої, якими модель, що побудована в Vissim, зможе управляти, тобто об'єктом управління моделі системи може бути реальний пристрій.

Моделі систем і об'єктів у Vissim будуються з окремих елементів – блоків. Блок – це віртуальний аналог фізичного елемента реальної системи. Блоки Vissim можуть мати входи і виходи, через які передаються сигнали з одного блоку на інший. Кількість блоків у бібліотеці біля сотні, але користувач може поповнити набір блоків за допомогою пакетів розширення. Бібліотека блоків представлена в позиції Blocs (Блоки).

Кожний блок зображається на діаграмі, як правило у вигляді прямокутника, всередині якого схематично зображено його функціональне призначення. Взаємодія між блоками відображається лініями зв'язку, що вказують напрям передачі сигналу від одного блока до іншого.

Для візуального спрощення діаграм можна використовувати об'єднання блоків в один блок (група блоків на діаграмі буде зображатися єдиним блоком).

Взаємодія між блоками моделюється сигналами – функціями часу, що передаються між блоками по лініях зв'язку. Сигнали в моделі можуть бути виміряні за допомогою віртуальних вимірюваних пристроїв.

При запуску моделі в роботу програма починає аналізувати з'єднання блоків і на основі цього аналізу складає диференціальні, алгебраїчні рівняння, що описують модель, і розв'язує їх. В результаті роботи моделі вихідні сигнали блоків почнуть змінюватися, їх величини проглядають на віртуальному осцилографі.

Інтеграція системи Vissim з іншими програмними засобами розширює круг задач моделювання і реалізує ефективні числові методи при дослідженні моделей.

Варто зауважити, що зручності, які надає сучасне програмне забезпечення, часто викликають бажання при кількісному аналізі математичних моделей використати засоби універсальних математичних пакетів. Однак метод, який годиться для розв'язування багатьох стандартних задач, часто не підходить для розв'язування конкретної нестандартної задачі.

При розв'язуванні нових і складних задач формальне звернення до універсальних пакетів і програмних комплексів може призвести до недостовірних результатів. Вихід з цього потрібно знаходити в умілому поєднанні аналітичних методів і застосуванні ЕОМ.

1.10. Імітаційні системи та моделі

Як уже відзначалося, будь-яка математична модель є формальною схемою реального явища, з якої за допомогою формальної логіки можна отримувати нові знання про реальне явище. Природно, існує практичне обмеження на складність цих схем. Ці обмеження залежать від тих засобів, якими ми володіємо у сфері математики. Як би сильно не були розвинуті інструменти дослідження формальних схем, завжди існують процеси, що не піддаються вивченню математичними методами, тобто ускладнення задач випереджують можливості математичного моделювання. Але це не означає, що ці процеси не можна пізнати.

З появою ЕОМ істотно зріс рівень складності математичних моделей, за допомогою яких можна правильно передбачити поведінку системи та її властивості, тобто з'явилися математичні моделі, які різко відрізняються від „домашинних”. Коли явища в складних системах настільки складні, що аналітична модель є досить грубим наближенням дійсності, то, крім математичних моделей, використовуються моделі, які відтворюють на ЕОМ поведінку тієї чи іншої складної системи протягом деякого часу. Ці моделі одержали широке застосування і стали називатися *імітаційними моделями*.

В імітаційних моделях поєднуються математичні методи та методи гуманітарних дисциплін – такі ж необхідні методи вивчення реальності, як і математичні. Математика, схематизуючи явище,

позбавляє його при цьому індивідуальності, неповторних рис. Гуманітарні науки й мистецтво, навпаки, виділяють в явищах неповторне, індивідуальне та властиве лише цьому явищу. Ці способи вивчення реальності взаємопов'язані й доповнюють одне одного.

Гуманітарними методами можна вивчати явища різної складності. Математичними методами можемо вивчати лише ті явища, складність яких відповідає засобам формального аналізу. Але математика постійно відвойовує в гуманітарних методів чимраз нові сфери, оскільки постійно розвиваються методи формального аналізу.

Моделі, які використовують математичні та гуманітарні методи, створили новий клас моделей, які стали називатися *імітаційними* моделями. Межа між гуманітарними та математичними методами проходить саме по імітаційних моделях. Імітаційні моделі – немовби проміжна ланка між реальністю та математичними моделями, тобто з кожною імітаційною моделлю пов'язана сукупність більш простих моделей окремих сторін процесу (як математичних, так і гуманітарних). Як правило, імітаційні моделі складні, мають велику розмірність, характеризуються наявністю великої кількості екзогенних факторів, частина яких є випадковими функціями часу.

Імітація відбувається шляхом відтворення протікання реального процесу на ЕОМ за допомогою математичної моделі при кількох варіантах управління, що призначаються експертами з подальшим аналізом отриманих результатів. В імітаційний процес може втрутитися людина в залежності від обставин. Кожен акт відтворення протікання процесу за допомогою імітаційної моделі називається *імітаційним експериментом*. Найбільше експериментів виникає в тих випадках, коли метою моделювання є вибір раціональних способів управління складним процесом.

Імітаційне моделювання означає, що ми маємо справу з такими моделями, за допомогою яких результат неможливо передбачити, якщо не провести експеримент (імітацію) на моделі при заданих вихідних даних.

Отже, суть імітаційного підходу в моделюванні полягає в тому, що процес функціонування складної системи зображується у вигляді алгоритму, який реалізується на ЕОМ. Імітаційний

підхід використовують тоді, коли потрібно визначити реальну поведінку складної системи в практичних цілях.

Якщо на досліджуваний процес можуть впливати за допомогою своїх управлінь кілька груп осіб, то імітаційні експерименти набувають характеру імітаційних ігор, наприклад, тоді, коли відтворені процеси мають конфліктний характер.

Отже, імітаційна модель означає математичну модель, яка спеціально призначена для досліджень у режимі імітації, тобто це програма, яка дозволяє імітувати на ЕОМ поведінку реальної системи в різних умовах. Імітаційна модель – це лабораторна версія реальної системи.

Досить часто в рамках імітаційної моделі неможливо поставити оптимізаційні задачі через складність задачі та неможливість формулювання єдиного критерію якості.

Водночас існують і моделі, які, з одного боку, є оптимізаційними (тобто в рамках моделі розв'язуються оптимізаційні задачі), а з іншого боку – імітаційні (тобто в рамках моделі проводять імітаційні експерименти).

Спочатку імітаційні моделі використовувалися для вивчення соціально-економічних процесів математичними методами. Поштовх до розвитку імітації дав накопичений досвід використання економіко-математичних методів, що ґрунтуються на методах математичного програмування.

Результати впровадження економіко-математичних методів показали, що могутні методи математичного програмування не можуть стати інструментом забезпечення практичного керування. З'ясувалося, що розв'язування оптимізаційних задач у більшості випадків приводить до значного огрублення моделі, відкидання, нехтування факторами, які є суттєвими, а їх потрібно враховувати в практичному управлінні. Тобто управління, одержані з оптимізаційних задач, не можна використовувати внаслідок неадекватності моделі реальним процесам. Ці управління можна використовувати як допоміжну інформацію. Основна причина полягає в складності задачі.

Тому подальшим розвитком моделювання стало імітаційне моделювання, при якому відмова від розв'язування оптимізаційних задач дозволяє витратити обчислювальні потужності на відтво-

рення реального процесу, тобто можна зробити моделі більш адекватними реальності.

Результати імітаційного моделювання легше пояснити людям, що приймають рішення, тим більше, що ці люди самі можуть проводити імітаційні експерименти.

Перевага імітаційного моделювання – це широкий клас об'єктів моделювання та різноманітність задач, які можуть розв'язуватися за допомогою імітаційних моделей. Імітаційне моделювання має системний характер дослідження систем. Імітаційні моделі дозволяють вивчати такі складні системи, з якими неможливо проводити натурні експерименти, зокрема, глобальні моделі біосфери. Зокрема, в Обчислювальному центрі Академії наук СРСР на початку 80-х років була створена імітаційна модель глобальних екологічних змін. А на порядку денному стоять задачі розв'язування таких важливих проблем сучасності, як раціональне використання природних ресурсів та досягнення симбіозу виробництва і природи – цих неузгоджених у наш час компонентів біосфери та соціосфери.

Однак імітація володіє й рядом недоліків. Це складність організації імітаційної моделі, відносно висока вартість проведення імітаційних експериментів, можливість продивитися й порівняти лише невелику кількість відібраних варіантів управління, складності, пов'язані з інформаційним забезпеченням моделі.

Отже, *імітаційна система* – це інформаційне середовище, яке складається з трьох основних частин:

- імітаційна модель складного процесу разом з програмами, що реалізують цю модель на ЕОМ;
- сукупність спрощених агрегованих моделей процесу або окремих сторін процесу, що дозволяють розв'язувати оптимізаційні та ігрові задачі на вибір управління;
- сукупність програм для зручного спілкування з ЕОМ при проведенні імітаційних експериментів: засоби введення та збереження даних, засоби налагодження та налаштування моделі, засоби презентації результатів та інші сервісні програми.

Нарешті, дамо трактування самого терміна „імітація” (англійською мовою – simulation). Краще за всіх цю трактовку сформулював Р. Шеннон, визначивши її як „процес конструювання мо-

делі реальної системи й постановки експериментів на цій моделі з метою зрозуміти поведінку системи або оцінити (в рамках обмежень, що накладаються деяким критерієм або сукупністю критеріїв) різні стратегії, що забезпечують функціонування даної системи”. Аналогічне визначення дає Т. Нейлор: „Імітація – це числовий метод проведення на цифрових обчислювальних машинах експериментів із математичними моделями, що описують поведінку складних систем протягом довгих періодів часу”.

З цих та інших визначень зрозуміло, що імітація та імітаційне моделювання зводяться до математичного моделювання. Справа в тому, що в цьому терміні відбивається той рівень складності математичних моделей, який став доступним із появою ЕОМ, порівняно з тим рівнем складності, яку могли мати математичні моделі в домашинну епоху.

При математичному моделюванні складних процесів не обов’язково будувати математичні моделі у вигляді систем рівнянь. Можливий і інший підхід, коли на ЕОМ імітується саме явище у вигляді деякої послідовності операцій, що є випадковими процесами і підпорядковуються ймовірнісним законам. Машинна імітація дозволяє дослідити модель як в окремі моменти часу, так і протягом деякого періоду часу. Для знаходження стійких розв’язків при числовому статистичному моделюванні вимагається його багатократне відтворення з наступною статистичною обробкою. При цьому можна проводити імітацію дії випадкових факторів на різні елементи моделі.

Створення ймовірнісної моделі, застосування методів Монте-Карло для імітації явища на ЕОМ називають *ймовірнісно-імітаційним моделюванням*.

Запитання та завдання до самоперевірки

1. Дайте означення моделі, яке використовується в природничих науках.
2. Наведіть класифікацію моделей.
3. Що таке адекватність та ефективність моделей?
4. Дайте визначення математичної моделі.
5. Сформулюйте вимоги до математичних моделей.

6. Як класифікуються математичні моделі в залежності від параметрів моделі?

7. Назвіть етапи математичного моделювання.

8. Які перевірки необхідно виконати для контролю правильності математичної моделі?

9. Що таке верифікація математичних моделей?

10. Що таке ідентифікація математичних моделей? Як формуються задачі ідентифікації? Назвіть методи ідентифікації.

11. Що розуміють під агрегуванням математичної моделі?

12. Що таке декомпозиція математичних моделей?

13. Які програмні засоби використовуються в математичному моделюванні?

14. Що таке імітаційні моделі?

Література: [1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 14, 15, 17, 18, 19, 21, 22, 28, 31, 41, 42, 43, 44, 53, 63, 65, 70, 71, 72, 73, 74, 76, 83, 89, 90, 92, 94, 96, 99, 102, 105].

Розділ 2. Принципи математичного моделювання

Для побудови математичних моделей використовують два підходи – теоретичний і експериментальний. Теоретичний підхід базується на застосуванні фундаментальних законів природи, варіаційних принципів, ієрархічного підходу, методу аналогій, теорії подібності. При експериментальному підході встановлюють залежності між рядами даних. Принципи і методи побудови математичних моделей найбільш широко розвинені в механіці та фізиці. Найпоширеніший метод побудови математичних моделей полягає в застосуванні фундаментальних законів природи до конкретної ситуації. Це можуть бути закони збереження, еволюційні закони, яким підпорядковується це явище. Ці закони загальноновизнані, багаторазово підтверджені досвідом і служать основою великої кількості науково-технічних досягнень. Розглянемо їх застосування на простіших прикладах.

2.1. Простіші моделі. Основні підходи до їх побудови

2.1.1. Використання фундаментальних законів природи

а) **Закон збереження енергії.** Цей закон відомий майже двісті років і займає важливе місце серед великих законів природи. Покладаючись на нього, експерту з балістики для визначення швидкості револьверної кулі без спеціальної лабораторії можна скористатися відносно простим пристроєм типу маятника – вантажем, підвішеним на легкому недеформованому стержні, який може вільно обертатися навколо точки підвісу (рис. 2.1).

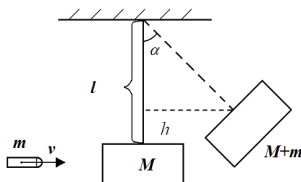


Рис. 2.1. Система “вантаж–куля”

Куля, яка застрягає у вантажі, надає системі „куля–вантаж” свою кінетичну енергію, яка в момент найбільшого відхилення стержня від вертикалі повністю переходить у потенціальну енергію системи. Кінетична енергія кулі масою m дорівнює $\frac{mv^2}{2}$, де v – швидкість кулі. Кінетична і потенціальна енергії вантажу з кулею відповідно дорівнюють $(M + m)\frac{V^2}{2}$ та $(M + m)gh$, де M – маса вантажу, V – швидкість системи „куля–вантаж” відразу після потрапляння кулі у вантаж, g – прискорення вільного падіння, h – висота підйому вантажу з кулею. Враховуючи, що $h = l - l \cos \alpha$ (рис. 2.1), де l – довжина стержня, α – кут найбільшого відхилення стержня від вертикалі, на підставі закону збереження енергії маємо

$$\frac{mv^2}{2} = (M + m)\frac{V^2}{2} = (M + m)gl(1 - \cos \alpha).$$

Отже, шукана швидкість кулі v визначається з формули

$$\frac{mv^2}{2} = (M + m)gl(1 - \cos \alpha)$$

і дорівнює

$$v = \sqrt{\frac{2(M + m)gl(1 - \cos \alpha)}{m}}. \quad (2.1.1)$$

Швидкість з (2.1.1) не досить точна, тому що нами не враховані втрати енергії на нагрівання кулі й вантажу, на подолання опору повітря, розгін стержня тощо. Процеси, які відбуваються при зіткненні кулі й маятника, уже не суто механічні. Тому закон збереження механічної енергії, який був тут застосований для обчислення величини v , дає не зовсім правильний результат, оскільки зберігається повна, а не механічна енергія системи. Закон збереження механічної енергії визначає лише нижню межу для оцінки швидкості кулі.

б) Закон збереження маси. Використання цього закону при створенні математичної моделі ілюструється таким прикладом. Нехай є невелика кількість радіоактивної речовини (урану), яка оточена товстим шаром звичайного матеріалу (наприклад, свинцю). На рис. 2.2 це схематично позначено як області 1 та 2. Така ситуація типова при зберіганні матеріалів, що розщеплюються, або при їх використанні в енергетиці.

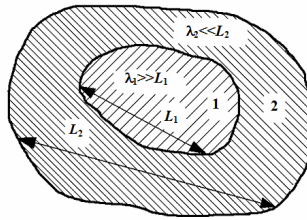


Рис. 2.2. Зберігання радіоактивної речовини

Припущення про невелику кількість радіоактивної речовини спрощене. Воно дозволяє стверджувати, що всі продукти розпаду без перешкод залишають область 1 без зіткнень з атомами речовини цієї області. Іншими словами, довжина вільного пробігу продуктів розпаду λ_1 радіоактивної речовини значно більша за характерні розміри самого матеріалу L_1 , тобто $\lambda_1 \gg L_1$. Слова „товстий шар” означають, що, згідно з умовами зберігання, продукти розпаду повністю поглинаються в області 2. Це гарантується при виконанні протилежної умови $\lambda_2 \ll L_2$, де λ_2 – довжина вільного пробігу продуктів розпаду у другій речовині, L_2 – характерний розмір товщини шару.

Отже, усе, що вилітає з області 1, поглинається в області 2, і сумарна маса обох речовин з часом не змінюється. Це і є закон збереження матерії, застосований до даної ситуації. Якщо в початковий момент часу $t = 0$ маси речовин дорівнювали $M_1(0)$ і $M_2(0)$, то в будь-який момент часу t правильний баланс

$$M_1(0) + M_2(0) = M_1(t) + M_2(t). \quad (2.1.2)$$

Але цього рівняння (2.1.2), очевидно, недостатньо для знаходження поточних значень двох мас $M_1(t)$ і $M_2(t)$. Для замикання математичного формулювання необхідно залучити додаткові дані про характер розпаду. Ці дані формулюються таким твердженням: швидкість розпаду (кількість атомів, які розпадаються в одиницю часу) пропорційна загальній кількості атомів радіоактивної речовини.

За малий проміжок часу dt між моментами t і $t+dt$ усього розщепиться

$$N_1(t + dt) - N_1(t) = -\alpha N_1(t + \xi dt)dt, \quad (\alpha > 0, \quad 0 < \xi < 1) \quad (2.1.3)$$

атомів. Тут повторно використано закон збереження маси на відрізок часу dt . У рівнянні (2.1.3), яке описує баланс атомів, у правій частині стоїть знак мінус (кількість речовини зменшується), а величина $N_1(t + \xi dt)$ відповідає деякому середньому значенню кількості атомів у проміжний момент часу $t + \xi dt$. Перепишемо рівність (2.1.3) у диференціальній формі (для цього поділимо (2.3.1) на dt і перейдемо до границі при $dt \rightarrow 0$). Дістанемо рівняння

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\alpha N_1(t).$$

Це і є основний закон радіоактивного розпаду. Він описує залежність інтенсивності радіоактивного розпаду від часу і кількості радіоактивних атомів. Зазначимо, що цей закон був спочатку відкритий експериментально Ф. Содді та Е. Резерфордом у 1903 р.

Враховуючи, що $M_1(t) = \mu_1 N_1(t)$, де μ_1 – атомна вага радіоактивної речовини, отримаємо

$$\frac{dM_1(t)}{dt} = -\alpha M_1(t). \quad (2.1.4)$$

При самочинному (спонтанному) поділі ядер будь-який атом має деяку, незалежну від стану оточуючої речовини, ймовірність розпаду. Тому, чим більша (менша) кількість самої радіоактивної речовини, тим більше (менше) виділяється продуктів розпаду в одиницю часу. Коефіцієнт пропорційності (стала розпаду) $\alpha > 0$ характеризує ймовірність радіоактивного розпаду за одиницю часу й визначається конкретною речовиною. Рівняння (2.1.2) і (2.1.4) разом з умовами $\lambda_1 \gg L_1$ і $\lambda_2 \ll L_2$, а також величинами α та $M_1(0)$, $M_2(0)$ складають математичну модель об'єкта, який розглядається.

Інтегруючи (2.1.4), отримуємо

$$\frac{dM_1(t)}{M_1(t)} = -\alpha dt \quad \Rightarrow \quad \ln M_1(t) = -\alpha t + \ln C \quad \Rightarrow \quad M_1(t) = C e^{-\alpha t}.$$

При $t = 0$ маємо $C = M_1(0)$, тому остаточно

$$M_1(t) = M_1(0) e^{-\alpha t}.$$

Отже, маса радіоактивного матеріалу зменшується за експоненціальним законом і при $t \rightarrow \infty$ в області 1 речовина повністю зникне. Оскільки сумарна маса речовин, згідно з (2.1.2), залишається сталою, то в області 2 кількість речовини зростає за законом

$$M_2(t) = M_2(0) + M_1(0) - M_1(0)e^{-\alpha t}$$

і при $t \rightarrow \infty$ продукти розпаду повністю переходять з області 1 в область 2.

в) Закон збереження імпульсу. Імпульсом тіла називається добуток маси тіла на його швидкість. Закон збереження імпульсу стверджує, що повний імпульс системи, на яку не діють зовнішні сили (система замкнена), сталий.

Наприклад, при вистрелі з гармати виникає віддача, тобто снаряд рухається вперед, а гармата відкочується назад. Так проявляє себе закон збереження імпульсу. Якщо позначити швидкість відкочування гармати через \vec{V} , швидкість снаряда через \vec{v} , їх маси через M та m , то на основі закону збереження імпульсу маємо $M\vec{V} + m\vec{v} = 0$.

На принципі віддачі базується й реактивний рух. Принцип реактивного руху покладено в основу багатьох технічних пристроїв, зокрема ракети, яка виводить на орбіту Землі штучний супутник. Для цього їй потрібно розвинути швидкість приблизно 8 км/с. У ракеті при згоранні палива утворюються гази, які мають високу температуру й вилітають з сопла ракети з великою швидкістю u , штовхаючи ракету вперед. Для сучасних палив швидкість u дорівнює 3-5 км/с відносно ракети.

Найпростіша математична модель руху ракети отримується із закону збереження імпульсу при нехтуванні опором повітря, гравітацією та іншими силами, за винятком, звичайно, тяги реактивних двигунів.

Нехай у момент часу t ракета мала масу $m(t)$ і рухалася зі швидкістю $v(t)$. За малий проміжок часу dt між моментами t і $t+dt$ частина палива вигоріла й маса ракети змінилася на величину dm . Змінився також імпульс ракети, але сумарний імпульс системи “ракета плюс продукти згорання” залишився тим самим, що й у момент t , тобто

$$m(t)v(t) = m(t + dt)v(t + dt) + dm[u - v(t + \xi dt)],$$

де $v(t)$ – швидкість ракети в момент часу t ; $u - v(t + \xi dt)$, $0 < \xi < 1$, – середня за проміжок dt швидкість витікання із сопел газів (обидві швидкості беруться відносно Землі). Перший член у правій частині цієї рівності – імпульс ракети в момент часу $t + dt$, другий – імпульс газів, що витікають за час dt . В момент часу t імпульс усієї системи дорівнював $m(t)v(t)$. Ураховуючи, що

$$m(t + dt) = m(t) + (dm/dt)dt + O((dt)^2),$$

$$v(t + dt) = v(t) + (dv/dt)dt + O((dt)^2),$$

закон збереження імпульсу з точністю до нескінченно малих другого порядку малості можна переписати у вигляді диференціального рівняння

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{dm}{dt} u, \quad (2.1.5)$$

у якому член $-\frac{dm}{dt}u$ на основі другого закону Ньютона, є не чим іншим, як силою тяги ракетних двигунів за рахунок витікання газів. Величина $\mu = -\frac{dm}{dt}$ визначає швидкість згорання палива. Формула (2.1.5) дозволяє зробити уже перший висновок про розмір двигуна ракети. В сучасній ракетній техніці прийнято створювати силу тяги в 1,25 раз більшу за силу ваги ракети при підйомі, тобто $\frac{dm}{dt}u = 1,25mg$. Звідси одержуємо, що $\mu = \frac{dm}{dt} \approx \frac{1}{4}m$. Іншими словами, двигун ракети повинен спалювати за одну хвилину приблизно четверту частину маси ракети.

Рівняння (2.1.5) зведемо до вигляду

$$\frac{dv}{dt} = -u \frac{d(\ln m)}{dt}$$

і проінтегруємо за t на проміжку від t_0 до t . Після інтегрування матимемо

$$v(t) - v_0 = -u \ln\left(\frac{m(t)}{m_0}\right),$$

або

$$v(t) = v_0 + u \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right), \quad (2.1.6)$$

де $v_0 = v(t_0)$ – початкова швидкість ракети, а $m_0 = m(t_0)$ – початкова маса ракети. Якщо $v_0 = 0$, то максимальна швидкість ракети, яка досягається при повному згоранні палива, дорівнює

$$v = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + m_s}\right). \quad (2.1.7)$$

У (2.1.7) m_p – корисна маса (маса супутника), m_s – структурна маса власне ракетної конструкції – паливних баків, двигунів, систем управління тощо.

Формула (2.1.7) – це *формула Ціолковського*. Вона дозволяє зробити фундаментальний висновок про конструкцію ракети для космічних польотів. Для визначення максимальної швидкості за формулою Ціолковського покладемо $m_p = 0$ (ракета без корисної маси, тобто без супутника), тоді дріб $\frac{m_0}{m_s}$ характеризує відношення початкової й структурної мас ракети. Для сучасних конструкцій ракет це відношення приблизно дорівнює 10 (обернене відношення позначимо через λ і матимемо $\lambda=0,1$). Для практично реальних значень $u = 3$ км/с при $m_p = 0$ отримаємо

$$v = u \ln(10) \approx 7 \text{ км/с} < 7,9 \text{ км/с}.$$

Як бачимо, навіть в ідеальній ситуації (корисна маса дорівнює нулю, відсутні гравітація та опір повітря тощо) одноступенева ракета не здатна розвинути першої космічної швидкості. Причина такої обставини полягає в тому, що двигуну ракети доводиться прискорювати непотрібну відпрацьовану структурну масу, тобто виводити на орбіту порожні баки. Очевидно, що роботу двигуна ракети можна зробити більш ефективною, якщо відкидати непотрібну відпрацьовану структурну масу. Звідси випливає важливий висновок – необхідно використовувати так звані багатоступеневі ракети, коли ступені ракети відділяються в міру згорання палива. З процесу подальшого розгону ракети виключається маса контейнерів, в яких знаходилось паливо, відпрацьовані двигуни, системи управління тощо. Саме так розвивається сучасне ракетобудування.

Розглянутий приклад ілюструє також свого роду принцип *найбільшого сприяння*, який часто використовується на початковій стадії математичного моделювання складних об'єктів: якщо

об'єкт, будучи поставленим у найкращі умови, не в змозі досягнути потрібних характеристик, то необхідно змінити сам підхід до об'єкта або пом'якшити вимоги до нього; якщо ж вимоги в принципі досяжні, то наступні кроки пов'язані з дослідженням впливу на об'єкт додаткових, більш складних факторів.

Побудуємо ще математичну модель руху ракети з урахуванням сил тяжіння та сил опору повітря. Через згорання палива маса ракети – змінна величина, тому для опису руху ракети застосовується закон Ньютона у формі

$$\frac{dI}{dt} = F,$$

де $I(t)$ – імпульс, а F – рівнодійна всіх зовнішніх сил. Очевидно, що рівняння руху ракети має вигляд

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} u = F.$$

За умови, що $F = P + F_0$, де $P = -mg$ – стала сила тяжіння, $F_0 = -kv$ – сила опору повітря, приходимо до рівняння

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} u = -mg - kv.$$

Якщо припустити, що опір повітря відсутній ($k = 0$), то, інтегруючи останнє співвідношення, дістанемо

$$v(t) = v_0 - gt + u \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right).$$

Ця рівність показує вплив сили тяжіння на величину швидкості.

2.1.2. Використання варіаційних принципів

Ще один підхід до побудови математичних моделей полягає у використанні так званих варіаційних принципів. Цей підхід за широтою та універсальністю його можливостей можна зіставити з використанням фундаментальних законів природи. Варіаційні принципи є досить загальними твердженнями про об'єкт, систему або явище, що розглядається. Вони стверджують, що з усіх можливих варіантів поведінки об'єкта (руху, еволюції) реалізуються

лише ті, які задовольняють певну умову. Зазвичай, згідно з цією умовою, деяка величина, яка пов'язана з об'єктом, досягає свого екстремального значення при переході об'єкта з одного стану в інший.

Приклад 2.1.1. Припустимо, що автомобіль має потрапити з точки A одного середовища в точку B іншого середовища. Межею середовища є лінія L . Нехай швидкості руху в цих середовищах відповідно дорівнюють v_a та v_b . На рис. 2.3 показані різні траєкторії руху з точки A в точку B . Суцільною лінією виділено найкоротший шлях.

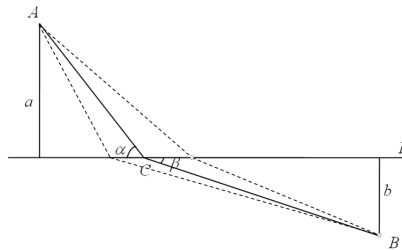


Рис. 2.3. Траєкторія руху автомобіля

Варіаційний принцип полягає в тому, щоб з багатьох траєкторій вибрати той шлях, який вимагає мінімальних затрат часу. Виразимо витрачений час як функцію величини α – кута між прямою L і відрізком шляху від точки A до точки C :

$$t(\alpha) = t_{AC} + t_{CB} = \frac{a}{v_a \sin \alpha} + \frac{b}{v_b \sin \beta(\alpha)}.$$

Тут a і b – довжини перпендикулярів, які опущені відповідно з точок A і B на пряму L , $\beta(\alpha)$ – кут між прямою L і відрізком шляху з точки C до точки B .

Умова екстремальності $t(\alpha)$ за аргументом α означає, що

$$\left. \frac{dt(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha_{extr}} = 0,$$

або

$$\frac{a \cos \alpha}{v_a \sin^2 \alpha} + \frac{b \cos \beta(\alpha)}{v_b \sin^2 \beta(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0. \quad (2.1.8)$$

Як видно з рис. 2.3, для будь-яких значень α правильна рівність

$$l = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{b}{\operatorname{tg}\beta(\alpha)}, \quad (2.1.9)$$

де l – відстань між проєкціями точок A і B на пряму L (ця відстань однакова для всіх траєкторій). Диференціюючи (2.1.9), отримаємо співвідношення

$$\frac{a}{v_a \sin^2 \alpha} + \frac{b}{v_b \sin^2 \beta(\alpha)} \frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

яке разом з умовою мінімальності (2.1.8) має вигляд

$$\frac{\cos(\alpha)}{v_a} = \frac{\cos(\beta)}{v_b}.$$

Далі неважко знайти самі значення α_{min} , t_{min} через задані величини a , b , l . Однак зараз для нас важливо інше – умова мінімальності витрат часу привела до вибору відповідної траєкторії за правилом: косинуси кутів пропорційні швидкостям. А це означає, що автомобіль повинен поїхати не по прямій, а по ламаній, зробивши відповідний злам на межі двох середовищ.

Такому ж закону підпорядковується і хід променя світла, який проходить з одного середовища в інше – на межі двох середовищ він змінює напрям. тобто промені світла рухаються траєкторіями, які забезпечують найшвидше попадання променя з однієї точки в іншу. Це і є відомий варіаційний принцип Ферма в геометричній оптиці. ▲

2.1.3. Застосування ієрархічного підходу до створення моделей

На практиці лише в окремих випадках вдається побудувати математичну модель, навіть відносно простих об'єктів, одразу в усій її повноті, з урахуванням усіх факторів, суттєвих для поведінки об'єктів. Тому природним є підхід, який реалізує принцип *від простого – до складного*, коли наступний крок робиться після досить детального вивчення простішої моделі. При цьому виникає ланцюг (ієрархія) усе більш повних моделей, кожна з яких узагальнює попередні, включаючи їх як частинні випадки.

Побудуємо такий ієрархічний ланцюг на прикладі моделі багатоступеневої ракети. В п. 2.1.1 показано, що реальна одноступенева ракета неспроможна розвинути першу космічну швидкість. Причиною цього є витрата пального на розгін непотрібної відпрацьованої частини структурної маси. Тому під час руху ракети необхідно періодично позбуватися баласту. На практиці це означає, що ракета має складатися з кількох ступенів, які відкидаються після їх використання.

Нехай m_i , $i \in \{1, 2, \dots\}$ – загальна маса i -го ступеня ракети; λm_i – відповідна структурна маса (при цьому маса пального дорівнює величині $(1 - \lambda)m_i$; m_p – маса корисного вантажу. Тут параметр λ характеризує відношення структурної та початкової мас будь-якої ступені, для практично реальних значень $\lambda = 0, 1$. Припускається, що величини λ і швидкість витікання газу u однакові для всіх ступенів. Візьмемо для визначеності кількість ступенів $n = 3$. Початкова маса такої ракети дорівнюватиме

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3.$$

Розглянемо момент часу, коли витрачено все паливо першого ступеня й маса ракети дорівнює величині

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3.$$

Тоді, за формулою Ціолковського (2.1.7), швидкість ракети в цей момент

$$v_1 = u \ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right).$$

Після досягнення швидкості v_1 структурна маса λm_1 відкидається і вмикається другий ступінь ракети. Маса ракети у цей момент дорівнює

$$m_p + m_2 + m_3.$$

Далі за формулою (2.1.6), враховуючи, що початкова швидкість уже дорівнює v_1 , одержуємо, що після повного згорання палива у другому ступені ракета досягне швидкості

$$v_2 = v_1 + u \ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right).$$

Такі ж самі міркування застосуємо до третього ступеня ракети. Після відключення її двигунів швидкість ракети дорівнюватиме

$$v_3 = v_2 + u \ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right).$$

Цей ланцюг неважко продовжити для будь-якої кількості ступенів і отримати відповідні формули. У випадку $n = 3$ для остаточної швидкості матимемо

$$\frac{v_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right)\right\}.$$

Уводячи величини

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p + m_2 + m_3}, \quad \alpha_2 = \frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + m_3}, \quad \alpha_3 = \frac{m_p + m_3}{m_p},$$

отримаємо

$$\frac{v_3}{u} = \ln\left(\frac{\alpha_1}{1 + \lambda(\alpha_1 - 1)} \cdot \frac{\alpha_2}{1 + \lambda(\alpha_2 - 1)} \cdot \frac{\alpha_3}{1 + \lambda(\alpha_3 - 1)}\right).$$

Одержаний вираз симетричний відносно величин $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ і неважко показати, що його максимальне значення досягається в симетричному випадку, тобто коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. При цьому

$$\alpha = \frac{1 - \lambda}{P - \lambda}, \quad P = e^{-\frac{v_3}{3u}}.$$

Добуток $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ дорівнює, як легко перевірити, відношенню $\frac{m_0}{m_p}$, тому

$$\alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1 - \lambda}{P - \lambda}\right)^3.$$

Для n -ступеневої ракети аналогічно одержуємо

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1 - \lambda}{P - \lambda}\right)^n, \quad P = e^{-\frac{v_n}{nu}}. \quad (2.1.10)$$

Проаналізуємо формулу (2.1.10). Покладемо $v_n = 10,5$ км/с, $\lambda = 0,1$. Тут ми зробили запас швидкості, оскільки не враховані

сили, що сповільнюють рух ракети. Тоді для $n = 2, 3, 4$ відповідно отримаємо

$$m_0 = 149m_p, \quad m_0 = 77m_p, \quad m_0 = 65m_p.$$

Це означає, що двоступенева ракета придатна для виведення на орбіту деякої корисної маси (однак при одній тонні корисного вантажу необхідно мати ракету масою 149 тонн). Перехід до трьох ступенів дозволяє вивести на орбіту 1 тону вантажу ракетою з початковою масою 77 тонн, тобто це зменшує масу ракети порівняно з двоступеневою майже у два рази (звичайно, при цьому ускладнює її конструкцію). Чотириступенева ракета не дає помітного виграшу порівняно з триступеневою, тому для виведення супутників на навколоземну орбіту використовують в основному триступеневі ракети.

Побудова ієрархічного ланцюга дозволила відносно просто прийти до таких важливих висновків. У розглянутих випадках ми змогли провести повний аналіз моделей суто аналітичними методами без обчислювальних експериментів. Це пояснюється ідеалізацією системи. Якщо враховувати фактори, якими ми нехтували при побудові моделі, а також іншими факторами, які є важливими для запуску ракети, то це приведе до ускладнень, при яких аналіз моделі без числових методів зробити не можна.

Ієрархія математичних моделей часто будується й за протилежним принципом *від складного – до простого*. У цьому випадку реалізується шлях *зверху – вниз*: із досить загальної та складної моделі за відповідних спрощувальних припущень отримується послідовність усе простіших (але таких, які мають меншу сферу застосування) моделей.

2.1.4. Застосування аналогій при побудові моделей

Часто при побудові математичної моделі об'єкта або неможливо прямо вказати фундаментальні закони чи варіаційні принципи, якими цей об'єкт описується, або, з погляду наших сьогоднішніх знань, узагалі не можна бути впевненими в існуванні подібних законів, які допускають математичне формулювання. Тоді одним із плідних підходів до побудови математичних моделей є викори-

стання аналогій з уже вивченими явищами. Метод аналогій дозволяє будувати математичні моделі в екології, біології та інших галузях науки і техніки. Суть його полягає в пошуку в природі явищ і процесів подібних до явища, що вивчається. Подібні аналогічні явища в природі зустрічаються досить часто. Такі явища описуються однаковими рівняннями. Результати, одержані для одного явища, підходять до іншого. Розглянемо явище радіоактивного розпаду й популяцію біологічного виду. Вияснимо, що може бути спільним між радіоактивним розпадом і динамікою популяцій, зокрема, зі зміною чисельності населення нашої планети. На найпростішому рівні спостерігається аналогія цих процесів. Про це свідчить *модель Мальтуса* для динаміки популяцій. В її основу покладено просте твердження: швидкість зміни населення з часом t дорівнює її поточній кількості $N(t)$, помноженій на різницю коефіцієнтів народжуваності $\alpha(t)$ і смертності $\beta(t)$. У результаті приходимо до рівняння

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t), \quad (2.1.11)$$

яке доволі схоже на рівняння радіоактивного розпаду і збігається з ним при $\alpha < \beta$ (якщо α і β – сталі). Це відбулось тому, що при виведенні цих рівнянь використовувались однакові міркування.

Інтегрування рівняння (2.1.11) дає

$$\frac{dN(t)}{N(t)} = (\alpha(t) - \beta(t))dt \Rightarrow \ln N(t) - \ln N(t_0) = \int_{t_0}^t (\alpha(t) - \beta(t))dt,$$

або остаточно

$$N(t) = N_0 \exp\left(\int_{t_0}^t (\alpha(\xi) - \beta(\xi))d\xi\right). \quad (2.1.12)$$

Проаналізуємо (2.1.12). При $\alpha = \beta$ чисельність населення залишається сталою тому, що розв'язком рівняння (2.1.11) є стала величина $N(t) = N_0$ (рис. 2.4).

Рівновага між народжуваністю і смертністю нестійка у тому розумінні, що навіть невелике порушення рівності $\alpha = \beta$ приво-

дить із часом до збільшення відхилення функції $N(t)$ від рівноважного значення N_0 . При сталих α і β за умови $\alpha < \beta$ чисельність населення зменшується і при $t \rightarrow \infty$ прямує до нуля (рис. 2.4) за експоненціальним законом

$$N(t) = N_0 e^{(\alpha - \beta)t}, \quad \alpha - \beta < 0,$$

а при $\alpha > \beta$ зростає, знову-таки за експоненціальним законом (рис. 2.4), прямуючи до нескінченності при $t \rightarrow \infty$. Такий результат став основою для побоювань Мальтуса про перенаселення Землі з усіма наслідками, які з цього випливають.

Як у даному прикладі, так і в багатьох інших розглянутих нами прикладах можна вказати чимало очевидних обмежень застосування побудованої моделі. Звичайно, дуже складний процес зміни чисельності населення, який залежить до того ж від свідомого втручання самих людей, не може описуватися якимись простими закономірностями. Навіть в ідеальному випадку ізольованої біологічної популяції запропонована модель не відповідає реальності повною мірою хоча б через обмеженість необхідних для існування ресурсів.

Однак це зауваження ніскільки не зменшує ролі аналогій при побудові математичних моделей дуже складних явищ. Застосування аналогій базується на одній з найважливіших властивостей моделей – *універсальності*, тобто їх застосовності до об'єктів принципово різної природи. Так, припущення типу “швидкість зміни величини пропорційна значенню самої величини (або деякої функції від неї)” широко використовується в далеких одна від одної сферах знань.

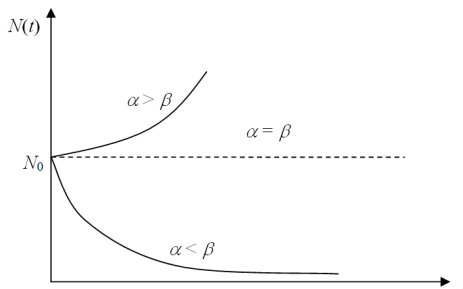


Рис. 2.4. Поведінка розв'язків рівняння (2.1.11)

Висновки

У цьому пункті викладені основні підходи до побудови математичних моделей фізичних явищ, а саме застосування фундаментальних законів, варіаційних принципів, методу аналогій, принципу ієрархії моделей. На їх основі проілюстровано побудову простіших математичних моделей. Викладений матеріал дозволить почати студентам самостійно будувати математичні моделі відносно простих об'єктів.

Одними і тими ж самими моделями можуть описуватися зовсім різні за своєю природою об'єкти, які підпорядковуються різним фундаментальним законам і, навпаки, за одним законом можуть бути побудовані принципово різні моделі, наприклад лінійні та нелінійні.

Слід мати на увазі, що при побудові математичних моделей необхідно (якщо це можливо) застосовувати декілька принципово різних підходів. Якщо при рівних умовах будуть отримуватися однакові моделі, то це дає змогу переконатися в правильності результатів.

2.1.5. Задачі для самостійної роботи

2.1. В задачі про визначення швидкості руху кулі застосуйте не закон збереження енергії, а закон збереження імпульсу. Порівняйте одержану формулу для швидкості кулі з формулою (2.1.1). Поясніть, чому не збігаються результати.

2.2. Куля входить у дошку товщиною 8 см зі швидкістю 200 м/с і вилітає з дошки зі швидкістю 100 м/с. Враховуючи, що сила опору дошки руху кулі пропорційна квадрату швидкості кулі, знайти час руху кулі через дошку.

2.3. Розглядається “ідеальна” одноступенева ракета, в якій неперервно відкидається відпрацьована і ставша непотрібною структурна маса (до моменту повного згорання $m_s = 0$). Використовуючи закон збереження імпульсу, знайти швидкість $v(t)$ у будь-який момент часу t . Показати, що максимальна швидкість такої ракети визначається за формулою $v_{\max} = (1 - \lambda)u \ln(m_0/m_p)$, де m_0 – стартова маса ракети, m_p – маса корисного вантажу (тоб-

то корисний вантаж можна розігнати до будь-якої швидкості).
Вказівка. Врахувати, що якщо маса ракети змінилась на величину dm , то $(1 - \lambda)dm$ – маса згорілого палива, а λdm – це структурна маса, яка відкидається ($\lambda \approx 0, 1$).

2.4. Побудувати математичну модель руху ракети з урахуванням сили тяжіння та сили опору повітря (сила опору пропорційна швидкості руху ракети). Вважаючи, що швидкість згорання газів є постійною величиною $\mu = -\frac{dm}{dt}$, $\mu = \text{const}$ при $t \leq t_1$, де t_1 – момент повного згорання газів. Побудувати формули для швидкості руху ракети $v(t)$ та висоти її підйому $y(t)$. Знайти висоту підйому $y(t_1)$ в момент згорання всього палива.

2.5. Напівсферична чаша висотою (радіусом) 5 футів наповнена водою. В момент часу $t = 0$ в основі резервуара відкривається отвір у вигляді круга діаметром 1 дюйм. Визначити залежність рівня води в резервуарі від часу t , а також час, за який витече вся вода з резервуара. **Вказівка.** Використати закон Торрічеллі, згідно з яким швидкість v витікання рідини в момент часу, коли висота її рівня дорівнює x , визначається співвідношенням:

$$v = k\sqrt{2gx},$$

де k – коефіцієнт швидкості витікання води з отвору (для води $k = 0, 6$), $g = 9, 8 \text{ м/с}^2$.

2.6. Напівсферичний резервуар радіусом 1 м поставили на плоске дно, в якому є отвір радіусом 1 см і заповнили водою. В момент часу $t = 0$ відкривають отвір. Визначити залежність рівня води в резервуарі від часу t , а також час, за який витече вся вода з резервуара. **Вказівка.** Використати вказівку до задачі 2.5.

2.7. Задачу 2.5 розв'язати для конічного та циліндричного резервуарів, підбравши необхідні параметри.

2.8. Нехай підводний човен, що знаходиться на глибині H від поверхні моря й рухається в горизонтальному напрямку зі швидкістю v в момент часу $t = 0$, не зупиняючи рух, починає спливати. Знайти рівняння траєкторії руху човна та час, який буде затрачено для того, щоб човен опинився на поверхні моря.

2.9. В 1938 р. було відкрито ефект поділу атомного ядра при попаданні в нього нейтрона. При цьому з'ясувалося, що ядро розпадається на дві частини з одночасним вильотом 2 або 3 ней-

тронів. Осколки ядра під дією кулонівських сил набувають кінетичної енергії, яка потім переходить у теплову енергію. У свою чергу, нейтрони, що утворилися, можуть попасти в інші ядра, що знову приведе до поділу ядра з появою нових додаткових нейтронів і т.д. Це явище одержало назву ланцюгової реакції. Відбувається ріст кількості осколків у геометричній прогресії і в результаті маємо ядерний вибух.

Побудувати математичну модель, яка описуватиме зміну кількості нейтронів. Провести дослідження моделі.

2.10. В результаті аварії на атомній електростанції деякий регіон був забруднений радіоактивною речовиною, яка розпадається за експоненціальним законом. Початкова кількість радіоактивної речовини дорівнювала 15 стронцієвих одиниць, а через 5 місяців – 10 стронцієвих одиниць. Припустимо, що одна стронцієва одиниця є безпечною для проживання. Визначити через скільки місяців регіон буде безпечним для проживання.

2.11. Деяка радіоактивна речовина масою m перетворюється в іншу, яка, у свою чергу, теж розпадається. Описати процес зміни маси цих речовин, якщо швидкість утворення кожної з них, пропорційна кількості присутньої вихідної речовини. Знайти момент часу, коли маси нових речовин будуть однаковими.

2.12. Використовуючи закон збереження енергії, побудувати математичну модель вільних коливань величини струму $I(t)$ та заряду $q(t)$ в LC -контурі, де L – індуктивність, а C – ємність. **Вказівка.** Повна електромагнітна енергія контура в будь-який момент часу дорівнює сумі енергій магнітного та електричного полів, тобто $W = \frac{1}{2}I^2 + \frac{1}{2}q^2$.

2.13. Перед обідом тіло жертви вбивства було знайдено в кімнаті, де температура повітря становила 21° . О 12-й годині температура тіла становила 28° , а о 13-й годині – 24° . Припустимо, що температура тіла під час вбивства була $36,6^\circ$. Побудувати математичну модель процесу охолодження тіла та визначити час, коли було скоєно вбивство. **Вказівка.** Вважати, що тіло жертви охолоджувалось згідно з законом Ньютона.

2.14. Міноносець полює за підводним човном. У якийсь момент часу підводний човен спливає на поверхню за 3 км від міноносця і його виявляють. Знайти траєкторію, за якою має рухатись

міноносець, щоб він пройшов точно над підводним човном, якщо останній після викриття зразу занурився і поплив на повній швидкості по прямій у невідомому напрямку. Врахувати, що швидкість міноносця вдвічі більша, ніж швидкість човна.

Запитання та завдання до самоперевірки

1. Перелічіть основні фундаментальні закони, що застосовуються при побудові математичних моделей.
2. Як з моделі радіоактивного розпаду знайти період напіврозпаду (час, за який кількість радіоактивної речовини зменшиться вдвоє)?
3. Розкрийте загальну суть варіаційних принципів побудови математичних моделей.
4. Укажіть, на чому базується застосування аналогій при побудові моделей.
5. Опишіть суть ієрархічного підходу при побудові моделей.
6. Які висновки було отримано з простішої моделі руху ракети?
7. В чому полягає ієрархічний підхід для побудови моделі руху ракети?

2.2. Математичні моделі системи “кулька–пружина”

2.2.1. Побудова простіших моделей на основі фундаментальних законів

Розглянемо механічну систему “кулька–пружина” (рис. 2.5).

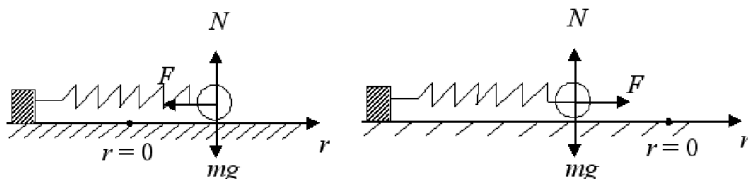


Рис. 2.5. Система “кулька–пружина”

Нехай m – маса кульки, $r(t)$ – координата кульки вздовж осі пружини в момент часу t (напрямок руху кульки збігається з віссю пружини). Вважаємо, що поверхня ідеально гладка, тобто

рух відбувається без тертя. Нехтуємо також опором середовища. Нехай кулька здійснює тільки прямолінійні коливання, тобто вага кульки mg зрівноважується реакцією площини N . Єдиною силою, що діє на кульку в напрямку осі r , є сила пружності пружини (рис. 2.5). Силу пружності визначимо за законом Гука, згідно з яким при малих деформаціях пружини

$$F = -kr,$$

де $k > 0$ – коефіцієнт, що характеризує пружність пружини, r – величина відхилення кульки відносно нейтрального положення $r = 0$.

Спочатку побудуємо модель механічної системи на основі другого закону Ньютона. Нехай m – маса тіла, що може бути прийнято за матеріальну точку, а \vec{v} – вектор її швидкості, то добуток $m\vec{v}$ – це кількість руху (імпульс) матеріальної точки. Зміна кількості руху може відбутися тільки під дією сили. Наведемо формулювання другого закону Ньютона: *зміна кількості руху точки пропорційна прикладеній рухомій силі і відбувається в напрямку дії цієї сили.*

Вибираючи відповідним чином одиниці маси, швидкості та сили, другий закон Ньютона можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.$$

У такому вигляді другий закон Ньютона правильний для тіл зі змінною масою. В такій формі він використовується в релятивістській механіці.

При постійній масі закон Ньютона записується у формі $m\vec{a} = \vec{F}$, де $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$. Тут m вимірюється в кілограмах, a – в метрах за секунду в квадраті, F – у ньютонках (1 ньютон = $1 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$). Якщо $a = g = 9,8 \text{ м}/\text{с}^2$ (g – прискорення земного тяжіння), то $mg = P$, де P – вага тіла.

Щоб застосувати другий закон Ньютона для моделювання механічних процесів, його необхідно записати в проекціях на осі обраної системи координат. Обчислюючи сили як функції системи координат, одержують математичну модель. Продемонструємо цей підхід на прикладі системи “кулька–пружина”.

Згідно з законом Ньютона, внаслідок зроблених припущень, рівняння руху кульки набуває вигляду

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr. \quad (2.2.1)$$

Рівняння (2.2.1) описує гармонічні коливання і має загальний розв'язок

$$r(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (2.2.2)$$

де $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – власна частота коливань системи “кулька–пружина” (вимірюється в $\text{рад}/\text{с}$). Величина $T = \frac{2\pi}{\omega}$ визначає період коливань (вимірюється в секундах). Рівняння (2.2.1) називають *гармонічним осцилятором*. У широкому розумінні осцилятором (від лат. *oscillo*, що означає коливатись) називають таку систему, деякі параметри якої здійснюють коливання при відсутності зовнішніх змінних дій.

Для замикання моделі (2.2.1) дописуємо ще додаткові початкові умови

$$r(t) = r_0, \quad \frac{dr}{dt} = v(t) = v_0 \quad \text{при } t = 0,$$

тоді значення C_1 , C_2 легко можна обчислити. Тим самим одержуємо, що

$$r(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + r_0 \cos \omega t.$$

Застосуємо ще для побудови математичної моделі системи “кулька–пружина” закон збереження енергії. Закон збереження енергії стверджує, що повна енергія в ізольованих системах не змінюється, проте енергія може перетворюватися з одного виду в інший.

Оскільки точка кріплення пружини нерухома, то в систему не надходить енергія і, навпаки, система не віддає енергію, тобто повна механічна енергія E залишається постійною. Повною механічною енергією називають суму кінетичної і потенціальної енергій: $E = E_K + E_P$.

Кінетична енергія E_K визначається рухом кульки й обчислюється за формулою

$$E_K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2.$$

Потенціальна енергія – це робота, яку необхідно виконати при зміщенні кульки на величину r , тобто

$$E_{II} = - \int_0^r F(s) ds = \frac{kr^2}{2}.$$

Тоді повна енергія

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{k}{2} r^2.$$

Оскільки $E = \text{const}$, а отже $\frac{dE}{dt} = 0$, то диференціюючи E за t , одержуємо

$$m \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} + k \frac{dr}{dt} r = \frac{dr}{dt} \left(m \frac{d^2r}{dt^2} + kr \right) = 0.$$

Звідси маємо рівняння (2.2.1).

Значимо, що навіть у простіших випадках для побудови моделі необхідно (якщо це можливо) використовувати не один, а кілька фундаментальних законів. Різні способи побудови моделей повинні давати однакові результати. Така перевірка непротивіччя дає змогу переконатися в правильності моделі. Зрозуміло, що таке співпадіння можливе при одних і тих самих припущеннях відносно об'єкта моделювання.

2.2.2. Варіаційні принципи

Одним з головних джерел фундаментальних математичних моделей є варіаційні принципи механіки. Під терміном “принцип” розуміють таке аксіоматичне твердження, яке достатньо загальне і основне для даної галузі науки. Всі інші положення (наприклад, закони руху) випливають зі сформульованого принципу.

Надзвичайно зручним і загальним принципом, що дозволяє одержувати математичні моделі руху, є варіаційний принцип Гамільтона¹³. Цей принцип полягає в тому, щоб серед усіх кінематично можливих рухів виділити той дійсний рух, для якого деякий функціонал досягатиме свого екстремального значення. Дамо спрощене формулювання принципу Гамільтона для механічних систем і на його основі введемо рівняння руху системи “кулька-пружина”.

Нехай маємо механічну систему, в якій її елементи та взаємодія між ними визначаються законами механіки. Введемо в розгляд поняття *узагальнених координат* $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, що однозначно визначають місцезнаходження системи та її елементів у просторі в момент часу t . Величина $q(t)$ може бути декартовими координатами, радіусом-вектором, кутовими координатами, набором координат матеріальних точок, що складають систему.

Важливою характеристикою руху механічної системи є *узагальнена швидкість* – похідна узагальнених координат за часом

$$\dot{q}_i = dq_i/dt, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Набір $q(t)$ і dq/dt визначає стан механічної системи в усі моменти часу. Співвідношення, що зв'язують прискорення зі швидкостями, називаються *рівняннями руху*. Ці рівняння являють собою диференціальні рівняння другого порядку відносно функцій $q(t)$

$$F_k(q, dq/dt, d^2q/dt^2) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

і дозволяють передбачити подальший рух системи.

Для опису механічної системи вводиться функція Лагранжа¹⁴ $L(q, \dot{q})$. Цю функцію ввів Гамільтон і назвав її в честь свого попередника. В простіших випадках функція Лагранжа має вигляд $L(q, \dot{q}) = E_K - E_P$, де E_K , E_P – кінетична і потенціальна енергії системи відповідно.

¹³Гамільтон Уільям (1805 – 1865) – ірландський математик, механік, фізик.

¹⁴Лагранж Жозеф Луї (1736-1813) – французький математик, астроном і механік.

Уведемо далі величину $S(q)$, яка називається дією за Гамільтоном на відрізку $[t_1, t_2]$:

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt. \quad (2.2.3)$$

Інтеграл (2.2.3) – це функціонал від узагальнених координат $q(t)$ (функції $q(t)$), що задані на відрізку $[t_1, t_2]$, який ставить у відповідність деяке число S (дію).

Дамо формулювання варіаційного принципу Гамільтона. Нехай у моменти часу $t = t_1$ і $t = t_2$ механічна система займає положення $q_1 = q(t_1)$ і $q_2 = q(t_2)$. Тоді з усіх допустимих траєкторій, за якими система могла б перейти з положення q_1 в положення q_2 , в дійсності реалізується траєкторія, яка доставляє мінімум функціоналу дії, тобто $q(t)$ є стаціонарною точкою для $S(q)$:

$$\frac{d}{d\varepsilon} S(q + \varepsilon\varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon = 0,$$

де $\varphi(t)$ – деяка довільна функція, така, що $\varphi(t_1) = 0$, $\varphi(t_2) = 0$. Функція $\varepsilon\varphi(t)$ називається варіацією величини $q(t)$, так що $q(t) + \varepsilon\varphi(t)$ є можливою координатою даної системи.

Отже, на підставі принципу Гамільтона, серед усіх можливих шляхів з положення Q_1 в Q_2 , що система проходить між проміжками часу t_1, t_2 тільки на прямому шляху дія за Гамільтоном має стаціонарне значення (рис. 2.6). Решта шляхів обхідні (штрихові лінії).

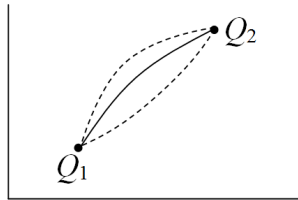


Рис. 2.6. Ілюстрація до методу Гамільтона

На прямому шляху варіація $\delta S = 0$, тому цей принцип називають ще принципом найменшої дії, оскільки дія вздовж прямого

шляху, як можна показати при деяких додаткових припущеннях, має найменше, порівняно з обхідними шляхами, значення.

Підводячи підсумки, наведемо послідовність дій, які необхідно виконати для побудови математичних моделей механічних систем за принципом Гамільтона:

- 1) визначаються узагальнені координати $q(t)$ та узагальнені швидкості $\dot{q}(t)$ механічної системи;
- 2) будується функція Лагранжа $L(q, \dot{q})$;
- 3) вводиться в розгляд функціонал дії $S(q)$;
- 4) мінімізується функціонал дії.

Ця послідовність задає чітку програму дій при побудові математичних моделей. Універсальність і строго формалізовані процедури, що не залежать від структури механічної системи, – важлива риса варіаційних принципів. Для складних механічних об'єктів варіаційні принципи є єдиним методом побудови математичних моделей.

Крім варіаційного принципу Гамільтона, були запропоновані й інші варіаційні принципи механіки. За їх допомогою вдавалось одержувати рівняння руху складних механічних систем. Підхід у моделюванні, що базується на варіаційних принципах, успішно застосовується для систем різної природи (фізичних, хімічних, біологічних), для яких можна сформулювати загальні твердження про характер їх еволюції.

2.2.3. Побудова математичної моделі системи “кулька–пружина” на основі принципу Гамільтона

Застосуємо тепер варіаційний принцип Гамільтона для побудови математичної моделі системи “кулька–пружина”. За узагальнену координату місцезнаходження кульки оберемо звичайну ейлерову координату $r(t)$. Тоді узагальнена швидкість $\frac{dr}{dt}$ – це звичайна швидкість. Функція Лагранжа в обраних координатах записується вже через знайдені в п. 2.2.1 вирази для кінетичної та потенціальної енергій системи

$$L(r, \frac{dr}{dt}) = \frac{m}{2} (\frac{dr}{dt})^2 - \frac{k}{2} r^2.$$

Для функціонала дії $S(q)$, згідно з (2.2.3), маємо вираз

$$S(r) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{k}{2} r^2 \right) dt.$$

Тепер знайдемо стаціонарну точку функціонала $S(r)$. Для цього обчислимо

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} S(r + \varepsilon\varphi) &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d(r + \varepsilon\varphi)}{dt} \right)^2 - \frac{k}{2} (r + \varepsilon\varphi)^2 \right] dt = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + 2\varepsilon \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 - \frac{k}{2} (r^2 + 2\varepsilon r\varphi + \varepsilon^2 \varphi^2) \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[m \left(\frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) - k(r\varphi + \varepsilon\varphi^2) \right] dt. \end{aligned}$$

Згідно з умовою екстремальності функціонала $S(q)$ маємо

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S(r + \varepsilon\varphi) \right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} - kr\varphi \right] dt = 0.$$

Застосуємо до інтеграла від першого виразу формулу інтегрування по частинах і врахуємо, що $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$, тоді одержимо

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} S(r + \varepsilon\varphi) \right|_{\varepsilon=0} = - \int_{t_1}^{t_2} \left[m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr \right] \varphi(t) dt = 0.$$

Оскільки $\varphi(t)$, що фігурує в даному виразі, – довільна функція, то вираз у квадратних дужках під інтегралом повинен дорівнювати нулю для всіх моментів часу $t_1 < t < t_2$. Тобто рух кульки описується рівнянням

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr = 0,$$

що співпадає з рівнянням, одержаним в п. 2.2.1 на основі фундаментальних законів.

2.2.4. Ієрархія математичних моделей системи “кулька–пружина”

2.2.4.1. Основні поняття

При побудові математичних моделей застосовується підхід, що реалізує принцип від “простого до складного”, або “знизу-вверх”, коли наступний крок у моделюванні робиться після детального вивчення простішої моделі. Спочатку будується простіша модель, що враховує мінімальну кількість факторів і має мінімальну область застосування, далі шляхом поступового ускладнення моделі переходять до моделей більш високого рівня.

В математичному плані це означає, що дослідження починається з побудови лінійних стаціонарних динамічних моделей, а потім переходять до лінійних нестаціонарних і нелінійних моделей, тобто ієрархія за принципом “знизу-вверх” приводить до необхідності використовувати чимраз складніший математичний апарат.

При цьому виникає ланцюг (ієрархія) дедалі більш повних моделей, кожна з яких узагальнює попередню, як загальний випадок. Цей шлях дає можливість поетапно вивчати більш реалістичні моделі шляхом відмови від припущень, які ідеалізують даний об’єкт. Ієрархія означає упорядкування математичних моделей за ознакою їх складності і повноти.

При побудові й аналізі будь-якої моделі завжди корисно знати її місце в ієрархії моделей досліджуваного явища, тобто при побудові ієрархічного ланцюга моделей деякого об’єкта потрібно дотримуватися принципу відповідності моделей, який можна сформулювати так: складна більш повна модель не відкидає просту, а лише установлює для неї границі застосування, вона співпадає з більш простою в межах указаних границь. Це дає можливість правильно оцінити область її застосування, чітко зрозуміти її зв’язки з моделями інших рівнів, що сприятиме більш глибокому розумінню досліджуваних явищ.

Зауважимо, що ієрархія математичних моделей може здійснюватися і за принципом від “складного до простого”. В цьому випадку реалізується шлях “зверху-вниз”, тобто з достатньо складної моделі при спрощених припущеннях і конкретизації об’єкта

моделювання одержується послідовність дедалі простіших моделей. Створення моделей за цим принципом у випадку, коли відомий найбільш загальний вигляд рівняння, що описує властивості системи, відбувається так: почавши із загальних рівнянь (наприклад, рівнянь Ньютона, Лагранжа, Гамільтона в механіці, рівнянь Нав'є–Стокса в аеро- і гідродинаміці, рівнянь Максвелла в електродинаміці, рівнянь Шредингера у квантовій механіці), далі з'ясовуємо, що можна в них спростити внаслідок специфіки задачі і так одержуємо спрощені моделі. Спрощення проводять доти, поки не стануть зрозумілими особливості поведінки явища. Простіші моделі мають меншу область застосування, але зате уточнюють поведінку об'єкта моделювання.

Цей підхід характерний тим, що дозволяє спочатку встановити деякі загальні властивості системи, а потім конкретизувати їх в частинних випадках.

Ієрархія моделей може містити широкий спектр рівнянь, які відрізняються між собою і суто математичною постановкою (лінійні, нелінійні, еліптичні, параболічні, гіперболічні, змішаного типу, стаціонарні, нестаціонарні, одновимірні, багатовимірні та ін.). При побудові ієрархії математичних моделей бажано, щоб простіші математичні моделі були представлені в аналітичній формі, які допускають точний розв'язок, який може бути використаний при тестуванні більш повних моделей.

Побудуємо ієрархічний ланцюг моделей на прикладі механічної системи “кулька–пружина” за принципом “знизу-вверх”.

2.2.4.2. Модель системи “кулька–пружина” в ідеальних умовах

Ідеальні умови для об'єкта покладаються на першому етапі побудови моделей складних об'єктів. Якщо об'єкт, що знаходиться в найкращих умовах, не в змозі досягти потрібних характеристик, то потрібно змінити підхід до об'єкта моделювання або пом'якшити вимоги для нього. Це і є *принцип найкращого сприяння*, що часто використовується на першій стадії моделювання. Якщо вимоги до об'єкта виконані, то наступні кроки моделювання пов'язані з дослідженням впливу на об'єкт додаткових ускладнюючих факторів, тобто грубим оцінюванням явищ ми з більшим розумінням можемо підійти до їх уточнених моделей.

Математична модель системи “кулька–пружина” в ідеальних умовах була побудована в пп. 2.2.1 і 2.2.3. Надалі послідовно вводимо нові ускладнюючі фактори, тим самим побудуємо ієрархічний ланцюг моделей за принципом “знизу–вверх”.

2.2.4.3. Урахування дії зовнішньої сили

На кульку може діяти відома зовнішня сила $F(r, t)$, що залежить від часу t і положення кульки r . Ці сили можуть мати різну природу: механічну, електричну, магнітну тощо.

Із другого закону Ньютона маємо, що до правої частини базової моделі (2.2.1) необхідно додати вираз $F(r, t)$, тобто отримаємо співвідношення

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F(r, t). \quad (2.2.4)$$

Простіший варіант рівняння (2.2.4) одержується у випадку сталої сили, тобто при $F(r, t) = F_0$ рівняння (2.2.4) набуває вигляду

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F_0.$$

Виконуючи в останньому рівнянні заміну $\bar{r} = r - \frac{F_0}{k}$, одержимо для \bar{r} рівняння типу (2.2.1)

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -k\bar{r}. \quad (2.2.5)$$

З (2.2.5) випливає, що природа коливань залишається такою ж, як і раніше, лише нейтральна точка $r = 0$ зсувається на величину $\frac{F_0}{k}$, тобто постійна сила не вносить змін у процес коливань.

Складніша картина руху виникає у випадку, коли є сила, що залежить від часу, наприклад, коли $F(t)$ – періодична функція. Коливання, які виникають у системі під дією зовнішньої періодичної сили, називаються *вимушеними*. Нехай $F(t) = F_0 \sin \omega_1 t$. Тоді з (2.2.4) отримуємо

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F_0 \sin \omega_1 t. \quad (2.2.6)$$

Розв’язок лінійного рівняння (2.2.6) знаходимо як суму загального розв’язку (2.2.2) однорідного рівняння і частинного розв’язку

неоднорідного рівняння, який при $\omega_1 \neq \omega$ шукатимемо у вигляді

$$r^* = A \sin \omega_1 t. \quad (2.2.7)$$

Підставляючи (2.2.7) в (2.2.6), знаходимо вираз для знаходження сталої A :

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega_1^2} = \frac{F_0}{m(\frac{k}{m} - \omega_1^2)} = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)},$$

де ω – частота коливань кульки у разі відсутності зовнішніх сил, тобто власна частота системи.

Загальний розв'язок рівняння (2.2.6) має вигляд

$$r(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 t, \quad (2.2.8)$$

або

$$r(t) = C \cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 t, \quad C = \text{const.}$$

Іншими словами, результуючий рух – це сума гармонічних коливань із власною частотою ω і коливань із частотою збурюючої сили ω_1 .

Але дія зовнішньої сили $F(t)$ приводить не тільки до появи в системі додаткових коливань, а й до необмеженого зростання амплітуди коливань при $\omega_1 \rightarrow \omega$ (рис. 2.7), тобто до появи резонансу в системі.

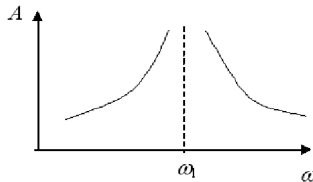


Рис. 2.7. Збільшення амплітуди коливань

Для моделювання поведінки системи на ЕОМ знайдемо сталі інтегрування C_1 , C_2 , які визначаються початковими умовами

$$r(0) = r_0, \quad \dot{r}(0) = v_0. \quad (2.2.9)$$

Враховуючи (2.2.9), з (2.2.8) отримаємо

$$r(t) = r_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t - \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)} \frac{\omega_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)} \sin \omega_1 t. \quad (2.2.10)$$

Як видно з (2.2.10), при $r_0 = 0$, $v_0 = 0$, система буде мати коливний рух. При частотах ω_1 , близьких до власної частоти ω , вважаючи, що $\frac{\omega}{\omega_1} = 1$, але $\omega^2 - \omega_1^2 \neq 0$, з (2.2.10) одержуємо

$$r(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)} (\sin \omega_1 t - \sin \omega t),$$

або

$$r(t) = 2 \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_1^2)} \sin \frac{\omega_1 - \omega}{2} t \cdot \cos \omega_1 t.$$

У цьому разі, завдяки накладенню коливань, виникає явище, яке називається биттям (рис. 2.8).

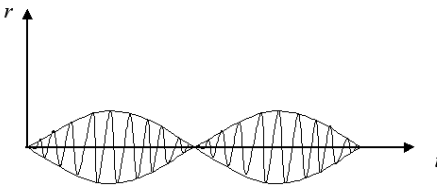


Рис. 2.8. Биття ($\omega_1 \approx \omega$)

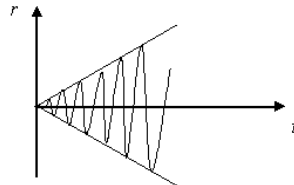


Рис. 2.9. Явище резонансу

При $\omega_1 = \omega$ розв'язок задачі (2.2.6), (2.2.9) має вигляд

$$r(t) = r_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{F_0}{2m\omega^2} [\sin \omega t - \omega t \cos \omega t]. \quad (2.2.11)$$

На рис. 2.9 показано графік цього руху при $r_0 = 0$, $v_0 = 0$. Як видно, при $\omega_1 = \omega$ виникає необмежене зростання амплітуди коливань, до того ж ріст амплітуди лінійний у часі. Це явище називають *резонансом*.

2.2.4.4. Математична модель системи з тертям

У природі всі реальні механічні системи знаходяться під дією тих чи інших сил тертя. Взагалі необхідно визнати, що сили тертя, які виникають через взаємодію реальної системи з оточуючим середовищем, найбільш складні серед відомих нам сил природи.

Сили тертя в системі “кулька–пружина” можуть з’явитися за рахунок неідеальної поверхні кульки і площини, по якій вона рухається. Тоді диференціальне рівняння руху тіла матиме вигляд

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F_T,$$

де F_T – проекція на вісь r сили сухого тертя. Сила тертя направлена проти руху, тобто в протилежний бік від напрямку швидкості руху тіла і за модулем $F_T = k_1 mg$. Тому рух кульки описує рівняння

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - k_1 mg \operatorname{sign}\left(\frac{dr}{dt}\right). \quad (2.2.12)$$

Через знакозмінність сили F_T це рівняння не можна звести до стандартного рівняння коливань (2.2.1). Рівняння (2.2.12) зводиться до двох рівнянь з додатковими умовами

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + k_1 mg \quad \left(\frac{dr}{dt} < 0\right), \quad (2.2.13)$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - k_1 mg \quad \left(\frac{dr}{dt} > 0\right). \quad (2.2.14)$$

Рівняння (2.2.13) можна розв’язати, але цей розв’язок описуватиме рух кульки лише поки швидкість буде від’ємною. Далі рух буде описуватися рівнянням (2.2.14), але за умови, що швидкість додатна. Після цього знову повертаємося до рівняння (2.2.13) і т.д.

Коливання будуть проходити доти, поки сила пружності при максимальних відхиленнях кульки не стане меншою за силу тертя $k_1 mg$. На рис. 2.10 показано графік таких коливань.

Не розв’язуючи рівнянь (2.2.13) та (2.2.14), покажемо, що амплітуда цих коливань буде зменшуватися. Для цього помножимо обидві частини рівняння (2.2.12) на $\frac{dr}{dt} = v$, звідки матимемо

$$mv \frac{dv}{dt} + kr \frac{dr}{dt} = -k_1 mg v \operatorname{sign}(v).$$

Перепишемо останнє рівняння у вигляді

$$\frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} + \frac{k}{2} \frac{dr^2}{dt} = -k_1 mg v \operatorname{sign}(v),$$

або

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2}\right) = -k_1 mg v \text{sign}(v). \quad (2.2.15)$$

Зауважимо, що вираз в дужках, виражає повну енергію системи, тобто суму кінетичної і потенціальної енергій:

$$E(t) = E_K(t) + E_{II}(t).$$

Оскільки $v \cdot \text{sign}(v) > 0$, то права частина рівняння (2.2.15) від'ємна і одержуємо, що

$$\frac{dE(t)}{dt} < 0, \quad v \neq 0, \quad \left(\frac{dE(t)}{dt} = 0, \quad v = 0\right),$$

тобто повна енергія системи спадає з часом (такі системи називаються *дисипативними*). Тому $\frac{mv^2}{2} + \frac{kr^2}{2}$ є спадною функцією часу.

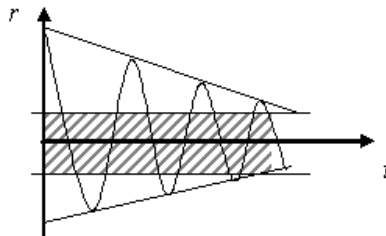


Рис. 2.10. Коливання при сухому терті

У моменти максимального відхилення кульки від нейтрального положення $v = 0$ одержуємо, що $\frac{kr_{\max}^2}{2}$ спадає, а це означає, що амплітуда коливань $|r_{\max}(t)|$ – теж спадна функція часу. Кулька через наявність сухого тертя до поверхні досить скоро зупиняється.

2.2.4.5. Математична модель системи з опором

Розглянемо прямолінійний рух кульки під дією лінійної сили пружності й лінійної сили опору (опір повітря, води, іншого середовища).

Оскільки сила опору істотно залежить від швидкості руху й завжди направлена в бік, протилежний швидкості руху кульки, то

проекція сили опору на вісь r (визначається за формулою Стокса)

$$F_{\text{оп}} = -\mu v = -\mu \frac{dr}{dt},$$

де коефіцієнт $\mu > 0$ визначається розмірами кульки, густиною середовища, його в'язкістю тощо.

Рівняння руху кульки у в'язкому середовищі має вигляд

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - \mu \frac{dr}{dt}. \quad (2.2.16)$$

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (2.2.16), попередньо звівши його до рівняння типу (2.2.5). Для цього в (2.2.16) зробимо заміну змінних

$$r(t) = \bar{r}(t)e^{\alpha t}, \quad \alpha = \text{const}.$$

Тоді для функції $\bar{r}(t)$ дістанемо рівняння

$$m \left(\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} + 2\alpha \frac{d\bar{r}}{dt} + \alpha^2 \bar{r} \right) e^{\alpha t} = -k\bar{r}e^{\alpha t} - \mu \frac{d\bar{r}}{dt} e^{\alpha t} - \mu \alpha \bar{r} e^{\alpha t}.$$

Поділивши це співвідношення на $e^{\alpha t}$ і вважаючи, що $\alpha = -\frac{\mu}{2m}$, отримаємо

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -\left(k - \frac{\mu^2}{4m}\right) \bar{r},$$

або

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = -\bar{k} \bar{r}, \quad (2.2.17)$$

де

$$\bar{k} = k - \frac{\mu^2}{4m}. \quad (2.2.18)$$

На відміну від рівняння (2.2.5), \bar{k} може бути додатним, від'ємним і навіть дорівнювати нулю. Розглянемо ці випадки окремо.

Випадок 1. $\bar{k} > 0$. Це можливо, коли коефіцієнт опору μ малий (малий опір), тобто $0 < \mu < 2\sqrt{km}$. При цьому загальний розв'язок рівняння (2.2.17) має вигляд, аналогічний (2.2.2), тобто

$$\bar{r}(t) = C_1 \cos \bar{\omega} t + C_2 \sin \bar{\omega} t, \quad \bar{\omega} = \sqrt{\frac{\bar{k}}{m}},$$

а для $r(t)$ унаслідок заміни маємо

$$r(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t}(C_1 \cos \bar{\omega}t + C_2 \sin \bar{\omega}t), \quad (2.2.19)$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які можна знайти, використовуючи початкові значення $r(0), \dot{r}(0)$. Отже, в системі з малим опором відбуваються згасаючі з часом коливання, причому амплітуда коливань спадає експоненціально (рис. 2.11).

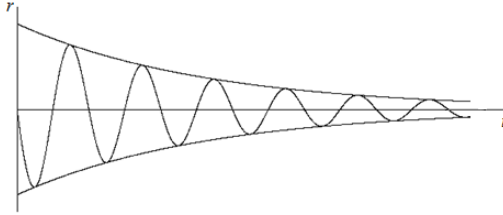


Рис. 2.11. Коливання при малому опорі

Рівняння (2.2.16) в цьому випадку є осцилятором, причому внаслідок лінійності рівняння його називають *лінійним осцилятором*. Через проміжки часу $\frac{\pi}{\bar{\omega}}$, що не залежать від початкових умов, кулька проходить положення рівноваги, а через проміжки $\frac{2\pi}{\bar{\omega}}$ функція $r(t)$ досягає максимальних або мінімальних значень, які відповідають моментам перетворення швидкості в нуль.

Випадок 2. $\bar{k} = 0$, тобто $\mu = 2\sqrt{km}$ (критичний випадок). З (2.2.17) маємо, що $\bar{r}(t) = C_1 t + C_2$. З урахуванням початкових умов для $r(t)$ одержуємо

$$r(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t}((v_0 + \frac{\mu r_0}{2m})t + r_0). \quad (2.2.20)$$

У цьому випадку коливання відсутні через дію сил опору. Кулька може лише один раз пройти точку рівноваги $r = 0$, але за умови, що

$$v_0 < -\frac{\mu r_0}{2m}, \quad r_0 > 0 \quad (v_0 > -\frac{\mu r_0}{2m}, \quad r_0 < 0), \quad (2.2.21)$$

тобто коли початковий поштовх кульки (початкова швидкість) досить великий за абсолютною величиною і направлений до точки $r = 0$ (рис. 2.12 а).

Якщо умови (2.2.21) не виконуються, то кулька жодного разу не потрапить в стан $r = 0$, вона буде тільки до цього положення наближатися (рис. 2.12 б), в).

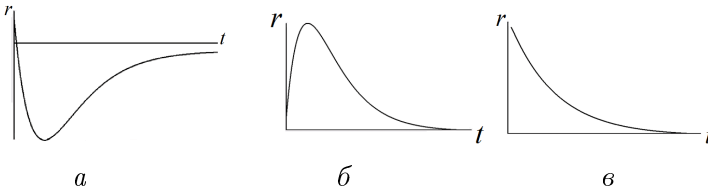


Рис. 2.12. Рух кульки в критичному випадку

Випадок 3. $\bar{k} < 0$, тобто $\mu > 2\sqrt{km}$. Ця нерівність означає наявність великого опору. Розв'язок рівняння (2.2.17) в цьому випадку має вигляд

$$\bar{r}(t) = C_1 e^{-\bar{\omega}t} + C_2 e^{\bar{\omega}t}, \quad \bar{\omega} = \sqrt{-\frac{\bar{k}}{m}}.$$

Для функції $r(t)$ маємо

$$r(t) = e^{-\frac{\mu}{2m}t} (C_1 e^{-\bar{\omega}t} + C_2 e^{\bar{\omega}t})$$

і можна показати, що для деяких початкових значень $r(0)$, $\dot{r}(0)$ кулька застрягає в середовищі і ніколи не проходить точку $r = 0$, а лише односторонньо наближається до неї при $t \rightarrow \infty$.

2.2.4.6. Нелінійні моделі

Вище ми розглянули випадок, коли сила опору лінійно залежить від швидкості, але це справедливо тільки для певних (усталених) рухів. Цілком можливі ситуації, за яких сила опору в'язкого середовища при малих швидкостях менша, а при великих швидкостях більша, ніж у формулі Стокса, наприклад,

$$F_{\text{оп}} = -\mu v |v|^\alpha,$$

де $\mu > 0$, $\alpha > 0$. Тоді рух кульки описується рівнянням

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - \mu \frac{dr}{dt} \left| \frac{dr}{dt} \right|^\alpha. \quad (2.2.22)$$

Рівняння (2.2.22) нелінійне. Його розв'язок виписати неможливо, але, користуючись методикою з п. 2.2.4.4, можна показати затухаючий характер коливань.

Складна природа сухого тертя теж може викликати нелінійності. Простіший випадок, коли сила тертя не залежить від величини швидкості, розглянутий у п. 2.2.4.4. Але сила тертя може зростати зі швидкістю, спадати або спочатку спадати, а потім зростати. На рис. 2.13 подані ці три типи залежностей.

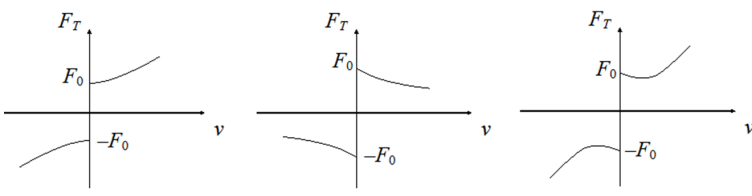


Рис. 2.13. Залежність сили тертя від швидкості

Для перших двох типів залежностей сили тертя від швидкості в першому наближенні можна взяти лінійну апроксимацію, при якій сила тертя дорівнює

$$F_T = F_0 \operatorname{sign}\left(\frac{dr}{dt}\right) + h \frac{dr}{dt}.$$

У третьому випадку силу тертя апроксимують поліномом третього степеня

$$F_T = F_0 \operatorname{sign}\left(\frac{dr}{dt}\right) + \beta \frac{dr}{dt} + \gamma \left(\frac{dr}{dt}\right)^3.$$

Тому математичні моделі мають вигляд

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - \left(F_0 \operatorname{sign}\left(\frac{dr}{dt}\right) + h \frac{dr}{dt} \right)$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr - \left(F_0 \operatorname{sign}\left(\frac{dr}{dt}\right) + \beta \frac{dr}{dt} + \gamma \left(\frac{dr}{dt}\right)^3 \right).$$

Для цих моделей можна знайти положення рівноваги та дослідити їх на стійкість.

Ще один тип нелінійності може бути зумовлений змінними механічними властивостями пружини. Закон Гука дійсний, узагалі кажучи, лише при малих відхиленнях кульки від нейтрального положення. При більших деформаціях пружини, залежно від матеріалу, з якого вона зроблена, пружина може поводитися як м'яка (сила пружності менша, ніж у законі Гука), або як жорстка (сила пружності більша, ніж у законі Гука). Тобто жорсткість пружини є нелінійною функцією і рівняння руху набуває вигляду

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r)r. \quad (2.2.23)$$

Для (2.2.23) можна виписати неявний розв'язок. Але, крім цього, можна показати сталість повної енергії системи. Для цього домножимо ліву й праву частини рівняння (2.2.23) на $\frac{dr}{dt}$. Отримаємо

$$m \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r)r \frac{dr}{dt}. \quad (2.2.24)$$

Перетворимо праву частину рівняння (2.2.24) так:

$$-\frac{dr}{dt} r k(r) = -\frac{dr}{dt} \frac{d}{dr} \int_0^r s k(s) ds = -\frac{d}{dt} \int_0^r s k(s) ds.$$

Враховуючи, що ліва частина рівняння (2.2.24)

$$m v \frac{dv}{dt} = \frac{m}{2} \frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{m v^2}{2},$$

одержимо

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m v^2}{2} + \int_0^r s k(s) ds \right) = 0,$$

або

$$\frac{m v^2}{2} + \int_0^r s k(s) ds = \text{const},$$

що означає *консервативність руху*, тобто сталість повної енергії. Звідси маємо коливний характер руху кульки.

Насамкінець зазначимо, що у зв'язку з широким використанням засобів обчислювальної техніки в учбових закладах, з'явилася можливість досить наочно ілюструвати різні особливості поведінки нелінійних систем. Розв'язання подібних практично важливих прикладних задач цілеспрямовано формує у свідомості студентів переконання в тому, що обчислювальна техніка є потужним інструментом інженера, вченого, що багаторазово посилює його дослідницький потенціал.

Тому на кафедрі прикладної математики ЧНУ розроблена комп'ютерна модель, яка дає змогу студентам проводити обчислювальні експерименти з ієрархією моделей системи "кулька-пружина" в інтерактивному режимі.

Висновки. Наведені побудови математичних моделей демонструють ієрархічний принцип математичного моделювання. Моделі будуються при послідовній відмові від умов, що ідеалізують даний об'єкт. У деяких випадках ускладнення моделі не вносить нічого нового, в інших випадках поведінка системи суттєво змінюється. Шлях від простого до складного дає можливість поетапно вивчати чим раз реальніші моделі й порівнювати їхні властивості. Досить загальні рівняння, що описують поведінку механічної системи, мають вигляд

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r, t)r + F(r, t, \frac{dr}{dt}), \quad k > 0, \quad (2.2.25)$$

де k, F – різноманітні функції своїх аргументів.

Існує і другий шлях побудови і вивчення моделей – від "загального до частинного". З загальної моделі (2.2.25), здійснюючи конкретизацію, можна послідовно одержувати і вивчати більш прості моделі окремих випадків. Цей підхід теж широко застосовується, оскільки дозволяє зразу встановити деякі загальні властивості об'єктів, а потім конкретизувати і доповнювати їх в частинних випадках.

2.2.5. Метод аналогій між механічними та електричними системами

Спочатку застосуємо варіаційний принцип Гамільтона для побудови математичної моделі електричного контура, що скла-

дається з конденсатора ємністю C і котушки індуктивністю L (рис. 2.14).



Рис. 2.14. LC -контур

Згідно з цим принципом, визначимо узагальнені координати – функцію $q(t)$, що описує величину заряду на клеммах конденсатора та узагальнену швидкість $\dot{q}(t)$, що задає величину контурного струму.

Щоб знайти вирази для аналогів кінетичної та потенціальної енергій, міркуватимемо так. Спочатку знайдемо кінетичну енергію (енергію руху зарядів), що переміщуються в провіднику. Енергія таких зарядів пропорційна квадрату швидкості v їх направленого руху. З іншого боку, заряд, що проходить через поперечний перетин s за одиницю часу (струм), дорівнює $i = q_0 n s v$, де q_0 – величина елементарного заряду, n – об'ємна концентрація переносників струму. Тому енергія руху частинок $T \sim v^2 \sim i^2$ ($i = \dot{q}$). Коефіцієнт пропорційності беремо таким, що дорівнює $L/2$, тобто $T = T(q) = \frac{1}{2} L \dot{q}^2$.

Потенціальна енергія контуру міститься в конденсаторі. Для його зарядки потрібно затратити роботу по розділенню різноміненних зарядів. Згідно з законом Кулона, сила, що чинить опір цьому процесу, пропорційна добутку зарядів $q_1 q_2$ (при $q_1 = q_2 = q$ сила пропорційна q^2). Тому робота для відокремлення зарядів, тобто потенціальна енергія V , пропорційна квадрату $q(t)$: $V = V(q) = \frac{1}{2C} q^2$.

Створюючи лагранжіан

$$L = T - V = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 - \frac{1}{2C} q^2,$$

згідно з загальною схемою принципу Гамільтона (п. 2.2.2), запишемо функціонал дії

$$S(q) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (L\dot{q}^2 - \frac{1}{C}q^2) dt.$$

Далі аналогічно, як у п. 2.2.3, з умови екстремальності функціонала $S(q)$ одержимо рівняння, яким описується зміна заряду на конденсаторі

$$\ddot{q} = -\frac{1}{LC}q.$$

Оскільки контурний струм $I(t) = -\dot{q}(t)$, то рівняння для заряду можна переписати як рівняння для контурного струму

$$L\ddot{I} + \frac{1}{C}I = 0.$$

У випадку, коли в LC - контур під'єднати ще опір R , то рівняння для контурного струму $I(t)$ набуває вигляду

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0.$$

Це рівняння таке ж саме, як і рівняння $m\ddot{x} + \mu\dot{x} + kx = 0$, що описує рух механічної системи “кулька–пружина” під дією сил пружності й опору (див. п. 2.2.4).

Незважаючи на різноманітну природу цих явищ, побудовані моделі виявились ідентичними, тому коливання в RLC -контурі відбуваються так само, як у механічній системі, тобто різні за природою коливання протікають за одним і тим же законом. Це ще раз свідчить про важливу властивість математичних моделей – їх *універсальність*, що широко застосовується при вивченні об'єктів різноманітної природи. Додаючи до математичних об'єктів різні інтерпретаційні компоненти, можна одержати математичні моделі різних предметів і явищ.

Тепер зрозуміло, що між електричними і механічними системами існує важлива аналогія (див. таблицю 2.1).

Таблиця 2.1. Відповідність параметрів електричної та механічної систем

Механічна система	Електрична система
маса кульки m	індуктивність L
коефіцієнт опору μ	опір R
жорсткість пружини k	величина обернена ємності C^{-1}
зміщення кульки x	сила струму $I(t)$, або величина заряду $q(t)$
кінетична енергія $\frac{m\dot{x}^2}{2}$	енергія магнітного поля котушки $L\frac{\dot{q}^2}{2}$
потенціальна енергія $\frac{kx^2}{2}$	енергія електричного поля конденсатора $\frac{q^2}{2C}$
сила натягу пружини kx	електрична напруга конденсатора $\frac{q}{C}$

Отже, якщо ми маємо дві системи – механічну і електричну, які складаються з перерахованих елементів і при цьому між аналогічними елементами виникають однакові зв'язки, то і системи в цілому є аналогічними. На цьому базується аналогове моделювання, що дозволяє механічну систему вивчати за допомогою електричної і навпаки. Це особливо корисно, коли створення механічної системи дороге або проведення замірів у механічній системі досить складне, тоді поведінку механічної системи можна передбачити за допомогою простих замірів параметрів електричної моделі. Наприклад, електричні моделі механічних систем використовувалися при розробці перших ядерних реакторів для електростанцій.

2.2.6. Задачі для самостійної роботи

2.15. Побудувати фазовий портрет системи (2.2.13), (2.2.14).

2.16. Рівняння механічної системи з тертям має вигляд

$$m\ddot{x} + kx = F(u),$$

де права частина $F(u)$ задається виразом

$$F = F_0 \text{sign}(u) + hu, \text{ або } F = F_0 \text{sign}(u) + \beta u + \eta u^3.$$

Тут μ , k , h , β , η , F_0 – додатні числа, $u = v - \dot{x}$, v – швидкість руху поверхні, на якій знаходиться тіло масою m . Знайти положення рівноваги тіла та дослідити умови його стійкості.

2.17. Для рівняння, що описує рух тіла з тертям вигляду

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = F_0 \text{sign}(v - \dot{x}) + hv,$$

де $\mu, k, h, \beta, \eta, F_0$ – додатні числа; v – швидкість руху поверхні, на якій знаходиться тіло масою m побудувати фазовий портрет.

Використовуючи формули для кінетичної і потенціальної енергій механічної системи “кулька–пружина”, а також рівняння гармонічних коливань (2.2.1), показати, що в цій системі загальна енергія постійна.

2.18. Коливання маятника в полі сил тяжіння. Нехай на нерухомому шарнірі підвішений маятник – вантаж масою m , що знаходиться на кінці стержня довжиною l . Стержень вважається невагомим і абсолютно жорстким. Вантаж має невеликі розміри порівняно з довжиною стержня так, що його можна прийняти за матеріальну точку. Опором повітря нехтуємо, коливання відбуваються у фіксованій вертикальній площині. Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона, побудувати математичну модель маятника. **Вказівка.** Для узагальненої координати вибрати кут α відхилення маятника від нейтрального положення $\alpha=0$.

2.19. Тіло масою m прикріплене до двох пружин, як показано на рис. 2.15. Нехай у початковий момент часу кулька перебуває в стані спокою в точці $x = c$. Знайти закон руху тіла. Розглянути випадки однакової та різної пружності пружин.

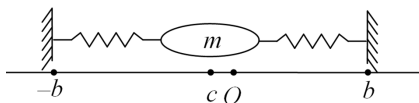


Рис. 2.15. Коливання кульки під дією двох пружин

2.20. У системі “кулька–пружина” здійснюється коливання під дією зовнішньої сили, величина якої $F = F_0 \cos^3 \omega t$. Довести, що існують два значення частоти ω , при яких виникає явище резонансу. Знайдіть ці два значення.

2.21. Лінійне рівняння, що описує поведінку гармонічного осцилятора, має місце за умови малості амплітуди коливань, що дає змогу записати силу пружності в лінійному вигляді $F = -kx$. Для

описання руху з більшими амплітудами вираз для сили пружності має два члени: лінійний і нелінійний, тоді рівняння руху набуває вигляду

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2.$$

Побудувати фазові траєкторії цього рівняння. Порівняти його розв'язки при різних α з розв'язками лінійного рівняння.

2.22. Побудувати математичну модель системи двох кульок масами m_0 , m_1 , з'єднаних пружинами з пружностями k_0 , k_1 , k_2 (рис. 2.16). Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь. Застосовуючи засоби одного з універсальних математичних пакетів типу MathCad, виконати комп'ютерне моделювання механічної системи.

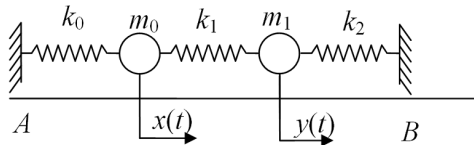


Рис. 2.16. Механічна система з двома кульками

2.23. Виконати повний аналіз математичної моделі системи "кулька–пружина" з тертям. Провести комп'ютерне моделювання руху кульки.

2.24. Виконати повний аналіз математичної моделі системи "кулька–пружина" з опором. Провести комп'ютерне моделювання руху кульки.

2.25. Тіло рухається в горизонтальному середовищі з початковою швидкістю v_0 . Визначити, як буде змінюватись швидкість і пройдений шлях тіла, якщо опір середовища а) лінійний; б) пропорційний квадрату швидкості; в) визначається за формулою $F = -kv^{3/2}$. Виконати побудову математичних моделей та їх дослідження. Побудувати графіки швидкості і пройденого шляху.

2.26. Побудувати математичну модель системи "кулька–пружина" з опором за умови, що на кульку діє зовнішня періодична сила. Знайти розв'язки моделі. Показати, що в такій системі явище резонансу неможливе. Провести комп'ютерне моделювання руху кульки.

Запитання та завдання до самоперевірки

1. Сформулюйте відомі вам фундаментальні закони природи.
2. В чому полягає принцип Гамільтона побудови математичних моделей?
3. Що таке функція Лагранжа? Як її побудувати?
4. Що таке функціонал дії? Як знайти його екстремум?
5. Що таке осцилятор / гармонічний осцилятор?
6. Коли в системі “кулька–пружина” виникає явище резонансу?
7. В чому полягає принцип ієрархії математичних моделей для системи “кулька–пружина”?
8. Побудуйте математичну модель системи “кулька–пружина” з урахуванням тертя. Які висновки одержуються з моделі?
9. Запишіть математичну модель системи “кулька–пружина” з опором. Опишіть методи її дослідження.
10. Наведіть приклади нелінійних моделей системи “кулька–пружина”.
11. Опишіть аналогію механічної системи “кулька–пружина” і електричного ланцюга.

2.3. Застосування теорії подібності для побудови математичних моделей

Мета математичного моделювання – побудова адекватної моделі. Одним із методів забезпечення адекватності є використання на етапі побудови математичної моделі теорії подібності. *Теорія подібності* – це наука, що вивчає умови подібності двох фізичних явищ. Теорія подібності забезпечує визначення критеріїв подібності по відношенню до об’єкта і моделі і методи встановлення подібності. Між моделлю і об’єктом повинно бути встановлено відношення подібності. Фундамент теорії подібності почав закладатися в середині XIX ст. Згодом теорія подібності стала широко використовуватися в архітектурі, кораблебудуванні, теплотехніці, електротехніці, теорії пружності тощо. Вчення про подібність розвивалося двома шляхами:

- аналіз рівнянь, що описують явище;
- аналіз розмірностей фізичних величин, що характеризують ці явища.

Відповідно до цього, існує два способи визначення критеріїв подібності. Перший з них полягає в зведенні рівнянь фізичного процесу до безрозмірного вигляду, тобто для його застосування потрібно мати диференціальні рівняння процесів. Другий спосіб базується на застосуванні π -теореми. Ним можна користуватися у випадку, коли відомо тільки параметри процесу, їх фізичні розмірності, але рівняння процесу невідоме.

Критерії подібності виконують подвійну роль. По-перше, з їх допомогою визначають масштаби, що зв'язують параметри моделі і оригінала. По-друге, на основі аналізу критеріальних співвідношень виявляють найбільш характерні особливості модельованих об'єктів.

2.3.1. Знаходження критеріїв подібності явищ за наявності математичної моделі

Під подібністю розуміють взаємооднозначну відповідність між моделлю і об'єктом, при якій функції або правила переходу від параметрів моделі до параметрів об'єкта відомі. Два об'єкти (процеси, явища), у яких подібні характерні величини, називаються *подібними*, вони відрізняються лише масштабами основних розмірних величин, причому коефіцієнти подібності по кожній з цих величин, взагалі кажучи, різні. Поняття подібності допускає широке трактування. Найбільш проста і зрозуміла – це геометрична подібність. При подібності фізичних процесів повинні бути подібні всі основні фізичні величини, що характеризують ці процеси у відповідних просторово-часових точках, що рівносильно збереженню всіх числових значень величин і заміні одиниць виміру основних розмірних величин. Наведемо кілька прикладів фізичної подібності.

1. Геометрична подібність виражається рівністю всіх відповідних кутів і пропорційністю всіх відповідних лінійних розмірів:

$$\frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \dots = \frac{l'_n}{l_n} = k_l = \text{const.}$$

2. Часова подібність виражається пропорційністю інтервалів між відповідними моментами часу (наприклад, пропорційними ϵ

проміжки часу, за які дві відповідні точки об'єкта й моделі проходять геометрично схожі шляхи):

$$\frac{t'_1}{t_1} = \frac{t'_2}{t_2} = \dots = \frac{t'_n}{t_n} = k_t = \text{const.}$$

3. Подібність температур виражається пропорційністю температур у відповідних точках і у відповідні моменти часу:

$$\frac{u'_1}{u_1} = \frac{u'_2}{u_2} = \dots = \frac{u'_n}{u_n} = k_u = \text{const.}$$

4. Подібність швидкостей виражається відповідністю напрямів в пропорційністю величин швидкостей (швидкості відповідних точок у відповідні моменти часу пропорційні):

$$\frac{v'_1}{v_1} = \frac{v'_2}{v_2} = \dots = \frac{v'_n}{v_n} = k_v = \text{const.}$$

Пропорційність векторних величин визначається відповідністю напрямків і пропорційністю їх абсолютних величин або пропорційністю координат відповідних векторів.

Цей список можна продовжувати для інших фізичних величин. У цих формулах k – це коефіцієнт пропорційності, коефіцієнт подібності, або стала подібності. Позначення без штриха стосуються першого фізичного явища (оригіналу), з штрихом – другого фізичного явища, або моделі. Нижні індекси 1, 2, ... вказують на відповідні точки простору і моменти часу.

Для подібності фізичних явищ необхідною і достатньою умовою є незмінність (інваріантність) системи визначальних рівнянь математичної моделі при подібних перетвореннях змінних (заміні всіх змінних пропорційними їм величинами), тобто система визначальних рівнянь

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f(k_1 x_1, k_2 x_2, \dots, k_n x_n) = 0 \end{cases}$$

має бути сумісною, де x_1, x_2, \dots, x_n – параметри моделі. Ця система сумісна, якщо

$$f(k_1 x_1, k_2 x_2, \dots, k_n x_n) = \varphi(k_1, k_2, \dots, k_n) f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Іншими словами, подібні перетворення аргументів приводять до подібних перетворень усієї функції. Такі функції називаються *гомогенними*. Відомо, що гомогенними є тільки степеневі функції.

Розглянемо подібне перетворення змінних у рівнянні теплопровідності. Нехай процес поширення тепла в стержні описується диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.3.1)$$

де u – температура, t – час, x – координата точки.

Виконаємо перетворення подібності $u = k_u u'$, $t = k_t t'$, $x = k_x x'$, $a = k_a a'$. Підставивши одержані значення змінних у рівняння теплопровідності, матимемо

$$\frac{k_u \partial u'}{k_t \partial t'} = k_a^2 (a')^2 \frac{k_u \partial^2 u'}{k_x^2 \partial x'^2}. \quad (2.3.2)$$

Для того, щоб рівняння (2.3.2) збігалось з рівнянням (2.3.1), необхідно, щоб коефіцієнти пропорційності (подібності) задовольняли умову

$$\frac{k_u}{k_t} = \frac{k_a^2 k_x}{k_x^2} \Rightarrow \frac{k_a^2 k_t}{k_x^2} = 1.$$

Якщо ввести позначення $k_{\frac{a^2 t}{x^2}} = \frac{k_a^2 k_t}{k_x^2}$, то матимемо $k_{\frac{a^2 t}{x^2}} = 1$. Це

означає, що масштаб безрозмірного комплексу $\frac{a^2 t}{x^2}$ має значення, що дорівнює одиниці, тобто для подібних процесів цей комплекс має залишатися незмінним у відповідних часово-просторових точках. Зауважимо, що тут має місце незмінність, а не сталість, оскільки одержані комплекси однакові тільки для відповідних точок і для відповідних моментів часу двох явищ. Для різних точок і різних моментів часу одержані комплекси можуть бути різними. Безрозмірні комплекси, незмінність яких є кількісною ознакою подібності фізичних явищ, називаються *критеріями подібності*.

Безрозмірний комплекс $\frac{a^2 t}{x^2}$ є критерієм подібності явищ теплопровідності. Як правило, цей комплекс замінують оберненою

величиною і називають критерієм подібності Фур'є. Для нього прийнято таке позначення: $F_o = \frac{x^2}{a^2 t}$. Рівність критеріїв Фур'є у відповідних точках теплових потоків – це необхідна умова подібності нестационарного процесу теплообміну. Можна перекоонатися, що ця умова і достатня.

На цьому прикладі ми проілюстрували умови подібності двох явищ теплопровідності – це незмінність критеріїв подібності. Тобто, якщо розрахувати $u(x, t)$ для деякого явища теплопровідності, то за перетворенням подібності можна знайти $u'(x', t')$ для подібного явища.

Зауважимо, що можливий формальний більш простий спосіб подібного перетворення диференціальних рівнянь: критерії подібності знаходять, якщо поділити одну частину диференціального рівняння на іншу і відкинути знаки математичних операторів.

Дійсно, критерій Фур'є можна розглядати як ділення $\frac{\partial u}{\partial t}$ на $a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ після відкидання знаків диференціала, оскільки диференціал будь-якої величини має ту ж розмірність, що й сама величина. Враховуючи, що $\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{u}{t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{u}{x^2}$, одержимо

$$\frac{\frac{u}{t}}{a^2 \frac{u}{x^2}} = \frac{x^2}{a^2 t} = F_o.$$

Тут ми скористалися правилом заміщення.

Правило заміщення. Якщо $\frac{u'_1}{u_1} = \frac{u'_2}{u_2} = M_u = const$, то $\frac{du'}{du} = M_u$.

Для того, щоб перекоонатися в справедливості цього правила, скористаємося властивістю пропорції

$$\frac{\Delta u'}{\Delta u} = \frac{u'_2 - u'_1}{u_2 - u_1} = \frac{u'_1}{u_1} = M_u.$$

Тепер, якщо перейти до границі при $\Delta u \rightarrow 0$, то одержимо $\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta u'}{\Delta u} = M_u$, тобто $\frac{du'}{du} = M_u$. Звідси маємо правило: вивчаючи подібність, замість диференціала деякої величини можна розглядати саму величину.

За таким правилом можна одержати інші критерії подібності. Наприклад, для критерію Ньютона з рівняння $F = m \frac{dv}{dt}$ маємо

$$Ne = \frac{F}{m \frac{v}{t}} = \frac{Ft}{mv}.$$

Основні положення теорії подібності зазвичай систематизуються у вигляді теорем подібності. Розглядаючи приклад рівняння теплопровідності ми зрозуміли, що для подібних явищ можна визначити незмінні безрозмірні комплекси, які є комбінацією фізичних величин, що описують ці явища. Цей факт можна оформити у вигляді теореми.

Перша теорема подібності. *Явища, подібні в тому чи іншому розумінні, мають певні комбінації параметрів (вони називаються критеріями подібності), які чисельно однакові у відповідних просторово-часових точках.*

Перша теорема подібності стверджує, що для подібних явищ (об'єктів, процесів) існують однакові безрозмірні степеневі комплекси фізичних величин, які характеризують ці явища. Ця теорема формулює необхідні умови існування подібності, але вона не вказує способу реалізації подібності при побудові моделей. Перша теорема подібності називається також теоремою Ньютона або теоремою Ньютона–Бертрана.

Друга теорема подібності. В основному формулюванні ця теорема має такий вигляд: *будь-яке повне рівняння фізичного процесу, яке зв'язує n фізичних величин, що характеризують процес, може бути зображеним функціональною залежністю між критеріями подібності, які формулюються з цих величин. Причому, якщо для вимірювання фізичних величин використовується k незалежних розмірностей, то критеріїв подібності має бути $n - k$.*

Ця теорема часто називається π -теоремою, оскільки критерії подібності, які характеризують подібні процеси, найчастіше позначають грецькою літерою π . Зауважимо, що зміст незалежних розмірностей буде пояснено в наступному пункті.

Проілюструємо другу теорему на подібності трикутників. Трикутник однозначно визначається за трьома сторонами a, b, c , то

му маємо $n = 3$. Оскільки вони мають однакову розмірність, то $k = 1$. Тому подібність трикутників повинна визначатися двома ($n - k = 2$) критеріями подібності. За критерії подібності можна вибрати відношення b/a , c/a . У подібних трикутників ці відношення будуть однаковими.

Третя теорема подібності. *Необхідними й достатніми умовами подібності двох явищ є пропорційність відповідних величин, що входять в умови однозначності математичних моделей цих явищ, і рівність критеріїв подібності цих явищ.*

Третя теорема подібності називається ще теоремою Кірпічова–Гухмана. До умов однозначності, що згадуються в теоремі, належать, наприклад, початковий стан системи (початкові умови), умови на межах системи (межові або крайові).

2.3.2. Знаходження критеріїв подібності явища за відсутності його математичної моделі

Якщо об'єкт, що вивчається, – складний, то часто важко описати його за допомогою математичної моделі, а відсутність математичної моделі робить неможливим установлення масштабів і критеріїв подібності за допомогою відповідних визначальних рівнянь оригіналу й моделі. У багатьох випадках це вдається зробити, використовуючи аналіз розмірностей усіх фізичних величин, що визначають фізичне явище, а також π -теорему, яка вказує метод установлення критеріїв подібності, коли математичні описання оригіналу й моделі невідомі.

Аналіз розмірностей і π -теорема Бекінгема дозволяють створювати розрахункові математичні моделі на основі даних, які отримуються з натурних експериментів.

Розмірності. Вимірювання – це порівняння вимірюваної величини з деяким її значенням, що прийнято за одиницю виміру. Нехай вимірюється деяка величина V . Будемо позначати через $[V]$ одиницю вимірювання величини V . Наприклад, для сили електричного струму – це ампер. Тоді виміряти V означає знайти відношення величини V до одиниці виміру $[V]$, тобто

$$v = \frac{V}{[V]}.$$

Число v називається числовим значенням вимірюваної величини.

Фізичні величини можуть бути пов'язані між собою певними співвідношеннями. Тому якщо вибрати одиниці виміру деяких з них, то через ці одиниці можна визначити одиниці виміру всіх інших фізичних величин. Через це фізичні величини поділяються на *основні* та *похідні*. Що стосується механіки, то в системі СІ є три основні одиниці виміру: одиниця виміру довжини – метр (м), одиниця виміру маси – кілограм (кг), одиниця виміру часу – секунда (с). В загальному випадку [довжина] = L , [маса] = M , [час] = T , де L , M , T – масштаби довжини, маси і часу.

Інші одиниці вимірювання є похідними. Наприклад, для сили $[F] = MLT^{-2}$, для кінетичної енергії $[E] = ML^2T^{-2}$, для частоти періодичного процесу $[\omega] = T^{-1}$. В загальному випадку $[A] = M^m \cdot L^l \cdot T^t$, де m , l , t – показники, які можуть бути додатними, від'ємними, цілими, дробовими.

Покажемо, що похідні одиниці вимірювання завжди є степеневими добутками основних одиниць виміру. Припустимо, що між фізичною величиною X , для якої знаходиться похідна одиниця виміру $[X]$, і фізичними величинами Y_1, Y_2, \dots , для яких установлені основні одиниці виміру $[Y_1], [Y_2], \dots$, існує залежність $X = F(Y_1, Y_2, \dots)$. Але, як ми уже знаємо, що залежність F має бути гомогенною, тобто $X = F(Y_1, Y_2, \dots) = a Y_1^{\alpha_1} Y_2^{\alpha_2} \dots$, тим самим $[X] = [Y_1]^{\alpha_1} [Y_2]^{\alpha_2} \dots$.

Розмірності у своїй сукупності можуть бути *залежними* та *незалежними*. Незалежність розмірностей у даній сукупності означає, що будь-яка розмірність не може бути представлена через розмірності інших величин, що входять у цю групу. Наприклад, величини A, B, C мають незалежні розмірності, якщо $[A] \neq [B]^n [C]^m$ при будь-яких m, n . Так розмірності довжини L , швидкості LT^{-1} , енергії ML^2T^{-2} – незалежні, а розмірності довжини L , швидкості LT^{-1} , прискорення LT^{-2} – залежні.

Щоб визначити кількість величин, які мають незалежні розмірності, потрібно виразити розмірності цих величин через розмірності основних і скласти матрицю з показників степеня. Ранг цієї матриці дає кількість незалежних розмірностей. Наприклад, для сили, довжини і часу маємо $[F] = M^1 L^1 T^{-2}$, $[l] = M^0 L^1 T^0$, $[t] = M^0 L^0 T^1$, при цьому матриця з показників матиме вигляд

	F	l	T
M (кг)	1	0	0
L (м)	1	1	0
T (с)	-2	0	1

Ранг цієї матриці дорівнює трьом, тому величини F , l , t мають незалежні розмірності.

Для того, щоб знаходити критерії подібності та будувати математичні моделі фізичних явищ, дамо строге формулювання π -теорема.

π -теорема. *Нехай математичним описанням (розрахунковою моделлю) деякої фізичної закономірності є функціональна залежність*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (2.3.3)$$

між n визначальними розмірними величинами x_1, x_2, \dots, x_n , серед яких k величин x_1, x_2, \dots, x_k , мають незалежні розмірності. Тоді залежність (2.3.3) може бути перетворена на співвідношення

$$F(1, 1, \dots, 1, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = \varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = 0 \quad (2.3.4)$$

між $m = n - k$ незалежними безрозмірними степеневими комплексами фізичних величин вигляду

$$\pi_i = \frac{x_{k+i}}{x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \dots x_k^{\alpha_{ki}}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.3.5)$$

які називаються критеріями подібності. Тут x_{k+i} , $i = 1, 2, \dots, m$ – величини, що мають залежні розмірності, а показники степенів $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \dots, \alpha_{ki}$ ті ж самі, що й у відповідних формулах розмірностей для розмірно залежних величин.

Доведення. Якщо серед визначальних фізичних величин x_1, x_2, \dots, x_n рівняння (2.3.3) незалежні розмірності мають перші k величин

$$x_1, x_2, \dots, x_k,$$

а інші m величин

$$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+m}$$

\dots, x_n (тобто між безрозмірними величинами $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$). Це означає, що співвідношення (2.3.3) можна переписати у вигляді

$$F(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n) = 0,$$

або

$$F\left(\frac{x_1}{[x_1]}, \dots, \frac{x_k}{[x_k]}, \frac{x_{k+1}}{[x_1]^{\alpha_{11}} \cdot [x_2]^{\alpha_{21}} \cdot \dots \cdot [x_k]^{\alpha_{k1}}}, \dots, \frac{x_n}{[x_1]^{\alpha_{1m}} \cdot [x_2]^{\alpha_{2m}} \cdot \dots \cdot [x_k]^{\alpha_{km}}}\right) = 0.$$

Якщо тепер для розмірно незалежних величин вибрати одиниці вимірювання так, щоб $x_1 = [x_1], \dots, x_k = [x_k]$, то з останнього співвідношення дістанемо (2.3.4). ■

Наприклад, якщо розглядуване явище описується співвідношенням

$$F(x_1, x_2, \dots, x_5) = 0,$$

що зв'язує п'ять фізичних величин, і ці величин виражаються через три незалежні одиниці вимірювання, то кількість критеріїв $m = n - k = 5 - 3 = 2$ і функціональна залежність може бути зображена у вигляді $\varphi(\pi_1, \pi_2) = 0$. Критерії подібності стають новими змінними, їх називають *узагальненими змінними*. Зауважимо, що критерії подібності залежатимуть від вибору розмірно незалежних величин.

Якщо $k = n - 1$, то для співвідношення (2.3.3), як впливає з (2.3.7), одержується простий вираз через відомі параметри, а саме

$$x_n = \pi_1 x_1^{\alpha_{11}} \cdot x_2^{\alpha_{21}} \cdot \dots \cdot x_{n-1}^{\alpha_{n-1,1}},$$

де π_1 константа, яку можна визначити за експериментальними даними.

Зауважимо, що безрозмірні параметри, які характеризують об'єкт, при варіації одиниць вимірювання не змінюються і тому в π -теоремі не фігурують.

Конкретні вирази для критеріїв подібності (2.3.7) визначаються тим, які з визначальних величин вибираються за такі, що мають незалежні розмірності. Оскільки це може бути зроблене по-різному, то форма критеріїв подібності може бути різною.

Будь-яка модель містить значну кількість параметрів і в ході моделювання необхідно вяснити вплив кожного параметра на характер розв'язку. Експериментальне встановлення залежності (2.3.3) за великих n потребує великої кількості даних. Так, для табулювання функції однієї змінної необхідно два ряди даних, функції двох змінних – таблиця, при трьох аргументах – десятки, сотні таблиць і т.д. Обробка цих даних з метою отримання аналітичного виразу функції F складна. Тому при дослідженні необхідно зменшити кількість величин, що впливають на процес (входять у рівняння). Одним з ефективних способів зменшення кількості параметрів є перехід до безрозмірних величин.

Той факт, що за допомогою π -теореми залежність (2.3.3) між n розмірними величинами x_1, x_2, \dots, x_n можна звести до залежності між m безрозмірними величинами $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$, $m < n$, дозволяє спростити (часто дуже суттєво) знаходження математичного описання різних об'єктів, тобто здійснити розрахункове моделювання. Запис рівнянь у безрозмірній формі полегшує дослідження і надає результатам більшої універсальності. При цьому, як правило, вдається вяснити ті безрозмірні змінні і змінні параметри, від яких суттєво залежить розв'язок задачі. Експериментальне встановлення критеріальної залежності $\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = 0$ за малих m може бути зовсім простим.

Розглянемо деякі простіші приклади застосування π -теореми.

Приклад 2.3.1. Нехай нам невідомий закон механіки, що визначає шлях вільного падіння тіла без опору середовища, але з дослідів ми знаємо, що пройдений шлях S залежить від часу t і прискорення вільного падіння g та в загальному випадку $S = S(t, g)$. Виберемо систему основних одиниць вимірювання. В системі СІ довжина S вимірюється в метрах, час – у секундах, прискорення – в $\text{м}/\text{с}^2$. Маємо дві незалежні розмірності та три величини, тому матимемо один критерій подібності ($3 - 2 = 1$).

Припустимо, що незалежні розмірності мають величини g і t . Подамо розмірність величини S через розмірності величин g і t , тобто $[S] = [g]^a \cdot [t]^b$. Запишемо це співвідношення через розмірності $m = (\text{м}/\text{с}^2)^a \text{с}^b$. Найменування розмірностей у двох частинах рівняння мають бути однаковими. Це означає, що $a=1$, $b=2$. То-

му єдиним критерієм подібності є безрозмірний комплекс

$$\pi_1 = \frac{S}{gt^2} = \text{const.}$$

Отже, $S = Cgt^2$. З експериментів можна визначити величину C . Відомо, що $S = gt^2/2$. ▲

Приклад 2.3.2. Розглянемо коливання математичного маятника без затухання (див. п. 5.4). Параметрами процесу можна вважати довжину l маятника, масу m тіла, прискорення g вільного тяжіння, частоту коливань ω і найбільший кут α відхилення маятника від вертикалі, причому $[l]=L$, $[m]=M$, $[g]=LT^{-2}$, $[\omega]=T^{-1}$, $[\alpha]=1$.

Функціональний зв'язок частоти ω коливань визначатимемо за формулою $\omega = \omega(l, g, m, \alpha)$, яка містить чотири розмірні одиниці, три з яких мають незалежні розмірності, та одну безрозмірну одиницю. Це означає, що внаслідок π -теорема маємо один критерій подібності ($n - k = 4 - 3 = 1$).

Оскільки для розмірностей справедливе співвідношення $[\omega] = [l]^{-\frac{1}{2}}[g]^{\frac{1}{2}}[m]^0[\varphi]^0$, то $l^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}\omega$ – величина безрозмірна і для подібних процесів однакова, тобто залежить тільки від α . Звідси одержуємо формулу для частоти коливань

$$l^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}\omega = C_\alpha \Rightarrow \omega = C_\alpha \sqrt{\frac{g}{l}},$$

де C_α – безрозмірний коефіцієнт, що залежить тільки від α . Вид залежності C_α з міркувань розмірності одержати уже не можна, але значення C_α можна визначити експериментально або скористатися теоретичною моделлю, яка представить залежність C_α у вигляді еліптичного інтегралу першого роду.

Але навіть при невідомому значенні C_α з формули для ω можна побачити, що частота не залежить від маси m , і з'ясувати характер залежності частоти від довжини l маятника. Крім цього, знаючи частоту для одного маятника, її можна перерахувати для іншого. А саме, якщо відоме значення частоти ω для деякого маятника довжиною l , то при фіксованих значеннях g , α для другого маятника довжиною l_1 частота коливань буде $\omega_1 = \omega \sqrt{\frac{l}{l_1}}$.

Аналогічно можна одержати формулу й для періоду коливань. ▲

Приклад 2.3.3. Розглянемо явище протікання електричного струму I через послідовно з'єднані опір R і ємність C після підключення сталого напруги $U = \text{const}$. Це явище в кожний момент часу характеризується значеннями п'яти фізичних величин I, U, R, C, t .

Перехідний процес, що відбувається в RC -контурі, описується функціональною залежністю

$$F(I, U, R, C, t) = 0.$$

Перетворимо цю залежність між незалежними безрозмірними степеневими комплексами фізичних величин (критеріями подібності). Визначимо спочатку кількість критеріїв подібності. Для цього на початку в системі одиниць СІ подамо розмірності п'яти величин через основні розмірності L, M, T, I : $[I]=I, [U]=L^2M^1T^{-3}I^{-1}, [R]=L^2M^1T^{-3}I^{-2}, [C]=L^{-2}M^{-1}T^4I^2, [t]=T$.

Складемо матрицю з показників степені

	I	U	R	C	t
L (м)	0	2	2	-2	0
M (кг)	0	1	1	-1	0
T (с)	0	-3	-3	4	1
I (а)	1	-1	-2	2	0

Ранг цієї матриці дорівнює трьом, тобто три з п'яти фізичних величин мають незалежні розмірності. А це означає, що маємо два критерії подібності ($n - k = 5 - 3 = 2$). Будемо вважати, що величини I, R, C мають незалежні розмірності. Оскільки $[U]=[R][I], [t]=[R][C]$, то критерії подібності мають вигляд

$$\pi_1 = \frac{U}{RI}, \quad \pi_2 = \frac{t}{RC}.$$

Отже, згідно з аналізом розмірностей і π -теоревою, залежність $F(I, U, R, C, t)=0$ може бути зображена у вигляді залежності між двома безрозмірними змінними

$$\pi_1 = \psi(\pi_2),$$

де функція ψ залишається невизначеною (її можна визначити на основі експериментальних даних).

У даному випадку можна побудувати математичну модель RC -контуру (див. п. 6.1.12) й розв'язати диференціальне рівняння. Аналізуючи розв'язок, можна одержати, що $\pi_1 = \exp(\pi_2)$. \blacktriangle

Приклад 2.3.4. Прикладом відносно недавнього застосування моделювання на основі теорії подібності є визначення засекреченої енергії першого ядерного вибуху на основі відкритої демонстрації кінофільму про ядерний вибух.

Вважатимемо, що ядерний вибух точковий, а виникаюча ударна хвиля сферична. Тоді при таких спрощеннях радіус R вибухової хвилі є функцією енергії E ядерного вибуху, часу t та початкової густини ρ оточуючого повітря.

Відповідна таблиця розмірностей цих чотирьох визначальних величин має вигляд

	E	R	t	ρ
M (кг)	1	0	0	1
L (м)	2	1	0	-3
T (с)	-2	0	1	0

оскільки $[E] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$, $[R] = \text{м}$, $[t] = \text{с}$, $[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$.

Ця матриця має ранг, що дорівнює 3. Це означає, що з усіх визначальних величин три величини мають незалежні розмірності, а отже, маємо один критерій подібності. Вважатимемо, що величини E , t , ρ мають незалежні розмірності. Подамо тепер розмірність величини R через інші розмірності

$$[R] = [E]^{\frac{1}{5}} [t]^{\frac{2}{5}} [\rho]^{-\frac{1}{5}}.$$

Тому єдиним критерієм подібності є безрозмірний комплекс

$$\pi_1 = \frac{R}{E^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} \rho^{-\frac{1}{5}}}.$$

Відповідно до цього знаходимо, що радіус $R = C E^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}} \rho^{-\frac{1}{5}}$, де C – деяка константа, яка може бути знайдена за одиничним окремим експериментом або теоретичними розрахунками. Встановлено, що $C=1$.

Знайдена формула дозволяє знайти енергію ядерного вибуху, якщо відомий радіус вибухової хвилі в деякий момент часу t . Ці дані можна взяти з кінофільму про ядерний вибух. ▲

Наведемо ще приклад проектування технічних систем з використанням подібного фізичного моделювання на прикладі резервуара для води. Подібне фізичне моделювання – це заміна матеріального об'єкта, процесу чи явища фізично подібною моделлю.

Приклад 2.3.5. Нехай досліджується (проекується) установка для витікання рідини з резервуара великих розмірів. При цьому основним параметром є вага рідини, що витікає через квадратний отвір у резервуарі. Очевидно, що такі дослідження потрібно проводити на модельному резервуарі зменшених розмірів. Тоді задача зводиться до визначення на моделі параметрів, які необхідні для проектування оригіналу.

Опишемо параметри, які визначають процес витікання рідини:

q – вага рідини, що витікає в одиницю часу, $[q] = LMT^{-3}$;

ρ – густина рідини, $[\rho] = L^{-3}M$;

h – висота рідини в резервуарі, $[h] = L$;

B – розмір отвору $[B] = L$;

g – прискорення $[g] = LT^{-2}$.

Отже, загальна кількість змінних дорівнює 5, з них 2 величини q , B є параметрами з залежними розмірностями, а 3 (ρ , g , h) – з незалежними розмірностями. В результаті порівняння розмірностей одержуємо

$$[q] = [\rho][g]^{\frac{3}{2}}[h]^{\frac{5}{2}}, \quad [B] = [h].$$

Критерії подібності мають вигляд

$$\pi_1 = \frac{q}{\rho g^{\frac{3}{2}} h^{\frac{5}{2}}}, \quad \pi_2 = \frac{B}{h}.$$

Опишемо методику й алгоритм проектування установки. Критерії подібності однаковий для моделі й оригіналу, тому

$$\frac{\pi_1^o}{\pi_1^m} = \frac{q_o g_o^{\frac{3}{2}}}{q_m \frac{\rho_o}{\rho_m} g^{\frac{3}{2}} \frac{h_o^{\frac{5}{2}}}{h_m^{\frac{5}{2}}}} = 1, \quad \frac{\pi_2^o}{\pi_2^m} = \frac{B_o}{B_m \frac{h_o}{h_m}} = 1. \quad (2.3.8)$$

Тут індексом o позначені параметри оригіналу, а індексом m – параметри моделі. Введемо тепер позначення для масштабів

$$m_q = \frac{q_o}{q_m}, \quad m_\rho = \frac{\rho_o}{\rho_m}, \quad m_B = \frac{B_o}{B_m}, \quad m_h = \frac{h_o}{h_m}.$$

Тоді (2.3.8) перепишемо у вигляді

$$\frac{m_q}{m_\rho m_h^{\frac{5}{2}}} = 1, \quad m_B = m_h.$$

Аналіз масштабних співвідношень дозволяє реалізувати задачу проектування за умови, що експериментальна установка (модель) побудована так:

1. Вибравши масштаб m_h , будуємо модельний резервуар зменшених розмірів з отвором розміру B_m і достатньою висотою H_m так, щоб $H_m > h_m = h_o / m_h$, де h_o – задана величина.

2. Вибираємо для моделі рідину з відповідною густиною і визначаємо $m_\rho = \rho_o / \rho_m$, тоді $m_q = m_\rho m_h^{\frac{5}{2}}$.

3. Проводимо експерименти й визначаємо q_m . Знання q_m дозволить розрахувати вагу рідини в оригінальному резервуарі за формулою $q_o = q_m \cdot m_q$. ▲

2.3.3. Задачі для самостійної роботи

2.27. Моделюється заповнення посудини об'ємом V через трубку з перепадом тиску ΔP на кінцях трубки. Тривалість заповнення τ установлюється для рідин з різними коефіцієнтами в'язкості μ й щільності ρ . Знайдіть критерії подібності для цього явища, вважаючи, що параметри τ , V , μ мають незалежні розмірності.

2.28. Визначити масовий розхід m в'язкої рідини, що протікає через трубу круглого поперечного перетину радіуса r . **Вказівка.** Рівняння шукати у вигляді

$$m = C \Delta p^{\alpha_1} \rho^{\alpha_2} r^{\alpha_3} \mu^{\alpha_4},$$

де Δp – різниця тисків, ρ – щільність рідини, μ – коефіцієнт в'язкості.

2.29. Досліджується протікання в'язкої рідини трубкою довжиною l і діаметром d зі швидкістю v . Шорсткість стінки трубки дорівнює Δ . Визначити падіння тиску $\delta = f(l, \rho, v, d, \Delta, \mu)$, де ρ – густина рідини, μ – в'язкість рідини. Приймаючи за незалежні одиниці довжину l , густину ρ , швидкість v відповідно до π -теореми, побудувати критерії подібності.

2.30. Визначити швидкість кулі, що падає під дією сили тяжіння в середовищі з рідиною. **Вказівка.** Врахувати, що швидкість кулі залежить від різниці щільностей матеріалу кулі й рідини, розміру кулі, в'язкості рідини й величини прискорення вільного падіння.

2.31. Визначити опір тіла довжиною 3 м, що занурене у воду і рухається зі швидкістю 30 м/с, якщо при продуві в аеродинамічній трубці його геометрично подібної моделі довжиною 0,3 м при швидкості $v_1=30$ м/с величина лобового опору $F_1=3,85$ Н.

2.32. Нехай маємо три незалежні одиниці вимірювання M, L, T . В системі СІ – це кілограм, метр, секунда. Виберемо тепер інші величини A, B, C , які мають незалежні розмірності $[A], [B], [C]$. Нагадаємо, що розмірності незалежні, якщо кожна з них не може бути представлена у вигляді комбінації решти розмірностей. Показати, що розмірності M, L, T можна виразити єдиним способом через розмірності $[A], [B], [C]$. **Вказівка.** Подати розмірності вибраних величин через розмірності основних величин у вигляді

$$[A] = M^{a_1} L^{a_2} T^{a_3}, [B] = M^{b_1} L^{b_2} T^{b_3}, [C] = M^{c_1} L^{c_2} T^{c_3}.$$

2.33. Розглянемо коливання вантажу масою m під дією сили пружності з коефіцієнтом пружності k у в'язкому середовищі з силою опору, що пропорційна швидкості з коефіцієнтом пропорційності μ у випадку, коли на вантаж діє сила $F_0 \sin \omega t$. Позначимо відхилення тіла від положення рівноваги через x . Тоді функціональна залежність, що описує цей процес, має вигляд

$$F(m, x, t, k, \omega, \mu, F_0) = 0.$$

Визначити кількість критеріїв подібності. На основі знайдених формул для розмірностей отримати критерії подібності (різні варіанти).

2.34. Відомо, що в стержні з круглим перерізом діаметра d при розтягуванні силою P виникає напруження $\sigma = \frac{4P}{\pi d^2}$, а зміщення одного кінця стержня відносно іншого при збереженні матеріалом властивостей лінійної пружності дорівнює $u = \frac{\sigma l}{E}$, де l – довжина стержня до навантаження, E – модуль пружності матеріалу стержня при розтягуванні.

Застосувати до цієї задачі теорію розмірностей. Знайти кількість незалежних розмірностей, а, згідно з π -теоремою, визначити кількість критеріїв подібності. Скількома способами можна вибрати критерії подібності? Наведіть кілька варіантів критеріїв подібності, порівняйте їх. Подайте наведені вище дві залежності в критеріальній формі.

2.35. Визначити критерії подібності для стаціонарного руху в'язкої рідини в полі сил тяжіння, якщо течія визначається характерним розміром l , швидкістю v , щільністю ρ , в'язкістю ν і прискоренням сили тяжіння g . **Вказівка.** Критерії подібності – це два відомих числа Рейнольдса і Фроуда $Re = lv/\nu$, $Fr = v^2/lg$. Критерій Рейнольдса визначає характер потоку: ламінарний, проміжний чи турбулентний.

2.36. Побудувати напівемпіричну формулу для підйомної сили крила літака в дозвуковому повітряному потоці, що припадає на одиницю довжини розмаху крила. Врахувати, що на підйомну силу P будуть впливати такі фізичні величини: v , ρ – швидкість і густина набігаючого потоку повітря, b – хорда профілю крила та безрозмірний параметр α – кут атаки, що характеризує напрям набігаючого потоку (рис. 2.17). **Вказівка.** Виразити розмірності $[P]$, $[\rho]$, $[v]$, $[b]$ через основні розмірності M (кг), L (м), T (с) і на основі π -теореми встановити формулу

$$\frac{P}{\rho v^2 b} = f(\alpha) = const.$$

Безрозмірний коефіцієнт $f(\alpha)$, що залежить від форми профілю крила і кута атаки α може бути знайдений експериментально шляхом продування під різним кутом атаки геометрично подібної моделі крила в аеродинамічній трубі.

2.37. Розглянемо вертикальний політ літального апарату з масою m в густій атмосфері, якщо відомо, що на літальний апарат

діють: сила тяги \vec{R} , сила тяжіння \vec{P} і сила аеродинамічного опору \vec{F} (рис. 2.18).

Визначити критерії подібності. **Вказівка.** Безрозмірні комбінації параметрів знаходити у вигляді $\pi = Ch^{\alpha_1} m^{\alpha_2} r^{\alpha_3} g^{\alpha_4} k^{\alpha_5} t^{\alpha_6}$, де $h(t)$ – висота польоту в момент часу t , g – прискорення вільного падіння, k – коефіцієнт опору, r – величина сили тяги.

Припускається, що величина сили опору $F = -kv^2 = -k\left(\frac{dh}{dt}\right)^2$.

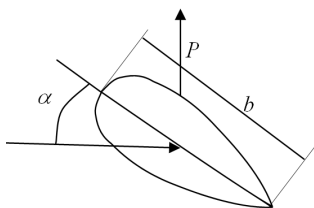


Рис. 2.17. Ілюстрація виникнення підйомної сили

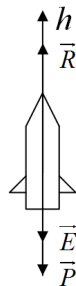


Рис. 2.18. Схема до задачі 2.37

Запитання та завдання до самоперевірки

1. В чому полягає суть першої теореми подібності?
2. Сформулюйте послідовність операцій для простого подібного перетворення диференціальних рівнянь.
3. Сформулюйте правило заміщення.
4. Дайте формулювання другої теореми подібності.
5. Як визначити кількість величин, що мають незалежні розмірності?
6. Що таке критерії подібності? Як вони визначаються?
7. В чому перевага критеріальної форми залежності?
8. Сформулюйте третю теорему подібності.

2.4. Елементи теорії ідентифікації моделей

2.4.1. Основні поняття

Для побудови математичних моделей можуть бути використані як теоретичні, так і експериментальні методи. Досвід, накопичений при моделюванні реальних систем, свідчить про те, що не можна побудувати математичну модель, адекватну реальній системі, тільки на основі теоретичних досліджень. Створена таким способом модель, як правило, відрізняється від реальної системи. Тому в процесі вивчення реальності одночасно з теоретичними дослідженнями проводять численні експерименти для визначення та уточнення моделі. Методи побудови математичних моделей за результатами реальних досліджень є предметом теорії ідентифікації.

Ідентифікація об'єкта його математичною моделлю – це побудова (синтез) математичної моделі на основі статистичного матеріалу, тобто за даними спостережень за вхідними допустимими сигналами та реакцією об'єкта на ці сигнали.

Основна проблема теорії ідентифікації – це проблема адекватності моделей реальній дійсності. Тому з самого початку моделі повинні будуватись так, щоб адекватність забезпечувалась для найбільш характерних для даної системи умов її функціонування.

Нині найвідоміші такі методи ідентифікації:

- 1) класичні методи виведення рівнянь на основі фундаментальних законів природи;
- 2) метод найменших квадратів;
- 3) методи розв'язування обернених задач теорії диференціальних рівнянь;
- 4) методи передаточних функцій, що базуються на застосуванні перетворення Лапласа;
- 5) методи декомпозиції системи до рівня типових ланок;
- 6) статистичні методи ідентифікації (регресійні, дисперсійні моделі);
- 7) методи параметричної ідентифікації за критеріями стійкості й оптимальності та інші.

Кожний з методів ідентифікації не підходить для всіх видів

систем, а має свою сферу застосування. Розглянемо деякі з цих методів. Досить повний аналіз різних методів ідентифікації дається в [83, 101].

2.4.2. Параметрична ідентифікація нелінійних систем. Метод найменших квадратів

Приклад параметричної ідентифікації диференціальних рівнянь, для яких можна знайти розв'язок, проілюстрований у п. 1.6. Укажемо, як можна розв'язати задачу параметричної ідентифікації у випадку, коли не можна явно знайти розв'язок диференціального рівняння.

Нехай математичною моделлю деякого процесу є нелінійне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \alpha). \quad (2.4.1)$$

Припустимо, що в результаті експериментів заміряні значення змінної x , а саме x_0, x_1, \dots, x_n в деякі моменти часу t_0, t_1, \dots, t_n , тобто маємо таблицю даних

t	t_0	t_1	\dots	t_n
x	x_0	x_1	\dots	x_n

Потрібно визначити значення параметра α так, щоб знайдений розв'язок диференціального рівняння відповідав експериментальним даним.

Для одновимірного випадку критерієм близькості може бути інтеграл від квадрата похибки виразу

$$F(\alpha) = \int_0^T \mu(t)(x_T(t, \alpha) - x_e(t))^2 dt,$$

де $x_T(t, \alpha)$ – вихід моделі, $x_e(t)$ – експериментальні дані, $\mu(t)$ – вагова функція така, що $\int_0^T \mu(t) dt = 1$. Для мінімізації функції

$F(\alpha)$ використовують градієнтні методи. Застовуючи числові методи знаходження розв'язку $x_T(t, \alpha)$, критерій близькості можна переписати в іншій формі.

Для простоти вважатимемо, що $t_i = hi$, де $h > 0$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Проінтегрувавши диференціальне рівняння на проміжку $[t_i, t_{i+1}]$, одержимо

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(x, \alpha) dt.$$

Інтеграл у правій частині не можна знайти, оскільки не відомий розв'язок $x(t)$. Тому замінімо інтеграл квадратурною формулою, наприклад, лівих прямокутників. Одержимо

$$x_{i+1} = x_i + hf(x_i, \alpha) + o(h),$$

або

$$x_{i+1} \approx x_i + hf(x_i, \alpha).$$

Складемо функцію

$$F(\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} [x_{i+1} - (x_i + hf(x_i, \alpha))]^2.$$

Прийmemo як означення, що мінімум функції $F(\alpha)$ дає шукане α . Тим самим визначимо найкращу модель з усіх рівнянь.

Якщо матимемо серію експериментальних даних $x_0^k, x_1^k, \dots, x_n^k$, $k = 1, 2, \dots, N$, то

$$F(\alpha) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} [x_{i+1}^k - (x_i^k + hf(x_i^k, \alpha))]^2.$$

Якщо $x(t)$ – вектор, тобто $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_s(t), \dots, x_m(t))^T$, і маємо випробування $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)$, то

$$F(\alpha) = \sum_{s=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} [x_s(t_{i+1}) - (x_s(t_i) + hf(x_s(t_i), \alpha))]^2.$$

Якщо для векторної величини $x(t)$ матимемо серію випробувань $x^k(t_0), x^k(t_1), \dots, x^k(t_n)$ $k = 1, 2, \dots, N$, то

$$F(\alpha) = \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^m \sum_{i=0}^{n-1} \left[x_s^k(t_{i+1}) - (x_s^k(t_i) + hf(x_s^k(t_i), \alpha)) \right]^2.$$

Тут i означає момент часу вимірювання величини x , k – номер експерименту (номер набору даних), s – порядковий номер елемента вектора.

Розглянемо ідентифікацію параметрів математичної моделі методом найменших квадратів на прикладі логістичної моделі, оскільки вона досить часто зустрічається на практиці.

Приклад 2.4.1. Запишемо логістичне рівняння у формі

$$\frac{dx}{dt} = x(t)(a - bx(t)), \quad a, b > 0. \quad (2.4.2)$$

Припустимо, що маємо спостереження за величиною $x(t)$ у дискретні моменти часу t_i , тобто відомі значення x_0, x_1, \dots, x_n , де $x_i = x(t_i)$, $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Ідентифікація логістичної моделі полягає в знаходженні чисел a, b за спостереженнями x_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$

Розв'язок рівняння (2.4.2) задовольняє умову

$$\frac{x(t)}{a - bx(t)} = \frac{x(0)}{a - bx(0)} e^{at}.$$

Тепер, маючи три значення x_0, x_1, x_2 , можна записати алгебраїчну систему двох рівнянь для знаходження двох невідомих параметрів a та b . Але цей шлях не приведе до загального конструктивного алгоритму, тому що, якщо взяти іншу трійку експериментальних даних x_0, x_1, x_2 , то одержимо вже інші числа a та b .

Укажемо, як можна знайти значення a та b , маючи $n+1$ експериментальних замірів величини $x(t)$. Для цього перепишемо рівняння (2.4.2) у вигляді

$$\frac{d}{dt} \ln x = a - bx(t).$$

Інтегруючи це рівняння на проміжку часу $[t_i, t_{i+1}]$, одержимо

$$\ln x_{i+1} - \ln x_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} (a - bx(t)) dt, \quad i \in 0, 1, \dots, n-1.$$

Знайти інтеграл точно не можна, оскільки невідома функція $x(t)$ між моментами часу t_i, t_{i+1} , тому виконаємо наближене обчислення інтеграла за квадратурними формулами. Це можна зробити різними способами з різною точністю кінцевого результату. Зупинимось на апроксимації першого порядку, тоді

$$\ln x_{i+1} \approx \ln x_i + h_i(a - bx_i), \quad h_i = t_{i+1} - t_i.$$

Далі запишемо функцію

$$F(a, b) = \sum_{i=0}^{n-1} [\ln x_{i+1} - \ln x_i - h_i(a - bx_i)]^2.$$

Мінімум цієї функції дає можливість визначити значення параметрів a та b . Ці значення визначають найкращу модель з усіх рівнянь для даного набору спостережень за процесом.

Якщо маємо не один набір експериментальних даних x_i , $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, а N наборів, тобто маємо матрицю $X = \{x_{ij}\}_{i=0,1,\dots,n, j=1,\dots,N}$ експериментальних даних, де x_{ij} – значення i -го заміру в j -му наборі, то можна провести усереднення відповідних замірів по всіх наборах, тобто розглядати середні значення

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{iN}}{N}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

А можна розглядати функцію

$$F(a, b) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=0}^{n-1} [\ln x_{i+1,j} - \ln x_{ij} - h_i(a - bx_{ij})]^2. \quad (2.4.3)$$

Мінімізація функції (2.4.3) дозволить ідентифікувати логістичну модель. Зауважимо, що x_{ij} мають бути строго додатними, інакше не можна обчислити $\ln x_{ij}$. ▲

2.4.3. Ідентифікація моделей методом розв'язування обернених задач теорії диференціальних рівнянь

Прямими називаються задачі, в яких для заданого диференціального рівняння та початкових (крайових) умов необхідно

знайти розв'язок, тобто функцію, що задовольняє рівняння і додаткові умови.

Обернені задачі диференціальних рівнянь полягають у тому, щоб за заданою сукупністю функцій визначити диференціальне рівняння, розв'язками якого є указані функції, тобто необхідно визначити структуру й параметри диференціального оператора. Проілюструємо метод розв'язування оберненої задачі для лінійного рівняння. Правильна наступна теорема.

Теорема. Для того, щоб коефіцієнти $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ диференціального рівняння

$$Lx = \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + a_2(t) \frac{d^{n-2} x}{dt^{n-2}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t), \quad (2.4.4)$$

де $f(t)$ – задана неперервна функція, визначались однозначно, необхідно і достатньо, щоб існували n лінійно незалежних функцій $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, що мають неперервні похідні й задовольняють рівняння (2.4.4).

Для знаходження параметрів $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$ запускатимемо на вхід системи сигнали $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ і здійснюватимемо заміри вихідних сигналів $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ (рис. 2.19).

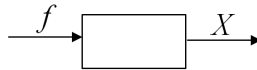


Рис. 2.19. Система з входом-виходом

Запишемо рівняння (2.4.4) для функцій $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)$.

$$\begin{aligned} a_1(t)x_1^{(n-1)} + a_2(t)x_1^{(n-2)} + \dots + a_n(t)x_1 &= f_1 - x_1^{(n)}, \\ a_1(t)x_2^{(n-1)} + a_2(t)x_2^{(n-2)} + \dots + a_n(t)x_2 &= f_2 - x_2^{(n)}, \\ \dots & \\ a_1(t)x_n^{(n-1)} + a_2(t)x_n^{(n-2)} + \dots + a_n(t)x_n &= f_n - x_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Цю систему можна переписати в матричній формі

$$W^T a(t) = F,$$

де W^T – транспонована матриця Вронського, що має вигляд

$$W^T = \begin{pmatrix} x_1^{(n-1)} & x_1^{(n-2)} & \dots & x_1 \\ x_2^{(n-1)} & x_2^{(n-2)} & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^{(n-1)} & x_n^{(n-2)} & \dots & x_n \end{pmatrix}, \quad F = \left(f_1 - x_1^{(n)}, f_2 - x_2^{(n)}, \dots, f_n - x_n^{(n)} \right),$$

$a(t) = (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t))^T$ – вектор невідомих величин. Як відомо, визначник Вронського не дорівнює нулю для лінійно незалежних функцій, тому

$$a(t) = (W^T)^{-1}F.$$

Отже, структура і параметри диференціального оператора L стають відомими.

2.4.4. Метод передаточних функцій

Ще однією формою описання залежності "вхід-вихід" для динамічної системи є метод передаточних функцій. Він базується на методах операційного числення. Суть операційного методу полягає в наступному.

Нехай задана функція $x(t)$ дійсної змінної t , причому така, що для неї існує перетворення Лапласа (L - перетворення)

$$L(x(t)) \equiv \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t) dt = X(p),$$

де $p = \sigma + i\omega$ – комплексне число; $x(t)$ – деяка вхідна функція, яку називають *оригіналом*; $X(p)$ – її зображення за Лапласом.

Тоді, якщо відомо зображення $X(p)$, то обчислити оригінал $x(t)$ можна за допомогою оберненого перетворення Лапласа

$$x(t) = L^{-1}(X(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X(s) e^{st} ds, \quad t > 0.$$

Перетворення Лапласа має ряд зручних для практики властивостей. Наприклад, диференціюванню оригіналу відповідає множення зображення $X(p)$ на комплексну змінну p , а інтегруванню

оригіналу $x(t)$ за змінною t відповідає операція ділення зображення $X(p)$ на змінну p , тобто

$$L\left(\frac{d}{dt}x\right) = pX(p) - x(+0),$$

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n}x\right) = p^n X(p) - \sum_{i=1}^n p^{i-1} \frac{d^{n-i}x(+0)}{dt^{n-i}}$$

$$L\left(\int_0^t x(t)dt\right) = \frac{1}{p}X(p),$$

де $x(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} x(t)$.

Приклади інших відповідностей "оригінал-зображення" можна знайти в літературі з операційного числення.

Розглянемо деяку лінійну динамічну систему. Нехай така система описується рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами

$$Ax \equiv a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = u(t)$$

$$x(0) = 0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0.$$

Виконаємо перетворення Лапласа над двома частинами цього рівняння, використовуючи нульові початкові умови і властивості лінійності самого перетворення Лапласа. Одержимо

$$a_2p^2X(p) + a_1pX(p) + a_0X(p) = U(p),$$

або

$$K'(p) \cdot X(p) = U(p), \quad \text{де} \quad K'(p) = a_2p^2 + a_1p + a_0.$$

Функцію $K(p) = \frac{X(p)}{U(p)}$, що визначається як відношення зображень за Лапласом вихідного $X(p)$ та вхідного $U(p)$ сигналів при нульових початкових умовах, називають *передаточною функцією*.

Якщо відома передаточна функція $K(p)$, то за формулою $X(p) = K(p)U(p)$ обчислюємо зображення розв'язку, а за оберненим перетворенням – і сам розв'язок $x(t)$. З іншого боку, якщо

відомі вхідний сигнал $u_{\text{ВХ}}(t)$ і реакція системи $x(t)$ на цей вхідний сигнал, то, побудувавши зображення $U(p)$ та $X(p)$, можна знайти передаточну функцію $K(p)$, яка дозволить відновити оператор A вихідної лінійної моделі. Цей метод ілюструє розв'язування задач структурної ідентифікації для лінійних систем.

Наведемо приклади передаточних функцій та відповідні їм математичні моделі елементів (ланок) системи:

1. $K(p) = k$ – для ланки підсилювача $x(t) = ku_{\text{ВХ}}(t)$;
2. $K(p) = kp$ – для диференціальної ланки $k \frac{du_{\text{ВХ}}(t)}{dt} = x(t)$;
3. $K(p) = \frac{k}{p}$ – для інтегратора $x(t) = k \int_0^t u_{\text{ВХ}}(s) ds$;
4. $K(p) = \frac{\gamma}{p+a_0}$ – для лінійної динамічної ланки $\frac{dx}{dt} + a_0x = \gamma u_{\text{ВХ}}(t)$;
5. $K(p) = \frac{\gamma}{p^2+a_1p+a_0}$ – для лінійної динамічної ланки другого порядку $\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0x = \gamma u_{\text{ВХ}}(t)$.

Інколи виникають значні труднощі при побудові математичної моделі всієї системи, коли математичні моделі підсистем (окремих ланок) уже відомі і мають диференціальну форму.

Уведення в розгляд передаточних функцій дозволяє розв'язувати задачі аналізу й синтезу динамічних систем операторними методами.

Основною перевагою передаточних функцій є можливість досить легко та просто описати систему, якщо відомі передаточні функції елементів системи (підсистем) і схеми з'єднання елементів.

Відомо, що існують три види типових з'єднань підсистем: послідовні (рис. 2.20, а), паралельні (рис. 2.20, б), системи з оберненим зв'язком (рис. 2.20, в).

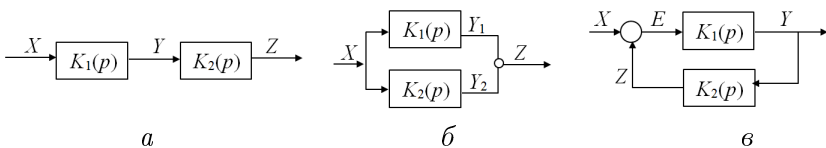


Рис. 2.20. Типові з'єднання елементів системи

При використанні математичних моделей підсистем процедура синтезу всієї системи значно полегшується і формалізується.

Так, для послідовного з'єднання елементів системи маємо

$$K_1(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}, \quad K_2(p) = \frac{Z(p)}{Y(p)}.$$

Звідси $Y(p) = K_1(p)X(p)$, $Z(p) = K_2(p)Y(p) = K_2(p)K_1(p)X(p)$. Передаточна функція системи (відношення зображень вихідного та вхідного сигналів системи).

$$K(p) = \frac{Z(p)}{X(p)} = K_1(p) \cdot K_2(p).$$

Отже, передаточна функція системи, що складається з послідовно з'єднаних ланок, дорівнює добутку передаточних функцій елементів системи.

Аналогічно можна встановити, що передаточна функція системи з паралельним з'єднанням елементів системи дорівнює сумі передаточних функцій підсистем, тобто $K(p) = K_1(p) + K_2(p)$.

А системі з оберненим зв'язком відповідає передаточна функція $K(p) = \frac{K_1(p)}{1+K_2(p)K_1(p)}$, якщо $E = X(p) - Z(p)$ і $K(p) = \frac{K_1(p)}{1-K_2(p)K_1(p)}$, якщо $E = X(p) + Z(p)$, де $K_1(p)$ – передаточна функція підсистеми, $K_2(p)$ – передаточна функція ланки "обернений зв'язок".

2.4.5. Статистичні методи ідентифікації

У випадку невизначеності поведінки або структури системи, тобто коли невідомі фізичні закони, що визначають систему, відповідний математичний опис можна одержати тільки в результаті великої кількості експериментів. У результаті таких експериментів і апріорних теоретичних знань можна побудувати співвідношення в аналітичній формі, які зв'язують доступні для спостерігача вихідні сигнали і допустимі вхідні сигнали. Такий підхід до побудови моделі називається *емпіричним*.

До емпіричного моделювання вдаються у двох випадках. По-перше, коли об'єкт дослідження недостатньо відомий і немає ще теорії, яка описує об'єкти дослідження подібного типу. По-друге,

коли теорія є, але об'єкт надто складний, його математична модель надто громіздка і, крім цього, містить велику кількість заздалегідь невідомих параметрів.

При емпіричному підході математичну модель можна побудувати за реакцією вихідних змінних системи на відомі вхідні змінні та зовнішні умови. Для цього потрібно вибрати вид рівнянь чи функціональної залежності між змінними і розв'язати задачу оцінки параметрів цієї функціональної залежності так, щоб одержана модель була адекватна реальним процесам.

Поведінка вихідної змінної y при фіксованому значенні x характеризується умовним математичним сподіванням $M(y/x)$ і умовною дисперсією $\sigma(y/x)$. Регресійна залежність – це залежність умовного математичного сподівання y від x . Рівняння, що описує цю залежність називають регресійним рівнянням (регресійною моделлю). Регресійний аналіз є класичним методом побудови моделі ідентифікації.

Зауважимо, що методами математичної статистики й регресійного аналізу можна побудувати для об'єкта формальну модель типу "чорного ящика". У такій моделі відсутні дані про внутрішній вміст ящика (тому він називається *чорним*), а тільки задаються зв'язки між вхідними та вихідними параметрами.

Логіка будь-якого оцінювання невідомих параметрів функції регресії полягає в тому, щоб вибрати такі значення параметрів, які забезпечуть мінімальне відхилення функції регресії від сукупності результатів спостереження.

Як критерій кількісної міри близькості моделі й оригіналу, частіше за все використовується сума квадратів різниць розрахункових y й експериментальних y_e значень для вихідної змінної при однакових вхідних значеннях параметра x .

$$e = \sum_{k=1}^n (y_{ek} - y_k)^2,$$

де n – це кількість проведених експериментів.

Ідентифікація системи з m входами полягає у відновленні функціональної залежності

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Для її виконання на початку вимірюємо значення вхідних і відповідних їм вихідних сигналів та одержуємо таблицю даних

$$(y_{ek}, x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk}), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

За формулами математичної статистики обчислюємо оцінки математичних сподівань, дисперсії та коефіцієнтів парної кореляції вхідних і вихідних даних:

$$M(y_e) = \frac{\sum_{k=1}^n y_{ek}}{n} = \bar{y}_e, \quad M(x_j) = \frac{\sum_{k=1}^n x_{jk}}{n} = \bar{x}_j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

$$D(y_e) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (y_{ek} - \bar{y}_e)^2, \quad D(x_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_{jk} - \bar{x}_j)^2,$$

$$r_{yx_j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(y_{ek} - \bar{y}_e)(x_{jk} - \bar{x}_j)}{\sqrt{D(y_e)}\sqrt{D(x_j)}}$$

– статистична оцінка парної кореляції між y і x_j ,

$$r_{x_s x_j} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(x_{sk} - \bar{x}_s)(x_{jk} - \bar{x}_j)}{\sqrt{D(x_s)}\sqrt{D(x_j)}}$$

– коефіцієнт парної кореляції між x_s і x_j .

Такий набір статистичних оцінок достатній для того, щоб побудувати функцію f у формі лінійної залежності. Тобто рівняння множинної регресії має вигляд

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_m x_m. \quad (2.4.5)$$

Потрібно тільки обчислити (оцінити) значення b_0, b_1, \dots, b_m , для визначення яких ставиться експеримент. Для i -того експерименту відхилення спостережуваного значення y_{ei} від розрахункового за функцією регресії дорівнює

$$e_i = y_{ei} - (b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \dots + b_m x_{im}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4.6)$$

де e_i – величина відхилення, що називається *нев'язкою*; x_i – вектор-рядок матриці спостереження; b_0, b_1, \dots, b_m – оцінки параметрів.

Перепишемо формулу (2.4.6) у матричній формі

$$e = Y - Xb, \quad (2.4.7)$$

де

$$e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{e_1} \\ y_{e_2} \\ \dots \\ y_{e_n} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11}x_{12}\dots x_{1m} \\ 1 & x_{21}x_{22}\dots x_{2m} \\ \dots & \dots \\ 1 & x_{n1}x_{n2}\dots x_{nm} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

У випадку методу найменших квадратів міра відхилень функції регресії від сукупності експериментальних результатів визначається як сума квадратів нев'язок

$$S(b) = \sum_{i=1}^n e_i^2 = e^T e, \quad (2.4.8)$$

де індексом T позначається операція транспонування.

Очевидно, що чим менша ця сума, тим ближча функція регресії до результатів дослідження. Оцінкою параметрів функції регресії буде такий набір параметрів, який забезпечить мінімальне значення суми квадратів нев'язок (функції $S(b)$), тобто $b = \arg \min_b S(b)$.

Мінімум функції багатьох змінних досягається в точці, де всі частинні похідні цієї функції за незалежними змінними дорівнюють нулю. Тому маємо рівняння

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial S}{\partial b_m} = 0.$$

З формул (2.4.7) та (2.4.8) запишемо вираз для $S(b)$

$$\begin{aligned} S(b) &= (Y - Xb)^T (Y - Xb) = Y^T Y - Y^T Xb - (Xb)^T Y + (Xb)^T Xb = \\ &= Y^T Y - 2b^T X^T Y + b^T X^T Xb. \end{aligned}$$

Диференціюючи цю функцію за вектором параметрів, одержимо

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2X^T Y + 2X^T Xb = 0. \quad (2.4.9)$$

Зауважимо, що при обчисленні $\frac{\partial S}{\partial b}$ використані формули матричної алгебри:

$$\frac{\partial}{\partial b}(b^T a) = a, \quad \text{де } a = X^T Y,$$

$$\frac{\partial}{\partial b}(b^T A b) = 2A b$$

для симетричної матриці якою і є матриця $X^T X = A$.

З (2.4.9) одержуємо рівняння

$$X^T X b = X^T Y.$$

Розв'язуючи його відносно b , остаточно дістанемо розрахункову формулу для вибіркового оцінок коефіцієнтів регресії (при цьому вважаємо, що $X^T X$ – неособлива матриця)

$$b = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

При застосуванні класичного методу найменших квадратів існують дві труднощі. Перша з них пов'язана з обертанням матриці (інколи великої розмірності) без впевненості в її коректності. Друга полягає в тому, що метод найменших квадратів при будь-яких змінах використовуваних даних або структури моделі вимагає повного повторення цих обчислень.

Тому метод найменших квадратів – не єдиний метод, що дозволяє розрахувати оцінки коефіцієнтів регресії. Відомі й інші методи оцінки параметрів регресії [8].

Електронні таблиці Ексел мають функцію ЛИНЕЙН, що дозволяє розрахувати параметри регресійної моделі, оцінити їх середнє квадратичне відхилення та інші параметри, що характеризують її властивості.

Важливе місце при побудові лінійної регресійної моделі займає кореляційний аналіз, тобто обчислення коефіцієнтів r_{yx_j} парної кореляції між y і x_j . Цей коефіцієнт дозволяє визначити тісноту статистичної залежності, тобто міру кореляційного зв'язку між двома змінними y та x_j , і змінюється він від -1 до $+1$. Чим ближче $|r_{yx_j}|$ до одиниці, тим реальна залежність ближча до лінійної. Додатні значення r_{yx_j} показують, що y збільшується зі зростанням

x_j , від'ємні – y зменшується зі зростанням x_j . Якщо $|r_{yx_j}| \approx 0$, то змінні некорельовані і недоцільно включати фактор x_j в рівняння (2.4.5).

Аналіз значень $r_{x_i x_j}$ дозволяє виявити залежність між факторами. Високе значення коефіцієнта кореляції між x_i і x_j вказує на їхній тісний кореляційний зв'язок.

Вважається, що дві змінні x_i , x_j явно колінеарні, тобто знаходяться між собою в лінійній залежності, якщо $|r_{x_i x_j}| \geq 0,7$. Якщо фактори явно колінеарні, то вони дублюють один одного і один з них рекомендується виключати з регресії.

До основних етапів регресійного аналізу відносять визначення значимості параметрів рівняння, оскільки значення параметрів лінійної регресії теж є випадковими, через те, що вони знаходяться з обмеженої вибірки даних. В даному посібнику ці питання не розглядаються.

Іноколи використання формул лінійної багатфакторної регресії недостатнє для задовільної ідентифікації математичної моделі, тому використовують й інші форми функціональної залежності. Прикладами таких форм є наступні моделі.

Степенева функція регресії

$$y = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_m^{\alpha_m},$$

показникова функція регресії

$$y = a \exp \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j,$$

логарифмічна функція регресії

$$y = a + \sum_{j=1}^m \alpha_j \ln x_j,$$

гіперболічні функції регресії

$$y = \frac{1}{a + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_m x_m},$$

$$y = a + \frac{\alpha_1}{x_1} + \dots + \frac{\alpha_m}{x_m},$$

квадратичні функції регресії

$$y = a + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j + \sum_{k=1}^m \sum_{s=1}^m \alpha_{ks} x_k x_s$$

та інші.

Тут a, α_j, α_{ks} – коефіцієнти регресії.

Розрахунок параметрів регресії цих форм на основі вихідної статистичної інформації полегшується тим, що їх обчислення можна звести до обчислень за формулами для лінійної множинної регресії.

Наприклад, якщо потрібно побудувати логарифмічну функцію регресії, то достатньо замість вихідних величин x_1, x_2, \dots, x_m розглянути їх логарифми $z_1 = \ln x_1, z_2 = \ln x_2, \dots, z_m = \ln x_m$ і для z_1, z_2, \dots, z_m побудувати лінійну множинну регресію, а це дасть можливість записати логарифмічну функцію регресії.

У випадку квадратичної функції регресії теж роблять заміну змінних – добутки $x_k x_s$ замінюють новою змінною.

Приклад 2.4.2. Звести тригонометричну модель

$$y = A \sin(\omega t + \varphi),$$

в якій ω, t – відомі; A, φ – невідомі, до лінійної вигляду (2.4.5).

Запишемо y у формі

$$y = A \cos \varphi \sin \omega t + A \sin \varphi \cos \omega t$$

і позначимо $x_1 = \sin \omega t, x_2 = \cos \omega t, b_1 = A \cos \varphi, b_2 = A \sin \varphi$, тоді $y = b_1 x_1 + b_2 x_2$.

Після побудови оцінок b_1, b_2 обернений перехід здійснюється за формулами

$$A = b_1^2 + b_2^2, \quad \varphi = \arctg \frac{b_2}{b_1}. \blacktriangle$$

Приклад 2.4.3. Для того, щоб побудувати математичну модель виробничої одиниці, необхідно мати виробничі функції. Виробничі функції нині є одним з ефективних способів аналізу виробничих процесів економічних систем. Побудова агрегованих моделей виробничих функцій дає можливість вивчати ефективність

процесів виробництва, аналізувати вдосконалення та впровадження нових технологій окремої виробничої одиниці і навіть моделювати економіку всієї країни.

Виробничі функції базуються на основі функціональних моделей: замість того, щоб зрозуміти складну внутрішню структуру економічного об'єкта, будують відносно просту функцію, що зв'яже реакцію об'єкта на зовнішні дії з величинами цих зовнішніх дій.

При побудові виробничих функцій "чорним ящиком" вважається виробнича одиниця, зовнішніми діями є затрати ресурсів, а реакцією – вироблена продукція.

На першому етапі розглядають двофакторну виробничу функцію, тобто функцію з одним виходом – випуском продукції і двома вхідними факторами – затратами капітальних і трудових ресурсів.

Вихідна величина Y – це інтегральний показник випуску продукції. Затрати трудових ресурсів L визначаються кількістю працюючих, а затрати капітальних ресурсів K характеризуються вартістю основних виробничих фондів. Структурно така модель зображена на рис. 2.21.

Двофакторна виробнича функція визначається залежністю $Y = F(K, L)$.

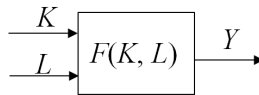


Рис. 2.21. Блок-схема виробничої функції

Дослідимо можливість опису функціонування деякої економічної системи (наприклад, енергосистеми) на основі побудови агрегованих математичних моделей у формі степеневих виробничих функцій типу Кобба–Дугласа.

Розглянемо класичну двофакторну виробничу функцію Кобба–Дугласа

$$Y = AK^\alpha L^\beta, \quad (2.4.10)$$

де A – технологічний коефіцієнт; $\alpha > 0$ – коефіцієнт еластичності за капітальними ресурсами; $\beta > 0$ – коефіцієнт еластичності за трудовими ресурсами.

Цікаво зазначити, що вперше виробнича функція була розрахована в 30-ті роки ХХ ст. для обробної промисловості США у вигляді рівності

$$Y \sim K^{0,27} L^{0,73}.$$

При $\alpha + \beta = 1$ маємо двофакторну однорідну виробничу функцію. Однорідність означає, що ця функція має постійний ефект масштабів виробництва; якщо K і L помножити на деяку додатну константу λ , то і Y теж помножиться на λ . Це демонструє постійну віддачу при зміні масштабів виробництва, тобто, якщо рівень кожного виробничого ресурсу збільшився на $r\%$, то й обсяг продукції зростає на $r\%$.

Прологарифмувавши функцію (2.4.10), одержимо

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + \beta \ln L. \quad (2.4.11)$$

З формули (2.4.11) при $\beta = 1 - \alpha$ маємо

$$\ln \frac{Y}{L} = \ln A + \alpha \ln \frac{K}{L}. \quad (2.4.12)$$

Уведемо позначення

$$\ln \frac{Y}{L} = y, \quad \ln A = b, \quad \ln \frac{K}{L} = x.$$

Тоді (2.4.12) перепишеться у вигляді лінійної функції

$$y = \alpha x + b.$$

Тепер на основі експериментальних даних можна виконати ідентифікацію параметрів α та b , а на їх основі розрахувати параметри моделі (2.4.10).

Припустимо, що за спостереженнями параметрів K, L, Y в деякій фірмі одержали набори даних, які подані в таблиці 2.1. В цій же таблиці заповнимо значення y та x , необхідні для побудови лінійної функції регресії.

Таблиця 2.1. Значення параметрів для побудови виробничої функції

K	L	Y	$\frac{K}{L}$	$\frac{Y}{L}$	$y = \ln \frac{K}{L}$	$x = \ln \frac{Y}{L}$
410	20	410	20,50	20,50	3,02	3,02
410	20	410	20,50	20,50	3,02	3,02
430	21	430	20,48	20,48	3,02	3,02
480	22	440	21,82	20,00	3,08	3,00
500	25	500	20,00	20,00	3,00	3,00
480	27	520	17,78	19,26	2,88	2,96
450	29	510	15,52	17,59	2,74	2,87
440	32	550	13,75	17,19	2,62	2,84
510	35	620	14,57	17,71	2,68	2,87
530	38	650	13,95	17,11	2,64	2,84
580	24	520	24,17	21,67	3,18	3,08
600	40	710	15,00	17,75	2,71	2,88
570	26	540	21,92	20,77	3,09	3,03
600	33	640	18,18	19,39	2,90	2,96
620	37	680	16,76	18,38	2,82	2,91
610	24	500	25,42	20,83	3,24	3,04
640	28	600	22,86	21,43	3,13	3,06
710	36	705	19,72	19,58	2,98	2,97
760	34	700	22,35	20,59	3,11	3,02
720	36	720	20,00	20,00	3,00	3,00
650	32	620	20,31	19,38	3,01	2,96

Застосовуючи функцію ЛИНЕЙН з програми MS Excel, отримуємо регресійну модель у вигляді

$$y = 0,384x + 1,834.$$

Коефіцієнт детермінації $r_{yx} = 0,933$ указує на сильну залежність між незалежною і залежною змінними.

Знаючи значення α та β , можна виписати виробничу функцію Кобба–Дугласа у вигляді

$$Y = 6,277K^{0,384}L^{0,616}.$$

Тепер стає можливим встановити вплив факторів L та K на випуск продукції. Зокрема, ця рівність показує, що частка праці в сукупному випуску продукції складає 61,6%, а частка капіталу 38,4%.

Оскільки виробнича функція побудована за принципом "чорного ящика", то на майбутнє проєктуються ті тенденції, які мали місце в минулому. Тому треба мати на увазі, що при використанні одержаної формули на практиці не можна виходити за межі діапазону значень параметрів L та K , при яких модель залишається правильною. ▲

Структурна ідентифікація за вимірюваними даними є достатньо складною задачею і зв'язана з вибором базисних функцій моделі. Нині не існує точної математичної процедури, яка дозволяє в повному об'ємі розв'язати проблему структурної ідентифікації складного нелінійного об'єкта. За критерії для апріорного вибору структури моделі використовують показники складності, наприклад, степінь полінома регресії або кількість членів функціонального ряду.

При виборі структури моделі необхідно користуватися принципом простоти: з різних варіантів структури математичної моделі спочатку варто поспробувати простішу. Наприклад, якщо досліджується складна динамічна система, то на початку треба перевірити, чи не можна обмежитися статистичною моделлю, що не враховує динаміку.

При уточненні структури статистичної моделі теж керуються принципом простоти, а саме у випадку, коли залежність виходу від входу монотонна, то спочатку пробують лінійну модель, якщо залежність виходу від входу має екстремальний характер, то беруть квадратичну функцію, якщо залежність "вихід-вхід" має перегин, то починають з кубічної функції.

Можливий різний вибір математичних моделей у різних областях змінних, наприклад, в деякому околі екстремуму обирають квадратичну функцію, поза околom – лінійні функції.

Якщо точність моделі зі сталими коефіцієнтами недостатня, тобто досліджувана система нестационарна, то в модель вводять залежність коефіцієнтів від часу, частіше за все лінійну або гармонічну.

2.4.6. Задачі для самостійної роботи

2.38. Математична модель В. Вольтерри, що описує динаміку угруповання n видів, має вигляд

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(\varepsilon_i - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} x_j \right), i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

де ε_i – коефіцієнт приросту i -го виду у випадку ізольованої популяції; γ_{ij} ($i \neq j$) – параметри, що описують вплив j -го виду на i -й вид; γ_{ii} – параметр внутрішньовидової конкуренції для i -го виду. Матриця $\Gamma = \{\gamma_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots,n}$, називається матрицею угруповання.

Розглянути задачу параметричної ідентифікації для цієї моделі.

2.39. Нехай деякий процес описується лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + \beta x = f(x).$$

Припустимо, що ми провели експеримент, тобто на вхід подали відомий сигнал $f(t)$ і на виході заміряли $x^*(\tau)$. За методом найменших квадратів виконати ідентифікацію параметрів моделі α, β . **Вказівка.** Розглянути різні випадки коренів характеристичного рівняння.

2.40. Ідентифікація початкових умов для лінійної динамічної системи (задача спостереження).

Нехай вектор стану динамічної системи описується рівнянням

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad (2.4.13)$$

де $x(t)$ – n -вимірний вектор; $A(t)$ – $n \times n$ -матриця з неперервних елементів; $b(t)$ – неперервний n -вимірний вектор при $t \geq t_0$.

Припустимо, що на скінченному інтервалі часу спостерігаємо вектор

$$y(t) = R(t)x(t) + g(t), \quad (2.4.14)$$

де $R(t)$ – $n \times n$ -матриця; $g(t)$ – неперервний вектор. Ставиться задача визначення початкового значення $x(t_0)$, яке дозволить

знайти розв'язок $x(t)$ лінійної системи (2.4.13) за спостереженням (2.4.14).

Система (2.4.13) називається повністю спостережуваною на $[t_0, T]$, якщо за спостереженнями $y(t)$ можна однозначно визначити вектор $x(t)$.

Одержати умови повної спостережуваності системи (2.4.13). Розглянути випадок, коли за величиною $y(t)$ ведуться дискретні спостереження. **Вказівка.** Записати загальний розв'язок (2.4.13), підставити його в (2.4.14) і одержати систему для $x(t_0)$.

Запитання та завдання до самоперевірки

1. Назвіть відомі вам методи ідентифікації.
2. Опишіть як виконати ідентифікацію параметрів логістичної моделі.
3. Проілюструйте ідентифікацію моделей методом розв'язування обернених задач.
4. Опишіть суть методу передаточних функцій.
5. Сформулюйте загальну ідею статистичних методів ідентифікації.
6. Як побудувати рівняння множинної регресії.

Література: [1, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 19, 32, 39, 65, 79, 83, 99, 107].

Розділ 3. Моделювання фізичної реальності

Найбільш довершеними результатами математичного моделювання є моделі фізичної реальності. Принципи математичного моделювання фізичних процесів суттєво допомагають будувати моделі в нетрадиційних для природознавства і техніки галузях (економіка, екологія, медицина і т.д.).

3.1. Побудова математичних моделей на основі рівнянь Лагранжа

Рівняння Лагранжа були відкриті більше двісті років тому, але і сьогодні є універсальним засобом побудови математичних моделей. Вони використовуються до розв'язування задач найрізноманітнішої природи. Універсальність цих рівнянь зумовлена перш за все загальним алгоритмом їх побудови. Рівняння Лагранжа дають єдиний, причому достатньо простий спосіб побудови математичних моделей руху механічних систем. Сам Лагранж указував на те, що він поставив перед собою задачу звести теорію механіки і методи, зв'язані з нею, до загальних формул, які даватимуть рівняння, необхідні для розв'язування кожної окремої задачі. Кількість рівнянь не залежить від кількості матеріальних точок і дорівнює кількості степенів вільності. Одержимо загальний вигляд цих рівнянь.

Для визначення положення системи з n степенями вільності вводимо в розгляд узагальнені координати $q(t) = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. *Узагальненими координатами* системи називається сукупність незалежних між собою геометричних параметрів, що однозначно визначають положення системи в просторі. Їх похідні за часом називають *узагальненими швидкостями*. Вектор $(q(t), \frac{dq}{dt})$ визначає стан системи. Співвідношення, що зв'язують прискорення з координатами і швидкостями, називаються *рівняннями руху*. Ці рівняння являють собою диференціальні рівняння другого порядку відносно $q(t)$.

Надзвичайно зручним і загальним принципом побудови рівнянь руху є принцип Гамільтона (принцип найменшої дії). Згідно з цим принципом, кожна механічна система характеризується визначеною функцією $L(q, \dot{q}, t)$. Нехай у моменти часу $t=t_1$ і $t=t_2$

механічна система займає положення $q^{(1)}$ та $q^{(2)}$. Тоді зі всіх можливих траєкторій, за якими система могла би перейти з положення $q^{(1)}$ в положення $q^{(2)}$, в дійсності реалізується траєкторія, яка доставляє мінімум інтегралу

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (3.1.1)$$

Функція $L(q, \dot{q}, t)$ називається *функцією Лагранжа*, а інтеграл (3.1.1) – *дією*.

Необхідною умовою екстремуму функціонала (3.1.1) є рівність нулю його першої варіації

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0.$$

Причому i -та складова варіації функціонала дії по i -тій функції теж дорівнюватиме нулю, тобто

$$(\delta S)_i = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = 0.$$

Оскільки $\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i$, то, проінтегрувавши другий доданок за частинами, одержимо

$$(\delta S)_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = 0.$$

Перший доданок у цій формулі дорівнює нулю, оскільки $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$ при довільних значеннях δq_i . За основною лемою варіаційного числення інтеграл дорівнює нулю при довільній функції δq_i тоді і тільки тоді, коли дорівнює нулю підінтегральний вираз, що знаходиться в дужках. Таким чином, маємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1.2)$$

Ця система диференціальних рівнянь і називається в механіці *рівняннями Лагранжа*, а у варіаційному численні подібні рівняння називаються *рівняннями Ейлера*. Для того, щоб з цих рівнянь отримати рівняння руху (математичну модель) конкретної

механічної системи, необхідно побудувати функцію Лагранжа цієї системи і підставити її в (3.1.2). Рівняння (3.1.2) являють собою систему n диференціальних рівнянь другого порядку для n невідомих функцій $q_i(t)$.

Для того, щоб можна було б визначити стан механічної системи в будь-який момент часу $t > t_0$, необхідно задати початкові умови розв'язку диференціального рівняння (умови Коші). Для рівняння другого порядку це будуть початкові координати й початкові швидкості, тобто $q(t_0)$ та $\dot{q}(t_0)$.

Пояснимо на простому прикладі, як виникають рівняння у формі Лагранжа. Візьмемо рівняння Ньютона для лінійного механічного осцилятора $m\ddot{x} + kx = 0$ і виконаємо перетворення

$$m\ddot{x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} \right), \quad kx = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kx^2}{2} \right),$$

тоді

$$m\ddot{x} + kx = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right).$$

Таке представлення за формою збігається з рівнянням Лагранжа. Тут $\frac{m\dot{x}^2}{2}$ – кінетична енергія, $\frac{kx^2}{2}$ – потенціальна енергія.

Аналогічно до лагранжевого вигляду зводиться й рівняння електричного осцилятора (виконати самостійно).

3.1.2. Основні властивості функцій Лагранжа

Якщо дві системи не взаємодіють, то їхні функції Лагранжа не мають загальних змінних. Звідси маємо, що загальна функція Лагранжа дорівнює їхній сумі

$$L = L_1 + L_2.$$

Якщо дві функції Лагранжа $L_1(q, \dot{q}, t)$ і $L_2(q, \dot{q}, t)$ відрізняються на повну похідну деякої функції $f(q, t)$, обчисленої вздовж траєкторій руху $q(t)$, тобто

$$L_1(q, \dot{q}, t) = L_2(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t),$$

то рівняння руху систем, що задаються такими двома функціями Лагранжа, збігаються.

Дійсно, відповідні функціонали дії зв'язані співвідношенням

$$\begin{aligned} S_1(q) &= \int_{t_0}^t L_1(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[L_2(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t) \right] dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} L_2(q, \dot{q}, t) dt + f(q(t_1), t_1) - f(q(t_0), t_0) = \\ &= S_2(q) + f(q^{(1)}, t_1) - f(q^{(0)}, t_0). \end{aligned}$$

При обчисленні першої варіації маємо

$$\delta S_1(q) = \delta S_2(q).$$

Оскільки інтеграли відрізняються на сталу, то рівняння руху збігаються.

Якщо розглядати вільний рух матеріальної точки, тобто такий, який не піддається зовнішнім збуренням, то це означає, що в будь-якому місці простору така точка, знаходячись у спокої, буде перебувати в цьому стані як завгодно довго. Формально це означає, що функція Лагранжа не залежить ні від координат, ні від часу. Крім цього, вона не залежить від напрямку вектора швидкості. Цей факт будемо записувати у вигляді $L = L(v^2)$.

Записуючи рівняння Лагранжа для цієї функції, маємо

$$\frac{d}{dt} L_v(v^2) = 0.$$

Звідси $L_v(v^2) = \text{const}$, а отже, $v = \text{const}$.

Така система координат, в якій будь-який вільний рух відбувається зі сталою за величиною й напрямом швидкістю, називається *інерціальною*. Це твердження визначає закон інерції (перший закон Ньютона).

Побудуємо функцію Лагранжа вільної матеріальної точки. Припустимо, що інерціальна система відліку O_1 рухається відносно іншої інерціальної системи O з малою швидкістю $\vec{\xi}$, тоді $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{\xi}$. Оскільки рівняння руху повинні мати той самий вигляд, то функція Лагранжа $L(v^2)$ повинна відрізнятися

від функції Лагранжа $L(v_1^2)$ на повну похідну за часом. Знайдемо $L(v^2) = L(v_1^2 + 2\vec{v}_1\vec{\xi} + \xi^2)$.

Розкладаючи в ряд праву частину за степенями $\vec{\xi}$ і залишаючи в розкладі лише лінійне наближення, одержуємо

$$L(v^2) = L(v_1^2) + \left. \frac{\partial L}{\partial v^2} \right|_{\vec{\xi}=0} \cdot 2\vec{v}_1\vec{\xi}.$$

Другий член виразу буде повною похідною за часом тоді й лише тоді, коли він залежить від швидкості лінійно, тому $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ від швидкості не залежить, тобто функція Лагранжа має вигляд $L = a \cdot v^2$. Якщо взяти $a = m/2$, де m – маса матеріальної точки, то одержимо

$$L = \frac{mv^2}{2}.$$

Якщо розглядати кілька невзаємодіючих точок із масами m_i і швидкостями \vec{v}_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, то, згідно з адитивністю, функція Лагранжа матиме вигляд

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Взаємодія між точками може бути описана додаванням до функції Лагранжа деякої додаткової функції координат, яка залежить від характеру взаємодії. Позначивши її через $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$, запишемо функцію Лагранжа у вигляді

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n) = T - \Pi. \quad (3.1.3)$$

При цьому величину $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$ називають *кінетичною енергією системи*, а $\Pi(q_1, \dots, q_n)$ – *потенціальною енергією системи*.

Потенціальна енергія залежить від розташування всіх матеріальних точок в деякий момент часу, а зміна положення однієї з них миттєво впливає на зміну потенціальної енергії.

Варіаційний принцип Гамільтона стверджує, що серед усіх можливих рухів здійснюється лише той рух, при якому досягається мінімум функціонала

$$S(q) = \int_{t_0}^t [T(v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2) - \Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)] dt,$$

де $T(\cdot)$ – кінетична, а $\Pi(\cdot)$ – потенціальна енергії системи.

Зауважимо, що, застосовуючи принцип Гамільтона і рівняння Ейлера–Лагранжа, можна одержати також основні закони: закон збереження енергії, закон збереження імпульсу, закон збереження сил, закон збереження моменту імпульсу (див. наприклад [4, 100]).

3.1.3. Узагальнення рівняння Лагранжа

У п. 3.1.1 наведено вигляд рівняння Лагранжа для консервативних систем, тобто для систем, загальна енергія яких стала. Сили, що діють у консервативній системі, можна подати у вигляді

$$Q_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Такі сили називаються *потенціальними*, а величина Π – потенціальною енергією. Потенціальні сили – це, наприклад, сила пружності, сила тяжіння, оскільки силу пружності $-kx$ можна подати як

$$-kx = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{kx^2}{2}, \quad \Pi = \frac{kx^2}{2},$$

а сила тяжіння $mg = \frac{\partial}{\partial x} mgx$.

Робота потенціальної сили при переході системи з одного положення в інше не залежить від шляху переходу і дорівнює зміні потенціальної енергії.

Для непотенціальних сил, зокрема, для сил тертя, опору енергія не зберігається і рівняння Лагранжа не можна застосувати. Але його можна узагальнити. Потрібно тільки виходити не з потенціальної енергії діючих сил або з енергії електромагнітного поля, а з виразу для роботи.

При наявності потенціальної енергії елементарна робота дорівнює

$$\delta A = -\delta\Pi = -\sum_i \frac{\partial\Pi}{\partial q_i} \delta q_i.$$

У загальному випадку так само

$$\delta A = -\sum_i Q_i \delta q_i,$$

тобто похідні $\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}$ замінюються на величини Q_i , які називаються *узагальненими силами*, а δq_i – довільні варіації незалежних узагальнених координат.

Рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad L = T - \Pi$$

можна переписати у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}.$$

Узагальненням цього рівняння є

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Якщо тепер сили розділити на потенціальні й непотенціальні, то рівняння Лагранжа набуває вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} + Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

або

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1.4)$$

де $L = T - \Pi$, але Π стосується тільки потенціальних сил, а Q_i – непотенціальні сили. Рівняння (3.1.4) є узагальненням рівняння Лагранжа для неконсервативної системи.

Проілюструємо застосування рівняння (3.1.4). Нехай ми маємо механічну систему "кулька-пружина" при наявності сил опору. В цьому випадку (див. п. 3.1.1) кінетична енергія $T = \frac{m\dot{x}^2}{2}$. Сили, що здійснюють роботу по переміщенню кульки, – це сила пружності $F = -kx$ – потенціальна сила, і сила опору $Q = -\mu\dot{x}$ – непотенціальна сила. Тут $x(t)$ означає зміщення кульки від положення рівноваги. Потенціальну силу відносимо до функції Лагранжа, тому

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}.$$

А узагальнену силу опору запишемо в правій частині рівняння Лагранжа для неконсервативної системи, тоді з рівняння (3.1.4) одержуємо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \right) = -\mu\dot{x},$$

або

$$m\ddot{x} + kx = -\mu\dot{x},$$

що збігається з рівнянням (2.2.16).

Дослідження цього рівняння наведено в п. 2.2.4.

3.1.4. Приклади застосувань рівнянь Лагранжа

Приклад 3.1.1. Побудувати математичну модель маятника, в якого точка кріплення рухається горизонтально й вертикально за законом $x = u(t)$, $y = v(t)$ (рис. 3.1).

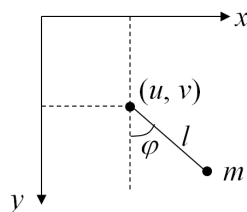


Рис. 3.1. Маятник з рухомою точкою кріплення

Для побудови математичної моделі застосуємо рівняння Лагранжа. Виразимо координати маси m маятника через зміщення $u(t)$, $v(t)$ і кут φ відхилення його від вертикалі. Як видно з рис. 3.1,

$$x = u + l \sin \varphi, \quad y = v + l \cos \varphi.$$

Запишемо функцію Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgh,$$

де $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ – швидкість руху, $h = v + l \cos \varphi$.

Враховуючи вирази для x , y , маємо

$$L = \frac{m}{2}[(\dot{u} + l\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (\dot{v} - l\dot{\varphi} \sin \varphi)^2] - mg(l \cos \varphi + v).$$

На основі цієї функції L запишемо рівняння Лагранжа (3.1.2). Тим самим одержимо математичну модель маятника з рухомою точкою підвісу:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = -\frac{1}{l} \ddot{u} \cos \varphi + \frac{1}{l} \ddot{v} \sin \varphi.$$

За умови, що в цій системі наявні сили в'язкого тертя, з рівняння (3.1.4) можна одержати загальніше рівняння вигляду

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = -\frac{1}{l} \ddot{u} \cos \varphi + \frac{1}{l} \ddot{v} \sin \varphi, \quad \omega^2 = \frac{g}{l}. \quad (3.1.5)$$

Якщо розглядати невеликі відхилення, то $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, і (3.1.5) набуває простішого вигляду

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = -\frac{1}{l} \ddot{u} + \frac{1}{l} \ddot{v} \varphi. \quad (3.1.6)$$

Якщо в рівнянні (3.1.6) розглядати тільки гармонічні горизонтальні рухи для точки підвісу, тобто

$$u = \frac{al \cos \nu t}{\nu^2}, \quad v = 0,$$

то (3.1.6) набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2 \varphi = a \cos \nu t. \quad (3.1.7)$$

Рівняння (3.1.7) зводиться до відомого вже нам рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = a \cos \omega t,$$

яке вивчалось в п. 2.2.4.2.

Якщо в рівнянні (3.1.6) розглядати тільки вертикальні гармонічні рухи, тобто коли точка кріплення рухається за законом $u = 0, v = \frac{\varepsilon l \cos \nu t}{\nu^2}$, то рівняння (3.1.6) перейде в рівняння вигляду

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega^2\varphi = -\varepsilon \cos \nu t \varphi,$$

або

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + (\omega^2 + \varepsilon \cos \nu t)\varphi = 0. \quad (3.1.8)$$

Отже, якщо точку кріплення гармонічно переміщати горизонтально, то це рівнозначно дії на маятник гармонічної сили. Якщо точку кріплення гармонічно переміщати вертикально, що це рівносильно гармонічній зміні частоти маятника, що може відбуватися при періодичній зміні довжини l маятника ($l = l_0 + a \cos \nu t$).

Рівняння (3.1.8) шляхом заміни $\varphi = e^{-\delta t} x$ можна звести до вигляду

$$\ddot{x} + (\Omega^2 + \varepsilon \cos \nu t)x = 0,$$

де $\Omega^2 = \omega^2 - \delta^2$. Заміна масштабу часу $\tau = \nu t$ дозволить у цьому рівнянні зменшити кількість параметрів до двох. Маємо

$$\ddot{x} + (\nu^{-2}\Omega^2 + \varepsilon\nu^{-2} \cos \tau)x = 0.$$

Це є рівняння Матьє, яке можна записати у вигляді

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \varepsilon \cos t)x = 0.$$

Дослідженню цього рівняння присвячена обширна література [6, 7, 64]. Ми лише зазначимо, що тут виникають явища параметричного резонансу. ▲

Приклад 3.1.2. Раніше були побудовані математичні моделі механічного та електричного осциляторів окремо. Сконструюємо тепер електромеханічну систему. Припустимо, що в середині котушки самоіндукції може коливатися залізний стержень масою m , підвішений на пружині (рис. 3.2).

Ця система, не зважаючи на простоту конструкції, досить складна. Вона складається з двох осциляторів – замкнутого контуру самоіндукції й ємності та маси m , підвішеної на пружині, які взаємодіють між собою.

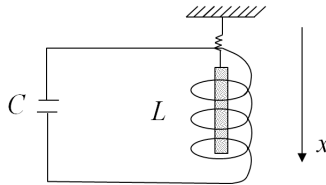


Рис. 3.2. Електромеханічна система

Рух стержня змінює магнітне поле котушки самоіндукції, викликаючи в ній ЕРС індукції. При цьому самоіндукція L залежить від відхилення залізного стержня від його стану рівноваги $x = 0$. А змінне магнітне поле котушки самоіндукції діє на залізний стержень.

Щоб написати рівняння руху цих осциляторів за законом Ньютона, потрібно знайти ЕРС, яка індукується в котушці самоіндукції рухом стержня, і змінну силу дії магнітного поля котушки самоіндукції на залізний стержень, що знаходиться в ній. Для цього потрібні добрі знання цих процесів. Математику значно простіше написати рівняння Лагранжа.

Лагранж запропонував простий і універсальний метод складання математичних моделей у вигляді диференціальних рівнянь Лагранжа для механічних систем типу (3.1.2). Унаслідок знайденої аналогії цей принцип переноситься на електричні системи.

Це можна зробити і для електромеханічних систем. Для цього під узагальненими координатами q_1, q_2, \dots, q_n розуміють скалярні величини, які визначають не тільки механічні положення, а й всі заряди. Під кінетичною енергією такої системи розуміють суму кінетичної енергії механічної системи й енергії магнітного поля індуктивності, а під потенціальною енергією Π – суму механічної потенціальної енергії та енергії електричного поля ємності.

Якщо, крім координати зміщення x , ввести ще заряд конденсатора q , то, враховуючи вирази для механічної і електричної енер-

гій, запишемо функцію Лагранжа $L(x, q)$ у вигляді:

$$L(x, q) = \frac{L(x)\dot{q}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{q^2}{2C} - \frac{kx^2}{2},$$

де $L(x)$ – індуктивність котушки при відхиленні стержня до точки x , а C – ємність конденсатора.

Звідси одержуємо два рівняння Лагранжа для величин $x(t)$ і $q(t)$ у вигляді

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - \frac{1}{2}L'(x)\dot{q}^2 + kx = 0, \quad (3.1.9)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = L(x)\ddot{q} + L'(x)\dot{x}\dot{q} + \frac{q}{C} = 0. \quad (3.1.10)$$

Рівняння (3.1.9), (3.1.10) можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = \frac{1}{2}L'(x)\dot{q}^2, \\ L(x)\ddot{q} + \frac{q}{C} = -L'(x)\dot{x}\dot{q}. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

Якщо $L' = 0$, то система (3.1.11) розпадається на два незалежних рівняння. При $L' \neq 0$, як видно з (3.1.11), електричний осцилятор діє на масу m механічної системи з силою $\frac{1}{2}L'(x)\dot{q}^2$, а механічний осцилятор наводить в електричному контурі ЕРС індукції, що дорівнює $L'(x)\dot{x}\dot{q}$.

Якщо рівняння (3.1.9) помножити на \dot{x} , а рівняння (3.1.10) – на \dot{q} і додати їх, то одержимо загальний інтеграл вигляду

$$\frac{L(x)\dot{q}^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} + \frac{kx^2}{2} = \text{const},$$

який стверджує, що загальна енергія в такій електромеханічній системі є сталою. ▲

Принцип Гамільтона застосовується не тільки до систем з матеріальних точок. Він розповсюджується на суцільні тіла, що не є сукупністю матеріальних точок, але ці тіла можна розглядати як множину окремих прилягаючих точок. Наведемо такий приклад.

Приклад 3.1.3. Побудувати математичну модель малих коливань струни.

Струна розглядається як тонка еластична нитка, натягнута вздовж осі Ox . Вважаємо, що початок координат знаходиться в одному з кінців струни. Відхилимо струну від положення рівноваги і відпустимо, унаслідок чого одержимо вільні коливання струни відносно положення рівноваги.

Складемо диференціальне рівняння для опису перпендикулярного переміщення $u = u(x, t)$ точки x струни від положення рівноваги в момент часу t . Частинні похідні від функції $u(x, t)$ за змінними x, t позначимо відповідно u'_x, u'_t .

Нехай $\rho(x)$ – лінійна густина струни, тоді маса малого елемента струни в інтервалі від x до $x + dx$ дорівнює $\rho(x)dx$, а кінетична енергія цього елемента дорівнює $\frac{1}{2}\rho dx (u'_t)^2$. Повна кінетична енергія всієї струни

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) (u'_t)^2 dx.$$

Знайдемо тепер потенціальну енергію. Потенціальна енергія пропорційна розтягу струни. Ділянка струни dx у деформованому стані має довжину

$$ds = \sqrt{1 + (u'_x)^2} dx,$$

оскільки $ds^2 = dx^2 + du^2$.

Отже, подовження елемента струни дорівнює

$$ds - dx = (\sqrt{1 + (u'_x)^2} - 1) dx.$$

За формулою Тейлора,

$$\sqrt{1 + (u'_x)^2} \approx 1 + \frac{1}{2}(u'_x)^2.$$

Оскільки ми розглядаємо малі коливання струни, то членами вищого порядку малості в розкладі функції $u(x, t)$ та її похідних можна знехтувати.

Знайдемо тепер збільшення довжини елемента струни

$$\sqrt{1 + (u'_x)^2} dx - dx \approx \frac{1}{2}(u'_x)^2 dx.$$

Тому потенціальна енергія елемента струни (густина потенціальної енергії) дорівнює $\frac{k(u'_x)^2}{2}$, де k – коефіцієнт пропорційності. При цьому потенціальна енергія всієї струни виражається співвідношенням

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l k(u'_x)^2 dx.$$

Тоді функція Лагранжа $L = T - \Pi$ має вигляд

$$L = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3.1.12)$$

Запишемо інтеграл дії для струни

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) (u'_t)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l k (u'_x)^2 dx \right] dt.$$

Рівняння Ейлера–Лагранжа у випадку, коли $u = u(x, t)$, має вигляд

$$L_u - \frac{\partial}{\partial t} L_p - \frac{\partial}{\partial x} L_q = 0, \quad (3.1.13)$$

де $p = u'_t$, $q = u'_x$.

Для лагранжіана (3.1.12) маємо

$$\frac{\partial L}{\partial u} = 0, \quad L_p = \frac{\partial L}{\partial p} = \frac{\partial L}{\partial u'_t} = \rho(x) u'_t, \quad L_q = \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial u'_x} = -k u'_x.$$

Тому з рівняння (3.1.13) одержуємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку з частинними похідними

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Поділивши це рівняння на $\rho(x)$, отримаємо хвильове рівняння для вільних малих поперечних коливань струни у вигляді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

де $a^2 = \frac{k}{\rho(x)}$.

Якщо струна однорідна ($\rho(x) = \text{const}$), то хвильове рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Якщо струна піддається дії зовнішньої сили $f(x, t)$, яка перпендикулярна до струни, то для побудови математичної моделі застосуємо узагальнене рівняння Лагранжа

$$L_u - \frac{\partial}{\partial t} L_p - \frac{\partial}{\partial x} L_q = f(x, t).$$

В результаті одержуємо рівняння вимушених коливань струни вигляду

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t).$$

Для замикання цього рівняння потрібно додати ще початкові та граничні умови на функцію $u(x, t)$. Початкові умови задаються у вигляді

$$u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x),$$

а граничні –

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0.$$

Розв'язування таких задач вивчається в підручниках з математичної фізики, наприклад [95]. ▲

3.2. Математична модель теплообміну

Нехай тепло розповсюджується в деякому теплопровідному тілі, що містить внутрішні джерела тепла. Розглянемо в ньому деяку область V у деякий момент часу t . Потрібно побудувати модель, що описує розподіл температури тіла $u(M, t)$ у точці $M(x, y, z) \in V$ у момент часу t .

На поверхні S області V існує тепловий потік з питомою потужністю \vec{q} . Це означає, що довжина цього вектора дорівнює кількості тепла, що проходить через одиничну площу поверхні S за одиницю часу.

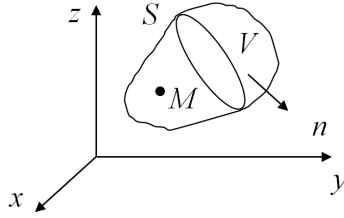


Рис. 3.3. Схема теплообміну

Потік тепла, згідно з експериментальним законом Фур'є, за яким щільність теплового потоку пропорційна градієнту температури (телові потоки напрямлені від місць з більш високою температурою до місць з меншою температурою), визначається за формулою

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } u,$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності.

Зміст цієї формули досить прозорий: кількість тепла, що проходить через одиничну площадку за одиницю часу, пропорційна перепаду температур в околі поверхні.

Тоді кількість тепла, що віддається з поверхні S тіла в оточуюче середовище за час dt , виражається через поверхневий інтеграл

$$Q_S = \iint_S q_n dS dt,$$

де q_n – проекція вектора щільності теплового потоку \vec{q} на зовнішню нормаль \vec{n} до поверхні S .

Кількість теплоти, що виділяється в тілі об'єму V за час dt внутрішніми джерелами тепла, з питомою потужністю $f(M, t)$ дорівнює величині об'ємного інтеграла

$$Q_V = \iiint_V f(M, t) dV dt.$$

Теплообмін нагрітого тіла з зовнішнім середовищем (без виконання зовнішньої роботи) підпорядковується закону збереження енергії (першому закону термодинаміки)

$$Q_V = Q_S + \Delta U,$$

де Q_V – кількість теплоти, що виділяється в тілі внутрішніми джерелами тепла; Q_S – кількість теплоти, що віддається з поверхні S тіла в оточуюче середовище; ΔU – зміна внутрішньої енергії тіла.

Знайдемо вираз для ΔU . В об'ємі dV міститься $c\rho u dV$ теплової енергії, де c – питома теплоємність, ρ – густина тіла, u – температура в даній точці і в певний момент часу. Тоді за час dt відбувається зміна теплової енергії на величину

$$\Delta U = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V c\rho u dV dt.$$

Для поверхневого інтеграла Q_S врахуємо закон Фур'є і застосуємо формулу Остроградського:

$$\iint_S q_n dS = - \iint_S (\lambda \operatorname{grad} u, n) dS = - \iiint_V \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} u) dV.$$

Тепер, згідно з законом збереження енергії, маємо

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (c\rho u) - \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} u) - f \right] dV dt = 0.$$

Усі розглядувані функції неперервні, тому останній інтеграл дорівнює нулю тільки в тому випадку, коли в будь-якій точці області V дорівнює нулю підінтегральний вираз. Звідси одержуємо рівняння нестационарної теплопровідності (рівняння Фур'є-Кірхгофа) у вигляді

$$\frac{\partial(c\rho u)}{\partial t} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} u) + f. \quad (3.2.1)$$

Для замикання моделі необхідно задати ще додаткові умови: а) початкові умови – $u(M, 0) = u_0(M)$; б) граничні умови на S – $u(p, t) = \varphi(t)$, $p \in S$ або $\frac{\partial u}{\partial n}(p, t) = \psi(t)$, $p \in S$.

Рівняння (3.2.1) є досить загальним рівнянням теплопровідності. З нього можна одержувати деякі окремі випадки.

Наприклад, якщо $c, \rho, \lambda = \text{const}$, то маємо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div} \operatorname{grad} u + \frac{f}{c\rho},$$

де $a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коефіцієнт теплопровідності.

Якщо відсутні джерела тепла, то рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div} \operatorname{grad} u.$$

Комбінація $\operatorname{div} \operatorname{grad}$ називається диференціальним оператором Лапласа й позначається Δ або ∇^2 . У декартових координатах лапласіан має вираз

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

В одновимірному випадку для розповсюдження тепла в стержні використовують математичну модель вигляду

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t). \quad (3.2.2)$$

Стационарне рівняння теплопровідності, що описує стан стаціонарного теплового поля деякої області V тривимірного простору в декартовій системі координат, можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial z} \right] + \\ + f(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

Нелінійні задачі розповсюдження тепла виникають, коли в рівнянні розповсюдження тепла розглядаються джерела тепла, потужність яких залежить від температури. З такими задачами зустрічаються в теорії розповсюдження полум'я. Тут, разом з впливом температури на швидкість виділення тепла, має місце залежність (як правило, степенева) теплопровідності й теплоємності – від температури.

Математична модель, що є одновимірним нелінійним рівнянням теплопровідності, записується у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \operatorname{div} (u^k \operatorname{grad} u).$$

Нарешті відмітимо ще універсальність математичної моделі, що містить рівняння Пуассона

$$\Delta u(M) + f(M) = 0,$$

де Δ – оператор Лапласа; M – деяка точка області V ; $u(M)$ – шукана функція. За допомогою цього рівняння можна вивчати усталені процеси протікання рідин, розповсюдження теплоти, розподіл електричного потенціалу, деформацію мембрани, механічні напруження при крученні стержня, фільтрацію рідини в ґрунті, розповсюдження домішків у повітрі, епідемії в регіоні тощо.

У кожній з цих задач $u(M)$, $f(M)$ мають свій зміст, але їх зв'язок описує загальне для цих задач рівняння.

Приклад 3.2.1. Математична модель теплопровідності стержня.

Розглянемо однорідний стержень довжиною l , що ізолюваний з боків і тонкий настільки, що в будь-який момент часу температуру в усіх точках поперечного перетину можна було б вважати однаковою. Нас цікавить процес розповсюдження тепла в стержні. Цей процес може бути описаний функцією $u(x, t)$, що визначає температуру в точці x стержня в момент часу t (рис. 3.4).

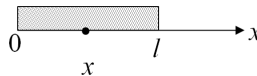


Рис. 3.4. Розповсюдження тепла в стержні

Рівняння, яке буде задовольняти $u(x, t)$, як впливає з (3.2.2), у випадку однорідного стержня має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}. \quad (3.2.3)$$

Для виділення єдиного розв'язку рівняння теплопровідності необхідно додати ще початкові та крайові умови. Початкова умова полягає в заданні значень функції $u(x, t)$ при $t = t_0$. Граничні умови можуть бути різними в залежності від температурних режимів на кінцях стержня. ▲

3.3. Математичні моделі гідродинаміки

3.3.1. Основні поняття

Рух рідин і газів є традиційним об'єктом математичного моделювання. Це зв'язано перш за все з широким застосуванням моделей цих процесів в авіації, ракетобудуванні, кораблебудуванні, енергетиці, медицині, екології, кліматології, промисловості та інших галузях науки і техніки. Математичний опис гідродинамічних процесів базується на рівняннях гідродинаміки.

Рідинне середовище зображають деяким суцільним середовищем. Поняття суцільного середовища вводиться через поняття частинки рідини, яка є необхідним елементом суцільного середовища. За частинку рідини вибирають малий об'єм рідини, до якого можна застосувати закони механіки.

Такі фізичні характеристики середовища, як щільність, температура, швидкість частинок, називаються *гідродинамічними*. При описанні рідинних середовищ використовуються два підходи: Ейлера і Лагранжа.

При Лагранжевому підході об'єктом вивчення є частинки рідини, що розглядаються як сукупність матеріальних точок, які суцільно заповнюють об'єм з рідиною. При цьому досліджують, як змінюються різні векторні і скалярні параметри конкретної частинки рідини з часом. Нехай (x_0, y_0, z_0) – координати частинки в початковий момент часу $t = t_0$, тоді в будь-який момент часу $t \neq t_0$ координати частинки (x, y, z) будуть функціями не тільки часу, але й початкового положення частинки, тобто $x = x(x_0, y_0, z_0, t)$, $y = y(x_0, y_0, z_0, t)$, $z = z(x_0, y_0, z_0, t)$. При $t = t_0$ маємо $x_0 = x(x_0, y_0, z_0, t_0)$, $y_0 = y(x_0, y_0, z_0, t_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0, z_0, t_0)$. Координати (x_0, y_0, z_0) називаються *Лагранжевими*.

Іноколи замість (x_0, y_0, z_0) можна розглядати деякі інші величини, що однозначно зв'язані з (x_0, y_0, z_0)

$$a = \psi_1(x_0, y_0, z_0), \quad b = \psi_2(x_0, y_0, z_0), \quad c = \psi_3(x_0, y_0, z_0).$$

Тепер уже сукупність величин (a, b, c, t) є змінними Лагранжа. У змінних Лагранжа можна визначити значення скалярних і векторних величин, зв'язаних з конкретною частинкою. Координати

деякої частинки задаються співвідношеннями

$$x = f_1(a, b, c, t), \quad y = f_2(a, b, c, t), \quad z = f_3(a, b, c, t).$$

Для знаходження компонент швидкості \vec{v} та прискорення \vec{w} при фіксованих значеннях (a, b, c) використовують формули

$$v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{a,b,c}, \quad v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} \right)_{a,b,c}, \quad v_z = \frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial t} \right)_{a,b,c}.$$

$$w_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \right)_{a,b,c}, \quad w_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \right)_{a,b,c},$$

$$w_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} \right)_{a,b,c}.$$

Для повної характеристики стану рідини необхідно знати ще тиск p і щільність ρ як функції змінних Лагранжа

$$p = p(a, b, c, t), \quad \rho = \rho(a, b, c, t).$$

При Ейлеровому підході об'єктом вивчення є не сама рідина, а деякий нерухомий об'єм, заповнений рідиною.

При цьому вивчається:

- зміна різних характеристик протікання рідини у фіксованій точці простору при зміні часу,
- зміна цих характеристик при переході до інших точок простору, в цьому випадку векторні і скалярні характеристики руху рідини залежать від змінних (x, y, z, t) , які називаються змінними Ейлера. Зокрема, компоненти вектора швидкості можуть бути записані як

$$v_x = F_1(x, y, z, t), \quad v_y = F_2(x, y, z, t), \quad v_z = F_3(x, y, z, t).$$

3.3.2. Основні рівняння гідродинаміки

3.3.2.1. Рівняння нерозривності суцільного середовища

У середині рухомої рідини розглянемо деякий об'єм V , що містить одні й ті самі частинки і рухається разом з ними.

Нехай $B(x, y, z, t)$ – деяка гідродинамічна характеристика, наприклад щільність частинок, у точці з координатами (x, y, z) у момент часу t , тоді маса виражається інтегралом

$$\int_V B(x, y, z, t) dV.$$

Аналогічно визначається кількість руху і енергія. Похідна за часом від інтеграла, взятого за об'ємом, що рухається, визнається за відомою формулою диференціювання за параметром t інтеграла по області, що залежить від цього параметра

$$\frac{d}{dt} \int_V B(x, y, z, t) dV = \int_V \frac{\partial B}{\partial t} dV + \int_{\partial V} v_n dS. \quad (3.3.1)$$

Вважається, що функція $B(\cdot)$ – неперервно-диференційована за параметром t , а межа області ∂V – гладка і гладко залежить від t .

Тут перший інтеграл враховує зміну функції B з часом, а другий, взятий по межі ∂V , – зміну індивідуальної області і виражає потік вектора через поверхню, що обмежує цей об'єм.

Символом $v_n = v_n(x, y, z, t)$ позначена проекція швидкості v точки (x, y, z) межі на зовнішню нормаль до межі ∂V . Доведення цієї формули можна знайти в [3] та підручниках з механіки суцільного середовища.

Зауважимо, що у випадку, коли межа області (або її частина) задана рівнянням $\Phi(x, y, z, t) = 0$, причому $\Phi(x, y, z, t) < 0$ при $(x, y, z) \in V$, то орт зовнішньої нормалі можна задати у вигляді $\frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|}$ (в припущенні, що всюди на межі області $\nabla\Phi \neq 0$). При цьому швидкість v_n задається формулою $v_n = -\frac{1}{|\nabla\Phi|} \frac{\partial\Phi}{\partial t}$ (тут ∇ – оператор набла).

Оскільки поле швидкості $v(x, y, z, t)$ відоме, то поверхневий інтеграл в (3.3.1) за формулою Остроградського–Гаусса можна звести до об'ємного. В результаті одержуємо

$$\frac{d}{dt} \int_V B(x, y, z, t) dV = \int_V \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{div} Bv \right) dV, \quad (3.3.2)$$

де $\operatorname{div} v = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$.

Маса M рідини, що знаходиться в об'ємі V , дорівнює

$$M = \int_V \rho(x, y, z, t) dV$$

і залишається постійною протягом усього часу (закон збереження маси). Тому, відповідно до (3.3.2), маємо

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v \right) dV = 0.$$

Оскільки об'єм V – довільний (змінюється з часом), а підінтегральна функція неперервна, то з рівності інтеграла нулю випливає, що й сама підінтегральна функція дорівнює нулю, тобто

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0. \quad (3.3.3)$$

Це і є рівняння нерозривності середовища в ейлеровій формі, яке ще називається *рівнянням Ліувіля*.

Іноколи $\operatorname{div} \rho v$ в (3.3.3) розписують за формулою

$$\operatorname{div} \rho v = \rho \operatorname{div} v + v \operatorname{grad} \rho.$$

Рівняння нерозривності (3.3.3) відіграє важливу роль у механіці рідин та газів. Це диференціальне рівняння закону збереження речовини.

Якщо щільність середовища не залежить від часу, тобто $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, то рівняння нерозривності (3.3.3) набуває вигляду

$$\operatorname{div} \rho v = 0,$$

що виражає закон збереження маси (а не об'єму).

Якщо рідина така, що не стискується, тобто $\rho = \text{const}$, то одержуємо стаціонарне рівняння нерозривності

$$\operatorname{div} v = 0.$$

3.3.2.2. Рівняння динаміки ідеальної рідини.

Рівняння Ейлера

Для складання рівняння руху рідини використовуємо закон зміни імпульсу механічної системи. Обчислимо імпульс рідкого об'єму, що виділений усередині рухомої рідини і складається з фіксованих частинок. Маємо

$$\vec{P} = \int_V \rho(x, y, z, t) \vec{v}(x, y, z, t) dV.$$

Надалі для простоти записів позначатимемо

$$\mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0).$$

Закон зміни імпульсу, як і для механічної системи, має вигляд

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F},$$

де \vec{F} – повний вектор усіх зовнішніх сил, прикладених до об'єму. Обчислимо ці сили. Стан руху рідини змінюється під впливом взаємодії частинок між собою і з тілами, які є зовнішніми по відношенню до даного об'єму рідини. В результаті такої взаємодії виникають сили двох типів. Ними є об'ємні (або масові) і поверхневі сили. Сили, які розподілені по об'єму і пропорційні масам частинок, називаються *масовими* (наприклад, сила ваги).

Якщо $\vec{F} = (X, Y, Z)$ – вектор масової сили, що діє на одиничну масу, то на елемент об'єму dV діє сила $\vec{F}\rho dV$, де $\rho(x, y, z, t)$ – густина рідини, а масова сила що діє на об'єм V , дорівнює

$$\int_V \vec{F}\rho dV = \left(\int_V X\rho dV, \int_V Y\rho dV, \int_V Z\rho dV \right).$$

Поверхневі сили, на відміну від масових, діють зі сторони зовнішнього по відношенню до елемента середовища і розподілені по поверхні. Нехай ΔS – елементи достатньо гладкої поверхні ∂V , що обмежує об'єм V , \vec{n} – нормаль до поверхні, що має зовнішню орієнтацію по відношенню до об'єму V . Вектор поверхневих сил $\vec{\Sigma}(r, t)$, який прикладений до одиниці площі, називається *напруженням*. У загальному випадку $\vec{\Sigma}(r, t)$ залежить від положення і орієнтації одиничної площі в просторі і від часу.

Зі сторони зовнішніх, по відношенню до об'єму V , частинок до зовнішньої сторони елемента ΔS буде прикладена поверхнева сила $\vec{\Sigma}(r, t)\Delta S$. Якщо кут між нормаллю \vec{n} до поверхні і напруженням $\vec{\Sigma}(r, t)$ гострий, то нормальна складова вектора $\vec{\Sigma}$ називається *нормальним напруженням*, якщо кут тупий, то нормальна складова називається *тиском*.

Дотична до поверхні складова вектора $\vec{\Sigma}$ називається *дотичним напруженням* або силою внутрішнього тертя (силою в'язкості).

Перейдемо до розгляду не самих сил, а щільності їх розподілу. Для об'ємних сил це буде

$$\vec{f}(r, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}(r, t)}{\rho(r, t)\Delta V} = \frac{1}{\rho(r, t)} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}(r, t)}{\Delta V}.$$

Переходячи до границі, одержуємо

$$d\vec{F} = \rho \vec{f} dV.$$

Аналогічно поверхневі сили задаються *поверхневим натягом*

$$\vec{\sigma}(r, t) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Sigma}(r, t)}{\Delta S},$$

де $\Delta \vec{\Sigma}(r, t)$ – повний вектор сил, прикладний до елемента площини ΔS . Звідси

$$d\vec{\Sigma}(r, t) = \vec{\sigma} dS.$$

На весь об'єм діє поверхнева сила $\int_{\partial V} \vec{\sigma}_{\vec{n}} dS$, тому повний вектор зовнішніх сил, прикладений до об'єму V має вигляд

$$\vec{F} = \int_V \rho(r, t) \vec{f}(r, t) dV + \int_{\partial V} \vec{\sigma}_{\vec{n}} dS.$$

Тут ∂V – поверхня, що обмежує об'єм V , $\vec{\sigma}_{\vec{n}}$ – проекція $\vec{\sigma}$ на вектор зовнішньої нормалі \vec{n} .

На початку побудуємо рівняння руху ідеальної рідини. *Ідеальною рідиною* називається рідина, в якій відсутні сили внутрішнього тертя, а отже, дотичні складові напружень дорівнюють нулю.

Це означає, що для ідеальної рідини існують тільки нормальні напруження, які при деформації рідини не допускають її розриву. Нормальні напруження завжди направлені в середину виділеного в ідеальній рідині об'єму і є силами тиску. У цьому випадку вектор $\vec{\sigma}_{\vec{n}}$ має вигляд

$$\vec{\sigma}_{\vec{n}} = -p\vec{n},$$

де $p = p(r, t)$ – скалярна величина, яка називається *гідродинамічним тиском* ідеальної рідини. Тобто у випадку ідеальної рідини вектор $\vec{\sigma}_{\vec{n}}$ направлений у протилежну сторону до вектора зовнішньої нормалі.

Основною властивістю ідеальної рідини є така умова (закон Паскаля): величина нормального тиску в потоці не залежить від напрямку площадки, до якої він прикладений, тому

$$\vec{F} = \int_V \rho(r, t) \vec{f}(r, t) dx - \int_{\partial V} p(r, t) \vec{n}(r, t) dS.$$

За допомогою формули Гауса–Остроградського поверхневий інтеграл перетворимо в об'ємний, тому

$$\int_{\partial V} p(r, t) \vec{n}(r, t) dS = \int_V \text{grad } p(r, t) dV.$$

Звідси

$$\vec{F} = \int_V [\rho(r, t) \vec{f}(r, t) - \text{grad } p(r, t)] dV.$$

Тепер уже можна записати рівняння зміни імпульсу

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \int_V [\rho(r, t) \vec{f}(r, t) - \text{grad } p(r, t)] dV. \quad (3.3.4)$$

При складанні рівнянь динаміки істотнім моментом є те, що похідна обчислюється вздовж руху.

Нагадаємо, що у змінних Ейлера параметри рідини в момент t стосуються даної точки простору $r(x, y, z)$. У змінних Лагранжа

всі параметри середовища в момент t відносяться до точки з початковим положенням $r_0(x_0, y_0, z_0)$. Зв'язок між ними задається формулами

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t).$$

Позначимо

$$I(r_0, t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix}.$$

Це якобіан перетворення однієї системи координат в іншу. Тоді об'єми пов'язані співвідношенням $dV = I(r_0, t)dW$.

Перейдемо до рівнянь зміни імпульсу в лагранжевій системі координат

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_W \rho'(r_0, t) \vec{v}'(r_0, t) I(r_0, t) dW = \\ &= \int_W \left[\frac{d}{dt} (\rho'(r_0, t) \vec{v}'(r_0, t) I(r_0, t)) + \rho'(r_0, t) \vec{v}'(r_0, t) \frac{dI(r_0, t)}{dt} \right] dW. \end{aligned}$$

Повертаючись в останньому співвідношенні до вихідних змінних, одержуємо

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \int_V \left[\frac{d}{dt} (\rho \vec{V}) + \rho \vec{V} \operatorname{div} \vec{V} \right] dV. \quad (3.3.5)$$

Порівнюючи сили в співвідношеннях (3.3.4) і (3.3.5), маємо

$$\int_V \left[\frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v}) \operatorname{div} \vec{v} \right] dV = \int_V \left[\rho(r, t) \vec{f}(r, t) - \operatorname{grad} p(r, t) \right] dV.$$

Згідно з довільністю об'єму V , інтеграли рівні тоді тільки тоді, коли рівні підінтегральні вирази. Тому одержуємо систему рівнянь

$$\frac{d}{dt} (\rho \vec{v}) + (\rho \vec{v}) \operatorname{div} \vec{v} = -\operatorname{grad} p(r, t) + \rho(r, t) \vec{f}(r, t),$$

або

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} \right) = -\operatorname{grad} p(r, t) + \rho(r, t) \vec{f}(r, t).$$

Оскільки вираз у дужках дорівнює нулю внаслідок рівняння нерозривності, то остаточно одержуємо

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p(r, t) + \vec{f}(r, t). \quad (3.3.6)$$

Це і є рівняння руху ідеальної рідини (рівняння Ейлера).

Ліворуч стоїть повна похідна вздовж руху, яка обчислюється за формулою $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v}$. Тому (3.3.6) набуває вигляду

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p(r, t) + \vec{f}(r, t), \quad (3.3.7)$$

або, розписуючи по координатах, одержуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + f_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + f_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + f_z. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Додавши рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0, \quad (3.3.9)$$

одержимо систему чотирьох рівнянь з п'ятьма невідомими. А саме трьох складових вектора швидкості $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$, функції щільності $\rho(x, y, z, t)$ і тиску $p(x, y, z, t)$. Векторне поле $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ об'ємних сил вважається заданим. Часто припускають, що на рідину не діють ніякі зовнішні сили. Зокрема, якщо сила потенціальна (наприклад сила ваги), то її питому потенціальну енергію можна просто приєднати до тиску.

Щоб замкнути систему рівнянь (3.3.8), (3.3.9), необхідно додати ще одне рівняння, що пов'язує щільність і тиск, тобто рівняння термодинамічного стану рідини. Воно має вигляд $\rho = \rho(p)$. Така залежність, як правило, відома, наприклад встановлюється експериментально.

Рідини, в яких щільність залежить тільки від тиску, називаються *баротропними*. Середовище, в якому щільність залежить не тільки від тиску, називається *бароклінным*. Для бароклічних середовищ записують ще диференціальне рівняння закону збереження енергії.

3.3.2.3. Рівняння руху в'язкої рідини.

Рівняння Нав'є–Стокса

При русі в'язкої рідини поряд з нормальною складовою напруження (тиском) виникає дотична складова, що називається *силою внутрішнього тертя (силою в'язкості)*. Проявляє вона себе у вигляді опору рідини процесу деформації.

Рух в'язкої нестисливої рідини описується нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних Нав'є–Стокса

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}, \quad (3.3.10)$$

де $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості рідини у точці (x, y, z) в момент часу t ; \vec{f} – векторне поле масових сил; $p(x, y, z, t)$ – тиск; $\rho(x, y, z)$ – щільність рідини; ν – параметр кінематичної в'язкості; ∇, Δ – символи операторів набла і Лапласа.

При $\nu = 0$ рівняння Нав'є–Стокса (3.3.10) перетворюється в рівняння Ейлера (3.3.7) для ідеальної рідини.

Об'єднуючи (3.3.10) з рівнянням нерозривності для нестискуваної рідини $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, одержуємо замкнуту систему для знаходження чотирьох невідомих функцій $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, $v_z(x, y, z, t)$, $p(x, y, z, t)$. Одночасно щільність ρ , за припущенням, є заданою функцією.

У декартовій системі координат ці рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= f_x + \nu \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= f_y + \nu \Delta v_y, \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = f_z + \nu \Delta v_z,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Як правило, до цих рівнянь додають початкові та крайові умови. Досі розв'язки даних рівнянь знайдені лише в окремих випадках. Існування та єдиність розв'язків рівнянь Нав'є–Стокса доведена лише в двовимірному випадку. В тривимірному просторі – це одна з найважчих проблем математичної гідродинаміки, яка розв'язана лише для малих значень початкових значень \vec{v}_0 . Недавно приватний інститут у США оголосив премію в 1 млн. доларів за її розв'язання.

Нарешті зауважимо, що рівняння Нав'є–Стокса можна ефективно досліджувати, лише поєднуючи всі сторони математичного моделювання – математичний аналіз моделей, числові методи їх розв'язування та складання програм для ЕОМ. Ці розрахунки вимагають великих затрат машинного часу навіть на сучасних суперкомп'ютерах.

3.3.3. Початкові й граничні умови

При математичному моделюванні фізичних процесів потрібно поставити математичну задачу, тобто сформулювати умови, які однозначно визначатимуть процес.

Системи рівнянь, що описують процеси гідродинаміки, є системами диференціальних рівнянь у частинних похідних і мають, взагалі кажучи, нескінченно багато розв'язків. Для того, щоб виділити єдиний розв'язок системи, що описує деякий фізичний процес, необхідно задати додаткові умови, які складаються з початкових і граничних умов.

Для початкових умов в ейлерових змінних задають розподіл швидкості в початковий момент часу $t = t_0$:

$$v_x|_{t=t_0} = \varphi_1(x, y, z), \quad v_y|_{t=t_0} = \varphi_2(x, y, z), \quad v_z|_{t=t_0} = \varphi_3(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset R^n, \quad n = 1, 2, 3.$$

При цьому будемо вважати, що рідина заповнює деяку область $D \in R^n$, $n = 1, 2, 3$, межа ∂D якої нерухома, з непроникаючими

для рідини твердими стінками, так, що виконується крайова умова

$$\vec{v}|_{\partial D} = 0.$$

Якщо рідина має нерухому тверду межу ∂D , рівняння поверхні якої $G(x, y, z) = 0$, то гранична умова може мати вигляд $(\vec{v}, \vec{n}) = 0$, $(x, y, z) \in \partial D$, де $\vec{n} = \text{grad } G$, або те саме, що

$$v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad (x, y, z) \in \partial D.$$

У випадку, коли поверхня області D вільна, рівняння поверхні залежить від часу: $G(x, y, z, t) = 0$. При цьому частинки рідини, що знаходяться на поверхні ∂D , рухаються разом з нею, не перетинаючи її. Тобто, якщо частинка рідини в момент часу t знаходиться на поверхні в точці (x, y, z) , то в наступний момент часу $t + \Delta t$ вона займе положення $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, але все одно буде знаходитися на поверхні ∂D , а значить правильним є співвідношення

$$G(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, t + \Delta t) = 0.$$

Використовуючи розклад у ряд Тейлора і обмежуючись членами першого порядку, одержуємо

$$G(x, y, z, t) + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial G}{\partial z} \Delta z = 0.$$

Оскільки $G(x, y, z, t) = 0$, то, виконуючи ділення на Δt і перейшовши до границі при $\Delta t \rightarrow 0$, дістанемо граничну умову на вільній поверхні

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} v_x + \frac{\partial G}{\partial y} v_y + \frac{\partial G}{\partial z} v_z = 0, \quad (x, y, z) \in \partial D.$$

3.3.4. Приклади застосувань рівнянь гідродинаміки

Приклад 3.3.1. Розв'яжемо простішу задачу гідростатики про розподіл тиску в нерухомій нестискуваній рідині.

Направимо вісь Oz декартової системи координат вертикально вгору до поверхні Землі, тоді вектор масових сил $\vec{f} = (0, 0, g)$, де g – прискорення вільного падіння.

Покладемо в рівнянні Нав'є–Стокса (3.3.10) швидкість $\vec{v} = 0$ (оскільки рідина нерухома), тоді одержимо

$$\nabla p = \rho \vec{f},$$

або в координатній формі

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

де $p = p(x, y, z)$ – тиск у точці (x, y, z) ,

Інтегруючи ці співвідношення, одержуємо незалежність тиску від координат x, y і його лінійну залежність від глибини занурення за формулою $p = p_0 - \rho g z$. ▲

Приклад 3.3.2. Задача Стокса.

Нехай нестискувана рідина займає простір $x > 0$, а площина yOz є твердою межею, що здійснює гармонічні коливання паралельно осі Oy з частотою ω (рис. 3.6). Побудувати та дослідити модель руху рідини.

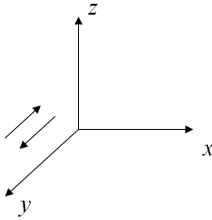


Рис. 3.6. Схема до прикладу 3.3.2

Оскільки рідина рухатиметься тільки вздовж осі Oy , то

$$v_x = v_z = 0, \quad v_y = u(x, t), \quad p = \text{const.}$$

Підставляючи ці дані в (3.3.11), одержимо однорідне параболічне лінійне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (3.3.12)$$

де ν – параметр кінематичної в'язкості.

Рівняння (3.3.2) має роз'язок типу біжучої хвилі

$$u = u_0 \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right) \cos\left(\frac{x}{\sigma} - \omega t\right),$$

який задовольняє умови

$$u(0, t) = u_0 \cos \omega t, \quad u(+\infty, t) = 0,$$

де u_0 – задана додатна постійна (амплітуда коливань межі); $\sigma = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$. ▲

Приклад 3.3.3 Маємо дві нескінченні паралельні пластини, відстань між якими дорівнює $2h = \text{const}$. Протікання рідини здійснюється тільки в напрямку осі Ox . Течія ізотермічна, ламінарна і стаціонарна. Тертя рідини об бокові стінки не враховуємо, вважаючи, що ширина каналу $\beta \gg h$. Схема протікання рідини подана на рис. 3.7.

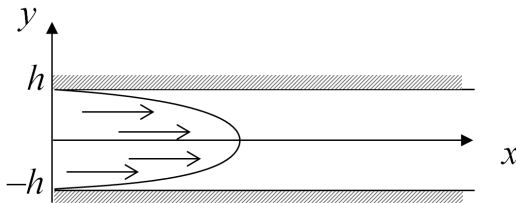


Рис. 3.7. Схема течії

Як впливає з рівняння Нав'є–Стокса (3.3.10), рівняння руху в цьому випадку має вигляд

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (3.3.13)$$

де $p = p(x)$ – тиск; $v_x = v_x(y)$ – швидкість протікання рідини вздовж осі Ox .

Граничні умови задачі – це умови прилипання рідини до поверхні каналу ($v_x = 0$ при $y = \pm h$) та умови симетрії ($\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0$ при $y = 0$).

Інтегруючи рівняння руху (3.3.13), одержуємо

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + C_1.$$

З умови симетрії знаходимо $C_1 = 0$. Повторне інтегрування дає

$$v_x = \frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + C_2.$$

З умови прилипання впливає, що $C_2 = -\frac{h^2}{2\mu} \frac{dp}{dx}$.

Отже, маємо параболічний профіль для швидкості

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - h^2),$$

де $\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{l} < 0$ – градієнт тиску. Тут l – довжина каналу, Δp – надлишковий тиск на вході в канал. ▲

Приклад 3.3.4. Розглянемо стаціонарне протікання в'язкої однорідної рідини в трубі з круговим перетином, яке викликано поздовжнім градієнтом тиску (у поперечному перетині тиск однорідний), що не залежить від часу, тобто при умовах, що

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} \neq 0.$$

При цьому вважаємо, що вісь Oz направлена вздовж труби за течією рідини (рис. 3.8). Оскільки протікання рідини відбувається тільки вздовж осі Oz (у поперечному перетині протікання відсутнє), то $v_x = 0, v_y = 0, v_z = v_z(x, y)$. При цих умовах для визначення розподілу швидкості в трубі з системи рівнянь Нав'є–Стокса одержуємо таку систему рівнянь:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3.3.14)$$

з граничними умовами

$$\vec{v} = 0, \quad (x, y, z) \in S_T, \quad |\vec{v}| < \infty, \quad (x, y, z) \in D,$$

де S_T – поверхня труби, а D – внутрішня область труби. Невідомими в системі (3.3.14) є функції $v_z = v_z(x, y)$, $p = p(z)$.

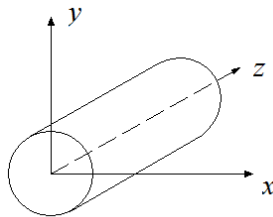


Рис. 3.8. Протікання рідини по трубі

У випадку, коли рідина протікає в трубі з круговим перетином радіуса a , в системі (3.3.14) перейдемо до полярної системи координат (r, φ) . Одержимо крайову задачу Діріхле в крузі для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$v_z|_{r=a} = 0, \quad |v_z| < \infty. \quad (3.3.15)$$

Оскільки, $v_z = v_z(r, \varphi)$, то виконання рівняння з задачі (3.3.15) можливо, якщо $\frac{dp}{dz} = const$.

Розв'язок задачі (3.3.15) шукаємо у вигляді

$$v_z = w(r, \varphi) + \psi.$$

Якщо $\psi = \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}$, то $w(r, \varphi)$ задовольняє крайову задачу Діріхле для рівняння Лапласа

$$\Delta w = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$w|_{r=a} = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}, \quad |w| < \infty.$$

Розв'язок крайової задачі Діріхле для рівняння Лапласа задається формулою

$$w(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad A_n B_n = const.$$

Враховуючи граничну умову при $r = a$, знаходимо

$$A_0 = -\frac{a^2}{2\mu} \frac{dp}{dz}, \quad A_n = 0, \quad B_n = 0, \quad n \geq 1.$$

Тому

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2),$$

або

$$v_z(x, y) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (a^2 - (x^2 + y^2)).$$

Для знаходження величини $\frac{dp}{dz}$ вимірюють тиски p_1, p_2 у двох різних точках, що знаходяться на віддалі l вздовж осі Oz , і користуються формулою

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p_1 - p_2}{l}. \blacktriangle$$

3.4. Математичні моделі електромагнітного поля. Рівняння Максвелла

Електричні і магнітні поля існували ще до Максвелла. Вони породжувались зарядами і струмом, які вважались першопричиною виникнення електромагнітних явищ.

Рівняння, які сформульовані Максвеллом¹⁵, виникли на основі важливих експериментальних відкриттів, які були зроблені на початку XIX ст. Зокрема, в 1831 р. Фарадей¹⁶ зробив відкриття про те, що, якщо біля провідника переміщати магніт, то в провіднику породжується електричний струм. Це явище було названо *електромагнітною індукцією*. Фарадей увів поняття поля сил – деякого середовища, що знаходиться між зарядами і токами, яке характеризується розподілом певної фізичної величини в просторі. Це поняття Максвелл замінив на напруженість поля. Воно стало ключовим у його теорії.

Максвелл написав рівняння, яким підпорядковується електродинамічне середовище, що визначається взаємодією зарядів і струмів, навіть, що дуже важливо, при їх відсутності. Тобто в теорії Фарадея–Максвелла електромагнітні явища можуть протікати й без зарядів і струмів.

Рівняння Максвелла описують електромагнітні поля, які, змінюючись, взаємодіють між собою. Вони можуть існувати і розповсюджуватись самі по собі в просторі зі скінченною швидкістю.

Класична електродинаміка, що базується на рівняннях Максвелла, лежить в основі численних застосувань електро-, радіотехніки, оптики, квантової механіки, астрофізики, космології тощо. Цікаво зауважити, що досягнення фізики, які базуються на рів-

¹⁵ Джейм Клерк Максвелл (1831 – 1879) – британський фізик, математик

¹⁶ Майкл Фарадей (1791 – 1867) – англійський фізик, хімік.

няннях електромагнетизму, окупили всі затрати людства на фундаментальні науки на 100 років уперед [18].

Перейдемо до запису рівнянь Максвелла. Станом будь-якої динамічної системи електродинаміки є електромагнітні поля. Ці поля характеризуються векторними величинами: напруженістю електричного поля \vec{E} , напруженістю магнітного поля \vec{H} , електричною індукцією \vec{D} та магнітною індукцією \vec{B} .

Рівняння Максвелла являють собою у векторній формі систему з чотирьох рівнянь, яка в покоординатній формі зводиться до восьми (два векторних рівняння, що містять по три компоненти, плюс два скалярних) лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними першого порядку. Ці рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

де \vec{j}, ρ – об’ємна густина електричного струму й об’ємна густина електричних зарядів; $c = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}}$ – електродинамічна стала.

Тут $\operatorname{rot} \vec{E}$ – диференціальна операція над вектором $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$, що визначається визначником вигляду

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\ &= i \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Рівняння (3.4.1) мають фізичну інтерпретацію. Перше означає, що електричний заряд є джерелом електричної індукції, друге – не існує магнітних зарядів, третє – зміна магнітної індукції породжує вихрове електричне поле, четверте – електричний струм і зміна електричної індукції породжують вихрове магнітне поле.

У загальному випадку це досить складна система рівнянь, оскільки вона описує всі явища електростатики, магнітостатики, електродинаміки й магнітного випромінювання хвиль.

Оскільки існують так звані матеріальні алгебраїчні рівняння Максвелла, що зв'язують характеристики \vec{D} і \vec{E} , а також \vec{B} і \vec{H} , то систему (3.4.1) часто записують у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= c \operatorname{rot} \vec{H} - 4\pi j, & \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho, \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \vec{E}, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

Система (3.4.2) перевизначена. Вона містить вісім рівнянь для шести компонент, тобто двох векторних величин \vec{E} і \vec{H} . Але, як відомо, два скалярних рівняння можна взяти за початкові значення для величин \vec{E} і \vec{H} .

У випадку розповсюдження електромагнітних хвиль у пустоті, тобто при відсутності зарядів і струму ($\rho, j = 0$), рівняння Максвелла (3.4.2) спрощуються і набувають вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= c \operatorname{rot} \vec{H}, & \operatorname{div} \vec{E} &= 0, \\ \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= -c \operatorname{rot} \vec{E}, & \operatorname{div} \vec{H} &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

З цих рівнянь можна одержати хвильове рівняння, яке дає існування гармонічної біжучої електромагнітної хвилі. Її швидкість, як виясняється, близька до швидкості світла, тому можна зробити висновок про те, що світло має електромагнітну природу.

Покажемо, що з (3.4.3) випливають хвильові рівняння для величин \vec{E} і \vec{H} . Дійсно, продиференціюємо рівняння для \vec{E} за t , а до рівняння для величини \vec{H} застосуємо операцію rot . Тоді одержимо

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E}.$$

Застосовуючи відому формулу векторного аналізу $\operatorname{rot} \operatorname{rot} = \nabla \operatorname{div} - \Delta$, дістанемо

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -c^2 (\nabla \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}). \quad (3.4.4)$$

Оскільки $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, то приходимо до хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E}.$$

Аналогічно можна виписати рівняння і для вектора напруженості магнітного поля \vec{H} . Тепер можна знаходити розв'язки хвильових рівнянь, які задовольняють систему (3.4.3).

Розв'яжемо більш просту задачу. Припустимо, що \vec{E} і \vec{H} є тільки функціями двох змінних: часу t і координати x . Наша задача з'ясувати, чи рівняння Максвелла (3.4.3) допускають розв'язки у вигляді плоских біжучих хвиль уздовж осі Ox .

Нехай $\vec{E} = (E_x(x), E_y(x), E_z(x))$, $\vec{H} = (H_x(x), H_y(x), H_z(x))$. Тоді з двох останніх рівнянь системи (3.4.3) маємо

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0.$$

А це означає, що компоненти E_x і H_x векторів \vec{E} і \vec{H} не залежать від x . Нехай вони приймають нульові значення $E_x = 0$, $E_y = 0$.

Після цього розпишемо два перших рівняння системи (3.4.3) в компонентній формі:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -c \frac{\partial H_z}{\partial x}, & \frac{\partial E_z}{\partial t} &= c \frac{\partial H_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= c \frac{\partial E_z}{\partial x}, & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= -c \frac{\partial E_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ці рівняння розділяються на дві незалежні пари. Випишемо одну з них

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -c \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -c \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (3.4.5)$$

Диференціюючи перше рівняння за t , а друге – за x і порівнюючи їх, приходимо до хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2},$$

яке, як відомо [8, 95], має розв'язок типу біжучої гармонічної хвилі

$$E_y = A_1 \sin \left(\omega t - \frac{\omega x}{c} \right). \quad (3.4.6)$$

Аналогічний розв'язок можна одержати і для величини H_z

$$H_z = A_2 \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\right).$$

Одержаний частинний розв'язок задовольняє вихідній системі (3.4.3) і являє собою електромагнітну хвилю, що складається з двох перпендикулярних гармонічних плоских хвиль електричного і магнітного полів, що розповсюджуються вздовж осі Ox зі швидкістю c (рис. 3.5).

Як видно, зміна з часом електричного поля супроводжується породженням магнітного поля, а зміна з часом магнітного поля супроводжується породженням електричного поля, тобто електромагнітне поле – це два взаємозв'язаних поля.

Електромагнітних хвиль є багато, серед них – світлові, радіохвилі, ультрафіолетові, інфрачервоні, рентгенівські та ін. Всі вони мають електромагнітну природу і відрізняються лише частотою і довжиною хвилі при однакових швидкостях розповсюдження.

Отже, електромагнітні поля наявні в просторі, вони взаємодіють, розповсюджуються, хоча рухомих зарядів уже не існує, тобто електромагнітне поле є реальністю, існує самостійно і проявляє себе як матеріальний об'єкт.

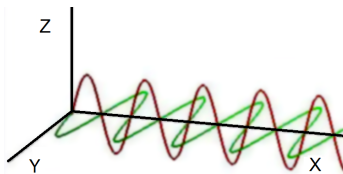


Рис. 3.5. Гармонічна електромагнітна хвиля

3.5. Задачі для самостійної роботи

3.1. Нехай маємо параболічний маятник, тобто траєкторія руху маятника – це парабола $y = ax^2$. Побудувати математичну модель руху маятника на основі рівняння Лагранжа.

3.2. Показати, що для рівняння Лагранжа будь-яка заміна змінних типу $q = f(y)$ зберігає його вигляд, тобто Лагранжева форма запису володіє властивістю інваріантності по відношенню до заміни змінних, чого немає в рівнянні Ньютона.

Вказівка. Доведення провести для рівняння Ньютона вигляду $m\ddot{q} + kq = 0$.

3.3. Застосовуючи узагальнене рівняння Лагранжа (3.1.4), побудувати математичну модель RLC-контур (електричний контур з опором, індуктивністю і ємністю).

Вказівка. Враховувати, що робота сил опору при перенесенні заряду δq дорівнює $-R\dot{q}\delta q$.

3.4. Побудувати математичну модель руху подвійного маятника. Довжина стержня першого маятника – l_1 , другого – l_2 .

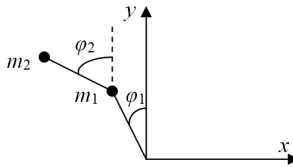


Рис. 3.9. Схема подвійного маятника

Вказівка. Записати координати точок (x_1, y_1) , (x_2, y_2) у полярній системі координат (через кути φ_1, φ_2). Знайти кінетичну енергію $T(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2$ та потенціальну енергію $\Pi(\varphi_1, \varphi_2) = m_1gy_1 + m_2g(y_1 + y_2)$, де $v_i^2 = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2$, $i = 1, 2$, g – прискорення вільного падіння. Записати рівняння Лагранжа.

3.5. Нехай маємо плоский маятник з точкою опори, яка рухається по осі абсцис (рис. 3.10).

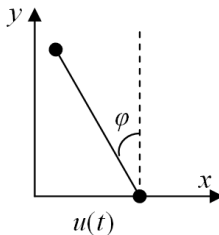


Рис. 3.10. Маятник з рухомою точкою опори

Горизонтальне зміщення точки опори відбувається за законом $x = u(t)$, довжина маятника – l , маса – m . Побудувати математичну модель руху такого маятника. Вказати, як можна знайти

управління $u(t)$ так, щоб верхнє положення маятника було стійким.

Вказівка. Записати вирази для кінетичної і потенціальної енергій, побудувати функцію Лагранжа і скласти рівняння Лагранжа. Управління $u(t)$ вибрати так, щоб відповідне диференціальне рівняння мало характеристичні корені з від'ємними дійсними частинами.

3.6. Побудувати математичну модель електромеханічної системи, яка розглядалася в прикладі 3.1.2, якщо в електричний контур під'єднати опір, а в механічну систему додати дисипацію (тертя).

3.7. Побудувати математичну модель розповсюдження тепла вздовж ребра, що має однаковий прямокутний переріз у будь-якій точці осі Ox . У середині ребра тепло передається за рахунок теплообміну. На боковій поверхні здійснюється теплообмін з зовнішнім середовищем за законом Ньютона. Задача полягає у визначенні температури вздовж ребра. Вихідні дані: розміри ребра $a \times b$ – розміри поперечного перерізу, l – довжина ребра, T_0 – температура в основі ребра, тобто при $x = 0$, T_c – температура оточуючого середовища, точна температура $T(x)$, правий кінець ребра ізольований.

Вказівка. Використати рівняння теплового балансу $dQ_n + dQ_x = 0$, де dQ_x – потік тепла вздовж ребра (визначається законом Фур'є), dQ_n – потік тепла від бокової поверхні (визначається законом Ньютона).

3.8. Нехай стінка товщиною h розмежує два середовища, що мають постійні температури T_1 і T_2 . Висоту і ширину стінки вважаємо достатньо великими, порівняно з h , так що розподіл температури в стінці можна вважати одновимірним, тобто розподіл тепла описується функцією $T(z, t)$ (рис. 3.11).

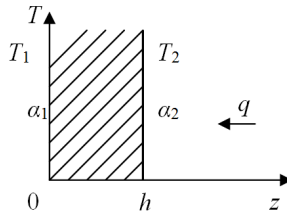


Рис. 3.11. Розподіл тепла в стінці

Інтенсивність теплообміну на поверхнях стінки визначається коефіцієнтами тепловіддачі α_1, α_2 відповідно. Крім цього, поверхня стінки при $z = h$ одержує тепловий потік щільністю q від зовнішніх джерел. Побудувати математичну модель розподілу температури $T(z, t)$ вздовж осі Oz . Виконати дослідження моделі.

Вказівка. Вважати, що об'ємний коефіцієнт теплоємності c і коефіцієнт теплопровідності λ постійні.

3.9. Задача Релея. Нехай при $t = 0$ нестискувана рідина знаходиться в стані рівноваги, а площина yOz миттєво починає рух в напрямку осі Oy з постійною швидкістю U . Побудувати та дослідити модель руху рідини.

Вказівка. Записати одновимірне рівняння Нав'є–Стокса для величин $v_x = v_z = 0, v_y = u(x, t)$. Накласти початкові умови: $u(x, t)|_{t=0} = 0, x > 0$ та граничні умови: $u(0, t) = U, u(+\infty, t) = 0, t > 0$. Рівняння Нав'є–Стокса у цьому випадку допускає побудову автомодельного розв'язку.

3.10. Записати систему рівнянь Нав'є–Стокса (3.3.10) у циліндричних координатах r, φ, z при $\vec{f} = 0$.

3.11. Дві незмішуючі рідини різної в'язкості рухаються під дією надлишкового тиску в плоскому каналі, що обмежений паралельними пластинами $y = \pm h$ вздовж осі Ox . Початок декартової системи координат та вісь Ox покладемо на площині стику двох рідин. Течія ізотермічна, ламінарна і стаціонарна. Знайти профілі швидкостей.

3.12. Узагальнити математичну модель малих коливань струни на випадок мембрани. Мембрана – це частина двовимірної поверхні, яка виконана з упругого матеріалу і в стані спокою займає частину площини (x, y) (область D).

Вказівка. Увести в розгляд функцію $u(x, y, t)$ – деформацію мембрани в напрямку нормалі до площини xOy . Розглядати тільки малі деформації. Врахувати, що потенційна енергія пропорційна зміні площі $dx dy$ елемента мембрани до деформації. Кінетична енергія аналогічна тій, яку одержали для струни. На основі рівняння Лагранжа одержати двовимірне хвильове рівняння для малих коливань мембрани. На його основі аналогічно записати тривимірне хвильове рівняння, яке являє собою одне з основних рівнянь математичної фізики.

3.13. На основі рівнянь Нав'є–Стокса (3.3.11) побудувати математичну модель протікання в'язкої нестискуваної рідини, що викликано поздовжнім градієнтом тиску в прямокутному каналі, поперечний перетин якого є прямокутником, що обмежений прямими $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Вказівка. Розв'язок задачі Діріхле для рівняння Пуассона в прямокутнику $[-a, a] \times [-b, b]$ шукати методом ортогональних проєкцій Бубнова–Галеркіна. В першому наближенні за базову функцію взяти функцію $\varphi(x, y) = c(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)$.

3.14. Одержати рівняння руху шару в'язкої рідини між двома паралельними площинами, якщо одна з них у момент часу $t = 0$ починає рухатись паралельно іншій із заданою швидкістю, що має постійний напрямок. Дією сили ваги знехтувати.

Вказівка. Направити вісь Ox перпендикулярно до площин, а початок системи координат розмістити на нерухомій площині. Використати рівняння Нав'є–Стокса (3.3.11).

3.15. Вивести рівняння електростатики. Показати, що потенціал електричного поля задовольняє рівняння Пуассона з правою частиною, яка пропорційна об'ємній щільності зарядів.

Вказівка. Стаціонарні рівняння Максвелла для електростатичного поля в непровідному середовищі мають вигляд

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E},$$

де ϵ – діелектрична постійна, $\rho = \rho(M)$ – об'ємна густина зарядів в точці M . Потенціал поля $U(M)$ визначається співвідношенням $\vec{E} = -\operatorname{grad} U$.

3.16. Вивести рівняння для процесу розповсюдження плоских

електромагнітних хвиль в провідному полі (поле називається провідним, якщо в ньому є струми провідності).

Вказівка. В цьому випадку рівняння Максвелла мають вигляд

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E},$$

де μ – магнітна проникність, σ – провідність середовища. Від обох частин першого рівняння взяти операцію rot , а друге рівняння продиференціювати за параметром t .

Запитання та завдання до самоперевірки

1. Що таке функціонал дії?
2. Яку роль відіграють рівняння Лагранжа в математичному моделюванні?
3. Назвіть основні властивості функції Лагранжа.
4. Який вигляд мають рівняння Лагранжа для неконсервативних систем?
5. Наведіть приклади застосування рівнянь Лагранжа.
6. Побудуйте математичну модель малих коливань струни.
7. Запишіть нестационарне рівняння теплопровідності.
8. Які два підходи використовуються для опису рідинних середовищ?
9. Виведіть рівняння нерозривності суцільного середовища.
10. Побудуйте рівняння руху ідеальної рідини.
11. Який вигляд має рівняння Нав'є–Стокса?
12. Наведіть приклади частинних випадків рівнянь Нав'є–Стокса.
13. Які процеси описують рівняння Максвелла?
14. Запишіть рівняння Максвелла.
15. Зробіть аналіз моделі Максвелла для випадку плоских електромагнітних хвиль.

Література: [2, 5, 7, 8, 9, 11, 13, 28, 31, 40, 70, 81, 82, 87, 95, 100, 101, 106, 107].

Розділ 4. Методи дослідження математичних моделей

4.1. Загальна характеристика методів

Методи аналізу математичних моделей можна умовно поділити на *якісні, аналітичні та числові*.

Якісні методи дозволяють виявляти властивості розв'язків рівнянь, що складають математичну модель без їх побудови шляхом аналізу параметрів моделі. Застосування цих методів найменше піддається алгоритмізації. Якісні методи аналізу диференціальних рівнянь наведені в додатку. Методи якісного аналізу математичних моделей мають обмежену область застосування – це або лінійні моделі, або прості нелінійні моделі, що є окремими фрагментами складних моделей. У цьому посібнику наведено багато прикладів якісного дослідження математичних моделей з різних предметних областей. Але в багатьох випадках для аналізу реальних процесів потрібно мати розв'язки рівнянь, для їх знаходження використовують аналітичні та числові методи.

Аналітичні методи дають розв'язок математичної моделі у вигляді формули, розкладу в ряд або в інтегральній формі. Перевага аналітичних методів полягає в тому, що одержана аналітична формула, навіть для спрощеної моделі, задовільно характеризує суть явища. Аналітичний розв'язок дозволяє зрозуміти і наочно представити основні закономірності протікання явища чи процесу, тобто володіє високою інформативністю. Одержані аналітичні розв'язки можуть бути використані і як тестові моделі. Аналітичні методи можуть бути *точними, наближеними або асимптотичними*.

Точні аналітичні методи дозволяють одержати розв'язок вихідної задачі в аналітичному вигляді. Наприклад, точні формули можуть задавати сукупність усіх розв'язків заданого диференціального рівняння (тоді маємо загальний розв'язок) або представляти частинні розв'язки, що задовольняють певні умови (початкові, граничні, умови стаціонарності, періодичності тощо). Маючи розв'язки в аналітичному вигляді, можна вивчати їх властивості.

Точні методи застосовні для вузького кола рівнянь, в основному для лінійних. Для розв'язування сучасних задач моделювання такі методи рідко застосовуються – це зумовлено складністю і нелінійністю моделей. Однак вони можуть бути використані, наприклад, для розв'язування тестових задач при розробці інших методів.

Математичні моделі можуть бути настільки складними, що для того, щоб зрозуміти процес та його механізм, доводиться будувати спрощені моделі, відкидаючи малі доданки, але не всяку малу величину можна відкинути, не змінивши змісту задачі. Тому математик, що займається математичним моделюванням, повинен вивчити залежності розв'язків від параметрів задачі і, перш за все, асимптотичну поведінку розв'язків при малих значеннях параметрів.

Аналітичні розв'язки математичних моделей можна знайти, якщо застосувати різні наближення. Коректність розв'язку залежатиме від вибраного наближення. Наближені методи опираються на неформальне розуміння суті процесу. Вони зручні для одержання грубих оцінок і використовуються на початковому етапі дослідження. Як приклад можна навести розв'язування нелінійної задачі за лінеаризованим наближенням.

В багатьох випадках спрощення моделі можна досягти за рахунок виділення малого параметра. Тоді розв'язок подається у вигляді розкладу в ряд за малим параметром. Подібні методи називаються асимптотичними або методами збурення. Такі методи дають наближене представлення розв'язку (асимптотичний розв'язок) і широко застосовуються на практиці. З розвитком обчислювальної техніки роль асимптотичних методів тільки посилюється.

Однак у більшості випадків не існує універсальних способів побудови аналітичного розв'язку математичної задачі. Єдиним універсальним способом дослідження моделей є застосування числових методів для знаходження наближеного розв'язку поставленої задачі за допомогою засобів сучасної обчислювальної техніки та програмного забезпечення. Наприклад, моделі руху, що отримуються на основі законів динаміки, є системою рівнянь, які описують рух у неявній формі. Щоб одержати закон руху, ці рів-

няння потрібно ще розв'язати, що в загальному випадку досить складно. Тому виникає необхідність розробки числових алгоритмів. Зокрема, для задачі n тіл теоретично доведені теореми, що стосуються стійкості механічних систем, зокрема планетних орбіт. Але тільки числові методи дозволяють для кожної фіксованої системи об'єктів з заданими початковими умовами розраховувати траєкторії руху тіл з наперед заданою точністю.

Але варто мати на увазі, що теоретично обґрунтовані числові методи при їх застосуванні для розв'язування прикладних задач на ЕОМ можуть давати розв'язки, що не мають фізичного змісту і причин для цього є багато, зокрема:

- математичні моделі містять похибки вихідних даних;
- неоднозначна машинна реалізація математичних операцій;
- особливості реалізації комп'ютерної арифметики (арифметичні операції на комп'ютері відрізняють від математичних): закони асоціативності та дистрибутивності не виконуються на жодному комп'ютері;
- феномен "машинного нуля", який є на кожному сучасному комп'ютері;
- накопичення похибок обчислень;
- особливість архітектури й структури комп'ютерів та ін.

Отже, для дослідження складних математичних моделей потрібна їх комп'ютерна реалізація на основі числових методів. Тому сучасне математичне моделювання завжди передбачає застосування числових методів аналізу та комп'ютерних обчислювальних експериментів. При цьому знання аналітичних методів з розвитком ЕОМ і обчислювальної математики ніяк не зменшується.

Для проведення наближених обчислень можна використовувати ймовірнісний підхід, зокрема, методи статистичного моделювання, які отримали назву методи Монте-Карло. Ймовірнісними методами можна розв'язувати трудомісткі обчислювальні задачі, наприклад, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними, знаходити екстремум функції багатьох змінних, обчислювати багатомірні інтеграли, розпізнавати образи та багато інших. Цей стохастичний метод інколи є єдино можливим, наприклад, для знаходження багатократних інтегралів з великою

кратністю. Подібні інтеграли жодною детермінованою квадратурною формулою практично не можна обчислити, оскільки з ростом розмірності інтегралу різко зростає кількість арифметичних операцій при використанні детермінованих методів.

Метод Монте-Карло знаходить широке застосування ще й тому, що він досить простий і зручний для програмування. Спочатку цей метод використовувався головним чином для розв'язування задач молекулярної і нейтронної фізики, де традиційні числові методи були мало придатними. Згодом його стали застосовувати в статистичній квантовій фізиці, математичній економіці, геофізиці, теорії ігор, теорії масового обслуговування, математичній екології, теорії фільтрації, газовій та гідродинаміці, тощо.

Числове статистичне моделювання базується на моделюванні випадкових величин на комп'ютері на основі датчиків псевдовипадкових чисел. Псевдовипадкові числа генеруються на ЕОМ за допомогою відповідних алгоритмів і програм. Ці алгоритми і програми використовують спеціальні рекурентні співвідношення і враховують особливості виконання арифметичних операцій на ЕОМ.

За допомогою множини реалізації і випробувань на основі ймовірнісних законів обчислюються характеристики розподілу випадкових величин. Ці характеристики і є параметрами досліджуваного реального явища.

4.2. Методи асимптотичного аналізу

4.2.1. Основні поняття

Для адекватності моделі необхідно максимально враховувати всі можливі особливості описуваних явищ. При цьому модель робиться настільки складною, що точні аналітичні методи вже не можуть бути застосованими. Така модель недоступна для математичного аналізу навіть з використанням сучасних обчислювальних засобів. Кожний машинний експеримент з такою моделлю вимагає великих затрат машинного часу, а проведення багатьох експериментів (необхідна умова всякого аналізу) буває неможливим. Часто прямиий машинний розрахунок беззмістовний.

Тому виникає необхідність спрощення моделей, заміни однієї моделі другою більш доступною для аналізу, тобто побудови моделі моделей. І в цьому контексті особливу роль відіграють асимптотичні методи. Ці методи часто є вирішальними для успішного дослідження математичних моделей, вони стали невід'ємною частиною математичного моделювання.

В дещо спрощеному вигляді асимптотичне дослідження полягає у відшуванні більш простої формули для обчислення складного об'єкта. Наприклад, знайшовши асимптоти гіперболи, для знаходження віддалених точок гіперболи можна обчислювати значення простішої лінійної функції.

Широке розповсюдження математичного моделювання, розвиток методів системного аналізу демонструють можливості асимптотичних методів при дослідженні моделей. Уміле використання асимптотичних методів при розв'язанні складних задач може суттєво знизити затрати машинного часу. Асимптотичні методи дозволяють виписувати в аналітичній формі наближені розв'язки достатньо складних прикладних задач.

Наведемо приклад задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Розглянемо особливості її розв'язування, оскільки задача Коші є центральним елементом математичного моделювання.

У випадку, коли розв'язок є повільно змінною функцією, то будь-який числовий метод розв'язування задачі Коші, наприклад метод Рунге–Кутти, може дати задовільний розв'язок. Однак у випадку внутрішніх коливних процесів, або наявності швидкої зміни змінних для знаходження розв'язку необхідно задавати достатньо малий крок інтегрування рівнянь, тобто для забезпечення необхідної точності відрізок інтегрування потрібно розбивати на велику кількість кроків. А велика кількість кроків, в свою чергу, приводить до накопичення похибки, тим самим знижується точність остаточного результату. Крім цього, подрібнення кроку збільшує машинний час розв'язування задачі.

Вихід з цієї ситуації полягає в застосуванні асимптотичних методів. Вони дозволяють попередньо провести деякі спрощення задачі і ввести нові змінні, які уже будуть повільно змінюватися і можуть бути достатньо точно та швидко обчислені на ЕОМ.

Для розв'язування задачі Коші широко застосовується теорія малого параметра. В цих методах припускається, що при значенні малого параметра, що дорівнює нулю, ми одержуємо модель динамічної системи у вигляді початкової задачі для системи рівнянь, для якої відомо точний розв'язок.

Нехай задана система диференціальних рівнянь

$$F(x, \dot{x}, t, \varepsilon) = 0, \quad (4.2.1)$$

де F – вектор-функція; $x = x(t)$ – розв'язок; ε – малий параметр.

При $\varepsilon \neq 0$ система називається *збуреною*. Для збуреної системи не можна одержати точний розв'язок, однак можна одержати наближений розв'язок через малість параметра ε . При $\varepsilon = 0$ система рівнянь

$$F(z, \dot{z}, t, 0) = 0, \quad (4.2.2)$$

називається *незбуреною* або *породжуючою*.

Нехай відомий інтеграл системи (4.2.2) $z = z(t, C)$, де C – вектор постійних значень. Цей розв'язок називається *породжуючим* розв'язком системи (4.2.1).

Виникає питання побудови ітераційної процедури, яка дозволить знайти розв'язок вихідної задачі шляхом уточнення породжуючого розв'язку. Для асимптотичних методів при прямуванні малого параметра ε до нуля наближений розв'язок збуреної задачі прямує до точного розв'язку незбуреної задачі. Поведінка розв'язку системи (4.2.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ називається *асимптотичною поведінкою*, а аналіз властивостей розв'язку – *асимптотичним аналізом*.

Розв'язок збуреної задачі, що одержується асимптотичними методами, має вигляд розкладу в ряд за степенями параметра ε . При цьому може одержатися розбіжний ряд. Тому на практиці для наближеного розв'язку системи обмежуються лише декількома членами цього ряду.

Розрізняють *регулярні* та *сингулярні* збурення. До регулярних збурень відносять такі збурення, які не змінюють порядок системи диференціальних рівнянь. При сингулярних збуреннях порядок системи при значеннях параметра $\varepsilon \neq 0$ більший, ніж порядок системи при $\varepsilon = 0$.

Дослідження асимптотичних методів – це достатньо обширна теорія. Наведемо приклади застосування асимптотичних методів для знаходження інтегралів, коренів алгебраїчних рівнянь та розв'язків диференціальних рівнянь.

4.2.2. Приклади асимптотичного аналізу

Перш ніж розглядати приклади застосування асимптотичних розкладів, нагадаємо деякі поняття. Нехай $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – функції, що визначені в околі точки a . Позначення $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \rightarrow a$ рівносильно умові $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$. Іншими словами, якщо $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ нескінченно малі при $x \rightarrow a$ ($\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0$), то $\alpha(x) = o(\beta(x))$ означає, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою величиною вищого порядку малості, ніж $\beta(x)$, тобто $\alpha(x)$ швидше прямує до нуля, ніж $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$.

Наприклад, $\sin x = o(\sqrt{x})$ при $x \rightarrow 0$, оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$.

Позначення $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \rightarrow a$ означає, що для x із деякого околу точки a існує стала M , така, що $|\alpha(x)| \leq M|\beta(x)|$.

Наприклад, $\sin x = O(x)$ при $x \rightarrow 0$, оскільки $|\sin x| \leq |x|$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$.

Рівності $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $\alpha(x) = O(\beta(x))$ називаються асимптотичними.

Послідовність функцій $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, що визначені в околі точки a , називається *асимптотичною* при $x \rightarrow a$, якщо

$$\forall n \geq 0 \quad u_{n+1}(x) = o(u_n(x)) \quad \text{при } x \rightarrow a.$$

Наприклад, послідовність $\{\sin^n x\}_{n=0}^{\infty}$ асимптотична при $x \rightarrow 0$, оскільки $\sin^{n+1} x = o(\sin^n x)$ при $x \rightarrow 0$.

Функціональний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ називається *асимптотичним* при $x \rightarrow a$, якщо послідовність $\{u_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ асимптотична при $x \rightarrow a$.

Наприклад:

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ – асимптотичний при $x \rightarrow 0$ (ряд збіжний при $|x| < 1$);

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ – асимптотичний при $x \rightarrow 0$ (ряд розбіжний для всіх $x \neq 0$).

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x)$ називається *асимптотичним рядом для функції* $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо

$$\forall N \in \mathbb{N} : f(x) - \sum_{n=0}^N a_n u_n(x) = O(u_{N+1}(x)), \quad x \rightarrow a,$$

або теж саме, що

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists M > 0 : \left| f(x) - \sum_{n=0}^N a_n u_n(x) \right| \leq M |u_{N+1}(x)|.$$

Цей факт записується так:

$$f(x) \stackrel{as}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n(x), \quad x \rightarrow a.$$

Рівність

$$f(x) = \sum_{n=0}^N a_n u_n(x) + O(u_{N+1}(x)), \quad x \rightarrow a, \quad (4.2.3)$$

називається *асимптотичним розкладом функції* f за асимптотичною послідовністю $\{u_n(x)\}$ з точністю $O(u_{N+1}(x))$.

Асимптотичні розклади використовуються, як для обчислень значень функції $f(x)$ так і для дослідження їх поведінки. Зокрема, якщо в асимптотичному розкладі залишити декілька перших членів, то одержимо асимптотичні формули для функції $f(x)$. При дослідженні математичних моделей асимптотичні розклади широко застосовуються для побудови аналітичних розв'язків, тобто для уточнення розв'язків, що одержуються зі спрощеної моделі.

Асимптотичне представлення, як правило – це розклади за додатними або від’ємними степенями незалежної змінної, або деякого параметра.

При $x \rightarrow \infty$ асимптотичний ряд для функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x) \stackrel{as}{\approx} g(x) \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots \right),$$

де $g(x)$ – деяка відома функція, а ряд, що стоїть у дужках, узагалі кажучи, збігається асимптотично. Це означає, що для кожного $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ при досить великих x правильна нерівність

$$\left| f(x) - g(x) \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \right) \right| \leq \frac{M}{x^{n+1}} g(x). \quad (4.2.4)$$

При цьому не вимагається, щоб ряд був збіжним у звичайному розумінні.

Задачі, при розв’язуванні яких застосовується метод малого параметра, є двох типів. У задачах першого типу малий параметр входить в саму постановку задачі і необхідно побудувати асимптотичний розклад розв’язку за цим параметром. У задачах другого типу малого параметра немає і його потрібно ввести так, щоб можна було б застосувати метод малого параметра. Слід мати на увазі, що невдалий вибір форми збуреного розв’язку може призвести до помилок.

Для контролю якості одержаного наближеного розв’язку можна порівнювати між собою послідовні наближення. Вже порівняння 0-го, 1-го та 2-го наближень дозволяє зробити висновок про якість наближеного розв’язку, оскільки збіжність і розбіжність процесу проявляється, як правило, на початкових наближеннях; застосування наступних наближень дає практично достовірні результати. Крім цього, послідовні наближення для контролю можна порівнювати з розв’язками, що одержані іншим способом, або з експериментальними даними. Наведемо приклади асимптотичних розкладів шуканих розв’язків.

Приклад 4.2.1. Обчислення інтеграла. Нехай з деякою точністю потрібно знайти значення інтеграла

$$I = \int_2^3 \sin t^{10} dt. \quad (4.2.5)$$

Стандартний шлях обчислення інтеграла за формулами трапецій, Симпсона чи інших квадратурних формул не приведе до результату, оскільки підінтегральна функція описує досить інтенсивні коливання. Її похідна $10t^9 \cos t^{10}$ сягає значень $10 \cdot 3^9$. Тому звичайне використання квадратурних формул з автоматичним вибором кроку інтегрування приводить до хаотичних змін значень підінтегральної функції і не дає змогу отримати результат.

Сучасні універсальні математичні пакети вже розв'язують таку задачу. Вони використовують асимптотичні методи для знаходження таких інтегралів.

Покажемо, як працює асимптотичний метод на цьому простому прикладі. Для цього здійснимо в інтегралі заміну змінних за формулою $y = t^{10}$, тоді отримаємо інтеграл

$$I = \frac{1}{10} \int_{2^{10}}^{3^{10}} y^{-\frac{9}{10}} \sin y dy.$$

У ньому підінтегральна функція уже не є швидко коливною, але водночас маємо надзвичайно великий проміжок інтегрування, з яким також не можуть справитися звичайні квадратурні методи. Саме ця обставина – великі межі інтегрування – дає можливість застосувати асимптотичний метод.

Позначимо

$$F(x, \alpha) = \int_x^{\infty} y^{-\alpha} \sin y dy.$$

Цей інтеграл збіжний при $x > 0$ для довільного $\alpha > 0$. Тоді

$$I = \frac{1}{10} \left(F\left(2^{10}, \frac{9}{10}\right) - F\left(3^{10}, \frac{9}{10}\right) \right). \quad (4.2.6)$$

Застосуємо до інтеграла $F(x, \alpha)$ декілька разів формулу інтегрування частинами. Маємо

$$F(x, \alpha) = \int_x^{\infty} y^{-\alpha} \sin y dy = - \int_x^{\infty} y^{-\alpha} d \cos y = -y^{-\alpha} \cos y \Big|_x^{\infty} -$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha \int_x^\infty y^{-\alpha-1} \cos y dy = x^{-\alpha} \cos x - \alpha \left(y^{-\alpha-1} \sin y \Big|_x^\infty + \right. \\
& \left. + (\alpha + 1) \int_x^\infty y^{-\alpha-2} \sin y dy \right) = x^{-\alpha} \cos x + \alpha x^{-\alpha-1} \sin x - \\
& -\alpha(\alpha + 1) \int_x^\infty y^{-\alpha-2} \sin y dy = x^{-\alpha} \cos x + \alpha x^{-\alpha-1} \sin x - \\
& -\alpha(\alpha + 1) \left(-y^{-\alpha-2} \cos y \Big|_x^\infty - (\alpha + 2) \int_x^\infty y^{-\alpha-3} \cos y dy \right) = \\
& = x^{-\alpha} \cos x + \alpha x^{-\alpha-1} \sin x - \alpha(\alpha + 1)x^{-\alpha-2} \cos x + \\
& + \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \int_x^\infty y^{-\alpha-3} \cos y dy.
\end{aligned}$$

Отже,

$$F(x, \alpha) = \frac{\cos x}{x^\alpha} + \alpha \frac{\sin x}{x^{\alpha+1}} + \alpha(\alpha + 1) \frac{\cos x}{x^{\alpha+2}} + R(x, \alpha), \quad (4.2.7)$$

де $R(x, \alpha) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \int_x^\infty \frac{\cos y}{y^{\alpha+3}} dy$.

Ряд з (4.2.7) асимптотичний при $x \rightarrow \infty$, тому при великих значеннях x декілька членів суми дають добре наближення і можуть бути використані для обчислень значень функції $F(x, \alpha)$.

Оцінимо залишок і покажемо, що він достатньо малий. Маємо:

$$|R(x, \alpha)| < \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \int_x^\infty \frac{dy}{y^{\alpha+3}} = \alpha(\alpha + 1) \frac{1}{x^{\alpha+2}}.$$

Для $\alpha = \frac{9}{10}$, $x = 2^{10}$ та $x = 3^{10}$ одержуємо

$$R\left(2^{10}, \frac{9}{10}\right) < 0,9 \cdot 1,9 \cdot \frac{1}{2^{10 \cdot 2,9}} = \frac{1,71}{2^{29}} = \frac{3,42}{(1024)^3} < 0,318512 \cdot 10^{-8},$$

$$R\left(3^{10}, \frac{9}{10}\right) < \frac{1,71}{3^{29}} = \frac{5,13}{(59049)^3} < 0,2492 \cdot 10^{-13}.$$

З формули (4.2.7) знаходимо

$$F\left(2^{10}, \frac{9}{10}\right) \approx 4,72648 \cdot 10^{-5}, \quad F\left(3^{10}, \frac{9}{10}\right) \approx 0,001928156 \cdot 10^{-7},$$

а з формули (4.2.6) маємо

$$I \approx 0,000188089,$$

причому вісім десяткових знаків правильні.

Якщо продовжити інтегрування частинами, то можна одержати ще більшу точність. ▲

Приклад 4.2.2. Застосування методу малого параметра. Нехай потрібно знайти корені рівняння

$$0,1x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0, \quad (4.2.8)$$

коефіцієнти якого задані точно.

Покладемо $\varepsilon = 0,1$ і розглянемо рівняння

$$\varepsilon x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0. \quad (4.2.9)$$

Рівняння (4.2.9) визначає залежність $x(\varepsilon)$ як неявну функцію. Для побудови розкладу за степенями ε для коренів рівняння застосуємо формулу Тейлора

$$x(\varepsilon) = x(0) + x'(0)\varepsilon + \frac{x''(0)}{2!}\varepsilon^2 + \dots$$

При $\varepsilon = 0$ для $x(0)$ маємо рівняння

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0,$$

коренями якого є $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = -1$.

Уточнимо тепер ці корені при $\varepsilon \neq 0$. Для цього продиференціюємо рівняння (4.2.9) за ε , вважаючи, що $x = x(\varepsilon)$. Маємо

$$x^4 + 4\varepsilon x^3 x' + 3x^2 x' - 4x x' - x' = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно x' , отримаємо

$$x'(\varepsilon) = \frac{x^4}{1 + 4x - 3x^2 - 4\varepsilon x^3}.$$

$$\text{Тому } x'_1(0) = \frac{2^4}{1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 4} = -\frac{16}{3}, \quad x'_2(0) = \frac{1}{1 + 4 - 3} = \frac{1}{2},$$

$$x'_3(0) = \frac{1}{1 - 4 - 3} = -\frac{1}{6}.$$

Далі знаходимо

$$x''(\varepsilon) = \frac{4x^3 x'(1 + 4x - 3x^2 - 4\varepsilon x^3) - (4x' - 6xx' - 4(x^3 + 3x^2 x' \varepsilon))}{(1 + 4x - 3x^2 - 4\varepsilon x^3)^2}.$$

Звідси

$$x''_1(0) = \frac{1024}{27}, \quad x''_2(0) = \frac{9}{4}, \quad x''_3(0) = -\frac{19}{108}.$$

Отже, асимптотичні розклади коренів рівняння мають вигляд

$$x_1 = 2 - \frac{16}{3}\varepsilon + \frac{512}{27}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3),$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{9}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3),$$

$$x_3 = -1 - \frac{1}{6}\varepsilon - \frac{19}{216}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^3).$$

Звідси при $\varepsilon = 0,1$ отримуємо $x_1 \approx 1,466$, $x_2 \approx 1,0612$, $x_3 \approx -1,0174$. ▲

4.3. Асимптотичні методи Пуанкаре

4.3.1. Класичний метод Пуанкаре

Розглянемо систему диференціальних рівнянь першого порядку

$$\dot{x} = f(x, t, \varepsilon), \tag{4.3.1}$$

де x – вектор розмірності n ; f – вектор-функція; t – скалярний аргумент – час; ε – малий параметр. Припускається, що функція f є аналітичною функцією змінної x і параметра ε .

Для системи (4.3.1) розглянемо задачу Коші: визначити функцію $x(t, \varepsilon)$, що є розв'язком системи (4.3.1) і задовольняє початкову умову

$$x(0) = x_0. \quad (4.3.2)$$

Припустимо, що права частина рівняння (4.3.1) задовольняє умови, які гарантують існування розв'язку локальної задачі Коші. Наприклад, нехай $f(x, t, \varepsilon)$ задовольняє умову Ліпшица за змінною x .

Поряд з рівнянням (4.3.1) розглянемо породжуюче рівняння

$$\dot{z} = f(z, t, 0) \quad (4.3.3)$$

з початковою умовою $z(0) = x_0$.

В рівнянні (4.3.1) зробимо заміну змінної $x = z + y$, вважаючи розв'язок $z(t)$ відомою функцією. Вектор y задовольнятиме рівняння

$$\dot{y} = f(z + y, t, \varepsilon) - f(z, t, 0) \quad (4.3.4)$$

з нульовими початковими умовами

$$y(0) = 0. \quad (4.3.5)$$

Оскільки права частина рівняння (4.3.4) є аналітичною функцією змінних y і ε , то її можна розкласти в ряд Тейлора за цими змінними, вважаючи їх достатньо малими за абсолютними величинами. Це дозволяє переписати рівняння у вигляді

$$\dot{y} = Ay + \varepsilon \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_0 + B(y, \varepsilon, t), \quad (4.3.6)$$

де A – квадратна матриця, складена з перших частинних похідних

$$A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0;$$

f_i, x_j – компоненти векторів f та x відповідно; $\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_0$ – вектор (матриця-стовпчик) з компонентами $\left(\frac{\partial f_i}{\partial \varepsilon} \right)_0$; $B(y, \varepsilon, t)$ – сукупність членів аргументів y і ε , починаючи з другого порядку. Нульовий індекс означає, що матриця A і вектор $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$ обчислюються

при $x = z$ і $\varepsilon = 0$. Оскільки розв'язок $z(t)$ задачі Коші вважається відомим, то A і $\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)$ – теж відомі функції часу.

Далі знайдемо розв'язок задачі (4.3.6), (4.3.5) у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n y_n, \quad (4.3.7)$$

де $y_n(t)$ – невідомі функції.

Такі розклади називаються степеневими асимптотичними розкладами за малим параметром ε (при $\varepsilon \rightarrow 0$). Це означає, що $\forall N \geq 0: y(t) - \sum_{n=1}^N \varepsilon^n y_n(t) = O(\varepsilon^{N+1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Підставимо (4.3.7) в (4.3.6) і, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях параметра ε , одержимо систему рівнянь для знаходження y_i у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= Ay_1 + D_1, \\ \dot{y}_2 &= Ay_2 + D_2, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{y}_n &= Ay_n + D_n, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

У цих рівняннях $D_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)_0$ – відома функція часу. Функція D_2 містить квадратичні члени розкладу функції $B(y, \varepsilon, t)$ за y і ε , в неї входять тільки функція y_1 і не входять функції y_i для $i > 1$.

Дійсно,

$$B(y, \varepsilon, t) = B_{00}y^2 + B_{01}y\varepsilon + B_{22}\varepsilon^2 + \dots$$

Підставляючи в цей вираз ряд (4.3.7), зведемо його до вигляду

$$B(y, \varepsilon, t) = \varepsilon^2(B_{00}y_1^2 + B_{01}y_1 + B_{11}) + \varepsilon^3(\dots) + \dots$$

Очевидно, що будь-яка функція D_n залежить тільки від функцій y_1, y_2, \dots, y_{n-1} . Тому, якщо послідовно розв'язувати систему (4.3.8), то функції D_n уже стають відомими функціями.

Отже, визначення коефіцієнтів розкладу розв'язку $y(t)$, тобто функцій $y_n(t)$, зводиться до розв'язування задач Коші для лінійної неоднорідної системи (4.3.8) з нульовими початковими умовами, оскільки з умови (4.3.5) маємо, що $y_n(0) = 0$, $n \in \{1, 2, \dots\}$.

Сформулюємо без доведення теорему Пуанкаре, яка підсумовує це дослідження.

Теорема Пуанкаре. *Якщо розв'язок породжуючої системи (4.3.3) відомий, то розв'язок системи (4.3.6) може бути знайдений за допомогою операцій диференціювання і взяття квадратур.*

Розв'язки рівнянь (4.3.1) є аналітичними функціями параметра ε , тобто ряди (4.3.7) збігаються при досить малих за абсолютною величиною значеннях ε і являють собою інтеграли рівнянь (4.3.6), розкладених за степенями параметра ε .

Приклад 4.3.1. Розглянемо рівняння Дюффінга

$$\ddot{x} + x - x^3 = 0. \quad (4.3.9)$$

Рівняння Дюффінга було одним із перших прикладів істотно нелінійних рівнянь, що дозволило вивчити ряд якісних особливостей нелінійних систем.

Оскільки змінні в рівнянні (4.3.9) можна відокремити, то воно може бути проінтегровано в явному вигляді через еліптичні функції і до кінця вивчено аналітичними методами [6]. В результаті прийдемо до досить громіздких формул. На практиці бажано мати для розв'язку прості наближені формули. Використаємо для цього метод Пуанкаре, розглядаючи рухи з малою амплітудою.

Рівняння (4.3.9) явно малого параметра не містить – ним може бути початковий стан системи, оскільки відхилення від положення рівноваги невеликі. Покладемо $x = \varepsilon y$, тоді рівняння (4.3.9) набуде вигляду

$$\ddot{y} + y - \varepsilon^2 y^3 = 0.$$

Щоб дотриматися позначення з теоретичних викладок, перепишемо це рівняння у вигляді

$$\ddot{x} + x - \varepsilon^2 x^3 = 0. \quad (4.3.10)$$

Для початкових значень візьмемо

$$x(0) = \alpha, \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (4.3.11)$$

При $\varepsilon = 0$ маємо задачу Коші

$$\ddot{z} + z = 0, \quad z(0) = \alpha, \quad \dot{z}(0) = 0,$$

розв'язок якої $z(t) = \alpha \cos t$.

Розв'язок (4.3.10) шукаємо у вигляді $x = z + y$, де y – розв'язок задачі

$$\ddot{y} + y = \varepsilon^2(z + y)^3, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \quad (4.3.12)$$

Розв'язок задачі (4.3.12) шукаємо у вигляді

$$y = \varepsilon y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots,$$

де y_1, y_2, \dots – невідомі функції. Для їх знаходження отримуємо систему

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + y_1 &= 0, & y_1(0) &= 0, & \dot{y}_1(0) &= 0, \\ \ddot{y}_2 + y_2 &= z^3, & y_2(0) &= 0, & \dot{y}_2(0) &= 0, \\ \dots & & \dots & & \dots & \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Оскільки перше рівняння однорідне й початкові умови нульові, то $y_1(t) \equiv 0$.

Для знаходження $y_2(t)$ з (4.3.13) одержуємо рівняння

$$\ddot{y}_2 + y_2 = \alpha^3 \cos^3 t.$$

Оскільки $\cos^3 t = \frac{3}{4} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t$, то маємо таке рівняння:

$$\ddot{y}_2 + y_2 = \frac{3}{4} \alpha^3 \cos t + \frac{1}{4} \alpha^3 \cos 3t. \quad (4.3.14)$$

Частинний розв'язок (4.3.14) шукаємо у вигляді

$$\tilde{y}_2 = C_1 t \sin t + C_2 \cos 3t.$$

Підставляючи вираз для \tilde{y}_2 в рівняння (4.3.14) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових тригонометричних функціях, одержуємо

$$\tilde{y}_2 = \frac{3}{8} \alpha^3 t \sin t - \frac{\alpha^3}{32} \cos 3t.$$

Загальний розв'язок рівняння (4.3.14) має вигляд

$$y_2 = A \sin t + B \cos t + \tilde{y}_2.$$

Підберемо сталі A та B так, щоб $y_2(0) = \dot{y}_2(0) = 0$. Легко бачити, що $A = 0$, $B = \alpha^3/32$.

Остаточно розв'язок рівняння (4.3.14) з нульовими початковими умовами

$$y_2(t) = \frac{3\alpha^3}{8} t \sin t - \frac{\alpha^3}{32} (\cos 3t - \cos t).$$

Продовжуючи аналогічно, можна знайти $y_3(t)$, $y_4(t)$, ..., тобто отримати наближення розв'язку за степенями ε

$$y(t) \approx \varepsilon^1 y_1 + \varepsilon^2 y_2 + \dots + \varepsilon^n y_n \quad (4.3.15)$$

з необхідною точністю.

Можна показати (див. [6, 64]), що при невеликих початкових відхиленнях від положення рівноваги рівняння Дюффінга має періодичні траєкторії. Водночас доданки з (4.3.15) вигляду $t^k \sin \omega t$, $t^k \cos \omega t$ (вікові члени) не є періодичними функціями часу. Тому будь-яка частинна сума ряду також не буде періодичною функцією часу.

Таке представлення незручне. За його допомогою ми не можемо вивчити залежність періоду коливань від амплітуди та інших важливих характеристик коливного процесу. Крім того, точність апроксимації зі збільшенням часу буде неперервно погіршуватися, а при t порядку ε^{-1} ряд взагалі втрачає асимптотичний характер, бо наступний член ряду не є малим вищого порядку порівняно з попередніми членами. Причина цих труднощів полягає в тому, що період розв'язку T відрізняється від 2π і залежить від початкових умов. ▲

Отже, метод малого параметра Пуанкаре, будучи сильним засобом наближеного дослідження, далеко не універсальний для дослідження прикладних задач, що містять малі параметри, тому для усунення сингулярних членів потрібні модифікації цього методу.

4.3.2. Метод Пуанкаре для знаходження періодичних розв'язків квазілінійних систем

Найпростіші форми стану систем – стаціонарні. Наступні відносно прості форми стану й еволюції систем – періодичні. Періодичні або близькі до них рухи відіграють значну роль у фізиці, техніці (тепер уже і в біології, екології, економіці тощо). Тому при вивченні процесів найрізноманітнішої природи часто виникає необхідність з'ясувати існування періодичних розв'язків та знайти їх наближення. Проблема знаходження періодичних або близьких до періодичних поведінок процесу, їх вивчення є одним із важливих елементів математичного моделювання.

Ефективне знаходження періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь – це широка тема. Тут ми лише проілюструємо метод малого параметра, що запропонований Пуанкаре в минулому столітті, який послужив відправною точкою для більшості інших теорій.

Розглянемо загальне квазілінійне рівняння другого порядку

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = \varepsilon F(x, \dot{x}), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (4.3.16)$$

При $\varepsilon = 0$ рівняння (4.3.16) описує коливання з частотою $\omega(0) = \lambda$ і періодом $T_0 = \frac{2\pi}{\omega(0)}$.

При $\varepsilon \neq 0$ період розв'язку повинен залежати від параметра ε , тобто $T = T(\varepsilon) = 2\pi/\omega(\varepsilon)$, причому внаслідок неперервної залежності від параметра $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega(\varepsilon) = \omega(0) = \lambda$.

Базуючись на цьому факті, припустимо, що

$$\omega(\varepsilon) = \frac{\lambda}{1 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots}$$

і зробимо заміну незалежної змінної

$$t = \frac{\tau}{\lambda} (1 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots). \quad (4.3.17)$$

Значенню $t = T$ відповідає значення $\tau = 2\pi$, тобто період шуканого розв'язку відносно нової змінної тепер уже не залежить від ε і дорівнює 2π . Числа q_i наперед невідомі, вони будуть визначені в процесі знаходження періодичного розв'язку.

Перепишемо рівняння (4.3.16) для змінної τ . Для цього знайдемо

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{dt} \right) \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} \right) \frac{d\tau}{dt} = \frac{d^2x}{d\tau^2} \left(\frac{d\tau}{dt} \right)^2 = \\ &= \frac{d^2x}{d\tau^2} \cdot \frac{\lambda^2}{(1 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots)^2}. \end{aligned}$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x}{d\tau^2} + x(1 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots)^2 = \\ &= \varepsilon F \left(x, \frac{dx}{d\tau} \frac{\lambda}{1 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots} \right) \frac{(1 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots)^2}{\lambda^2}. \quad (4.3.18) \end{aligned}$$

Задамо для рівняння (4.3.18) початкові умови:

$$x(0) = C \equiv C(\varepsilon), \quad \frac{dx}{d\tau} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0.$$

Зауважимо, що значення C заздалегідь невідоме.

Отже, ми прийшли до задачі знаходження значення $C(\varepsilon)$ і періодичного розв'язку рівняння (4.3.18), який породжується цим початковим значенням. При цьому вже відомо, що період цього розв'язку дорівнює 2π . Цей періодичний розв'язок шукатимемо методом Пуанкаре у вигляді ряду за степенями ε

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\tau). \quad (4.3.19)$$

Підставляючи ряд (4.3.19) в рівняння (4.3.18) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , одержуємо рівняння для знаходження $x_k(\tau)$:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x_0}{d\tau^2} + x_0 = 0, \\ &\frac{d^2x_1}{d\tau^2} + x_1 = \frac{1}{\lambda^2} F \left(x_0, \frac{dx_0}{d\tau} \lambda \right) - 2q_1 x_0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

У процесі інтегрування системи (4.3.20) з'являтимуться довільні сталі. Ці сталі та невідомі числа q_1, q_2, \dots необхідно підібрати так, що розв'язки $x_0(\tau), x_1(\tau), \dots$ були періодичними функціями за τ з періодом 2π .

В цьому й полягає метод Пуанкаре для відшукування періодичних розв'язків у вигляді ряду, всі члени якого є періодичними функціями. Розв'яжемо систему (4.3.20).

З першого рівняння системи (4.3.20), враховуючи початкові умови $x_0(0) = C, \frac{dx_0(0)}{d\tau} = 0$, маємо

$$x_0(\tau) = C \cos \tau. \quad (4.3.21)$$

Підставляючи (4.3.21) в друге рівняння системи (4.3.20), одержуємо

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = \frac{1}{\lambda^2} F(C \cos \tau, -\lambda C \sin \tau) - 2q_1 C \cos \tau. \quad (4.3.22)$$

Для того, щоб це рівняння допускало періодичні за τ розв'язки з періодом 2π , необхідно і достатньо, щоб його права частина була ортогональною до $\cos \tau$ і $\sin \tau$.

Умови ортогональності дають два рівняння для знаходження невідомих C і q_1 :

$$I(C) \equiv \int_0^{2\pi} F(C \cos \tau, -C\lambda \sin \tau) \sin \tau d\tau = 0, \quad (4.3.23)$$

$$q_1 = \frac{1}{2\pi C \lambda^2} \int_0^{2\pi} F(C \cos \tau, -C\lambda \sin \tau) \cos \tau d\tau. \quad (4.3.24)$$

Перше з цих рівнянь – це деяке трансцендентне рівняння для знаходження C – амплітуди породжуючого розв'язку. Рівняння (4.3.23) може взагалі не мати розв'язків, тоді вихідне рівняння не має періодичних розв'язків. Наприклад, коли функція $F = -k\dot{x}$ (є диссипативною), то рівняння (4.3.23) має вигляд

$$k \int_0^{2\pi} C \lambda \sin^2 \tau d\tau = 0,$$

і жодних розв'язків, окрім тривіального $C = 0$, немає.

Трансцендентне рівняння (4.3.23) може мати єдиний розв'язок, кілька розв'язків або нескінченну кількість розв'язків. Наприклад, коли $F(x, \dot{x}) = F(x)$ (збурююча сила консервативна), тоді

$$I(C) = \int_0^{2\pi} F(C \cos \tau) \sin \tau d\tau.$$

Оскільки $F(C \cos \tau)$ – парна періодична функція з періодом 2π , а $\sin \tau$ – непарна функція, то $I(C) \equiv 0$, тобто рівняння (4.3.23) допускає безліч розв'язків.

Далі, якщо C – відомо, то з (4.3.24) можна знайти $q_1(C)$. Якщо обмежитися першим членом у розкладі (4.3.19), то одержимо наближений розв'язок

$$x \approx x_0(t) = C \cos \frac{\lambda t}{1 + q_1(C)\varepsilon}.$$

Цей вираз уже дозволяє з'ясувати залежність частоти від амплітуди.

Приклад 4.3.2. Запишемо рівняння Дюффінга у формі

$$\ddot{x} + x = \varepsilon x^3. \quad (4.3.25)$$

Після заміни (4.3.17) рівняння (4.3.25) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\tau^2} + x[1 + 2q_1\varepsilon + (2q_2 + q_1^2)\varepsilon^2 + \dots] = \\ = \varepsilon x^3[1 + 2q_1\varepsilon + (2q_2 + q_1^2)\varepsilon^2 + \dots]. \end{aligned}$$

Підставляючи в це рівняння ряд (4.3.19), прийдемо до рівнянь типу (4.3.20), які дозволяють послідовно знайти $x_0(\tau)$, $x_1(\tau)$, \dots :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_0}{d\tau^2} + x_0 &= 0, \\ \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 &= x_0 - 2q_1 x_0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

Розв'язок першого рівняння, що задовольняє початкові умови $x(0) = C$, $\frac{dx(0)}{d\tau} = 0$, має вигляд (4.3.21). Тоді друге рівняння системи (4.3.26) набуває вигляду

$$\frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + x_1 = C^3 \cos^3 \tau - 2q_1 C \cos \tau.$$

Щоб це рівняння мало періодичний розв'язок $x_1(\tau)$ з періодом 2π , записуємо умови ортогональності (4.3.23), (4.3.24).

Оскільки збурююча сила консервативна $F = F(x)$, то C – довільна стала, тобто будь-який початковий стан породжує періодичний розв'язок.

Значення q_1 знайдемо за формулою (4.3.24) і одержимо

$$q_1 = \frac{3}{8} C^2,$$

тому в першому наближенні

$$x(t) = C \cos \omega t, \quad \text{де } \omega = 1 + \frac{3}{8} C^2 \varepsilon. \blacktriangle$$

Метод Пуанкаре далеко не універсальний. Він дозволяє знаходити періодичні розв'язки тільки квазілінійних систем, тобто при малих значеннях ε . За допомогою методу Пуанкаре не можна вивчати установалення процесів, властивості стійкості, оскільки він орієнтований тільки на знаходження періодичних розв'язків.

4.4. Метод усереднення

Існують системи рівнянь, що містять малий параметр, для яких пряме використання методів розкладу розв'язків у ряд за малим параметром не приводить до корисних для практики результатів.

Одна з таких систем має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \frac{dy}{dt} &= \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

де x – деякий вектор, y – скаляр, функції $X(x, y, \varepsilon)$, $Y(x, y, \varepsilon)$ періодичні по y функції з періодом 2π . Труднощі числового інтегрування системи (4.4.1) викликані тим, що в системі присутні

повільні величини x та швидкі величини y і крок інтегрування визначається швидкою величиною. Тому числове інтегрування системи (4.4.1) необхідно проводити з достатньо малим кроком і, як наслідок, маємо великі затрати машинних ресурсів, а отже, велику похибку обчислень розв'язку на проміжку часу $[0, T]$, $T > 0$.

Проблема зменшення кроку інтегрування (а отже, збільшення кількості обчислень) – одна з найбільших проблем машинної математики. Белман назвав цю проблему прокляттям розмірності.

Для спрощення аналізу системи (4.4.1) плідотною виявилася ідея Крилова–Боголюбова – ідея про розділення повільних і швидких змінних. Якщо розділити систему на швидкі та повільні змінні, то отримуємо ефективний спосіб аналізу системи, оскільки систему з повільними змінними можна інтегрувати з великим кроком, а, знаючи повільні змінні, швидко змінну можна знайти однією квадратурою.

Щоб розділити змінні, запровадимо заміну змінних

$$x = \bar{x} + \varepsilon u(\bar{x}, \bar{y}, \varepsilon),$$

$$y = \bar{y} + \varepsilon v(\bar{x}, \bar{y}, \varepsilon).$$

Але в загальному випадку знайти точне перетворення змінних не вдається, тому доводиться шукати перетворення, які б давали наближене асимптотичне розв'язування цієї задачі. Такі перетворення шукаються у формі рядів

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

де функції $u_1(\bar{x}, \bar{y})$, $u_2(\bar{x}, \bar{y})$, \dots , $v_1(\bar{x}, \bar{y})$, $v_2(\bar{x}, \bar{y})$ – невідомі, їх потрібно визначити. Щоб $\varepsilon^i u_i(\bar{x}, \bar{y})$, $\varepsilon^i v_i(\bar{x}, \bar{y})$ були малими, накладемо умову обмеженості функцій $u_i(\bar{x}, \bar{y})$, $v_i(\bar{x}, \bar{y})$ при довільних \bar{x}, \bar{y} , зокрема

$$\lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} |u_i(\bar{x}, \bar{y})| < \infty, \lim_{\bar{y} \rightarrow \infty} |v_i(\bar{x}, \bar{y})| < \infty, i = 1, 2, \dots \quad (4.4.3)$$

Вимагатимемо, щоб у результаті заміни (4.4.2) вектор-функція $\bar{x}(t)$ задовольняла систему рівнянь, що не містить швидкої змінної

$\bar{y}(t)$, а рівняння для $\bar{y}(t)$ у правій частині теж не містить $\bar{y}(t)$, тобто щоб $\bar{x}(t)$, $\bar{y}(t)$ визначалися з системи

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt} &= \varepsilon A(\bar{x}, \varepsilon), \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= \omega(\bar{x}) + \varepsilon B(\bar{x}, \varepsilon),\end{aligned}\tag{4.4.4}$$

де функції $A(\bar{x}, \varepsilon)$, $B(\bar{x}, \varepsilon)$ заздалегідь невідомі.

Система (4.4.4) значно простіша за (4.4.1). Дійсно, перше рівняння відокремлене від другого, тому воно інтегрується незалежно від рівняння з швидкою змінною, а оскільки похідна $\dot{\bar{x}}$ мала, то воно інтегрується з великим кроком за часом. Знаючи \bar{x} , змінну \bar{y} знайдемо квадратурним методом. Маючи \bar{x} та \bar{y} , знаходимо $x(t)$ та $y(t)$, як показують формули (4.4.2), лише з точністю $o(\varepsilon)$. Для більш вищої точності наближеного розв'язку потрібно ще знаходити $u_1(\bar{x}, \bar{y})$, $u_2(\bar{x}, \bar{y})$, \dots , $v_1(\bar{x}, \bar{y})$, $v_2(\bar{x}, \bar{y})$, \dots .

Задача знаходження перетворень (4.4.2) полягає у визначенні функцій $u_i(\bar{x}, \bar{y})$, $v_i(\bar{x}, \bar{y})$, $i \in \{1, 2, \dots\}$, $A(\bar{x}, \varepsilon)$, $B(\bar{x}, \varepsilon)$.

Функції $A(\bar{x}, \varepsilon)$, $B(\bar{x}, \varepsilon)$ також шукатимемо у вигляді рядів за степенями ε , тобто замість (4.4.4) матимемо систему

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{x}}{dt} &= \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots, \\ \frac{d\bar{y}}{dt} &= \omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \dots\end{aligned}\tag{4.4.5}$$

Підставимо (4.4.2) в (4.4.1). Для цього спочатку, використовуючи (4.4.5), знайдемо

$$\begin{aligned}\frac{du_i(\bar{x}, \bar{y})}{dt} &= \frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{\partial u_i}{\partial \bar{y}} \frac{d\bar{y}}{dt} = \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}} (\varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots) + \frac{\partial u_i}{\partial \bar{y}} (\omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \dots).\end{aligned}\tag{4.4.6}$$

Тоді рівняння (4.4.1) з урахуванням (4.4.6) набувають вигляду

$$\varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \bar{x}} (\varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots) +$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} (\omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \dots) + \dots = \\
& = \varepsilon X(\bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \varepsilon), \\
& \quad \omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \dots + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \bar{x}} (\varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \dots) + \\
& \quad + \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}} (\omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \dots) + \dots = \\
& = \omega(\bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots) + \varepsilon Y(\bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \\
& \quad \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}) + \dots, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Розкладаючи праві частини в ряди за степенями параметра ε і прирівнюючи коефіцієнти при першому степені ε , дістанемо

$$A_1(\bar{x}) + \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} \omega(\bar{x}) = X(\bar{x}, \bar{y}, 0),$$

$$B_1(\bar{x}) + \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}} \omega(\bar{x}) = Y(\bar{x}, \bar{y}, 0) + D_1(u_1),$$

де $D_1(u_1) = \sum_i \frac{\partial \omega}{\partial \bar{x}_i} u_1^i$, або

$$\omega(\bar{x}) \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}} = g_1(\bar{x}, \bar{y}) - A_1(\bar{x}),$$

$$\omega(\bar{x}) \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}} = h_1(\bar{x}, \bar{y}) - B_1(\bar{x}), \quad (4.4.7)$$

де $g_1(\bar{x}, \bar{y}) = X(\bar{x}, \bar{y}, 0)$, $h_1(\bar{x}, \bar{y}) = Y(\bar{x}, \bar{y}, 0) + D_1(u_1)$ – відомі функції.

Аналогічно, якщо прирівнювати коефіцієнти при ε^k , дістанемо

$$\omega(\bar{x}) \frac{\partial u_k}{\partial \bar{y}} = g_k(\bar{x}, \bar{y}) - A_k(\bar{x}),$$

$$\omega(\bar{x}) \frac{\partial v_k}{\partial \bar{y}} = h_k(\bar{x}, \bar{y}) - B_k(\bar{x}),$$

де функції $g_k(\bar{x}, \bar{y})$, $h_k(\bar{x}, \bar{y})$ відомі, оскільки вони визначаються через відомі функції $u_1(\bar{x}, \bar{y})$, \dots , $u_{k-1}(\bar{x}, \bar{y})$, $v_1(\bar{x}, \bar{y})$, \dots , $v_{k-1}(\bar{x}, \bar{y})$.

Рівняння (4.4.7) – диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку, розв’язані відносно похідних невідомих функцій $u_1(\bar{x}, \bar{y})$ та $v_1(\bar{x}, \bar{y})$. Інтегруючи рівняння (4.4.7), знайдемо

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\omega(\bar{x})} \int_{\bar{y}_0}^{\bar{y}} (g_1(\bar{x}, \bar{y}) - A_1(\bar{x})) d\bar{y} + \varphi(\bar{x}),$$

$$v_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\omega(\bar{x})} \int_{\bar{y}_0}^{\bar{y}} (h_1(\bar{x}, \bar{y}) - B_1(\bar{x})) d\bar{y} + \psi(\bar{x}),$$

де $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$ – довільні функції \bar{x} (постійні інтегрування), $A_1(\bar{x})$, $B_1(\bar{x})$ – невідомі функції.

Існують різні способи раціонального задання функцій $\varphi(\bar{x})$, $\psi(\bar{x})$. Наприклад, при розв’язуванні задачі Коші для рівнянь (4.4.1) вважають $x(t_0) = \bar{x}(t_0)$, $y(t_0) = \bar{y}(t_0)$ і $\varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{x}) = 0$. Узагалі, перетворення (4.4.2) може бути побудовано не єдиним чином. Можна довести, що точність побудови наближеного розв’язку не залежить від вибору цих функцій.

Використовуючи умови (4.4.3), можна показати, що

$$A_1(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_1(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y},$$

тобто $A_1(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\bar{x}, \bar{y}, 0) d\bar{y}$. Аналогічно,

$$B_1(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_1(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{y}.$$

Якщо розглянути випадок, коли в системі (4.4.1) ω – величина стала, то в першому наближенні $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$, де

$$\dot{\bar{x}} = \varepsilon \bar{X}(\bar{x}), \quad \dot{\bar{y}} = \omega + \varepsilon \bar{Y}(\bar{x}),$$

$$\bar{X}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\bar{x}, \bar{y}, 0) d\bar{y}, \quad \bar{Y}(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y(\bar{x}, \bar{y}, 0) d\bar{y}.$$

Зауважимо, що до систем вигляду (4.4.1) належать і системи вигляду

$$\dot{x} = \varepsilon X(x, t, \varepsilon).$$

Дійсно, покладаючи $y = t$, друге рівняння з (4.4.1) можна переписати

$$\frac{dy}{dt} = 1.$$

Цей метод допускає ряд важливих узагальнень, зокрема, в системі (4.4.1) функції X , Y можуть бути періодичними з будь-яким періодом T або взагалі не бути періодичними по швидкій змінній y .

Метод усереднення є достатньо ефективним засобом аналізу різних систем. Зокрема, він дозволяє розв'язувати задачі знаходження періодичних розв'язків та проводити дослідження їх стійкості.

В обчислювальному плані перехід до усередненої системи дозволяє збільшити крок числового інтегрування (інколи в багато тисяч разів), що дозволяє зменшити час обчислень та практично уникнути похибок обчислень, які накопичуються при інтегуванні з малим кроком.

Приклад 4.4.1. Розглянемо рівняння Ван дер Поля

$$\ddot{x} + \lambda^2 x = \varepsilon(1 - ax^2)\dot{x}. \quad (4.4.8)$$

Зробимо заміну змінних

$$x = c \cos \varphi, \quad \dot{x} = -c\lambda \sin \varphi. \quad (4.4.9)$$

Продиференціюємо перше співвідношення за t . Тоді, враховуючи друге співвідношення, одержимо

$$\dot{c} \cos \varphi - c\dot{\varphi} \sin \varphi + c\lambda \sin \varphi = 0. \quad (4.4.10)$$

Диференціюючи друге співвідношення (4.4.9) і підставляючи в (4.4.8), матимемо

$$-\dot{c}\lambda \sin \varphi - c\lambda\dot{\varphi} \cos \varphi + c\lambda^2 \cos \varphi = -\varepsilon c(1 - ac^2 \cos^2 \varphi)\lambda \sin \varphi. \quad (4.4.11)$$

Розв'язавши систему (4.4.10), (4.4.11) відносно \dot{c} , $\dot{\varphi}$, дістанемо

$$\dot{c} = \varepsilon c(1 - ac^2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = \lambda + \varepsilon(1 - ac^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (4.4.12)$$

Ми одержали систему двох диференціальних рівнянь відносно c , φ , яка еквівалентна рівнянню (4.4.8). Ця система належить до класу систем вигляду (4.4.1), тобто містить одну повільну змінну c і швидко змінну φ .

Згідно з методом усереднення, можна одержати наближений розв'язок системи (4.4.12), замінюючи праві частини їх усередненими значеннями за φ :

$$\dot{c} = \frac{\varepsilon c}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - ac^2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\varepsilon c}{2} \left(1 - \frac{ac^2}{4}\right),$$

$$\dot{\varphi} = \lambda + \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - ac^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = \lambda. \quad (4.4.13)$$

Система (4.4.13) – це система з розділеними змінними, її рівняння інтегруються незалежно й, отже, можна знайти розв'язок рівняння (4.4.8) в першому наближенні (виконати самостійно).

З рівнянь (4.4.13) знайдемо ті рухи, які відбуваються зі стаціонарною амплітудою. Для цього прирівняємо праву частину першого рівняння системи (4.4.13) до нуля.

Рівняння

$$c \left(1 - \frac{ac^2}{4}\right) = 0 \quad (4.4.14)$$

має три корені $c_1 = 0$, $c_{2,3} = \pm 2\sqrt{1/a}$, тобто система (4.4.13) має два стаціонарні режими: стан спокою $c = 0$ і періодичний рух з амплітудою $2\sqrt{1/a}$ і періодом $T = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Тепер можна вивчити амплітудну стійкість (або, згідно з термінологією Пуанкаре, – орбітальну стійкість).

Для дослідження орбітальної стійкості стаціонарних розв'язків рівняння Ван дер Поля покладемо $c = c_* + \delta_c$, де

c_* – корені рівняння (4.4.14). Підставимо цей вираз у перше рівняння системи (4.4.13) і лінеаризуємо одержані співвідношення відносно δ_c . Після очевидних перетворень одержимо

$$\dot{\delta}_c = \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - \frac{3ac_*}{4} \right] \delta_c.$$

Якщо $c_* = 0$, то $\dot{\delta}_c = \varepsilon\delta_c/2$, або $\delta_c = \delta_{c_0} \exp(\varepsilon t/2)$. Це означає, що з ростом часу амплітуда буде зростати, тобто нульовий розв’язок рівняння Ван дер Поля – нестійкий.

Якщо $c_* = 2\sqrt{1/a}$, то $\dot{\delta}_c = -\varepsilon\delta_c$, або $\delta_c = \delta_{c_0} \exp(-\varepsilon t)$. Це означає, що з ростом часу $\delta_c \rightarrow 0$, тобто періодичний розв’язок асимптотично стійкий. Отже, якщо через деякі причини система буде виведена зі стану руху по стаціонарній орбіті, то з ростом часу система повернеться на вихідну орбіту.

На цій основі можна зобразити геометрію фазової площини рівняння Ван дер Поля. Траєкторія, що починається біля початку координат, буде віддалятися від нього – амплітуда c буде весь час зростати, але вона не може стати більшою стаціонарної амплітуди $\sqrt{2/a}$. Тобто траєкторії, що починаються всередині стаціонарної орбіти, будуть намотуватися на неї зсередини, а траєкторії, що починаються зовні стаціонарної орбіти, теж будуть прямувати до стаціонарного стану, але намотуватися на неї зовні (рис. 4.1).

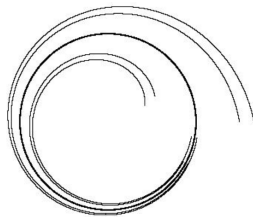


Рис. 4.1. Фазовий портрет рівняння Ван-дер-Поля

Нарешті зауважимо, що для точнішого опису рухів потрібно розглядати наближення другого та вищих порядків. ▲

4.5. Побудова асимптотики для диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній

Нехай задано диференціальне рівняння, яке сингулярно залежить від малого параметра ε , $0 < \varepsilon \ll 1$:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, t, \varepsilon), \quad x(0) = A. \quad (4.5.1)$$

Припустимо, що а) при $\varepsilon = 0$ існує розв'язок $x_0(t)$ рівняння

$$f(x_0(t), t, 0) \equiv 0;$$

б) функція $f(x, t, \varepsilon)$ визначена на множині

$$\Omega = \{0 \leq t \leq a, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0, |x| \leq B\},$$

нескінченно диференційовна на Ω , $|x_0(t)| < B$, $A < B$;

в) на Ω виконується умова стійкості $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, \varepsilon) < -\gamma$.

Почнемо побудову асимптотичного розв'язку задачі (4.5.1), який будемо шукати у вигляді ряду

$$U(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k x_k(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.5.2)$$

Цей ряд називається зовнішнім асимптотичним розкладом задачі (4.5.1). Коефіцієнти ряду одержуються шляхом підстановки (4.5.2) в (4.5.1) і прирівнювання членів при однакових степенях малого параметра.

Щоб уникнути громіздких викладок, замість рівняння (4.5.1) розглянемо рівняння

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (4.5.3)$$

з початковою умовою

$$x(0) = A. \quad (4.5.4)$$

Розкладемо функцію $f(x, t)$ у ряд Тейлора в околі точки $P_0 = (x_0(t); t)$ за змінною x при фіксованому t :

$$f(x, t) = f(P_0) + f'(P_0)(x(t) - x_0(t)) + \frac{f''(P_0)}{2!}(x(t) - x_0(t))^2 + \dots$$

Підставляючи ряд (4.5.2) в рівняння (4.5.3) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ε , одержимо

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)x_1 = \frac{dx_0}{dt},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)x_1^2 &= \frac{dx_1}{dt}, & (4.5.5) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)x_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)x_1x_2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(P_0)x_1^3 &= \frac{dx_2}{dt}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

З цієї системи внаслідок зроблених припущень послідовно знаходимо всі $x_k(t)$. Тоді побудований ряд є асимптотичним, оскільки можна показати, що

$$\varepsilon \frac{dU_N(t)}{dt} = f(U_N(t), t) + O(\varepsilon^{N+1}),$$

де $U_N(t) = x_0(t) + \sum_{k=1}^N \varepsilon^k x_k(t)$.

Але цей ряд не є асимптотичним розв'язком всієї задачі (4.5.3), (4.5.4), тобто це не асимптотичний розклад істинного розв'язку на відрізку $[0, a]$. Формально він, взагалі кажучи, не задовольняє початкову умову (4.5.4). В околі початкової точки спостерігається нев'язка. Окіл початкової точки називають *пограничним шаром*. Природно припустити, що побудований ряд (4.5.2) добре наближає істинний розв'язок задачі (4.5.3), (4.5.4) віддалік від початкової точки, а в її околі відбувається різка зміна розв'язку. Тому для правильного опису розв'язку вводять функції пограничного шару. На рис. 4.2 це показано штрих-пунктирною лінією.

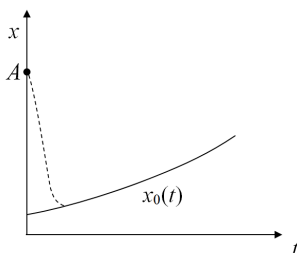


Рис. 4.2. Розв'язок задачі (4.5.3), (4.5.4), що задається зовнішнім асимптотичним розкладом

Звичайний масштаб не дозволяє правильно описати асимптотику. Вираз $\varepsilon \frac{dx}{dt}$ вважався малим і він зовсім не брав участі при

побудові головного доданка асимптотики, проте поблизу границі похідна $\frac{dx}{dt}$ велика і нею не можна нехтувати.

Поблизу границі для правильного опису розв'язку вводять інші незалежні розтягнені змінні. Ця нова змінна – $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$. Нові змінні називаються *внутрішніми*, а асимптотичний ряд в околі початкової точки називається *внутрішнім асимптотичним* рядом. Внутрішній асимптотичний ряд має вигляд

$$V(\tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(\tau). \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.5.6)$$

Для знаходження коефіцієнтів $y_k(\tau)$ підставимо $U(t, \varepsilon) + V(\tau, \varepsilon)$ в (4.5.3), одержимо

$$\varepsilon \frac{d(U(t, \varepsilon) + V(\tau, \varepsilon))}{dt} = f(U(t, \varepsilon) + V(\tau, \varepsilon), t),$$

але, оскільки

$$\varepsilon \frac{dU(t, \varepsilon)}{dt} = f(U(t, \varepsilon)),$$

то потрібно домогтися, щоб

$$\varepsilon \frac{dV(\frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon)}{dt} = f(U(t, \varepsilon) + V(\frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon), t) - f(U(t, \varepsilon))$$

або, враховуючи (4.5.6), потрібно задовольнити рівняння

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{dy_k(\tau)}{d\tau} &= f\left(x_0(\varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\varepsilon\tau) + y_0(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k(\tau), \varepsilon\tau\right) - \\ &- f\left(x_0(\varepsilon\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k x_k(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau\right). \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

Щоб мати можливість прирівнювати коефіцієнти при однакових степенях ε , потрібно розв'язки $x_k(\varepsilon\tau)$ розкласти в ряд Тейлора за ε в нулі: $x_k(\varepsilon\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj} \varepsilon^j \tau^j$, а функцію f розкласти в ряд Тейлора в околі $x_0(0) + y_0(\tau)$ і в околі точки $x_0(0)$. Далі, прирівнюючи

коефіцієнти при однакових степенях ε , одержимо рівняння для невідомих $y_k(\tau)$. Перші два рівняння мають вигляд

$$\frac{dy_0}{d\tau} = f(x_0(0) + y_0(\tau), 0) - f(x_0(0), 0),$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} = & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(0) + y_0(\tau), 0)y_1(\tau) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0(0) + y_0(\tau), 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0(0), 0) \right) \times \\ & \times \left(\frac{\partial x_0}{\partial t}(0) + \frac{\partial x_1}{\partial t}(0) \right) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}(x_0(0) + y_0(\tau), 0) - \frac{\partial f}{\partial t}(x_0(0), 0) \right) \tau. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

Знайдемо початкове значення $y_0(0)$ для першого рівняння. Початкова умова для $y_0(0)$ повинна компенсувати нев'язку, яку дає зовнішній асимптотичний ряд, тому

$$y_0(0) = A - x_0(0).$$

Тоді $y_0(\tau)$ можна знайти у квадратурах

$$\tau = \int_{A-x_0(0)}^{y_0} \frac{d\xi}{f(x_0(0) + \xi, 0) - f(x_0(0), 0)}.$$

Знаючи $y_0(\tau)$, з другого рівняння (4.5.8) знаходимо $y_1(\tau)$ і т.д.

Справедлива така теорема.

Теорема. *Нехай для задачі (4.5.3), (4.5.4) виконані припущення а) – в). Тоді для $0 \leq t \leq a$ існує розв'язок цієї задачі і побудований ряд $U(t, \varepsilon) + V(\frac{t}{\varepsilon}, \varepsilon)$ є його асимптотичним розкладом.*

Описана вище методика побудови асимптотичного розкладу початкової задачі може бути розповсюджена і на дослідження систем диференціальних рівнянь

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = f(x, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = g(x, z, t),$$

$$x(0, \varepsilon) = x_0, \quad z(0, \varepsilon) = z_0.$$

Такі системи називають *тихоновськими*.

4.6. Розв'язки типу біжучої хвилі. Автомодельні розв'язки

Часто в різних галузях математики, фізики, механіки, біології, екології та інших прикладних дисциплін зустрічаються нелінійні диференціальні рівняння з частинними похідними. Загальний розв'язок нелінійних рівнянь математичної фізики, як правило, не вдається отримати. Тому обмежуються пошуком точних частинних розв'язків. Для побудови таких розв'язків нелінійних рівнянь математичної фізики розроблено цілий ряд методів [78], що базуються на переході до нових змінних. Тобто ставиться задача знайти нові змінні, кількість яких менша, ніж кількість вихідних змінних, і записати вихідне рівняння в цих змінних. Зокрема, знаходження точних розв'язків рівнянь з частинними похідними з двома незалежними змінними зводиться до дослідження звичайних диференціальних рівнянь. Природно, що при цьому ми знайдемо не всі розв'язки вихідного рівняння з частинними похідними, а лише деякий клас розв'язків.

Найпростішими класами точних розв'язків, які описуються звичайними диференціальними рівняннями, є розв'язки типу біжучої хвилі та автомодельні розв'язки. Ці розв'язки часто зустрічаються в різних застосуваннях і відіграють значну роль при вивченні математичних моделей. Крім цього, побудова таких розв'язків лежить в основі деяких аналітичних методів.

4.6.1. Розв'язки типу біжучої хвилі

Нехай деякий процес описується диференціальним рівнянням з частинними похідними вигляду

$$F(x, t, u, u'_x, u'_t, u''_{xx}, u''_{xt}, u''_{tt}) = 0. \quad (4.6.1)$$

Розв'язком типу біжучої хвилі називається розв'язок

$$u(t, x) = y(\xi), \quad \xi = x - \lambda t, \quad (4.6.2)$$

де параметр λ відіграє роль швидкості розповсюдження хвилі. Такі розв'язки характерні тим, що їхні профілі в різні моменти часу одержуються шляхом їх зсуву. При $\lambda > 0$ хвиля рухається вздовж осі Ox вправо, при $\lambda < 0$ – вліво. Значення $\lambda = 0$ відповідає

стаціонарному розв'язку. Тому можна ввести декартову систему координат, що рухається з постійною швидкістю і в якій профіль розв'язку не буде змінюватися.

Пошук розв'язків типу біжучої хвилі здійснюється шляхом підстановки (4.6.2) в (4.6.1) з урахуванням того, що

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y', \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\lambda y', \quad (4.6.3)$$

де штрих означає похідну за ξ .

Приклад 4.6.1. Знайти розв'язок типу біжучої хвилі для нелінійного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (4.6.4)$$

Підставивши (4.6.2), (4.6.3) в (4.6.4), дістанемо

$$\lambda y' + (yy')' = 0, \quad \text{або} \quad \lambda y + yy' = -C_1.$$

Інтегруючи останнє рівняння, одержуємо

$$\int \frac{y dy}{\lambda y + C_1} = - \int d\xi, \quad \text{або} \quad y - \frac{C_1}{\lambda} \ln(\lambda y + C_1) = -\lambda \xi + C_2,$$

тобто розв'язок $u(x, t)$ стає відомим. ▲

4.6.2. Автомоделльні розв'язки

Автомоделльними називаються розв'язки вигляду

$$u(t, x) = t^\alpha y(\xi), \quad \xi = xt^\beta, \quad (4.6.5)$$

де α, β – деякі числові параметри.

Профілі таких розв'язків у різні моменти часу t отримуються шляхом перетворення подібності, тобто перетворення типу "стиск-розтяг".

Автомоделльні розв'язки рівняння існують, якщо перетворення незалежних і залежної змінних за формулами

$$t = C\bar{t}, \quad x = C^k \bar{x}, \quad u = C^m \bar{u}, \quad (4.6.6)$$

де $C > 0$ – довільна стала, при відповідному виборі чисел k і m приводить до тотожного перетворення вихідного рівняння. Тобто вихідне рівняння (4.6.1) в результаті перетворення (4.6.6) перейде точно в таке саме рівняння

$$F(\bar{x}, \bar{t}, \bar{u}, \bar{u}'_t, \bar{u}''_x, \bar{u}''_{xx}, \bar{u}''_{xt}, \bar{u}''_{tt}) = 0. \quad (4.6.7)$$

На практиці спочатку підбираються числа k і m так, щоб рівняння (4.6.1) і (4.6.7) були тотожно еквівалентними, а коли k і m уже знайдені, то виписують автомодельні змінні (4.6.5) з параметрами $\alpha = m$, $\beta = -k$ [78]. Метод побудови автомодельних розв'язків з використанням перетворень (4.6.5) має назву *метод подібності*.

Зауважимо, що інколи замість перетворень (4.6.6) розглядають перетворення

$$t = \bar{t} + \ln C, \quad x = C^k \bar{x}, \quad u = C^m \bar{u},$$

де $C > 0$ – довільна стала, k, m – числа.

При цьому говорять про експоненціально-автомодельний розв'язок

$$u = e^{\alpha t} y(\xi), \quad \xi = x e^{\beta t}.$$

Приклад 4.6.2. Знайти автомодельний розв'язок нелінійного рівняння теплопровідності вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b u^n. \quad (4.6.8)$$

Розв'язування цієї задачі оформимо у вигляді окремих кроків.

Крок 1. Виконаємо перетворення подібності (4.6.6) в рівнянні (4.6.8). У результаті одержимо

$$C^{m-1} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} - a^2 C^{m-2k} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = b C^{mn} \bar{u}^n.$$

Крок 2. Підберемо числа m, k так, щоб в останньому рівнянні зник параметр C . Для цього прирівнюємо степені величини C . Одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$m - 1 = m - 2k = mn,$$

яка має єдиний розв'язок $k = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{1-n}$.

Крок 3. Тепер оскільки $\alpha = m$, $\beta = -k$, то можна записати автомобільний розв'язок

$$u(x, t) = t^{\frac{1}{1-n}} y(\xi), \quad \xi = xt^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.6.9)$$

Підставляючи (4.6.9) в (4.6.8), перейдемо до звичайного диференціального рівняння для визначення функції $y(\xi)$

$$a^2 y''_{\xi^2} + \frac{1}{2} \xi y'_{\xi} + \frac{1}{n-1} y + by^n = 0. \quad (4.6.10)$$

Зокрема, при $b = 0$, тобто для лінійного однорідного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

припускаючи, що $n = 2$ або $m = -1$ з (4.6.10), одержуємо диференціальне рівняння

$$a^2 y''_{\xi^2} + \frac{\xi}{2} y'_{\xi} + y = 0,$$

яке інтегрується точно.

4.7. Числові методи

4.7.1. Роль числових методів у математичному моделюванні

Розвиток математичного моделювання привів до необхідності розв'язування складних багатовимірних нестационарних нелінійних задач. Це зумовлено складністю задач, які висуває теорія і практика, необхідністю врахування багатьох факторів, системним підходом в моделюванні, оскільки досліджуються не окремі явища, а цілі системи. Як правило, для таких задач не можна знайти аналітичних розв'язків, а навіть коли аналітичний розв'язок вдається знайти, то він може бути непридатний для числових розрахунків.

Математичні моделі в більшості випадків являють собою диференціальні рівняння або їх системи. Безпосереднє аналітичне

дослідження таких моделей можливе лише в окремих випадках. Частіше за все можна одержувати лише якісні особливості поведінки об'єктів, знання яких необхідні, але не достатні.

Тому при розробці математичних моделей з'явилась потреба в ефективних числових методах, які б дозволяли одержувати досить точний числовий розв'язок. Обчислювальні алгоритми при цьому повинні задовольняти жорстким вимогам – перш за все необхідно розв'язок задачі одержувати із заданою точністю за розумний час, по-друге, обсяги обчислень не повинні перевищувати можливостей комп'ютера. Так, для розрахунку літака на міцність методом скінченних елементів, доводиться розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь, порядок матриці якої становить 30 мільйонів, а розв'язування задач обтікання (тривимірні рівняння Нав'є–Стокса) здійснюється на сітці 6,6 млн. вузлів. Тому при розв'язуванні таких унікальних задач вибір числового методу для реалізації математичної моделі має велике значення.

Оскільки будь-який числовий метод наближений, то результати моделювання априорі будуть містити похибку. Величина похибки буде залежати від обраного методу. Інколи похибка методу навіть може змінити якісний характер розв'язку. Отже, один з недоліків числового методу – це оцінка похибки. Аналітична оцінка похибки часто є складною процедурою або просто неможливою. В цьому випадку для оцінки похибки використовують обчислювальний експеримент і порівняння його результатів з аналітичними розв'язками та з реальним натурним експериментом. Варто зауважити, що в задачах з наближеними вхідними даними застосування наближених методів високого ступеня точності ні чим не виправдано, оскільки результат може бути одержаний на основі простіших методів першого та другого порядків точності. Наведемо основні характеристики числових методів.

Стійкість методу. В процесі обчислень похибки не повинні накопичуватися. Нестійкий числовий метод призводить до зростання обчислювальних похибок.

Степінь точності методу. Числові методи завжди наближені і мають дискретний характер. Дискретний алгебраїчний аналог розв'язку вихідних рівнянь (різниці рівняння) означає, що ми маємо значення розв'язку в окремих фіксованих точках часу та

просторових координат, тобто існує деякий крок обчислення h . Похибка методу залежить від цього кроку. Наприклад, якщо похибка методу $\delta \sim h^2$, то це означає, що метод має другий порядок точності.

Збіжність методу. Це теоретична характеристика методу, яка констатує той факт, що даний числовий метод дає розв'язок, який збігається до розв'язку вихідної задачі при $h \rightarrow 0$.

4.7.2. Простіші числові методи розв'язування звичайних диференціальних рівнянь

У багатьох випадках математичні моделі є системами диференціальних рівнянь. Суть числових методів інтегрування диференціальних рівнянь розглянемо на прикладі рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

з початковою умовою $x(t = 0) = x_0$ (задача Коші).

Нехай ця задача має єдиний розв'язок. Числове інтегрування цього рівняння зводиться до обчислення дискретних значень y_0, y_1, \dots, y_n для заданих значень змінної t : t_0, t_1, \dots, t_n . Застосування дискретного числового методу до розв'язування диференціальних рівнянь означає, що вихідну неперервну математичну модель замінюємо на дискретну, тобто одержуємо дискретний аналог, далі необхідно вивчити його властивості та розробити числові методи розв'язування дискретної задачі.

Нехай у момент часу t_i відоме значення розв'язку $x_i = x(t_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Знайдемо співвідношення, за якими можна обчислити $x(t_{i+1})$. Проінтегруємо диференціальне рівняння на проміжку $[t_i, t_{i+1}]$, дістанемо

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x) dt$$

або

$$x_{i+1} = x_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, x) dt, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Якщо для знаходження інтеграла оберемо метод прямокутників, то одержимо

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_i, x_i) - \text{явний метод Ейлера,}$$

або

$$x_{i+1} = x_i + hf(t_{i+1}, x_{i+1}) - \text{неявний метод Ейлера.}$$

Явний метод Ейлера – метод першого порядку точності, що має жорсткі умови стійкості: при розв’язуванні багатьох практичних задач забезпечення стійкості вимагає малих значень кроку інтегрування h . Унаслідок цього явний метод застосовується рідко.

Неявний метод Ейлера абсолютно стійкий, але має теж перший порядок точності. Вибір кроку h здійснюється з міркувань забезпечення необхідної точності обчислень. У випадку нелінійної функції f для знаходження значення x_{i+1} потрібно застосувати теж числові методи, наприклад, метод послідовних ітерацій.

Якщо для знаходження інтеграла застосувати метод трапецій, то одержуємо метод Ейлера–Коші:

$$x_{i+1} \approx x_i + \frac{h}{2}(f(t_i, x_i) + f(t_{i+1}, x_{i+1})).$$

Цей метод має другий порядок точності і практично стійкий.

В підручниках з числових методів можна знайти багато інших однокрокових методів, що застосовуються до розв’язування диференціальних рівнянь і мають вищий порядок точності, наприклад, методи Рунге–Кутти [35, 66, 86].

В обчислювальній практиці, крім однокрокових, використовуються і багатокрокові методи, в яких розв’язок $x(t_{i+1})$ визначається за деякими попередніми значеннями функції: $x(t_i)$, $x(t_{i-1})$, \dots

Для одержання результатів з високою точністю застосовують методи "предиктор-коректор", тобто на першому етапі (предиктор) обчислюється попереднє значення функції $x(t_{i+1})$, а на другому етапі (коректор) це значення уточнюється. Існує велика кількість багатокрокових алгоритмів [66, 86], серед яких методи Мілна, Хеммінга, Адамса та ін.

Але розглянуті методи можуть виявитися неефективними при розв’язуванні жорстких систем рівнянь (системи, які описують процеси з істотно різними масштабами протікання). Наприклад,

системи, що описують процеси хімічної кінетики. Для таких систем крок інтегрування за часом потрібно обирати досить малим, щоб забезпечити необхідну точність розрахунку всіх складових, а це призводить до накопичення обчислювальної похибки.

Найпростіші алгоритми, що дозволяють розв'язувати системи жорстких диференціальних рівнянь – це неявні схеми Ейлера. Проте існують і спеціальні методи розв'язування таких систем, зокрема, методи Гіра, Розенброка та ін.

Наведемо деякі функції з пакету Mathcad, які застосовуються для дослідження математичних моделей, що є системами диференціальних рівнянь з заданими початковими умовами.

Простіша з цих функцій *rkfixed* розв'язує задачу Коші методом Рунге–Кутти зі сталим кроком інтегрування. Якщо обчислення потрібно проводити з змінним кроком, то використовують функції *Rkadapt* або *rkadapt*.

Для розв'язування нежорстких систем диференціальних рівнянь, як правило, достатньо можливостей указаних функцій, проте в пакеті Mathcad є функції *Bulstoer* та *bulstoer*, обчислювальні алгоритми яких базуються на методі Булірша–Штира.

В останній версії Mathcad включена функція *odesolve*, в якій питання приведення рівнянь до стандартного вигляду, вибір кроку інтегрування розв'язуються автоматично.

Функції *Shtiffb* та *shtiffb* забезпечують розв'язування жорстких систем методом Булірша–Штира, а функції *Shtiffr* та *shtiffr* – методом Розенброка.

Проте в більшості випадків прості методи дають прийнятний розв'язок.

4.7.3. Числові методи розв'язування моделей із розподіленими параметрами

Багато реальних процесів описуються моделями, що є диференціальними рівняннями з частинними похідними. Прикладами таких процесів є розповсюдження хвиль, рух газів та рідин, передача тепла, дифузія та інші. Це найскладніші рівняння математичної фізики. Існує багато методів їх розв'язування, що тільки підкреслює їх складність.

Комп'ютерне числове моделювання дозволило перейти від розв'язання простіших (лінійних) задач математичної фізики до аналізу складних процесів різної фізичної природи.

Розглянемо приклади таких моделей і методів їх числового дослідження. Для конструювання числових методів використаємо методи, що застосовуються при побудові вихідних математичних моделей.

Побудуємо різницеву апроксимацію першої крайової задачі на відрізку $[0, l]$ для рівняння теплопровідності

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad 0 < x < l, 0 < t \leq T, \\ u(0, t) &= u_1(t), \quad u(l, t) = u_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

Її розв'язок існує і відшуковується в області $0 < x < l$, $0 < t \leq T$ (рис. 4.3).

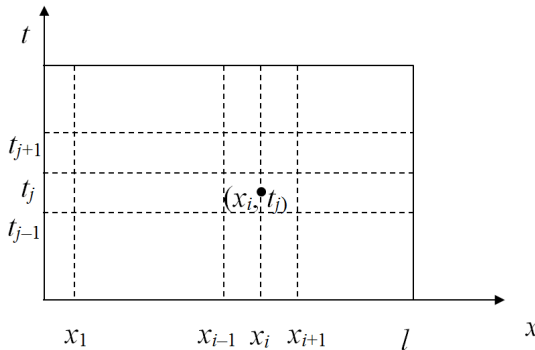


Рис. 4.3. Рівномірна прямокутна сітка вузлів

Уведемо в цій області сітку $\bar{\omega}_{h\tau} = \left\{ (x_i, t_j), x_i = ih, h = \frac{l}{N}, i = \overline{0, N}, t_j = j\tau, \tau = \frac{T}{M}, j = \overline{0, M}, N, M \in \mathbb{N} \right\}$. Така сітка називається рівномірною.

Сукупність вузлів з однаковим індексом j називається *часовим шаром*. В граничних вузлах, що належать відрізкам $[0, l]$, $[0, T]$,

$[l, T]$ функція $u(x, t)$ – відома з крайових і початкових умов, їх апроксимація має вигляд

$$y_0^j = u_1(t_j), y_N^j = u_2(t_j), \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

$$y_i^0 = u_0(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Позначимо множину граничних вузлів через $\gamma_{h\tau}$.

Наближений розв'язок необхідно знайти на множині $\omega_{h\tau}$, де $\omega_{h\tau}$ – множина внутрішніх вузлів ($\omega_{h\tau} = \bar{\omega}_{h\tau} \setminus \gamma_{h\tau}$). Проведемо різницеву апроксимацію диференціального оператора, записуючи його загальну форму для точки (x_i, t_j) сітки $\omega_{h\tau}$. Похідну за часом замінимо першою різницею:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx (y_i^{j+1} - y_i^j)/\tau.$$

Другу похідну за змінною x можна замінити різницеvim співвідношенням на j -му або $j + 1$ -му часовому шарі або комбінацією цих значень:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \sigma y_{xx}^{j+1} + (1 - \sigma) y_{xx}^j,$$

$$\text{де } y_{xx}^j = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}.$$

Тоді з (4.7.1) прийдемо до різницевої схеми з ваговим коефіцієнтом

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \sigma \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} + (1 - \sigma) \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2},$$

$$(x_i, t_j) \in \omega_{h\tau}, \quad (4.7.2)$$

$y_0^j = u_1(t_j), y_N^j = u_2(t_j), y_i^0 = u_0(x_i), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M$, що є системою $(N - 1)M$ лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження такої ж кількості значень функції $y_i^j, i = 1, 2, \dots, N - 1, j = 1, 2, \dots, M$.

Похибка апроксимації різницевої схеми (4.7.2) в загальному випадку є величиною $O(\tau + h^2)$, тобто першого порядку за часом та другого за просторовою змінною. Для симетричної схеми з $\sigma = \frac{1}{2}$

порядок апроксимації за часом збільшується до $O(\tau^2)$. При $\sigma = 0$ та $\sigma = 1$ одержуються простіші схеми ($\sigma = 0$ – явна схема, $\sigma = 1$ – неявна схема).

При $\sigma = 0$ кожне з рівнянь (4.7.2) містить лише одну невідому величину y_i^{j+1} , тому її розв'язок знаходиться за явними формулами при переході від j -го шару до $j + 1$ -го.

У випадку неявної схеми ($\sigma = 1$) різниці рівняння містять три невідомі величини: y_{i-1}^{j+1} , y_i^{j+1} , y_{i+1}^{j+1} . Тому на кожному часовому шарі потрібно розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональною матрицею за допомогою методу прогонки.

Чисто неявна схема стійка при будь-якому співвідношенні між h і τ (безумовна стійкість), тоді як для явної схеми необхідно виконання нерівності $\tau \leq Ch^2$, $C > 0$ – деяка стала (умовна стійкість). Ця вимога накладає обмеження на крок за часом, тому явні схеми практично не використовуються. Для числового розв'язування рівнянь теплопровідності потрібно використовувати неявні стійкі алгоритми.

Аналогічно будуються різниці схеми типу (4.7.2) для задач з іншими крайовими умовами, ніж у (4.7.1), та для більш загального нелінійного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Отже, на основі прямої апроксимації одержуються дискретні моделі, що володіють потрібними властивостями. Водночас їх формальне застосування може призвести до побудови дискретних аналогів, які не можуть використовуватися для дослідження вихідних моделей, оскільки вони порушують фундаментальні закони, на основі яких будувалися математичні моделі, наприклад, закон збереження (балансу) тепла.

В цьому випадку для побудови різницевої схем застосовують інтегро-інтерполяційний метод, суть якого полягає в записі закону збереження енергії в інтегральній формі для $x \in [x_{i-1}, x_i]$ і наступною заміною інтегралів і похідних різницевиими виразами. Інтегро-інтерполяційні методи застосовуються до широкого класу рівнянь.

Для побудови різницевих схем використовуються також варіаційні методи, які є одними з основних методів побудови математичних моделей об'єктів різної природи. При такому підході відбувається дискретизація вихідного об'єкта і формулювання для нього варіаційного принципу, тобто виведення на його основі рівнянь (зв'язків) для дискретних величин.

Іноколи для побудови різницевих схем застосовують ієрархічний підхід за принципом "знизу–вверх" або "зверху–вниз". Різницеві схеми є досить ефективними засобами для числового моделювання багатьох достатньо складних процесів.

Нині для розв'язування різних задач математичної фізики розробляються пакети прикладних програм, зокрема, пакет ANSYS. Проте ця робота ще далека до завершення. В математичних пакетах (Mathcad, Matlab, Mathematica та ін.) теж є функції і програми для розв'язування відносно нескладних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Функції *Mathcal pdsolve* та *numol* забезпечують розв'язування диференціальних рівнянь і систем диференціальних рівнянь параболічного і гіперболічного типів при заданих граничних і початкових умовах.

Функції *multigrid* і *relax* забезпечують розв'язування рівнянь Пуассона в прямокутній області. Більш універсальною є функція *relax*. Застосування функції *multigrid* передбачає задання нульових граничних умов.

4.8. Задачі для самостійної роботи

4.1. Знайти асимптотичне представлення при $x \rightarrow \infty$ для інтегралів:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \int_x^{\infty} \frac{\cos 2t^2}{t-1} dt; & \text{б) } & \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt; \\ \text{в) } & \int_x^{\infty} (t^2+1)^{-2} e^{-t^2} dt; & \text{г) } & \int_x^{\infty} e^{-t^2} \sqrt{t^2+1} dt; \end{aligned}$$

$$\text{д) } \int_x^\infty \frac{\cos t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt; \quad \text{є) } \int_x^\infty \frac{\sin t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt.$$

Вказівка. Виконати заміну змінних $t^2 = \xi$ і застосувати формулу інтегрування частинами, знайти декілька членів асимптотичного ряду.

4.2. Застосовуючи метод малого параметра, знайти корені алгебраїчного рівняння

$$\text{а) } x^4 - 10x^3 + 10x - 1 = 0;$$

$$\text{б) } 0.1x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0.$$

Вказівка. В задачі а) немає малого параметра. Для цього його потрібно ввести так, щоб при $\varepsilon = 0$ одержати незбурену задачу, розв'язок якої легко знайти, а при $\varepsilon = \varepsilon_0$ – збурену задачу, яка співпадає з вихідною.

4.3. Знайти розв'язок рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x - 2\varepsilon \frac{dx}{dt}, \quad x(0, \varepsilon) = a, \quad \frac{dx}{dt}(0, \varepsilon) = b$$

у вигляді асимптотичного ряду

$$x_\varepsilon(t) = x_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n x_n(t),$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, а $x_0(t)$ – розв'язок незбуреної задачі.

Дослідити поведінку розв'язку при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поясніть, чому одержаний ряд погано наближає розв'язок при великих значеннях t .

Вказівка. Обмежитися знаходженням невідомих $x_1(t)$, $x_2(t)$.

4.4. За допомогою класичного методу Пуанкаре побудувати розв'язок задачі у вигляді асимптотичного ряду (2 члени)

$$\text{а) } \ddot{x} + 4x + \varepsilon x^2 \dot{x} = 0,$$

$$\text{б) } \ddot{x} + \omega^2x + \varepsilon x^5 = 0.$$

4.5. Застосовуючи метод Пуанкаре для знаходження періодичних розв'язків, побудувати наближений розв'язок задачі

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 + \varepsilon \dot{x}^2 = 0.$$

4.6. Методом усереднення побудувати системи для повільно змінної амплітуди та швидкої фазової змінної:

- а) $\ddot{x} + x = \varepsilon x^3$;
 б) $\ddot{x} + x + \varepsilon x^2 + \varepsilon \dot{x}^2 = 0$.

4.7. Побудувати три члени асимптотичного розкладу розв'язку нелінійної крайової задачі:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon x^3 = 0, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

Вказівка. Розв'язок задачі шукати у вигляді

$$x(t) = z(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \dots,$$

де $z(t)$ – розв'язок незбуреної задачі.

4.8. Знайти асимптотику при $\varepsilon \rightarrow 0$ розв'язку початкової задачі

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = (t^2 - x)(x^2 - (t + 1)^2), \quad x(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Виписати асимптотичне наближення з точністю $O(\varepsilon^2)$.

Вказівка. Побудувати внутрішній та зовнішній асимптотичні ряди, як це показано в п. 4.5.

4.9. Знайти розв'язок типу біжучої хвилі для нелінійного рівняння теплопровідності

- а) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$;
 б) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

4.10. Знайти автомодельні розв'язки для нелінійних рівнянь

- а) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right)$;
 б) $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$;
 в) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = au^n$.

Література: [6, 9, 12, 16, 35, 47, 64, 66, 78, 86, 93, 103].

Область застосування математичних методів принципово необмежена, і всі види руху матерії можуть вивчатися математично.

Колмогоров А.М.

Частина II. Приклади застосувань математичного моделювання

Розділ 5. Простіші моделі руху тіл

Моделювання механічних процесів складає класичну галузь застосування методів математичного моделювання. У цьому розділі розглянемо хід побудови математичних моделей на деяких прикладах механічних систем.

5.1. Рух тіла під дією сили ваги в середовищі з опором

Нехай тіло певних розмірів рухається прямолінійно під дією сили тяжіння. Сила тяжіння визначається за формулою $P = mg$, де m – маса тіла, g – прискорення вільного падіння на поверхні Землі. Прискорення, якого набувають тіла при вільному падінні поблизу поверхні Землі, не залежать від їхньої маси. В технічних розрахунках покладають $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Нехай тіло вільно падає на Землю з деякої висоти h і при цьому на нього діє сила опору з боку навколишнього середовища (рис. 5.1).

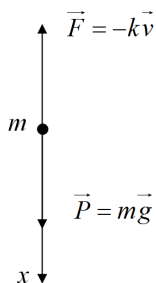


Рис. 5.1. Схема руху тіла

Сформулюємо припущення та гіпотези про властивості й поведінку цього об'єкта.

1. Тіло має правильну геометричну форму й в процесі руху маса й форма тіла не змінюється, наприклад, таким тілом є куля.

2. Рух тіла відбувається прямолінійно під дією сили ваги та сили опору.

3. Сила опору лінійно залежить від швидкості руху тіла, тобто $\vec{F} = -k\vec{v}$.

4. Густина тіла значно більша за густину навколишнього середовища (тому можна знехтувати силою Архімеда).

5. Відсутнє обертання тіла.

6. Вага стала, тому модель не розповсюджується на опис процесів космічного масштабу.

За перерахованих вище припущень тіло можна вважати матеріальною точкою, рух якої описується законами класичної механіки.

Зазначимо, що розглядувана модель не описуватиме рух тіл зі змінною масою (наприклад, коли речовина згорає), тіл змінної форми (крапля води змінює свою форму), тіл обертання (обертання тіла при русі в середовищі з опором створює додаткову силу). Для опису їх руху необхідно використовувати складніші моделі.

На вертикальній осі, вздовж якої рухається тіло, виберемо точку відліку й положення тіла визначатимемо координатою $x(t)$.

Метою дослідження є побудова моделі, на основі якої можна було б визначити закон зміни координати тіла $x(t)$ залежно від часу та закон зміни швидкості тіла $\vec{v}(t)$.

За цих припущень на основі другого закону Ньютона маємо систему диференціальних рівнянь

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad \frac{dx}{dt} = v \quad (5.1.1)$$

з початковими умовами $v = v_0$, $x = 0$ при $t = 0$. Перше рівняння системи (5.1.1) називається *рівнянням руху*, а друге – *кінематичним рівнянням*. Ця модель має чотири параметри, що ускладнює її аналіз. Для спрощення аналізу результатів моделювання необхідно звести кількість параметрів до мінімуму. Це досягається шляхом зведення моделі до безрозмірних змінних.

Визначимо безрозмірну швидкість u як відношення $v(t)$ до v_0 , тобто $u = \frac{v}{v_0}$, і перетворимо рівняння руху (5.1.1) до вигляду

$$\frac{v_0}{g} \frac{du}{dt} = 1 - \frac{kv_0}{mg} u.$$

Уведемо безрозмірний час $\tau = t/(v_0/g)$, тоді останнє рівняння набуде вигляду

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - \frac{kv_0}{mg} u.$$

Позначивши $\bar{k} = kv_0/(mg)$, де \bar{k} – безрозмірний коефіцієнт опору, одержимо рівняння руху

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - \bar{k}u.$$

Кінематичне рівняння перетворимо аналогічно:

$$\frac{1}{v_0} \frac{dx}{dt} = \frac{v}{v_0}, \quad t = \tau \frac{v_0}{g}, \quad \frac{1}{v_0} \frac{1}{v_0/g} \frac{dx}{d\tau} = \frac{v}{v_0}.$$

Нехай $s = \frac{g}{v_0^2} x$, тоді в результаті заміни прийдемо до системи рівнянь

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - \bar{k}u, \quad \frac{ds}{d\tau} = u \quad (5.1.2)$$

з початковими умовами $s(0) = 0$, $u(0) = 1$.

Отже, задача зведена до безрозмірного вигляду й має лише один безрозмірний параметр \bar{k} . Здійснювати аналіз такої моделі значно простіше, ніж вихідної. Аналіз моделі в безрозмірній формі дає інформацію про властивості всіх реальних систем, для яких виконується співвідношення

$$\bar{k} = \frac{kv_0}{mg} = \text{const.}$$

Різні реальні системи, що мають однакове значення параметра \bar{k} , називаються *подібними*. В частинному випадку, коли $v_0 = 0$, можна одержати модель без параметрів. Така система називається

автомодельною. В цьому випадку всі реальні системи подібні між собою.

Розв'язуючи рівняння (5.1.2) і враховуючи початкові умови, маємо

$$u(\tau) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)e^{-k\tau} + \frac{1}{k}, \quad s(t) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{1}{k}\left(e^{-k\tau} - 1\right) + \frac{1}{k}\tau.$$

Звідси, враховуючи заміну змінних, одержуємо

$$v(t) = v_0 \left[\left(1 - \frac{mg}{kv_0}\right) e^{-\frac{kv_0}{mg} \frac{gt}{v_0}} + \frac{mg}{kv_0} \right],$$

$$x(t) = \frac{v_0^2}{g} \frac{mg}{kv_0} \left[\left(1 - \frac{mg}{kv_0}\right) \left(e^{-\frac{kv_0}{mg} \frac{gt}{v_0}} - 1 \right) + \frac{gt}{v_0} \right],$$

або

$$v(t) = v_0 \left[\left(1 - \frac{mg}{kv_0}\right) e^{-\frac{kt}{m}} + \frac{mg}{kv_0} \right],$$

$$x(t) = \frac{v_0 m}{k} \left[\left(1 - \frac{mg}{kv_0}\right) \left(e^{-\frac{kt}{m}} - 1 \right) + \frac{gt}{v_0} \right].$$

Формула для $x(t)$ виражає закон руху тіла. З умови $x(t) = h$ можна знайти час польоту тіла. Із формули для $v(t)$ отримаємо граничну швидкість $v^* = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{mg}{k}$.

Якщо розглянути рух тіла прямо вгору із поверхні Землі, а потім вниз, то можна показати, що за наявності опору тіло падає довше, ніж піднімається вгору (довести самостійно).

Ньютон у своїх працях показав, що сила опору при великих швидкостях пропорційна квадрату швидкості, тобто $F = kv^2$. Але емпіричні дослідження опору повітря показують, що фактична залежність опору повітря від швидкості може бути доволі складною. Для багатьох випадків вважають, що $F = kv^p$, де $1 \leq p \leq 2$. Показник p залежить від величини швидкості ($p = 1$ для малих швидкостей, $p = 2$ для великих швидкостей, $1 < p < 2$ для проміжних швидкостей), геометрії тіла та густини середовища. Ця формула не є точним законом фізики, а лише наближено описує функцію F . Для геометрично простих тіл відомі аналітичні вирази для коефіцієнта k . У випадку лінійного опору для кулі радіусом r коефіцієнт $k = k_1 = 6\pi\mu r$, де μ – динамічна в'язкість середовища.

У разі квадратичного опору коефіцієнт опору пропорційний площі поперечного до потоку перерізу S , густині середовища ρ_0 і залежить від форми тіла, тобто $k = k_2 = \frac{1}{2}cS\rho_0$, де c – коефіцієнт форми (безрозмірна величина), що характеризує лобове зіткнення.

Зокрема, коефіцієнти форми для наступних тіл і потоків мають такі значення: півкуля $\rightarrow \mathbb{D}$, $c = 1,33$; $\rightarrow \mathbb{C}$, $c = 0,55$; куля $\rightarrow \mathbb{O}$, $c = 0,44$

5.2. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Нехай тіло кинуте під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 . Вважаючи тіло матеріальною точкою, рух якої описується законами класичної механіки, побудуємо математичну модель його руху.

Визначимо осі координат, як це зображено на рис. 5.2.

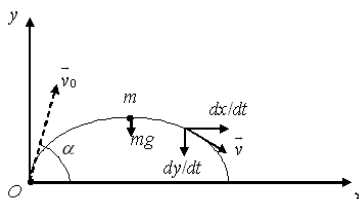


Рис. 5.2. Рух тіла

Вважатимемо, що на тіло масою m діє лише одна сила тяжіння $P = mg$, силами опору та силами іншої природи знехтуємо. Для побудови математичної моделі запишемо другий закон Ньютона в проекціях на осі x та y . Одержимо

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g. \end{cases} \quad (5.2.1)$$

Для замикання моделі (5.2.1) додамо початкові умови

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha \quad \text{при } t = 0. \quad (5.2.2)$$

Інтегруючи (5.2.1) і враховуючи початкові умови (5.2.2), маємо

$$x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = (v_0 \sin \alpha)t - g \frac{t^2}{2}. \quad (5.2.3)$$

Звідси з умови $y = 0$ знаходимо час польоту $t^* = \frac{2v_0}{g} \sin \alpha$. З рівнянь (5.2.3), виключаючи параметр t , одержуємо рівняння траєкторії в системі координат Oxy у вигляді

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (5.2.4)$$

Це рівняння визначає параболу з гілками, направленими вниз, яка проходить через точки $(0, 0)$, $(\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}, 0)$.

Отже, відстань польоту по горизонталі складає $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$ і досягає свого максимального значення при $\alpha = \alpha^* = 45^\circ$, причому $x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$. Максимальна висота підйому тіла становить $y_{\max} = v_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{2g}$ і досягається при $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$.

Побудуємо тепер математичну модель з урахуванням сил опору. Вважаємо, що сила опору \vec{F} лінійно залежить від швидкості тіла \vec{v} , тобто $\vec{F} = -k\vec{v}$ (це припущення правильне при невеликих швидкостях тіла). Визначення коефіцієнта k здійснюється методами ідентифікації.

Розкладемо швидкість \vec{v} на вертикальну $\frac{dy}{dt}$ і горизонтальну $\frac{dx}{dt}$ складові та запишемо другий закон Ньютона в проєкціях на осі. Тоді

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{dx}{dt}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k \frac{dy}{dt}. \end{cases} \quad (5.2.5)$$

Система рівнянь (5.2.5) разом з початковими умовами (5.2.2) і є математичною моделлю руху тіла по балістичній траєкторії в середовищі з опором.

Як бачимо, система (5.2.5) містить два незалежні рівняння, які можуть бути проінтегровані окремо. Розв'язуючи цю систему, знаходимо

$$x = \frac{mv_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t}), \quad y = \frac{m}{k^2} \left(kv_0 \sin \alpha + mg(1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k}t \right).$$

Значно більший інтерес викликають моделі, які одержуються в припущенні, що величина сили опору пропорційна квадрату швидкості, а напрям сили протилежний напрямку швидкості. Цей факт справедливий для польоту тіл з початковою швидкістю, меншою за швидкість звуку ($v_0 \leq 300 \text{ м/с}$), наприклад, при стрільбі зі старинних гармат ядрами кулеподібної форми. Симетрія ядра дозволяє вважати його матеріальною точкою.

Через те що дальність і висота польоту ядра невеликі, то кривизною поверхні Землі можна знехтувати і вважати поверхню Землі площиною, а прискорення вільного падіння g постійним. Оскільки $|\vec{F}| = Cv^2$, тобто $\vec{F} = C|\vec{v}|\vec{v}$, то векторне рівняння Ньютона має вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} - c|\vec{v}|\vec{v}.$$

Записуючи рівняння Ньютона в проекціях на осі, одержуємо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -c\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\dot{x}, \\ m\ddot{y} = -c\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\dot{y} - mg \end{cases} \quad (5.2.6)$$

при початкових умовах (5.2.2).

Аналіз системи (5.2.6) показує, наскільки сильно її ускладнює урахування нелінійних сил опору повітря. А ми ввели в модель лише одне ускладнення. Така система не допускає розв'язків у вигляді простих аналітичних формул і її необхідно розв'язувати вже числовими методами, тобто для дослідження процесу доводиться створювати комп'ютерну модель, яка включає в себе відому тріаду “математична модель – числові методи – програмна реалізація”. Обчислювальні експерименти над математичною

моделлю дозволяють імітувати реальний об'єкт і зрозуміти його поведінку.

Розглянемо ще задачу балістики для сучасної нарізної далекобійної гармати. Дальність стрільби для неї складає десятки кілометрів, а швидкість польоту снаряду значно перевищує швидкість звуку (наприклад, становить 870 м/с). При таких швидкостях різко зростає опір повітря, а навколо снаряда утворюється хвиля сильного стиснення, яка розходитьсь від нього у вигляді конуса. На утворення цієї хвилі постійно витрачається кінетична енергія снаряда.

Модуль сили опору, як і раніше, можна записати у вигляді $|\vec{F}| = Cv^2$, але коефіцієнт пропорційності уже не константа, а функція $C(v)$, яка різко зростає зі зростанням швидкості v .

Для зменшення лобового опору снаряду надають форму витягнутого тіла обертання із загостреним переднім кінцем, а для стабілізації польоту снаряду надають обертового руху. Тому такий снаряд уже не можна розглядати як матеріальну точку. Його необхідно розглядати як тверде тіло з шістьма степенями вільності.

Велика дальність польоту не дозволяє знехтувати кривизною поверхні Землі, а через великий перепад висот прискорення вільного падіння g уже не є константою. Крім цього, в такій моделі потрібно врахувати і ефект обертання Землі, тобто той факт, що траєкторія центра мас снаряда вже не буде плоскою кривою. Для опису такого руху вже не достатньо двох декартових координат, а потрібно ввести сферичну систему координат.

Урахування всіх перерахованих фактів приводить до значного ускладнення моделі руху по балістичній кривій. Система диференціальних рівнянь громіздка і складна. Крім цього, в рівняння входять величини, які майже ніколи точно не відомі, наприклад розподіл щільності повітря на різних висотах. До того ж не можна виготовити снаряди абсолютно однаковими. Вони небагато відрізняються за масою, за формою, за кількістю порохового заряду, а отже, й за початковою швидкістю. Всі ці та багато інших неконтрольованих факторів приводять до того, що два снаряди, які випущені з однієї гармати буцімто при однакових умовах, ніколи не попадуть в одну точку. Це означає, що політ снаряда носить

ймовірнісний характер. Тому недостатня визначеність результату, а також складність моделі робить не тільки неможливим, але й беззмисловим її використання під час ведення бою.

Артилеристи при вистрілах користуються заздалегідь складеними таблицями для кожного конкретного типу гармат і снарядів а також практику пристрілки, тобто емпіричними моделями.

5.3. Математична модель руху планет у Сонячній системі. Задача двох тіл

В 1687 р. вийшли в світ відомі "Математичні начала натуральної філософії" Ньютона, в яких, на основі другого закону динаміки, він побудував механіку системи тіл і дав динамічне обґрунтування теорії руху планет.

Рух планет відбувається за законом всесвітнього тяжіння, за яким будь-які два тіла, що знаходяться на відстані r між собою та мають маси m і M , притягуються з силою, величина якої

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2},$$

де γ – гравітаційна стала ($\gamma = 6,6738 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$).

Геній Ньютона полягає в тому, що він зрозумів, що одна й та сама сила (всесвітнього тяжіння) змушує падати камінь на Землю й утримувати планети на орбітах. Цікаво, що це відкриття він зробив у 25-річному віці.

Закон всесвітнього тяжіння та закони Ньютона складають теоретичний фундамент, на якому побудована небесна динаміка та динаміка космічного польоту. Ці закони дозволили на єдиних принципах описати рух планет, одержати, як наслідок, закони Кеплера (1571–1630, німецький математик, астроном) і передбачити нові факти, зокрема, існування невідомих планет – Урана та Нептуна.

Нехай планета масою m рухається навколо Сонця, маса якого M ($M = 1,9891 \cdot 10^{30}$ кг). Необхідно описати рух цієї планети. Ігноруючи взаємним притяганням інших планет, прийдемо до задачі про рух двох тіл. Крім цього, не будемо враховувати такі фак-

тори, як опір міжпланетного середовища, несферичність планет, зміну з часом їх мас та інші.

Задамо декартову систему координат, у якій описуватимемо рух. Нехай Сонце знаходиться в початку координатної системи Oxy . Вісь x проходить через початкове положення планети при $t = 0$, а вісь y розміщена в площині обертання планети навколо Сонця (рис. 5.3).

Вважатимемо, що планета в момент часу t знаходиться в точці $E(x, y)$ (рис. 5.3).

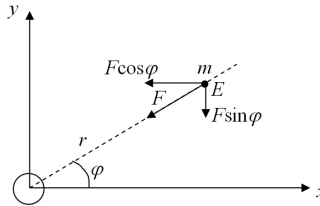


Рис. 5.3. Рух планети навколо Сонця

Силу притягування Сонця \vec{F} , що діє на планету, розкладемо на дві складові: паралельну до осі x і паралельну до осі y , які відповідно дорівнюють $F \cos \varphi$, $F \sin \varphi$.

Записуючи другий закон динаміки в проекціях на осі, одержуємо рівняння

$$m\ddot{x} = -F \cos \varphi = -\gamma \frac{mM}{r^2} \cos \varphi, \quad (5.3.1)$$

$$m\ddot{y} = -F \sin \varphi = -\gamma \frac{mM}{r^2} \sin \varphi. \quad (5.3.2)$$

Для замикання моделі задамо початкові умови

$$x = a, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = v_0, \quad \text{при } t = 0. \quad (5.3.3)$$

Систему (5.3.1), (5.3.2) зручно досліджувати в полярній системі координат r, φ . Із формул, що визначають зв'язки між полярними і декартовими координатами ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$), знаходимо

$$\ddot{x} = \ddot{r} \cos \varphi - 2(\dot{r} \sin \varphi) \dot{\varphi} - (r \sin \varphi) \ddot{\varphi} - (r \cos \varphi) \dot{\varphi}^2,$$

$$\ddot{y} = \ddot{r} \sin \varphi + 2(\dot{r} \cos \varphi) \dot{\varphi} + (r \cos \varphi) \ddot{\varphi} - (r \sin \varphi) \dot{\varphi}^2,$$

або

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \varphi, \\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Тепер, враховуючи (5.3.4), рівняння (5.3.1) та (5.3.2) можна переписати у вигляді

$$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cos \varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \sin \varphi = -\frac{k \cos \varphi}{r^2}, \quad (5.3.5)$$

$$(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \sin \varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \cos \varphi = -\frac{k \sin \varphi}{r^2}, \quad (5.3.6)$$

де $k = \gamma M$.

Помножимо обидві частини рівняння (5.3.5) на $\cos \varphi$, а рівняння (5.3.6) – на $\sin \varphi$ і додамо одержані рівняння, отримаємо співвідношення

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{k}{r^2}. \quad (5.3.7)$$

Якщо обидві частини рівняння (5.3.5) помножити на $\sin \varphi$, а рівняння (5.3.6) – на $\cos \varphi$ і відняти, то одержимо співвідношення

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \quad (5.3.8)$$

Початкові умови (5.3.3) в полярних координатах набувають вигляду

$$r = a, \quad \varphi = 0, \quad \dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{v_0}{a} \quad \text{при } t = 0. \quad (5.3.9)$$

Подальші дослідження проводитимемо для системи рівнянь (5.3.7), (5.3.8) з початковими умовами (5.3.9). Це і є рівняння руху планети навколо Сонця або космічного корабля навколо планети.

Рівняння (5.3.8) можна переписати у вигляді

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0,$$

інтегруючи яке, одержуємо

$$r^2\dot{\varphi} = C_1, \quad C_1 = \text{const.} \quad (5.3.10)$$

Дано інтерпретацію співвідношення (5.3.10). Припустимо, що тіло рухається з точки A в точку B по кривій $r = r(\varphi)$ (рис. 5.4). Нехай S – площа сектора, що обмежений відрізками OA , OB та дугою \widehat{AB} . Тоді

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi} r^2(\varphi) d\varphi, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Величину $\frac{dS}{dt}$ можна трактувати як швидкість зміни площі, яку "замітає" радіус-вектор $r(\varphi)$.

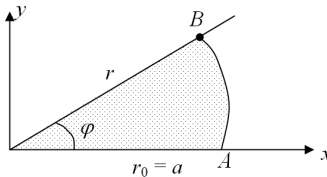


Рис. 5.4. Площа, яку описує радіус-вектор

Оскільки, згідно із формулою (5.3.10), величина $r^2\dot{\varphi}$ стала, тобто $\frac{dS}{dt}$ теж стала, то радіус-вектор за однакові проміжки часу описує рівні площі. Це і є закон площі – один із законів Кеплера. Повністю цей закон формулюється так: кожна з планет рухається по плоскій кривій відносно Сонця так, що радіус-вектор, що з'єднує Сонце і планету, "замітає" рівні площі за однакові проміжки часу.

Одержимо другий закон Кеплера, що описує траєкторію руху планети. З рівняння (5.3.10) при $t = 0$ маємо $C_1 = av_0$, тому $r^2\dot{\varphi} = av_0$, або

$$\dot{\varphi} = \frac{av_0}{r^2}. \quad (5.3.11)$$

З урахуванням (5.3.11) перепишемо рівняння (5.3.7) у вигляді

$$\ddot{r} = \frac{a^2 v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}.$$

Для інтегрування цього рівняння позначимо $\dot{r} = p$, тоді

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right) = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = p \frac{dp}{dr}$$

і рівняння набуває вигляду

$$p \frac{dp}{dr} = \frac{a^2 v_0^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}.$$

Відокремлюючи змінні, після інтегрування отримуємо

$$\frac{p^2}{2} = \frac{k}{r} - \frac{a^2 v_0^2}{2r^2} + C_2, \quad (5.3.12)$$

де C_2 – довільна стала.

Оскільки при $t = 0$ маємо $p = \dot{r} = 0$, $r = a$, то з (5.3.12) знаходимо

$$C_2 = \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{a}$$

і рівняння (5.3.12) набуває вигляду

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{k}{r} - \frac{a^2 v_0^2}{2r^2} + \frac{v_0^2}{2} - \frac{k}{a},$$

або, розглядаючи лише додатний квадратний корінь,

$$\dot{r} = \sqrt{\left(v_0^2 - \frac{2k}{a} \right) + \frac{2k}{r} - \frac{a^2 v_0^2}{r^2}}. \quad (5.3.13)$$

Розв'язуючи диференціальне рівняння (5.3.13), можна дістати явну залежність $r = r(t)$, що описує розташування планети відносно Сонця в довільний момент часу t . Але нас цікавить траєкторія планети при її русі навколо Сонця, а для цього потрібно мати рівняння, яке містить r і φ .

Для цього виключимо час t із системи диференціальних рівнянь (5.3.11), (5.3.13). Поділивши почленно (5.3.13) на (5.3.11), одержимо диференціальне рівняння

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \sqrt{\alpha r^2 + 2\beta r - 1}, \quad (5.3.14)$$

де $\alpha = \frac{1}{a^2} - \frac{2k}{a^3v_0^2}$, $\beta = \frac{k}{a^2v_0^2}$.

Відокремлюючи змінні в рівнянні (5.3.14), маємо

$$\frac{dr}{r\sqrt{\alpha r^2 + 2\beta r - 1}} = d\varphi.$$

Інтегруючи це співвідношення, дістанемо

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{\alpha r^2 + 2\beta r - 1}} = \varphi + C_3.$$

Зробивши у цьому інтегралі заміну змінних $r = \frac{1}{y}$ ($dr = -\frac{1}{y^2}dy$), одержимо

$$-\int \frac{dy}{\sqrt{\alpha + 2\beta y - y^2}} = \varphi + C_3,$$

або

$$-\int \frac{d(y - \beta)}{\sqrt{\alpha + \beta^2 - (y - \beta)^2}} = \varphi + C_3. \quad (5.3.15)$$

Зазначимо, що $\alpha + \beta^2 = \frac{1}{a^2} - \frac{2k}{a^3v_0^2} + \left(\frac{k}{a^2v_0^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{a} - \frac{k}{a^2v_0^2}\right)^2 \geq 0$.

У окремому випадку, коли $\alpha + \beta^2 = 0$, матимемо

$$-\int \frac{dy}{\sqrt{-(y - \beta)^2}} = \varphi + C_3,$$

що можливо при $y = \beta$, або при $r = \frac{a^2v_0^2}{k}$, тобто траєкторія планети – коло радіусом $\frac{a^2v_0^2}{k}$.

За умови $\alpha + \beta^2 > 0$ з (5.3.15) знаходимо

$$\arccos \frac{y - \beta}{\sqrt{\alpha + \beta^2}} = \varphi + C_3,$$

або

$$y = \beta + \sqrt{\alpha + \beta^2} \cos(\varphi + C_3).$$

Звідси випливає, що

$$r = \frac{1}{\beta + \sqrt{\alpha + \beta^2 \cos(\varphi + C_3)}} = \frac{1}{\beta(1 + e \cos(\varphi + C_3))},$$

де $e = \frac{\sqrt{\alpha + \beta^2}}{\beta}$, а враховуючи позначення для α та β , маємо

$$r(\varphi) = \frac{\frac{a^2 v_0^2}{k}}{1 + e \cos(\varphi + C_3)}, \quad e = \frac{a v_0^2}{k} - 1.$$

Визначимо тепер константу C_3 . Оскільки при $t = 0$, $\varphi = 0$, $r = a$, то з останнього рівняння знаходимо

$$1 + e \cos C_3 = \frac{a v_0^2}{k} = e + 1,$$

звідки $\cos C_3 = 1 \Rightarrow C_3 = 0$.

Остаточоно отримаємо

$$r = \frac{a^2 v_0^2 / k}{1 + e \cos \varphi}. \quad (5.3.16)$$

З аналітичної геометрії відомо, що (5.3.16) – це рівняння в полярних координатах конічного перетину з ексцентриситетом e .

При цьому можливі такі чотири випадки:

- 1) еліпс, якщо $0 < e < 1$, або $\frac{k}{a} < v_0^2 < \frac{2k}{a}$;
- 2) гіпербола, якщо $e > 1$, або $v_0^2 > \frac{2k}{a}$;
- 3) парабола, якщо $e = 1$, або $v_0^2 = \frac{2k}{a}$;
- 4) коло, якщо $e = 0$, або $v_0^2 = \frac{k}{a}$.

З астрономічних спостережень відомо, що для планет Сонячної системи $v_0^2 < \frac{2k}{a}$. Отже, маємо ще один закон Кеплера: траєкторії планет – це еліпси, в одному із фокусів якого знаходиться Сонце.

Зазначимо, що Кеплер відкрив свої закони без використання законів Ньютона (вони тоді ще не були відкриті), без уявлення про

сили тяжіння. Все, що було в його розпорядженні, – це щоденники руху небесних тіл, які впродовж багатьох років вів його учитель Тихо Браге і продовжував вести сам Кеплер. Ці два закони були сформульовані Кеплером у 1609 р. у книзі "Нова астрономія".

Зазначимо, що орбіти Місяця та штучних супутників Землі є еліпсами, для яких ексцентриситет близький до нуля, тобто траєкторії близькі до кола. Комета Галлея має орбіту "видовженого" еліпса, для якого ексцентриситет близький до одиниці. Ця планета з'являється в зоні видимості Землі приблизно через 76 років.

Умова $e \geq 1$ для планет сонячної системи не виконується, однак вона цікава для руху космічних тіл. Зокрема, по таких орбітах рухаються комети, що прилітають у Сонячну систему поза її меж. Небесні тіла, що рухаються по параболічних та гіперболічних траєкторіях, можемо спостерігати лише один раз.

Зауважимо, що умови, виписані в 1), 2), 3), 4), дають можливість визначити швидкість космічного корабля, щоб він міг рухатися по відповідній траєкторії. Наприклад, для орбіти, що є колом, маємо

$$v_0^2 = \frac{k}{a} = \frac{\gamma m_3}{r_0}, \quad (5.3.17)$$

де m_3 – маса Землі; r_0 – відстань корабля від центру Землі; γ – гравітаційна стала.

Якщо $r_0 - R_3 \ll R_3$, де R_3 – радіус Землі, то величину сили притягання F двох тіл масою m_3 та m_k можна прирівняти до величини сили тяжіння $P = m_k g$, де m_k – маса корабля.

Оскільки, згідно із законом всесвітнього тяжіння, величина сили взаємодії двох тіл масами m_3 і m_k

$$F = \gamma \frac{m_3 m_k}{r_0^2},$$

то маємо, що

$$\gamma \frac{m_3 m_k}{r_0^2} = m_k g, \text{ або } \frac{\gamma m_3}{r_0^2} = g.$$

Звідси, враховуючи співвідношення (5.3.17), одержуємо, що $v_0^2 = g r_0$.

Якщо припустити, що $r_0 \approx R_3 = 6377$ км, то маємо швидкість $v_k = 7,9$ км/с, що забезпечить кораблю рух по коловій орбіті.

Корабель, що рухається з такою швидкістю по коловій орбіті, не зможе впасти на Землю. Умова 3) визначає параболічну швидкість $v_{\text{п}} = \sqrt{2gr_0} \approx 11,18$ км/с. Умова 1) або $\sqrt{gr_0} < v_e < \sqrt{2gr_0}$ визначає еліптичну швидкість, а умова 2) або $v_{\text{г}} > \sqrt{2gr_0}$ – гіперболічну швидкість.

5.4. Математична модель маятника

Нехай на нерухомому шарнірі O на невагомій нерозтяжній нитці довжиною l підвішено тіло масою m , яке під дією сили тяжіння буде рухатися по колу, що розміщене у вертикальній площині. Така механічна система називається математичним маятником (рис. 5.5).

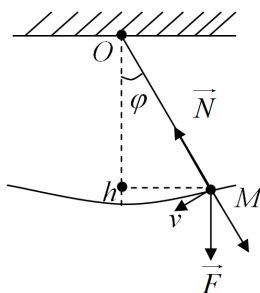


Рис. 5.5. Рух маятника

Для побудови математичної моделі маятника припустимо, що:

- шарнір ідеально гладкий, тобто в ньому не відбувається втрати енергії на тертя (нерухомість шарніра означає, що від нього енергія в систему не надходить);
- нитка невагома й абсолютно жорстка, тобто її кінетична та потенціальна енергії дорівнюють нулю;
- тіло масою m має значно менші розміри в порівнянні з довжиною нитки, тобто це тіло можна прийняти за матеріальну точку, на яку діють дві сили: \vec{F} – сила ваги та сила реакції нитки \vec{N} ;
- опір повітря відсутній;
- коливання відбувається у фіксованій вертикальній площині.

Ці припущення означають, що положення маятника повністю визначається лише однією координатою, а саме кутом φ відхилення нитки від вертикалі. Якщо маятник відхилити на кут φ , а потім відпустити, то, згідно із законом збереження енергії, $E_K + E_{\Pi} = \text{const}$ (оскільки енергія ні на що не витрачається). З цієї умови, враховуючи, що $E_K = \frac{mv^2}{2}$, $E_{\Pi} = mgh$, одержуємо

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} + mg(l - l \cos \varphi) = \text{const}.$$

Лінійна швидкість v із кутовою $\frac{d\varphi}{dt}$ пов'язані співвідношенням $v = l \frac{d\varphi}{dt}$, тому

$$\frac{m}{2} l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \text{const},$$

або, диференціюючи це співвідношення за t і скорочуючи на $ml \frac{d\varphi}{dt}$, прийдемо до рівняння

$$l \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \sin \varphi = 0. \quad (5.4.1)$$

Це рівняння і є математичною моделлю коливання маятника.

Увівши позначення

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l},$$

(5.4.1) можна переписати у вигляді

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (5.4.2)$$

Зауважимо, що рівняння (5.4.2) можна одержати ще на основі варіаційного принципу Гамільтона і на основі другого закону Ньютона, якщо його записати в проєкціях на дотичну до траєкторії руху.

Рівняння (5.4.2) нелінійне й не може бути проінтегроване в елементарних функціях. Однак важливі риси поведінки системи "стержень-тіло" можуть бути досліджені якісними методами.

Очевидно, що частинними розв'язками цього рівняння є $\varphi = 0$, $\varphi = \pm\pi, \dots$

Для аналізу рівняння (5.4.2) обмежимося спочатку випадком малих відхилень маятника від положення рівноваги ($\varphi \approx 0$). Тоді, як відомо, $\sin \varphi \approx \varphi$ і рівняння (5.4.2) набуває вигляду

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (5.4.3)$$

Рівняння (5.4.3) називається рівнянням малих коливань. Увівши позначення $\dot{\varphi} = z$, рівняння (5.4.3) зводиться до системи двох рівнянь

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = z, \\ \frac{dz}{dt} = -\omega_0^2 \varphi. \end{cases} \quad (5.4.4)$$

Для того, щоб у фазовій площині (φ, z) побудувати фазові траєкторії, виключимо в системі (5.4.4) час. Для цього поділимо друге рівняння на перше. Отримаємо

$$\frac{dz}{d\varphi} = -\frac{\omega_0^2 \varphi}{z}. \quad (5.4.5)$$

Рівняння (5.4.5) є рівнянням із відокремлюваними змінними. Його інтеграл має вигляд

$$z^2 + \omega_0^2 \varphi^2 = C^2, \quad (5.4.6)$$

де C – стала, що визначається з початкових умов. Рівняння (5.4.6) визначає сім'ю еліпсів. У частинному випадку, коли $C = 0$, еліпс вироджується в точку $(0, 0)$. Інтегральні криві, на яких указані напрямки руху, називаються фазовими траєкторіями (рис. 5.6). Напрямок стрілок визначається з першого рівняння системи (5.4.4), якщо $z > 0$, то й $\dot{\varphi} > 0$, тобто у верхній півплощині φ зростає, а в нижній півплощині φ спадає з ростом часу.

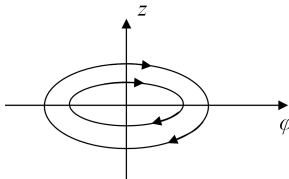


Рис. 5.6. Фазові траєкторії у випадку малих коливань

Стационарна точка $(0, 0)$ є особливою точкою типу центр, тобто положенням стійкої рівноваги. Отже, у разі малих відхилень від положення рівноваги коливання маятника будуть майже гармонічними з частотою ω_0 , яка не залежить від маси m і початкових умов.

Для рівняння (5.4.2) стаціонарною точкою є ще положення $\varphi = \pm\pi$, оскільки $\sin \pi = 0$.

Розглянемо тепер інший граничний випадок $\varphi \approx \pi$. Зробимо заміну $\alpha = \pi - \varphi$, тоді $\sin \varphi = \sin \alpha \approx \alpha$ і рівняння (5.4.2) матиме вигляд

$$-\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (5.4.7)$$

Аналогічно як для рівняння (5.4.3) знаходимо наступні рівняння інтегральних кривих:

$$z^2 - \omega_0^2 \alpha^2 = C^2, \quad z = \dot{\alpha}, \quad C = \text{const}. \quad (5.4.8)$$

Ці інтегральні криві вже гіперболи. Значенню $C = 0$ відповідає пара прямих $z = \omega_0 \alpha$ і $z = -\omega_0 \alpha$. Фазовий портрет зображений на рис. 5.7. Напрямки руху визначаються умовами: при $z > 0$ маємо $\dot{\alpha} > 0$, якщо $\alpha > 0$, то $\dot{z} > 0$.

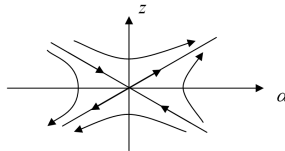


Рис. 5.7. Вигляд фазових траєкторій в околі нестійкої рівноваги

У цьому випадку особлива точка $(0, 0)$ є сідлом, тобто точкою нестійкої рівноваги. Будь-яке як завгодно мале збурення виводить систему з цього положення.

Об'єднуючи рис. 5.6 та рис. 5.7, отримаємо загальний фазовий портрет (рис. 5.8), тобто повне уявлення про поведінку розв'язків рівняння (5.4.2). Оскільки $\sin \varphi$ – періодична функція, то фрагменти цих малюнків будуть періодично повторюватися. Очевидно, що при проміжних значеннях φ указані фазові траєкторії будуть деформуватися.

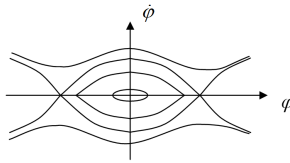


Рис. 5.8. Фазовий портрет математичного маятника

Замкнені траєкторії відповідають періодичним рухам маятника, незамкнені – обертанню тіла масою m навколо точки кріплення. Розмежують області замкнених і незамкнених траєкторій сепаратриса, які відповідають падінню тіла з верхньої нестійкої рівноваги $\varphi = \pi$ із нульовою початковою швидкістю.

Рівняння (5.4.2), що описує фазові траєкторії для математичного маятника, містить один параметр ω_0 . Цей параметр впливає тільки на форму фазових кривих, але не на їхній тип. Оскільки нас цікавить тільки якісна поведінка системи, то можна позбутися цього параметра. Для цього необхідно звести рівняння (5.4.2) до рівняння в безрозмірних змінних.

Справді, здійснивши заміну $\tau = \omega_0 t$, з (5.4.2) одержимо

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \sin \varphi = 0, \quad (5.4.9)$$

оскільки

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{d\varphi}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \omega_0 \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right) \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \omega_0 \right) \omega_0 = \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} \omega_0^2. \end{aligned}$$

На основі математичної моделі покажемо ще, що маятниковий годинник не може бути точним. Припустимо, що маятник відхилили на деякий кут α і потім відпустили (рис. 5.9). При цьому, згідно із законом збереження енергії, сума кінетичної і потенціальної енергії в будь-який момент часу t збігається з потенціальною енергією маятника у верхньому положенні (тут $v = 0$), тобто

$$\frac{mv^2}{2} + mg(l - l \cos \varphi) = mg(l - l \cos \alpha),$$

або

$$\frac{mv^2}{2} = mgl(\cos \varphi - \cos \alpha). \quad (5.4.10)$$

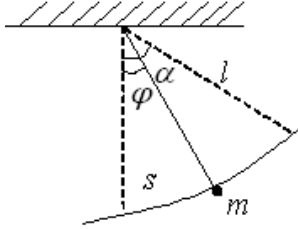


Рис. 5.9. Маятниковий годинник

Оскільки $v = l \frac{d\varphi}{dt}$, то рівняння (5.4.10) набуває вигляду

$$\frac{l}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = g(\cos \varphi - \cos \alpha),$$

звідки

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}. \quad (5.4.11)$$

Знак мінус взяли тому, що з ростом часу t кут φ спадає. Якщо T – період коливання маятника, то

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\alpha}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}},$$

або

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \alpha}}. \quad (5.4.12)$$

З формули (5.4.12) випливає, що період T залежить від α . Цей факт і є основною причиною того, що маятниковий годинник не точний, оскільки на практиці маятник піднімається в крайнє положення на кут, відмінний від α .

Нарешті зауважимо, що інтеграли у формулі (5.4.12) можна звести до еліптичних інтегралів, а це означає, що рівняння (5.4.9), як і рівняння (5.4.2), можуть бути розв'язані в еліптичних функціях.

5.5. Задачі для самостійної роботи

5.1. Аналогічно до того, як це зроблено для рівняння (5.1.1), у системі (5.2.5) перейти до безрозмірних змінних. Розв'язати отриману систему в аналітичній формі. Знайти максимальну висоту підйому та максимальну дальність польоту. Оснастивши модель числовими значеннями параметрів, провести серію обчислювальних експериментів. Визначити кут, при якому висота підйому максимальна.

5.2. У рамках моделі (5.2.1), (5.2.2) будемо вимагати, щоб у кінці польоту $y(t^*) = -h$. Знайти час польоту t^* , дальність польоту $x(t^*)$ та кут α , при якому досягається максимум функції $x(t^*)$.

Вказівка. Кут α необхідно знаходити числовими методами.

5.3. Аналогічно, як це зроблено в п. 5.2, побудувати математичну модель руху тіла по балістичній траєкторії у випадку, коли сила опору повітря пропорційна квадрату швидкості, тобто $\vec{F}_{\text{оп}} = -C \frac{\rho v \vec{v}}{2}$. Проаналізувати систему числовими методами. Проводячи обчислювальні експерименти, дослідити максимальну дальність польоту, кут, при якому досягається максимальна дальність польоту, та максимальну висоту підйому. **Вказівка.** Врахувати, що $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, де $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$.

5.4. Моделювання балістичної кривої. Побудувати математичну модель руху по балістичній кривій, якщо величина сили опору повітря $F_{\text{оп}} = Av + Bv^3$ і направлена в протилежний бік до швидкості руху \vec{v} . Виконати комп'ютерне дослідження цієї моделі при $A = 0,1 \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{М}}$, $B = 0,001 \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{М}}$, $v_0 = 20 \frac{\text{М}}{\text{с}}$. На основі комп'ютерних експериментів знайти значення кута, що забезпечує максимальну дальність польоту. Результати порівняти з випадком відсутності тертя ($A = B = 0$) та випадком лінійного тертя ($A \neq 0, B = 0$).

5.5. Тіло масою m кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю \vec{v}_0 . Знайти закон руху тіла, найбільшу висоту та час її досягнення за умови, що на тіло діє сила опору повітря, яка пропорційна квадрату швидкості.

5.6. Провести моделювання руху тіла, що рухається вертикально вверх–вниз без урахування опору повітря та з урахуван-

ням його опору за умови, що сила опору пропорційна швидкості. Знайти залежності для швидкостей та висоту підйому, побудувавши графіки цих залежностей, порівняти результати. Оснастивши модель відповідними числовими значеннями, розрахувати й порівняти максимальну висоту підйому тіла, час підйому, час падіння та швидкість у момент падіння. Знайти граничну швидкість дерев'яної кульки радіусом $r = 1$ см (густина дерева $\rho = 0,8 \cdot 10^3$ кг/м³). Опір повітря вважати таким, що дорівнює $0,04 v$.

5.7. Розв'язати попередню задачу для випадку, коли сила опору пропорційна квадрату швидкості. Опір повітря дорівнює $0,001 v^2$.

5.8. Парашутист спускається з висоти H на парашуті, який має форму напівсфери радіусом r . Маса парашутиста разом із масою парашута дорівнює m кг. Знайти швидкість парашутиста через 3 секунди після початку спуску та шлях, пройдений за цей час. Яку швидкість матиме парашутист у момент зіткнення із Землею? **Вказівка.** Вважати, що сила опору повітря $F_{\text{оп}} = kSv^2$, де S – площа найбільшого перерізу напівсфери, перпендикулярного до напрямку руху. Розглянути випадок, коли порушується умова перпендикулярності. Оснастивши модель числовими значеннями параметрів, побудувати графіки залежностей швидкості від пройденого шляху та від часу.

5.9. Матеріальна точка масою m притягується (відштовхується) центром, що міститься в початку координат, із силою, пропорційною відстані. Рух починається з точки $(x_0, 0)$ зі швидкістю \vec{v}_0 , що має напрям, перпендикулярний до осі Ox . Знайти траєкторію руху. Розглянути випадок, коли $F = \frac{km}{r^5}$, де r – відстань від точки до центра.

5.10. Метеорит, який знаходиться під впливом земного тяжіння, зі стану спокою починає прямолінійно падати на Землю з досить великої висоти H . Якою була б швидкість метеорита, якщо б він досягнув поверхні Землі за відсутності земної атмосфери (немає опору середовища)? Радіус Землі $R = 6378$ км, $g = 9,81$ м/с². Знайти час падіння. Побудувати графік залежності швидкості метеорита від пройдені відстані. **Вказівка.** Враховуючи закон тяжіння та другий закон Ньютона, маємо, що сили F

та P обернено пропорційні квадрату відстані метеорита від центра Землі:

$$\frac{F}{P} = \frac{R^2}{(H-x)^2} \Rightarrow \frac{a}{g} = \frac{R^2}{(H-x)^2}, \quad a = \frac{d^2x}{dt^2},$$

де $F = ma$ – сила, що діє на метеорит у момент часу t ; $P = mg$ – сила тяжіння, що діє на метеорит на поверхні Землі; $x(t)$ – відстань, що пройдена метеоритом із початку падіння.

5.11. Метеорит масою m падає на Землю вздовж прямої Ox , що сполучає центр метеорита з центром Землі. Метеорит знаходиться в точці $x = 0$ на доволі великій відстані H від Землі. Знайти закон руху метеорита, припустивши, що сила притягування обернено пропорційна до третього степеня відстані. Вважаємо, що при $t = 0$ метеорит перебуває в стані спокою.

5.12. Посадковий модуль вільно падає на Місяць, причому на висоті 50 км над поверхнею Місяця його швидкість \vec{v} направлена до центра Місяця і дорівнює 1500 км/год. Гальмівні реактивні двигуни модуля забезпечують сповільнення руху $g = 4 \text{ м/с}^2$. На якій висоті над поверхнею Місяця повинні бути активізовані гальмівні реактивні двигуни, щоб гарантувати м'яке приземлення ($v = 0$) при посадці?

Вказівка. Врахувати, що маса Місяця $M = 7,35 \cdot 10^{22}$ кг, а радіус Місяця $r = 1,74 \cdot 10^6$ м.

5.13. Космічний корабель масою m рухається з положення $(x(0), y(0))$ з початковою швидкістю \vec{v}_0 під дією сили притягання \vec{F} , що направлена в нерухомий центр планети. Визначити компоненти вектора швидкості космічного корабля як функції часу, а також траєкторію його руху.

Вказівка. У математичному пакеті типу Mathcad знайти розв'язки системи (5.3.1), (5.3.2) з початковими умовами (5.2.3) і показати, що при початковій швидкості $v_0 = 7500 \text{ м/с}$ відбудеться падіння корабля на поверхню планети. При $v_0 = 7923 \text{ м/с}$ траєкторією руху буде коло, при $v_0 = 10000 \text{ м/с}$ – еліпс, при $v_0 \geq 11206$ – парабола. При проведенні розрахунків вважати, що $x(0) = 6,4 \cdot 10^6$ м, $y(0) = 0$. Початкова швидкість направлена вертикально вверх, маса Землі $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг, радіус Землі $R = 6,378 \cdot 10^6$ м, гравітаційна стала $\gamma = 6,6738 \cdot 10^{-11} (\text{Н} \cdot \text{м}^2) / \text{кг}^2$.

5.14. Провести дослідження впливу збурень на орбітальну

станцію, що рухається по коловій орбіті навколо Землі, якщо в результаті пристикування ракети-носія станція отримує приріст швидкості Δv в напрямку дотичної до кола.

5.15. Планета масою m із деякого початкового положення $(x(0), y(0))$ з початковою швидкістю \vec{v}_0 рухається під дією сил притягання \vec{F}_1 та \vec{F}_2 двох нерухомих планет. Побудувати математичну модель для визначення координат та швидкості руху планети як функції часу, а також у пакеті типу Mathcad побудувати траєкторію руху планети при різних початкових даних у полі дії двох центральних сил. Показати нестійкий характер руху планети.

5.16. Побудувати математичну модель системи "Сонце–Земля–Місяць" (рис. 5.15). Дослідити траєкторію руху центрів Землі й Місяця навколо Сонця з урахуванням сил взаємодії між планетами. Дією сил притягання Місяця і Землі на рух Сонця знехтувати, оскільки маса Сонця значно більша за маси Місяця та Землі.

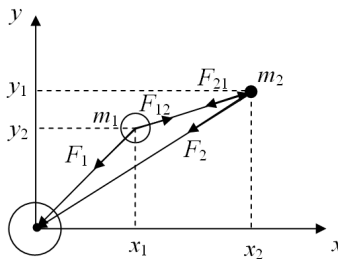


Рис. 5.15. Система "Сонце–Земля–Місяць"

Оснастивши модель числовими значеннями, в математичному пакеті типу Mathcad побудувати траєкторії руху Землі та Місяця в полі центральних сил.

5.17. Як показано в п. 5.3, на окремо взятую планету найбільше впливає Сонце, але всі планети притягують одна одну, тому рух кожної з них не описується задачею двох тіл. Серед усіх планет Сонячної системи необхідно, передусім, враховувати вплив Юпітера як наймасивнішої після Сонця планети (маса Юпітера перевищує суму мас решти 8-ми планет). Отже, приходимо до важливої модельної задачі небесної механіки – задачі про рух трьох

тіл під дією взаємного притягування (збуренням від інших планет Сонячної системи знехтуємо).

Побудувати математичну модель руху трьох матеріальних точок, які взаємно притягуються згідно з ньютонівським законом гравітації. Задати початкове положення та початковий рух.

5.18. Виконати комп'ютерне моделювання кеплерових орбіт, по яких рухатимуться штучні супутники, які запуснені з однієї і тієї ж точки на висоті h над поверхнею Землі в одному й тому ж напрямку, але з різними за величиною початковими швидкостями. Розглянути такі випадки:

а) початкова швидкість направлена перпендикулярно радіус-вектору в початковій точці, яка знаходиться на одному з кінців великої осі еліптичної орбіти (ця точка – перигей орбіти, якщо початкова швидкість перевищує кругову; і апогей, якщо швидкість запуску трохи менша кругової, а висота h досить велика). Якщо швидкість запуску точно дорівнює круговій швидкості, то тіло рухатиметься по круговій орбіті;

б) початкова швидкість направлена під деяким кутом до радіус-вектора в початковій точці. Усі еліпси в цій точці матимуть спільну дотичну, один із фокусів яких спільний для всіх орбіт, а інший буде розміщений на деякій прямій (супутник Землі можна одержати лише тоді, коли відстань від центра Землі до перигея еліптичної орбіти більша за радіус Землі).

Зауважимо, що запуск штучного супутника Землі відбувається на висоті h ($h > 150$ км), зазвичай перпендикулярно до радіального напрямку.

5.19. Виконати комп'ютерне моделювання еліптичних орбіт супутників, що вилітають з однієї точки над Землею в різних напрямках з рівними за модулем швидкостями. Наприклад, якщо ракета, піднята над Землею, в максимальній точці свого підйому розривається на окремі уламки, які розлітаються в різних напрямках з однаковими за модулем швидкостями. Подальший рух відбувається тільки під дією земного тяжіння. Якщо висота точки вибуху досить велика, а початкові швидкості приблизно дорівнюють круговій швидкості, то уламки стають супутниками Землі й надалі рухаються по еліптичних орбітах.

5.20. Виконати комп'ютерне моделювання траєкторій сна-

рядів, запущених з однієї точки на поверхні Землі під кутом $\alpha = 45^\circ$ з різними за модулем швидкостями. Такі траєкторії називаються балістичними. Показати, що неможливо запустити супутник пострілом з гармати, надаючи снаряду як завгодно великої початкової швидкості.

5.21. Розглянути реалістичніший випадок – коливання маятника з урахуванням опору середовища (сила в'язкого тертя напрямлена проти руху та пропорційна швидкості тіла $\vec{F} = -k\vec{v}$).

Побудувати математичну модель такої системи та виконати дослідження у випадку малих відхилень тіла від положення рівноваги $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$. Застосувати пакет Mathcad для числового інтегрування рівняння коливання маятника в середовищі з опором. Побудувати фазовий портрет.




Література: [1, 6, 7, 8, 9, 12, 26, 42, 44].

Розділ 6. Моделі електродинамічних процесів

6.1. Математичні моделі коливних електричних контурів

Електротехніка дає широкий спектр математичних моделей (більший, ніж механіка), що описують поведінку електротехнічних процесів. Робота електричних пристроїв (при деякій ідеалізації) математично описується системою звичайних диференціальних рівнянь.

Найважливіші деталі, з яких конструюються електричні пристрої, – це простіші типові елементи:

- — – резистор (його називають ще опором),
- — – котушка (називається індуктивністю),
- — – конденсатор (називається ще ємністю).

Зауважимо, що терміни опір, ємність, індуктивність і відповідні позначення R , C , L застосовуються в електротехніці як для позначення самих елементів, так і їх кількісних характеристик.

Кожна з цих деталей є двополюсником, тобто має два контакти (два полюси), які при монтуванні пристрою приєднуються до полюсів інших деталей.

Під час роботи пристрою через двополюсник проходить електричний струм, при цьому електричний стан двополюсника ab характеризується в кожний момент часу t двома величинами:

- силою струму $I_{ab}(t)$, що йде від полюса a до полюса b (вимірюється в амперах);
- спадом напруги $U_{ab}(t)$ від полюса a до полюса b (вимірюється у вольтах).

Порядок полюсів має значення, тобто важливо, який із полюсів на першому місці, а який – на другому. При зміні полюсів сила струму та напруга змінюють свій знак:

$$I_{ab}(t) = -I_{ba}(t), \quad (6.1.1)$$

$$U_{ba}(t) = -U_{ab}(t). \quad (6.1.2)$$

Знак визначає напрям струму. Додатний напрям струму задається довільно і, як правило, указується стрілкою. Додатний

напряг напруги найчастіше збігається з додатним напрямом струму.

Для кожного двополюсника ab функції $I_{ab}(t)$, $U_{ab}(t)$ не незалежні, а пов'язані між собою деякими співвідношеннями, які є фізичними законами, що управляють роботою двополюсника.

Фізичні закони для опору, самоіндукції та ємності, що управляють роботою, формулюються так:

– Для двополюсника ab , що є опором, має місце закон Ома (Георг Ом, 1784–1854, німецький фізик). Залежність між $U(t)$ та $I(t)$ задається формулою

$$U_{ab}(t) = R_{ab}I_{ab}(t), \quad (6.1.3)$$

де R_{ab} – додатний коефіцієнт, що називається опором (вимірюється в омах). Він сталий для даного двополюсника і завжди $R_{ab} = R_{ba}$;

– Для двополюсника ab , що являє собою індуктивність, має місце співвідношення (закон електромагнітної індукції)

$$U_{ab} = L_{ab} \frac{d}{dt} I_{ab}(t), \quad (6.1.4)$$

де L_{ab} – додатний коефіцієнт, що називається індуктивністю (вимірюється в генрі), постійний для даного двополюсника ($L_{ab} = L_{ba}$);

– Для двополюсника ab , що є конденсатором, має місце співвідношення

$$I_{ab} = C_{ab} \frac{d}{dt} U_{ab}(t), \quad (6.1.5)$$

де C_{ab} – додатний коефіцієнт, що називається ємністю (вимірюється в фарадах), постійний для даного двополюсника ($C_{ab} = C_{ba}$).

Інтегруючи (6.1.5), одержимо:

$$U_{ab}(t) = U_{ab}(t_0) + \frac{1}{C_{ab}} \int_{t_0}^t I_{ab}(t) dt, \quad (6.1.6)$$

або, в простішому випадку,

$$U_{ab}(t) = \frac{1}{C_{ab}} \int_{t_0}^t I_{ab}(t) dt. \quad (6.1.7)$$

Функція $q_{ab}(t) = C_{ab}U_{ab}(t)$ – це фізична величина, що описує стан конденсатора ab у даний момент часу й називається *зарядом* конденсатора (вимірюється в кулонах).

Електричні системи, в яких опір, індуктивність і ємність не залежать від величини та напрямку струму й напруги, називаються *лінійними*, оскільки напруга й струм у кожному з цих елементів зв'язані лінійними рівняннями (алгебраїчними чи диференціальними).

Описані двополюсники називаються пасивними, самі вони не можуть зумовлювати появи в пристрої електричних явищ. Появу в пристрої електричних струмів можуть викликати активні двополюсники – джерела напруги та джерела струму.

Для двополюсника, що є джерелом напруги, $U_{ab}(t) = U(t)$, де $U(t)$ – задана функція часу, що характеризує джерело напруги. Для джерела струму $I_{ab}(t) = I(t)$, де $I(t)$ – задана функція від t , що характеризує джерело струму.

Найчастіше розглядаються джерела, для яких $U(t)$, $I(t)$ є або константами, або періодичними функціями вигляду $a \cos(\omega t + \varphi)$.

Електричний ланцюг – це скінченна сукупність елементів (зокрема, двополюсників), полюси яких з'єднані у вузли так, що в кожному вузлі з'єднуються два або більше полюсів різних елементів ланцюга. Роботою електричних ланцюгів керують закони Кірхгофа (Густав Кірхгоф, 1824–1887, німецький фізик).

Перший закон Кірхгофа: алгебраїчна сума всіх струмів, що вливаються в кожний вузол ланцюга зі всіх елементів, які примикають до цього вузла, дорівнює нулю.

Нехай a – довільний вузол ланцюга s і b_1a , b_2a , \dots , b_na – сукупність усіх двополюсників, прилеглих до вузла a (рис. 6.1). Тоді

$$I_{b_1a}(t) + I_{b_2a}(t) + \dots + I_{b_na}(t) = 0. \quad (6.1.8)$$

Другий закон Кірхгофа стверджує, що для послідовності a , b , c , \dots , h , k вузлів замкненого електричного ланцюга (рис. 6.2):

$$U_{ab}(t) + U_{bc}(t) + \dots + U_{hk}(t) + U_{ka}(t) = 0, \quad (6.1.9)$$

тобто алгебраїчна сума спадів напруг уздовж довільного замкненого контуру ланцюга дорівнює нулю.

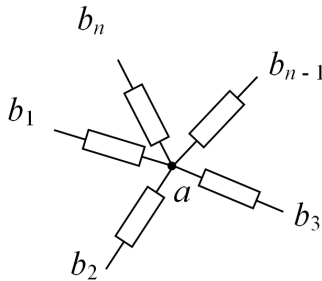


Рис. 6.1. Ілюстрація до першого закону Кірхгофа

Розрахувати роботу електричного ланцюга означає знайти струм $I(t)$ і напругу $U(t)$ для кожного двополюсника в довільний момент часу t . Якщо ланцюг складається з n двополюсників, то потрібно визначити $2n$ функцій часу.

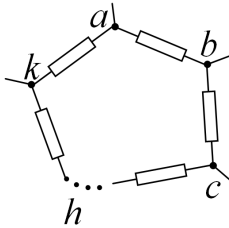


Рис. 6.2. Ілюстрація до другого закону Кірхгофа

Закони, що керують роботою кожного двополюсника окремо, дають n рівнянь. Решту n рівнянь дають закони Кірхгофа (закони Кірхгофа дають саме n незалежних між собою співвідношень).

У результаті маємо $2n$ рівнянь для $2n$ невідомих функцій. Рівняння ці частково алгебраїчні, а частково – диференціальні.

Приклад 6.1.1 (коливний контур). Нехай маємо електричний ланцюг із чотирма вузлами a, b, c, d і чотирма двополюсниками ab, bc, cd, da (рис. 6.3).

Двополюсник ab – індуктивність L , bc – опір R , cd – ємність C , ad – джерело напруги, $U_{ad} = U$.

Застосувавши перший закон Кірхгофа до вузла b , одержимо $I_{ab}(t) + I_{cb}(t) = 0$, або $I_{ab}(t) - I_{bc}(t) = 0$, або $I_{ab}(t) = I_{bc}(t)$. Таке співвідношення справедливе завжди, коли до одного вузла прилягають два двополюсники.

Отже,

$$I_{ab}(t) = I_{bc}(t) = I_{cd}(t) = I_{da}(t) = I(t), \quad (6.1.10)$$

де $I(t)$ – контурний струм.

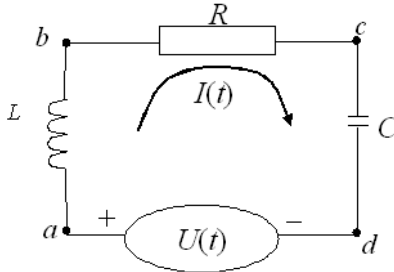


Рис. 6.3. Коливний контур

Далі для кожного двополюсника запишемо закони, що керують його роботою:

$$(6.1.3) \Rightarrow U_{bc}(t) = RI(t), \quad (6.1.4) \Rightarrow U_{ab}(t) = L \frac{d}{dt} I(t), \quad (6.1.11)$$

$$(6.1.5) \Rightarrow U_{cd}(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t) dt, \quad U_{da}(t) = -U(t).$$

Згідно з другим законом Кірхгофа, маємо:

$$U_{ab}(t) + U_{bc}(t) + U_{cd}(t) + U_{da}(t) = 0.$$

Враховуючи (6.1.11), одержимо

$$L \frac{d}{dt} I(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t I(t) dt = U(t).$$

Диференціюючи останнє співвідношення, отримаємо

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = \frac{d}{dt} U(t). \quad (6.1.12)$$

Рівняння (6.1.12) є математичною моделлю розгляданого контуру.

Якщо вважати, що $U(t) = 0$, то це рівносильно тому, що в ланцюгу відсутній активний джерело ad і ланцюг складається лише з трьох пасивних елементів ab , bc , cd (рис. 6.4).

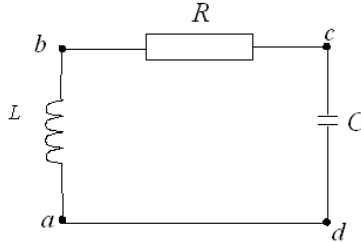


Рис. 6.4. RLC -контур

Рівняння, що описує роботу цього пасивного електричного ланцюга, має такий вигляд:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I(t) = 0. \quad (6.1.13)$$

У пасивному ланцюгу електричні явища самі по собі не виникають, про це свідчить той факт, що $I(t) \equiv 0$ є розв'язком рівняння (6.1.13). Можна розглянути роботу такого ланцюга за умови, що в ньому вже є струм, і з'ясувати, як цей струм буде змінюватися з часом.

Особливий інтерес викликає контур, у якому відсутній опір R . Такий ланцюг складається лише з двох пасивних елементів ab і cd . При цьому рівняння електричного ланцюга набуває вигляду

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0. \quad (6.1.14)$$

Звідси одержуємо, що при відсутності опору в контурі виникають незгасаючі коливання з власною частотою $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, тому такий ланцюг називається *коливним контуром*.

Заряд конденсатора задається формулою

$$q = CU(t), \quad (6.1.15)$$

де C – ємність конденсатора, $U(t)$ – різниця потенціалів.

У випадку відсутності опору (немає спаду напруги на проводах) різниця потенціалів на конденсаторі передається одразу на котушку.

Оскільки, за визначенням,

$$I(t) = -\frac{d}{dt}q(t)$$

(це означає, що при зменшенні заряду на конденсаторі струм у ланцюзі збільшується й навпаки), то з рівняння (6.1.4), враховуючи (6.1.15), маємо:

$$\frac{q}{c} = L \frac{d}{dt}I \Rightarrow \frac{q}{c} = -L \frac{d^2q}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Останнє співвідношення описує динаміку електричного заряду на клеммах конденсатора. Це рівняння аналогічне рівнянню (6.1.14), а отже, $q(t)$ теж змінюється періодично.

Пояснимо фізику цього коливного процесу. У початковий момент часу ланцюг розімкнений, заряд зосереджений на обкладках (клеммах) конденсатора. Між клеммами конденсатора виникає електричне поле, енергія якого $E = \frac{q^2}{2C}$. При замиканні електричного ланцюга конденсатор починає розряджатися й по ланцюгу потече струм. Енергія електричного поля буде зменшуватися, проте виникне зростаюча енергія магнітного поля, зумовленого струмом, що протікає через індуктивність. Ця енергія дорівнює $LI^2/2$. Оскільки активний опір контуру дорівнює нулю, то повна енергія, що дорівнює сумі енергій електричного та магнітного полів, буде постійною. У такому процесі періодично змінюється (коливається) заряд на клеммах конденсатора (напруга на конденсаторі) і сила струму, що протікає через індуктивність. Коливання супроводжуються взаємним перетворенням енергій електричного та магнітного полів. ▲

Приклад 6.2.2 (електричний фільтр). Розглянемо електричну схему з чотирма вузлами a , b , c , d і п'ятьма двополюсниками (рис. 6.5):

ab – індуктивність L ;

bc – індуктивність тієї ж величини L ;
 bd – ємність C ;
 ad – джерело напруги, яке подає напругу (батарея, генератор)
 $U_{ad}(t) = U(t)$;
 cd – опір навантаження R .

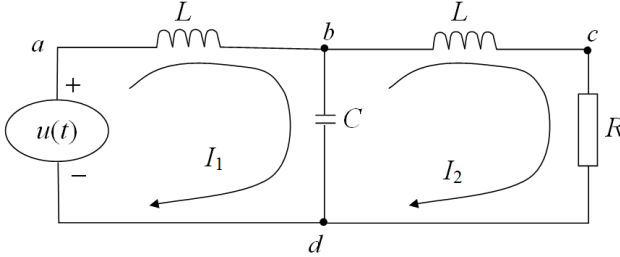


Рис. 6.5. Електричний фільтр

Нехай $I_{ab} = I_1$, $I_{bc} = I_2$, тоді, за першим законом Кірхгофа, маємо

$$I_{ab} + I_{db} + I_{cb} = 0, \text{ або } I_{bd} = I_1 - I_2, \quad I_{cd} = I_2.$$

На основі другого закону Кірхгофа отримаємо:

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} = 0,$$

$$U_{bc} + U_{cd} + U_{db} = 0,$$

або

$$L \frac{dI_1}{dt} + L \frac{dI_2}{dt} + RI_2 = U(t),$$

$$L \frac{dI_2}{dt} + RI_2 + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t (I_2 - I_1) dt = 0.$$

Продиференціювавши друге рівняння, одержимо систему

$$\begin{cases} L \frac{dI_1}{dt} + L \frac{dI_2}{dt} + RI_2 = U(t), \\ L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R \frac{dI_2}{dt} + \frac{1}{C} (I_2 - I_1) = 0. \end{cases}$$

Звідси, знайшовши I_1 з другого рівняння і підставивши в перше, дістанемо

$$L^2 \frac{d^3 I_2}{dt^3} + LR \frac{d^2 I_2}{dt^2} + 2 \frac{L}{C} \frac{dI_2}{dt} + \frac{R}{C} I_2 = \frac{1}{C} U(t). \quad (6.1.16)$$

Характеристичне рівняння для (6.1.16) має вигляд

$$L^2 \lambda^3 + LR \lambda^2 + 2 \frac{L}{C} \lambda + \frac{R}{C} = 0. \quad (6.1.17)$$

Згідно з критерієм Рауса–Гурвіца, цей многочлен має корені з від’ємними дійсними частинами (доведіть це). Це означає, що загальний розв’язок однорідного рівняння прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$.

Будемо вважати, що $U(t) = ae^{i\omega t}$ – комплексне гармонійне коливання, де a – дійсна амплітуда напруги, ω – частота напруги. Тоді частинний розв’язок (6.1.16) шукаємо методом комплексних амплітуд у вигляді $I_2 = be^{i\omega t}$. Можна показати, що напруга малої частоти легко передається через фільтр, майже не змінюючи амплітуди a , а напруга високої частоти через фільтр майже не проходить (фільтрується). Проведіть це дослідження самостійно. \blacktriangle

6.2. Рух електрона в однорідному електричному та магнітному полях

Розглянемо на початку рух електрона масою m і заряду e в однорідному електричному полі напруженості \vec{E} (вимірюється у вольтах на метр). Однорідність означає, що величина і напрям напруженості \vec{E} в кожній точці поля однакові. На електрон, що знаходиться в електричному полі, діє сила $\vec{F} = e\vec{E}$.

Задамо прямокутну систему координат на площині так, щоб вісь Ox збігалася з напрямом напруженості \vec{E} , а початок системи координат – з положенням електрона при $t = 0$.

Припустимо, що відомі величина початкової швидкості електрона v_0 , і її напрям, який складає з віссю Ox кут α .

У такій системі координат проекція вектора напруженості \vec{E} на вісь Ox $E_x = E$, а проекція на вісь Oy – $E_y = 0$. Записуючи закон Ньютона в проекціях на осі Ox та Oy , маємо

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = eE, \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0.$$

Інтегруючи ці рівняння, дістанемо

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eE}{m}t + C_1, \quad \frac{dy}{dt} = C_2, \quad (6.2.1)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі, які можна знайти, враховуючи зроблене припущення: $\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$, $\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha$ при $t = 0$. Дістанемо $C_1 = v_0 \cos \alpha$, $C_2 = v_0 \sin \alpha$, і рівняння (6.2.1) набувають вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eE}{m}t + v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \sin \alpha.$$

Інтегруючи ці рівняння, знаходимо

$$x = \frac{eE}{2m}t^2 + v_0t \cos \alpha + C_3, \quad y = v_0t \sin \alpha + C_4.$$

Константи C_3, C_4 знайдемо з початкових умов $x = 0, y = 0$ при $t = 0$. Остаточо отримаємо

$$x = \frac{eE}{2m}t^2 + v_0t \cos \alpha, \quad y = v_0t \sin \alpha,$$

або, виключаючи параметр t , дістанемо співвідношення

$$x = \frac{eE}{2mv_0^2 \sin^2 \alpha} y^2 + y \operatorname{ctg} \alpha,$$

яке задає параболу (рис. 6.6).

Розглянемо рух електрона масою m і заряду e в однорідному магнітному полі напруженості \vec{H} . Якщо електрон рухається в цьому полі зі швидкістю \vec{v} , то на нього діє сила \vec{F} , величина якої $F = evH$, а напрям перпендикулярний до площини векторів \vec{v}, \vec{H} , тобто $\vec{F} = e[\vec{v} \times \vec{H}]$, де \times означає векторний добуток.

Припустимо (для спрощень), що електрон при $t = 0$ знаходиться в початку системи координат і має початкову швидкість руху \vec{v}_0 , яка направлена вздовж осі Ox , вектор напруженості \vec{H} – перпендикулярний до площини xOy , а отже, сила \vec{F} , яка діє на електрон, лежить у площині xOy . За цих умов електрон увесь час залишається в площині xOy (рис. 6.7).

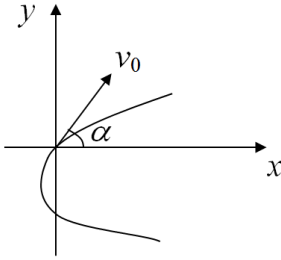


Рис. 6.6. Рух електрона в однорідному електричному полі

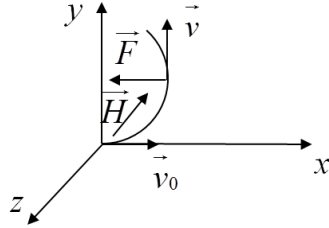


Рис. 6.7. Рух електрона в однорідному магнітному полі

Нехай у деякий момент часу t електрон знаходиться в положенні $(x(t), y(t))$, тоді $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$ – вектор швидкості. Оскільки

$$\vec{v} \times \vec{H} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & -H \end{vmatrix} = i \left(-H \frac{dy}{dt} \right) + j H \frac{dx}{dt},$$

то $\vec{F} = \left(-eH \frac{dy}{dt}, eH \frac{dx}{dt} \right)$.

Записуючи другий закон Ньютона в проекціях на осі, маємо

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -eH \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = eH \frac{dx}{dt}. \quad (6.2.2)$$

Інтегруючи рівняння (6.2.2), одержуємо

$$m \frac{dx}{dt} = -eHy + C_1, \quad m \frac{dy}{dt} = eHx + C_2.$$

Враховуючи початкові умови ($\dot{x} = v_0, \dot{y} = 0$ при $t = 0$), знайдемо

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{eH}{m}y + v_0, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{eH}{m}x.$$

Поділивши почленно друге рівняння на перше, дістанемо диференціальне рівняння для визначення траєкторії електрона:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{eHx}{mv_0 - eHy}.$$

Інтегруючи це рівняння і враховуючи початкові умови ($x = 0$, $y = 0$ при $t = 0$), остаточно отримуємо

$$eH(x^2 + y^2) - 2mv_0y = 0,$$

або

$$x^2 + \left(y - \frac{mv_0}{eH}\right)^2 = \left(\frac{mv_0}{eH}\right)^2.$$

Звідси можна зробити висновок, що в однорідному магнітному полі електрон рухатиметься по колу радіусом $\frac{mv_0}{eH}$ із центром у точці, яка лежить на осі Oy і знаходиться на відстані $\frac{mv_0}{eH}$ від початку координат.

Розглянемо тепер рух електрона масою m заряду e , коли на нього одночасно діють електричне поле напруженості \vec{E} і магнітне поле напруженості \vec{H} . Припустимо, що магнітне поле діє перпендикулярно до електричного, тобто $\vec{H} \perp \vec{E}$. Виберемо прямокутну систему координат у просторі так, що вісь Ox збігається з напрямком напруженості \vec{E} , вісь Oz – із напрямком магнітного поля \vec{H} , початок системи координат – з початковим положенням електрона, тобто при $t = 0$ $x = 0$, $y = 0$ (рис. 6.8).

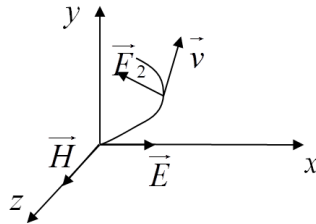


Рис. 6.8. Рух електрона в однорідному електромагнітному полі

Припустимо, що початкова швидкість $v_0 = 0$. При цьому вектор сили, що діє на електрон з боку електричного поля, має координати $(eE, 0)$, а з боку магнітного поля – $\left(-eH\frac{dy}{dt}, eH\frac{dx}{dt}\right)$. Згідно із законом Ньютона, маємо:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = eE - eH\frac{dy}{dt}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = eH\frac{dx}{dt}. \quad (6.2.3)$$

Інтегруючи рівняння (6.2.3), отримаємо:

$$m \frac{dx}{dt} = eEt - eHy + C_1, \quad m \frac{dy}{dt} = eHx + C_2, \quad (6.2.4)$$

де C_1, C_2 - довільні сталі.

Оскільки при $t = 0$ $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, то $C_1 = C_2 = 0$ і (6.2.4) набуває вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \frac{eE}{m}t - \frac{eH}{m}y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{eH}{m}x. \quad (6.2.5)$$

Підставивши вирази для $\frac{dx}{dt}$ і $\frac{dy}{dt}$, що визначені в (6.2.5), у рівняння (6.2.3), дістанемо

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{eH}{m}\right)^2 x = \frac{eE}{m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{eH}{m}\right)^2 y = \frac{e^2EH}{m^2}t.$$

Це лінійні неоднорідні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Інтегруючи ці рівняння і враховуючи початкові умови, остаточно знаходимо

$$x = \frac{mE}{eH^2} \left(1 - \cos \frac{eH}{m}t\right), \quad y = \frac{mE}{eH^2} \left(\frac{eH}{m}t - \sin \frac{eH}{m}t\right).$$

Це і є рівняння траєкторії руху електрона в однорідному електромагнітному полі. Значимо, що ці рівняння задають лінію, яка називається циклоїдою.

6.3. Задачі для самостійної роботи

6.1. Побудувати математичну модель сили струму в електричному ланцюзі, що зображений на рис. 6.9. Виконати аналіз моделі.

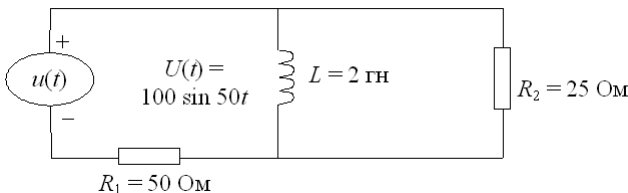


Рис. 6.9. Електрична схема до задачі 6.1

6.2. Враховуючи той факт, що в LC -контурі повна електромагнітна енергія, яка в будь-який момент часу дорівнює сумі енергій магнітного й електричних полів, незмінна, побудувати математичну модель, що описує процес вільних коливань величини заряду на конденсаторі.

6.3. Побудувати математичні моделі процесів, що протікають у RL - і RC -контурів у разі їх комутації на постійне джерело живлення. Схема комутації цих ланцюгів на постійне джерело живлення подана на рис. 6.10.

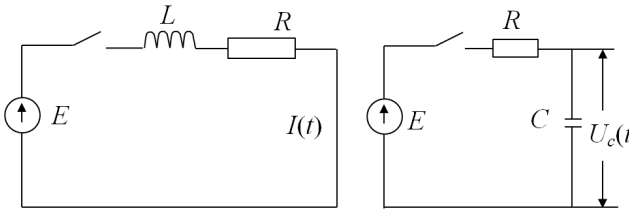


Рис. 6.10. Схема комутації RL - і RC -контурів на постійне джерело живлення

Дослідити часову залежність струму в RL -контурі та зміну напруги в RC -контурі.

Вказівка. Для побудови моделі використати другий закон Кірхгофа.

6.4. Побудувати математичну модель перехідних процесів, що протікають у RLC -контурі у разі комутації його на джерело постійного живлення (рис. 6.11).

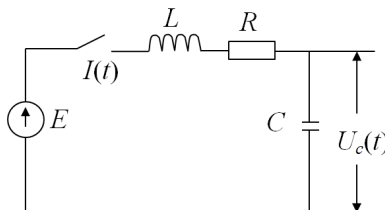


Рис. 6.11. Схема комутації RLC -контурі на джерело постійної напруги

Знайти можливі часові залежності величини струму $I(t)$ та напруги на конденсаторі $U_c(t)$. Побудувати графіки перехідних процесів. **Вказівка.** Для побудови моделі використати перший та другий закони Кірхгофа.

6.5. Побудувати математичну модель, що описує динаміку процесів фільтра низьких частот у разі його комутації на джерело постійної напруги (рис. 6.12).

Вказівка. Побудувати систему диференціальних рівнянь для $I(t)$, $U_c(t)$ на основі другого закону Кірхгофа. Знайти загальний розв'язок системи та розв'язок задачі Коші з нульовими початковими умовами. Побудувати графіки перехідних процесів.

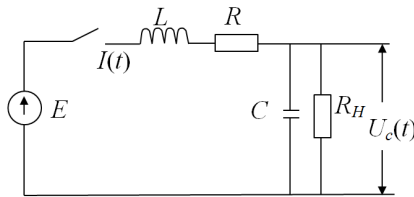


Рис. 6.12. Схема комутації навантаженого фільтра на джерело постійної напруги

6.6. Показати, що схема "електричний фільтр" пропускає напругу малої частоти майже не змінюючи амплітуди вхідної напруги, а напругу високої частоти, майже не пропускає (фільтрує).

Вказівка. Знайти частинний розв'язок I_2 рівняння (6.1.16) з правою частиною $U(t) = be^{i\omega t}$, $i = \sqrt{-1}$, у вигляді $ae^{i\omega t}$ і показати, що у випадку напруги малої частоти $|a|R \approx b$, а у випадку великої частоти – $|a|R \approx 0$.

6.7. Для лінійного електричного ланцюга з одним входом і двома виходами (рис. 6.13) побудувати і виконати аналіз моделі, що описує вихідні сигнали електричної системи.

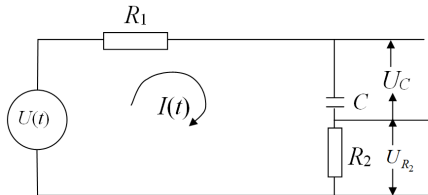


Рис. 6.13. Електрична схема до задачі 6.7

6.8. Для електричного ланцюга, що зображений на рис. 6.14, побудувати математичну модель для струмів $I_1(t)$, $I_2(t)$. Виконати аналітичний аналіз моделі.

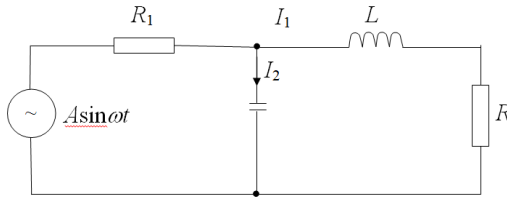


Рис. 6.14. Електрична схема до задачі 6.8

6.9. Для електричного ланцюга, що зображений на рис. 6.15, побудувати математичну модель для струмів $I_1(t)$, $I_3(t)$ та напруги $U_{C_2}(t)$. Провести аналіз моделі у випадку $E = \text{const}$.

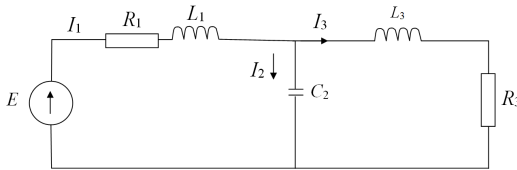


Рис. 6.15. Електрична схема до задачі 6.9

6.10. В однорідне електричне поле напруженістю $E = 200 \text{ В/м}$ влітає вздовж силових ліній електрон зі швидкістю $v_0 = 2 \text{ м/с}$. Визначити відстань, яку пройде електрон до точки, в якій його швидкість буде дорівнювати половині початкової.

Література: [8, 9, 48, 80, 81].

Розділ 7. Моделі росту чисельності ізольованих популяцій

Популяція – це довільна група організмів одного виду, що займає певний простір, функціонує як частина біологічної спільноти, може розмножуватися й розвиватися за певних умов навколишнього середовища.

Популяції характерна низка ознак (носієм ознак є група загалом, а не окрема особина в цій групі): густина (кількість, щільність, біомаса), народжуваність, смертність, вікова структура тощо. Всі популяції дуже мінливі. Екологів найбільше цікавить характер зміни чисельності. Чисельність популяції в часі може змінюватися по-різному: зростати, спадати, здійснювати коливання. Розглянемо основні моделі росту популяцій.

7.1. Модель Мальтуса

Нехай маємо деякий біологічний вид, для якого існує необмежений запас використовуваних ресурсів. Позначимо чисельність популяції в момент часу t через $N(t)$, тоді швидкість її зміни може бути подана як

$$\dot{N} = \text{народжуваність} - \text{смертність} + \text{міграція}.$$

У простішому випадку розглядається відсутність міграції та припускається, що народжуваність і смертність відбувається пропорційно загальній чисельності, тоді

$$\dot{N} = bN - dN \quad \text{або} \quad \dot{N} = aN, \quad a = b - d, \quad (7.1.1)$$

де b – коефіцієнт народжуваності, d – коефіцієнт смертності, a – коефіцієнт швидкості розмноження популяції.

Модель (7.1.1) уперше була запропонована в 1798 р. англійським економістом Томасом Мальтусом (Malthus, 1766–1834).

Розв'язком рівняння (7.1.1) при $a = \text{const}$ є експоненціальна функція

$$N(t) = N_0 e^{a(t-t_0)},$$

де $N_0 = N(t_0)$ – чисельність популяції в початковий момент часу $t = t_0$.

Якщо $a > 0$, то популяція росте з експоненціальним ростом ($N(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$); якщо $a < 0$, то популяція вимирає ($N(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$). Величину a ще називають біологічним потенціалом популяції або мальтузіанським параметром популяції.

Експоненціальний характер зростання чисельності популяції часто проявляється за природних умов у короточасні періоди, коли є достатньо їжі, немає скупченості, відсутні хижаки-вороги. Учені підрахували, що за сприятливих неконтрольованих умов потомство однієї пари мух через кілька років важило би більше за земну кулю.

Крім цього, експоненціальний характер зміни деякої величини спостерігається для багатьох відомих процесів і явищ природи, таких як поглинання світла, мономолекулярні хімічні реакції, радіоактивний розпад речовини, остигання чи нагрів тіла, зростання складних відсотків тощо. Модель Мальтуса використовували також до опису розвитку науки в період приблизно з 1700 р. до 1950 р., що засвідчує кількість опублікованих статей.

Помилка Мальтуса полягає в тому, що він це рівняння, яке справедливе для певного класу популяцій, вважав універсальним законом не тільки для всієї природи, але й для суспільства людей. Інтерпретуючи розв'язки рівняння (7.1.1), Мальтус стверджував, що в суспільстві людей має місце закон безмежного розмноження населення і цей ріст відбувається в геометричній прогресії, а засоби існування збільшуються лише в арифметичній прогресії. Звідси Мальтус прогнозував різні катастрофи для неконтрольованого росту народонаселення. Але абсолютизуючи лише біологічні фактори у відтворенні населення, Мальтус не оцінив належно адекватності моделі до реальності. Наприклад, якщо припустити, що ріст народонаселення мав завжди таку ж швидкість, що й зараз (подвоєння кількості за 40 років), то отримаємо висновок, що людство існує лише 32 покоління (близько 1300 років).

Але в той же час модель Мальтуса може бути застосовна на певних етапах (на обмежених часових інтервалах) до широкого класу динамічних процесів, які, насамперед, спостерігаються у лабораторних умовах: ріст мікробів, дріжджів, бактерій при наявності достатньої кількості поживних ресурсів у середовищі.

Цікаво, що точніший опис росту народонаселення дає не експоненціальна, а гіперболічна крива, якій відповідає квадратичний закон росту

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{c}. \quad (7.1.2)$$

Цій моделі можна дати таке біологічне обґрунтування: якщо загальна чисельність популяції $N(t)$, то можна вважати, що $N/2$ – чисельність особин чоловічої статі, $N/2$ – чисельність особин жіночої статі. Припустимо, що швидкість розмноження популяції пропорційна кількості зустрічей осіб чоловічої та жіночої статей, яка, і собі, пропорційна добутку цих чисельностей, тобто $N^2/4$. Таке припущення називається "гіпотезою ефективних зустрічей", а сама модель описує ріст популяції з урахуванням статевого розмноження. Розв'язок рівняння (7.1.2) $N(t) = \frac{c}{T-t}$ при $c \approx 2 \cdot 10^{11}$, $T \approx 2026$, як показує статистика, з достатньо високою точністю описує ріст населення Землі протягом останніх 500 років. Але ця формула стає незастосовною при $t = 2026$. Сучасні прогнози базуються на точніших моделях, які містять у собі як складову модель гіперболічного росту. Вони показують, що чисельність населення Землі з часом стабілізується на рівні $N^* = 12 \cdot 10^9$ [50]. Зараз населення Землі наближається до 6 млрд. Сам факт гіперболічного росту вказує на те, що з ростом населення швидкість росту теж збільшується, а не зменшується, як це природно було б припустити. Дійсно, для більшості видів на Землі спостерігається від'ємна кореляція між чисельністю популяції та швидкістю росту. Homo sapiens – єдиний відомий вид, для якого до цього часу кореляція між швидкістю росту і чисельністю позитивна [50].

7.2. Логістичне рівняння

Модель Мальтуса розглядалася, коли для розмноження популяції створені найсприятливіші умови і відсутні лімітуючі фактори. Проте сприятливі для розмноження умови не можуть довго існувати через вплив навколишнього середовища, присутність ворогів та інших несприятливих факторів, що значно зменшує швидкість зростання її чисельності.

У моделі Мальтуса для чисельності особин в ізольованій популяції при нерівних коефіцієнтах народжуваності та смертності існують лише дві альтернативи: або нескінченний ріст, або виро-дження.

Якщо коефіцієнти розмноження b і смертності d однакові, тобто $a = 0$, то будь-яка точка $N^* \geq 0$ є станом рівноваги, причому нестійким по відношенню до зовнішніх збурень.

Оскільки в реальній дійсності спостерігається стабілізація чисельності популяції на деякому рівні, то необхідно розглядати математичні моделі, в яких густина популяції відіграє важливу роль, тобто коефіцієнт розмноження в такій моделі не постійний, а залежить від чисельності особин у популяції. Отже, точніша математична модель вигляду

$$\frac{dN}{dt} = F(N)N, \quad (7.2.1)$$

де $F(N)$ – коефіцієнт швидкості відтворення популяції.

Розкладаючи функцію $F(N)$ у ряд Тейлора в околі нуля та залишаючи тільки лінійні члени, прийдемо до рівняння

$$\frac{dN}{dt} = (a + bN)N,$$

де a і b – деякі сталі, причому природно припустити, що $a > 0$ і $b < 0$.

Бельгійський математик Ферхюльст (Verhulst, 1804–1849) в 1838 р. для опису чисельності різних популяцій застосував модель

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \quad (7.2.2)$$

де r , K – додатні константи: r задає коефіцієнт природного відтворення – мальтузіанський параметр; K інтерпретується як потенціальна ємність екологічного середовища, яка визначається доступною кількістю ресурсів. Тобто ця модель уже враховує внутрішньовидову конкуренцію та дію лімітуючих факторів (нестача їжі, площі, світла). Це рівняння в літературі називають рівнянням Ферхюльста–Пірла (Pearl, 1879–1940). До такої моделі прийшов і Альфред Лотка (Alfred Lotka, 1880–1949) – американський математик, один із творців математичної біології.

Розв'язок рівняння (7.2.2) при початковій умові $N(0) = N_0$ має вигляд

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}. \quad (7.2.3)$$

З (7.2.3) видно, що $N(t) \rightarrow K$ при $t \rightarrow \infty$ для будь-яких $N_0 > 0$, тобто критична точка $N = K$ автономного рівняння є асимптотично стійкою, тоді як критична точка $N = 0$ – нестійка. K визначає граничне значення чисельності популяції (чисельність не зростає безмежно, а обмежена зверху).

Зауважимо, що асимптотичну стійкість стаціонарного стану рівняння (7.2.2) можна показати ще й за допомогою функції Ляпунова $V(N) = \left(1 - \frac{N}{K}\right)^2$.

Дійсно, $V(N) \geq 0$, $V(K) = 0$. Похідна функції $V(N)$ унаслідок рівняння (3.2.2)

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2r}{K}N\left(1 - \frac{N}{K}\right)^2 \leq 0, \quad \frac{dV(K)}{dt} = 0.$$

Розв'язок (7.2.3) при $0 < N_0 < K$ має вигляд S -подібної кривої (рис. 7.1), яку часто називають логістичною кривою, саме рівняння (7.2.2) в літературі іменують ще логістичним рівнянням.

Аналіз розв'язку (7.2.3) показує, що при $N_0 \ll K$ і малих значеннях t (підстановка $N_0 = 0$ в знаменник) справедливе наближене співвідношення $N(t) = N_0 e^{rt}$, яке свідчить, що за вказаних умов на початковій стадії процес має експоненціальний характер.

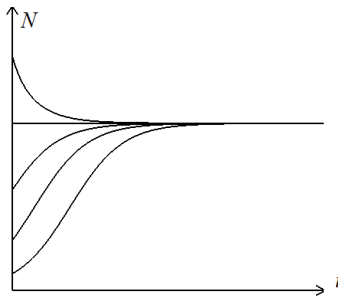


Рис. 7.1. Поведінка логістичних кривих

Американський біолог Раймонд Пірл вважав, що логістична крива не просто добре описує ріст багатьох популяцій, а є деяким фундаментальним біологічним законом росту, подібно до законів термодинаміки у фізиці. Багато різних процесів не тільки в біології, але й в економіці, соціології описуються логістичним рівнянням.

Але цілком очевидно, що логістичне рівняння (7.2.2), як і модель Мальтуса (7.1.1), не варто сприймати як рівняння, яке точно описує популяційну динаміку реальних систем. Найточніше логістичне рівняння описує динаміку лабораторних популяцій, чисельність яких прямує до деякого фіксованого значення.

Логістичне рівняння можна розглядати як перше наближення для описання динаміки чисельності популяцій, у яких регуляторні механізми є функціями самої чисельності.

Іноді зручно в рівнянні (7.2.2) перейти до безрозмірної величини $x = \frac{N(t)}{K}$ та зміненого часу $\tau = rt$. Тоді логістичне рівняння (7.2.2) набуде вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = x(1 - x),$$

розв'язком якого буде $x(\tau) = \frac{1}{1 - Ce^{-\tau}}$, $x(0) = x_0$. При $\tau \rightarrow \infty$ маємо, що $x \rightarrow 1$. Такий вигляд рівнянь та їх розв'язків має переваги, оскільки в нього не входять параметри. До того ж безрозмірне рівняння зберігає всі властивості та особливості вихідного рівняння.

7.3. Узагальнення логістичного рівняння

У логістичного рівняння (7.2.2) багато недоліків. Зокрема, точка перегину кривої $N(t)$, що задається формулою (7.2.3), завжди має координату $\frac{K}{2}$, що не відповідає натурним спостереженням, тому існують різні узагальнення моделі Ферхюльста–Пірла.

У деяких випадках для опису динаміки чисельності популяцій використовують рівняння

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^\alpha \right) N, \quad N(0) = N_0 > 0, \alpha > 0, \quad (7.3.1)$$

або загальніше

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \left(\frac{N}{K} \right)^\alpha \right)^\gamma N^\beta, \quad (7.3.2)$$

де всі параметри невід'ємні.

Для моделювання процесів різкого збільшення чисельності (властиве комахам), яке називається спалахом, використовують рівняння вигляду

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - p(N), \quad (7.3.3)$$

де член $p(N)$ описує винищення комах птахами. Очевидно, із загальних міркувань, що функція $p(N)$ повинна мати характер насичення. Цю функцію в екології називають трофічною функцією. Зокрема, часто для аналітичного виразу $p(N)$ беруть функцію Хассела $p(N) = bN^2/(a^2 + N^2)$, де a і b – додатні константи.

Тоді динаміка чисельності визначається рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{bN^2}{a^2 + N^2}. \quad (7.3.4)$$

Якщо виконати заміну змінних

$$x = \frac{N}{a}, \quad r' = \frac{ar}{b}, \quad K' = \frac{K}{a}, \quad \tau = \frac{bt}{a},$$

то в нових безрозмірних змінних рівняння (7.3.4) набуде вигляду

$$\dot{x} = r'x \left(1 - \frac{x}{K'} \right) - \frac{x^2}{1 + x^2}. \quad (7.3.5)$$

7.4. Логістичне рівняння з фактором запізнення.

Модель Хатчинсона

Недоліком логістичної моделі є використання миттєвих значень народжуваності та смертності, що визначаються станом популяції в певний момент часу. Насправді народжуваність залежить від чисельності популяції в попередні моменти часу, тому що, наприклад, існує проміжок часу τ між моментами зачаття і народжування. Час статевого дозрівання теж зумовлює фактор запізнення. Смертність більшою мірою залежить від стану популяції в

певний момент часу. Тоді логістичне рівняння переходить у рівняння із запізнюючим аргументом вигляду

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) N(t), \quad t \geq 0, \quad (7.4.1)$$

яке називається рівнянням Хатчинсона (Hutchinson, 1948). Тут $r > 0$ – коефіцієнт лінійного росту, $K > 0$ – середня чисельність у популяції, $\tau > 0$ – запізнення.

Рівняння (7.4.1) можна одержати ще й із таких міркувань. У реальній екосистемі ресурси самовідновлюються. Тому реальний рівень ресурсів, доступних у момент часу t , залежатиме від щільності виду в момент $t - \tau$, де τ – час розвитку виду, який служить ресурсом. Для замикання рівняння (7.4.1) необхідно задати початкову умову

$$N(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (7.4.2)$$

де $\varphi(t) \geq 0$ – неперервна функція.

Розв'язок такої задачі існує, причому єдиний [73].

Запровадимо в (7.4.1) заміну змінних

$$s = \frac{t}{\tau}, \quad N(t) = \frac{K}{r\tau} x(s),$$

тоді отримаємо

$$\frac{dx}{ds} = (a_1 - x(s - 1))x(s), \quad (7.4.3)$$

де $a_1 = r\tau$. Нетривіальний стаціонарний розв'язок рівняння (7.4.3) має вигляд $x^* = a_1$. Для дослідження стійкості вважатимемо, що $x(s) - a_1 = z(s)$.

Відносно $z(s)$ одержуємо рівняння

$$\frac{dz}{ds} = -z(s - 1)(z(s) + a_1).$$

Лінеаризуючи останнє рівняння, отримаємо

$$\frac{dz}{ds} + a_1 z(s - 1) = 0. \quad (7.4.4)$$

Розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді

$$z(s) = e^{\gamma s}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Для показника γ маємо характеристичне рівняння

$$\gamma e^\gamma + a_1 = 0. \quad (7.4.5)$$

Це рівняння досить повно досліджене в [88]. При цьому показано, що рівновага x^* буде стійкою (асимптотично) тоді й тільки тоді, коли корені характеристичного рівняння мають від'ємні дійсні частини.

При $0 < a_1 < \frac{\pi}{2}$ нетривіальна рівновага в рівнянні із запізненням стійка (як і без запізнення).

Якщо $a_1 > \frac{\pi}{2}$, то існують розв'язки, які не прямують до x^* при $t \rightarrow \infty$. Але вони залишаються обмеженими й коливаються навколо значення $x = x^*$.

Якщо в рівнянні (7.4.1) врахувати конкуренцію, то це рівняння набуде вигляду

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} - \frac{N(t-\tau)}{K} \right) N(t), \quad N(t) = \varphi(t), t \in [-\tau, 0]. \quad (7.4.6)$$

Для розв'язання таких рівнянь при $t \geq 0$ застосовують метод кроків. На відрізку $t \in [0, \tau]$ величина $N(t-\tau) = \varphi(t-\tau)$ відома, тому вихідне рівняння є рівнянням Бернуллі. Його розв'язок може бути знайдений аналітично або чисельно.

Далі розглядається відрізок часу $t \in [\tau, 2\tau]$, для якого функція $N(t-\tau)$ також уже відома, і знову можна знайти його розв'язок. Продовжуючи цей процес, знайдемо розв'язок на відрізку $[0, T]$.

Часто виявляється, що поведінка системи в момент часу t залежить не лише від моменту $t-\tau$, а й від усіх станів, що мали місце упродовж деякого періоду часу. Щоб врахувати цей факт, В. Вольтерра запропонував модель динаміки популяцій у вигляді

$$\frac{dN}{dt} = r \left(K - N(t) - \int_0^t K(t-\xi) N(\xi) d\xi \right) N(t), \quad (7.4.7)$$

де інтегральний член описує зменшення швидкості росту популяції внаслідок забруднення середовища, тобто враховує передісторію розвитку популяції.

Отже, уведення запізнення в логістичне рівняння приводить до виникнення значно ширшої якісної картини динаміки чисельності популяції.

7.5. Інші моделі динаміки ізольованих популяцій

7.5.1. Модель росту Гомпертца

При виведенні логістичного рівняння ми виходили з припущення, що темп росту чисельності популяції визначається поживним ресурсом середовища, тобто коефіцієнтом приросту

$$a = r \left(1 - \frac{N}{K} \right).$$

Гомпертц (Gompertz, 1779–1865, англійський математик-самоучка, відомий передусім законом росту, який названий його іменем) виходив із припущення, що коефіцієнт приросту є величиною постійною для всіх N , але зменшується з часом, до того ж цей спад являє собою динаміку першого порядку, тобто має експоненціальний характер. Причиною спаду може бути деградація, старіння або ускладнення організму.

Формалізація наведених вище припущень призводить до рівняння

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N, \quad (7.5.1)$$

причому коефіцієнт приросту вже не постійний, а змінюється за законом

$$\frac{da}{dt} = -\mu a, \quad (7.5.2)$$

де μ – додатковий додатний параметр, що характеризує зменшення $a(t)$.

Інтегруючи рівняння (7.5.2), одержуємо

$$a(t) = a_0 e^{-\mu t},$$

де a_0 – значення параметра a при $t = 0$.

Підставляючи $a(t)$ в (7.5.1), маємо

$$\frac{dN}{dt} = a_0 e^{-\mu t} N.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістанемо

$$N(t) = N_0 \exp[a_0(1 - e^{-\mu t})/\mu], \quad (7.5.3)$$

де $N_0 = N(0)$.

З (7.5.3) маємо $N(t) \rightarrow N_0 e^{a_0/\mu}$ при $t \rightarrow \infty$. При малих значеннях t вираз $e^{-\mu t} \approx 1 - \mu t$, тому $N(t) \approx N_0 \exp a_0 t$, тобто при малих t маємо експоненціальний закон росту.

Рівняння Гомпертца часто застосовують до моделювання росту ракових пухлин.

7.5.2. Популяції з ефектом Оллі

З рівняння (7.2.1) бачимо, що питомий темп приросту (коефіцієнт приросту) $F(N) = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ є функцією від N . Ця залежність може бути двоякою. На рис. 7.2 наведена залежність, яка є монотонно спадною при зростанні N : залежності 2 відповідають риби, равлики, жолудь дуба та інші; залежності 3 відповідають великі тварини; пряма 1 відповідає логістичній моделі.

Достовірна від'ємна кореляція між F і N , перевірена численними експериментами, завжди спостерігається в популяціях, що є компонентами стабільних екосистем.

На рис. 7.3 наведені немонотонні залежності, які зустрічаються в популяціях з яскраво вираженою груповою поведінкою і взаємодопомогою, наприклад, у колоніях птахів і тварин, у яких існують групові форми захисту від нападів хижаків, сумісне вирощування потомства тощо. Тут при деяких значеннях N (коли починає виявлятися ефект групи) починає зростати $F(N)$, а далі через недостатність ресурсів величина $F(N)$ спадає. Такий тип залежностей називається кривими Оллі (Allee, 1885–1955).

Найпростішу залежність Оллі можна задати кубічною параболою

$$F(N) = N^3 + pN^2 + qN + r,$$

де p, q, r – сталі, які можна визначити за трьома значеннями F у довільних точках.

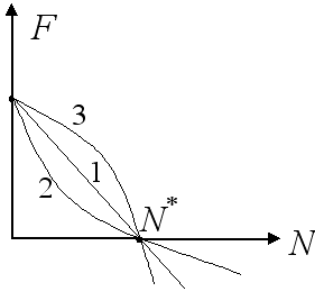


Рис. 7.2. Монотонна залежність

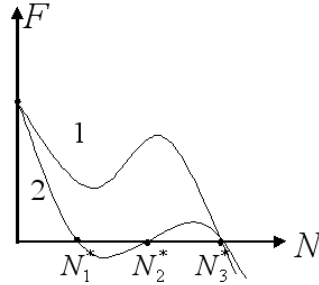


Рис. 7.3. Немонотонна залежність типу Оллі

У разі монотонної залежності, крім нульової стаціонарної точки рівняння (7.2.1), існує ще одна нетривіальна стаціонарна точка $N = N^*$ (рис. 3.2), причому нетривіальний стаціонарний розв'язок стійкий, оскільки $\frac{dN}{dt} > 0$ при $N < N^*$ і $\frac{dN}{dt} < 0$ при $N > N^*$.

У разі залежності типу Оллі можливе існування декількох стаціонарних станів. Для кривої Оллі 2 з рис. 7.3 існує три нетривіальних стаціонарних стани, причому N_1^* , N_3^* (із найменшою і найбільшою чисельністю) стійкі, а N_2^* (із проміжним значенням чисельності) – нестійкий. Нульова стаціонарна точка у цих двох випадках нестійка.

Тобто залежність типу Оллі призводить до виникнення нового ефекту, наприклад, до виникнення декількох стійких стаціонарних станів, що може бути інтерпретовано як виникнення деякої нової форми адаптації до навколишнього середовища.

Для аналізу стійкості стаціонарних розв'язків користуються ще методом фазових діаграм – графіками залежності $\frac{dN}{dt}$ від N .

На рис. 7.4 побудовані фазові діаграми для монотонних і немонотонних залежностей із декількома стаціонарними точками. Як бачимо, стійкість пов'язана зі знаком похідної $\frac{d}{dN}(F(N)N)$ у стаціонарній точці.

Оскільки

$$\frac{d}{dN}(F(N)N) = \frac{dF}{dN}N + F(N) = \frac{dF}{dN}N + \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$$

і $\frac{dN}{dt} = 0$ в стаціонарній точці N^* , то стаціонарна точка N^* асимптотично стійка, якщо в ній $\frac{dF(N^*)}{dN} < 0$, і нестійка, якщо $\frac{dF(N^*)}{dN} > 0$.

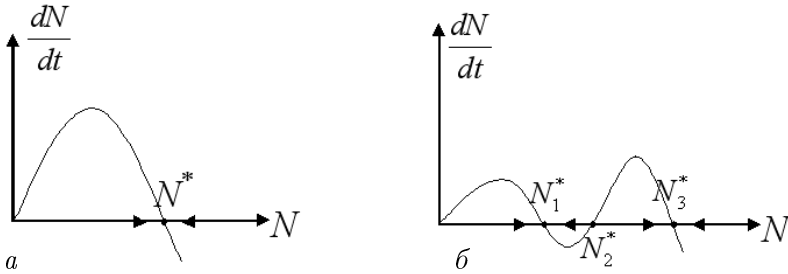


Рис. 7.4. Фазові діаграми: *а* – монотонних; *б* – немонотонних залежностей

Зауважимо, що в екології розрізняють слабкий та сильний ефекти Оллі. У разі слабого ефекту Оллі $F(N) > 0$ при $0 < N < N_1^*$ (крива 2 на рис. 7.3). У разі сильного ефекту Оллі $F(N) < 0$ при $0 < N < N_1^*$, тобто якщо N стає меншим граничної чисельності N_1^* , то швидкість росту $\frac{dN}{dt}$ стає від'ємною, популяція вимирає. Цей ефект можна інтерпретувати як недостатню чисельність популяції, за якої репродуктивні особини не знаходять одні одних.

Типова форма врахування сильного ефекту Оллі в логістичному рівнянні має вигляд

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) (N - L), \quad L < K, r > 0. \quad (7.5.4)$$

Ця модель враховує природну смертність, внутрішньовидову конкуренцію і нижню межу чисельності. Фазова діаграма та поведінка розв'язків у цьому випадку має вигляд, зображений на рис. 7.5.

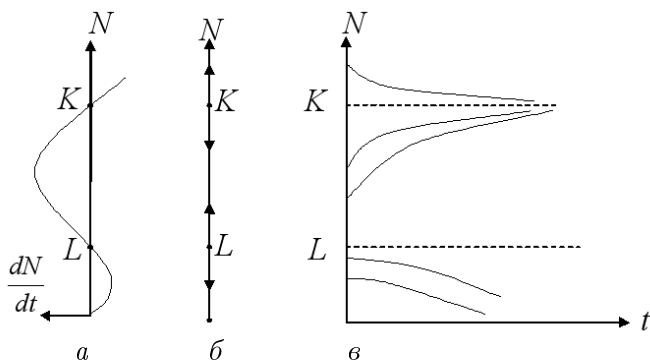


Рис. 7.5. Фазова діаграма та поведінка розв'язків у випадку сильного ефекту Оллі: *a* – графік зміни швидкості розмноження; *б* – фазова пряма; *в* – поведінка розв'язків рівняння (7.5.4)

Стационарні точки $N = 0$ і $N = K$ стійкі, а $N = L$ – нестійка, тобто якщо початкові умови популяції такі, що $N(0) = N_0 < L$, то популяція вимирає, тобто L задає нижню межу виродження популяції. Ця біологічна характеристика конкретного виду різна для різних популяцій. Спостереження біологів показали, що для ондатр це лише пара особин на тисячу км², а для американського голуба – це вже сотні тисяч особин (заздалегідь важко передбачити, що такий численний вид приречений на вимирання). Для блакитних китів критична границя чисельності дорівнює десяткам сотень. Хижацьке винищення цих тварин призвело до зменшення їх кількості в світовому океані. І хоча полювання на них заборонено, надії на відновлення популяції блакитних китів практично немає. Такі критичні стани важливо знати для планування процесів відбору особин у популяції при промисловому значенні біологічного виду.

Отже, враховуючи на етапі концептуальної постановки задачі все більше й більше факторів, які впливають на чисельність популяції, ми приходимо до ієрархії математичних моделей, для яких одержати розв'язок в аналітичній формі уже, як правило, не вдається. Але деякі властивості розв'язків можна вивчити шляхом якісного дослідження диференціальних рівнянь. Для того, щоб одержати кількісні характеристики, необхідно перейти до таких етапів математичного моделювання: побудова і дослідження

дискретних моделей, розробка та дослідження числових алгоритмів, створення й тестування програм, проведення розрахунків і аналіз результатів.

7.6. Задачі для самостійної роботи

7.1. Показати, що рівняння (7.2.2) має розв'язок, який задається формулою (7.2.3). Знайти розв'язок узагальненого логістичного рівняння (7.3.1), зробити його якісний аналіз.

7.2. Виконати якісний аналіз поведінки розв'язків рівняння (7.3.5). Знайти нерухомі точки та дослідити їх на стійкість за першим наближенням. Знайти значення параметрів r' , K' , за яких відбувається поява або зникнення нетривіальних станів рівноваги, що є точками біфуркації.

7.3. Розглянути математичну модель (7.3.3) для вилову риби (полювання):

а) у випадку лінійної інтенсивності вилову риби, тобто $p(N) = \alpha N$, де $\alpha > 0$ – постійні затрати;

б) у випадку постійного доходу за одиницю часу, тобто $p(N) = A$, де $A > 0$ задає вилов риби за одиницю часу (швидкість вилучення популяції).

Знайти розв'язки цих рівнянь та побудувати якісну картину розв'язків. Дати відповідь на питання, яка з цих двох стратегій катастрофічніша для динаміки промислової популяції. Для другого випадку знайти точки біфуркації і побудувати фазові портрети.

7.4. Для диференціального рівняння

$$\frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N}{K_1}\right) \left(1 - \frac{N}{K_2}\right) \left(\frac{N}{K_3} - 1\right)$$

із критичними точками K_1 , K_2 , K_3 ($K_1 > K_2 > K_3$) побудувати фазову діаграму, визначити стійкість цих точок та зобразити якісну картину поведінки розв'язків $N(t)$. Розглянути різні варіанти збігу критичних точок.

7.5. Для рівняння Хатчинсона (7.4.1) при $N(t) = N_0$, $t \in [-\tau, 0]$ проілюструвати метод кроків. Розглянути три кроки: 1) $t \in [0, \tau]$, 2) $t \in [\tau, 2\tau]$, 3) $t \in [2\tau, 3\tau]$.

7.6. Розглянути нестационарне логістичне рівняння

$$\frac{dN}{dt} = N(r(t) - \gamma(t)N).$$

Записати розв'язок цього рівняння з початковою умовою $N(0) = N_0$ (це рівняння Бернуллі й за допомогою заміни змінних $N(t) = \frac{1}{x(t)}$ зводиться до лінійного рівняння відносно $x(t)$). Побудувати розв'язок у випадку, коли $r(t) = \text{const}$, а $\gamma(t)$ – періодично змінюється біля деякого сталого рівня q так, що $\gamma(t) = q + \beta \sin \omega t$, де ω – частота зовнішнього збурення, β – амплітуда збурення.

7.7. Розглянути популяцію з узагальненим гіперболічним законом росту

$$\frac{dN}{dt} = rN^2 \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Виконати якісний аналіз поведінки розв'язків.

7.8. Показати, що для величини $N(t)$ у моделі Гомпертца можна отримати рівняння

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{\ln N}{K}\right),$$

де r і K – додатні параметри.

Виконати якісний аналіз поведінки розв'язків цього рівняння. Знайти нерухомі точки і дослідити їх на стійкість за першим наближенням. Знайти точний аналітичний розв'язок та порівняти з попередніми результатами. Знайти точку перегину розв'язку рівняння Гомпертца.

7.9. Гібрид рівняння Гомпертца та логістичного рівняння дає рівняння Чантера (Chanter, 1976), яке має вигляд

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{\ln N}{K}\right) e^{-\mu t}, \quad N(0) = N_0,$$

де r , K , μ – додатні параметри.

Знайти розв'язок рівняння Чантера та дослідити його властивості. Порівняти розв'язок рівняння Чантера з розв'язками логістичного рівняння та рівняння Гомпертца.

7.10. Для описання росту організму використовують неавтономну модель

$$\dot{W} = \frac{aW}{t}, \quad W(t_0) = W_0,$$

де W – вимірюваний параметр організму (вага, довжина, об'єм), t – час (вік організму), W_0 – значення W у початковий момент часу t_0 , a – невід'ємна константа. Необхідно:

а) виписати явний розв'язок цієї моделі, детально проаналізувати поведінку траєкторій;

б) в експерименті було виявлено, що ця модель добре описує ріст організмів лише на окремих стадіях. Різним стадіям відповідають різні значення a . Записати точнішу модель з урахуванням стадійного розвитку і зобразити графік росту в звичайній та логарифмічній шкалах.

7.11. Для різностатевих популяцій в умовах необмеженого ресурсу динаміку чисельності добре описує модель

$$\frac{dN}{dt} = rN^2.$$

Однак за умови великої щільності особин у популяції швидкість розмноження лімітує вже не кількість зустрічей протилежної статі, а кількість самок у популяції. Модель, яка враховує цей факт, має вигляд

$$\frac{dN}{dt} = a \frac{\beta N^2}{\beta + \nu N}, \quad N(t_0) = N_0,$$

де a, b, ν – додатні константи. Побудувати графіки розв'язків цього рівняння.

7.12. Біологи встановили, що деякі бактерії розмножуються зі швидкістю, пропорційною їх наявній кількості, але одночасно утворюють отруту, що знищує їх зі швидкістю, пропорційною з коефіцієнтом b кількості отрути та кількості бактерій. Припустимо, що швидкість утворення отрути пропорційна наявній кількості бактерій. Установити закон розмноження бактерій. Якого найбільшого значення може досягти чисельність бактерій? Як зв'язані між собою чисельність популяції бактерій і кількість отрути? Побудувати графіки цих залежностей.

7.13. Побудувати математичну модель росту дерева. Провести дослідження моделі. Зобразити графік кривої росту дерева залежно від часу.

Вказівка. При моделюванні динамічного росту дерева врахувати, що: 1) вільну енергію дерево отримує тільки за рахунок фотосинтезу (продуктивність фотосинтезу пропорційна площі крони дерева); 2) енергія витрачається на ріст (збільшення біомаси), дихання (основний обмін) і транспортування поживних речовин із ґрунту на необхідну висоту.

7.14. Простіша математична модель динаміки вікового складу популяції має вигляд:

$$\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial t} = -\mu(\tau)x, \quad \tau, t > 0,$$

$$x(0, t) = \int_0^{\infty} b(\tau)x(\tau, t)d\tau, \quad t \geq 0,$$

$$x(\tau, 0) = \varphi(\tau), \quad \tau > 0,$$

де $x(\tau, t)$ – густина популяції особин віку τ у момент часу t ; $b(\tau)$, $\mu(\tau)$ – функції народжуваності та смертності; $\varphi(\tau)$ – початковий розподіл вікового складу. З'ясувати, як функції $b(\tau)$, $\mu(\tau)$ впливають на динаміку чисельності популяції з ростом часу.

Вказівка. Розв'язок задачі шукається у вигляді $x(\tau, t) = e^{\gamma t}r(\tau)$. Побудувати рівняння для γ і знайти умови від'ємності γ .

Література: [12, 18, 29, 45, 55, 67, 68, 69, 77, 84, 88].

Розділ 8. Аналіз двовимірних моделей динаміки чисельності популяцій

8.1. Класифікація типу взаємодії між популяціями

Різні види популяцій взаємодіють між собою по-різному. Характер впливу одного виду на інший можна зобразити одним зі знаків: "+" (стимулюючий), "-" (пригнічений), "0" (нейтральний).

Розглянемо можливі типи парних взаємодій між популяціями.

1. Нейтралізм (0, 0). При такій взаємодії жодна популяція не впливає на іншу. Формально це виражається в тому, що рівняння динаміки є незалежними.

2. Аменсалізм (-, 0). При такій взаємодії другий вид пригнічує ріст першого (аменсала), а сам не відчуває суттєвого впливу з його боку. Такі взаємодії відомі між рослинами і тваринами, рослинами і мікроорганізмами тощо. Формально у разі такої взаємодії коефіцієнт приросту першого виду тим менший, чим більша чисельність другого виду, а коефіцієнт приросту другого виду не залежить від чисельності першого.

3. Коменсалізм (+, 0). Популяція першого виду (коменсал) має вигоду від популяції другого виду і тим самим забезпечує собі існування. Наприклад, у лева існує ціла низка коменсалів: гієни, шакали, птахи та ін.

4. Хижак-жертва (+, -). Це такі відношення між популяціями, при яких збільшення / зменшення чисельності популяції жертви приводить до збільшення / зменшення чисельності хижака, а збільшення / зменшення хижака спричинює зменшення / збільшення чисельності жертви.

5. Конкуренція (-, -). Пряме пригнічення двох видів. Міжвидова конкуренція може бути різною: за простір, за їжу, за інші ресурси. У моделях конкуренції коефіцієнти приросту чисельності цих видів є монотонно спадними функціями.

6. Мутуалізм (+, +). Це відношення вигідного впливу на швидкості зростання обох видів. Без такої взаємодії кожна з популяцій окремо існувати не може.

7. Протокооперація (+, +). Вигода обом, але популяції можуть існувати окремо.

8.2. Система Лотки–Вольтерри ”хижак–жертва”

Одна з перших моделей, що описує динаміку чисельності двох популяцій, що взаємодіють за принципом ”хижак–жертва”, була запропонована В. Вольтеррою (V. Volterra, 1860–1940, італійський фізик, математик). Вона історично виникла під час спроби пояснити коливання вилову риби в Адріатичному морі. Така система була дещо раніше запропонована А. Лоткою (А. Lotka, 1880–1949, один із творців математичної біології), але Вольтерра здійснив повніший аналіз цієї системи.

Позначимо через $x(t)$, $y(t)$ кількість особин жертви та хижака відповідно. Припустимо, що у випадку, коли популяції знаходяться ізольовано одна від одної, їхній розвиток відбувається згідно з принципом Мальтуса: за відсутності хижака популяція жертви експоненціально зростає, а за відсутності жертви популяція хижака експоненціально вимирає.

Позначимо коефіцієнти природного приросту хижака та жертви через ε_1 та $-\varepsilon_2$, тоді рівняння росту у разі цих припущень матимуть вигляд

$$\dot{x} = \varepsilon_1 x, \quad \dot{y} = -\varepsilon_2 y.$$

Якщо такі види існують в обмеженому середовищі, то сумарна кількість жертв, що споживається хижаком, лінійно залежить від густини популяції жертви і від густини популяції хижака. При цьому коефіцієнт природного приросту жертви зменшується на величину, пропорційну чисельності хижаків, а для хижака цей коефіцієнт відповідно збільшується. Це припущення В. Вольтерра зробив на основі гіпотези ”ефективних зустрічей”, яка базується на законі взаємодіючих мас із кінетичної хімії. Припускається також, що додаткові фактори, які впливають на динаміку популяцій у системі, відсутні.

Тоді математична модель системи ”хижак–жертва” описується рівняннями [34, 88]

$$\dot{x} = \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy, \quad \dot{y} = -\varepsilon_2 y + \gamma_2 xy, \quad (8.2.1)$$

де ε_1 , ε_2 , γ_1 , γ_2 – додатні параметри.

Фазовим простором цієї системи природно вважати множину $\mathbb{R}_+^2 = \{x, y : x \geq 0, y \geq 0\}$, яка є інваріантною, оскільки фазові

траєкторії не можуть перетнути лінії $x = 0$, $y = 0$, які теж є фазовими кривими.

Система (8.2.1) має дві точки спокою: $O(0; 0)$ – нульовий стан рівноваги (повна відсутність життя) і нетривіальний стан рівноваги $P(x^*, y^*)$, де $x^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$, $y^* = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}$.

Лінеаризуючи систему (8.2.1) в околі точки $(0, 0)$, одержимо систему

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \varepsilon_1 \xi_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = -\varepsilon_2 \xi_2.$$

Характеристичне рівняння цієї системи має корені $\lambda_1 = \varepsilon_1$, $\lambda_2 = -\varepsilon_2$. Оскільки характеристичне рівняння цієї системи має дійсні корені різних знаків, то особлива точка $(0, 0)$ – сідло (рис. 8.1).

```

alpha = 3
x = (3)  x1 = (4)  x2 = (5)
      4)      5)      6)
D(t,x) := ( x0 - x0*x1
            -alpha*x1 + x0*x1 )
z := rkfixed(x,0,20,1000,D)  z1 := rkfixed(x1,0,20,1000,D)  z2 := rkfixed(x2,0,20,1000,D)
n := 0..1000

```

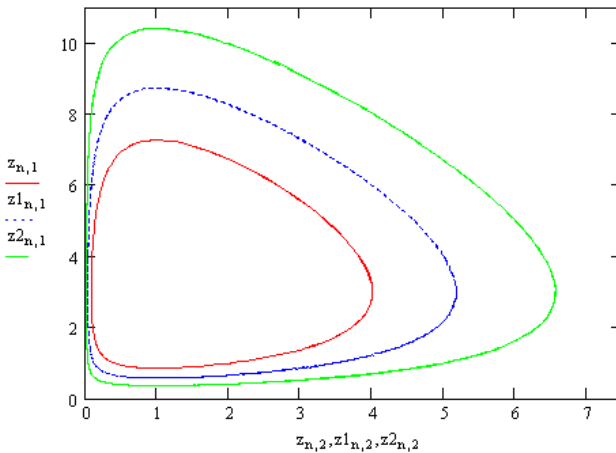


Рис. 8.1. Фазовий портрет системи (8.2.1)

Для лінеаризації системи (8.2.1) в околі точки (x^*, y^*) вважатимемо, що $x = x^* + \xi_1$, $y = y^* + \xi_2$, тоді для поправок ξ_1 , ξ_2 із

точністю до величин першого порядку маємо

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\frac{\gamma_1\varepsilon_2}{\gamma_2}\xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\gamma_2\varepsilon_1}{\gamma_1}\xi_1.$$

Матриця системи має характеристичні корені $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$.

Суто уявні корені для лінеаризованої системи визначають тип "центр" для особливої точки (x^*, y^*) , фазові траєкторії оточують центр і є замкненими (їх називають ще циклами). Але в цьому випадку не можна сказати, що точка (x^*, y^*) буде центром для нелінійної системи (8.2.1). Для цього потрібні додаткові дослідження.

Для системи (8.2.1) легко знайти перший інтеграл. Для цього перше рівняння помножимо на γ_2 , а друге – на γ_1 і додамо. Дістанемо

$$\gamma_2 \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} = \gamma_2\varepsilon_1x - \gamma_1\varepsilon_2y.$$

Далі помножимо перше рівняння системи (8.2.1) на $\frac{\varepsilon_2}{x}$, а друге – на $\frac{\varepsilon_1}{y}$ і теж додамо їх:

$$\frac{\varepsilon_2}{x} \frac{dx}{dt} + \frac{\varepsilon_1}{y} \frac{dy}{dt} = -\varepsilon_2\gamma_1y + \varepsilon_1\gamma_2x.$$

Оскільки праві частини одержаних рівнянь збігаються, то, прирівнявши ліві частини, будемо мати рівняння

$$\gamma_2 \frac{dx}{dt} + \gamma_1 \frac{dy}{dt} = \varepsilon_2 \frac{d \ln x}{dt} + \varepsilon_1 \frac{d \ln y}{dt},$$

інтегруючи яке, одержуємо перший інтеграл системи (8.2.1):

$$x^{\varepsilon_2} \cdot y^{\varepsilon_1} = Ce^{\gamma_2x + \gamma_1y}, \quad (8.2.2)$$

де константу C можна знайти з початкових умов.

В. Вольєрра показав, що співвідношення (8.2.2) дає сім'ю замкнених кривих із центром у точці $(x^*, y^*) = \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$ (рис. 8.1), тобто розв'язки $x(t)$, $y(t)$ мають коливний характер.

Отже, основна властивість системи Вольтерри, завдяки якій вона стала класичною і еталонною для розробки багатьох наступних математичних моделей екології, полягає в тому, що на основі сильно спрощених припущень про характер взаємодії, що описують поведінку системи суто математичними засобами, було одержано висновок про якісну поведінку цієї системи: про наявність у системі коливань чисельності популяції. Без побудови математичної моделі та її дослідження такий висновок зробити не можна.

Система рівнянь (8.2.1) має чотири параметри. Під час аналізу моделі слід чітко зрозуміти зміст усіх параметрів моделі та їх розмірності. За рахунок уведення заміни змінних у системі (8.2.1) можна перейти до безрозмірних змінних і водночас зменшити кількість параметрів. А це зумовлює додаткові зручності при дослідженні системи.

У системі (8.2.1) зробимо заміну змінних:

$$x(t) = au(\tau), \quad y(t) = bv(\tau), \quad t = q\tau, \quad (8.2.3)$$

де a, b, q – деякі сталі. Одержимо (тут уже точка позначає похідну по τ):

$$\dot{u} = \varepsilon_1 qu - \gamma_1 qbv, \quad \dot{v} = -\varepsilon_2 qv + \gamma_2 aqv. \quad (8.2.4)$$

Для знаходження параметрів a, b, q запишемо рівняння:

$$\varepsilon_1 q = 1, \quad \gamma_1 qb = 1, \quad \gamma_2 aq = 1.$$

Звідси

$$q = \frac{1}{\varepsilon_1}, \quad b = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}, \quad a = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2}.$$

Тоді, як випливає з (8.2.3), заміна змінних в явному вигляді задається співвідношеннями

$$x = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_2} u, \quad y = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} v, \quad t = \frac{\tau}{\varepsilon_1}$$

і система рівнянь (8.2.4) набуває вигляду

$$\dot{u} = u - uv, \quad \dot{v} = -\alpha v + uv, \quad (8.2.5)$$

де $\alpha = \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Ця система і є системою "хижак–жертва" в нових безрозмірних змінних, яка містить єдиний параметр α . Очевидно,

що аналіз такої системи простіший за аналіз системи (8.2.1) і водночас всі її розв'язки передають властивості розв'язків вихідної системи.

8.3. Модель "хижак–жертва" з конкуренцією серед жертв

Модель В. Вольтерри має деякі недоліки, зокрема, при відсутності хижака чисельність жертви може необмежено зростати. На практиці цього не спостерігається через внутрішньовидову конкуренцію та обмеженість ресурсу.

Модель системи "хижак–жертва" з урахуванням конкуренції серед жертв має вигляд

$$\dot{x} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 y - \beta x)x, \quad \dot{y} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 x)y, \quad (8.3.1)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – чисельність популяції жертви та хижака, ε_1 , ε_2 , γ_1 , γ_2 , β – додатні параметри.

Для системи (8.3.1) не можна знайти загальний розв'язок чи загальний інтеграл. Застосуємо якісні методи дослідження цієї системи. Для автономних систем (так називається система рівнянь, права частина якої не залежить від часу) особливий інтерес представляє вивчення стійкості стаціонарних розв'язків. Стаціонарні розв'язки системи (8.3.1) знайдемо з такої системи рівнянь

$$(\varepsilon_1 - \gamma_1 y - \beta x)x = 0, \quad (-\varepsilon_2 + \gamma_2 x)y = 0. \quad (8.3.2)$$

Система (8.3.1) має три точки рівноваги:

$$M_1(0; 0), \quad M_2\left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}; 0\right), \quad M_3\left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}; \frac{\varepsilon_1 \gamma_2 - \beta \varepsilon_2}{\gamma_1 \gamma_2}\right).$$

В околі точки M_1 матриця системи першого наближення має вигляд

$$A_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Власні значення цієї матриці $\lambda_1 = \varepsilon_1$, $\lambda_2 = -\varepsilon_2$ – дійсні різних знаків, тому точка M_1 є особливою точкою типу сідло (рис. 8.2).

Лінеаризуючи систему (8.3.1) в околі точки M_2 , одержимо систему

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\varepsilon_1\xi_1 - \frac{\varepsilon_1\gamma_1}{\beta}\xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \left(\gamma_2\frac{\varepsilon_1}{\beta} - \varepsilon_2\right)\xi_2.$$

За умови $\varepsilon_1\gamma_2 > \beta\varepsilon_2$ (умова існування точки M_3 із додатними координатами) характеристичний корінь $\lambda_2 > 0$. Тому точка M_2 – сідло (рис. 8.2, *a*). За умови $\varepsilon_1\gamma_2 < \beta\varepsilon_2$ характеристичний корінь $\lambda_2 < 0$, тому точка M_2 є стійким вузлом (рис. 8.2, *б*).

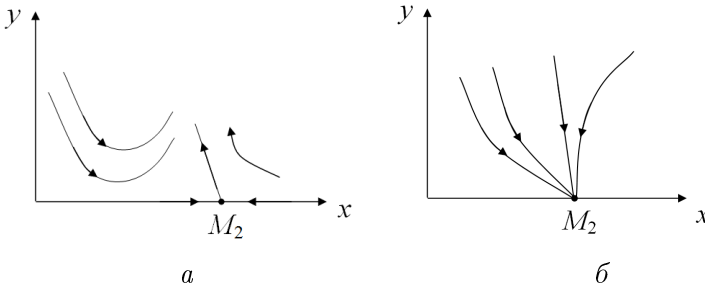


Рис. 8.2. Фазовий портрет системи (8.3.1) в околі точки M_2

Тепер дослідимо систему в околі точки M_3 . Позначимо

$$x^* = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}, \quad y^* = \frac{\varepsilon_1\gamma_2 - \beta\varepsilon_2}{\gamma_1\gamma_2}.$$

Зауважимо, що додатне значення y^* існує за умови $\varepsilon_1\gamma_2 - \beta\varepsilon_2 > 0$. Лінеаризовані рівняння для приростів $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ в околі точки (x^*, y^*) мають вигляд

$$\frac{d\xi_1}{dt} = -\beta x^* \xi_1 - \gamma_1 x^* \xi_2, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = \gamma_2 y^* \xi_1.$$

Для знаходження λ одержуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -\beta x^* - \lambda & -\gamma_1 x^* \\ \gamma_2 y^* & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^2 + \beta x^* \lambda + \gamma_1 \gamma_2 x^* y^* = 0.$$

Оскільки $\lambda_1 \lambda_2 = \gamma_1 \gamma_2 x^* y^* > 0$, а $\lambda_1 + \lambda_2 = -\beta x^* < 0$, то стаціонарна точка M_3 при $D < 0$ є стійким фокусом або стійким вузлом при $D > 0$, де дискримінант

$$D = (\beta x^*)^2 - 4\gamma_1 \gamma_2 x^* y^*.$$

Покладемо для числового інтегрування системи (8.3.1) значення $\varepsilon_2 = 2$, $\gamma_1 = 0, 1$, $\gamma_2 = 0, 3$, $\beta = 0, 1$. Фазові портрети при різних значеннях ε_1 наведені на рис. 8.3.

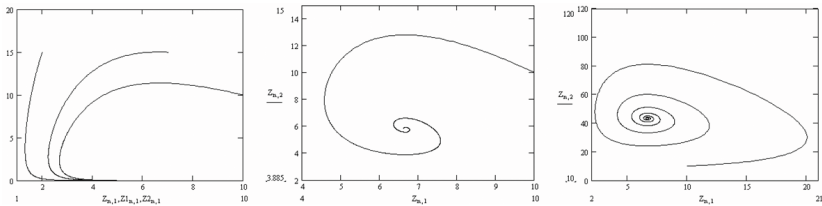


Рис. 8.3. Фазові портрети системи (8.3.1)

Стійкість стаціонарного розв'язку (x^*, y^*) можна дослідити також за допомогою функцій Ляпунова. У цьому випадку функція Ляпунова має вигляд

$$L(x, y) = \frac{x^*}{\gamma_1} \left(\frac{x}{x^*} - \ln \frac{x}{x^*} - 1 \right) + \frac{y^*}{\gamma_2} \left(\frac{y}{y^*} - \ln \frac{y}{y^*} - 1 \right).$$

Оскільки для довільних z маємо $z - 1 \geq \ln z$ (рівність можлива лише при $z = 1$), то $L(x, y) \geq 0$ і $L(x^*, y^*) = 0$.

Знайдемо $\frac{dL}{dt}$ на траєкторіях системи (8.3.1). Одержимо

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{\gamma_1} \left(\dot{x} - \frac{x^*}{x} \dot{x} \right) + \frac{1}{\gamma_2} \left(\dot{y} - \frac{y^*}{y} \dot{y} \right) = -\frac{\beta}{\gamma_1} (x - x^*)^2 \leq 0.$$

Отже, точка (x^*, y^*) стійка за Ляпуновим. Оскільки $\frac{dL}{dt} < 0$ скрізь, за винятком прямої $x = x^*$, то ця точка є асимптотично стійкою.

8.4. Модель Колмогорова

Вище розглядалися моделі взаємодії двох видів, відомі як рівняння Лотки–Вольтерри. У 1935 р. радянський математик А.М. Колмогоров (1903-1987) для системи "хижак–жертва" запропонував модель досить загального характеру [52].

Нехай, як і раніше, $x(t)$ – чисельність жертв, $y(t)$ – чисельність хижаків. Тоді модель Колмогорова має вигляд

$$\dot{x} = \alpha(x)x - V(x)y, \quad \dot{y} = K(x)y, \quad (8.4.1)$$

де $\alpha(x)$ – коефіцієнт природного приросту жертви; $V(x)$ – трофічна функція, що характеризує кількість жертви, що виїдає один хижак за одиницю часу (швидкість виїдання); $K(x)$ – коефіцієнт природного приросту хижаків.

Функції $\alpha(x)$, $K(x)$, $V(x)$ задовольняють такі умови:

1. $\alpha(x)$ є монотонно спадною функцією ($\alpha'(x) < 0$), що вказує на наявність внутрішньовидової конкуренції, до того ж існує $\bar{x} < \infty$, таке, що $\alpha(\bar{x}) = 0$. Це означає, що за відсутності хижака сама популяція жертв не може зростати безмежно. Очевидно також, що $\alpha(0) > 0$, $\alpha(\infty) < 0$ (рис. 8.4, а).

2. Коефіцієнт природного приросту хижаків $K(x)$ – зростаюча функція ($K'(x) > 0$) і така, що змінює знак із мінуса на плюс у точці $x = x^*$ ($K(x^*) = 0$) (рис. 8.4, б), тобто при малих значеннях x це означає, що для хижака недостатньо їжі та не може відбутися його відтворення.

3. Трофічна функція $V(x)$ є монотонно зростаючою ($V'(x) > 0$), причому $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ при $x > 0$, $V(\infty) < \infty$.

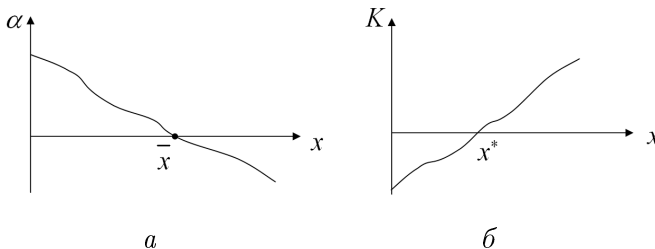


Рис. 8.4. Вид графіків функцій: а – $\alpha(x)$, б – $K(x)$

Екологічні експерименти показують, що трофічна функція належить до одного з трьох типів:

I. $V(x)$ є опуклою вверх для всіх $x \in [0, \infty)$, тобто перша похідна монотонно повільно спадає (рис. 8.5, а).

II. $V(x)$ має S-подібний характер. Опуклість вниз змінюється на опуклість вверх із подальшим насиченням (рис. 8.5, б). Такий тип кривої можна інтерпретувати як наявність альтернативного джерела їжі або існування деякої кількості недоступних хижаку сховищ для жертви.

III. $V(x)$ – кусково-лінійна з різким порогом насичення (рис. 8.5, в). Така крива характерна для хижаків-фільтратив.

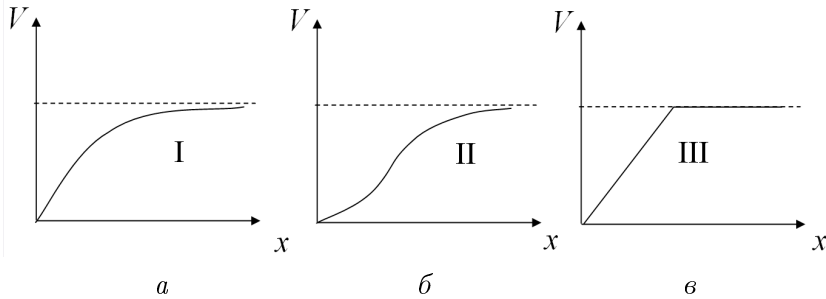


Рис. 8.5. Три типи трофічної функції $V(x)$

Математичні моделі функції $V(x)$ можуть задаватися нижчеповеденими аналітичними формулами.

Для типу I:

$$V(x) = \frac{Kx}{L+x} - \text{формула Моно,}$$

$$V(x) = K(1 - e^{-\alpha x}) - \text{формула Івлева, де } K, L, \alpha > 0.$$

Для типу II:

$$V(x) = \frac{Kx^2}{L+x^2} - \text{функція Хассела,}$$

$$V(x) = \frac{Kx^p}{L+x^p} \quad (p > 1),$$

$$V(x) = K(1 - e^{-\alpha x^\beta}), \text{ де } K, L, \alpha, \beta = \text{const} > 0.$$

Для системи (8.4.1) знайдемо простіші траєкторії $x, y = \text{const}$ в області \mathbb{R}_2^+ . Такі траєкторії визначаються з умови

$$\alpha(x)x - V(x)y = 0, \quad K(x)y = 0$$

і називаються точками спокою, або положенням рівноваги, або особливими, або критичними точками системи (8.4.1).

Розв'язком такої системи рівнянь можуть бути дві або три точки: $(0, 0)$, $(\bar{x}, 0)$, (x^*, y^*) , де \bar{x} : $\alpha(\bar{x}) = 0$, x^* : $K(x^*) = 0$, $y^* = \frac{\alpha(x^*)x^*}{V(x^*)}$. Звідси видно, що $y^* > 0$ існує, коли $\alpha(x^*) > 0$, тобто при $x^* < \bar{x}$.

Дослідимо поведінку траєкторій в околі трьох точок спокою. Для цього введемо поправки ξ_1 , ξ_2 за формулами: $x = \tilde{x} + \xi_1$, $y = \tilde{y} + \xi_2$, де (\tilde{x}, \tilde{y}) – одна зі стаціонарних точок. Нелінійні функції $\alpha(x)$, $K(x)$, $V(x)$ розкладатимемо в ряд Тейлора в околі точки \tilde{x} , зокрема

$$V(x) = V(\tilde{x} + \xi_1) = V(\tilde{x}) + \frac{dV(\tilde{x})}{dx}\xi_1 + o(\xi_1)^2.$$

1. У точці $\tilde{x} = 0$, $\tilde{y} = 0$ одержуємо таку лінеаризовану систему:

$$\dot{\xi}_1 = \alpha(0)\xi_1, \quad \dot{\xi}_2 = K(0)\xi_2.$$

Характеристичне рівняння $(\alpha(0) - \lambda)(K(0) - \lambda) = 0$ має два дійсні різні корені $\lambda_1 = \alpha(0) > 0$, $\lambda_2 = K(0) < 0$. Тому особлива точка $(0, 0)$ є сідлом. Осі координат – сепаратрис. При $\lambda_1 > 0$ сепаратриса (вісь Ox) виходить із сідла, при $\lambda_2 < 0$ сепаратриса (вісь Oy) входить у сідло.

2. В околі точки $(\bar{x}, 0)$ лінеаризовані рівняння мають вигляд

$$\dot{\xi}_1 = \alpha'(\bar{x})\bar{x}\xi_1 - V(\bar{x})\xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = K(\bar{x})\xi_2.$$

Характеристичне рівняння

$$(\alpha'(\bar{x})\bar{x} - \lambda)(K(\bar{x}) - \lambda) = 0$$

має корені $\lambda_1 = \alpha'(\bar{x})\bar{x}$, $\lambda_2 = K(\bar{x})$.

Оскільки $\alpha'(\bar{x}) < 0$, то $\lambda_1 < 0$. Якщо $K(\bar{x}) < 0$ ($x^* > \bar{x}$), то $\lambda_2 < 0$ і точка $(\bar{x}, 0)$ є стійким вузлом; якщо $K(\bar{x}) > 0$ ($x^* < \bar{x}$), то $\lambda_2 > 0$ і точка $(\bar{x}, 0)$ є сідлом.

Кутові коефіцієнти сепаратрис $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{\alpha(\bar{x}) - K(\bar{x})}{V(\bar{x})} < 0$.

3. У точці (x^*, y^*) лінеаризовані рівняння мають вигляд

$$\dot{\xi}_1 = \sigma \xi_1 - V(x^*) \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = K'(x^*) y^* \xi_1,$$

де $\sigma = \alpha(x^*) + \alpha'(x^*)x^* - V'(x^*)y^*$.

Характеристичне рівняння

$$\lambda^2 - \sigma \lambda + V(x^*)K'(x^*)y^* = 0$$

може мати корені різного характеру.

Оскільки добуток $\lambda_1 \lambda_2 = V(x^*)K'(x^*)y^* > 0$, то точка (x^*, y^*) або вузол при $D = \sigma^2 - 4V(x^*)K'(x^*)y^* > 0$, або фокус при $D < 0$. При $\sigma > 0$ стаціонарна точка нестійка, при $\sigma < 0$ – стійка. Третя точка (x^*, y^*) існує за умови, що $x^* < \bar{x}$, тобто коли друга точка $(\bar{x}, 0)$ є сідлом.

Сепаратриси, що виходять з точки $(\bar{x}, 0)$, можуть входити в точку (x^*, y^*) – це буде у випадку, коли точка (x^*, y^*) стійка. У разі нестійкості точки (x^*, y^*) сепаратриса буде намотуватися на граничний цикл.

Отже, маємо таку класифікацію особливих точок (фазові портрети показано на рис. 8.6):

а) точка $(0, 0)$ завжди є сідлом;

б) якщо $\bar{x} < x^*$, то точка $(\bar{x}, 0)$ є стійким вузлом і не існує третьої стаціонарної точки;

в) якщо $\bar{x} > x^*$, то $(\bar{x}, 0)$ є сідлом і існує третя стаціонарна точка (x^*, y^*) ;

г) точка (x^*, y^*) при $\sigma > 0$ є нестійким фокусом, якщо $D < 0$, і нестійким вузлом, якщо $D > 0$;

д) при $\sigma < 0$ точка (x^*, y^*) – стійкий фокус, якщо $D < 0$, і стійкий вузол, якщо $D > 0$. В цьому випадку існує хоча б один граничний цикл, який розводить ці траєкторії.

Поведінка траєкторій усередині циклу може бути достатньо складною.

Вище показано, як із простих та природних припущень про характер міжвидових і внутрішньовидових взаємодій виникає досить складна поведінка системи "хижак–жертва". Найцікавішим є те, що в системі можливе існування граничного циклу, до того ж їх може бути декілька.

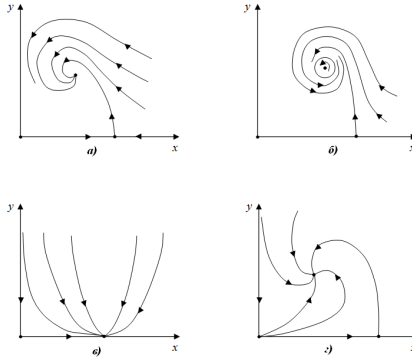


Рис. 8.6. Фазові портрети системи (8.4.1)

Розглянемо окремий випадок системи (8.4.1):

$$\dot{x} = \alpha x - V(x)y, \quad \dot{y} = (-m + kV(x))y, \quad (\alpha, m, k = \text{const} > 0). \quad (8.4.2)$$

Аналіз цієї математичної моделі дає можливість одержати відповідь на питання, чи може хижак стабілізувати систему "хижак-жертва". Без математичного моделювання обґрунтувати відповідь на це питання неможливо.

У моделі Колмогорова зроблено припущення, що $\alpha'(x) < 0$ і $\alpha(\bar{x}) = 0$. Це означає, що в популяції жертв уже існує механізм внутрішньої регуляції за відсутності хижака. Тому в моделі (8.4.2) вважатимемо, що $\alpha(x) = \alpha = \text{const}$.

Природно, що розв'язки системи (8.4.2) залежать від виду трофічної функції $V(x)$, яка, в свою чергу, визначається характером хижацтва. Функція $V(x)$ задовольняє ті ж умови, що й раніше:

$$V(x) > 0, \quad V(0) = 0, \quad V'(x) \geq 0, \quad V(\infty) < \infty.$$

Система (8.4.2), крім тривіальної, має ще одну нетривіальну стаціонарну точку (x^*, y^*) , де

$$y^* = \frac{\alpha k}{m} x^*, \quad V(x^*) = \frac{m}{k},$$

за умови, що $V(\infty) > \frac{m}{k}$.

Характеристичне рівняння для точки (x^*, y^*) має вигляд

$$\lambda^2 - \lambda\alpha[1 - f(x^*)] + \alpha m f(x^*) = 0,$$

де

$$f(x) = \frac{V'(x)}{V(x)/x}.$$

При

$$D = [1 - f(x^*)]^2 - \frac{4m}{\alpha} f(x)^* < 0$$

стаціонарна точка (x^*, y^*) – фокус, при $D > 0$ – вузол.

Стійкість цього стану визначається умовою $f(x^*) > 1$, або

$$V'(x^*) > \frac{V(x^*)}{x^*},$$

і залежить тільки від поведінки функції $V(x)$. Останню нерівність можна переписати у вигляді

$$\left(\frac{V(x)}{x}\right)'_{x=x^*} > 0. \quad (8.4.3)$$

Співвідношення (8.4.3) можна трактувати так: для стійкості нетривіальної рівноваги системи (8.4.1), тобто для існування системи "хижак–жертва", достатньо, щоб в околі стаціонарного стану відносна частка спожитих хижаком жертв зростала зі зростанням чисельності жертв.

При неперервності функції $V'(x)$ умова (8.4.3) виконується в деякому околі точки $x = x^*$, тобто якщо $x_1 < x^* < x_2$, то

$$\frac{V(x_1)}{x_1} < \frac{V(x^*)}{x^*} < \frac{V(x_2)}{x_2}, \quad (8.4.4)$$

де x_1, x_2 точки з околу точки x^* .

Нехай тепер трофічна функція є функцією типу I (рис. 8.5). Нерівність (8.4.4) не виконується для всіх значень x , оскільки $V(x)$ опукла вверх (обґрунтування цього факту показано на рис. 8.7, а).

Це означає, що в системі "хижак–жертва" з таким типом трофічної функції не існує стійкого нетривіального стану рівноваги. Тут можливі такі варіанти: або чисельність хижака та жертви необмежено зростає, або при проходженні траєкторії поблизу однієї з координатних осей унаслідок випадковостей чисельність

жертви або хижака перетвориться в нуль. При вимиранні жертви згодом вимре й хижак, при вимиранні хижака чисельність жертви почне зростати. Третій варіант – виникнення стійкого граничного циклу – неможливий. Дійсно, вираз

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{xy} (\alpha x - V(x)y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{xy} (kV(x) - m) \right) = \\ = \frac{V(x) - V'(x)x}{x^2} = \frac{1}{x} \left(\frac{V(x)}{x} - V'(x) \right) \end{aligned}$$

завжди додатний у першій чверті для функції $V(x)$ типу I. Тоді, згідно з критерієм Дюлака, в першій чверті відсутні замкнені траєкторії і стійкого граничного циклу не існує.

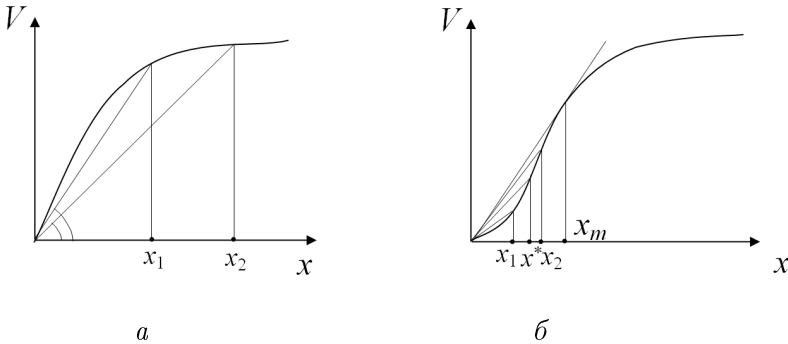


Рис. 8.7. Обґрунтування умови (8.4.4)

Тому правомірний висновок, що у випадку трофічної функції типу I хижак не може бути регулятором, що забезпечує стабільність усієї системи. При такому типі трофічної функції система може бути стійкою тільки в тому випадку, коли в популяції жертви існують власні внутрішні регуляторні механізми, наприклад, внутрішньовидова конкуренція.

Для трофічної функції типу II можливе існування стійкого нетривіального стану рівноваги. Дійсно, нехай x_m – точка дотику прямої, проведеної з початку координат, до кривої $V(x)$. У цій точці функція $\frac{V(x)}{x}$ досягає свого максимального значення. Візьмемо тепер $x^* < x_m$, тоді очевидно, що існують x_1, x_2 , такі, що

$x_1 < x^* < x_2 < x_m$ і виконується умова (8.4.4). Доведення цього факту показано на рис. 8.7, б. Отже, нетривіальний стан рівноваги, для якого $x^* < x_m$, асимптотично стійкий. Тобто у випадку тропічної функції типу II хижак може робити систему стійкою. Це властиво системі "хижак-жертва", в якій хижаки здатні навчатися, а жертви здатні знаходити сховища.

8.5. Моделі конкуренції

8.5.1. Модель Вольтерри для двох конкурентів

В. Вольтерра [34] для описання динаміки двох видів, які живуть на одній території і конкурують за загальний ресурс, запропонував таку модель:

$$\frac{dx}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1(x + y))x, \quad \frac{dy}{dt} = (\varepsilon_2 - \gamma_2(x + y))y, \quad (8.5.1)$$

де $x(t)$, $y(t)$ – чисельність двох конкурентів; додатні числа ε_1 , ε_2 – інтенсивності народжуваності; γ_1 , γ_2 – інтенсивності вимирання.

Заміною змінних

$$x = \varepsilon_1/\gamma_1 u, \quad y = \varepsilon_1/\gamma_1 v, \quad t = \tau/\varepsilon_1$$

система (8.5.1) зводиться до системи вигляду

$$\dot{u} = u(1 - (u + v)), \quad \dot{v} = \gamma v(1 - \varepsilon(u + v)), \quad (8.5.2)$$

де $\gamma = \varepsilon_2/\varepsilon_1$, $\varepsilon = \varepsilon_1\gamma_2/(\varepsilon_2\gamma_1)$.

Стационарні точки системи (8.5.2) знайдемо з системи

$$u(1 - (u + v)) = 0, \quad \gamma v(1 - \varepsilon(u + v)) = 0. \quad (8.5.3)$$

Якщо $\varepsilon \neq 1$, то система (8.5.3) має три розв'язки

$$O(u = 0, v = 0), \quad P(u = 0, v = 1/\varepsilon), \quad Q(u = 1, v = 0).$$

Якобіан системи (8.5.2) – це матриця

$$A = \begin{pmatrix} 1 - (2u + v) & -u \\ -\gamma\varepsilon v & \gamma(1 - \varepsilon(u + 2v)) \end{pmatrix}.$$

У точках рівноваги матриця A набуває вигляду

$$A_1 = A(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad A_2 = A(P) = \begin{pmatrix} 1 - 1/\varepsilon & 0 \\ -\gamma & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$A_3 = A(Q) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & \gamma(1 - \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Для матриці A_1 власні значення $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \gamma$, тому точка $O(0, 0)$ є нестійким вузлом.

Матриця A_2 має власні значення $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$, $\lambda_2 = -\gamma$. За умови, що $\varepsilon < 1$ λ_1 має від'ємне значення, точка P є стійким вузлом, при $\varepsilon > 1$ точка P – сідло.

Матриця A_3 має власні значення $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \gamma(1 - \varepsilon)$. При $\varepsilon < 1$ значення $\lambda_2 > 0$ і точка Q – сідло, при $\varepsilon > 1$ точка Q – стійкий вузол.

Відповідні фазові портрети моделі (8.5.2) наведені на рис. 8.8.

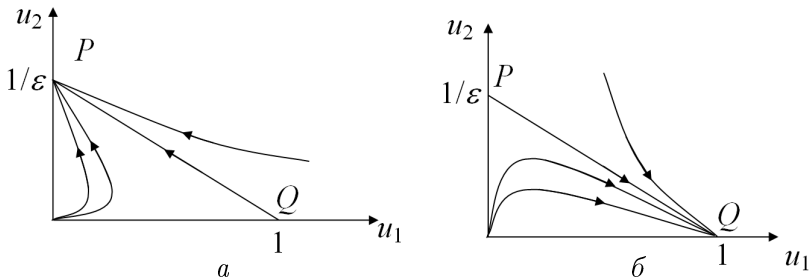


Рис. 8.8. Фазовий портрет системи (8.5.2): $a - \varepsilon < 1$; $b - \varepsilon > 1$

Дамо екологічну інтерпретацію одержаних результатів. В екологічних моделях відношення ε/γ називається коефіцієнтом пристосування. Якщо $\varepsilon > 1$ ($\frac{\varepsilon_1 \gamma_2}{\varepsilon_2 \gamma_1} > 1 \Rightarrow \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$), то перший вид більш пристосований, ніж другий. Якщо $\varepsilon < 1$, то, навпаки, другий вид більш пристосований. Тому проведені дослідження дозволяють стверджувати, що при $\varepsilon \neq 1$ виживає вид із більшою пристосованістю, а інший – вмирає. Це і є принцип конкурентного виключення, відкритий Г. Гаузе (1910–1986, радянський біолог).

У разі, коли $\varepsilon = 1$ (коефіцієнт пристосовності однаковий), система (8.5.2) не дає відповіді про асимптотичну поведінку конкурентів, оскільки вона має безліч розв'язків $u + v = 1$, серед яких є точки P, Q , тобто P, Q – неізолювані стаціонарні точки.

8.5.2. Узагальнення моделі конкуренції

Розглянемо математичну модель конкуренції між двома видами. Нехай обидва види є автотрофами, тобто здатні розмножуватися незалежно один від одного. Припустимо, що в ізоляції динаміка популяцій двох видів підпорядковується логістичному закону, тобто в популяціях існує внутрішньовидова боротьба (самообмеження). Взаємодію двох конкурентів опишемо згідно з гіпотезою "ефективних зустрічей". Математичною моделлю описаної системи є сукупність рівнянь вигляду

$$\dot{x} = r_1x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \gamma_1xy, \quad \dot{y} = r_2y \left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \gamma_2xy, \quad (8.5.4)$$

де $x(t), y(t)$ – чисельності двох конкурентів, $K_1, K_2, \gamma_1, \gamma_2 = \text{const} > 0$.

Застосуємо для аналізу системи (8.5.4) метод ізоклін. Для цього поділимо друге рівняння на перше:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(r_2 \left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \gamma_2x\right)y}{\left(r_1 \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \gamma_1y\right)x}. \quad (8.5.5)$$

Виходячи з геометричного змісту похідної $y' = \text{tg } \alpha$ (α – кут нахилу дотичної до осі Ox), бачимо, що рівняння (8.5.5) визначає поле напрямків, яке виділяє інтегральні криві рівняння (8.5.5). Крива, в кожній точці якої нахил поля один і той самий, тобто $\text{tg } \alpha = \text{const}$, називається ізокліною рівняння (8.5.4).

Знайдемо спочатку рівняння нуль-ізоклін. Якщо $\frac{dy}{dx} = 0$, то $r_2 \left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \gamma_2x = 0$, або $y = K_2 \left(1 - \frac{\gamma_2}{r_2}x\right)$. Це лінія на площині, яку фазові траєкторії будуть перетинати горизонтально. Позначимо цю ізокліну цифрою 1. Якщо $r_1 \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \gamma_1y = 0$, або

$y = \frac{r_1}{\gamma_1} \left(1 - \frac{x}{K_1}\right)$, то в цих точках поле напрямків вертикальне. Цю ізокліну позначимо цифрою 2. Точка перетину цих ліній (якщо вона існує) визначає стаціонарну точку, інакше – точку спокою чи рівноваги.

Враховуючи рівняння (8.5.4), можна виставити напрями змінних $x(t)$, $y(t)$ поза лініями 1 та 2 (рис. 8.9). Наприклад, під лінією 1 маємо, що $r_2 \left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \gamma_2 x > 0$, а отже, $\frac{dy}{dt} > 0$ і $y(t)$ зростає.

Лінії 1 та 2 можуть бути розміщені на площині чотирма різними способами. Ці лінії поділять площину на декілька областей. Визначаючи в кожній області поле напрямків, ми зможемо провести фазові траєкторії. Різні наслідки конкурентної боротьби між популяціями залежно від коефіцієнтів системи наведені на рис. 8.10. Осциляційні режими відсутні.

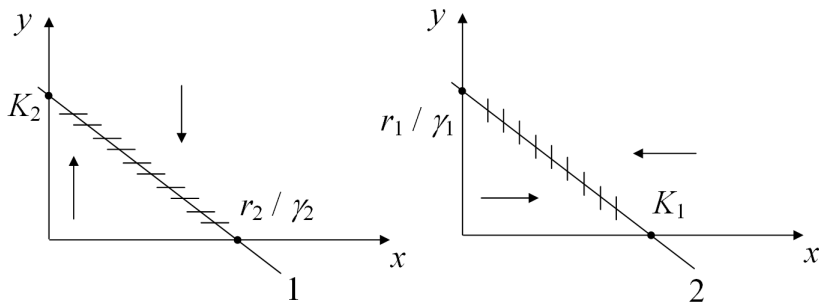


Рис. 8.9. Напрями зміни фазових змінних $x(t)$, $y(t)$

Наприклад, перший вид повністю витісняє другий, якщо $r_1/\gamma_1 > K_2$ і $K_1 > \frac{r_2}{\gamma_2}$ (рис. 8.10, а). Рис. 8.10, в показує, що два конкуренти можуть співіснувати за умови $\frac{r_1}{\gamma_1} > K_2$, $\frac{r_2}{\gamma_2} > K_1$. Якщо будуть виконані протилежні умови, то знову виживає лише один вид, який залежить від початкових умов (рис. 8.10, з). Тут положення рівноваги є вже нестійкою сідловою точкою.

Схожі режими реалізуються і в інших моделях системи двох конкурентів.

Не зважаючи на простоту, модель конкуренції (8.5.4) має практичне застосування. В [29] описано факт застосування моделі

(8.5.4) для аналізу конкурентної боротьби між двома видами комарів у Північній Америці.

Ця модель може застосовуватися не тільки для описання конкуренції між двома біологічними угрупованнями, а й для дослідження конкуренції комерційних компаній, боротьби партій за фінансові ресурси тощо.

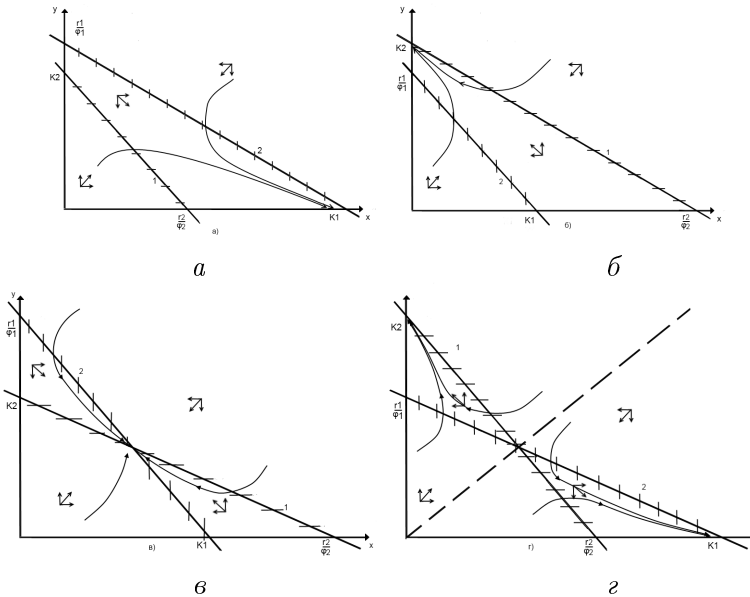


Рис. 8.10. Фазові портрети системи (8.5.4)

Для проведення аналізу системи (8.5.4) методом лінеаризації вигідно перейти до безрозмірних змінних і записати систему у вигляді

$$\dot{u} = u(1 - u - \alpha v), \quad \dot{v} = v(\gamma - u - \beta v). \quad (8.5.6)$$

Заміну змінних і аналіз системи (8.5.6) за першим наближенням виконайте самостійно. Побудуйте параметричний портрет системи (8.5.6) та її фазові портрети.

Накінець зауважимо, що можна будувати точніші математичні моделі взаємодії популяцій, які враховуватимуть складні картини взаємодії, як за часом так і в просторі, нерівномірність розподілу чисельності популяцій на займаній території, неоднорідність властивостей особів, зовнішні дії тощо. Для пошуку розв'язків таких

задач необхідно використовувати числові методи, при цьому, як показали наведені вище приклади, обов'язково необхідно виконувати якісний аналіз моделей. Цю інформацію можна використати не тільки для екологічної інтерпретації, але й при тестуванні числових прикладів.

8.6. Стохастична популяційна динаміка

Функціонування біологічних угруповань, як правило, супроводжується випадковими збуреннями. Врахування випадкових збурень приводить до необхідності використовувати математичний апарат теорії ймовірності та теорії випадкових процесів.

Процес вивчення динаміки популяцій може починатися з дослідження ідеальної моделі без урахування випадкових факторів. На наступному кроці включають до розгляду додаткові ефекти, які виникають при врахуванні випадкових флуктуацій, і оцінюють вплив випадкових процесів на динаміку популяції. У багатьох випадках випадкові збурення якісно змінюють картину.

Насамперед дослідників популяційної динаміки цікавлять стохастичні атрактори систем із випадковими збуреннями. Під дією стохастичних збурень випадкові траєкторії покидають атрактор детермінованої системи і формують навколо нього деякий пучок. Завдяки стійкості атрактора густина розподілу ймовірності випадкових станів у цьому пучку стабілізується. Стационарний імовірнісний розподіл, що встановлюється, визначає стохастичний атрактор.

Розглянемо детерміновану нелінійну систему диференціальних рівнянь вигляду

$$dx = f(x)dt, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \quad (8.6.1)$$

де $f(x)$ – досить гладка вектор-функція.

Нехай система (8.6.1) має атрактор $M \subset \mathbb{R}^n$. M є інваріантною множиною для (8.6.1), яка є обмеженою і замкнутою.

Припустимо, що M – експоненціально стійка. Це означає, що для малого околу U множини M знайдуться константи $K > 0$, $l > 0$, такі, що для довільного розв'язку $x(t)$ системи (8.6.1) з початковою умовою $x(0) = x_0 \in U$ при всіх $t \geq 0$ виконується

нерівність

$$\|\Delta(x(t))\| \leq Ke^{-lt}\|\Delta(x_0)\|,$$

де $\Delta x = x - \gamma(x)$, $\gamma(x) = \arg \min_{y \in M} \|x - y\|$, $\|\cdot\|$ – евклідова норма; $\gamma(x)$ – найближча до x точка атрактора M ; Δx – вектор відхилення x від M .

Поряд з (8.6.1) розглянемо відповідну стохастичну систему рівнянь Іто

$$dx = f(x)dt + \varepsilon\sigma(x)dw(t), \quad (8.6.2)$$

де $w(t)$ – n -вимірний стандартний вінерівський процес; $\sigma(x)$ – достатньо гладка $n \times n$ -матрична функція, що задає залежність випадкових збурень від стану системи; ε – параметр інтенсивності збурень.

Функція $w(t)$ називається n -вимірним стандартним вінерівським процесом, якщо її прирости $\Delta w_i = w(t_{i+1}) - w(t_i)$ для неперетинних часових відрізків незалежні й розподілені за нормальним законом

$$E\Delta w_i = 0, \quad E\Delta w_i \Delta w_i^T = |t_{i+1} - t_i|I,$$

де I – одинична матриця.

У результаті дії невироджених шумів ($\sigma(x)|_M \neq 0$) випадкові траєкторії системи (8.6.2) покидають детермінований аттрактор M і формують навколо нього деякий пучок.

Як приклад, розглянемо модель динаміки ізольованої популяції

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x - \gamma x^2.$$

При $\alpha > \beta$, $\gamma > 0$ існує стійкий стан рівноваги $\bar{x} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$. При $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ $\bar{x} = 1$.

Якщо врахувати випадкові фактори, що впливають на поведінку популяції, то динаміка популяції визначатиметься з рівняння [23]

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x - \gamma x^2 + \sigma \dot{w}(t), \quad (8.6.3)$$

де $w(t)$ – одновимірний вінерівський процес.

Розв'язки цього рівняння при $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ з початковою умовою $x_0 = 0,5$ ($x_0 = 1$ збігається з точкою рівноваги $\bar{x} = 1$) при збуреннях різної інтенсивності наведені на рис. 8.11.

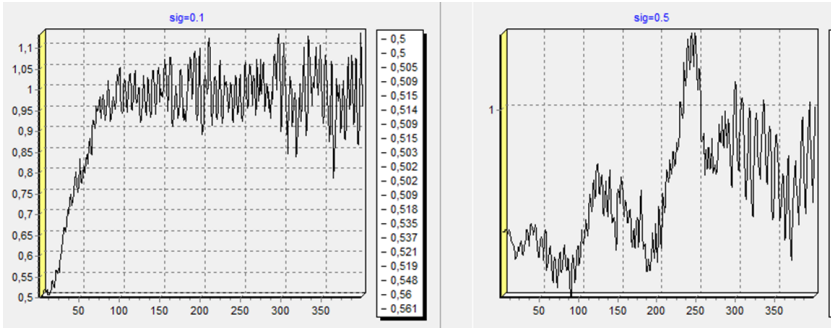


Рис. 8.11. Динаміка розв'язків рівняння (8.6.3)

Складніший приклад – це двовимірна система "хижак-жертва" з обмеженістю ресурсів для жертви. Ця система має вигляд

$$\dot{x} = \alpha x - xy - x^2, \quad \dot{y} = -y + xy, \quad \alpha > 0.$$

При $\alpha > 1$ система має нетривіальний стан рівноваги $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = \alpha - 1$, який при $1 < \alpha < 1,25$ є стійким вузлом, а при $\alpha > 1,25$ – стійким фокусом.

Якщо врахувати зовнішні випадкові збурення, то така система задається рівняннями [23]

$$\dot{x} = \alpha x - xy - x^2 + \sigma \dot{w}_1, \quad \dot{y} = -y + xy + \sigma \dot{w}_2, \quad \alpha > 0, \quad (8.6.4)$$

де $w_1(t)$, $w_2(t)$ – незалежні вінерівські процеси.

На рис. 8.12 показані траєкторії системи (8.6.4) при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, які при $\alpha = 2$ збігаються з положенням рівноваги.

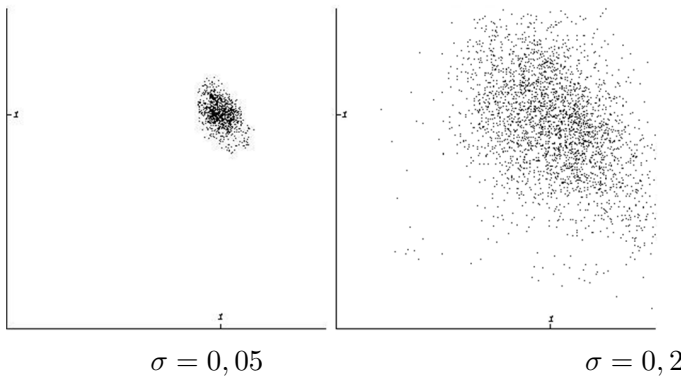


Рис. 8.12. Динаміка розв'язків системи (8.6.4)

Розглянемо тепер вплив випадкових збурень на систему "хижак-жертва" з насиченням хижака. Детермінована модель має вигляд

$$\dot{x} = x - \frac{x}{1+x}y - \gamma x^2, \quad \dot{y} = -y + 2\frac{x}{1+x}y.$$

Відомо, що при $0 < \gamma < \frac{1}{3}$ ця система має нестійку точку спокою $(1, 2 - 2\gamma)$. Траєкторії, що відходять від неї, намотуються на граничний цикл. Незалежно від початкових значень, система з часом переходить у режим коливань постійної частоти.

Внесемо в цю систему випадкові збурення, тоді динаміка популяції буде визначатися рівняннями [23]

$$\dot{x} = x - \frac{x}{1+x}y - \gamma x^2 + \sigma \dot{w}_1, \quad \dot{y} = -y + 2\frac{x}{1+x}y + \sigma \dot{w}_2, \quad (8.6.5)$$

де $w_1(t)$, $w_2(t)$ – незалежні вінерівські процеси.

На рис. 8.13 зображені стохастичні траєкторії цієї системи при $\gamma = 0,3$ із початковими даними на граничному циклі для збурень різної інтенсивності.

Завдяки стійкості граничного циклу випадкова траєкторія хоча й покидає його, але продовжує рухатися в його околі, формуючи пучок. Розкид траєкторій залежить від інтенсивності збурення.

Дослідження впливу стохастичних збурень шляхом числового моделювання випадкових траєкторій вимагає значних комп'ютерних ресурсів, особливо коли необхідно одержати репрезентативні вибірки.

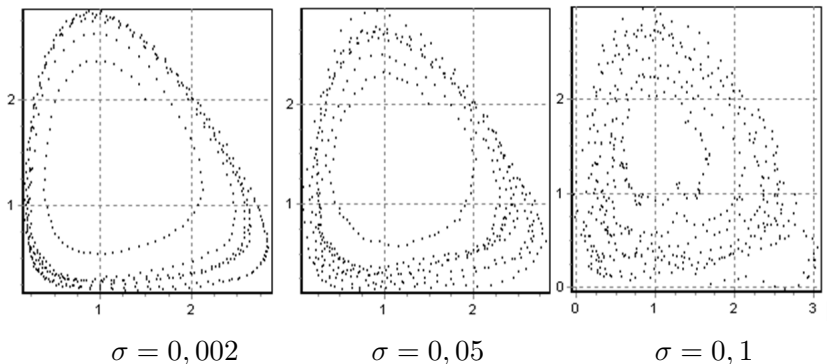


Рис. 8.13. Динаміка розв'язків системи (8.6.5)

Для вивчення ймовірносних розподілів траєкторій у пучку можна застосовувати й аналітичні методи. Повний ймовірносний опис випадкових траєкторій у термінах густини ймовірності дається рівнянням Фокера–Планка–Колмогорова (ФПК). Якщо нас не цікавить характер перехідного процесу, а основний інтерес маємо до режимів, що встановилися, то можна обмежитися вивченням стаціонарної густини розподілу $\rho(x, \varepsilon)$, яка визначається зі стаціонарного рівняння ФПК

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{ij=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} \rho) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i \rho) = 0, \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij}.$$

Безпосереднє використання цього рівняння навіть у простіших ситуаціях (наприклад, коли розглядається стаціонарний розподіл стану автоколивної системи з одним ступенем вільності) є достатньо громіздкою задачею, оскільки при вивченні малих збурень (що важливо для практики) приводить до аналізу рівнянь з малим коефіцієнтом при старших похідних. Тому до вивчення малих збурень існують й інші підходи.

Розглянемо систему Хопфа при дії випадкових збурень

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2) + \varepsilon \dot{w}_1(t), \\ \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2) + \varepsilon \dot{w}_2(t), \end{cases}$$

де $w_1(t)$, $w_2(t)$ – стандартні вінерівські процеси.

Детермінована система Хопфа ілюструє біфуркацію переходу від стійкої рівноваги до граничного циклу. При переході параметра μ через біфуркаційне значення $\mu_* = 0$ точка рівноваги $(0, 0)$ втрачає свою стійкість і з'являється граничний цикл (коло $x^2 + y^2 = \mu$).

У разі дії випадкових збурень ($\varepsilon \neq 0$) траєкторія покидає детермінований аттрактор і формує навколо нього деякий пучок.

На рис. 8.14 для різних значень μ зображено стани цієї системи, що одержані в числовому експерименті.

Математичною моделлю стохастичного аттрактора є стаціонарний розподіл ймовірності, до якого збігаються всі інші розподіли. Для системи Хопфа рівняння ФПК для стаціонарної густини роз-

поділу $\rho(x, y)$ має вигляд

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} ((\mu x - y - x(x^2 + y^2))\rho) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} ((x + \mu y - y(x^2 + y^2))\rho) = 0.$$

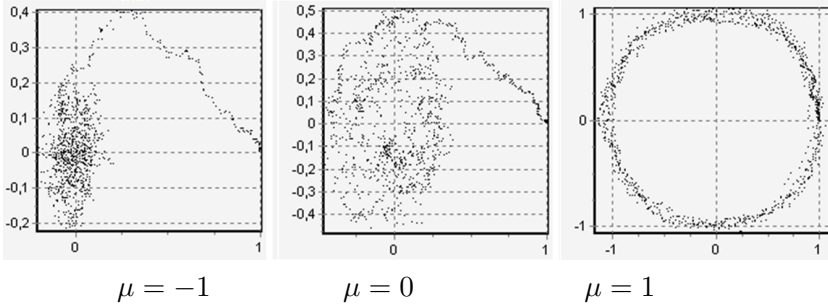


Рис. 8.14. Стани випадкової системи Хопфа

Розв'язки цього рівняння знаходяться аналітично [23]:

$$\rho(x, y) = K \exp \left(\frac{2\mu(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)^2}{2\varepsilon^2} \right),$$

де $K > 0$ – константа нормування ρ .

При $\mu \leq 0$ функція $\rho(x, y)$ має єдиний максимум у точці $(0, 0)$. Випадкові траєкторії концентруються в околі точки $(0, 0)$.

При $\mu > 0$ максимумами $\rho(x, y)$ розміщені на детермінованому циклі $x^2 + y^2 = \mu$, а єдиний мінімум знаходиться в точці $(0, 0)$.

Графіки функції $\rho(x, y)$ за фіксованого $y = 0$ при різних значеннях параметра μ наведені на рис. 8.15.

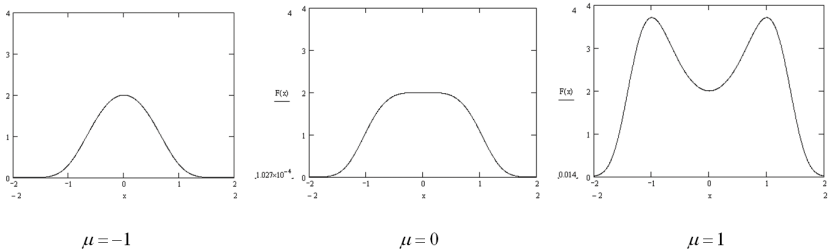


Рис. 8.15. Графіки функцій $\rho(x, 0)$

Покажемо ще, як можна здійснити комп'ютерне моделювання стохастичних траєкторій.

Розглянемо систему з випадковими збуреннями

$$\dot{x} = f(x, y) + \sigma_1(x, y)\dot{w}_1, \quad \dot{y} = g(x, y) + \sigma_2(x, y)\dot{w}_2.$$

Розрахунок наближених значень розв'язків можна здійснити на основі методу Ейлера за формулами

$$x_{m+1} = x_m + hf(x_m, y_m) + \sigma_1(x_m, y_m)\Delta w_{1,m},$$

$$y_{m+1} = y_m + hg(x_m, y_m) + \sigma_2(x_m, y_m)\Delta w_{2,m},$$

де $\Delta w_{1,m}$, $\Delta w_{2,m}$ – приріст вінерівських процесів. Їх можна одержати за формулами

$$\Delta w_{1,m} = \sqrt{-2h \ln(r_{1,m})} \sin(2\pi r_{2,m}),$$

$$\Delta w_{2,m} = \sqrt{-2h \ln(r_{1,m})} \cos(2\pi r_{2,m}).$$

Тут $r_{1,m}$, $r_{2,m}$ – незалежні випадкові величини, рівномірно розподілені на проміжку $[0, 1]$.

8.7. Задачі для самостійної роботи

8.1. Для системи (8.5.6) знайти стаціонарні точки, дослідити їх на стійкість. Побудувати параметричний портрет системи, її фазові портрети. Показати асимптотичну стійкість системи при $0 < \alpha$, $\beta < 1$ за допомогою функції Ляпунова вигляду

$$L(u, v) = (u - u^*) + (v - v^*) - u^* \ln \frac{u}{u^*} - v^* \ln \frac{v}{v^*}.$$

8.2. Узагальнити модель В. Вольтерри для системи "хижак–жертва", врахувавши внутрішньовидову конкуренцію серед жертв та хижаків. З метою зменшення кількості параметрів перейти до безрозмірних змінних. Знайти точки рівноваги, дослідити їх на стійкість. Довести відсутність періодичних розв'язків. Дати екологічну інтерпретацію отриманих результатів.

8.3. Математична модель системи "хижак–жертва" з урахуванням самообмеження обох популяцій у випадку, коли трофічна функція задається формулою Міхаеліса–Ментен, має вигляд:

$$\dot{x} = x(\varepsilon_1 - \gamma_1 x) - \frac{\gamma_1 xy}{1 + \beta x}, \quad \dot{y} = y(-\varepsilon_2 + \gamma_2 y) - \frac{\gamma_2 xy}{1 + \beta xy}.$$

Залежно від співвідношень параметрів системи одержати можливе розмаїття фазових портретів. Показати, що одна з точок спокою може бути нестійким фокусом, що обмежений стійким граничним циклом.

8.4. Модель Холлінга–Теннера для системи "хижак–жертва" має вигляд

$$\dot{x} = x(r(1 - \frac{x}{K})) - \frac{ny}{D + x}, \quad \dot{y} = sy(1 - \frac{hy}{x}),$$

де r, K, D, s, n, h – додатні параметри.

Ця модель враховує багато реальних факторів, зокрема ефект насичення хижака $V(x) = \frac{\gamma_1 x}{1 + \beta x}$. Швидкість зростання хижака

$sy(1 - \frac{hy}{x})$ вибрана з таких міркувань: коли їжі багато ($x \approx \infty$), то популяція хижаків росте за правилом Мальтуса з показником s . Зі зменшенням кількості жертви швидкість росту популяції хижака спадає і при $x < hy$ стає від'ємною.

Відповідною заміною змінних звести систему до безрозмірного вигляду. Показати, що завжди існує нетривіальний стан рівноваги, який може бути стійким або нестійким залежно від величини параметрів. Знайти області стійкості та нестійкості у двовимірному просторі параметрів. З'ясувати, чи існують замкнені траєкторії. Змоделювати систему числовими методами.

8.5. В 1934 р. Гаузе запропонував математичну модель системи "хижак–жертва" у вигляді

$$\dot{u} = \alpha(u)u - V(u)v, \quad \dot{v} = (-d + q(u))x.$$

Функції $\alpha(u)$, $V(u)$ мають таку ж поведінку, як у моделі Колмогорова, а $q(u)$ завжди задовольняє умови: $q(0) = 0$, $q'(u) > 0$, $q(u) > 0$ при $u > 0$, $q(\infty) < \infty$.

Знайти точки рівноваги, виписати матрицю Якобі. Дослідити точки рівноваги на стійкість. Побудувати фазові портрети. З'ясувати, чи в системі може існувати граничний цикл.

8.6. Нехай $x(t), y(t)$ – періодичні (періоду T) розв’язки системи Лотки–Вольтерри. Середньою чисельністю популяції хижака та жертви називаються величини

$$x_c = \frac{1}{T} \int_0^T x(s) ds, \quad y_c = \frac{1}{T} \int_0^T y(s) ds.$$

Знайти x_c, y_c . Як зміняться значення x_c, y_c , якщо здійснювати відлов особин з інтенсивністю, що пропорційна їх кількості.

8.7. Дослідити модель "хижак–жертва" з кубічною обмеженістю. Така система має вигляд

$$\dot{x} = (a + bx - x^2)x - xy, \quad \dot{y} = -my + xy.$$

Знайти точки спокою. Дослідити їх на стійкість. Побудувати параметричний портрет системи при фіксованому параметрі m . Побудувати фазовий портрет.

8.8. Математична модель системи "хижак–жертва" з конкуренцією серед жертв і з насиченням хижака має вигляд

$$\dot{x} = x - \alpha \frac{1}{1+x} y - \gamma x^2, \quad \dot{y} = -y + \beta \frac{1}{1+x} y.$$

Знайти стаціонарні точки системи, побудувати лінеаризовані рівняння. Дослідити тип особливих точок у залежності від параметрів системи. Вважаючи, що $\alpha = 1, \beta = 2$ побудувати графіки залежності $\lambda(\gamma)$, де λ – власні значення лінеаризованої матриці. Обґрунтувати можливість появи граничного циклу в цій системі.

8.9. Узагальнити математичну модель В. Вольтерри на випадок нелінійного розмноження в популяції жертв. Для цього можна взяти параметр $\varepsilon_1 = \frac{ax}{N+x}$. Заміною змінних звести систему рівнянь до безрозмірного вигляду. Побудувати фазовий портрет системи. Показати нестійкість нетривіального стаціонарного стану.

8.10. Розв’язати задачу 8.9 у випадку нелінійного розмноження популяції хижака (вважати $\gamma_2 = \frac{dy}{N+y}$).

8.11. Модель "хижак–жертва" з насиченням хижака й логістичним законом розвитку популяції жертви при відсутності хижака має вигляд

$$\dot{x} = ax \frac{K - x}{K} - \frac{bxy}{1 + Ax}, \quad \dot{y} = -cy + \frac{dxy}{1 + Ax},$$

де a, b, c, K, A – додатні параметри. Заміною змінних перейти до системи з трьома параметрами. Методом ізоклін побудувати фазовий портрет системи. Знайти умови існування нетривіальної рівноваги. Побудувати області структурної стійкості на площині двох параметрів.

8.12. Модель системи "хижак–жертва" з конкуренцією серед хижаків має вигляд

$$\dot{x} = \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy, \quad \dot{y} = -\varepsilon_2 + \gamma_2 xy - hy^2.$$

Виконати якісне дослідження моделі. Побудувати фазовий портрет. Зробити відповідні екологічні висновки.

8.13. Провести аналіз математичної моделі "хижак–жертва" у випадку нелінійного виїдання хижаком жертви. Така модель має вигляд

$$\dot{x} = ax - \frac{bx^2y}{1 + Ax^2}, \quad \dot{y} = -cy + \frac{dx^2y}{1 + Ax^2}.$$

Відповідною заміною змінних звести систему до системи з двома параметрами. За допомогою критерію Дюлака довести відсутність граничних циклів. Знайти точки рівноваги, дослідити їх стійкість. Зобразити фазовий портрет. Побудувати параметричний портрет системи.

8.14. Розглянути систему "хижак–жертва" з конкуренцією серед жертв і нелінійністю розмноження хижака, що має вигляд

$$\dot{x} = ax \frac{K - x}{K} - bxy, \quad \dot{y} = -cy + dxy \frac{y}{N + y}.$$

Заміною змінних перейти до системи з безрозмірними змінними. Знайти особливі точки, дослідити їх на стійкість за першим наближенням. Побудувати фазовий портрет. Дослідити можливість біфуркацій при зміні параметрів.

8.15. Математична модель системи "хижак–жертва" з конкуренцією серед жертв із нижньою критичною густиною має вигляд

$$\dot{x} = ax(K - x)(x - L) - bxy, \quad \dot{y} = -cy + dxy.$$

Виконати максимально повний аналіз цієї системи.

8.16. Який тип взаємодії описує така модель:

$$\dot{x} = r_1x\left(1 - \frac{x}{K_1 + \alpha_1y}\right), \quad \dot{y} = r_2y\left(1 - \frac{y}{K_2 + \alpha_2x}\right)?$$

Уведіть безрозмірні змінні та виконайте повний аналіз цієї системи.

8.17. Припустимо, що в системі з двох конкурентів одна з популяцій володіє нижньою критичною чисельністю, тоді динаміка такого угруповання описується системою

$$\dot{x} = a_1x(K_1 - x)(x - L_1) - \alpha_1xy, \quad \dot{y} = ay(K_2 - y) - \alpha_2xy.$$

Побудувати біфуркаційну діаграму цієї системи (параметричні та фазові портрети). Розглянути різні варіанти розміщення нуль-ізоклін.

8.18. Розв'язати задачу 8.17 у випадку двох конкурентів, коли кожний з них володіє нижньою критичною чисельністю.

8.19. Розглянути задачу 8.18 для системи симбіозу двох видів.

8.20. Нехай при відсутності взаємодії динаміка окремої популяції описується логістичним рівнянням і між популяціями існують відношення протокооперації. При врахуванні впливу на динаміку чисельності при відношеннях протокооперації в першому наближенні можемо припустити, що вони будуть описані аналогічно відношенням "хижак–жертва", тобто білінійними членами. Система диференціальних рівнянь, що описує таку динаміку чисельності, має вигляд

$$\dot{x} = a_1x\left(1 - \frac{x}{K_1}\right) + d_1xy, \quad \dot{y} = a_2y\left(1 - \frac{y}{K_2}\right) + d_2xy.$$

Здійснивши заміну змінних, перейти до системи з трьома параметрами. При фіксованому одному з параметрів зобразити параметричний портрет системи, й відповідні йому фазові портрети. Дослідження провести методом лінеаризації та методом ізоклін.

8.21. При моделюванні динаміки чисельності простіших популяцій у культиваторах широке розповсюдження одержали моделі системи ресурс–споживач.

Простіша модель системи ресурс–споживач має вигляд

$$\frac{dP}{dt} = Q - a(P)x, \quad \frac{dx}{dt} = x(ka(P) - b(x)), \quad k = \text{const} > 0, \quad (8.7.1)$$

де $P(t)$ – кількість придатного для поїдання корму; $Q(t)$ – швидкість надходження корму в систему; $a(P)$ – швидкість виїдання ресурсу однією особиною; $xb(x)$ – швидкість вимирання особин. Функції Q , a , b задовольняють природні умови

$$Q = Q(P), \quad \frac{dQ}{dP} < 0, \quad \frac{da}{dP} < 0, \quad \frac{db}{dx} > 0, \quad a(0) = 0, \quad b(0) > 0.$$

Показати, що в \mathbb{R}_+^2 немає замкнених граничних циклів, а лише існує не більше однієї стаціонарної точки, тобто в рамках моделі (8.7.1) корм відіграє роль стабілізуючого фактору.

8.22. Якщо в рамках задачі 8.21 врахувати характер швидкості надходження корму в систему, то одержимо модифікацію (8.7.1) у вигляді

$$\frac{dP}{dt} = Q(x) - s(x, P), \quad \frac{dx}{dt} = x(a(P) - b(x)), \quad (8.7.2)$$

де a , b мають такий самий зміст, що й у моделі (8.7.1), $s(x, P)$ – швидкість відтоку корму із системи. Накладемо на ці функції природні обмеження:

$$0 < K_1 \leq Q(x) \leq K_2 < \infty, \quad a(0) = 0, \quad \frac{da}{dP} > 0, \quad \exists K_3 : \quad a(P) \leq K_3 = \text{const},$$

$$b(0) > 0, \quad b(\infty) = \infty, \quad \frac{db}{dx} > 0, \quad s(x, 0) = 0,$$

$$s(\infty, P) = s(x, \infty) = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} > 0, \quad \frac{\partial s}{\partial P} > 0. \quad (8.7.3)$$

Відносно $Q(x)$ можливі такі ситуації:

- 1) $Q' < 0$, коли особини знищують кормову базу;
- 2) $Q' = 0$, для видів, які не впливають на кормову базу;

3) $Q' > 0$, особини розвивають кормову базу.

Показати, що в моделі (8.7.2) при умові 2) і обмеженнях (8.7.3) немає замкнених граничних циклів (за критерієм Дюлака з допоміжною функцією $\frac{1}{x}$). Довести, що в системі у випадку 1), 2) може реалізуватися виродження популяцій або відбутися стабілізація значень змінних на одному рівні, а у випадку 3) має місце тригерний режим: стабілізація на одному з двох рівнів у залежності від початкових значень.

8.23. Розглянемо модель взаємодії забруднення з оточуючим середовищем [29]. Припустимо, що загальне забруднення й стан довкілля можна охарактеризувати числовими значеннями, які назовемо концентрацією забруднення (P) і густиною біомаси E . Припустимо, що існує постійне джерело забруднення з інтенсивністю a . Нехай забруднення самознищується (розпадається) пропорційно кількості забруднення з коефіцієнтом пропорційності b . Тоді процес емісії забруднення описується рівнянням

$$\dot{P} = a - bP.$$

Припустимо, що забруднення знаходиться в постійній взаємодії з навколишнім середовищем: природа адсорбує й переробляє забруднення, тому цю систему можна розглядати як окремий випадок системи "хижак-жертва" (природа – жертва, забруднення – хижак). Поведінку природи у відсутності забруднення опишемо логістичним рівнянням, тоді математична модель матиме вигляд

$$\dot{P} = a - bP - cEP, \quad \dot{E} = rE\left(1 - \frac{E}{K}\right) - dEP.$$

Побудувати систему в безрозмірних змінних і показати, що в цій системі можливі три якісно різних сценарії, які залежать від інтенсивності викиду забруднення. Знайти положення рівноваги, дослідити їх на стійкість і побудувати фазові портрети.

8.24. Природа не може переробляти забруднення пропорційно його кількості. Існує деяке порогове значення забруднення, яке може переробити природа. Щоб врахувати цей факт, використовують трофічну функцію і модель "природа-забруднення" набуває вигляду

$$\dot{P} = a - bP - \frac{cEP}{A + P}, \quad \dot{E} = rE\left(1 - \frac{E}{K}\right) - dEP.$$

Розв'язати задачу 8.23 для цієї моделі.

8.25. У промислових умовах біологічна очистка стічних вод відбувається в спеціальних реакторах-аеротеках, де забруднення "поідається" мікроорганізмами біологічно активного мулу в результаті реакції біохімічного окислення.

Математичну модель очищення стічних вод можна задати рівняннями [29]

$$\dot{P} = a - bD(P) - cf(P, E), \quad \dot{E} = -dE + eh(P, E),$$

де $P(t)$ – концентрація забруднення води; $E(t)$ – густина біомаси активного мулу; $D(P)$ – функція дисипації, що описує природній розпад забруднення; $f(P, E)$, $h(P, E)$ – трофічні функції, що характеризують процес очищення забруднення біологічно активним мулом; $a > 0$ – інтенсивність джерела забруднення; $d > 0$ – стала, що задає швидкість зменшення маси активного мулу в чистій воді; c і e – додатні константи.

Припустимо, що $D(P) = P$, а трофічні функції однакові й мають вигляд

$$f(P, E) = h(P, E) = \frac{PE}{K + P}.$$

Необхідно побудувати систему в безрозмірних змінних. Знайти нерухомі точки й виконати лінійний аналіз. Побудувати фазовий портрет системи. Дати біологічне трактування одержаних результатів.

8.26. Розглянути модель "один хижак–дві жертви" в безрозмірних змінних

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\gamma_2 v(1 - u_1 - u_2), \\ \dot{u}_1 &= u_1(1 - v), \\ \dot{u}_2 &= \gamma_1 u_2(\alpha - v), \end{aligned}$$

де γ_1 , γ_2 , α – додатні параметри. Знайти можливі стани рівноваги і з'ясувати їх стійкість. Зафіксувати параметр $\gamma_1 = 1$ і від змінних v , u_1 , u_2 перейти до циліндричних координат: $u_1 = \rho \cos \varphi$, $u_2 = \rho \sin \varphi$, $v = z$. З'ясувати, якою є поведінка системи в циліндричних координатах.

8.27. Розглянути модель екосистеми, що складається з чотирьох популяцій, де x_1 може знищувати x_2 , x_3 (тобто виступає в ролі хижака по відношенню до x_2 , x_3), в свою чергу, x_2 є хижакком по відношенню до x_3 , x_4 . Елементи x_3 , x_4 виступають у ролі

жертви. Знайти стаціонарні розв'язки системи, дослідити їх на стійкість, оснастивши параметри моделі числовими значеннями, виконати числове моделювання поведінки розв'язків системи.

8.28. Дослідити стохастичну динаміку розв'язків системи за допомогою прямого комп'ютерного моделювання, задавши параметрам системи деяких числових значень. Скрізь $w_1(t)$, $w_2(t)$ – стандартні вінерівські процеси.

а) модель Лотки–Вольтерри

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy + \sigma_1 \dot{w}_1, \quad \dot{y} = -\gamma y + \delta xy + \sigma_2 \dot{w}_2;$$

б) модель з обмеженістю ресурсу для жертви

$$\dot{x} = x(1 - \alpha y) - \gamma x^2 + \sigma_1 \dot{w}_1, \quad \dot{y} = y(\beta x - 1) + \sigma_2 \dot{w}_2;$$

в) модель із насиченістю хижака

$$\dot{x} = x - \frac{\alpha x}{1 + x} - \gamma x^2 + \sigma_1 \dot{w}_1, \quad \dot{y} = -y + \frac{\beta x}{1 + x} y + \sigma_2 \dot{w}_2;$$

г) модель Холлінга–Теннера

$$\dot{x} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) x - \frac{nx y}{D + x} + \sigma_1 \dot{w}_1, \quad \dot{y} = s \left(1 - \frac{by}{x}\right) y + \sigma_2 \dot{w}_2.$$

Література: [15, 20, 23, 26, 27, 29, 34, 52, 55, 59, 67, 69, 84, 88].

Розділ 9. Дискретні моделі популяцій

9.1. Вступ

У попередніх розділах моделями динаміки популяцій виступали диференціальні рівняння або їх системи. Використання таких моделей можливе лише за деяких припущень, зокрема популяція повинна бути численною, щоб її можна було апроксимувати неперервною функцією. Крім цього, зміна чисельності популяцій у диференціальних рівняннях залежить лише від чисельності в даний момент часу, а для більшості реальних популяцій її стан у момент часу t залежить від стану в попередні моменти часу. Якщо чисельність популяції з перекривними поколіннями моделюється неперервною функцією, то виникають рівняння із запізненням, у випадку популяцій із неперекривними поколіннями – різницеві рівняння.

Різницеве рівняння k -го порядку має вигляд

$$N_t = F(N_{t-1}, N_{t-2}, \dots, N_{t-k}, t), \quad t = k, k+1, \dots, \quad (9.1.1)$$

де N_t – чисельність популяції в момент часу t .

Для популяцій із неперекривними поколіннями ріст чисельності відбувається в дискретні моменти часу.

Обмежимося випадком, коли чисельність кожного наступного покоління N_{t+1} залежить від чисельності лише попереднього покоління N_t . Ця ситуація має місце для популяцій із неперекривними поколіннями без довгих діапauз у життєвому циклі. До таких популяцій можна віднести, зокрема, багато видів комах. Їх дорослі особини живуть недовго, відкладають яйця і до моменту появи на світ нового покоління припиняють своє існування.

9.2. Загальна модель дискретних популяцій

Для неперекривних популяцій, при постійності основних факторів середовища, рівняння (9.1.1) перетворюється на рівняння першого порядку вигляду

$$N_{t+1} = F(N_t), \quad (9.2.1)$$

де F – гладка дійсна функція дійсного аргументу.

Із природних міркувань на функцію F накладають такі умови:

- $F(N) \geq 0$ при $N \geq 0$, $F(0) = 0$;
- при малих N функція $F(N)$ зростає;
- $F(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, оскільки реальний ресурс популяції обмежений.

Типовий графік функції $F(N)$ наведений на рис. 9.1, а.

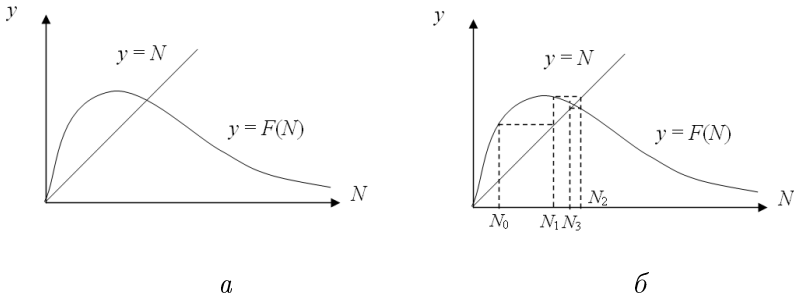


Рис. 9.1. Графік функції $F(N)$: а – існування точок рівноваги; б – сходінки Ламерея

Розв'язком (або траєкторією) рівняння (9.2.1) називають послідовність значень $\{N_t\}$, $t = 0, 1, 2, \dots$, що задовольняє різницеве співвідношення (9.2.1) при кожному t . Таку послідовність називають ще *орбітою* точки N_0 .

Стійкість розв'язків рівняння (9.2.1) можна визначити дослівно, як визначається стійкість за Ляпуновим розв'язків диференціального рівняння.

Визначення. Розв'язок N_t^* рівняння (9.2.1) називається стійким, якщо для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta(\varepsilon) > 0$, таке, що для будь-якого іншого розв'язку N_t із нерівності $|N_0 - N_0^*| < \delta$ впливає нерівність $|N_t - N_t^*| < \varepsilon$ для всіх $t = 1, 2, \dots$.

Аналогічно можна визначити й асимптотичну стійкість.

Визначення. Множина M , на якій визначена функція F , називається інваріантом рівняння (9.2.1), якщо $F(M) \subset M$.

Простішим прикладом інваріантної множини для рівняння (9.2.1) є стаціонарні точки (точки рівноваги)

$$N_t = N^* = \text{const},$$

які знаходяться з рівняння

$$N^* = F(N^*). \quad (9.2.2)$$

Тобто N^* є нерухомою точкою відображення F . Рівновага можлива, якщо рівняння (9.2.2) має хоча б один корінь, тобто перетинаються графіки функцій $y = F(N)$ та $y = N$ (рис. 9.1, *a*). Графічно встановити існування рівноваги можна й за діаграмою Ламерея (рис. 9.1, *б*). Послідовність значень N_1, N_2, \dots має назву "сходінки Ламерея". Вони складаються з направленою ланцюжка вертикальних та горизонтальних відрізків, які з'єднують відповідні точки графіка $y = F(N)$ і точки бісектриси першого координатного кута, причому горизонтальні напрямки йдуть від точок графіка до точок бісектриси. Дійсно, оскільки $N_1 = F(N_0)$, $N_2 = F(N_1)$, то для того, щоб N_1 зробити аргументом, потрібно значення $F(N_0)$ відносно бісектриси симетрично відобразити на вісь N .

Продовжуючи будувати сходінки Ламерея, одержимо послідовність чисельності $\{N_t\}$, $t = 0, 1, \dots$, яка дає можливість наочного зображення динамічних режимів, що можуть реалізовуватися в рамках моделі (9.2.1). Характер цієї послідовності може бути монотонним, циклічним, коливним та хаотичним і це визначатиметься формою кривої $F(N)$.

Щоб аналітично дослідити поведінку траєкторії в околі рівноваги N^* , підставимо в (9.2.1) $N_t = N^* + x_t$ і лінеаризуємо це рівняння. Для цього розкладемо функцію $F(N^* + x_t)$ у ряд Тейлора в околі точки N^* і внаслідок (9.2.2) одержимо

$$x_{t+1} = \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N^*} x_t + o(x_t^2), \quad (9.2.3)$$

тоді лінеаризація рівняння (9.2.3) має вигляд

$$x_{t+1} = \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N^*} x_t. \quad (9.2.4)$$

Для розв'язку x_t рівняння (9.2.4) маємо $x_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, якщо:

$$\left| \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N^*} \right| < 1. \quad (9.2.5)$$

Це є умовою стійкості (асимптотичної) стаціонарного розв'язку N^* рівняння (9.2.1).

За умови

$$\left| \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N^*} \right| > 1 \quad (9.2.6)$$

стаціонарний розв'язок N^* нестійкий.

Якщо $\left(\frac{dF}{dN} \right)_{N^*} = 0$, то в умовах стійкості (9.2.5) та нестійкості (9.2.6) першу похідну необхідно замінити на $\left(\frac{d^2F}{dN^2} \right)_{N^*}$ і т.д.

Випадок $\left| \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N^*} \right| = 1$ теж вимагає дослідження членів більш високого порядку в розкладі (9.2.3).

Окрім стаціонарних розв'язків, важливі ще періодичні розв'язки рівняння (9.2.1).

Визначення. Розв'язок N_t називається періодичним з періодом T (часто ще кажуть циклом довжиною T або просто T -циклом), якщо $N_{t+T} = N_t$ для всіх $t = 0, 1, \dots$ і $N_{t+j} \neq N_t$ при $j = 1, 2, \dots, T-1$.

Щоб з'ясувати, чи існують серед розв'язків рівняння (9.2.1) цикли довжиною $T = 2$ і знайти їх, випишемо значення N_{t+2} згідно з (9.2.1):

$$N_{t+2} = F(N_{t+1}) = F(F(N_t)) \equiv F^{(2)}(N_t).$$

Якщо розглядати послідовність із кроком 2, то рівняння

$$N_{t+2} = F^{(2)}(N_t) \quad (9.2.7)$$

теж є різницеvim рівнянням. Для нього можна застосувати наведені вище факти.

Цикл довжиною 2 можливий, якщо існують два різні додатні корені системи

$$N_2 = F(N_1), \quad N_1 = F(N_2),$$

або те саме, що такі корені дає рівняння

$$N = F^{(2)}(N).$$

Позначимо ці корені через N_1^* , N_2^* . Лінеаризуючи рівняння (9.2.7), наприклад, в околі точки N_1^* за аналогією з (9.2.5), одержуємо умову стійкості:

$$\left| \left(\frac{dF^{(2)}(N)}{dN} \right)_{N_1^*} \right| < 1.$$

Використовуючи правило диференціювання складеної функції, останню умову можна переписати у вигляді:

$$\left| \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N_1^*} \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N_2^*} \right| < 1. \quad (9.2.8)$$

Аналогічно умова нестійкості періодичного розв'язку $\{N_1^*, N_2^*\}$ має вигляд

$$\left| \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N_1^*} \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N_2^*} \right| > 1.$$

Для знаходження циклів довжиною 3 (для них виконується умова $N_{t+3} = N_t$) маємо систему

$$N_t = F(N_{t+2}), \quad N_{t+2} = F(N_{t+1}), \quad N_{t+1} = F(N_t),$$

або рівняння

$$N_t = F^{(3)}(N_t), \quad \text{де } F^{(3)}(N_t) = F(F(F(N_t))).$$

Цикли довжиною 3 мають особливий характер, оскільки з їхнього існування випливає теорема "Період три породжує хаос" (Лі, Йорке, 1975) та теорема А.Н. Шарковського (1964).

Для формулювання теореми Шарковського введемо позначення $m \succ j$, яке означає, що з існування циклу довжиною m випливає існування циклу довжиною j .

Теорема Шарковського. *Нехай задано відображення $N_{t+1} = F(N_t)$, у якому функція F неперервна, тоді справедлива така послідовність співвідношень*

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \dots \succ (2k+1) \succ \dots,$$

$$2 \cdot 3 \succ 2 \cdot 5 \succ \dots \succ 2(2k+1) \succ \dots$$

$$2^2 \cdot 3 \succ 2^2 \cdot 5 \succ \dots \succ 2^2(2k+1) \succ \dots \succ 2^3 \succ 2^2 \succ 2^1 \succ 1.$$

З цієї теореми випливає, що якщо відображення не має циклів довжиною 2, то воно не має взагалі жодних циклів. Якщо відображення має цикл довжиною 3, то воно має цикли всіх можливих довжин.

Для $F(N)$ пропонується широкий набір функцій. Ми розглянемо два конкретні приклади динамічних систем (9.2.1), які найчастіше використовуються на практиці.

9.3. Дискретна логістична модель

Логістичне рівняння популяції, як відомо, має вигляд

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2, \quad a, b > 0.$$

Метод Ейлера для логістичного рівняння полягає в обчисленні значень P_1, P_2, \dots за формулою

$$P_{k+1} = P_k + (aP_k - bP_k^2)h, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

або

$$P_{k+1} = rP_k - sP_k^2,$$

де $r = 1 + ah$, $s = bh$, h – крок інтегрування.

Здійснюючи підстановку $P_k = \frac{r}{s}N_t$, одержуємо рівняння

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t), \quad N_0 \in [0, 1], \quad (9.3.1)$$

яке описує не тільки динаміку популяцій, але й багато інших явищ у природі та суспільстві. Цю модель запропонував американський еколог Р. Мей – один із творців сучасної біоматематики.

Очевидним недоліком рівняння (9.3.1) є те, що при $N_t > 1$ маємо $N_{t+1} < 0$, що суперечить екологічній інтерпретації моделі, оскільки чисельність популяції не може бути від'ємною, тому (9.3.1) розглядаємо лише при $0 < N_t < 1$, $0 < r \leq 4$.

Для рівняння (9.3.1) рівновага $N = N^*$ шукається зі співвідношення

$$N = rN(1 - N),$$

звідки знаходимо стаціонарні розв'язки: $N = 0$ і $N = N^*$, де $N^* = \frac{r-1}{r}$.

З умови (9.2.5) знаходимо значення r , які забезпечують стійкість цих стаціонарних розв'язків:

$$\left| \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N=0} \right| = \left| \left(\frac{d(rN(1-N))}{dN} \right)_{N=0} \right| = |r| < 1 \Rightarrow r \in (0, 1),$$

$$\left| \left(\frac{dF}{dN} \right)_{N=N^*} \right| = \left| \left(\frac{d(rN(1-N))}{dN} \right)_{N=N^*} \right| =$$

$$= |r(1-2N)|_{N=r-1/r} = |2-r| < 1 \Rightarrow r \in (1, 3).$$

Як бачимо, значення параметра r визначають поведінку траєкторій N_t . Задаючи різні значення параметра r , можна одержати якісно різні типи поведінки N_t . Для повнішої картини розглянемо динаміку відображення (9.3.1) при зростанні параметра r . Ці дослідження наведені в наступних пунктах.

1. $0 < r < 1$. Рівняння (9.3.1) має тривіальний стаціонарний розв'язок $N = 0$ для всіх $r \in (0, 4]$, але умова стійкості (9.2.5) виконується лише при $0 < r < 1$.

2. $1 < r < 3$. При $r > 1$ з'являється нетривіальний стаціонарний розв'язок $N^* = 1 - \frac{1}{r}$, оскільки графік параболи $y = F(N) = rN(1-N)$ перетинається з бісектрисою в двох точках (рис. 9.2). Він буде стійкий лише при $1 < r < 3$. Нерухома точка $N = 0$ при $r > 1$ втрачає стійкість.

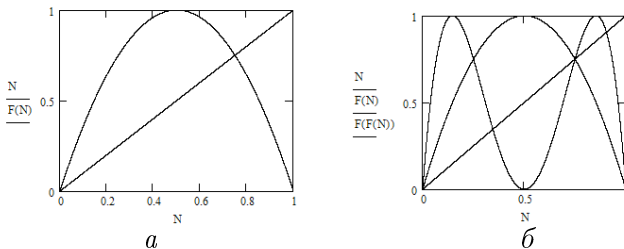


Рис. 9.2. Графіки функцій: $a - y = F(N)$; $b - y = F(F(N))$

3. $3 < r < 1 + \sqrt{6}$. При $r > 3$ нерухома точка N^* втрачає стійкість, замість неї з'являється стійкий цикл довжиною 2. Позначи-

мо його через $\{N_1^*, N_2^*\}$. Точки, що складають цей цикл, визначаються з рівняння (9.2.7). Вони є нерухомими точками цього відображення й у випадку (9.3.1) знаходяться з рівняння

$$N - r^2 N(1 - N)(1 - rN(1 - N)) = 0,$$

два корені якого вже відомі: $N = 0$, $N = 1 - \frac{1}{r}$. Якщо ліву частину цього рівняння розділити на N і на $N - \left(1 - \frac{1}{r}\right)$, то одержимо рівняння

$$rN^2 - (r + 1)N + \frac{r + 1}{r} = 0,$$

коренями якого є

$$N_{1,2}^* = (r + 1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}) / (2r).$$

$N_{1,2}^*$ існують при $r > 3$, а стійкі лише при $3 < r < 1 + \sqrt{6}$.

4. $1 + \sqrt{6} < r < r_\infty = 3,56999\dots$ При $r > 1 + \sqrt{6}$ з'являється стійкий цикл довжиною 4, а цикл довжиною 2 перестає бути стійким. При подальшому зростанні параметра r у цьому діапазоні послідовно відбувається біфуркація подвоєння довжини циклу, тобто виникають нові стійкі цикли довжиною 2^m ($m \geq 2$) і при цьому втрачається стійкість періодичного циклу довжиною 2^{m-1} , хоча цикли, які втрачають стійкість, продовжують існувати, але в динамічних режимах не реалізуються через нестійкість.

Біфуркацію подвоєння циклу при зміні параметра r зручно подавати за допомогою біфуркаційної діаграми (рис. 9.3), при цьому по вертикальній осі відкладаються нерухомі точки відображення, що утворюють стійкий цикл.

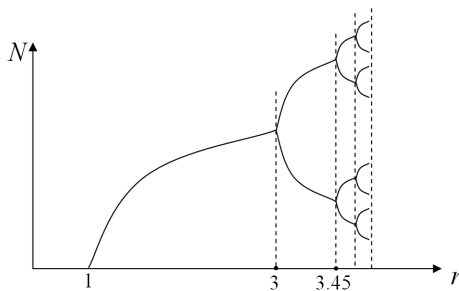


Рис. 9.3. Біфуркаційна діаграма подвоєння циклу

Позначимо через r_m значення параметра r , при якому виникають стійкі цикли довжиною 2^m . Виявляється, що послідовність значень r_m задовольняє співвідношення

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{r_m - r_{m-1}}{r_{m+1} - r_m} = \mu_F = 4,6692\dots$$

Цей факт був встановлений Фейгенбаумом (американський фізик), тому число μ_F називається універсальною сталою Фейгенбаума.

При $r = r_\infty$ виникає цикл нескінченної довжини, а всі цикли довжиною 2^m будуть нестійкими.

5. $r > r_\infty$. У цьому діапазоні зміни r виникають цикли довжиною 3 і тим самим за теоремою Шарковського цикли всіх можливих довжин. Можна показати, що цикл довжиною 3 виникає при $r > 1 + \sqrt{8} = 3,828427\dots$

Для знаходження циклів довжиною 3 необхідно обчислити корені рівняння

$$N = F(F(F(N))), \quad \text{де } F(N) = rN(1 - N).$$

Цю задачу можна розв'язати вже числовими методами.

Згідно з теоремою про хаос, після втрати стійкості 3-циклу при досить великих значеннях r настає нерегулярний хаотичний режим, коли в послідовності $\{N_t\}_{t=0}^\infty$ немає жодних закономірностей. Такий режим називають ще квазістохастичним, оскільки він імітує стохастичний процес, хоча сама модель детермінована.

Щоб пояснити хаотичний характер ітерацій при досить великих r , візьмемо в рівнянні (9.3.1) початкове значення $N_0 = \sin^2 \pi q$, де q — ірраціональне число, а параметр $r = 4$, тоді

$$N_1 = 4 \sin^2 \pi q (1 - \sin^2 \pi q) = \sin^2 2\pi q,$$

$$N_2 = 4 \sin^2 2\pi q (1 - \sin^2 2\pi q) = \sin^2 4\pi q,$$

.....

$$N_t = \sin^2 2^t \pi q.$$

Комп'ютерне моделювання цих величин показує, що N_t поводить хаотично, заповнюючи відрізок $[0, 1]$ (рис. 9.4).

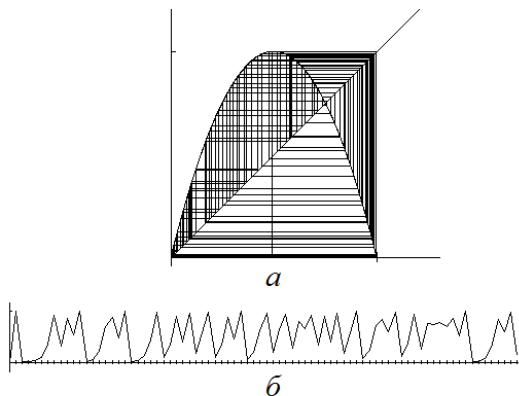


Рис. 9.4. *a* – діаграма Ламерея для рівняння (9.3.1); *b* – його розв’язок при $r = 4$, $N_0 = 0,49$

На рис. 9.5 наведені графіки залежності N_t від дискретного значення часу при різних значеннях r ($N_0 = 0.2$). Для значення $r = 0,5$ $N_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, при $r = 2,4$ $N_t \rightarrow 0,5833$ при $t \rightarrow \infty$, при $r = 3,33$ виникає цикл із періодом 2. При подальшому зростанні параметра r динаміка N_t ускладнюється.

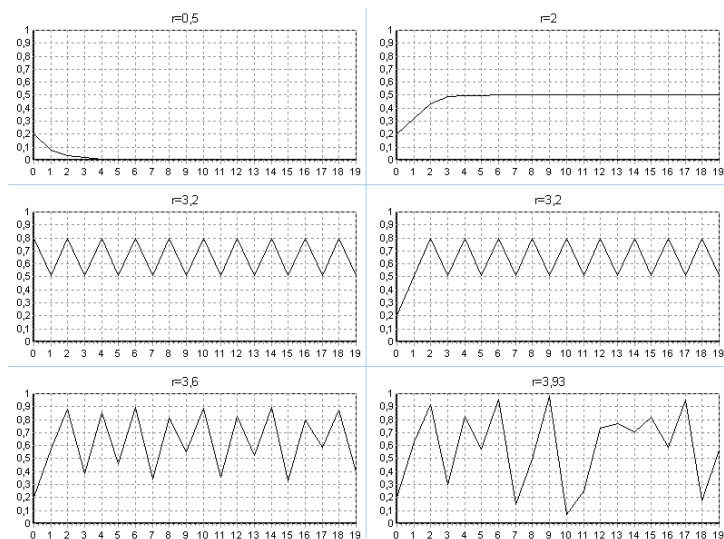


Рис. 9.5. Графіки розв’язків рівняння (9.3.1) при різних значеннях r

9.4. Модель Рікера

Ця модель задається різницеvim рівнянням

$$N_{t+1} = N_t \exp \left(r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right). \quad (9.4.1)$$

Рівновага в цьому випадку шукається як розв'язок рівняння

$$N^* \exp \left(r \left(1 - \frac{N^*}{K} \right) \right) = N^*.$$

Звідси маємо, що $N_1^* = 0$, $N_2^* = K > 0$ – точки рівноваги $\forall r$.

З'ясуємо тепер питання про існування циклів довжиною 2. Для цього з рівняння (9.4.1) дістанемо

$$\begin{aligned} N_{t+2} &= N_{t+1} \exp \left(r \left(1 - \frac{N_{t+1}}{K} \right) \right) = N_t \exp \left(r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(r \left(1 - \frac{N_t \exp \left(r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right)}{K} \right) \right) = \\ &= N_t \exp \left(r \left(2 - \frac{N_t}{K} \left(\exp \left(r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) + 1 \right) \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Оскільки $N_{t+2} = N_t$, то

$$\frac{N_t}{K} \left(\exp \left(r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right) + 1 \right) = 2,$$

яке заміною змінних $N_t = K(1+x)$ зводиться до рівняння

$$x = \operatorname{th} \left(\frac{1}{2} r x \right), \quad (9.4.2)$$

де $\operatorname{th} x = (e^x - e^{-x}) / (e^x + e^{-x})$.

Кількість коренів трансцендентного рівняння (9.4.2) з'ясовується графічним аналізом. При $r < 2$ існує лише один корінь $x = 0$ (тобто $N^* = K$), який відповідає точці рівноваги, знайденій раніше.

При $r > 2$ існує вже три точки перетину прямої $y = x$ і кривої $y = \operatorname{th} \left(\frac{r}{2} x \right)$, а саме $x = 0$, $x = \pm \bar{x}$, де $\bar{x} \in (0, 1)$ (рис. 9.6). Це означає, що при $r > 2$ з'являється цикл довжиною 2, який складають значення $N_1^* = K(1 + \bar{x})$ і $N_2^* = K(1 - \bar{x})$. При цьому рівновага $N^* = K$ перестає бути стійкою.

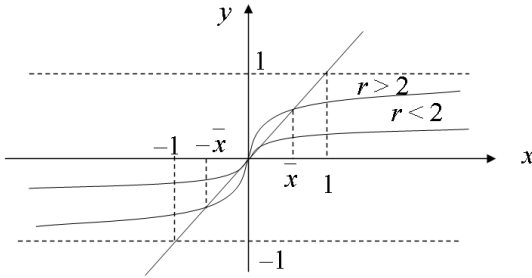


Рис. 9.6. Графічне розв'язування рівняння (9.4.2)

Дослідимо знайдені розв'язки на стійкість. Відповідно до формули (9.2.5) потрібно знайти значення похідної функції F у цих точках і порівняти їх за абсолютною величиною з одиницею.

Похідна функції дорівнює

$$\frac{dF}{dN} = \left(1 - \frac{rN}{K}\right) \exp\left(r\left(1 - \frac{N}{K}\right)\right).$$

Для $N_1^* = 0$ маємо $\left(\frac{dF}{dN}\right)_{N_1^*} = e^r > 1$, а це означає, що стаціонарна рівновага $N_1^* = 0$ нестійка для будь-якого $r > 0$. Для $N_2^* = K$ маємо $\left(\frac{dF}{dN}\right)_{N_2^*} = 1 - r$ і умова стійкості (9.2.5) виконується при $0 < r < 2$. До того ж при $0 < r < 1$ маємо монотонне наближення, а при $1 < r < 2$ розв'язки мають коливний згасаючий характер навколо стану рівноваги.

Отже, при $0 < r < 2$ нетривіальний розв'язок $N_2^* = K$ стійкий, при $r > 2$ – нестійкий.

Для з'ясування стійкості циклу довжиною 2 перевіримо умову (9.2.8) для рівняння (9.4.1). Ця перевірка показує, що точки N_1^* , N_2^* утворюють притягуючий цикл, коли

$$0 < r(2 - r(1 - \bar{x})) < 2.$$

Остання умова і задає інтервал значень $2 < r < r_2 = 2,526\dots$ для існування стійких циклів довжиною 2.

Цикл довжиною 3 для рівняння (9.4.1) шукаємо у вигляді

$$N_t = aK, \quad N_{t+1} = bK, \quad N_{t+2} = cK, \quad a, b, c > 0.$$

Числа a , b , c задовольняють систему рівнянь

$$\begin{aligned}b &= a \exp(r(1 - a)), \\c &= b \exp(r(1 - b)), \\a &= c \exp(r(1 - c)).\end{aligned}\tag{9.4.3}$$

Прологарифмуємо кожне з рівнянь (9.4.3) і додамо їх, тоді одержимо

$$a + b + c = 3.$$

Використовуючи цю умову із системи (9.4.3) одержуємо рівняння для знаходження значення a вигляду

$$\ln\left(\frac{3}{a} - 1 - \exp(r(1 - a))\right) = r(2 - a - a \exp(r(1 - a))).\tag{9.4.4}$$

Графічний аналіз рівняння (9.4.4) показує, що при $r > r_3 \approx 3,102$ існують два різні триточкові цикли, а при $r < r_3$ таких циклів немає.

З існування циклів довжиною 3 випливає існування циклів будь-якої довжини і, крім цього, існує незчисленна множина початкових значень N_0 , при яких розв'язки поведуть себе хаотично, тобто не прямують до жодного притягуючого розв'язку.

9.5. Дискретна модель вікової структури. Модель Леслі

При дослідженні багатьох популяцій важливо враховувати популяційні структури, наприклад, той факт, що популяція природно розпадається на дискретні вікові групи. При цьому задача описання динаміки вікового складу приводить до аналізу дискретної – у цьому випадку матричної системи.

Розглядаючи деяку популяцію, будемо вважати, що вона розпадається на n вікових груп. Чисельність i -ї вікової групи позначатимемо через $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$.

Якщо для популяції суттєвий поділ на статі, то вважатимемо, що $x_i(t)$ – чисельність самок i -ї групи.

При моделюванні динаміки вікового складу популяцій візьмемо до уваги процеси народжування, вимирання та старіння. Будемо вважати, що перша вікова група складається з нащадків усіх

вікових груп, які з'явилися в проміжок часу $(t, t + 1)$, а кількість нащадків вікової групи пропорційна чисельності цієї групи, тоді

$$x_1(t + 1) = b_1x_1(t) + b_2x_2(t) + \dots + b_nx_n(t). \quad (9.5.1)$$

Коефіцієнти $b_i \geq 0$ називаються коефіцієнтами народжуваності. Нехай $b_n \neq 0$. Через одиницю часу в $i + 1$ -у вікову групу перейде деяка частина i -ї групи, тобто маємо рівняння

$$x_{i+1}(t + 1) = a_ix_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1, \quad (9.5.2)$$

де a_i ($0 < a_i \leq 1$) – доля осіб i -го віку, що доживають до $i + 1$ -го віку.

Модель (9.5.1), (9.5.2), що враховує віковий ценз, називається моделлю Леслі (Leslie P.H., еколог, 1900–1974).

Вона може бути записана в матричній формі

$$X(t + 1) = LX(t), \quad (9.5.3)$$

де $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$ – вектор чисельності популяції у виділених вікових групах,

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.5.4)$$

Матрицю L називають матрицею Леслі.

Дослідимо асимптотичну поведінку послідовності $X(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Якщо задати початковий розподіл $X(0)$, то для дискретного часу t маємо рівняння

$$X(t) = L^tX(0), \quad (9.5.5)$$

яке визначає вектор $X(t)$ у залежності від початкових умов і значень L^t . Поведінка матриці L^t визначається характеристичними коренями матриці L .

Матриця Леслі подібна до своєї жорданової нормальної форми й може бути зображена у вигляді

$$L = P \text{diag}(J_1, \dots, J_m) P^{-1},$$

де J_i – жорданові клітинки, що відповідають різним власним значенням λ_i , $i = 1, 2, \dots, m$, а стовпці матриці P складають жорданів базис.

Кожна клітинка J_1, J_2, \dots, J_m має вигляд

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

де λ – одне з власних чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, а порядок \tilde{J} дорівнює алгебраїчній кратності k числа λ .

Як відомо, для того, щоб обчислити деяку функцію від матриці L , потрібно цією функцією подіяти на жорданову нормальну форму, зокрема

$$L^t = P \text{diag} (J_1^t, J_2^t, \dots, J_m^t) P^{-1}.$$

Визначимо характер власних значень матриці L , для цього запишемо характеристичне рівняння

$$\det(\lambda E - L) = \begin{vmatrix} \lambda - b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-1} & -b_n \\ -s_1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -s_{n-1} & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи визначник за елементами першого рядка, маємо

$$\Delta(\lambda) \equiv \lambda^n - b_1 \lambda^{n-1} - b_2 a_1 \lambda^{n-2} - \dots - b_n a_1 \dots a_{n-1} = 0. \quad (9.5.6)$$

Унаслідок зроблених припущень вільний член відмінний від нуля, тому серед коренів немає нульових, а згідно з теоремою Декарта кількість додатних коренів многочлена дорівнює кількості змін знаків у послідовності його коефіцієнтів або є на парну кількість меншою. Оскільки многочлен $\Delta(\lambda)$ має одну знакозміну в послідовності коефіцієнтів і $\Delta(0) < 0$, $\Delta(\infty) = \infty$, то існує єдиний дійсний корінь $\lambda_1 > 0$ характеристичного рівняння (9.5.6).

За теоремою Фробеніуса, для власних значень λ_i невід'ємної матриці L виконується нерівність $|\lambda_i| \leq \lambda_1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Якщо $|\lambda_i| = \lambda_1$ при $i = 1, 2, \dots, h$, то матриця L при $h > 1$ називається імпримітивною, а число h – індексом імпримітивності матриці. При $h = 1$ матриця L є примітивною ($|\lambda_i| < \lambda_1, i \neq 1$).

Для примітивної матриці

$$L^t = P \operatorname{diag} (\lambda_1^t, J_2^t, \dots, J_m^t) P^{-1}.$$

Для досить великих t

$$\tilde{J}^t = \begin{pmatrix} \lambda^t & \frac{t}{1!} \lambda^{t-1} & \dots & \frac{t(t-1)\dots(t-k+2)}{(k-1)!} \lambda^{t-k+1} \\ 0 & \lambda^t & \dots & \frac{t(t-1)\dots(t-k+3)}{(k-2)!} \lambda^{t-k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^t \end{pmatrix}.$$

Оскільки при $|\lambda| < \lambda_1$ (для примітивної матриці L) $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\tilde{J}}{\lambda_1}\right)^t = 0$, то асимптотику розв'язку (9.5.5) при $t \rightarrow \infty$ можна задати формулою

$$X(t) \approx c_1 \lambda_1^t y_1, \quad (9.5.7)$$

де y_1 – власний вектор, що відповідає значенню λ_1 . Тобто гранична вікова структура популяції визначається компонентами власного вектора домінантного власного числа λ_1 .

З формули (9.5.7) випливає важливий якісний висновок: при $\lambda_1 < 1$ популяція вимирає ($\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$), при $\lambda_1 > 1$ популяція необмежено зростає, так що існує границя послідовності $\left\{ \frac{L^t X(0)}{\lambda_1^t} \right\}_{t=0}^{\infty}$, при $\lambda_1 = 1$ існує нетривіальна границя $X(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Отже, домінантне власне значення λ_1 відіграє роль, аналогічну мальтузіанському параметру.

Для того, щоб дізнатися, яка зі стратегій буде реалізована, необов'язково знаходити максимальне значення λ_1 (технічно це може бути складною задачею), а досить лише з'ясувати, чи λ_1 є більшим чи меншим за одиницю. Це можна здійснити так. Поділимо (9.5.6) на λ^n і позначимо $\mu = \frac{1}{\lambda}$, тоді для μ одержимо рівняння

$$P(\mu) \equiv b_1 \mu + b_2 a_1 \mu^2 + \dots + b_n a_1 + \dots + a_{n-1} \mu^n = 1. \quad (9.5.8)$$

Поліном $P(\mu)$ є монотонно зростаючою функцією дійсного аргументу μ , оскільки всі його коефіцієнти додатні, й, крім того, $P(0) = 0$. Тому, якщо $P(1) > 1$, то корінь рівняння (9.5.8) $\mu^* < 1$ (рис. 9.7, а), а це означає, що $\lambda_1 > 1$ (популяція виживає).

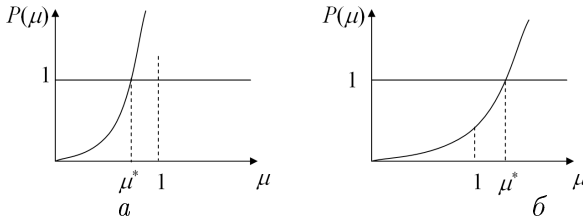


Рис. 9.7. Існування та характер коренів рівняння $P(\mu) = 1$

Якщо $P(1) < 1$, то корінь $\mu^* > 1$ (рис. 9.7 б)), тобто $\lambda_1 < 1$ (популяція вимирає), якщо $P(1) = 1$, то $\mu^* = 1$, а отже, $\lambda_1 = 1$.

Для імпримітивної матриці L гранична вікова структура має складнішу поведінку [88].

Приклад 9.5.1. При вивченні динаміки населення деякої країни всю популяцію розбили на 3 групи – по 20 років кожна, так що перша вікова група включає особин віком від 0 до 19 років, друга – від 20 до 39 років і третя – від 40 до 59 років.

Матриця Леслі для динаміки цих трьох класів має вигляд

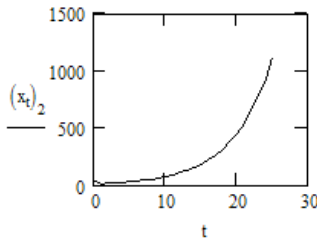
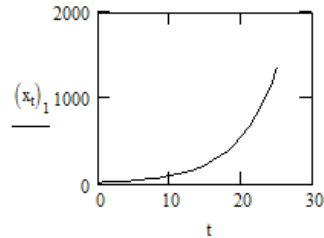
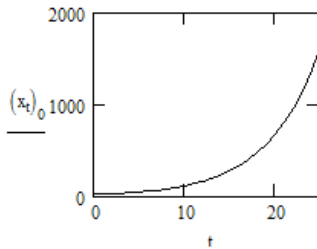
$$L = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,84 & 0,12 \\ 0,99 & 0 & 0 \\ 0 & 0,98 & 0 \end{pmatrix}.$$

Результати дослідження цієї моделі наведені на рис. 9.8.

Власні значення матриці L : $\lambda_1 = 1,1964$, $\lambda_2 = -0,6193$, $\lambda_3 = -0,1571$. Нормалізований власний вектор y_1 , що відповідає власному значенню λ_1 , має вигляд $y_1 = (0,6829; 0,5651; 0,4629)^T$. Тому населення цих трьох вікових груп збільшується так, що в асимптотиці вектор $X(t)$ на кожному кроці множить на λ_1 і $\frac{X(t)}{\lambda_1^t}$ має скінченну границю при $t \rightarrow \infty$, яка залежить від власного вектора y_1 і початкового вектора $X(0)$. ▲

$$L := \begin{pmatrix} 0.42 & 0.84 & 0.12 \\ 0.99 & 0 & 0 \\ 0 & 0.98 & 0 \end{pmatrix} \quad t := 0..25 \quad x_t := \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 40 \end{pmatrix} \quad x_{t+1} := L \cdot x_t$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 21.6 \\ 19.8 \\ 9.8 \end{pmatrix} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 26.88 \\ 21.384 \\ 19.404 \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} 31.58064 \\ 26.6112 \\ 20.95632 \end{pmatrix} \quad x_4 = \begin{pmatrix} 38.13204 \\ 31.26483 \\ 26.07898 \end{pmatrix} \quad x_5 = \begin{pmatrix} 45.40739 \\ 37.75071 \\ 30.63954 \end{pmatrix}$$



$$\text{eigenvals}(L) = \begin{pmatrix} 1.19641 \\ -0.61928 \\ -0.15714 \end{pmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(L, 1.1964131323) = \begin{pmatrix} 0.68293 \\ 0.56511 \\ 0.46289 \end{pmatrix}$$

Рис. 9.8. Аналіз моделі Леслі. Лістинг програми на Mathcad

9.6. Задачі для самостійної роботи

9.1. Для моделі Скеллама

$$N_{t+1} = aN_t / (1 + bN_t), \quad a, b = \text{const} > 0$$

знайти стаціонарні точки, дослідити їх на стійкість. Довести, що це відображення немає жодних циклів.

9.2. Дискретна модель з урахуванням ефекту Оллі має вигляд

$$N_{t+1} = aN_t^2 / (b^2 + N_t^2), \quad a > 0.$$

Вивчити питання існування нерухомих точок та знайти умови їх стійкості. На основі цього показати, що при $a^2 > 4b^2$ існує нижнє критичне значення чисельності, перейшовши яке популяція приречена на вимирання. Довести відсутність періодичних розв'язків. Провести числове моделювання розв'язків.

9.3. Для динамічної системи з дискретним часом

$$N_{t+1} = rN_t / (1 + aN_t)^b, \quad b > 0, a > 0,$$

знайти положення рівноваги, дослідити їх стійкість і обчислити перші біфуркаційні значення параметрів.

9.4. Для математичної моделі популяційної динаміки

$$N_{t+1} = N_t \left(1 + r \left(1 - \frac{N_t}{K} \right) \right)$$

знайти невід'ємні стани рівноваги та дослідити їх на стійкість. Знайти перші біфуркаційні значення параметрів та з'ясувати чи існують цикли в цьому рівнянні. Провести обчислювальні експерименти.

9.5. Дискретна модель популяції має вигляд

$$N_{t+1} = rN_t / (1 + bN_t^2), \quad r, b > 0.$$

Знайти стаціонарні розв'язки і провести дослідження їх стійкості. Показати, що $r = 1$ є біфуркаційним значенням. Довести, що при будь-якому r популяція вмирає, якщо $b > 4$.

З'ясувати, якими величинами буде обмежена чисельність популяції N_t .

9.6. Розглянути задачу 9.4. для моделі із запізненням

$$N_{t+1} = \frac{rN_t}{1 + bN_{t-1}^2}, \quad r, b > 0.$$

Показати, що $r = 2$ є біфуркаційним значенням.

9.7. Однорічні рослини дають насіння і в кінці літа вимирають. Весною з певної частини насіння виростають нові рослини. Деяка частина насіння може зійти через рік, а решту насіння пропадає. Припустимо, що одна рослина дає γ насінин; α – частина

насіння, що сходять весною; β – частина насіння, що зійде через рік (припускається, що насіння через 2 роки не сходять).

Показати, що динаміка кількості рослин N_t у рік t задовольняє рівняння

$$N_{t+1} = \alpha\beta\gamma N_t + \beta(1 - \alpha)\gamma N_{t-1}.$$

Довести, що умова виживання популяції рослин має вигляд $\gamma > 1/(\alpha + \beta(1 - \alpha))$.

Побудувати загальний розв'язок і проаналізувати умови, за яких він не прямує до нуля.

Вказівка. Розв'язок рівняння необхідно знаходити у формі $N_t = \mu^t$.

9.8. Для контролю кількості комах використовують стратегію зовнішнього введення в популяцію стерильних комах, причому їхня кількість підтримується на одному рівні. Одна з математичних моделей, що описує динаміку чисельності комах N_t , має вигляд

$$N_{t+1} = \frac{RN_t^2}{(R - 1)N_t^2/M + N_t + S},$$

де $R > 1$, $M > 0$, $S > 0$ – кількість стерильних комах.

Знайти нерухомі точки рівняння і дослідити їх на стійкість. Вивчити можливі бифуркації. Знайти критичне значення чисельності $S = S_{\text{кр}}$, таке, що при $S > S_{\text{кр}}$ популяція подавляється. Визначити можливі поведінки розв'язків при $S < S_{\text{кр}}$.

9.9. Для рівняння $N_{t+1} = N_t^3 + 0.1$:

- а) довести існування трьох точок спокою $N_1^* < N_2^* < N_3^*$;
- б) довести, що тільки N_2^* стійка;
- в) знайти інваріантний інтервал, що містить N_2^* .

9.10. Для моделі $N_{t+1} = rN_t(1 - N_t^2)$ знайти точки спокою і дослідити їх на стійкість. З'ясувати, чи існують періодичні розв'язки.

9.11. Для моделі $N_{t+1} = \alpha N_t + \beta$, $\alpha > 0$, $\beta \in (-\infty, +\infty)$:

- а) знайти стаціонарну точку й дослідити її на стійкість;
- б) знайти значення параметрів, при яких існує цикл довжиною 2, і з'ясувати, чи буде він стійким.

Розглянути випадок $\beta > 0$ (постійний приток особин) та $\beta < 0$ (постійний відтік особин).

9.12. Показати, що ітераційний процес

$$N_{t+1} = r \sin \pi N_t, \quad t = 0, 1, 2,$$

володіє властивістю подвоєння періоду при зміні параметра r . Знайти універсальну сталу Фейгенбаума. Дослідити стійкість стаціонарних точок.

9.13. Розглянути відображення Рікера

$$N_{t+1} = rN_t \exp(-bN_t),$$

де r – максимальний коефіцієнт розмноження; b – коефіцієнт, що відображає вплив саморегуляторних механізмів. Знайти значення r , при якому з'являється нетривіальна нерухома точка, та діапазон значень r її стійкості. При яких r виникає стійкий цикл довжиною 2. Чисельно встановити значення r , коли цикл довжиною 2 втрачає свою стійкість і з'являється цикл довжиною 4.

9.14. Для моделювання динаміки чисельності деяких видів риб використовують функціональну залежність вигляду

$$N_{t+1} = \frac{N_t}{1 - e^{-\alpha(1-N_t/K)}}.$$

Визначити невід'ємні нерухомі точки залежно від параметрів моделі, дослідити їх на стійкість. З'ясувати, чи можливі цикли в цьому рівнянні.

9.15. Дослідити динаміку популяцій, що задається дискретною моделлю

$$N_{t+1} = \lambda N_t (1 - N_t)^{-\beta}, \quad \beta \geq 1.$$

Побудувати біфуркаційну діаграму.

9.16. Побудувати біфуркаційну діаграму для відображення

$$x_{t+1} = \frac{ax_t}{1 + x_t} \exp \left\{ -\frac{bx_t}{1 + x_t} \right\}.$$

Вважати $b = 2$, $a \in [0, 100]$. Знайти стаціонарні розв'язки. З'ясувати умови їх стійкості. Вдаючись до числових методів, переконатися, що при $a, b \approx 35$ в моделі спостерігається стійкий цикл довжиною 3.

9.17. Провести аналітичне та числове моделювання відображення

$$x_{n+1} = rx_n \left(1 - \frac{x_n + Kx_n^2}{1 + K} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, 10.$$

Знайти область значень $[r_0, r_\infty]$ параметра r , при яких відрізок $[0, 1]$ відображається в себе. Аналітично знайти ненульову нерухому точку відображення і визначити область її стійкості – інтервал $[r_1, r_2]$. Аналітично або числовими методами знайти стійкий цикл періоду 2. Чисельно знайти цикл періоду 3 та значення параметра r , при якому цикл перестає бути стійким. Побудувати біфуркаційну діаграму.

9.18. Провести дослідження дискретної логістичної моделі з запізненням

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_{t-1}).$$

Знайти стаціонарні розв'язки, дослідити їх стійкість за лінійним наближенням.

9.19. Нехай чисельність популяції описується дискретним рівнянням Рікера із запізненням:

$$N_{t+1} = N_t \exp\{r(1 - N_{t-1})\},$$

де N_t – відносна чисельність популяції. Знайти стаціонарні точки, дослідити їх на стійкість. Показати, що при $r = 1$ виникає біфуркація стійкості.

9.20. Розглянути дискретну модель конкуренції двох видів

$$x_{t+1} = x_t + a_1x_t - b_1x_t y_t, \quad y_{t+1} = y_t + a_2y_t - b_2x_t y_t.$$

Знайти стаціонарні розв'язки, дослідити їх на стійкість. Провести числові експерименти при $a_1 = 0,01$, $a_2 = 0,02$, $b_1 = 0,002$, $b_2 = 0,001$.

9.21. Показати, що явищем біфуркації володіє двовимірний процес Хеннона:

$$N_{t+1} = 1 - aN_t^2 + M_t, \quad M_{t+1} = bN_t.$$

При фіксованому b знайти критичні значення параметра a , при яких відбувається якісна зміна поведінки системи.

9.22. Розглянемо популяцію, яка складається з двох вікових класів: молодшого (статеві незрілих особин) і старшого (ті, що беруть участь у розмноженні). Таку дискретну модель двовікової популяції можна подати у вигляді

$$x_{t+1} = by_t, \quad y_{t+1} = cy_t + x_t(1 - x_t),$$

де b – коефіцієнт виживання і народжуваності приплоду на першому році життя; c – коефіцієнт виживання дорослих особин; x_t – чисельність молодших особин у момент часу t ; y_t – чисельність репродуктивного покоління. Знайти стаціонарні розв’язки, дослідити їх на стійкість.

9.23. Записати та виконати повне дослідження моделі Леслі для трьох вікових груп. Розглянути числовий приклад із матрицею Леслі

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0,33 & 3,16 \\ 0,44 & 0 & 0 \\ 0 & 0,18 & 0 \end{pmatrix}.$$

Література: [26, 29, 33, 56, 60 88, 104].

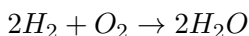
Розділ 10. Математичні моделі біохімічних процесів

10.1. Математичні моделі хімічної кінетики

Основна задача хімічної кінетики – це розрахунок швидкості хімічної реакції (швидкості, з якою утворюється нова хімічна речовина) і визначення залежності концентрацій реагуючих речовин від часу.

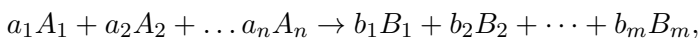
Математичні моделі хімічної кінетики (кінетичні рівняння) являють собою математичні співвідношення, що дають можливість одержати залежність швидкості хімічної реакції від параметрів реакції – концентрацій реагентів, температури тощо. Рівняння хімічної кінетики є окремим випадком динамічних систем загального вигляду.

Хімічні рівняння показують, як у результаті взаємодії одних речовин утворюються інші речовини. Наприклад, рівняння



показує, що в результаті взаємодії двох молекул водню та однією молекулою кисню утворюються дві молекули води.

У загальному випадку хімічні (стехіометричні) рівняння описують кількісні співвідношення між вихідними речовинами і продуктами, утвореними внаслідок реакції, і записуються у вигляді



де A_1, A_2, \dots – молекули взаємодіючих речовин; B_1, B_2, \dots – молекули речовин, що одержані в результаті хімічної реакції; $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ – додатні константи (стехіометричні коефіцієнти), що вказують на кількість молекул, що беруть участь у реакції.

Характерним для хімічної реакції є те, що для її проходження необхідно, щоб молекули реагентів могли пересуватися в розчині й зустрічатися в потрібній кількості. Саме за цих умов відбувається одиничний акт реакції.

Щоб побудувати математичну модель хімічної реакції, користуються одним з основних законів хімічної кінетики, згідно з

яким швидкість хімічної реакції при постійній температурі пропорційна добутку концентрацій речовин, що беруть участь у реакції в даний момент часу (закон діючих мас).

У загальному випадку n реагентів цей закон записується так:

$$v = kC_{A_1}^{a_1} \cdot C_{A_2}^{a_2} \cdot \dots \cdot C_{A_n}^{a_n},$$

де v – швидкість реакції; k – константа швидкості реакції; C_{A_i} – концентрація i -ї речовини. Концентрація реагуючих речовин описується кількістю молей цієї речовини в одиниці об'єму. Величина $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ називається порядком хімічної реакції.

Приклад 10.1.1. Розглянемо кінетику хімічних реакцій першого порядку $A \rightarrow B$. Ці реакції називаються мономолекулярними.

Нехай a – початкова концентрація речовини, x – кількість молей на 1 літр, що прореагували за час t від початку реакції, тоді $a - x$ – концентрація речовини, що бере участь у реакції в момент часу t . Згідно з законом діючих мас, маємо

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x), \quad x(0) = 0,$$

де k – константа швидкості реакції першого порядку.

Відокремлюючи змінні, дістанемо

$$\frac{dx}{a - x} = kdt.$$

Звідси, інтегруючи, маємо $-\ln(a - x) + \ln C = kt$, де C – довільна стала, яку визначаємо з початкової умови $x = 0$ при $t = 0$. Остаточно дістаємо, що розв'язок цього рівняння має вигляд

$$x(t) = a(1 - e^{-kt}).$$

З виразу для розв'язку $x(t)$ видно, що $x(t) \rightarrow a$ при $t \rightarrow \infty$. Значення функції $x(t)$ добре узгоджуються з експериментальними даними. ▲

Приклад 10.1.2. Розглянемо хімічну реакцію другого порядку, в процесі якої дві речовини A , B , що взаємодіють, перетворюються в речовину C . Будемо вважати, що речовини реагують у

співвідношенні 1: 1. Тобто одна молекула речовини A з'єднується з однією молекулою речовини B і утворюється одна молекула речовини C . Механізм реакції має вигляд $A + B \rightarrow C$. Такі реакції називаються бімолекулярними і вони є найбільш розповсюдженими. Нехай a , b – початкові концентрації речовин A та B , $x(t)$ – концентрація речовини C у момент часу t . Тоді, згідно із законом діючих мас, маємо

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x), \quad x(t) = 0 \text{ при } t = 0. \quad (10.1.1)$$

Нагадаємо, що концентрації речовин вимірюються в молях на одиницю об'єму (на 1 л). Якщо $a \neq b$, то, відокремлюючи змінні в (10.1.1), маємо

$$\frac{dx}{(a - x)(b - x)} = kdt. \quad (10.1.2)$$

Обчислимо інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a - x)(b - x)} &= \frac{1}{b - a} \left(\int \frac{dx}{a - x} - \int \frac{dx}{b - x} \right) = \\ &= \frac{1}{b - a} \ln \frac{b - x}{a - x} - \frac{1}{b - a} \ln C. \end{aligned}$$

Тоді з рівняння (10.1.2) одержимо

$$\ln \frac{b - x}{a - x} - \ln C = (b - a)kt,$$

або

$$\frac{b - x}{a - x} = Ce^{(b-a)t},$$

де C – довільна стала, яка, враховуючи початкову умову $x = 0$ при $t = 0$, дорівнює $\frac{b}{a}$. Отже,

$$\frac{b - x}{a - x} = \frac{b}{a} e^{(b-a)t}.$$

Остаточно знаходимо розв'язок задачі (10.1.1) у вигляді

$$x = \frac{ab(e^{(b-a)kt} - 1)}{be^{(b-a)kt} - a}. \quad (10.1.3)$$

Ця формула свідчить, що при $t \rightarrow \infty$ $x \rightarrow b$ за умови, що $b < a$; і $x \rightarrow a$ за умови, що $b > a$.

Теоретично бімолекулярний процес, як і мономолекулярний, продовжується нескінченно довго.

Якщо $a = b$, то диференціальне рівняння (10.1.1) набуває вигляду

$$\frac{dx}{(a-x)^2} = kdt.$$

Інтегруючи це рівняння, дістанемо $\frac{1}{a-x} + C = kt$, де C – довільна стала, яка, враховуючи початкову умову, дорівнює $-\frac{1}{a}$. Отже,

$$\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a} = kt.$$

Звідси

$$x = a \left(1 - \frac{1}{1 + kat} \right). \quad (10.1.4)$$

Константу швидкості реакції k можна визначити, якщо поставити експеримент і заміряти $x(t) = x_1$ при $t = t_1$.

У випадку (10.1.3), тобто при $a \neq b$,

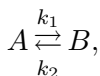
$$k = \frac{1}{(b-a)t_1} \ln \frac{a(b-x_1)}{b(a-x_1)},$$

у випадку (10.1.4)

$$k = \frac{1}{t_1} \frac{x_1}{a(a-x_1)}.$$

Експериментальним доказом того, що дана хімічна реакція має другий порядок, є лінійність відносно часу виразу $\frac{1}{b-a} \ln \frac{a(b-x)}{b(a-x)}$, якщо $a \neq b$, або виразу $\frac{x}{a(a-x)}$, якщо $a = b$. ▲

Приклад 10.1.3. Якщо реакція відбувається згідно з механізмом



то вона проходить у двох напрямках: як утворення речовини B , так і утворення речовини A . Такі реакції називаються зворотними. Коефіцієнти k_1, k_2 визначають швидкості реакцій (константи швидкості реакцій). Швидкості прямої і зворотної реакцій можуть бути різними.

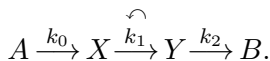
Зазвичай, якщо реакція протікає зворотно, то через певний час повинна настати динамічна рівновага. Побудуємо математичну модель наведеної вище схеми реакції утворення речовин A та B . Нехай a та b – початкові концентрації речовин A та B при $t = 0$, $x(t), y(t)$ – концентрації речовин A та B у момент часу t , тоді

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -k_1x + k_2y, \\ \frac{dy}{dt} = k_1x - k_2y, \end{cases} \quad (10.1.5)$$

$$x(0) = a, \quad y(0) = b.$$

Коли настане рівновага, то $x : y = k_2 : k_1 = k$, де k – константа рівноваги реакції. Знайти розв'язки задачі (10.1.5) самостійно. \blacktriangle

Приклад 10.1.4. Розглянемо ще ланцюжок хімічних реакцій, який Альфред Лотка запропонував у 1910 р.:



Нехай у деякому об'ємі знаходиться достатньо багато речовини A . Молекули речовини A перетворюються в молекули речовини X з постійною швидкістю k_0 . Речовина X перетворюється в речовину Y зі швидкістю, пропорційною добутку концентрацій речовин X і Y (з коефіцієнтом пропорційності k_1 – реакція другого порядку). Молекули речовини Y незворотно розпадаються, утворюючи речовину B (реакція першого порядку).

Математичну модель цієї реакції запишемо на основі закону діючих мас. Позначимо через $x(t), y(t), b(t)$ концентрації речовин

X, Y, B , тоді одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_0 - k_1xy, \\ \frac{dy}{dt} = k_1xy - k_2y, \\ \frac{db}{dt} = k_2y. \end{cases} \quad (10.1.6)$$

У перші два рівняння системи (10.1.6) не входить змінна $b(t)$, тому їх можна розглядати окремо, отож маємо нелінійну динамічну систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k_0 - k_1xy, \\ \frac{dy}{dt} = k_1xy - k_2y. \end{cases} \quad (10.1.7)$$

Знайдемо стаціонарні точки системи (10.1.7) (в стаціонарному стані концентрації проміжних продуктів не змінюються з часом). Для цього запишемо систему

$$\begin{cases} k_0 - k_1xy = 0, \\ k_1xy - k_2y = 0, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, знаходимо координати стаціонарних точок:

$$x^* = \frac{k_2}{k_1}, \quad y^* = \frac{k_0}{k_1}.$$

Дослідимо стійкість одержаного стаціонарного стану (x^*, y^*) . Для цього в системі (10.1.7) зробимо заміну змінних

$$x = x^* + p, \quad y = y^* + q,$$

де p, q – флуктуації величин x, y .

Після лінеаризації одержимо систему для збурень p і q :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -k_2q - \frac{k_1k_0}{k_2}p, \\ \frac{dq}{dt} = \frac{k_1k_0}{k_2}p. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння цієї системи має вигляд

$$\begin{vmatrix} \frac{k_1 k_0}{k_2} + \lambda & k_2 \\ -\frac{k_1 k_0}{k_2} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{k_1 k_0}{k_2} \lambda + k_0 k_1 = 0.$$

За теоремою Вієта, у випадку, коли дискримінант додатний, тобто за умови $4k_2^2 < k_0 k_1$, маємо два дійсні різні від'ємні корені λ_1, λ_2 , тому особлива точка (x^*, y^*) є стійким вузлом. У випадку, коли дискримінант від'ємний (за умови $4k_2^2 > k_0 k_1$), рівняння має два комплексно-спряжені корені з від'ємними дійсними частинами, а, отже, особлива точка – стійкий фокус. Тобто концентрації реагентів з ростом часу наближаються до своїх граничних значень.

Результати моделювання системи (10.1.7) при різних початкових даних подані на рис. 10.1.

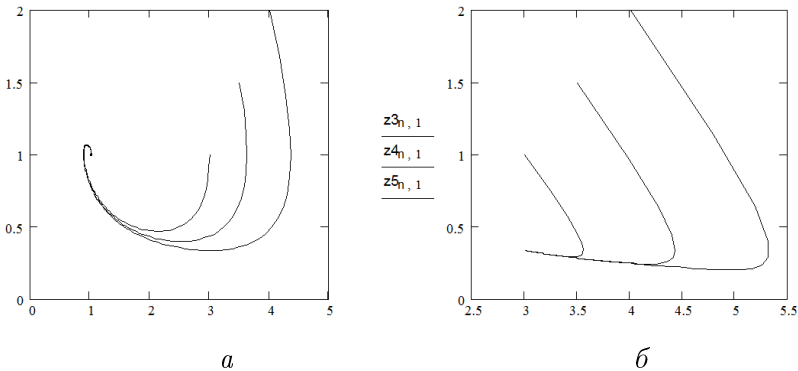


Рис. 10.1. Фазовий портрет системи Лотки:

a – стійкий фокус ($k_0 = 1, k_1 = 1, k_2 = 1$); *б* – стійкий вузол ($k_0 = 3, k_1 = 3, k_2 = 1$)

Розглянемо тепер площину параметрів, де на осі абсцис відкладатимемо значення k_2 , а на осі ординат – значення $k_0 k_1$. Тоді парабола, що задається рівнянням $k_0 k_1 = 4k_2^2$, поділить першу чверть площини параметрів на дві області: область стійких вузлів *b* та область стійких фокусів *a* (рис. 10.2). Змінюючи значення

параметрів системи, можна мати або коливний, або неколивний режим зміни концентрацій речовин X та Y . ▲

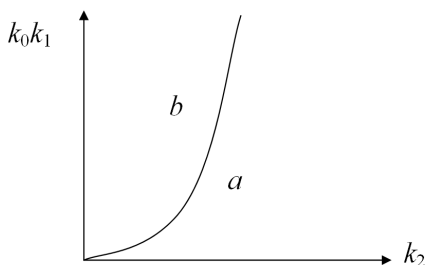
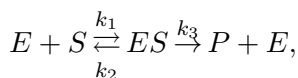


Рис. 10.2. Біфуркаційна діаграма для системи (10.1.6):
 a – область стійких фокусів, b – область стійких вузлів

Приклад 10.1.5. До складу живих організмів входять важливі хімічні сполуки – білки. Практично всі хімічні реакції в організмах протікають за участю білків у ролі каталізаторів. Каталізатор – це така хімічна речовина, яка пришвидшує реакцію або необхідна для її протікання, але не входить до складу кінцевих продуктів реакції. Каталізатор реагує з вихідною речовиною, утворюючи проміжну речовину, яка згодом розпадається на продукт і каталізатор. Потім каталізатор знову реагує з вихідною речовиною і цей каталітичний цикл повторюється багаторазово. Кількість каталізатора після реакції не змінюється.

Білки-каталізатори називають ферментами. Ферменти реагують із певними сполуками, що називаються субстратами. Вони здатні впливати на швидкість реакції, тобто ферменти каталізують реакції і відіграють важливу роль у регулюванні біологічних процесів. Щоб зрозуміти їх роль, необхідно вивчити кінетику їхньої реакції.

Розглянемо найпоширенішу ферментативну реакцію, в якій субстрат перетворюється в продукт одним ферментом. Ця реакція може бути схематично зображена у вигляді



де E – фермент; S – субстрат; ES – фермент-субстратний комплекс; P – продукт; k_1 , k_2 – константи швидкостей прямої та зво-

ротної реакції утворення фермент-субстратного комплексу; k_3 – константа швидкості утворення продукту.

Це простіша ферментативна реакція, яка проходить у дві стадії. На першій стадії в реакції бере участь фермент E та субстрат S і утворюється фермент-субстрактний комплекс ES , який згодом на другій стадії незворотно розпадається на кінцевий продукт P , звільняючи молекули фермента для участі в наступному циклі.

Для цієї реакції побудуємо математичну модель і дослідимо процес протікання цієї реакції.

Позначимо через $x_1(t)$ концентрацію фермента E , $x_2(t)$ – концентрацію субстрата S , $x_3(t)$ – концентрацію фермент-субстрактного комплексу ES , $x_4(t)$ – концентрацію продукта P у момент часу t .

За законом діючих мас, одержимо кінетичні рівняння, що описують швидкості зміни цих чотирьох концентрацій у вигляді

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -k_1x_1x_2 + k_2x_3 + k_3x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = -k_1x_1x_2 + k_2x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = k_1x_1x_2 - k_2x_3 - k_3x_3, \\ \frac{dx_4}{dt} = k_3x_3, \end{cases} \quad (10.1.8)$$

де k_1 – константа швидкості утворення фермент-субстрактного комплексу з фермента і субстрата; k_2 – константа швидкості зворотної реакції розпаду фермент-субстрактного комплексу; k_3 – константа швидкості утворення продукту реакції.

Це і є основні рівняння ферментативної кінетики, що описують залежність швидкості ферментативної реакції від концентрації субстрата.

Природні початкові умови відповідають тому, що в початковий момент концентрації фермента $x_1(t)$, субстрата $x_2(t)$ задані і відмінні від нуля, а концентрації комплексу і продукту дорівнюють нулю, тобто

$$x_1(0) = x_{10} > 0, \quad x_2(0) = x_{20} > 0, \quad x_3(0) = x_4(0) = 0. \quad (10.1.9)$$

Рівняння (10.1.8), (10.1.9) утворюють коректно поставлену математичну задачу.

Якщо додати перше та третє рівняння системи (10.1.8) і проінтегрувати результат, то одержимо

$$x_1(t) + x_3(t) = \text{const} = x_{10}. \quad (10.1.10)$$

Звідси, якщо $x_3(t)$ відомо, то можна знайти $x_1(t)$, а з останнього рівняння системи (10.1.8) шляхом його інтегрування знаходимо

$$x_4(t) = k_3 \int_0^t x_3(s) ds.$$

Тому з системи (10.1.8) залишаємо лише два рівняння для визначення $x_2(t)$ та $x_3(t)$. З урахуванням (10.1.10) маємо

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -k_1(x_{10} - x_3)x_2 + k_2x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = k_1(x_{10} - x_3)x_2 - k_2x_3 - k_3x_3, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \frac{dx_2}{dt} = -k_1x_{10}x_2 + (k_1x_2 + k_2)x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} = k_1x_{10}x_2 - (k_1x_2 + k_2 + k_3)x_3 \end{cases} \quad (10.1.11)$$

з початковими умовами $x_2(0) = x_{20} > 0$, $x_3(0) = 0$.

Розв'язок системи рівнянь (10.1.11) не можна знайти аналітично, проте він може бути достатньо просто знайдений числовими методами (рис. 10.3).

Характер розв'язків системи (10.1.11) може бути встановлений з елементарних міркувань: оскільки при $t = 0$ $x_3 = 0$, то $x_2(t)$ монотонно спадає від x_{20} до нуля, а $x_3(t)$ зростає до максимуму, а потім теж спадає до нуля. Поведінку розв'язків системи (10.1.11) можна з'ясувати шляхом аналізу фазової площини (рис. 10.4).

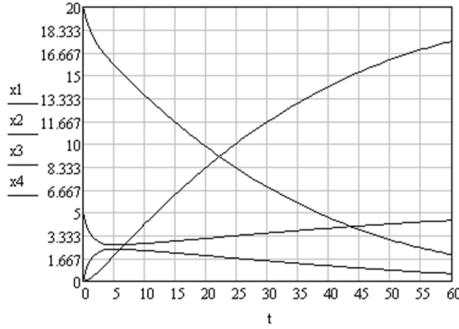


Рис. 10.3. Графіки розв'язків системи (10.1.8)

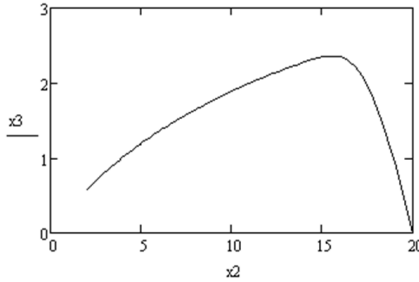


Рис. 10.4. Фазова траєкторія системи (10.1.8) в площині x_2x_3

Крім цього, для аналізу розв'язків системи (10.1.11) часто використовують нижченаведені міркування, які не завжди мають місце. Вважають, що оскільки фермент присутній у малих кількостях, то $\frac{dx_1}{dt} \approx 0$, тоді (згідно з умовою (10.1.10)) $\frac{dx_3}{dt} \approx 0$. Інколи вважають, що $x_1(t), x_2(t)$ швидко змінюється в околі стаціонарного стану.

Тому з другого рівняння (10.1.11) маємо

$$k_1x_1x_2 - (k_1x_2 + k_2 + k_3)x_3 = 0.$$

Звідси

$$x_3 = \frac{k_1x_1x_2}{k_1x_2 + k_2 + k_3}.$$

При цьому швидкість ферментативної реакції (швидкість утворення продукту), як випливає з останнього рівняння системи (10.1.8), набуває вигляду

$$V = \frac{k_3 k_1 x_{10} x_2}{k_1 x_2 + k_2 + k_3}.$$

Поділивши чисельник і знаменник на k_1 , маємо

$$V = \frac{k_3 x_{10} x_2}{x_2 + (k_2 + k_3)/k_1},$$

або

$$V = \frac{V_m x_2}{x_2 + K_m}, \quad (10.1.12)$$

де $V_m = k_3 x_{10}$, $K_m = (k_2 + k_3)/k_1$ – константа Міхаеліса.

Це і є основне рівняння ферментативної кінетики, що описує залежність швидкості ферментативної реакції від концентрації субстрата. Воно називається рівнянням Міхаеліса–Ментен.

Графік залежності швидкості реакції V від концентрації субстрата x_2 наведений на рис. 10.5.

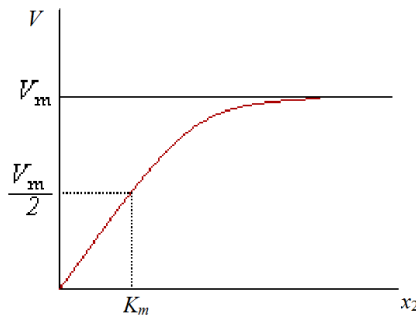


Рис. 10.5. Залежність швидкості реакції від концентрації субстрата (гіперболічна залежність)

Як бачимо, концентрація фермента є лімітуючим фактором в утворенні продукту.

Однак для системи (10.1.11) можна знайти наближені аналітичні розв'язки асимптотичним методом, який ставить широко використовувану теорію цієї фундаментальної реакції на

строгу математичну основу і вказує в біологічних термінах умови практичного застосування цієї реакції.

Для застосування цього методу до системи (10.1.11) необхідно записати її рівняння в безрозмірних змінних, оскільки для того, щоб одержати математичні (біологічні) коректні апроксимації, необхідно з'ясувати відносну величину різних членів у рівнянні. Це можна виконати тільки тоді, коли всі величини зведені до безрозмірного вигляду, інакше поняття "малий" та "великий" не мають змісту.

Уведемо в (10.1.11) безрозмірні величини

$$\tau = k_1 x_{10} t, \quad \lambda = \frac{k_3}{k_1} x_{20}, \quad \mu = \frac{k_2 + k_3}{k_1} x_{20}, \quad (10.1.13)$$

$$x(\tau) = \frac{x_2(t)}{x_{20}}, \quad y(\tau) = \frac{x_3(t)}{x_{10}}, \quad \varepsilon = \frac{x_{10}}{x_{20}}.$$

Значення τ , λ , μ , x , y в (10.1.13) – це просто числа, які не залежать від вибраної системи одиниць.

Підставляючи (10.1.13) в систему (10.1.11), одержуємо безрозмірну систему рівнянь для $x(\tau)$, $y(\tau)$ вигляду

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = -x + (x + \mu - \lambda)y, \\ -\varepsilon \frac{dy}{d\tau} = k - (x + \mu)y, \\ x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \end{cases} \quad (10.1.14)$$

У переважній кількості біологічних реакцій відношення початкових концентрацій фермента і субстрата достатньо мале, так що $\varepsilon \ll 1$. Тому система (10.1.14) являє собою задачу із сингулярним збуренням, оскільки при $\varepsilon = 0$ понижується порядок системи і початкові умови не можуть бути виконані одночасно. Для її наближеного розв'язування потрібно застосувати асимптотичні методи розв'язування сингулярного збурених систем.

Зокрема, вдається встановити наявність вузької сингулярної області поблизу $\tau = 0$, де концентрація фермент-субстратного комплексу змінюється достатньо швидко. Тому одержана формула (10.1.12) для швидкості реакції неправильна на початку реакції (для реакції Міхаеліса–Мінтен упродовж кількох перших секунд).

Розглянемо ще питання ідентифікації моделі (10.1.8). При цьому параметри моделі вважаються незалежними змінними, а цільова функція, що мінімізується, як правило, записується у вигляді

$$F(p) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i (x_{ij} - \tilde{x}_{ij})^2,$$

де p – вектор параметрів (коефіцієнтів математичної моделі); n – кількість змінних моделі; m – кількість експериментів, в яких вимірювалися змінні, що використовуються для ідентифікації моделі; α_i – вагові коефіцієнти для нормування виходів моделі; x_{ij} – компоненти вектора змінних моделі; \tilde{x}_{ij} – експериментальні дані, які використовуються для ідентифікації моделі; $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Значення α_i можуть бути обчислені за формулою

$$\alpha_i = 1 / \sum_{j=1}^m \tilde{x}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Оптимальний вектор параметрів математичної моделі може бути визначений шляхом мінімізації функції $F(p)$, тобто

$$p^* = \arg \min_p F(p).$$

Для мінімізації функції $F(p)$ використовують різні числові методи нелінійного програмування: метод Гаусса–Зейделя, градієнтні методи та ін. ▲

10.2. Дифузія в рідині

Перерозподіл речовин у людському організмі відбувається не тільки за рахунок біохімічних реакцій, але і за рахунок переміщення маси речовини із зовнішнього простору в клітини і навпаки. Таке переміщення речовин пов'язане з різними концентраціями речовини в різних частинах організму, причому молекули з більшою ймовірністю виходять з області підвищеної концентрації, ніж заходять в цю область, за рахунок чого вирівнюється концентрація у всій області. Цей процес називається дифузією.

Розглянемо простий випадок одновимірної дифузії. Нехай рідина розміщена в трубці з постійним перерізом. Припустимо, що на одному кінці трубки концентрація речовини вища, ніж на іншому, тоді концентрація речовини буде різною для кожного поперечного перерізу трубки і буде змінюватися з часом. Будемо вважати, що для всіх точок поперечного перерізу концентрація в даний момент часу постійна. Розглянемо два перетини трубки $x = x_1$, $x = x_2$ по осі x (рис. 10.6).

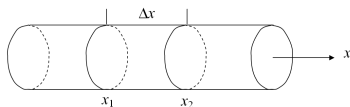


Рис. 10.6. Одновимірна дифузія

Тоді маса молекул, що вийдуть із перетину x_1 і пройдуть через перетин x_2 , буде пропорційною концентрації речовини в перетині x_1 , тобто C_1 . Аналогічно потік речовини з перетину x_2 в перетин x_1 пропорційний концентрації C_2 . Обидва потоки пропорційні площі S перетину трубки. Будемо вважати, що рідина однорідна, тобто переміщення молекул відбувається з однаковою ймовірністю в обидва напрямки осі Ox .

Тоді зміну маси речовини в часі й в просторі можна записати у вигляді такого балансового співвідношення:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \alpha S(C_1 - C_2) = -\alpha S \Delta C,$$

де α – коефіцієнт, що характеризує ймовірність проходження молекул через обидва перетини.

Зрозуміло, що α тим більший, чим ближче між собою розміщені перетини x_1 , x_2 , тобто чим менша різниця $\Delta x = x_2 - x_1$. Як правило, вважають, що $\alpha = \frac{D}{\Delta x}$, де D – деяка константа. Тоді з останнього рівняння маємо

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -DS \frac{\Delta C}{\Delta x},$$

або, перейшовши до границі при $\Delta t \rightarrow 0$ і $\Delta x \rightarrow 0$, одержуємо

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -DS \frac{\partial C}{\partial x}, \quad (10.2.1)$$

де $\frac{\partial m}{\partial t}$ – кількість речовини, що дифундує в одиницю часу через площу S .

Рівняння (10.2.1) в частинних похідних описує процес одно-
мірної дифузії, тобто динаміку концентрації $C(t, x)$ в залежності
від часу t та координати x , і називається рівнянням дифузії Фіка,
а стала D – коефіцієнтом дифузії.

Рівняння (10.2.1) – просте й наочне. Проте для експеримен-
тального визначення коефіцієнта дифузії D воно не годиться,
оскільки важко створити такі умови експерименту, при яких мож-
на було б виміряти кількість дифундуючої речовини.

Значно легше виміряти розподіл концентрації вздовж напрям-
ку дифузії через деякий час після початку дослідів або з'ясувати
зміну концентрації з часом у певній точці дифундуючого простору.
Тому необхідно мати рівняння, яке встановлює зв'язок між
концентрацією C , координатою x і часом t .

Для виведення цього рівняння розглянемо елемент об'єму
 $\Delta V = S\Delta x$, що розміщений у точці x дифузійного простору, і рів-
няння (10.2.1) перепишемо відносно зміни концентрації речовини
в об'ємі ΔV . Ця зміна визначається різницею потоку молекул, що
входять в об'єм через перетин x_1 , і потоку, що виходить з об'єму
через перетин x_2 :

$$\Delta\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right) = SD\left(\frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial x}\right).$$

Враховуючи, що $\Delta m = C\Delta V = CS\Delta x$, останнє рівняння можна
переписати так:

$$\Delta x \frac{\partial C}{\partial t} = D\left(\frac{\partial C_2}{\partial x} - \frac{\partial C_1}{\partial x}\right).$$

Розділимо це співвідношення на Δx і перейдемо до границі при
 $\Delta x \rightarrow 0$, одержимо

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}. \quad (10.2.2)$$

Це і є рівнянням дифузії. Воно справедливе за умови, що для
даного об'єму виконується закон збереження маси, і в цьому об'ємі
не відбувається жодних хімічних реакцій за участю дифундуючої

речовини. При врахуванні реакцій переходять до неоднорідного рівняння дифузії:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + q, \quad (10.2.3)$$

де q характеризує швидкість утворення або зв'язування молекул речовини в даній області.

Щоб використати (10.2.2), (10.2.3) для розв'язування конкретних дифузійних задач, слід додати граничні та початкові умови.

Якщо коефіцієнт дифузії D є функцією концентрації, то (10.2.2) запишеться у вигляді

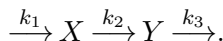
$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right). \quad (10.2.4)$$

У тому разі, коли дифузія відбувається вздовж всіх трьох осей координат, (10.2.4) перетворюється в рівняння

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} \right).$$

10.3. Задачі для самостійної роботи

10.1. Речовина X затікає зовні з деякою постійною швидкістю та перетворюється в речовину Y зі швидкістю, пропорційною концентрації речовини Y , і виводиться з області реакції. Всі реакції мають перший порядок, за винятком притоку речовини X зовні. Схема реакції має вигляд

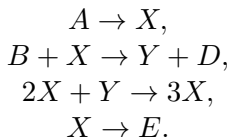


Побудувати математичну модель. Виконати її дослідження: знайти особливі точки та дослідити їх характер, побудувати фазовий портрет.

10.2. За певної хімічної реакції речовина A , кількість якої на початку дорівнює a_0 , перетворюється на речовину, кількість якої на початку – b_0 , зі швидкістю, пропорційною кількості речовини A . Водночас утворена речовина B переходить у речовину A зі швидкістю, пропорційною кількості B . Визначити залежність

кількості речовин A та B від часу. Побудувати графіки залежностей. Як залежить хід реакції від початкових значень a та b ?

10.3. В 1971 р. Лефевр і Ніколіс запропонували модель, що описує коливні процеси в хімічній реакції. Вони розглянули ланцюжок хімічних реакцій

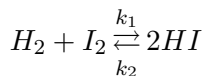


Позначимо через $x(t)$, $y(t)$ концентрації речовин X , Y і припустимо, що концентрації речовин A , B , D , E залишаються незмінними і відсутні зворотні реакції. Тоді кінетичні рівняння запишуться так:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a - (b + 1)x + x^2y, \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2y.\end{aligned}$$

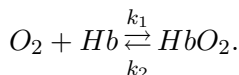
Для цієї системи знайти стаціонарні точки, дослідити їх на стійкість. За яких умов у системі існує граничний цикл? При яких значеннях a та b відбувається якісна зміна фазового портрета (параметрична біфуркація)? Зобразити параметричний портрет системи. Оснастивши систему значеннями параметрів a та b , засобами Mathcad, побудувати фазовий портрет моделі Лефевра–Ніколіса при різних значеннях параметрів a та b . Які ізокліни і фазові траєкторії перетинаються горизонтально, а які – вертикально?

10.4. Для заданого рівняння хімічної реакції

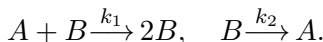


записати рівняння динаміки концентрацій і дослідити поведінку розв'язків диференціальної системи, k_1 , k_2 – константи швидкостей реакції.

10.5. Написати рівняння хімічної кінетики і дослідити поведінку розв'язків для реакції окиснення гемоглобіну



10.6. Написати рівняння хімічної кінетики, механізм якої задається схемою

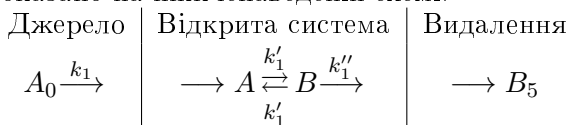


Дослідити поведінку розв'язків системи.

10.7. Багато метаболічних процесів є послідовністю перетворень, які можна спрощено подати як ланцюжок: субстрат \rightarrow проміжний продукт \rightarrow кінцевий продукт, тобто $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$. Вважаючи, що система замкнена, а реакції, що протікають у ній, мають перший порядок, побудувати математичну модель цього процесу, знайти розв'язки системи, зобразити їх характер. Вважаємо, що при $t = 0$ $a = a_0$, $b = 0$, $c = 0$.

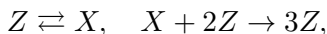
10.8. Розв'язати попередню задачу у випадку, коли реакція $B \xrightarrow{k_2} C$ є реакцією нульового порядку.

10.9. У деяку відкриту систему, наприклад, біологічну клітину, надходить деякий субстрат і видаляється продукт реакції, як це показано на нижченаведеній схемі.



Записати кінетичні рівняння для концентрації речовин A та B . Знайти стаціонарні розв'язки моделі та дослідити їх на стійкість.

10.10. Написати рівняння хімічної кінетики, механізм якої задається за такою схемою:



де Z – каталізатор, X – проміжна речовина.

Побудувати параметричний та фазовий портрети системи. Показати, що для такої реакції виконується закон збереження мас.

10.11. Розробити алгоритм і програму для розв'язування задач параметричної ідентифікації моделі (10.1.8) на основі псевдоекспериментальних даних. Знайти оцінки коефіцієнтів k_1 , k_2 , k_3 та оцінити міру неадекватності математичної моделі (відносна похибка розв'язку) при одержаних значеннях коефіцієнтів. **Вказівка.** Значення псевдоекспериментальних даних взяти з графічного зображення розв'язків системи (10.1.8), що наведені на рис. 10.3, або з таблиці 10.1.

Таблиця 10.1. Псевдоекспериментальні дані

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$\tilde{x}_1(t)$	5	2.65	2.76	2.94	3.12	3.32	3.48	3.7	3.82	4.04
$\tilde{x}_2(t)$	20	15.9	13.56	11.62	9.89	8.25	7.16	5.66	4.64	3.76
$\tilde{x}_3(t)$	0	2.35	2.25	2.03	1.88	1.67	1.53	1.30	1.12	0.96
$\tilde{x}_4(t)$	0	1.74	4.12	6.31	8.26	10.05	11.63	13.03	14.24	15.28

Коефіцієнти k_1, k_2, k_3 шукати на основі мінімізації виразу

$$F(k_1, k_2, k_3) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^m \alpha_i (x_{ij} - \tilde{x}_{ij})^2,$$

де m – кількість експериментів; \tilde{x}_{ij} – значення i -ї змінної в j -му експерименті; x_{ij} – значення змінної $x_i(t)$ при $t = t_j$, одержаної з математичної моделі; α_i – вагові коефіцієнти, які обчислюються за формулою $\alpha_i = 1 / \left(\sum_{j=1}^m \tilde{x}_{ij} \right)$. Для мінімізації функції F використати один із градієнтних методів.

Література: [12, 17, 61, 85, 98].

Розділ 11. Математичне моделювання біомедичних процесів

11.1. Особливості математичного моделювання біомедичних проблем

Сучасна медицина є, в основному, експериментальною наукою з величезним емпіричним досвідом впливу на ту чи іншу хворобу. Але для детального вивчення процесів біосередовищ уже не достатньо експериментальних досліджень, а найбільш ефективним засобом їх дослідження стає математичне моделювання. Початок активного застосування методів математичного моделювання припадає на другу половину ХХ століття.

Вибір тих чи інших засобів математичного моделювання для опису біологічних і медичних об'єктів залежить від індивідуальних знань спеціалістів та від специфіки розв'язуваних задач. Систематичні спроби використовувати математичні методи в медичних дослідженнях беруть свій початок з 80-х років ХІХ ст. із моменту використання кореляційних методів для обробки медичних даних. Відтоді методи статистики є провідними засобами моделювання в біомедичних науках. Відомо, що методи математичної статистики розвивались саме під впливом біомедичних проблем. Ці методи призначені для виявлення закономірностей, властивих медичним об'єктам, на основі яких робляться висновки і даються практичні рекомендації. Але статистичні методи дають повне розв'язування задачі у всіх випадках, коли дослідника не цікавить внутрішня структура процесів. Моделі даних не містять інформації та гіпотез про внутрішню структуру та процеси функціонування. У випадку, коли знання про структуру системи, механізм її функціонування, виникаючі явища можуть суттєво вплинути на прийняття рішень, використовують методи математичного моделювання. У медицині існує багато різноманітних задач, які для свого розв'язання вимагають застосування теорії математичного моделювання, тобто побудови й дослідження математичних моделей. Наприклад, математичні моделі прогнозу динаміки розвитку онкологічних захворювань; роботи систем кровообігу; інфаркту

міокарда, які б пояснювали механізм його виникнення та закономірності його протікання; розрахунку наслідків черепно-мозкових травм; динаміки загоювання ран; динамічних процесів, що проходять у тілі людини при фізичних навантаженнях та ін. Останнім часом в медицині стали застосовувати математичні моделі з анімацією – це дозволяє на екрані комп'ютера спостерігати в пришвидшеному масштабі часу розвиток ряду захворювань. На порядку денному стоїть комп'ютерне моделювання хірургічних операцій, що дасть змогу передбачити їх хід та наслідки.

Розвиток математичних моделей сприяє розширенню сфери пізнання в медицині, появі нових ефективних методів діагностики і лікування, створенню медичної техніки.

Математичні моделі, залежно від використовуваного математичного апарату, поділяються на певні класи. У медицині й біології здебільшого використовують опис об'єктів і процесів за допомогою рівнянь. Якщо дослідника не цікавить розвиток процесів у часі (динаміка об'єктів), то використовують алгебраїчні рівняння. Моделі в цьому випадку називаються статичними. Так, в основі комп'ютерної томографії лежать теоретичні моделі поглинання випромінювання тканинами органу, що мають вигляд системи алгебраїчних рівнянь. Для опису властивостей систем, що змінюються з часом, використовуються динамічні моделі, частіше за все – диференціальні рівняння. Переважна більшість процесів у медицині має складний нелінійний характер. Складність зумовлена ефектами післядії, стохастичністю процесів та іншими факторами. Нещодавно з'явилися постановки медичних задач, які призводять до необхідності числового розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного, гіперболічного та параболічного типів. У цьому розділі наведемо приклади простіших математичних моделей біомедичних процесів.

11.2. Фармакокінетичні моделі

Фармакокінетика вивчає розподіл в організмі досліджуваної біологічно активної речовини та зміну її концентрації з часом у різних середовищах організму людини. До біологічно активних речовин належать лікарські препарати. Організм формально поділя-

ють на камери. Фармакокінетична камера – це частина організму, в якій лікарський препарат розподілений рівномірно. Сукупність процесів, які зумовлюють зменшення вмісту лікарського препарату в організмі з часом, називають *елімінацією*.

11.2.1. Однокамерна лінійна фармакокінетична модель

Математична модель однокамерної лінійної елімінації має вигляд

$$\frac{dM}{dt} = -k_e M, \quad (11.2.1)$$

де $M(t)$ – маса препарату в камері в момент часу t ; k_e – константа елімінації, яка є суб'єктивною характеристикою організму.

Частинним розв'язком рівняння (11.2.1) з початковою умовою $M(t) = M_0$ при $t = 0$ є функція

$$M(t) = M_0 e^{-k_e t}.$$

Аналогічне рівняння маємо і для концентрації препарату в камері

$$c(t) = c_0 e^{-k_e t}.$$

Елімінацію біологічно активних речовин з організму на практиці вивчають за зменшенням їх концентрації в крові.

Прологарифмувавши останнє рівняння, одержимо лінійну залежність логарифма концентрації препарату від часу

$$\ln c(t) = \ln c_0 - k_e t.$$

Користуючись останньою формулою, значення k_e можна обчислити за відомими значеннями величини $c(t)$ у будь-які два моменти часу $t = t_1$ і $t = t_2$:

$$k_e = \frac{\ln c(t_1) - \ln c(t_2)}{t_2 - t_1}.$$

Однокамерна лінійна модель для даного препарату адекватна, якщо експериментальні значення $\ln c(t_1)$, $\ln c(t_2)$, \dots , $\ln c(t_n)$ задовольняють попереднє рівняння в межах певної точності. Однокамерна лінійна модель адекватна для багатьох лікарських препаратів, уведених у кров ін'єкцією.

У розглянутій моделі передбачалося швидке надходження в камеру та рівномірний розподіл усього лікарського препарату.

Розглянемо тепер поступове надходження (всмоктування) препарату в камеру з деякого депо (рис. 11.1).

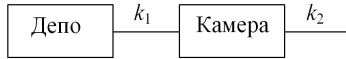


Рис. 11.1. Надходження препарату в камеру та його елімінація

Моделі зі всмоктуванням адекватно описують кінетику лікарських препаратів в організмі при внутрішньом'язевому введенні та в разі приймання ліків перорально.

Всмоктування препарату з депо в камеру та його елімінацію з камери моделюємо лінійною кінетикою. Така математична модель має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dM_1}{dt} = -k_1 M_1, \\ \frac{dM_2}{dt} = k_1 M_1 - k_e M_2, \end{cases} \quad (11.2.2)$$

де $M_1(t)$ – маса препарату в депо, а M_2 – маса препарату в камері в момент часу t , початкові умови мають вигляд

$$M_1(t) = M_{10}, \quad M_2(t) = 0 \text{ при } t = 0.$$

Розв'язуючи перше рівняння системи (11.2.2), маємо

$$M_1(t) = M_{10} e^{-k_1 t}.$$

Враховуючи цей факт, друге рівняння системи (11.2.2) набуває вигляду

$$\frac{dM_2}{dt} = k_1 M_{10} e^{-k_1 t} - k_e M_2,$$

інтегруючи яке, одержуємо

$$M_2(t) = \frac{M_{10} k_1}{k_1 - k_e} (e^{-k_e t} - e^{-k_1 t}).$$

11.2.2. Однокамерна лінійна модель із крапельницею

Лікарські препарати за допомогою крапельниці надходять у кров зі сталою швидкістю, а швидкість виведення біологічно активних речовин з крові вважаємо пропорційною кількості цієї речовини в крові, тоді математична модель цього процесу має вигляд

$$\frac{dM}{dt} = a - kM, \quad M(t) = M_0 \text{ при } t = 0,$$

де $M(t)$ – маса ліків у крові в момент часу t ; k – константа, що характеризує виведення ліків із крові.

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$M(t) = \frac{a}{k} \left(M_0 - \frac{a}{k} \right) e^{-kt}.$$

11.3. Математична модель стану кісткової системи

Зростаюча частка первинного та вторинного остеопорозу в структурі загальної захворюваності населення різних країн світу привертає увагу дослідників до вивчення питань реконструкції кісткової тканини – це одна з важливих проблем медицини.

Побудуємо математичну модель стану кісткової тканини у хворих з патологією гемопоетичного апарату. На практиці стан кісткової тканини поперекового відділу хребта досліджується на абсорбційному рентгенологічному денситометрі.

Підходи до побудови математичної моделі ґрунтуються на попередній статистичній оцінці отриманих денситограм.

Для побудови моделі зробимо деякі припущення щодо характеру зміни мінеральної щільності кісткової тканини. Позначимо цю характеристику через $x(t)$. Тоді $\frac{dx}{dt}$ пропорційно залежить від $x(t)$, що відповідає експоненціальному росту цієї величини з віком.

Але оскільки з віком досягається деяке граничне значення величини $x(t)$, то математичною моделлю є логістичне рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(\beta - x), \quad (11.3.1)$$

де α , β – невідомі параметри, які потрібно визначити на основі експериментальних даних. Це рівняння вивчалось в п. 7.2.

Розглянута модель може бути застосована для опису зміни мінеральної щільності кісткової тканини у віці 15–70 років.

11.4. Математичні моделі інфекційних захворювань

У цьому пункті сформулюємо простіші моделі розповсюдження епідемій. Математичне моделювання стало важливим інструментом розуміння поширення інфекційних захворювань.

Нехай у деякій популяції чисельності N розповсюджується інфекційне захворювання. В простішому випадку популяцію можна розбити на 3 неперетинних групи: здорові особини, які потенційно можуть бути інфіковані (кількість їх позначається через $S(t)$), переносники інфекції – $I(t)$ і ті хто, перехворівши, уже одужав і набув імунітету або помер (їх кількість позначимо через $R(t)$).

Типову еволюцію особин популяції описує діаграма

$$S \rightarrow I \rightarrow R \quad \text{або} \quad \boxed{\text{вразливий}} \rightarrow \boxed{\text{хворий}} \rightarrow \boxed{\text{здоровий}}$$

Такі позначення прийняті відповідно до історичної традиції. Очевидно, що в будь-який момент часу повинно виконуватися співвідношення $S + I + R = N$, якщо система замкнена, тобто відсутні демографічні процеси і процеси міграції.

Щоб записати математичну модель розповсюдження епідемій, припустимо, що всі контакти рівноймовірні, а швидкість переходу інфікованих у групу особин, що набули імунітету, визначається параметром γ .

Ураховуючи, що перехід із групи S у групу I відбувається при зустрічах, застосуємо при моделюванні кількісний закон про частоту зустрічей: частота зустрічей пропорційна добутку кількості індивідумів двох груп.

Припущення про те, що швидкість зміни чисельності популяції здорових пропорційна добутку чисельності здорових і заражених, по суті справи, є сильно ідеалізованим спрощенням, але може використовуватися як перше наближення до реальності.

Тоді розвиток епідемії буде описуватися рівняннями

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I, \end{cases} \quad (11.4.1)$$

де β , γ – додатні параметри; $\frac{1}{\gamma}$ – середній час хвороби. Система (11.4.1) – це класична модель Кермака–Маккендріка (Gray McKendrick, 1876–1943, видатний шотландський епідеміолог, William Kermack, 1898–1970, шотландський біохімік, – вважаються творцями математичної епідеміології). Її ще називають SIR-моделлю.

Знайдені розв’язки системи (11.4.1) в пакеті MathCad при початкових умовах $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$, $R(0) = R_0 \geq 0$ зображені на рис. 11.2, *a*.

Проведемо деякі аналітичні дослідження. З першого та другого рівнянь цієї системи маємо

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{(\beta S - \gamma)I}{\beta SI} = -1 + \frac{\sigma}{S}, \quad \sigma = \frac{\gamma}{\beta}. \quad (11.4.2)$$

Звідси, враховуючи початкові умови, знаходимо

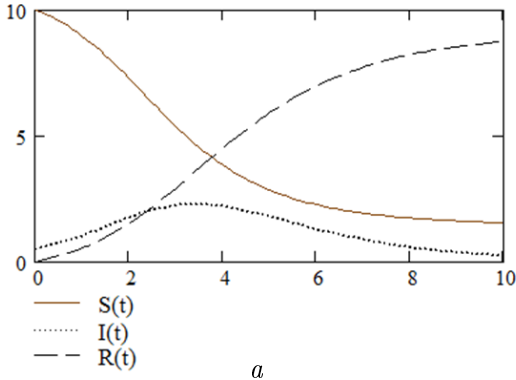
$$I + S - \sigma \ln S = I_0 + S_0 - \sigma \ln S_0.$$

Це є перший інтеграл системи (11.4.1). За його допомогою можна побудувати фазові криві на площині (S, I) (рис. 11.2, *a*). Оскільки третє рівняння системи (11.4.1) незалежне і $\dot{S}(t) \leq 0$, то фазовим простором можна вважати трикутник, заданий співвідношенням $S(t) + I(t) \leq N$.

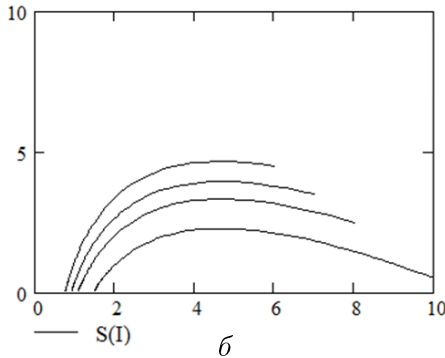
З другого рівняння системи (11.4.1) випливає, що кількість заражених спочатку зростає (це умова початку епідемії), якщо $\beta S_0 - \gamma > 0$ або $S_0 \sigma^{-1} > 1$, потім при $S_0 = \sigma$ досягає свого максимального значення $I_{max} = I_0 + S_0 - \sigma + \sigma \ln \frac{\sigma}{S_0}$, а якщо $S_0 \sigma^{-1} < 1$, то кількість захворілих монотонно зменшується до нуля. Виконайте строге доведення цього факту.

$$x \equiv \begin{pmatrix} 10 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad k := 0.15 \quad l := 0.7 \quad D(t, x) := \begin{pmatrix} -k \cdot x_0 \cdot x_1 \\ k \cdot x_0 \cdot x_1 - l \cdot x_1 \\ l \cdot x_1 \end{pmatrix}$$

Z := rkfixed(x, 0, 10, 100, D)



a



b

Рис. 11.2. Комп'ютерне моделювання системи (11.4.1):
 a – динаміка чисельності здорових $S(t)$, захворілих $I(t)$ та тих,
 хто переніс захворювання й одужав $R(t)$; б – фазовий портрет
 SIR-моделі на площині (S, I)

З першого та третього рівнянь системи (11.4.1) маємо

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{S}{\sigma} \Rightarrow S = S_0 \exp\left(-\frac{R}{\sigma}\right). \quad (11.4.3)$$

Оскільки $I(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ і $R(\infty) = N - S(\infty)$, то для знаходження кількості тих, хто не захворів, одержуємо трансцендентне

рівняння

$$S(\infty) = S_0 \exp\left(-\frac{N - S(\infty)}{\sigma}\right).$$

Останнє рівняння завжди має розв'язок на проміжку $(0, \sigma)$ (дovedіть).

У рівнянні для $S(\infty)$ перейдемо від абсолютних величин до відносних, а саме: розглянемо величину $z = \frac{S(\infty)}{N}$ (значення z можна трактувати як частку здорових S , які не підхопили інфекцію). Якщо припустити, що при $t = 0$ $S_0 = N$, то одержимо

$$z = e^{-R_0(1-z)}, \quad (11.4.4)$$

де $R_0 = S_0\sigma^{-1}$. Рівняння (11.4.4) – це стандартне рівняння для фінального розміру епідемії, яке справедливе не тільки в рамках моделі (11.4.1), а й у багатьох інших випадках. Величина R_0 називається основним репродуктивним числом і описує середню кількість заражених одним хворим, який потрапив у цілковито здорову популяцію. R_0 характеризує імунітет усієї популяції, а не однієї особи.

Очевидно, що рівняння (11.4.4) має корінь $z = 1$, але нас цікавить корінь, що знаходиться в межах від нуля до одиниці. Легко побачити, що корінь $z^* \in (0, 1)$ існує при $R_0 > 1$ (перевірте).

Останнє твердження можна трактувати так: нехай ми маємо численну популяцію, всі індивідууми якої мають однакові характеристики вразливості, тоді в такій популяції кількість індивідуумів, що не підхопили інфекцію, не дорівнює нулю. Це означає, що епідемія не "косить" усіх і тому популяція зможе відродитися.

Таким способом одержується один із важливих результатів математичної епідеміології: порогова теорема.

Теорема. *Нехай процес розповсюдження інфекційної хвороби в популяції описується математичною моделлю (11.4.1). Тоді спалах епідемії в популяції відбувається тоді й лише тоді, коли основне репродуктивне число $R_0 > 1$. Інакше інфекція не перетворюється в епідемію і швидко зникає.*

Якщо $R_0 > 1$, то розмір популяції вразливих, які не були заражені в процесі епідемії, дається як розв'язок рівняння (11.4.4).

При $R_0 = 0,5$ майже достовірно, що не буде епідемії.

Зауважимо, що ця теорема справедлива не тільки для простішої моделі (11.4.1), але й для багатьох інших випадків.

З рівняння (11.4.4) можна оцінити R_0 для різних хвороб, якщо відома частина популяції, яка залишилася здоровою

$$R_0 = \frac{\ln z^*}{z^* - 1}.$$

Наприклад, для краснухи $R_0 = 6,4$; для віспи – 4,0; для грипу – $R_0 = 1,44$. Тут можна одержати цікавий висновок.

Якщо відома оцінка основного репродуктивного числа, то при вакцинації популяції немає необхідності робити щеплення всім індивідуам, щоб уникнути можливої епідемії. Необхідно привити імунітет такій частині p популяції, щоб R_0 стало меншим за одиницю, тобто

$$\frac{N - pN}{\sigma} < 1 \Rightarrow p > 1 - \frac{\sigma}{N} \Rightarrow p > 1 - \frac{1}{R_0}.$$

Отже, для уникнення епідемії потрібно вакцинувати тільки частину популяції (для віспи 70–80 %, для грипу 31 %).

Зауважимо, що в багатьох випадках вдається підібрати параметри моделі (11.4.1) так, що теоретичні криві достатньо точно відображають реальну динаміку хвороби.

Далі для моделі (11.4.1) можна вводити такі узагальнення:

- врахувати різний ступінь сприйняття захворювання;
- врахувати різну частоту контактів між окремими індивідуумами;
- замінити член βSI трофічною функцією з насиченням;
- врахувати стохастичність процесу розповсюдження інфекцій та ін.

11.5. Моделі управління епідемічним процесом

Для зменшення наслідків інфекційного захворювання застосовують такі методи керування епідемічним процесом:

- вакцинація;
- введення карантину;
- ізоляція хворих;

– хіміопротілактика (застосування хімічних засобів захисту) тощо.

Вакцинація переводить індивідумів з групи вразливих S у групу імунних R (рис. 11.3).

Схема процесу з вакцинацією наведена на рис. 11.3.

Нехай u – інтенсивність вакцинації (кількість індивідумів, яким робили щеплення за одиницю часу). Доповнимо SIR-модель складовою u , одержимо

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI - u, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I + u, \quad S + I + R = N = \text{const}. \end{cases}$$

Оскільки вакцинація проводиться до початку масового захворювання, то

$$u = \begin{cases} \bar{u} & \text{при } 0 < t < T, \\ 0 & \text{при } t \geq T, \end{cases}$$

де T – тривалість процесу вакцинопротілактики.

Запишемо модель із карантинном. Карантин – це ізоляція вразливих із метою перешкодження перенесенню інфекції від хворих до здорових. Нехай u_k – інтенсивність карантинних заходів, N_k – кількість ізольованих осіб, тоді модель розвитку епідемії має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI - u_k, \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I, \\ \frac{dN_k}{dt} = u_k, \quad S + I + R + N_k = N = \text{const}. \end{cases}$$

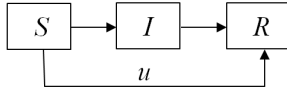


Рис. 11.3. Схема потоків індивідумів при вакцинації

При ізоляції хворих схема потоків індивідумів має вигляд, зображений на рис. 11.4.

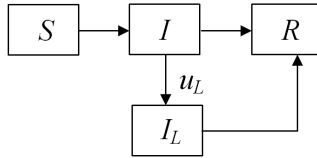


Рис. 11.4. Схема потоків індивідумів при ізоляції хворих

Модель з ізоляцією хворих задається системою диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta SI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I - u_L, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + \gamma I_L, \\ \frac{dI_L}{dt} &= u_L - \gamma I_L. \end{aligned}$$

11.6. Задачі для самостійної роботи

11.1. Математична модель, що описує дію ліків на заражені вірусом клітини організму, задається рівнянням

$$\dot{m} = rm \left(1 - \frac{m}{k}\right) - \gamma m f(h), \quad m(0) = m_0,$$

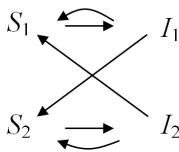
де m – кількість заражених клітин; $f(h)$ – функція терапії, що залежить від параметра h , який характеризує ефективність дії ліків; r , k , γ – додатні константи. Заміною змінних звести це рівняння

до безрозмірного вигляду. Дослідити динаміку $m(t)$ при різних h : а) $f(h = h)$; б) $f(h) = \frac{h}{1 + \delta h}$, $\delta = \text{const} > 0$; в) $f(h) = he^{-\delta h}$, $\delta = \text{const} > 0$.

11.2. Застосовуючи рівняння (11.4.2) та (11.4.3), знайдіть наближено розв'язки системи рівнянь (11.4.1) в аналітичному вигляді. Оснастивши модель числовими значеннями параметрів і застосовуючи засоби пакета Mathcad, побудувати графіки залежностей $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ та фазові траєкторії. Порівняти одержані результати з наближеними теоретичними. **Вказівка.** Для інтегрування виразів необхідно нелінійні функції розкласти в ряд Тейлора в околі нуля і в розкладі обмежитися членами другого степеня.

11.3. Розглянемо модель, яка описує розповсюдження венеричних захворювань. Для простоти вважатимемо, що можливі тільки гетеросексуальні контакти, а популяція складається з двох взаємодіючих груп – чоловіків і жінок. Отже, основна відмінність цієї моделі від SIR-моделі – це припущення про дві популяції, в яких контакти відбуваються тільки з особинами протилежної статі.

Позначимо через S_1 , I_1 , S_2 , I_2 – кількість здорових і хворих чоловіків і жінок відповідно. Для більшості венеричних захворювань перехворілий не набуває імунітету, тому необхідно враховувати перехід перехворілих у клас здорових. Діаграма передавання інфекції та еволюції захворілих має вигляд



Така модель називається перехресною SIS-моделлю. Система диференціальних рівнянь SIS-моделі має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= -\beta_1 S_1 I_2 + \gamma_1 I_1, & \dot{S}_2 &= -\beta_2 S_2 I_1 + \gamma_2 I_2, \\ \dot{I}_1 &= \beta_1 S_1 I_2 - \gamma_1 I_1, & \dot{I}_2 &= \beta_2 S_2 I_1 - \gamma_2 I_2, \end{aligned} \quad (11.6.1)$$

де β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2 – додатні параметри.

Припустимо, що загальна кількість чоловіків та жінок залишається сталою

$$S_1 + I_1 = N_1 = \text{const}, \quad S_2 + I_2 = N_2 = \text{const},$$

тоді систему можна звести до двох рівнянь відносно I_1, I_2 :

$$\dot{I}_1 = \beta_1(N_1 - I_1)I_2 - \gamma_1 I_1,$$

$$\dot{I}_2 = \beta_2(N_2 - I_2)I_1 - \gamma_2 I_2.$$

Відповідно до визначення числа R_0 і припущень у моделі (11.6.1) маємо, що один чоловік заражає $N_2 \frac{\beta_2}{\gamma_2}$ жінок, а одна жінка — $N_1 \frac{\beta_1}{\gamma_1}$ чоловіків, тобто $R_0 = \sqrt{\frac{N_1 \beta_1}{\gamma_1} \cdot \frac{N_2 \beta_2}{\gamma_2}}$.

Задача полягає в знаходженні нетривіального стаціонарного стану, дослідженні його на стійкість.

Необхідно показати, що значення $R_0 = 1$ біфуркаційне в моделі (11.6.1). Оснастивши параметри моделі (11.6.1) числовими значеннями, знайти її розв'язки в системі Mathcad.

11.4. Якщо середній час тривалості хвороби досить малий порівняно з середнім часом зміни поколінь, то в SIR-моделі можна не враховувати процеси демографії. Однак деякі хвороби циркулюють у популяції упродовж багатьох років, тому в моделі необхідно врахувати демографічні процеси в явному вигляді. В додаток до припущень, які були зроблені при побудові SIR-моделі, припустимо, що смертність у популяції повністю зрівноважує народжуваність і всі новонароджені абсолютно здорові. Одержимо таку математичну модель:

$$\dot{S} = \mu N - \beta SI - \mu S,$$

$$\dot{I} = \beta SI - \gamma I - \mu I,$$

$$\dot{R} = \gamma I - \mu R,$$

де μ — константа, що задає коефіцієнт смертності і народжуваності. Припустимо, що $N = S(t) + I(t) + R(t) = \text{const}$ для будь-якого t , тоді третє рівняння зайве, оскільки для будь-якого t : $R(t) = N - S(t) - I(t)$.

Показати, що основне репродуктивне число має вигляд $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma + \mu}$. Дослідити поведінку розв'язків системи. Оснастивши числовими значеннями параметри системи, провести числові експерименти з моделлю.

11.5. Для SIR-моделі розглянути випадок наявності двох шляхів передавання інфекції: безпосередньо від заражених при контактах і від деякого джерела інфекції (зокрема, водоймище). Розвиток процесу описується діаграмою, що наведена на рис. 11.5.

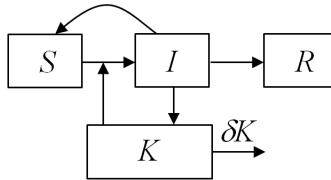


Рис. 11.5. Схема передавання інфекції двома шляхами

Рівняння розвитку епідемії в цьому випадку мають вигляд

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta SI - dKI, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI + dKI - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I, \\ \frac{dK}{dt} &= cI - \delta K.\end{aligned}$$

Тут βSI – інтенсивність зараження вразливих S у контактi із зараженими I ; dKI – інтенсивність зараження від джерела інфекції; K – концентрація збудника в цьому джерелі; cI – інтенсивність росту концентрації збудника; δK – інтенсивність природного спаду концентрації; $\delta = \frac{1}{T}$, де T – характерний час існування збудника в джерелі інфекції. Припускаємо, що $S + I + R = N = \text{const}$. Виконати дослідження моделі в пакеті Mathcad, оснастивши параметри системи числовими значеннями. Виконати деякі якісні дослідження системи.

11.6. (SIRS-модель). Для багатьох захворювань природніше припустити, що перехворілий індивідуум із часом перейде в групу здорових і може знову підхопити інфекцію. Тому еволюцію процесу описує діаграма

$$S \longrightarrow I \longrightarrow R \longrightarrow S.$$

Записати систему диференціальних рівнянь для цієї моделі. Показати, що число $R_0 = \frac{N}{\sigma}$, як і для системи (11.4.1). Вивчити динаміку розв'язків одержаної системи аналітичними та числовими методами.

11.7. (SEIR-модель). Багато захворювань мають інкубаційний період, тобто індивідуум, що підхопив інфекцію, стає її розповсюдженцем лише через деякий час. Цей ефект можна врахувати шляхом введення в математичну модель групи заражених, які ще не розповсюджують інфекції, кількість яких позначимо через $E(t)$, тоді

$$\dot{S} = -\beta SI,$$

$$\dot{E} = \beta SI - \theta E,$$

$$\dot{I} = \theta E - \gamma I,$$

$$\dot{R} = \gamma I,$$

β , θ , γ – додатні параметри; $\theta = \frac{1}{T_L}$, $\gamma = \frac{1}{T_B}$, де T_L – тривалість інкубаційного періоду, T_B – характерна тривалість хвороби.

Провести дослідження цієї моделі. Чому дорівнює R_0 для цієї моделі? Записати умови виникнення епідемії. Доповнити цю модель зворотним потоком із групи E в групу S , що відповідає завершенню інкубаційного процесу в початковій стадії. Це відбувається за наявності сильного імунітету, що може перебороти інфекційний процес у початковій стадії.

11.8. (SEIRS-модель). Узагальнити SEIR модель на випадок, коли перехворілий індивідуум переходить у групу здорових, але може підхопити інфекцію через генетичний дрейф збудника або унаслідок послаблення імунітету.

Виконати дослідження моделі в плані задач 11.5 та 11.6 в пакеті Mathcad, оснастивши параметри системи числовими значеннями. Виконати якісні дослідження одержаної моделі.

11.9. Рівняння, що описує зміну кількості ствольових кроветворних клітин (СКК) кісткового мозку можна записати у вигляді

$$\frac{dS}{dt} = a(S)S - b(S)S,$$

де $S(t)$ – кількість СКК в момент часу t , $a(S)$ – швидкість проліферації СКК, $b(S)$ – швидкість коммітації. Експериментальні дані свідчать про те, що залежність швидкості проліферації від кількості клітин S має вигляд $a(S) = \frac{a_{\max}}{1 + KS^n}$, де K , n – константи. На першому етапі можна припустити, що тільки кількість СКК впливає на швидкість проліферації, а $b(S)$ є сталою. Визначити динаміку СКК. Знайти стаціонарні розв'язки моделі та дослідити їх на швидкість.

Література: [25, 29, 36, 51, 62].

Розділ 12. Математичні моделі в економіці

12.1. Особливості математичного моделювання економічних систем

Математичні методи, що зарекомендували себе у фізиці та інших природничих науках, із часом знайшли успішне застосування й у гуманітарних науках, зокрема в економіці. Економіко-математичне моделювання в наш час є одним з основних інструментів економічного аналізу.

Про роль і значення математичного моделювання при дослідженні задач економіки краще за все говорить той факт, що практично всі лауреати Нобелівської премії з економіки застосовували методи математичного моделювання в своїх наукових дослідженнях.

Використання математичних методів в економічних задачах дало змогу сформулювати область економіко-математичного моделювання, яка дає можливість:

- виділяти й формально описувати найбільш істотні зв'язки економічних об'єктів;
- з побудованих модельних співвідношень шляхом обробки вихідної інформації отримувати нові знання про об'єкт, досліджувати залежності між параметрами, що описують цей об'єкт;
- компактно формулювати основні положення й висновки економічної теорії;
- розробляти стратегію управління економічними об'єктами тощо.

Економіко-математичні моделі складаються з рівнянь і нерівностей, що містять змінні та параметри, які описують економічні процеси та явища. Такі моделі необхідні спеціалістам для кращого розуміння економічних процесів, а також для аналізу та управління економічними процесами.

У залежності від економічних завдань математичні моделі мають різну природу. Для знаходження найважливіших факторів, що визначають результати функціонування економічної системи, як правило, будують економетричні моделі; для аналізу її розвитку в ретросистемі – балансові моделі; для вироблення прогнозів – динамічні моделі, для детальної проробки бізнес-планів

– моделі бізнес-процесів. Єдиної універсальної математичної моделі економічної системи для розв'язування актуальних задач не існує. Для цього потрібна розробка принципово нового економіко-орієнтованого математичного апарату. Принципова складність полягає в тому, що економічна система здатна саморозвиватися. Крім цього, економічні системи містять соціально-психологічні фактори, які погано піддаються формалізації. Тому основу математичного моделювання економічних процесів складають принципи моделювання природи, які дають змогу відносно просто будувати математичні моделі виробничо-технологічного, частково фінансового, соціально-демографічного рівнів.

Для побудови математичних моделей економіки, на відміну від природничих наук, не існує так багато фундаментальних законів. Але такі фундаментальні твердження природи, як закон збереження енергії, закон збереження мас, безперечно, переносяться в економіку як балансові співвідношення.

Прикладом відносно простого балансового співвідношення є міжгалузєва модель Леонт'єва, яка на практиці використовується передусім в задачах крупномасштабного планування економічних процесів. Біля 100 країн розробляли баланси "затрати–випуск" за допомогою цієї моделі. У деяких країнах розрахований план виробництва директивний, а в інших – індикативний (є орієнтиром на раціональні дії). Для складніших задач розробляються людино-машинні системи прийняття економічних рішень.

12.2. Міжгалузєві балансові моделі

12.2.1. Формалізація моделі

Ефективне функціонування економіки передбачає наявність балансу між окремими галузями. Кожна галузь при цьому виступає двозко: з одного боку, як виробник продукції; з іншого – як споживач продукції, що вироблена іншими галузями.

Розробка моделей міжгалузєвого балансу належить одному з найвидатніших учених ХХ ст., лауреату Нобелівського премії за 1972 р. Василю Леонт'єву. В працях Леонт'єва модель міжгалузєвого балансу з'явилася в 1936 р. Вона будується за таких припущень:

- економічна система (економіка країни) представлена сукупністю n галузей і в кожній галузі існує єдина технологія виробництва. Такі галузі називаються "чистими" (наприклад, чистими галузями є машинобудування, енергетика, сільське господарство, тощо);

- кожна галузь виробляє єдиний однорідний продукт і не допускається заміщення у виробництві одних видів продукції іншими;

- вся вироблена валова продукція поділяється на проміжну та кінцеву;

- норми виробничих затрат не залежать від обсягу виготовленої продукції.

Міжгалузеві баланси, залежно від одиниць вимірювання економічних показників, можна будувати в натуральній (м^3 , тони, штуки тощо), натурально-вартісній та вартісній формах.

Ми будемо розглядати міжгалузевий баланс у вартісній формі.

Для побудови моделі Леонтьєва наведемо схему міжгалузевого балансу, яка показує зв'язки між галузями (рис. 12.1):

Галузі виробники	Галузі-споживачі				Кінцева продукція	Валова продукція
	1	2	...	n		
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1n}	y_1	x_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2n}	y_2	x_2
...
i	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{in}	y_i	x_i
...
n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nn}	y_n	x_n
Умовно-чиста продукція	z_1	z_2	...	z_n	$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{j=1}^n z_j$	
Валова продукція	x_1	x_2	...	x_n		

Рис. 12.1. Схема міжгалузевого балансу

Згідно з цією схемою, розподіл продукції кожного економічного агента в міжгалузевому балансі країни можна описати рівнян-

НЯМ

$$x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12.2.1)$$

де x_i – валова продукція, вироблена i -ю галуззю; x_{ij} – кількість продукції i -ї галузі, яка споживається j -ю галуззю за певний період часу (наприклад, за рік), тобто рядок $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ описує поставки i -ї галузі всім галузям економіки, так що $\sum_{j=1}^n x_{ij}$ – це продукція виробничого споживання (проміжна продукція); y_i – кінцева продукція i -ї галузі, тобто продукція невиробничого споживання, яка включає в себе приріст запасів, особисте споживання населення, витрати на утримання державного апарату, оборону, освіти тощо.

Аналізуючи балансові таблиці, Леонт'єв показав, що коли не змінюється технологія виробництва, то можна так розбити виробників продукції на галузі, що відношення

$$\frac{x_{ij}}{x_j} = a_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n, \quad (12.2.2)$$

можуть бути оцінені статистично і з достатньою точністю залишаються постійними (слабко залежать від часу), не зважаючи на те, що самі величини x_{ij}, x_j можуть по-різному змінюватися в часі.

Варто зауважити, що сталість коефіцієнтів a_{ij} зберігається лише при грубій класифікації галузей. У США після другої світової війни під керівництвом Леонт'єва була складена балансова таблиця, що містить 400 галузей економіки. Практика показує, що коли кількість галузей у балансі перевищує тисячу, то співвідношення (12.2.2) перестають бути стійкими. Причина такого явища ще невідома.

Значення a_{ij} називаються *коефіцієнтами прямих матеріальних витрат*, вони показують витрати продукції i -ї галузі на виробництво одиниці продукції j -ї галузі, інакше це *норми витрат*.

З (12.2.2) маємо, що $x_{ij} = a_{ij}x_j$, тоді співвідношення (12.2.1) набувають вигляду

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (12.2.3)$$

або в матричній формі

$$x = Ax + y, \quad (12.2.4)$$

де $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор валової продукції; $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ – вектор кінцевої продукції; $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат (матриця Леонтьєва).

Отже, вектори валових та кінцевих випусків продукції пов'язані лінійним співвідношенням (12.2.4), яке в економічно-математичній літературі прийнято називати *моделлю міжгалузевого балансу* (інша назва – модель Леонтьєва, або модель "затрати–випуск").

Такі моделі годяться за умов стабільної економіки, коли економічна система еволюціонує поволі. Для опису кризових процесів, коли великі зміни в економіці відбуваються за малі проміжки часу, такі моделі непридатні. Динаміку системи в цьому випадку описують інші моделі.

Найголовнішою частиною роботи при створенні моделі (12.2.4), як відзначає сам Леонтьєв, є трудомісткий збір даних та побудова матриці A . Вона будується в процесі довготривалого кропіткого аналізу господарських зв'язків у сфері виробництва, розподілу й споживання продукції.

Для формули (12.2.4) можна один раз розрахувати елементи матриці A й далі користуватися нею для встановлення зв'язків між валовим випуском x і кінцевою продукцією y .

Оскільки матрицю A вважаємо відомою, то в рамках співвідношення (12.2.4) можна розглядати дві задачі: 1) вектор x – відомий і потрібно знайти вектор y (це задача звітного балансу); 2) вектор y – фіксований, а необхідно розрахувати вектор x (це задача планового балансу). Будемо розглядати лише задачу побудови планового балансу. Вона полягає в знаходженні невід'ємного вектора валової продукції x , що здатний забезпечити наперед заданий вектор кінцевої продукції y , який, за визначенням, невід'ємний.

Виникає задача обґрунтування моделі планового балансу.

Визначення 12.2.1. Матриця $A \geq 0$ (всі елементи якої невід'ємні) називається *продуктивною*, якщо для будь-якого вектора $y \geq 0$ існує розв'язок $x \geq 0$ рівняння (12.2.4).

Якщо A – продуктивна, то модель Леонтьєва теж називається продуктивною. Продуктивна модель Леонтьєва – це модель економіки, яка може існувати самостійно (виробнича система сама буде працювати).

З математичної точки зору, проблема існування розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (12.2.4) повністю визначається існуванням матриці $(E - A)^{-1}$, де E – одинична $n \times n$ матриця. Однак тільки існування матриці $(E - A)^{-1}$ не гарантує для будь-якого невід'ємного вектора y невід'ємність вектора x , де

$$x = (E - A)^{-1}y. \quad (12.2.5)$$

Зі співвідношення (12.2.5) видно, що умова продуктивності матриці еквівалентна існуванню невід'ємної матриці $B = (E - A)^{-1}$, тобто має виконуватися умова $(E - A)^{-1} \geq 0$.

Матрицю B при цьому називають матрицею *повних матеріальних витрат*. Елемент b_{ij} – це кількість валової продукції i -ї галузі, яка необхідна для випуску одиниці кінцевої продукції j -ї галузі з урахуванням як прямих, так і непрямих (опосередкованих) витрат.

12.2.2. Дослідження моделі Леонтьєва

Математичний аналіз моделі Леонтьєва пов'язаний із теорією невід'ємних матриць. Невід'ємні матриці можна поділити на два класи: розкладні та нерозкладні матриці. Розглянемо властивості таких матриць.

Визначення 12.2.2. Невід'ємна матриця $A = (a_{ij})_{i,j=1}^k$ називається розкладною, якщо матрицю A одночасною перестановкою рядків і стовпчиків можна звести до вигляду

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

де A_{11} , A_{22} – квадратні матриці.

Усі інші невід'ємні матриці називаються нерозкладними.

Як приклад розглянемо матриці A_1, A_2 , де

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що A_1 є розкладною, а A_2 – нерозкладною.

Зазначимо, що розкладність та нерозкладність матриці мають чітку економічну інтерпретацію. Розкладність матриці A означає, що існує група ізольованих галузей, які можуть функціонувати незалежно від інших галузей. У випадку нерозкладності цієї матриці такої групи галузей не існує.

Для того, щоб сформулювати необхідні та достатні умови продуктивності моделі Леонт'єва, слід навести деякі факти з теорії невід'ємних нерозкладних матриць.

Теорема 12.2.1 (теорема Перрона–Фробеніуса про спектральні властивості невід'ємної нерозкладної матриці). *Нехай $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – невід'ємна нерозкладна квадратна матриця, а $\Lambda(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, $m \leq n$ – множина її власних значень. Тоді в множині $\Lambda(A)$ є таке просте дійсне власне значення $\lambda_A > 0$, що $\lambda_A \geq |\lambda_k|$, $k = 1, 2, \dots, m$, і цьому значенню відповідає єдиний (з точністю до скалярного множника) власний вектор $x_A > 0$ ($0 \in \mathbb{R}^n$) з додатними координатами.*

У цьому випадку λ_A називають числом Фробеніуса, а вектор x_A – вектором Фробеніуса матриці A ($Ax_A = \lambda_A x_A$). Зазначимо, що вектор x_A називають ще правим вектором Фробеніуса, оскільки існує також вектор p_A ($p_A^T A = \lambda_A p_A^T$ або $A^T p_A = \lambda_A p_A$), який називають лівим вектором Фробеніуса.

Для порівняння наведемо теорему про спектр довільної невід'ємної матриці.

Теорема 12.2.2. *Нехай A – невід'ємна квадратна матриця, а $\Lambda(A)$ – множина її власних значень. Тоді в множині $\Lambda(A)$ є таке власне значення $\lambda_A \geq 0$, що $\lambda_A \geq |\lambda|$, $\lambda \in \Lambda(A)$ і λ_A відповідає власний вектор $x_A \geq 0$.*

З'ясувавши зміст та існування фробеніусових чисел і векторів, сформулюємо необхідні та достатні умови продуктивності моделі Леонт'єва.

Теорема 12.2.3 (критерій продуктивності моделі Леонт'єва).
 Для продуктивності моделі Леонт'єва з невід'ємною нерозкладною матрицею $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ необхідно й достатньо, щоб матриця A мала фробеніусове число $\lambda_A < 1$.

Доведення. Необхідність. Покажемо, що з умови продуктивності моделі Леонт'єва випливає нерівність $\lambda_A < 1$. Нехай $y > 0$ – потрібний вектор попиту. Тоді існує вектор валового випуску $x \geq 0$, для якого $x - Ax = y$. Звідси випливає, що $x > Ax$. Нехай $p_A > 0$ – фробеніусів вектор матриці A . Домножимо останню нерівність скалярно на вектор p_A , одержимо

$$(p_A, x) > (p_A, Ax) = (A^T p_A, x) = (\lambda_A p_A, x) = \lambda_A (p_A, x).$$

Оскільки $x \geq 0$, $p_A > 0$, $(p_A, x) > 0$, то $\lambda_A < 1$. Тобто ми довели, що для того, щоб вектор y був строго додатним, необхідно, щоб матриця A мала фробеніусове число $\lambda_A < 1$.

Достатність. Нехай $\lambda_A < 1$, покажемо, що звідси випливає продуктивність моделі. Позначимо через x_A фробеніусів власний вектор матриці A . Оскільки $Ax_A = \lambda_A x_A$, $x_A > 0$, $0 < \lambda_A < 1$, то

$$A^k x_A = A^{k-1}(Ax_A) = \lambda_A (A^{k-1} x_A) = \dots = \lambda_A^k x_A$$

і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k x_A = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_A^k x_A = 0.$$

Враховуючи, що $x_A > 0$, $A^k \geq 0$, маємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0.$$

Тепер розглянемо рівність, яка справедлива для будь-якої квадратної матриці A :

$$(E - A)(E + A + A^2 + \dots + A^k) = E - A^{k+1}.$$

Оскільки границя правої частини існує, то існує також границя лівої частини. Здійснюючи граничний перехід, маємо

$$(E - A) \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k \right) = E,$$

тобто ряд збігається і його сума

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (E - A)^{-1}. \quad (12.2.6)$$

Таким чином, доведено існування $(E - A)^{-1}$, крім того, оскільки $A^k \geq 0$, то $(E - A)^{-1} \geq 0$. Це означає, що для будь-якого вектора $y \geq 0$ існує невід'ємний розв'язок (12.2.5) системи рівнянь у моделі Леонтьєва (12.2.4), тобто модель Леонтьєва продуктивна. ■

Враховуючи (12.2.6), формула (12.2.5) перепишеться так:

$$x = (E - A)^{-1}y = y + Ay + A^2y + \dots + A^k y + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k y. \quad (12.2.7)$$

Співвідношенню (12.2.7) можна дати економічну інтерпретацію. Для того, щоб одержати план виробництва, потрібно виробити продукти кінцевого споживання. Але цього замало – в процесі виробництва виникають додаткові витрати, що описуються вектором Ay . Далі при виробництві вектора Ay виникають витрати, що дорівнюють $A \cdot Ay = A^2y$ і т.д. Повні витрати на забезпечення вектора кінцевої продукції визначаються за формулою (12.2.7).

З теореми 12.2.3 випливає, що перевірка на продуктивність зводиться до суто математичної задачі щодо спектра матриці A . У загальному випадку така задача доволі складна, тому широкого практичного застосування цей критерій продуктивності моделі Леонтьєва не одержав. У зв'язку з цим були сформульовані простіші умови продуктивності матриці.

Теорема 12.2.4 (достатня умова продуктивності моделі Леонтьєва). *Якщо система $x = Ax + y$ при деякому $y > 0$ має розв'язок $x \geq 0$, то модель Леонтьєва продуктивна.*

Доведення здійснюється аналогічно доведенню необхідності в теоремі 12.2.3. Довести самостійно. ■

Отже, квадратна матриця $A \geq 0$ продуктивна, якщо $\exists \bar{x} \geq 0$ таке, що $\bar{x} - A\bar{x} > 0$. Перепишемо останню нерівність у вигляді $(E - A)\bar{x} > 0$, або $D\bar{x} > 0$, де $D = E - A$.

Визначення 12.2.3. Матриця $D = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^n$, де

$$d_{ij} \leq 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad (12.2.8)$$

З останніх співвідношень випливає, що $d_{ij}^* \leq 0$ при $i \neq j$, $\omega_i^* > 0$, оскільки $d_{ij} \leq 0$ при $i \neq j$, $d_{11} > 0$, $\omega_i, \omega_1, d_{11} > 0$, $d_{i1} \leq 0$, де $i, j = 2, \dots, n$.

Розмірність системи (12.2.11) є $n - 1$ і для неї виконано 1), тому за індуктивним припущенням усі головні мінори матриці із системи (12.2.11) додатні, тобто

$$\det \begin{vmatrix} d_{22}^* & \dots & d_{2k}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{k2}^* & \dots & d_{kk}^* \end{vmatrix} > 0, \quad k = 2, \dots, n.$$

Але

$$\det \begin{vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{k1} & \dots & d_{kk} \end{vmatrix} = d_{11} \det \begin{vmatrix} d_{22}^* & \dots & d_{2k}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{k2}^* & \dots & d_{kk}^* \end{vmatrix} > 0, \quad k = 2, \dots, n.$$

Доведення 2) \Rightarrow 1) теж ведеться за методом математичної індукції (виконати самостійно). ■

Властивість 2) дозволяє визначити, чи є матриця продуктивною.

Теорема 12.2.6. *Якщо матриця $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ невід'ємна та нерозкладна, а*

$$r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

і хоча б одна з нерівностей строга, тобто $\exists j \leq n: r_j < 1$, то модель Леонт'єва, що відповідає цій матриці, продуктивна.

Доведення. Візьмемо вектор $e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$, тоді $Ae = (r_1, r_2, \dots, r_n)^T$. Нехай p_A – лівий вектор Фробеніуса, тоді

$$(p_A, Ae) = \sum_{i=1}^n r_i (p_A)_i < \sum_{i=1}^n (p_A)_i. \quad \text{З іншого боку,}$$

$$(p_A, Ae) = (A^T p_A, e) = \lambda_A (p_A, e) = \lambda_A \sum_{i=1}^n (p_A)_i.$$

Порівнюючи отримані співвідношення, одержимо, що $\lambda_A < 1$, тобто за теоремою 12.2.3 модель Леонт'єва продуктивна. ■

Економічний зміст нерівностей теореми 8.2.6 очевидний. Дійсно, $r_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ – сумарна частка валового випуску i -ї галузі, що використовується всіма іншими галузями. Якщо $r_i = 1$, то це означає, що вся продукція i -ї галузі споживається іншими галузями і на невиробниче використання з i -ї продукції нічого не залишається. Якщо всі $r_i = 1$, то взагалі нічого не залишиться на кінцеве споживання, жодний вектор $x \geq 0$ не дасть $y > 0$ (економіка буде працювати сама на себе).

12.2.3. Деякі узагальнення моделі Леонтьєва

Модель Леонтьєва (12.2.4) одержала багато модифікацій, оскільки вона не враховує деякі обмеження, які мають місце в реальному житті. Одним із таких обмежень є обмеження на трудові ресурси.

Нехай l_i – витрати трудових ресурсів в i -й галузі при виробництві одиниці продукції (коефіцієнти трудомісткості одиниці i -ї продукції). Вектор $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ назовемо вектором трудових витрат, тоді сумарний обсяг трудових витрат дорівнює

$$\sum_{i=1}^n l_i x_i = (l, x).$$

На планові випуски будуть впливати обмеження на трудові ресурси

$$(l, x) \leq L,$$

де L – наявний обсяг трудових ресурсів.

У цьому випадку не можна досягти будь-якого вектора y кінцевого споживання. Нехай вектор y^* задає структуру кінцевого споживання, а саме кінцеве споживання можна виразити величиною αy^* . Тоді природно задачу планування економіки записати у вигляді

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \max, \\ x - Ax &\geq \alpha y^*, \\ (l, x) &\leq L, \\ x &\geq 0. \end{aligned} \tag{12.2.12}$$

Вона є типовою задачею лінійного програмування. Ця задача називається моделлю Леонтьєва при обмеженнях на трудові ресурси.

Якщо матриця A продуктивна й нерозкладна, то задача (12.2.12) допустима й має розв'язок $x > 0$.

Аналогічно до задачі (12.2.12) можна сформулювати модель оптимального розподілу ресурсів виробничих фондів

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \max, \\ (E - A)x &\geq \alpha y^*, \\ (\varphi, x) &\leq \Phi, \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

де Φ – загальний обсяг ресурсів виробничих фондів; $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$ – вектор фондомісткості одиниці продукції.

Істотним недоліком моделі Леонтьєва є її статичність, тоді як реальна економіка розвивається з часом. Спробу описати динаміку розвитку економіки в часі дає модель фон Неймана. Така модель максимально наближена до реальної економічної системи. Крім цього, у динамічних моделях зі складу кінцевої продукції виділяють виробничі капіталовкладення, тобто інвестиції в основний капітал, що дозволяє аналізувати їх розподіл.

12.2.4. Двоїста задача міжгалузевого балансу

Із задачею про міжгалузевий баланс пов'язана двоїста задача, яка формулюється в термінах цін. Елементи j -го стовпця матриці A прямих витрат показують кількість продукції кожної галузі, яка іде на виробництво одиниці продукції j -ї галузі. Позначимо ціни продукції галузей через $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n$ відповідно. Тоді витрати j -ї галузі на придбання продукції i -ї галузі дорівнюють $x_{ij}p_i$ або $a_{ij}x_jp_i$, а сумарні витрати становлять $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_jp_i$.

Але крім цих витрат, кожна галузь несе витрати на робочу силу, амортизацію, покупку товарів за межами системи n галузей, тому потрібно ще закласти чистий прибуток. Все це складає додану вартість $z_j = v_j x_j$, де v_j – величина доданої вартості, що припадає на одиницю продукції j -ї галузі (відносна ціна одиниці

продукції). Тоді загальна вартість продукції дорівнює

$$p_j x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j p_i + v_j x_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Поділивши останнє співвідношення на x_j , дістанемо

$$p_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} p_i + v_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

або у векторно-матричній формі,

$$p = A^T p + v, \quad (12.2.13)$$

де $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T$ – вектор цін; v – вектор компонент доданої вартості; A^T – матриця, транспонована до A . Задача (12.2.13) називається двоїстою до задачі (12.2.4).

Визначення 12.2.4. Якщо для $v \geq 0$ задача (12.2.13) має невід’ємний розв’язок p , то кажуть, що система (12.2.13) *прибуткова*.

Можна довести, що прибутковість системи (12.2.13) і продуктивність моделі (12.2.4) еквівалентні: із продуктивності прямої системи випливає прибутковість двоїстої та навпаки. Таким чином, модель (12.2.13) міжгалузевого балансу дозволяє кількісно оцінити на прогностичний період рівень цін у галузях. Такі ціни називаються зрівноваженими.

Моделі (12.2.4) та (12.2.13) в сукупності відображають один із найважливіших принципів моделювання багатогалузевої економіки – принцип двоїстості, в основі якого лежить сумісний аналіз матеріально-речових та вартісних взаємозв’язків.

12.3. Моделі економічного росту. Модель Солоу

Розглянемо односекторну (однопродуктову) економіку, коли в економіці діє один репрезентативний споживач, який одночасно є і виробником. Така економіка агрегована й замкнута, оскільки вона виробляє один універсальний продукт, який може споживатися та інвестуватися.

Для організації виробництва, крім робочої сили або трудових ресурсів, потрібні *матеріальні ресурси*, до яких належать природні ресурси та засоби виробництва. *Засоби виробництва* поділяються на *засоби праці*, що беруть участь у багатьох виробничих циклах (це будівлі, машини, знаряддя, прилади тощо), та *предмети праці*, що беруть участь лише в одному виробничому циклі, – це виробничі запаси, сировина, напівфабрикати, допоміжні матеріали, паливо, тара тощо.

Накопичені засоби праці формують *основні виробничі фонди* (ОВФ), накопичені предмети праці – *оборотні фонди* (ОФ).

ОВФ у міру зношування беруть участь в утворенні вартості продукції, що виготовляється. Просте відтворення ОВФ здійснюється тільки за рахунок амортизаційних відрахувань, а розширене – за рахунок капітальних вкладень і, частково, фонду амортизації. ОФ функціонують у процесі виробництва тимчасово й повністю переносять свою вартість на готову продукцію.

Результатом функціонування економіки (наприклад, за рік) є *валовий внутрішній продукт*, який створюють усі галузі виробництва.

Важливим показником є також *валовий випуск* – сумарна вартість усієї виробленої за рік продукції. На рис. 12.2 зображений блок виробництва, де прийнято такі позначення:

P_x – блок розподілу валового випуску;

K_t – засоби праці, або ОВФ;

L_t – трудові ресурси (кількість зайнятих працівників);

R_t – природні ресурси;

V_t – виробниче споживання (проміжна продукція);

X_t – валовий випуск;

Y_t – ВВП (кінцева продукція);

індекс t означає залежність величини від часу t .

Як видно з рис. 12.2, валовий випуск є сумарною вартістю ВВП та проміжної продукції, тобто тієї частини валового випуску, яка повертається назад у виробництво, а отже, правильне співвідношення

$$X_t = Y_t + V_t. \quad (12.3.1)$$

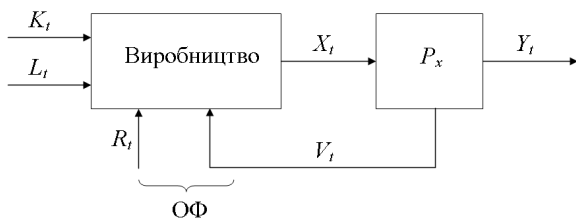


Рис. 12.2. Схема виробництва

Наведемо тепер схему розподілу ВВП (рис. 12.3). При цьому приймемо такі позначення:

P_y – блок розподілу ВВП;

C_t – невиробниче споживання;

I_t – валові капітальні вкладення (валові інвестиції);

P_I – блок розподілу валових інвестицій;

A_t – амортизаційні відрахування.

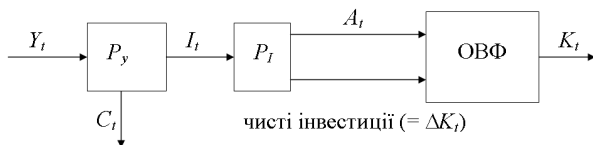


Рис. 12.3. Схема розподілу ВВП

Будемо розглядати закриту економіку й вважатимемо, що вироблена продукція в момент часу t може бути використана на споживання C_t та інвестиції I_t (капітальні вкладення), тоді

$$Y_t = C_t + I_t. \quad (12.3.2)$$

Валові інвестиції I_t розподіляються на амортизаційні відрахування A_t та чисті капітальні інвестиції, що визначають приріст ОВФ (приріст капіталу в моделі з неперервним часом збігається з похідною $\frac{dK(t)}{dt}$), тому маємо співвідношення

$$I_t = \frac{dK}{dt} + A_t. \quad (12.3.3)$$

Чисті інвестиції є тією частиною валових інвестицій, яка залишилася після амортизаційних відрахувань.

Будемо вважати, що капітал знощується зі швидкістю $0 \leq \delta \leq 1$ (δ – норма амортизації капіталу), тоді

$$I_t = \frac{dK}{dt} + \delta K. \quad (12.3.4)$$

Результатом виробництва служить ВВП Y . Величину Y називають випуском, або об'ємом виробництва. Y залежить від двох факторів виробництва: затрат праці L і капіталу K . Отже, співвідношення

$$Y = F(K, L) \quad (12.3.5)$$

описує кількісні залежності між трьома характеристиками виробничої діяльності і є моделлю макровиробничих функцій. Типовим прикладом макровиробничих функцій випуску є степеневі виробничі функції, або функції Кобба–Дугласа $Y = AK^\alpha L^\beta$, де A – технологічний коефіцієнт.

Будемо вважати, що функція $F(K, L)$ задовольняє такі властивості:

1) $F(0, L) = F(K, 0) = 0$ – при відсутності хоча б одного ресурсу виробництво неможливе;

2) $\frac{\partial F(K, L)}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F(K, L)}{\partial L} > 0$ ($F(K, L)$ – зростаюча функція своїх аргументів) – збільшення витрат виробничих фондів і робочої сили приводить до зростання випуску продукції;

3) $\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial K^2} < 0$, $\frac{\partial^2 F(K, L)}{\partial L^2} < 0$ ($F(K, L)$ – угнута функція) – при фіксованому обсязі одного з факторів послідовні збільшення іншого зумовлюють чимраз менші прирости виробленої продукції;

4) $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) = \lambda Y$ – обсяг випуску характеризується постійною віддачею від розширення масштабів виробництва;

$$5) \lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = \infty,$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = 0.$$

Граничні ефективності фондів та праці необмежено зростають

при наближенні відповідних ресурсів до нуля та прямують до нуля при необмеженому зростанні ресурсів.

Враховуючи наведені раніше математичні співвідношення (12.3.2), (12.3.4), (12.3.5), можна виписати систему математичних співвідношень, яка і є *моделлю економічного росту Солоу*, в абсолютних показниках (Солоу Р. (нар. 1924 р.) – американський економіст-математик, лауреат Нобелівської премії з економіки за 1987 р.)

$$\begin{cases} Y(t) = F(K(t), L(t)), \\ Y(t) = I(t) + C(t), \\ \frac{dK}{dt} = I(t) - \delta K(t), \\ K(t_0) = K_0, \\ 0 \leq C(t) \leq F(K(t), L(t)). \end{cases} \quad (12.3.6)$$

Співвідношення (12.3.6) виписані при таких припущеннях:

- кінцевий випуск (ВВП) визначається виробничою функцією, що залежить від виробничих фондів і трудових ресурсів;
- весь випуск продукції витрачається на валові інвестиції та невиробниче споживання;
- амортизація наявного капіталу пропорційна його величині з нормою амортизації $\delta > 0$;
- приріст капіталу збігається з чистими інвестиціями (капіталовкладеннями).

Для дослідження моделі (12.3.6) будемо вважати, що інвестиції є деякою фіксованою часткою прибутку

$$I(t) = sY(t), \quad 0 \leq s \leq 1. \quad (12.3.7)$$

Враховуючи (12.3.7), (12.3.5), з третього рівняння (12.3.6) одержимо

$$\frac{dK}{dt} + \delta K(t) = sF(K(t), L(t)). \quad (12.3.8)$$

Поділимо (12.3.8) на $L(t)$. З урахуванням однорідності функції $F(K, L)$ дістанемо

$$\frac{\dot{K}}{L(t)} + \delta \frac{K(t)}{L(t)} = sF\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right). \quad (12.3.9)$$

Перейдемо від абсолютних величин до відносних (величин на одного робітника). Позначимо $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ – капітал на одного робітника (капіталооснащеність), тоді $F\left(\frac{K(t)}{L(t)}, 1\right) = f(k)$ – задає випуск на одного робітника, або середню продуктивність праці.

Щоб переписати (12.3.9) в нових позначеннях, знайдемо $\frac{\dot{K}}{L(t)}$.
Маємо

$$\dot{k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right) = \frac{\dot{K}L(t) - K(t)\dot{L}}{L^2(t)} = \frac{\dot{K}}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} \cdot \frac{\dot{L}}{L(t)}.$$

Звідси

$$\frac{\dot{K}}{L(t)} = \dot{k} + k \cdot \frac{\dot{L}}{L(t)}. \quad (12.3.10)$$

Цей вираз значно спрощується, якщо вважати, що кількість зайнятих щорічно зростає з річним темпом приросту n , тобто $L(t) = L_0 e^{nt}$. З (12.3.10) маємо

$$\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + nk.$$

Тому (12.3.9) набуває вигляду

$$\dot{k} = sf(k) - (n + \delta)k. \quad (12.3.11)$$

Рівняння (12.3.11) називається рівнянням накопичення капіталу. В лівій частині (12.3.11) знаходиться чистий приріст капіталооснащеності.

Визначимо стаціонарний стан у розглядуваній моделі, при якому капітал на одного працівника залишається незмінним. Позначимо його через k^* і запишемо

$$sf(k^*) = (n + \delta)k^*. \quad (12.3.12)$$

Оскільки $k^* = \text{const}$, то продуктивність праці та споживання на одного робітника залишаються сталими:

$$y^* = f(k^*), \quad C^* = (1 - s)f(k^*).$$

Це означає, що запас капітала, випуск і споживання продукції в стаціонарному стані збільшується з тим же темпом, з яким зростають трудові ресурси.

Стаціонарний стан у моделі Солоу показано графічно на рис. 8.4. За нашими припущеннями, виробнича функція $f(k)$ угнута і виходить з нуля так, що її нахил у нулі дорівнює нескінченності. При великих k функція $f(k)$ стає пологою. Інвестиції, потрібні для підтримки постійної капіталооснащеності, $(n + \delta)k$ зображені прямою лінією, що виходить із нуля під кутом $(n + \delta)$. Точка перетину кривої $f(k)$ та прямої $(n + \delta)k$ визначає стаціонарний рівень капіталооснащеності k^* . Така точка обов'язково існує, виходячи з властивостей функції $f(k)$.

При $k > k^*$ виконується нерівність $sf(k) < (n + \delta)k$, тобто $\dot{k} < 0$. Це означає, що $k(t)$ буде спадати, поки не досягне значення k^* . При $0 < k < k^*$ виконується нерівність $sf(k) > (n + \delta)k$, тому для всіх таких k похідна $\dot{k} > 0$, тобто для всіх траєкторій, що починаються в довільній точці інтервалу $(0, k^*)$, величина $k(t)$ буде зростати, поки не досягне значення k^* . Звідси випливає, що всі траєкторії капіталооснащеності при $k(0) > 0$ прямують до k^* . Отже, точка рівноваги k^* стійка.

Строгий математичний аналіз стійкості стаціонарного розв'язку $k = k^*$ можна здійснити методом Ляпунова за першим наближенням (провести самостійно).

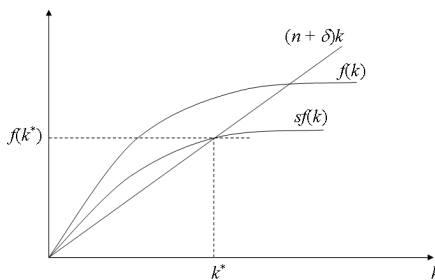


Рис. 12.4. Стаціонарний стан у моделі Солоу

Золоте правило накопичення капіталу. З рівняння (12.3.12) для стаціонарного стану випливає, що при зміні норми

збереження змінюється стаціонарна капіталооснащеність і відповідно змінюється стаціонарне споживання на душу населення. Як зміниться споживання при зміні норми збереження? Відповідь на це запитання залежить від початкового стану економіки.

Стаціонарне споживання на душу населення зростає з ростом s при низьких нормах збереження і спадає при великих. З'ясуємо, при якій нормі збереження стаціонарне споживання буде максимальним.

Стаціонарне споживання знаходимо як різницю між доходом та збереженням

$$C^* = f(k^*(s)) - sf(k^*(s)).$$

Враховуючи, що $sf(k^*) = (n + \delta)k^*$, знаходимо

$$C^* = f(k^*(s)) - (n + \delta)k^*(s).$$

Максимізуючи по s , знайдемо

$$[f'(k^*) - (n + \delta)] \frac{dk^*}{ds} = 0.$$

Оскільки $\frac{dk^*}{ds} > 0$, то $f'(k^*) - (n + \delta) = 0$. Капіталооснащеність, що задовольняє останнє рівняння, називається капіталооснащеністю, що відповідає золотому правилу. Позначимо її через \bar{k}^* :

$$f'(\bar{k}^*) = n + \delta. \quad (12.3.13)$$

Умова (12.3.13), що визначає \bar{k}^* – стаціонарний рівень, який максимізує стаціонарне споживання, називається *золотим правилом накопичення капіталу*.

Отже, норма збереження, що забезпечує максимальну величину стаціонарного споживання на душу населення, може бути знайдена з умови

$$\bar{s}^* = \frac{(n + \delta)\bar{k}^*}{f(\bar{k}^*)}.$$

Так ми будемо підтримувати однаковий рівень споживання для всіх, хто живе нині й житиме в майбутньому. При цьому максимальний рівень стаціонарного споживання на душу населення, який ми зможемо забезпечити, становить

$$\bar{C}^* = f(\bar{k}^*) - (n + \delta)\bar{k}^*.$$

12.4. Моделі ціноутворення

12.4.1. Простіша дискретна модель ціноутворення

Ціну на товар можна подати графічно двома кривими, що визначають залежність попиту D і пропозиції S від ціни P товару (рис. 12.5).

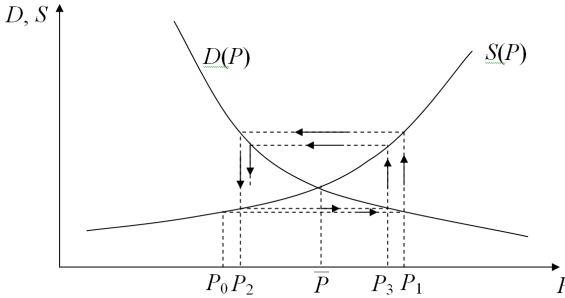


Рис. 12.5. Функції попиту $D(P)$ і пропозиції $S(P)$

Зрівноважена ціна \bar{P} визначається зі співвідношення $D(P) = S(P)$, тобто коли попит дорівнює пропозиції. Однак ця ціна наперед ніколи не відома й встановлюється в процесі торгівлі й виробництва товару.

Розглянемо простішу дискретну модель встановлення ціни. Будемо розглядати дискретні моменти часу $t = 0, 1, 2, \dots$. Вважатимемо, що часові інтервали збігаються з часом виробництва або доставки товару (наприклад, тиждень, місяць). На інтервалі t продається товар, вироблений (доставлений) на інтервалі часу $t - 1$. На інтервалі $t - 1$ було вироблено $S(P_{t-1})$ одиниць товару, а продавали його на інтервалі t за ціною P_t і попит тоді становив $D(P_t)$. Вважаючи, що попит дорівнює пропозиції, маємо

$$D(P_t) = S(P_{t-1}). \quad (12.4.1)$$

Це співвідношення дає змогу побудувати траєкторію ціни P_t в залежності від часу, а саме:

$$D(P_1) = S(P_0), D(P_2) = S(P_1), D(P_3) = S(P_2), \dots$$

Тобто, знаючи P_0 , одержуємо динаміку цін P_1, P_2, P_3, \dots (рис. 12.5).

Для теоретичного дослідження будемо вважати, що криві $D(P)$, $S(P)$ в околі точки $P = \bar{P}$ можна апроксимувати прямими

$$\begin{aligned} D(P) &= \alpha - aP, & \alpha > 0, a > 0, \\ S(P) &= \beta + bP, & \beta > 0, b > 0. \end{aligned} \quad (12.4.2)$$

Тоді зрівноважена ціна \bar{P} задовольняє співвідношення

$$\alpha - a\bar{P} = \beta + b\bar{P},$$

звідки

$$\bar{P} = \frac{\alpha - \beta}{a + b}. \quad (12.4.3)$$

Рівняння (12.4.1) набуває вигляду

$$\alpha - aP_t = \beta + bP_{t-1},$$

або

$$P_t = \frac{\alpha - \beta}{a} - \frac{b}{a}P_{t-1}. \quad (12.4.4)$$

Уведемо позначення: $P_t = \bar{P} + \Delta P_t$, тоді для ΔP_t з (12.4.4) одержимо однорідне рівняння

$$\Delta P_t = -\frac{b}{a}\Delta P_{t-1}.$$

За таким законом будується геометрична прогресія, тому за формулою загального члена геометричної прогресії

$$\Delta P_t = \left(-\frac{b}{a}\right)^t \Delta P_0,$$

а отже,

$$P_t = \frac{\alpha - \beta}{a + b} + \left(-\frac{b}{a}\right)^t (P_0 - \bar{P}). \quad (12.4.5)$$

Динаміка ціни P_t має три різних варіанти поведінки:

1) $0 < b/a < 1$, тоді $P(t) \rightarrow \bar{P}$ при $t \rightarrow \infty$. Ціна, коливаючись навколо \bar{P} , наближається до \bar{P} (рис. 12.6, а);

2) $b/a > 1$, тоді $P(t)$ розбігається при $t \rightarrow \infty$ (ціни розбалансовуються) (рис. 12.6, б);

3) $b/a = 1$. У цьому випадку $P(t)$ буде змінюватися періодично з періодом 2. Ціна P_t може набувати лише двох значень: P_0 та $2\bar{P} - P_0$ (рис. 12.6, в).

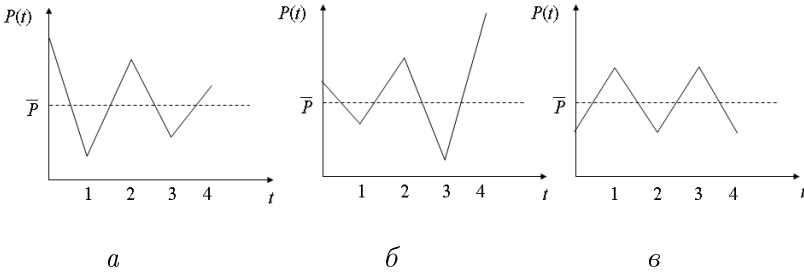


Рис. 12.6. Динаміка цін P_t

12.4.2. Модель цін із запізненням

Модель (12.4.4) можна узагальнити на випадок, коли очікування ціни залежить від попередніх інтервалів часу.

Нехай ціна в період t , на яку очікує продавець, визначається співвідношенням

$$\hat{P}_t = P_{t-1} + \rho(P_{t-1} - P_{t-2}),$$

де ρ – деякий коефіцієнт, як правило, $0 < \rho < 1$.

Якщо для $S(\hat{P}_t)$ і $D(P_t)$ прийняти умови (12.4.2), то з основного рівняння $D(P_t) = S(\hat{P}_t)$, що визначає динаміку цін, одержимо

$$\alpha - aP_t = \beta + b(P_{t-1} - \rho(P_{t-1} - P_{t-2})). \quad (12.4.6)$$

Як відомо, зрівноважена ціна $\bar{P} = P_t = P_{t-1} = P_{t-2} = \frac{\alpha - \beta}{a + b}$.

Зробимо заміну $P_t = \bar{P} + \Delta P_t$, тоді з рівняння (12.4.6) маємо

$$\Delta P_t + \gamma(1 - \rho)\Delta P_{t-1} + \gamma\rho\Delta P_{t-2} = 0, \quad (12.4.7)$$

де $\gamma = b/a > 0$. Рівняння (12.4.7) – це лінійно-різницеве рівняння другого порядку, розв’язок якого знаходиться у вигляді $\Delta P_t = \lambda^t$, де для λ маємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \lambda\gamma(1 - \rho) + \gamma\rho = 0. \quad (12.4.8)$$

Дискримінант цього рівняння $D = \gamma^2(1 - \rho)^2 - 4\gamma\rho$. Тоді:

А) при $\gamma > 4\rho/(1 - \rho)^2$ дискримінант $D > 0$ і корені λ – дійсні;

Б) при $\gamma < 4\rho/(1 - \rho)^2$ корені – комплексно-спряжені. Випишемо ці корені:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma(1 - \rho) \pm i\sqrt{4\gamma\rho - \gamma^2(1 - \rho)^2}}{2},$$

або, в експоненціальній формі: $\lambda_{1,2} = re^{i\varphi}$, де

$$r = |\lambda_{1,2}| = \frac{1}{4}[\gamma^2(1 - \rho)^2 + 4\gamma\rho - \gamma^2(1 - \rho^2)] = \gamma\rho,$$

$$\varphi = -\arctg \sqrt{(4\gamma\rho - \gamma^2(1 - \rho)^2)/(\gamma(1 - \rho))}.$$

Тоді розв'язок рівняння (12.4.7) запишемо у вигляді

$$\Delta P_t = Cr^t \cos(\varphi t + \varepsilon),$$

де C і ε – деякі константи.

Звідси при $r < 1$, тобто при $\gamma < 1/\rho$ одержуємо, що $\Delta P_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, а ціна P_t , коливаючись, прямує до зрівноваженої ціни \bar{P} . При $\gamma > 1/\rho$ маємо, що $\Delta P_t \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Тому нерівність $\gamma < 1/\rho$ визначає область стійкості в системі координат ρ, γ (рис. 12.7).

У випадку А), коли $\gamma > 4\rho/(1 - \rho)^2$, корені характеристичного рівняння дійсні, тому розв'язки рівняння (12.4.7) записуються у вигляді

$$\Delta P_t = C_1\lambda_1^t + \lambda_2^t,$$

де C_1, C_2 – константи, що визначаються з початкових умов. Розв'язок буде стійким, тобто ΔP_t прямуватиме до нуля при $t \rightarrow \infty$, якщо $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Уважатимемо, що $0 < \rho < 1$, тоді

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma(1 - \rho) \pm \sqrt{\gamma^2(1 - \rho)^2 - 4\gamma\rho}}{2}.$$

Більший модуль матиме корінь λ_2 і границею області стійкості є крива, що визначається з рівняння

$$\frac{-\gamma(1 - \rho) - \sqrt{\gamma^2(1 - \rho)^2 - 4\gamma\rho}}{2} = -1,$$

або

$$\sqrt{\gamma^2(1 - \rho)^2 - 4\gamma\rho} = 2 - \gamma(1 - \rho),$$

звідки

$$\gamma = \frac{1}{1 - 2\rho}.$$

Це і є рівнянням границі області стійкості в площині ρ, γ .

Сама умова $\lambda_1 > -1$ виконується при $\gamma < 1/(1 - 2\rho)$. Відповідна область показана на рис. 12.7.

Зауважимо, що криві

$$\gamma = \frac{1}{1 - 2\rho} \quad \text{та} \quad \gamma = \frac{4\rho}{(1 - \rho)^2}$$

перетинаються в точці $\rho = 1/3$.

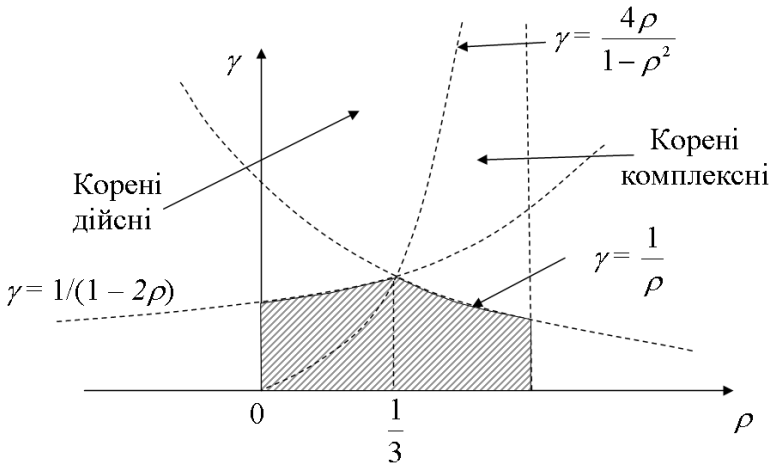


Рис. 12.7. Область стійкості розв'язків рівняння (12.4.7) при $0 < \rho < 1$ (заштрихована область)

12.5. Моделювання прибутку підприємства

Під виробництвом розуміється діяльність, яка приводить до одержання матеріальних благ при використанні природних, матеріально-технічних та інтелектуальних ресурсів.

Не зважаючи на те, що виробництво включає в себе багато різноманітних форм діяльності (це виробництво нових товарів, будівництво, транспортні послуги, сільськогосподарське виробництво

й великі організації типу галузей народного господарства), математичне моделювання виділяє дещо загальне, властиве всім цим об'єктам. Загальним є процес перетворення первинних ресурсів (виробничих факторів) у кінцеві результати виробництва.

Для того, щоб описати виробництво, використовують виробничі функції. В найпростішому випадку виробнича функція – це скалярна функція n аргументів:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де величина y , як правило, має вартісний характер і визначає обсяг виробленої продукції в грошовому еквіваленті. Аргументи x_1, \dots, x_n задають обсяги затрачених ресурсів при реалізації технологічного процесу.

Вирази для виробничих функцій використовують для оцінки ефективності прийнятого на даному виробництві способі господарювання. Виробнича функція – важливий апарат планових розрахунків, тому для її побудови щодо конкретного господарства використовують статистичний підхід. При цьому використовується деякий стандартний набір алгебраїчних виразів, параметри яких знаходяться за допомогою методів математичної статистики.

Серед різноманітних типів виробничих функцій найчастіше використовують лінійні функції вигляду

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j x^j,$$

для яких легко розв'язується задача оцінювання коефіцієнтів за статистичними даними, а також степеневі функції

$$y = a_0 \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j},$$

для яких також можна утворити лінійні формули через логарифмування.

Використання апарату виробничих функцій дає можливість розв'язувати задачі про оптимальне використання засобів, призначених для закупівлі виробничих факторів.

Припустимо, що фактори x_1, \dots, x_n можуть бути закуплені за цінами p_1, \dots, p_n , а обсяги засобів для закупівлі становлять b (грош. од.). Тоді співвідношення $\sum_{j=1}^n p_j x_j \leq b$ описує множину допустимих наборів факторів.

Задача про оптимальне використання засобів формулюється так: потрібно знайти набір факторів, який дає найбільший випуск продукції при обмежених фінансах. Тобто потрібно знайти розв'язок задачі

$$y = f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max,$$

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j \leq b,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Шуканий змістовий розв'язок знаходиться із системи рівнянь

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lambda p_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^n p_j x_j = b,$$

де λ – множник Лагранжа.

Розглянемо окремий випадок, коли кількість факторів дорівнює 2. Нехай $x_1 = K$ – капітал (основні фонди), $x_2 = L$ – трудові ресурси, тоді виробнича функція $y = f(K, L) \rightarrow \max$. Умови обмеження: $rK + \omega L = b$, де r – ціна використання машин, устаткування (послуги капіталу), ω – ставка оплати праці. Умови оптимальності мають вигляд

$$\frac{\partial y}{\partial K} = r, \quad \frac{\partial y}{\partial L} = \omega.$$

Перша умова означає, що маргінальна фондвіддача ($\frac{\partial y}{\partial K}$) дорівнює нормі банківського відсотка r , друга умова означає, що маргінальна продуктивність праці $\frac{\partial y}{\partial L}$ дорівнює ставці оплати праці ω .

Для мультиплікативної виробничої функції задача має вигляд

$$y = \alpha K^\alpha L^\beta \rightarrow \max,$$

за умови, що

$$rK + \omega L = b.$$

Для неї одержимо такий розв'язок:

$$\bar{K} = \frac{\alpha b}{(\alpha + \beta)r}, \quad \bar{L} = \frac{\beta b}{(\alpha + \beta)\omega}, \quad \bar{y} = \alpha \bar{K}^\alpha \bar{L}^\beta.$$

12.6. Задачі для самостійної роботи

12.1. Розглянемо взаємодію економічних агентів, коли одні з них суттєво залежать від інших. Простішим прикладом таких відносин слугують моделі аграрного сектора в економіці країни. Така модель для двох агентів записується у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1(-\varepsilon_1 + \gamma_{12}x_2), \\ \dot{x}_2 = x_2(\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1 - \gamma_{22}x_2), \end{cases}$$

де всі коефіцієнти додатні, $x_1(t)$ характеризує залежну галузь, наприклад, сільське господарство, а $x_2(t)$ – галузь-донора – усю промисловість. Ця модель виражає проблему дотацій сільського господарства.

Довести, що в такій системі можливе сумісне співіснування галузей. Знайти стаціонарний стан, дослідити його на стійкість. Показати, що при $\gamma_{22} = 0$ виникають періодичні коливання навколо точки рівноваги.

12.2. Економіка розділена на три галузі: промисловість, сільське господарство та інші галузі. Знайти об'єми виробництва галузей народного господарства, матрицю повних матеріальних витрат та міжгалузеві поставки, якщо на плановий період задані коефіцієнти прямих затрат і кількість кінцевої продукції:

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,4 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 49 \\ 69 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

Перевірити необхідні та достатні умови продуктивності матриці A (теорема 12.2.3). Перевірити достатні умови продуктивності матриці A (теорема 12.2.6).

12.3. Розв'язати задачу 12.2, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,16 & 0,125 \\ 0,05 & 0,04 & 0,075 \\ 0,25 & 0,16 & 0,025 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

12.4. Нехай економіка умовно розділена на чотири сектори: 1) промисловість - галузі групи А (виробляють засоби виробництва); 2) - промисловість - галузі групи Б (виробляють предмети використання); 3) сільське господарство; 4) інші галузі. Коефіцієнти прямих матеріальних витрат і вектор кінцевої продукції задані:

$$A = \begin{pmatrix} 0,20 & 0,10 & 0,05 & 0,20 \\ 0,05 & 0,20 & 0,04 & 0,15 \\ 0,10 & 0,15 & 0,04 & 0,10 \\ 0,20 & 0,10 & 0,10 & 0,10 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 300 \\ 100 \\ 100 \\ 150 \end{pmatrix}.$$

Знайти планові завдання випуску валової продукції кожною галуззю, міжгалузеві поставки і скласти міжгалузевий баланс. Перевірити достатні умови продуктивності матриці A (теорема 12.2.6).

12.5. Написати двоїсту задачу до задачі (12.4.1). Дати економічну інтерпретацію.

12.6. Нехай у задачі установлення зрівноваженої ціни, крім виробників і покупців, існують ще посередники (оптовики), які створюють запаси Q товарів і тим самим визначають ціни. Нехай Q_t - запаси в кінці інтервалу t . Тоді $\Delta Q_t = Q_t - Q_{t-1} = S(P_t) - D(P_t)$ визначає приріст запасів, який дорівнює виробництву товарів мінус їхній продаж. Будемо вважати, як і раніше, що $D(P_t) = \alpha - aP_t$, $S(P_t) = \beta + bP_t$.

При цих припущеннях можливі різні моделі встановлення цін при наявності запасів:

а) Модель 1. $P_t = P_{t-1} - \rho \Delta Q_{t-1}$, де $\rho > 0$ - деяка константа. Це співвідношення очевидне, оскільки при збільшенні запасів потрібно знижувати ціни.

б) Модель 2. $P_t = P_{t-1} - \rho(Q_t - \bar{Q})$. Тут припускається, що повинен існувати деякий стандартний рівень запасів.

Провести дослідження цих моделей. Установити динаміку цін.

12.7. Довести теорему 8.2.4 про достатні умови продуктивності моделі Леонтьєва.

12.8. Побудувати статичну модель Леонтьєва у випадку, коли маємо n галузей виробників і m галузей для знищення забруднення, яке виробляють $n + m$ галузей.

12.9. Задача розкрою. Стальні пруті довжиною 100 см необхідно розрізати на заготовки довжиною 40, 45, 50 см. Кількість заготовок становить 30, 40, 20 штук відповідно. Скільки прутів і яким способом потрібно розрізати, щоб забезпечити мінімальні відходи?

12.10. У рамках моделі Солоу розглянути оптимізаційну задачу: знайти програму невиробничого споживання, за якої досягається максимальне значення функціонала корисності

$$\Phi(U) = \int_{t_0}^{t_m} U(C(t))dt,$$

$U(C)$ – функція корисності, що характеризує ступінь задоволення споживачів у поточний момент часу t .

Література: [27, 38, 46, 58, 59, 74, 75].

Розділ 13. Моделі соціальних та глобальних процесів

13.1. Математична модель гонки озброєнь між двома країнами

Сутність гонки озброєнь полягає ось у чому. Дві ворогуючих країни нарощують свій військовий потенціал. Перша країна озброюється через потенціальну загрозу з боку другої країни. Остання і собі, знаючи про зростання витрат на озброєння першої країни, теж збільшує витрати на озброєння.

Позначимо через $x(t)$, $y(t)$ обсяг озброєння двох країн. Будемо вважати, що загальна кількість зброї кожної країни визначається трьома факторами:

- кількістю зброї в протилежної сторони;
- зносом наявного озброєння;
- ступенем недовіри до противника.

Припускаємо також, що темпи приросту і зменшення озброєння пропорційно залежать від указаних факторів.

При таких припущеннях математична модель гонки озброєнь має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha_1(t)y - \beta_1(t)x + P(t), \\ \frac{dy}{dt} = \alpha_2(t)x - \beta_2(t)y + Q(t), \end{cases} \quad (13.1.1)$$

де $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – коефіцієнти, що характеризують швидкості нарощування і зносу озброєння, функції $P(t)$, $Q(t)$ описують рівень недовіри конкурентів і залежать тільки від часу.

Аналіз моделі (13.1.1) найбільш простий у випадку сталих коефіцієнтів, тобто для подальшого аналізу оберемо систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1y - b_1x + p, \\ \frac{dy}{dt} = a_2x - b_2y + q. \end{cases} \quad (13.1.2)$$

Модель (13.1.2) була розроблена Р. Річардсоном, який, за даними про затрати на озброєння перед першою світовою війною, довів адекватність своєї моделі реальним фактам. Політологи встановили придатність моделі Річардсона для аналізу серйозних міжнародних конфліктів. За останні 200 років з 30 конфліктів, що супроводжувалися гонкою озброєння, 25 закінчилися війною. При відсутності гонки озброєнь тільки 3 конфлікти з 70 призвели до війни.

Дослідимо якісну поведінку розв'язків системи (13.1.2). Для цього спочатку знайдемо стаціонарні точки x^* , y^* . Вони задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} a_1y - b_1x + p = 0, \\ a_2x - b_2y + q = 0. \end{cases}$$

Звідси

$$x^* = \frac{a_1q + b_2p}{b_1b_2 - a_1a_2}, \quad y^* = \frac{a_2p + b_1q}{b_1b_2 - a_1a_2}. \quad (13.1.3)$$

З (13.1.3) уже маємо перший висновок: для того, щоб рівновага озброєння існувала, повинна виконуватися умова

$$b_1b_2 > a_1a_2, \quad q, p > 0. \quad (13.1.4)$$

Зауважимо, що якщо обидва параметри p , q , що характеризують недовіру, дорівнюють нулю, то стану рівноваги відповідає відсутність озброєнь в обох сторін.

Вивчимо тепер питання про стійкість стаціонарних точок. Для цього в системі (13.1.2) зробимо заміну змінних

$$x(t) = x^* + \xi(t), \quad y(t) = y^* + \eta(t),$$

тоді для ξ , η одержимо систему

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -b_1\xi + a_1\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = a_2\xi - b_2\eta. \end{cases} \quad (13.1.5)$$

Характеристичне рівняння системи (13.1.5)

$$\lambda^2 + (b_1 + b_2)\lambda + b_1b_2 - a_1a_2 = 0$$

завжди має два дійсні від'ємні корені, оскільки

$$D = (b_1 + b_2)^2 - 4(b_1b_2 - a_1a_2) = (b_1 - b_2)^2 + 4a_1a_2 > 0,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -(b_1 + b_2) < 0, \quad \lambda_1\lambda_2 = b_1b_2 - a_1a_2 > 0.$$

Тому особлива точка (x^*, y^*) є стійким вузлом, і фазовий портрет має вигляд, зображений на рис. 13.1.

Будь-яке відхилення від стану рівноваги стає достатньо малим через доволі великий проміжок часу.

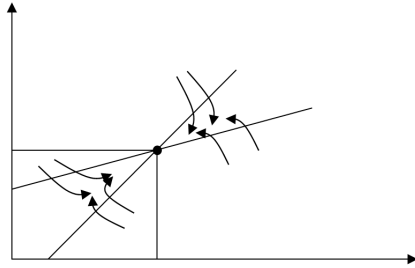


Рис. 13.1. Фазовий портрет системи (13.1.2)

З побудованої моделі можна визначити деякі характеристики можливих поведінок суперників при переході від одного стану рівноваги до іншого. Нехай, наприклад, темп нарощування озброєнь змінюється в обох суперників на невелику величину da ($da_1 = da_2 = da$), тоді відповідно зміняться й величини x^* , y^* . Причому обидві країни бажають, щоб dx^* і dy^* були рівними. Для величин dx^* , dy^* з (13.1.3) одержуємо

$$dx^* = \frac{\partial x^*}{\partial a_1} da + \frac{\partial x^*}{\partial a_2} da = \frac{b_1b_2q + a_2b_2p + a_1^2q + a_1b_2p}{(b_1b_2 - a_1a_2)^2} da,$$

$$dy^* = \frac{\partial y^*}{\partial a_1} da + \frac{\partial y^*}{\partial a_2} da = \frac{b_1b_2p + a_1b_1q + a_2^2p + a_2b_1q}{(b_1b_2 - a_1a_2)^2} da.$$

Припустимо, для простоти, що ступені недовіри рівні, тобто $p = q$, тоді з умови $dx^* = dy^*$ одержуємо умови паритету сторін при невеликих змінах рівноваги:

$$a_1(a_1 + b_2 - b_1) = a_2(a_2 + b_1 - b_2). \quad (13.1.6)$$

Це співвідношення може бути покладене в основу відповідних домовленостей між країнами, якщо відомі параметри a_1 , a_2 , b_1 , b_2 .

Наприклад, припустимо, що $a_2 = \sigma a_1$, тоді зі співвідношення (13.1.6) маємо

$$a_1(1 - \sigma) = b_1 - b_2. \quad (13.1.7)$$

При $\sigma < 1$ (темپ приросту озброєнь у другої сторони менший, ніж у першій) для збереження паритету необхідно, щоб $b_1 > b_2$, тобто в другої сторони темп амортизації озброєнь повинен бути меншим. При $\sigma > 1$ темп амортизації у першій сторони повинен бути меншим ($b_1 < b_2$).

Побудована модель (13.1.1) не враховує багато важливих факторів, що впливають на гонку озброєнь, але водночас дає можливість проаналізувати ряд істотних властивостей цього процесу.

До початку 70-х років модель була випробувана сотні разів на найрізноманітніших варіантах гонки озброєнь. І кожний раз модель Річардсона адекватно відображала основні особливості конкретного варіанту гонки озброєнь, зокрема, на основі даних на військові розходи за 1948–1973 рр. у рамках цієї моделі було показано стабільність гонки озброєнь між СРСР та США (гонка озброєнь не перейшла в війну) і нестабільність гонки озброєнь між Іраком, Іраном, Індією і Пакістаном, що привело до військових конфліктів.

13.2. Модель бойових дій регулярних армій

Нехай у бойових діях беруть участь дві регулярні армії. Кількісний склад цих армій у момент часу t позначимо через $x(t)$ і $y(t)$. Чисельності $x(t)$, $y(t)$ є головною характеристикою суперників у розглядуваній моделі. Побудована модель буде описувати динаміку саме цих величин.

Зробимо припущення, що $x(t)$ і $y(t)$ змінюються неперервно і, більше того, є диференційовними функціями часу. Такі припущення є спрощенням реальної ситуації, оскільки $x(t)$ і $y(t)$ – це цілі числа. Але при великій чисельності армій такі припущення цілком допустимі, це дасть можливість будувати математичні моделі у вигляді диференціальних рівнянь.

Укажемо ряд факторів, які дають змогу описати швидкість зміни чисельності армій. Армія x зазнає втрат від хвороб, травм та інших факторів, що не пов'язані з бойовими діями, позначимо цю швидкість $R(t)$. Через $S(t)$ позначимо швидкість, з якою сторона x несе втрати безпосередньо від ведення бойових дій зі стороною y . Через $P(t)$ позначимо швидкість підходу підкріплень армії x . $P(t)$ вважаємо заданою функцією часу.

Такі фактори, як рівень і досвід командного складу, моральний дух солдат, ступінь бойової підготовки та інші, практично важко врахувати в математичній моделі.

При зроблених припущеннях очевидно, що швидкість зміни $x(t)$ задається рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = -(R(t) + S(t)) + P(t).$$

Аналогічне рівняння має місце і для $y(t)$.

Тепер потрібно конкретизувати величини $R(t)$, $S(t)$. Припустимо, що кожний солдат армії x знищує за одиницю часу b солдат армії y , а кожний солдат армії y вбиває за одиницю часу a солдат армії x .

Швидкість самовтрат в армії x вважаємо пропорційною самій чисельності армії x із деяким коефіцієнтом пропорційності c , а самовтрати в армії y мають коефіцієнт пропорційності d .

Тоді математична модель, що виражає зміну кількісного складу двох армій, має вигляд

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -cx - ay + P(t), \\ \frac{dy}{dt} = -bx - dy + Q(t). \end{cases} \quad (13.2.1)$$

Для замикання моделі (13.2.1) необхідно задати початкові значення x_0 , y_0 – кількісний склад армій перед початком ведення бойових операцій (при $t = 0$).

Модель (13.2.1) ведення бойових дій двох армій у літературі відома як перша модель Ланкастера (англійський інженер і математик, який запропонував цю модель під час першої світової війни).

Розглянемо диференціальну систему (13.2.1) за умови, що кожна з армій знаходиться в зоні дії бойових засобів іншої армії і бойові дії спрямовані на живу силу противника. За таких припущень можна знехтувати самовтратами, оскільки вони значно менші, ніж втрати живої сили в бою. Крім цього, будемо вважати, що обидві сторони не одержують підкріплення ($P(t) = Q(t) = 0$).

Тоді математична модель (13.2.1) спрощується і набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ay, \\ \frac{dy}{dt} = -bx. \end{cases} \quad (13.2.2)$$

Поділивши друге рівняння на перше, одержуємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \frac{x}{y}. \quad (13.2.3)$$

Проінтегрувавши рівняння (13.2.3), приходимо до співвідношення

$$a(y^2(t) - y_0^2) = b(x^2(t) - x_0^2),$$

або

$$bx^2 - ay^2 = C, \quad (13.2.4)$$

де $C = bx_0^2 - ay_0^2 = \text{const}$.

Рівняння (13.2.4) задає сім'ю гіпербол (при $C = 0$ – пару прямих $y = \pm \frac{b}{a}x$), по яких відбуватиметься еволюція чисельності армій. На рис. 13.2 зображено гіперболи для різних значень C , причому оскільки $x(t)$, $y(t)$ – чисельності армії, то розглядаємо лише першу чверть.

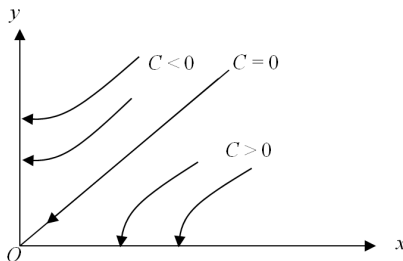


Рис. 13.2. Фазовий портрет системи (13.2.2)

Стрілки на гіперболах указують напрям зміни чисельності армій з ростом часу.

Як видно з рис. 13.2, при $C < 0$ перемагає армія y . При цьому бойові сили армії x повністю знищуються, тобто в ході бойових дій чисельність армії x зменшується до нуля за скінченний проміжок часу. При $C > 0$ – перемагає армія x , при $C = 0$ обидві армії будуть взаємознищені.

Отже, щоб перемогла армія x , їм необхідно досягти такої ситуації, за якої

$$bx_0^2 > ay_0^2, \quad (13.2.5)$$

тобто точка (x_0, y_0) повинна лежати вище граничної прямої $y = \frac{b}{a}x$.

Із формули (13.2.5) можна одержати ще один цікавий висновок. Якщо армія x хоче перемогти армію y за умови, що початкова чисельність складу армії x в k разів менша за початкову кількість армії y , тобто $x_0 = \frac{y_0}{k}$, то необхідно, щоб була виконана умова $b > k^2a$.

З першого рівняння системи (13.2.2) маємо $\frac{1}{y} \frac{dx}{dt} = -a$. Тоді значення a можна інтерпретувати як одиницю виміру середньої ефективності кожної одиниці бойових сил армії y . Аналогічно значення b – це середня ефективність одиниці бойових сил армії x .

Тепер можна зробити висновок: для того, щоб перемогти армію, вдвічі більшу за чисельністю, потрібно мати в 4 рази кращу зброю (ефективність одиниці бойових сил). Тобто для перемоги важливі не стільки чисельності армій на початку боїв, скільки їх якість озброєнь, виучка солдат та ін., що виражається коефіцієнтами a , b .

Очевидно, що модель Ланкастера є надмірним спрощенням, але з неї одержується важливий висновок відносно кількісного складу армій і потужності зброї.

Відомо, що наведена простіша модель якісно відповідає реальним історичним подіям, наприклад, поразці Наполеона, успіху монгольських завойовників тощо.

Більш адекватна модель може враховувати залежність коефіцієнтів a , b у системі (13.2.2) від поточної чисельності армій:

$$a = a(x, y), \quad b = b(x, y).$$

Тоді система рівнянь (13.2.1) набуває вигляду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -a(x, y)y, \\ \frac{dy}{dt} = -b(x, y)x. \end{cases} \quad (13.2.6)$$

Система (13.2.6) уже не може бути розв'язана точно при довільних функціях $a(x, y)$, $b(x, y)$, але може бути проведений її якісний аналіз.

Основний висновок, що отримуємо з якісного аналізу системи (13.2.6), – це висновок про структурну стійкість цієї моделі. Зміна функцій a , b призведе до зміни кривих, що описують хід воєнних дій (вони вже не будуть гіперболами і граничною прямою), однак якісна картина поведінки розв'язків системи (13.2.6), порівняно з (13.2.2), збережеться, оскільки топологічний тип точки рівноваги не зміниться.

Такі моделі ще називають м'якими, оскільки вони зазнають змін за рахунок вибору функції $a(x, y)$, $b(x, y)$. Натомість модель (13.2.2) називається жорсткою, оскільки коефіцієнти системи набувають сталих значень.

13.3. Математичне моделювання глобальних процесів

13.3.1. Модель Форрестера "Світова динаміка"

У 70-х рр. ХХ ст. стало зрозумілим, що економічні проблеми не можна розв'язувати без урахування впливу господарської діяльності людини на довкілля. Не можна розглядати економіку окремо від екології. Тому в економіці виникають проблеми нового плану – це забезпечення життєдіяльності людей, зниження рівня забруднення, зменшення техногенного навантаження на природу.

Для розв'язування проблем розвитку цивілізації в умовах обмеженості земних ресурсів у цей час у країнах Заходу виникає низка організацій. Важливу роль серед них на той час відіграв Римський клуб (неурядова, некомерційна організація), який об'єднав політиків з економічно розвинутих країн і був створений для досліджень глобальних проблем людства.

Члени клубу зрозуміли, що суто економічний підхід не може забезпечити кількісний аналіз перспектив економічного розвитку, не дає можливості розв'язувати складні проблеми взаємодії людства і навколишнього середовища, а найкращою формою вивчення цих проблем є використання математичного моделювання. Тому виникла необхідність розробки математичних моделей економічного розвитку в умовах раціонального природокористування.

У 1970 р. на черговій сесії Римського клубу професорові Масчачусетського технологічного університету Дж. Форрестеру (одному з провідних спеціалістів у галузі управління) запропонували розробити глобальну модель розвитку світу.

На основі теорії систем, апарату диференціальних рівнянь і комп'ютерного моделювання ним були створені моделі світової динаміки "Світ-1" та "Світ-2" (1971–1972 рр.), які започаткували процеси глобального моделювання.

Опис моделі, аналіз отриманих результатів і висновки були опубліковані Дж. Форрестером у книзі "Світова динаміка", що вийшла у світ 1971 року. У ній автор уперше спробував описати основні процеси економіки, демографії, росту забруднення в планетарному масштабі на основі математичної моделі. Зупинимося на цій моделі.

У концептуальній моделі Форрестер виокремлює найбільш істотні світові процеси:

- 1) зростання народонаселення;
- 2) промислове зростання;
- 3) нестача продуктів харчування;
- 4) зростання відходів виробництва;
- 5) нестача природних ресурсів.

Відповідно до цих факторів, математична модель включає п'ять основних глобальних змінних, що залежать від часу:

$P(t)$ – кількість людей на Землі в момент часу t ;

$K(t)$ – капіталовкладення в промисловість і сільське господарство;

$X(t)$ – частка інвестицій у сільське господарство;

$R(t)$ – невідновлювані природні ресурси;

$Z(t)$ – загальна кількість забруднень.

За одиницю часу береться один рік, за одиницю капіталу $K(t)$ – капітал, що припадає на душу населення в 1970 р. Одиниця забруднення – це кількість забруднення, що припадала на одну людину в 1970 р. Одиницею ресурсів вважається річне використання ресурсів на одну людину в 1970 р. Тобто змінні $K(t)$, $R(t)$, $Z(t)$ – нормовані за величинами опорного 1970 р. $X(t) \in [0; 1]$ – безрозмірна величина.

Взаємодія природи і виробництва описується диференціальними рівняннями такого типу:

$$\frac{dy}{dt} = y^+ - y^-,$$

де y^+ – додатний темп зростання величини y , що включає в себе всі фактори, які викликають ріст змінної y ; y^- – показує від’ємний темп швидкості зміни y , що включає всі фактори, які викликають спадання змінної y .

Математичну модель світової динаміки складають п’ять диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dP}{dt} = BR(t) - DR(t), \quad (13.3.7)$$

$$\frac{dR}{dt} = -NR(t), \quad (13.3.8)$$

$$\frac{dK}{dt} = K^+(t) - K^-(t), \quad (13.3.9)$$

$$\frac{dZ}{dt} = Z^+(t) - Z^-(t), \quad (13.3.10)$$

$$\frac{dX}{dt} = X^+(t) - X^-(t), \quad (13.3.11)$$

де $BR(t)$ – кількість людей, які народилися за рік t ; $DR(t)$ – кількість людей, які померли за рік t ; $NR(t)$ – зменшення кількості природних ресурсів за одиницю часу (в рік t) унаслідок використання їх для потреб виробництва; $K^+(t)$ – кількість нових виробничих фондів, які створені за одиницю часу (в рік t) унаслідок інвестицій; $K^-(t)$ – зменшення кількості виробничих фондів

за одиницю часу через амортизацію; $Z^+(t)$ – кількість антропогенних викидів забруднювачів в навколишнє середовище за одиницю часу (в рік t); $Z^-(t)$ – зменшення кількості забруднювачів за одиницю часу в результаті переробки забруднювачів та їх самоочищення; $X^+(t)$ – приріст частки сільськогосподарського капіталу; $X^-(t)$ – зменшення частки сільськогосподарського капіталу за одиницю часу (в рік t).

Усі перераховані характеристики, що фігурують у правій частині співвідношень (13.3.7) – (13.3.11), є функціями п'яти змінних, а також багатьох зовнішніх параметрів. Для проведення обчислювальних експериментів із моделлю ці функції необхідно конкретизувати. Для їх конкретизації вводять до розгляду ряд допоміжних характеристик.

Наприклад, співвідношення, що визначає швидкість (темп) народжуваності $BR(t)$, має вигляд

$$BR(t) = P(t) \cdot BRF(t) \cdot BRM(t) \cdot BRC(t) \cdot BRZ(t) \cdot BRN,$$

де $BRF(t)$ – параметр, що враховує темп народжуваності від відносного рівня харчування $FR(t)$, який дорівнює реальній кількості продуктів харчування на душу населення $FPC(t)$, яка теж залежить від кількості фондів у сільському господарстві $X(t)$, а також коефіцієнтів, що описують зменшення виробництва продуктів унаслідок забруднення $FPM(Z(t))$ та збільшення густини населення $FCM(P(t))$, тобто $FR(t) = FPC(t) \cdot FPM(t) \cdot FCM(t)$;

$BRM(t)$ – залежність темпу народжуваності від матеріального рівня життя $MS(t)$, який теж залежить від кількості виробничих фондів на душу населення в промисловості і сільському господарстві, від частки фондів у сільському господарстві від коефіцієнта $NR(t)$, що враховує зменшення ефективності фондів у промисловому виробництві через зменшення кількості природних ресурсів і збільшення трудозатрат на їх видобування, тобто

$$MS(t) = \frac{K(t)}{P(t)} \frac{1 - X(t)}{1 - X(1970)} NR(t);$$

$BRC(t)$ – коефіцієнт, що описує залежність темпу народжуваності від відносної густини населення $P_t/P(1970)$ ($P(1970) = 3,6 \cdot 10^9$), тобто це густина населення в частках густини, що мала місце в 1970 р.;

$BRZ(t)$ – залежність темпу народжуваності від відносного рів-

ня забруднення $ZR(t)$, де $ZR(t) = \frac{Z(t)}{Z(1970)}$. Значення $Z(1970)$ вважається таким, що дорівнює кількості населення в 1970 р., тобто $3,6 \cdot 10^9$, оскільки рівень забруднення на одну людину в 1970 р. береться за одиницю;

$BRN = 0,04$ – коефіцієнт народжуваності в 1970 р.

Подібним способом визначаються інші залежності, що фігурують у правих частинах моделі.

Розрахунки по моделі проводилися з 1900 по 2100 рр. 1970 р. був взятий за опорний. Дані статистики за 1900–1970 рр. використовувалися для ідентифікації моделі.

Даними розрахунків за 1900–1970 рр. послуговувалися для верифікації моделі (вони зіставлялися з наявною статистикою) і знаходження мало відомих параметрів, тобто відтворення інформації, якої не вистачало. Параметри моделі й початкові значення підбиралися так, щоб розрахункові дані не надто відрізнялися від реальних даних на інтервалі 1900–1970 рр. (тому доводилося задачі розв'язувати вперед до 1970 р. і назад до 1900 р.).

Розрахунки по моделі з 1970 по 2100 рр. використовувалися для прогнозу. Основні висновки з прогнозу Форрестера полягають в такому. За умови збереження сучасних тенденцій розвитку суспільства (70-ті р. ХХ ст.) неминуча серйозна криза у взаємодії людини і середовища в ХХІ ст. Цю кризу автор пояснив протиріччям між обмеженістю природних ресурсів і ростом капіталу, що вкладається в промисловість і сільське господарство. Ріст капіталу призводить до розтрачування ресурсів. Виснаження природних ресурсів відбудеться до 2100 р., хоча в 1970 р. запас ресурсів становив 95 % від рівня 1900 р.

Саме цей ріст разом із ростом населення призводить до природного забруднення середовища (забруднення до 2050 р. зросте в 33 рази порівняно з 1900 р.) і, як наслідок, зростання смертності населення (зростання чисельності населення зменшиться задовго до 2100 р. і досягне в 2100 р. 1,44 млрд. людей).

Не зважаючи на те, що було розглянуто багато різних сценаріїв прогнозу, які відрізнялися вихідними даними, ростом урожайності, контролем народжуваності, прогноз для життєдіяльності людини без контролю над забрудненням був песимістичним.

Прогноз за цими сценаріями свідчить, що внаслідок накопичення забруднень і зменшення ресурсного потенціалу неминуче настане криза за всіма економічними й екологічними показниками – загроза катастрофи не може бути відсунута за 2100 р.

Для відтермінування світової катастрофи необхідно вжити заходи для екологічної й економічної стабільності, наслідком якої повинна стати глобальна рівновага, коли змінні системи вийдуть на стаціонарні значення.

13.3.2. Модифікації моделі Форрестера

Одразу після опублікування моделі Форрестера різними авторами були зроблені спроби модифікації моделі з метою виявлення можливих перспектив еволюції людства й пошуку шляхів, що дозволять уникнути глобальної кризи.

Однією з модифікацій є модель Медоуза (учня Форрестера) "Світ-3". Остання версія моделі (1992 р.) уже включає в себе 10 взаємозв'язаних секторів. У моделі "Світ-3" було введено приблизно в 4 рази більше взаємозв'язків (279 рівнянь), ніж у моделі "Світ-2" (82 рівняння).

Розрахунки за моделлю "Світ-3" показали, що їх прогнози якісно близькі до висновків моделі "Світ-2": тут теж прогнозується неминуча катастрофа через зменшення ресурсів і зростання кількості забруднень. Було показано, що при збереженні сучасних тенденцій неминуче настане глобальна криза.

Аналіз результатів, що одержані за моделями "Світ-2", "Світ-3", змусили громадськість замислитися над можливими глобальними кризами. Ці моделі дали потужний поштовх для подальших досліджень у галузі системної динаміки. Сьогодні завдяки розробці об'єкто-зорієнтованих мов програмування стало можливим створення великих моделей, що включають тисячі змінних, які можуть на достатньо детальному рівні описувати динаміку складних систем.

Із сучасних системно-динамічних моделей варто відзначити модифікації моделі "Світ-3": модель МДУ, модель Єгорова, модель Махова та ін.

У моделі МДУ ускладнюються рівняння моделі світової ди-

наміки, наприклад, для природних ресурсів пропонується вже 4 диференціальних рівняння першого порядку з урахуванням основних балансових складових ресурсної бази: потенційно використовуваних ресурсів, нових ресурсів, відновлювальних ресурсів, витрачених ресурсів.

Модель Єгорова відкрила новий напрям у галузі системного моделювання – моделювання з управлінням. У моделі Єгорова з метою запобігання глобальній кризі вводяться управляючі параметри. До того ж припускається можливість впливу на матеріальний рівень життя, відносне забруднення, рівень харчування шляхом розподілу капіталовкладень. Перевага такої моделі полягає в тому, що з'являється можливість управління в часі з метою поліпшення глобальної ситуації. Було показано, що відповідним підбором критерію оптимальності можна одержати таку динамічну модель, в якій криза не настане до кінця XXI ст.

Практичні рекомендації цієї моделі полягають у необхідності створити потужну індустрію відновлення ресурсів, очищення забруднень і проведення рекультивації земель. Саме для визначення відрхувань у ці технології і розв'язувалася задача оптимального управління.

У модифікації моделі Махова робляться припущення, які дозволяють подолати процеси вичерпання невідновлювальних ресурсів і забруднення довкілля. Вважається, що розвиток технологій дозволить поступово знижувати використання ресурсів і виробничі відходи на 20-40 % кожні 20–30 років. Припускається, що в недалекому майбутньому з'явиться можливість швидкого очищення забруднень через створення потужної промислової галузі з утилізації відходів. Тобто апріорі задається деякий гіпотетичний сценарій розвитку. Результати модельних розрахунків показали, що в такій системі можна досягти виходу змінних на деякий квазістаціонарний режим, причому вихід розв'язків на стаціонар відбудеться не раніше 2050 р. Початком управління передбачалося обрати 2000 р., оскільки відтермінування управління в часі відсуває вихід розв'язків на стаціонар і навіть може мати негативні наслідки. У випадку, коли управління почнеться з 2030 р., система не встигне стабілізуватися й настане системна криза: матеріальний рівень життя впаде, кількість населення зменшиться,

хоча при цьому природні ресурси не виснажаться.

В Обчислювальному центрі РАН для аналізу глобальних процесів був запропонований підхід, що базувався на принципі, за яким людина і вся її діяльність – це складова частина загальних процесів у біосфері. Глобальна модель біосфери – це спроба сумісно описати зміни деяких характеристик біосфери при різних варіантах соціально-економічного розвитку, а основне – це відшукування тих шляхів, критеріїв і принципів, які б могли забезпечити можливість стабільного розвитку людства й біосфери.

При описі біосфери виділялися три блоки: атмосфера, океан і регіони суші. Стан кожного блоку описано набором деяких змінних, які в сукупності складають вектор фазових змінних моделі. Наприклад, фазові змінні блоку "регіони суші": населення, забруднення, трав'яна рослинність, сільськогосподарська рослинність, тварини, гумус, мінеральні ресурси, енергетичні ресурси.

Модель описується задачею Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, що відображають зв'язки між компонентами біосфери. В моделі біля 400 коефіцієнтів, що вимагають кількісного визначення і близько 200 зв'язків, які потрібно описати математично.

З моделлю можна проводити обчислювальні експерименти. У першому з них було поставлено питання, як будуть змінюватися параметри біосфери в разі збереження сучасних тенденцій розвитку світу. Результати моделювання показали, що забрудненість атмосфери різко зростатиме і до 2115 р. збільшиться в 4 рази, при цьому середня температура за 200 років не вийде за межі 13-17°. Сукупність дії забруднення оточуючого середовища і зменшення білкової компоненти раціону призведе до різкого спаду кількості населення. Ця модель корисна для вивчення різних гіпотетичних ситуацій, оскільки провести прямі експерименти над біосферою або над її підсистемою неможливо. Наприклад, з обчислювальних експериментів одержали, що параметри біосфери можуть залишатися в діапазоні, придатному для життя людини, якщо збільшити капіталовкладення у відновлення природних ресурсів у 2 рази, а боротьбу із забрудненням з 2000 р. – у 10 разів.

В 1983 р. був проведений обчислювальний експеримент для оцінки глобальних кліматичних наслідків ядерної війни при об-

міні ядерними ударами загальною потужністю 5000 мегатонн. Результати показали, що сотні мільйонів тонн пилу, піднятого в атмосферу, попіл, сажа від згорілих міст і лісів через 1,5–2 місяці утворять суцільну хмару, скрізь яку не зможе проникати світло. На Землі настане "ядерна зима" незалежно від того, в якій географічній точці станеться вибух, почнеться похолодання, замерзнуть усі джерела прісної води, екологічні зв'язки будуть розірвані, відбудеться повне вимирання наземної біоти, на переважній частині території інтенсивність радіації перевищуватиме максимально допустимий рівень, радіація доповниться рентгенівським випромінюванням Сонця, оскільки шар озону буде знищений. Біосфера, яка виникне після ядерної війни, буде мало придатною для життя людини.

Тут ми розглянули моделі глобальних процесів на основі системного підходу й побачили, що задача подібних моделей – давати оцінки зміні тенденцій розвитку в результаті тих чи інших прийнятих рішень, виявляти можливість небезпечних екологічних ситуацій. Зауважимо, що такі дослідження вимагають тісного співробітництва спеціалістів різних галузей науки: фізиків, математиків, біологів, кліматологів, економістів, програмістів, тобто міждисциплінарного підходу.

13.4. Задачі для самостійної роботи

13.1. Узагальнити модель гонки озброєнь між двома країнами з урахуванням рівня економічного розвитку. **Вказівка.** В математичну модель увести чотири фактори (змінні), що характеризують рівень видатків на озброєння в кожній із цих країн та рівні економічного розвитку цих країн.

При моделюванні скористатися припущеннями:

- країна озброюється тим сильніше, чим вищі видатки на озброєння в іншій країні;
- чим вищий рівень розвитку економіки країни, тим більше коштів на озброєння може виділити країна;
- чим вищий рівень витрат на озброєння, тим менша швидкість його росту;
- економіка країни розвивається тим швидше, чим вищий

рівень її розвитку і більші видатки на оборону, але занадто великі витрати на оборону можуть викликати сповільнення росту економіки країни.

Показати, що в системі існує кілька стаціонарних станів. Окремі з них дослідити на стійкість.

13.2. У моделі (13.2.2) знайти залежність чисельності армій $x(t)$, $y(t)$ від тривалості бойових дій. Переконатися, що висновки, одержані на основі загального інтеграла (13.2.4), залишаться правильними. Знайти моменти часу, коли $x(t) = 0$ (у випадку $C < 0$).

Оснастивши модель (13.2.1) відповідними значеннями коефіцієнтів c , a , b , d , початковими значеннями чисельності армій $x(0)$, $y(0)$ та деякими виразами для функцій $P(t)$, $Q(t)$, одержати числові значення для розв'язків $x(t)$, $y(t)$. Побудувати їх графіки та фазові траєкторії.

13.3. Побудувати математичну модель бойових дій між партизанськими загонами. Провести дослідження моделі у випадку, коли не враховуються втрати, не пов'язані з бойовими діями і жодна зі сторін не отримує підкріплення. Одержати умови перемоги кожної зі сторін. Виконати геометричну інтерпретацію отриманих результатів. **Вказівка.** Втрати партизанських підрозділів пропорційні, з одного боку, кількості самого підрозділу, а з іншого – кількості $y(t)$ бойових сил противника.

13.4. Побудувати математичну модель, що описує змішаний тип бойових дій, у яких беруть участь як регулярні армії, так і партизанські з'єднання. Провести дослідження моделі у випадку, коли не враховуються втрати, не пов'язані з бойовими діями і жодна зі сторін не дістає підкріплення. Одержати умови перемоги кожної зі сторін. Виконати геометричну інтерпретацію отриманих результатів. Показати, що модель боротьби регулярної армії з партизанами приводить до параболічності закону зміни їхньої чисельності.

13.5. Провести дослідження моделі Річардсона у випадках:

- а) $b_1 b_1 < a_1 a_2$, $p, q > 0$ (необмежена гонка озброєнь);
- б) $b_1 b_1 > a_1 a_2$, $p, q < 0$ (повне розброєння);
- в) $b_1 b_1 < a_1 a_2$, $p, q < 0$ (прогноз суттєво залежить від початкових умов).

Література: [24, 37, 49, 54, 91, 97].

Додаток

Елементи теорії диференціальних рівнянь у задачах математичного моделювання

1. Фазові портрети динамічних систем

1.1. Основні поняття

У багатьох випадках математичні моделі являють собою системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \alpha), \quad (1.1)$$

де $x = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, F – вектор-функція.

Такі рівняння описують залежність швидкості зміни деяких величин x , які називаються *фазовими змінними*, від значень цих же величин. Простір змінних $x = x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називається *фазовим простором* системи (1.1). Крім цього, в моделі можуть бути параметри α , що визначаються внутрішніми властивостями моделюваної системи, або зовнішніми факторами, що діють на систему.

Знаючи значення параметрів, можна при будь-яких початкових значеннях фазових змінних розв'язати аналітично або чисельно систему диференціальних рівнянь і в такий спосіб одержати траєкторію системи – залежність фазових змінних від часу. Відшукування розв'язку $x(t)$, що проходить при $t = t_0$ через задану точку $x = x_0$, називається задачею Коші.

Множина точок $x(t)$, $t \in [t_0, \infty)$, в фазовому просторі, де $x(t)$ – розв'язок (1.1), називається *фазовим портретом системи* (1.1).

Серед всіх можливих траєкторій системи (1.1) є траєкторії, що визначають якісну поведінку системи. Це особливі точки, що відповідають стаціонарним режимам системи і замкнені траєкторії (граничні цикли), що відповідають періодичним розв'язкам системи.

Стійкі точки рівноваги та стійкі цикли притягують близькі траєкторії, нестійкі – відштовхують. Тому виникає задача дослідження цих траєкторій на стійкість. Це питання розв'язує якісна теорія диференціальних рівнянь.

Інші питання стосуються зміни поведінки системи при зміні параметрів α системи (1.1). При зміні параметрів системи може змінитися її фазовий портрет. Якісна зміна фазового портрета називається *біфуркацією*. Тому виникають задачі визначення біфуркаційних (критичних) значень параметрів і опис явищ, які відбуваються при переході через ці критичні значення. Розбиття області параметрів системи на області з якісно різними типами фазових портретів називається *параметричним портретом системи*.

1.2. Структура особливої точки скалярного рівняння

Нехай маємо автономне скалярне диференціальне рівняння

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.2)$$

права частина якого неперервна і має неперервну похідну в області P зміни x . Якщо $f(x) \neq 0$, то \dot{x} або додатне, або від'ємне, тобто $x(t)$ або зростає або спадає.

Якщо $f(b) = 0$, то існує розв'язок $x = b$ системи (1.2), який називається *стаціонарним розв'язком* або положенням рівноваги.

Точка $x = b$ розбиває пряму P на два інтервали. Якщо стаціонарних точок декілька, то одержимо систему інтервалів. В кожному з цих інтервалів $f(x)$ має значення одного знаку.

Нехай b – довільне положення рівноваги рівняння (1.2), а (a, b) і (b, c) – два інтервали, що примикають до точки b справа та зліва. Кожна точка з цих інтервалів визначає єдину траєкторію. Якщо траєкторії, що виходять з (a, b) і (b, c) , наближаються при зростанні t до положення рівноваги $x = b$, то таке положення рівноваги називається *стійким*. Якщо ж ці траєкторії віддаляються від точки $x = b$, то положення рівноваги називається *нестійким*. Якщо одна з траєкторій наближається, а друга віддаляється від точки b , то положення рівноваги $x = b$ називається *напівстійким*.

Для того, щоб положення рівноваги $x = b$ було стійким, необхідно і досить, щоб $f(x)$ була додатною на інтервалі (a, b) і від'ємною на інтервалі (b, c) (рис. 1.1, а).

Для того, щоб точка рівноваги $x = b$ була нестійкою, необхідно й досить, щоб функція $f(x)$ була від'ємною на інтервалі (a, b) і додатною на інтервалі (b, c) (рис. 1.1, б).

Для того, щоб точка рівноваги $x = b$ була напівстійкою, необхідно й досить, щоб $f(x)$ мала один і той самий знак на двох інтервалах (a, b) і (b, c) (рис. 1.1, в).

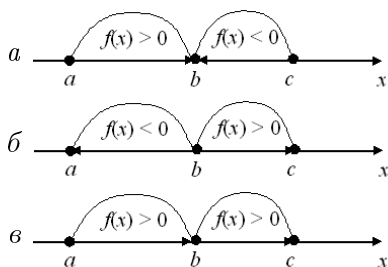


Рис. 1.1. Стійкість точки $x = b$

Визначити характер стійкості рівноваги $x = b$ можна ще і за значенням $f'(b)$: якщо $f'(b) < 0$, то положення рівноваги $x = b$ рівняння (1.2) – стійке, а при $f'(b) > 0$ – нестійке.

Наприклад, для логістичного рівняння $\dot{x} = x(1 - x)$ функція $f(x) = x(1 - x)$ має два корені $x = 0$, $x = 1$, тому фазова пряма розбивається на три інтервали. Фазовий портрет зображений на рис. 1.2. Положення $x = 0$ – нестійке, $x = 1$ – стійке.

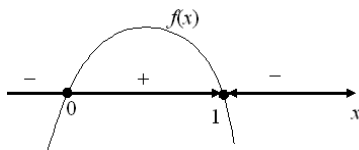


Рис. 1.2. Фазовий портрет логістичного рівняння

1.3. Аналіз моделей, що описуються системами двох автономних диференціальних рівнянь

Моделі, що складаються з двох диференціальних рівнянь, допускають якісне дослідження за допомогою методу фазової площини.

Розглянемо систему двох автономних звичайних диференціальних рівнянь загального вигляду

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1.3)$$

де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – неперервно диференційовні в деякій області G евклідової площини функції фазових змінних x, y . Область G може бути як обмеженою, так і необмеженою, наприклад, якщо $x(t), y(t)$ – чисельність популяції, то $x, y \geq 0$.

Площина з осями координат, на яких відкладаються значення змінних x, y , називається *фазовою площиною*. Фазовий портрет системи дозволяє дізнатися про характер поведінки траєкторій $x(t), y(t)$ без знання аналітичних розв'язків системи (1.3).

Побудова фазового портрета спрощується, якщо вдається одержати вираз для фазових траєкторій в аналітичному вигляді. Розділимо почленно друге рівняння системи (1.3) на перше:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (1.4)$$

Розв'язки цього рівняння $y = y(x, C)$, де C – стала інтегрування, дають сім'ю інтегральних кривих рівняння (1.4) і сукупність фазових траєкторій системи (1.3). Якщо такі розв'язки не вдається знайти, то для побудови фазових траєкторій можна скористатися методом ізоклін.

Для системи (1.3) характерні три типи фазових траєкторій на фазовій площині xy : точка, замкнена крива, незамкнена крива. Точкам відповідають положення рівноваги системи, тобто сталі розв'язки $x(t) = \bar{x}$, $y(t) = \bar{y}$, де \bar{x}, \bar{y} – константи. Замкнені криві на фазовій площині зображають розв'язки, що описуються періодичними функціями. Такі розв'язки називають періодичними. Незамкнені криві – це траєкторії без самоперетинів, які зображають неперіодичні розв'язки. Якщо умови задачі Коші для системи (1.3) виконані, що через кожну точку фазової площини проходить єдина фазова траєкторія. Щоб зобразити фазовий портрет системи (1.3), потрібно дослідити поведінку не всіх фазових кривих, а лише тих із них, які називаються особливими: положення рівноваги, граничні цикли й незамкнені криві, в яких хоча б одна напівтраєкторія є сепаратрисою деякого положення рівноваги.

Стационарні стани $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ системи (1.3) знаходяться з рівняння

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0,$$

Ці точки особливі для рівняння (1.4) тому, що напрям дотичної в цих точках до фазової траєкторії невизначений, оскільки

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=\bar{x}, y=\bar{y}} = \frac{Q(\bar{x}, \bar{y})}{P(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{0}{0}.$$

Граничні цикли системи (1.3) – це такі замкнені фазові криві, деякий окіл яких цілком заповнений траєкторіями, рухаючись якими фазова точка необмежено наближається до цієї замкненої кривої при $t \rightarrow \infty$ або при $t \rightarrow -\infty$.

Знаючи особливі точки, можна дослідити їх на стійкість. Для більшості систем, характер поведінки яких не змінюється при малих змінах самих рівнянь (такі системи називаються грубими), інформацію про тип поведінки розв'язків в околі стаціонарних точок можна одержати досліджуючи не вихідну, а спрощену лінеаризовану систему.

Якісне дослідження динамічної системи (1.3) полягає в тому, щоб одержати якісну картину розбиття фазової площини на траєкторії різних типів, тобто визначити топологічну структуру, яка залишається інваріантною (незмінною) в разі взаємно однозначного і взаємно неперервного перетворення площини в себе.

Наведемо класифікацію положень рівноваги для лінійної однорідної системи другого порядку.

1.4. Фазова площина лінійних систем диференціальних рівнянь

Розглянемо лінійну систему

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = cx + dy, \quad (1.5)$$

де a, b, c, d – задані дійсні числа.

З коефіцієнтів системи складемо матрицю $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. У випадку невивроженості матриці A , тобто коли $\det A = ad - bc \neq 0$ система (1.5) називається *простою*. В протилежному випадку система називається *складною*.

Спочатку вивчимо фазовий портрет простої системи (1.5). Така система має єдину особливу точку $x = 0, y = 0$. Будемо шукати

розв'язок (1.5) у вигляді $x = Ae^{\lambda t}$, $y = Be^{\lambda t}$. Підставляючи ці вирази в (1.5), для знаходження λ одержуємо систему

$$\begin{aligned}(a - \lambda)A + bB &= 0, \\ cA + (d - \lambda)B &= 0.\end{aligned}$$

Ця система має нетривіальний розв'язок, коли її визначник дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (1.6)$$

Рівняння (1.6) називається *характеристичним*. Корені рівняння (1.6) є власними значеннями матриці A . Вони повністю визначають якісну поведінку фазових кривих, як і властивість стійкості чи нестійкості стаціонарної точки. Ці корені можуть бути дійсними ($\lambda_1, \lambda_2 \in R$), причому або простими ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), або кратними ($\lambda_1 = \lambda_2$), або комплексно-спряженими $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$. Наведемо фазовий портрет для кожного з цих випадків.

а) Корені λ_1, λ_2 – дійсні різні. Оскільки у випадку простої системи $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, то розв'язок (1.5) має вигляд $(x(t), y(t)) = C_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} h_2$, де h_1, h_2 – власні вектори матриці A . Власні вектори лінійно незалежні, оскільки відповідають різним власним значенням $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тому утворюють базис на фазовій площині.

Зробимо в (1.5) заміну змінних

$$\xi = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \gamma x + \delta y. \quad (1.7)$$

Якщо для коефіцієнтів α, β та γ, δ взяти координати власних векторів матриці A , то систему (1.5) можна звести до системи

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta$$

або до диференціального рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2 \eta}{\lambda_1 \xi},$$

розв'язок якого

$$\eta = C \xi^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (1.8)$$

При $C = 0$ одержимо розв'язок $\eta = 0$. При $\xi = 0$ розв'язками є $\eta \in \mathbb{R}$. Сім'я кривих у базисі (ξ, η) визначає в залежності від знаків λ_1, λ_2 сім'ю парабол або гіпербол. Афінні перетворення (1.7) не змінюють характеру особливої точки. Заміна змінних приводить тільки до масштабування та повороту координатних осей.

Якщо корені λ_1, λ_2 – дійсні числа одного знака, то положення рівноваги – стійкий вузол при $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ (рис. 1.3, а) і нестійкий вузол при $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ (рис. 1.3, б). Вісь $O\xi$ буде спільною дотичною до фазових траєкторій, що є параболками (1.8). Фазовими траєкторіями є також півосі осей $O\xi, O\eta$.

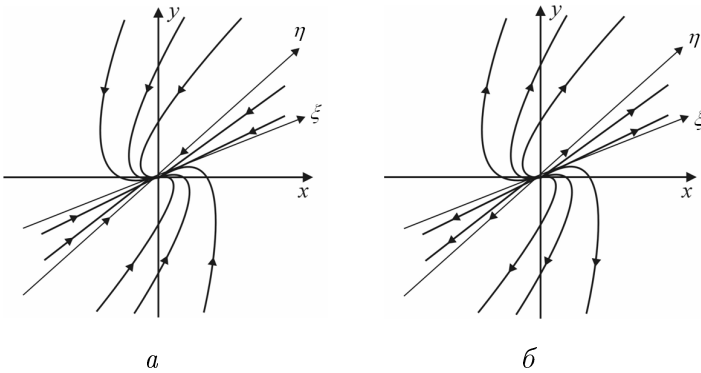


Рис. 1.3. Стійкий та нестійкий вузли

Якщо ж корені дійсні та різних знаків, то фазовий портрет складається з гіпербол (1.8) і півосей $O\xi, O\eta$. Ці півосі служать асимптотами траєкторій типу гіпербол і називаються сепаратрисами. Особлива точка є сідлом (рис. 1.4).

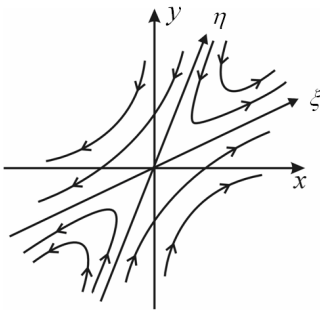


Рис. 1.4. Сідло

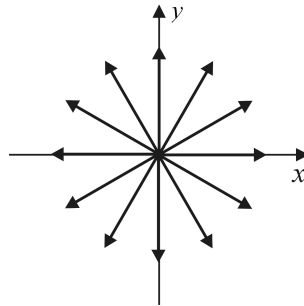


Рис. 1.5. Дикритичний вузол ($\lambda > 0$)

Для того, щоб визначити напрями осей ξ , η покладемо в (1.7) $\xi = 0$, $\eta = 0$ і дістанемо $y = -\frac{\alpha x}{\beta}$, $y = -\frac{\gamma x}{\delta}$. Кутові коефіцієнти сепаратрис можна визначити через параметри вихідної системи (1.5).

б) Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, то фазові траєкторії – це промені, що проходять через початок координат, причому рух по променю при $t \rightarrow \infty$ для $\lambda < 0$ відбувається до початку координат, а для $\lambda > 0$ – від початку координат. Фазовий портрет називається *дикритичним вузлом*. Цей факт має місце, коли матриця A має два лінійно незалежних власних вектори: $Ah_1 = \lambda h_1$, $Ah_2 = \lambda h_2$, тобто коли матриця A є діагональною, а значить, матриця $A - \lambda E$ є нуль-матрицею.

У випадку, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ та простір власних векторів одновимірний, тобто існує базис площини з власного вектора h_1 матриці A та приєднаного до нього вектора h_2 :

$$Ah_1 = \lambda h_1, \quad Ah_2 = \lambda h_2 + h_1,$$

тобто коли матриця A недіагональна і $\text{rang}(A - \lambda E) = 1$ заміною змінних (1.7) система (1.5) може бути зведена до вигляду

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi + \lambda\eta, \quad \frac{d\xi}{dt} = \lambda\xi.$$

Звідки одержуємо рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \lambda\eta}{\lambda\xi},$$

розв'язок якого $\eta = \frac{1}{\lambda}\xi \ln |\xi| + C\xi$, $C = \text{const}$, $\xi \neq 0$.

Якщо $\xi = 0$, то $\eta \neq 0$. Фазовий портрет у цьому випадку має вигляд, зображений на рис. 1.6, а точка рівноваги є виродженим вузлом.

Отже, щоб побудувати фазові криві системи (1.5) на фазовій площині у випадках вузла, сідла й виродженого вузла, потрібно спочатку знайти рівняння фазових траєкторій, що є прямими, і які проходять через початок координат. Ці прямі направлені вздовж власних векторів матриці A . У випадку вузла фазові криві

дотикаються до тієї прямої, що направлена вздовж власного вектора, який відповідає меншому за модулем власному значенню λ .

в) У випадку комплексних коренів $\lambda_1, \lambda_2 = \mu \pm i\nu$ система рівнянь (1.5) заміною (1.7) зводиться до рівнянь вигляду

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mu\eta + \nu\xi}{\mu\xi - \nu\eta}, \quad (1.9)$$

де μ, ν – дійсні числа.

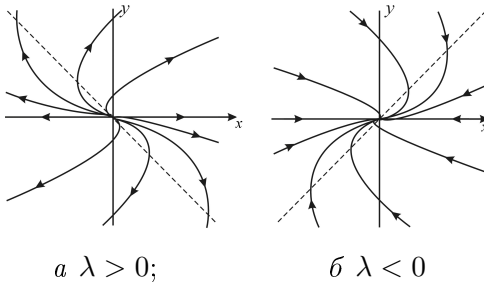


Рис. 1.6. Вироджені вузли: *a* – нестійкий; *б* – стійкий

Нехай дійсні частини власних значень дорівнюють нулю ($\mu = 0$). Тоді, як випливає з (1.9), фазові траєкторії – це кола. В цьому випадку положення рівноваги для системи (1.5) називається *центром* (рис. 1.7).

При $\mu \neq 0$ рівняння (1.9) визначають логарифмічні спіралі. Особлива точка в цьому випадку називається *фокусом*.

При $\mu < 0$ фокус стійкий, при $\mu > 0$ – фокус нестійкий (рис. 1.8).

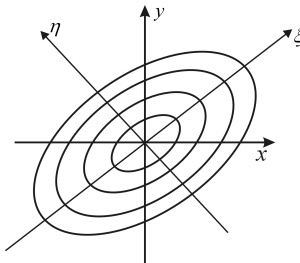
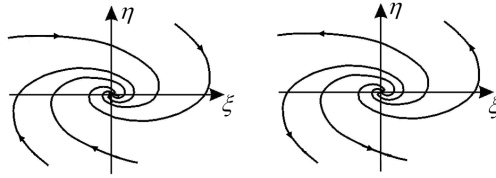


Рис. 1.7. Центр ($\text{Re}\lambda = 0$)



a $\mu < 0$; *b* $\mu > 0$

Рис. 1.8. *a* – стійкий фокус; *b* – нестійкий фокус

Розглянемо тепер випадок складної системи ($\det A = 0$), тоді з рівняння (1.6) маємо або $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$, або $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Нехай $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$, тоді для $\xi(t), \eta(t)$ одержуємо рівняння

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = 0,$$

тобто всі точки прямої $\xi = 0$ є точками рівноваги, а траєкторіями є прямі $\eta(t) = C$. В залежності від знака λ_1 рух по них відбувається до прямої $\xi = 0$ або від неї (рис. 1.9).

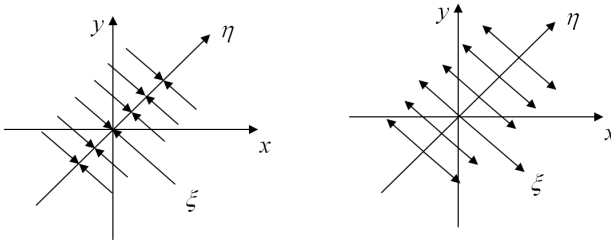


Рис. 1.9. Фазовий портрет у випадку $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$

У випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ фазовий портрет має вигляд, наведений на рис. 1.10.

Уведемо позначення: $\sigma = (a + d)$, $\Delta = ad - cb$, тоді характеристичне рівняння (1.6) набуде вигляду

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0.$$

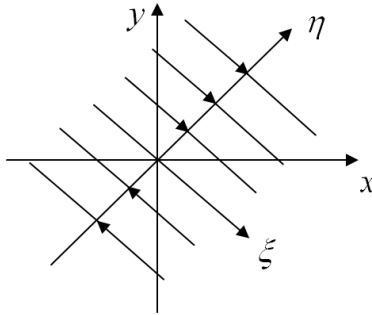


Рис. 1.10. Фазовий портрет системи (1.5) при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Характер коренів цього рівняння визначається співвідношенням між параметрами σ та Δ .

Розглянемо площину з координатами σ , Δ і відмітимо в ній області, які відповідають тому чи іншому типу коренів λ , а отже, й характеру поведінки фазових траєкторій.

Ці області утворюються параболою $\sigma^2 - 4\Delta = 0$ та осями координат $\Delta = 0$, $\sigma = 0$ (рис. 1.11).

Якщо виключити особливу точку $(0, 0)$, то з рис. 1.11 видно, що сідло може перейти в нестійкий або стійкий вузол, стійкий вузол може перейти в сідло або в стійкий фокус і т.д.

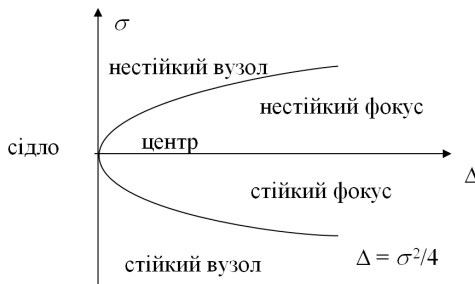


Рис. 1.11. Параметричний портрет системи (1.5)

2. Дослідження стійкості нелінійних систем

2.1 Нелінійна автономна система другого порядку

Розглянемо систему двох автономних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \quad (2.1)$$

Припустимо, що P, Q – неперервні функції своїх аргументів і мають неперервні похідні не нижче першого порядку.

Стационарні значення змінних \bar{x}, \bar{y} системи визначаються з алгебраїчних рівнянь

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad Q(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Розглянемо характер поведінки змінних при деяких невеликих відхиленнях їх початкових значень від стану рівноваги. Уведемо замість змінних x, y нові незалежні змінні ξ, η за формулами

$$x = \bar{x} + \xi, \quad y = \bar{y} + \eta. \quad (2.2)$$

Підставимо значення (2.2) в (2.1) і розкладемо в ряд Тейлора вирази $P(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta), Q(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta)$ в околі точки (\bar{x}, \bar{y}) . Одержимо

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= P'_x(\bar{x}, \bar{y})\xi + P'_y(\bar{x}, \bar{y})\eta + \varphi(\xi, \eta), \\ \frac{d\eta}{dt} &= Q'_x(\bar{x}, \bar{y})\xi + Q'_y(\bar{x}, \bar{y})\eta + \psi(\xi, \eta), \end{aligned} \quad (2.3)$$

Відкинемо в (2.3) нелінійні члени, які мають вищий за перший порядок малості. Одержимо лінійну систему з постійними коефіцієнтами

$$\frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta, \quad \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta, \quad (2.4)$$

де $a = P'_x(\bar{x}, \bar{y}), b = P'_y(\bar{x}, \bar{y}), c = Q'_x(\bar{x}, \bar{y}), d = Q'_y(\bar{x}, \bar{y})$.

Систему (2.4) називають *системою першого наближення*, або *лінеаризацією нелінійної системи* (2.1) в околі стаціонарної точки, або просто лінеаризованою системою в околі стаціонарної точки.

Матрицю

$$A = \begin{pmatrix} P'_x(\bar{x}, \bar{y}) & P'_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ Q'_x(\bar{x}, \bar{y}) & Q'_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}$$

називають *якобіаном* системи (2.3) в околі точки $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

Ляпунов показав, що в багатьох випадках аналіз стійкості стаціонарних станів нелінійної системи (2.1) можна замінити аналізом стійкості лінеаризованої системи (2.4), а саме справедлива теорема про лінеаризацію системи.

Теорема 2.1. *Якщо система першого наближення (2.4) є простою автономною системою ($\det A \neq 0$) і $\xi = 0$, $\eta = 0$ не є центром для системи (2.4), тобто якщо $\operatorname{Re}\lambda(A) \neq 0$, то в околі $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ нелінійна система (2.1) та її лінеаризація якісно еквівалентні.*

Іншими словами, якщо власні значення матриці A мають дійсні частини, відмінні від нуля, то фазові портрети системи (2.1) в околі (\bar{x}, \bar{y}) та системи (2.4) якісно еквівалентні. Така точка (\bar{x}, \bar{y}) називається *грубим станом рівноваги*. Критерієм грубості є відсутність власних чисел на уявній осі. Отже, у випадку грубої системи фазовий портрет системи (2.1) в околі \bar{x}, \bar{y} має той самий характер, що й фазовий портрет системи (2.4).

У випадку, коли особлива точка лінеаризованої системи – центр ($\lambda_{1,2} = \pm i\nu$, $\Delta > 0$, $\sigma = 0$), то особлива точка вихідної системи (2.1) є або центром, або фокусом.

Якщо хоча б один з коренів λ лінеаризованої системи дорівнює нулю, то для аналізу особливої точки системи (2.1) потрібно проводити додаткові дослідження, які вимагають врахування нелінійних доданків правої частини системи (2.3). Ці два останніх випадки дають *негрубі* стани рівноваги, причому необхідно розрізняти випадок чисто уявних і нульових власних чисел, оскільки алгоритм дослідження таких точок спокою мають істотні особливості. Їх властивості можуть бути змінені як завгодно малими збуреннями правих частин системи (2.1). Тобто при невеликих змінах нелінійних членів системи (2.3) може відбутися якісна зміна фазового портрета системи (2.1). Це явище називається *біфуркацією*.

2.2. Стійкість розв'язків диференціальних рівнянь

Розглянемо n -вимірну автономну систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (2.5)$$

де $t \in [t_0, \infty)$ і $f(x)$ – задана неперервно диференційована вектор-функція з n компонентами в деякій області D евклідового простору \mathbb{R}^n , тоді розв'язок задачі Коші з довільними початковими даними в області $\Omega = [t_0, \infty) \times D$ існує й має властивості єдиності.

Визначення 2.1. Розв'язок $x^*(t)$ системи (2.5) називають *стійким за Ляпуновим* (при $t \rightarrow \infty$), якщо

а) цей розв'язок існує на півосі $[t_0, \infty)$;

б) для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, що всі розв'язки $x(t)$ цієї системи, які задовольняють умову $\|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \delta$, визначені при $t \geq t_0$ і для них виконується нерівність

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Якщо хоча б одна з вимог означення 2.1 порушується, то розв'язок називається *нестійким*.

Визначення 2.2 Розв'язок $x^*(t)$ системи (2.5) називається *асимптотично стійким за Ляпуновим* (при $t \rightarrow \infty$), якщо:

а) цей розв'язок стійкий за Ляпуновим;

б) для всіх розв'язків $x(t)$ таких, що $\|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \delta$ виконується умова $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*(t)\| = 0$.

Надалі будемо вважати, що x^* є стаціонарним розв'язком системи (2.5), тобто $f(x^*) = 0$. Тоді задачу про стійкість можна звести до визначення характеру стійкості тривіального розв'язку лінійної системи зі сталими коефіцієнтами.

Запровадимо заміну $x(t) = x^* + y(t)$. Тоді з (2.5) одержимо систему

$$\dot{y} = f(x^* + y). \quad (2.6)$$

У випадку неперервно диференційовної функції $f(x)$, використовуючи формулу Тейлора, рівняння (2.6) можна переписати у вигляді

$$\dot{y} = Ay + g(y), \quad (2.7)$$

де $A = \left(\frac{\partial f_i(x^*)}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$ – матриця Якобі, а вектор-функція $g(y)$ має властивість $\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{g(y)}{\|y\|} = 0$.

Аналіз стійкості тривіального розв'язку (2.7) природно розпочати з вивчення лінеаризованої системи

$$\dot{y} = Ay. \quad (2.8)$$

Проблему асимптотичної стійкості системи (2.8) розв'язує така теорема.

Теорема 2.2. *Для асимптотичної стійкості будь-якого розв'язку системи (2.8) необхідно й досить, щоб кожен з коренів характеристичного рівняння $\det(A - \lambda E)$ мав від'ємну дійсну частину, тобто*

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

При цьому асимптотична стійкість будь-якого розв'язку неоднорідної системи (2.7) рівносильна стійкості (асимптотичній) розв'язку $y = 0$ однорідної системи (2.8), якщо $\|g(y)\| \leq C\|y\|^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$, тобто $g(y)$ має порядок вищий, ніж $\|y\|$.

Характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ має вигляд

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}. \quad (2.9)$$

Перевірку умови $\operatorname{Re} \lambda < 0$ можна здійснити, не знаходячи самих власних чисел матриці A . Для цього достатньо для полінома $P(\lambda)$ застосувати критерій Рауса–Гурвіца (існують й інші критерії перевірки умов $\operatorname{Re} \lambda < 0$, наприклад критерій Михайлова).

Критерій Рауса–Гурвіца. *Для того, щоб всі корені рівняння (2.9) мали від'ємні дійсні частини, необхідно й достатньо, щоб головні мінори матриці Гурвіца*

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

були додатними (вважається, що $a_k = 0$ при $k > n$).

Якщо серед коренів характеристичного рівняння (2.9) є хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений розв'язок $x(t) \equiv 0$ нестійкий, незалежно від $g(y)$.

Як бачимо, тип стійкості стаціонарного розв'язку x^* системи (2.5) повністю визначається у випадку, коли всі $\operatorname{Re} \lambda < 0$, або коли існує λ , для якого $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Відкритим залишається питання стійкості при $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, причому хоча б один з коренів має $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Метод лінеаризації в цьому випадку втрачає свою силу, оскільки на стійкість істотно починають впливати нелінійні члени в розкладі $f(x)$ за формулою Тейлора в околі точки $x = x^*$. Такі випадки досліджуються другим методом Ляпунова, який базується на застосуванні функцій Ляпунова.

Визначення 2.3. Неперервно диференційована в деякому околі U функція $V(x)$ називається функцією Ляпунова системи (2.5), якщо $V(x) > 0, \forall x \in U \setminus \{x^*\}, V(x^*) = 0$, а її похідна вздовж розв'язків системи (2.5)

$$\dot{V}(x) = (\operatorname{grad} V(x), f(x)) \leq 0 \quad \forall x \in U.$$

Теорема 2.3. Якщо в деякому околі U положення рівноваги $x = x^*$ системи (2.5) існує функція Ляпунова $V(x)$, то $x = x^*$ є стійким за Ляпуновим положенням рівноваги автономної системи (2.5).

Теорема 2.4. Якщо в деякому околі U положення рівноваги системи (2.5) існує така функція Ляпунова $V(x)$, що $\dot{V}(x) < 0 \forall x \in U \setminus \{x^*\}, \dot{V}(x^*) = 0$, то $x = x^*$ є асимптотично стійким положенням рівноваги автономної системи (2.5).

Приклад 2.1. Дослідити на стійкість положення рівноваги $(0, 0)$ системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3. \end{cases}$$

Провівши лінеаризацію системи одержимо, що для лінійної системи точка $(0, 0)$ є центром, тому невідома поведінка вихідної нелінійної системи.

Для цієї системи функцію Ляпунова можна взяти у вигляді

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2.$$

Оскільки при $\|x\| > 0$ $V(x_1, x_2) > 0$, $\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^4 - 2x_2^4 < 0$ і $V(0, 0) = 0$, $\dot{V}(0, 0) = 0$, то стаціонарний розв'язок $(0, 0)$ є асимптотично стійким. ▲

2.3. Стійкість лінійних систем зі змінними коефіцієнтами

Для лінійних систем зі змінними коефіцієнтами вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.10)$$

($x = (x_1, \dots, x_n)$ – n -вимірний вектор-стовпчик, а $A(t)$ – квадратна матриця, складена з коефіцієнтів $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, \dots, n$) не існує загальних критеріїв стійкості. Проте можна довести, що розв'язки лінійної диференціальної системи (2.10) або всі одночасно стійкі, або нестійкі (для нелінійної системи це не так). Тому, виходячи з цього, лінійну систему (2.10) називають стійкою, асимптотично стійкою або нестійкою в залежності від того, чи є її тривіальний розв'язок стійким, асимптотично стійким або нестійким.

Існують лише окремі ознаки стійкості таких систем. Наведемо деякі з них.

Позначимо через $\text{sp}A(t)$ слід матриці $A(t)$ (сума діагональних елементів).

Теорема 2.5. *Для стійкості (2.10) необхідно, щоб $\int_{t_0}^t \text{Sp}A(\tau)d\tau$ був обмежений зверху при $t \geq t_0$, тобто повинна існувати стала M , така, щоб при $t \geq t_0$*

$$\int_{t_0}^t \text{Sp}A(\tau)d\tau \leq M.$$

Теорема 2.6. *Для асимптотичної стійкості розв'язку системи (2.10) необхідно, щоб*

$$\int_{t_0}^t \text{Sp}A(\tau)d\tau \rightarrow -\infty \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Приклад 2.2. Розглянемо систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(t+2) + x_2 e^t, \\ \dot{x}_2 &= x_1 \sin t + x_2(e^{-t} + 3).\end{aligned}$$

Слід матриці цієї системи $\text{Sp}A(t) = t - 1 + e^{-t}$. Знайдемо

$$\int_0^t \text{Sp}A(\tau) d\tau.$$

$$\int_0^t \text{Sp}A(\tau) d\tau = \frac{t^2}{2} - t - e^{-t} + 1.$$

Цей вираз необмежений зверху, а отже, система нестійка.
Для систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.11)$$

де A – стала ($n \times n$)-матриця, $B(t)$ неперервна й обмежена при $t \geq t_0$, справедливі такі теореми. \blacktriangle

Теорема 2.7. *Якщо система $\frac{dx}{dt} = Ax$ є асимптотично стійкою і $\|B(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то збурена системи (2.11) також є асимптотично стійкою.*

Теорема 2.8. *Якщо система $\frac{dx}{dt} = Ax$ є стійкою і $\|B(t)\| \in C[t_0, \infty)$, $\int_{t_0}^{\infty} \|B(\tau)\| d\tau < \infty$, то збурена системи (2.11) є стійкою.*

Для лінійної системи (2.10), де $A(t)$ визначена та неперервна при $t \in (-\infty, \infty)$ і є періодичною функцією: $A(t+\omega) = A(t)$, $\omega > 0$, $t \in (-\infty, \infty)$, справедлива така теорема.

Теорема 2.9. *Для асимптотичної стійкості системи (2.10) з ω -періодичною матрицею $A(t)$ необхідно й досить, щоб всі мультиплікатори ρ були розміщені в одиничному колі: $|\rho| < 1$. Для стійкості необхідно й досить, щоб мультиплікатори належали одиничному колу ($|\rho| \leq 1$), причому мультиплікаторам, що лежать на одиничному колі, відповідають прості елементарні дільники.*

Нагадаємо, що мультиплікаторами називаються власні числа матриці $Y(\omega)$, де $Y(t)$ – фундаментальна матриця системи (2.10), нормована при $t = t_0$: $Y(t_0) = E$, де E – одинична матриця.

3. Граничні цикли

Вище розглянуто особливі точки та поведінку інтегральних кривих систем диференціальних рівнянь. Коли особлива точка є центром, то інтегральні криві утворюють множину неперетинних замкнених кривих навколо центра. Фізично це відповідає консервативним системам. Але в деяких неконсервативних системах існують замкнені траєкторії або граничні цикли.

Граничний цикл – це замкнена фазова траєкторія, в якій існує окіл, що цілком заповнений фазовими траєкторіями, які необмежено наближаються до замкненої траєкторії при $t \rightarrow \infty$ або при $t \rightarrow -\infty$. Граничний цикл системи на площині, як і стаціонарна точка, може бути стійким або нестійким.

Граничний цикл називається стійким (*атрактором*), якщо траєкторії наближаються до нього тільки при $t \rightarrow \infty$, і нестійким (*репеллером*), якщо траєкторії наближаються до нього тільки при $t \rightarrow -\infty$.

Можливі ситуації, коли траєкторії намотуються на замкнену криву при деяких початкових значеннях і розмотуються – при інших. Такі цикли називаються напівстійкими.

Для системи рівнянь $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$, встановлення існування граничного циклу в загальному випадку є досить складною задачею. Для виявлення існування граничного циклу часто користуються принципом кільця.

Теорема 3.1. *Якщо існують дві константи r_0, r_1 ($r_0 < r_1$) такі, що для $x^2 + y^2 = r_0^2$ вираз $xP(x, y) + yQ(x, y) \geq 0$, а для $x^2 + y^2 = r_1^2$ вираз $xP(x, y) + yQ(x, y) \leq 0$ і в кільці $r_0^2 \leq x^2 + y^2 \leq r_1^2$ немає особливих точок, то в цьому кільці знаходиться стійкий граничний цикл. Якщо для $x^2 + y^2 = r_0^2$ вираз $xP(x, y) + yQ(x, y) \leq 0$, а для $x^2 + y^2 = r_1^2$ вираз $xP(x, y) + yQ(x, y) \geq 0$, то в кільці існує нестійкий граничний цикл.*

Приклад 3.1. Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \quad \frac{dy}{dt} = x + y(x^2 + y^2 - 1).$$

Знаходимо $xP + yQ = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)$. Тоді якщо $x^2 + y^2 \geq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), то $xP + yQ > 0$; якщо $x^2 + y^2 \leq 1 - \varepsilon$, то $xP + yQ < 0$. Тому в кільці $1 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 1 + \varepsilon$ існує нестійкий граничний цикл.

Існування граничного циклу в цьому прикладі можна показати, ще й обчисливши

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) &= 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x(-y + x(x^2 + y^2 - 1)) + \\ &+ 2y(x + y(x^2 + y^2 - 1)) = 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1). \end{aligned}$$

Нехай точка знаходиться на колі $x^2 + y^2 = r^2$, тоді

$$\frac{d}{dt}r^2 > 0 \quad \text{при} \quad r \geq 1 + \varepsilon; \quad \frac{d}{dt}r^2 < 0 \quad \text{при} \quad r < 1 - \varepsilon.$$

Отже в кільці $1 - \varepsilon < x^2 + y^2 < 1 + \varepsilon$ існує граничний цикл. Розв'язки вихідної системи через кола $x^2 + y^2 = 1 + \varepsilon$, $x^2 + y^2 = 1 - \varepsilon$ виходять з цього кільця. \blacktriangle

Приклад 3.2. Розглянемо систему

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - \mu^2), \quad \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2 - \mu^2), \quad \mu > 0.$$

Покажемо, що вона має граничний цикл. Для цього перейдемо до полярних координат

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Одержимо систему рівнянь

$$\dot{r} = r(r^2 - \mu^2), \quad \dot{\varphi} = 1,$$

розв'язок якої

$$r^2 = \frac{\mu^2}{1 - Ce^{2\mu^2 t}}, \quad \varphi = t + \varphi_0.$$

При $C = 0$ $r(t) = \mu$ — коло радіусом μ .

При $C > 0$ $r(t)$ монотонно зростає від μ до ∞ при зростанні t .

При $C < 0$ $r(t)$ монотонно спадає від μ до 0 при $t \rightarrow \infty$.

Отже, замкнена крива $r(t) = \mu$ є граничною траєкторією.

Іноді можна встановити, що граничних циклів немає; при цьому стають корисними критерії Бендиксона та Дюлака. ▲

Критерій Бендиксона. Якщо вираз $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ не змінює знак в деякій однозв'язній області Ω площини (x, y) , то в цій області не можуть існувати замкнені траєкторії.

Критерій Дюлака. Нехай $\varphi(x, y)$ – деяка однозначна й диференційовна функція і нехай вираз

$$H(x, y) = \frac{\partial(\varphi P)}{\partial x} + \frac{\partial(\varphi Q)}{\partial y}$$

не дорівнює тотожно нулю і є знаковизначеним (невід'ємним або недодатним) у деякій області Ω площини (x, y) , що обмежена неперервними кривими. Тоді:

1) якщо область Ω – однозв'язна, то в ній не існує замкнених контурів, які складені з траєкторій системи (2.1), зокрема граничних циклів;

2) якщо Ω – двозв'язна кільцева область, то в ній не може бути більше одного замкненого контура.

Приклад 3.3. Розглянемо модель взаємодії двох популяцій, які конкурують між собою за спільні й обмежені ресурси:

$$\dot{x} = (\alpha_1 - \beta_1 x)x - \gamma_1 xy,$$

$$\dot{y} = (\alpha_2 - \beta_2 y)y - \gamma_2 xy,$$

де $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$, – додатні параметри.

Покажемо, що в цій системі немає граничних циклів.

Застосуємо критерій Дюлака, при цьому функцію φ візьмемо у вигляді $\varphi(x, y) = \frac{1}{xy}$.

Одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{xy} ((\alpha_1 - \beta_1 x)x - \gamma_1 xy) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{xy} ((\alpha_2 - \beta_2 y)y - \gamma_2 xy) \right) = \\ & = \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 - \beta_1 x - \gamma_1 y) + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_2 - \beta_2 y - \gamma_2 x) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\beta_1}{y} - \frac{\beta_2}{x} < 0 \quad \text{при } x, y > 0.$$

Отже, в області $x > 0, y > 0$ для моделі двох конкурентів не існує граничних циклів. ▲

4. Біфуркація динамічних систем

Нехай задана система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y, \mu), \quad (4.1)$$

де μ – деякий числовий параметр.

При зміні параметра μ система (4.1) може поводитися двоюко:

1) зміна параметра μ в деякій області не змінює якісно картину фазового портрета системи;

2) при проходженні параметра μ через деяке значення $\mu = \mu^*$ відбувається якісна зміна фазового портрета. В системі при $\mu = \mu^*$ відбувається біфуркація.

Біфуркація динамічної системи – це якісна зміна фазового портрета при зміні параметра μ , якщо параметр μ проходить значення μ^* . Точка біфуркації – це значення параметра $\mu = \mu^*$, при якому фазовий портрет терпить біфуркацію.

Два фазових портрети якісно однакові (топологічно еквівалентні), якщо існує взаємооднозначне і взаємонеперервне відображення, що переводить один фазовий портрет в інший. Вузли та фокуси (однакової стійкості) топологічно еквівалентні.

Область параметрів, в якій зберігається якісна картина фазових портретів системи, називається *областю структурної стійкості*.

Отже, перебудова фазових портретів відбувається на межах областей, які складають параметричний портрет системи В більшості випадків, якщо простір параметрів m -вимірний, то біфуркаційні границі являють собою гладкі підмножини в \mathbb{R}^m .

Приклад 4.1. Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = x + \mu y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y. \quad (4.2)$$

Точка $(0, 0)$ для цієї системи стаціонарна. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & \mu \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 - \nu = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 + \mu.$$

При $\mu < -1$ особлива точка $(0, 0)$ є центром (власні значення чисто уявні), при $\mu > -1$ особлива точка є сідлом (власні значення дійсні різних знаків), при $\mu = -1$ власні значення $\lambda_{1,2} = 0$ і рівняння для фазових кривих має вигляд $\frac{dy}{dx} = 1$. Тому маємо біфуркаційну картину, зображену на рис. 4.1.

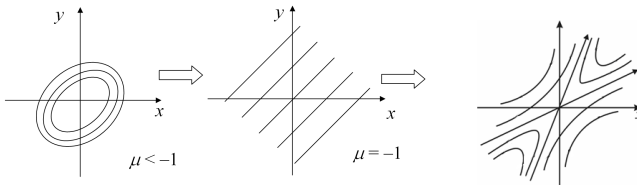


Рис. 4.1. Біфуркація системи (4.2)

Система (4.2) має дві області структурної стійкості: при $\mu < -1$ фазовий портрет – стійкий центр, при $\mu > -1$ фазовий портрет – сідло. Ці області розділені точкою біфуркації $\mu = \mu^* = -1$. При переході значення μ від $-\infty$ до ∞ при $\mu^* = -1$ відбувається втрата стійкості точки $(0, 0)$. Біфуркація втрати стійкості точки спокою в лінійних системах приводить до того, що фазові траєкторії прямують до нескінченності. Для нелінійних систем така біфуркація супроводжується появою у системи нових інваріантних множин.

Біфуркація народження циклу. Розглянемо динамічну систему (4.1) на площині, що залежить від параметра μ . Зміною цього параметра можна добитися появи двох комплексноспряжених власних чисел матриці Якобі, яка обчислена в положенні рівноваги, так що $\text{Re}\lambda_{1,2} = 0$. В цьому випадку система структурно нестійка, і при збуренні параметра μ може відбутися перебудова фазового портрета.

Біфуркація положення рівноваги, що відповідає появі власних чисел $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, називається *біфуркацією Андронова-Хопфа* або *біфуркацією народження циклу*.

Приклад 4.2. Розглянемо двовимірну систему Хопфа

$$\dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2), \quad \dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2), \quad (4.3)$$

Ця система має положення рівноваги $x = 0, y = 0$ при всіх значеннях параметра μ .

Матриця Якобі для точки $(0, 0)$ має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A $\lambda_{1,2} = \mu \pm i$. У системі (4.3) перейдемо до полярних координат r, φ за формулами $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

Одержимо просту систему двох незалежних рівнянь вигляду

$$\dot{r} = r(\mu - r^2), \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Розв'язок другого рівняння $\varphi = t + \varphi_0$, де φ_0 – початкове значення φ при $t = 0$.

Перше рівняння (яке розглядається тільки при $r \geq 0$) має положення рівноваги $r_0 = 0$ для всіх значень параметра μ . Це положення рівноваги при $\mu < 0$ асимптотично стійке за першим наближенням, тому $r(t) \rightarrow r_0$ при $t \rightarrow \infty$ і прямування є експоненціальним.

Початок координат $(0, 0)$ для системи (4.3) є стійким фокусом. Поведінка коренів характеристичного рівняння показана на рис. 4.2.

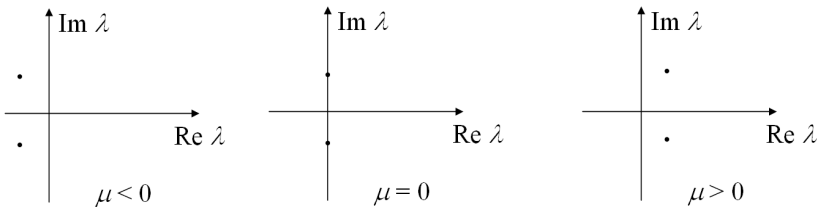


Рис. 4.2. Поведінка характеристичних коренів системи (4.3)

При $\mu = 0$ особлива точка є центром, а лінеаризована система – стійкою. Але для нелінійної системи (4.3) висновок про стійкість

не можна зробити на основі лінеаризації в околі стаціонарної точки. При $\mu = 0$ маємо

$$\frac{dr}{dt} = -r^3 \Rightarrow \frac{dr}{r^3} = -dt \Rightarrow r(t) = \frac{1}{\sqrt{2t + C}} \Rightarrow r(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

При $\mu > 0$ особлива точка $(0, 0)$ є нестійким фокусом, оскільки характеристичні корені мають $\text{Re}\lambda > 0$ (рис. 4.2). Але з'являється ще одна особлива точка $r = \sqrt{\mu}$. Оскільки при $0 < r < \sqrt{\mu}$ похідна $\frac{dr}{dt} > 0$, а при $r > \sqrt{\mu}$ маємо $\frac{dr}{dt} < 0$, то стаціонарна точка $r = \sqrt{\mu}$ (коло радіусом $\sqrt{\mu}$) стійка, тобто одержуємо стійкий граничний цикл. Всі орбіти, що починаються всередині чи зовні цього граничного циклу (за винятком початку координат), прямують до граничного циклу при $t \rightarrow \infty$. Описана ситуація є типовим випадком біфуркації Андронова–Хопфа. Біфуркаційна діаграма системи (4.3) зображена на рис. 4.3.

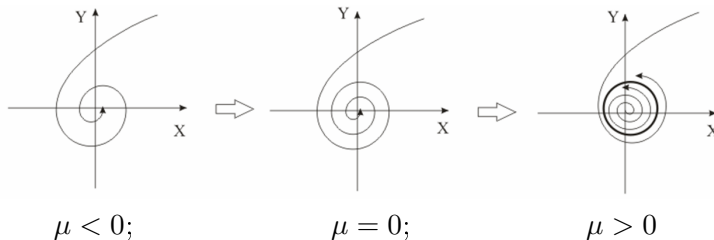


Рис. 4.3. Біфуркація Андронова–Хопфа в системі (4.3) (м'яка втрата стійкості)

Отже, перехід параметра μ через біфуркаційне значення $\mu = \mu^* = 0$ зумовлює якісну зміну фазового портрета системи (4.3). При цьому втрата стійкості особливої точки $(0, 0)$ супроводжується появою стійкого граничного циклу – кола $x^2 + y^2 = \mu$. При цьому розмір циклу (радіус кола) зростає в міру віддалення параметра μ від свого біфуркаційного значення $\mu = \mu^* = 0$. Такий варіант біфуркації називається *м'яким породженням циклу*. При малих μ система залишається в околі початку координат. Це некатастрофічна втрата стійкості, тому що, надавши параметру μ від'ємних значень, можемо систему повернути в початок координат. Якщо б при $\mu < 0$ система мала нестійкий граничний цикл,

який зникає при переході параметра μ через значення $\mu^* = 0$ в напрямку від від'ємних до додатних значень, то це був би інший тип біфуркації Андронова–Хопфа. При $\mu = 0$ тривіальне положення рівноваги нелінійно нестійке. При $\mu > 0$ положення $(0, 0)$ – нестійкий фокус. При $\mu \neq 0$ нульове положення рівноваги має той самий характер стійкості, що й система (4.3). Але в цьому випадку система при малих $\mu > 0$ відходить далеко від початку координат. Це є жорстка втрата стійкості (катастрофічна). Надавши параметру μ від'ємних значень, систему вже можна не повернути в положення рівноваги, оскільки вона могла вже покинути область притягання. Така біфуркаційна картина зображена на рис. 4.4.

В обох випадках відбувається втрата стійкості тривіального положення рівноваги, але в першому випадку положення рівноваги замінюється стійким граничним циклом. В другому випадку басейн притягання нульового положення рівноваги обмежений нестійким циклом і зменшується при наближенні параметра μ до нуля, далі система виводиться з околу точки $(0, 0)$.

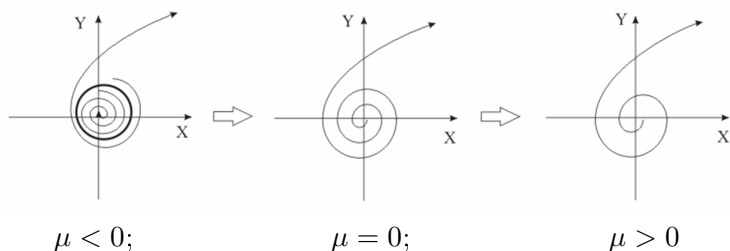


Рис. 4.4. Біфуркація Хопфа (жорстка втрата стійкості)

Задачі для самостійної роботи

1. Знайти особливі точки, з'ясувати їх характер. Побудувати фазовий портрет системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 44x - 4x^2 - 3xy, \\ \frac{dy}{dt} = 31x - 2y^2 - 3xy. \end{cases}$$

2. Побудувати фазовий портрет рівняння:

- а) $x'' - 8x + 2x^3 = 0$; б) $x'' + 4x - x^2 = 0$; в) $x'' + x + x^3 = 0$;
 г) $x'' - \varepsilon x'(1 - x^2 - (x')^2) + x = 0$; д) $x'' + \sin x = 0$.

3. Дослідити на стійкість положення рівноваги математичного маятника з тертям, рух якого описується рівнянням $\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 \sin x = 0$, $k > 0$. Зобразити глобальний фазовий портрет рівняння нелінійного маятника.

4. Побудувати матрицю Якобі для системи

$$\frac{dx}{dt} = ax - pxy, \quad \frac{dy}{dt} = -by + qxy.$$

Знайти якобіан в стаціонарних точках та власні значення якобіана.

5. На основі аналізу положень рівноваги зобразити фазовий портрет системи:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2xy, \\ \frac{dy}{dt} = 1 + y - x^2 + y^2; \end{array} \right. \quad \text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x(1 + x^2 - 2y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -y(1 - 4x^2 + 3y^2); \end{array} \right. \\ \text{в) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x(3 - x - y), \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 1); \end{array} \right. \quad \text{г) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 1 - xy, \\ \frac{dy}{dt} = py \left(x - \frac{2}{1 + y} \right). \end{array} \right. \end{array}$$

6. Знайти всі положення рівноваги і дослідити на стійкість систему

$$\frac{dx}{dt} = \ln \left(\frac{y^2}{4} - x \right), \quad \frac{dy}{dt} = x - y - 2.$$

7. Застосувати теореми про лінеаризацію та провести класифікацію нерухомих точок системи:

$$\frac{dx}{dt} = x - y + xy, \quad \frac{dy}{dt} = x - y - y^2.$$

8. За допомогою теореми Ляпунова про стійкість за лінійним наближенням дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи:

$$\text{а) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x - \ln(1 + y), \\ \frac{dy}{dt} = e^x + \sin(x + y) - 1; \end{array} \right. \quad \text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x + \sin^2 y, \\ \frac{dy}{dt} = y \cdot \cos^2 x; \end{array} \right.$$

$$\text{в) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \operatorname{tg}(z - y) - 2x, \\ \frac{dy}{dt} = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y, \\ \frac{dz}{dt} = 3y; \end{array} \right. \quad \text{г) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = y + x^3, \\ \frac{dy}{dt} = x + y^3. \end{array} \right.$$

9. Визначити, при яких значеннях параметрів нульовий розв'язок системи стійкий:

$$\text{а) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \ln(e + ax) - e^x, \\ \frac{dy}{dt} = bx + 2 \operatorname{tg} y; \end{array} \right. \quad \text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 3e^{-x} - \sqrt{9 + ay}, \\ \frac{dy}{dt} = \ln(1 + 24x + ay). \end{array} \right.$$

10. Довести, що для асимптотичної стійкості системи

$$\frac{dx}{dt} = -a_1x + b_1z, \quad \frac{dy}{dt} = b_2x - a_2y, \quad \frac{dz}{dt} = b_3y - a_3z,$$

де $a_i, b_i, i = 1, 2, 3$, – додатні числа, необхідно й досить, щоб виконувалася умова $a_1a_2a_3 > b_1b_2b_3$.

11. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок рівняння, використовуючи критерій Рауса–Гурвіца

$$\frac{d^5x}{dt^5} + 3\frac{d^4x}{dt^4} + 15\frac{d^3x}{dt^3} + 24\frac{d^2x}{dt^2} + 10\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

12. При яких значеннях параметра k система, що описується диференціальними рівняннями, буде стійкою:

$$\begin{array}{l} \text{а) } \frac{d^4x}{dt^4} + 4\frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + kx = b; \\ \text{б) } \frac{d^3x}{dt^3} + 2\frac{d^2x}{dt^2} + 3\frac{dx}{dt} + (k + 2)x = kb. \end{array}$$

13. Побудувати функції Ляпунова, що задовольняють умови стійкості теореми Ляпунова:

$$\text{а) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -2x^5 - 2y^3, \\ \frac{dy}{dt} = x - y^3; \end{array} \right. \quad \text{б) } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = -x^5 - xy^4, \\ \frac{dy}{dt} = 4x^3y^2 - y^5. \end{array} \right.$$

14. За допомогою функції Ляпунова $V = ax^2 + bxy + cy^2$, $a > 0$, $ac > b^2$, дослідити стійкість тривіального положення рівноваги для системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x^3 + y \sin x, \\ \frac{dy}{dt} = -y - x^2y - x \sin x. \end{cases}$$

15. Показати, що системи рівнянь не мають граничних циклів:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x + y), \\ \frac{dy}{dt} = y^2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy, \\ \frac{dy}{dt} = 1 + y - x^2 - y^2. \end{cases}$$

16. Для системи знайти граничний цикл та дослідити його на стійкість

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin(x^2 + y^2). \end{cases}$$

17. Довести, що при $\mu = 0$ система зазнає бифуркації Хопфа:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\mu x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y^3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - x^3, \\ \frac{dy}{dt} = -x + (\mu - x^2)y; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = \mu y - x - y^3. \end{cases}$$

18. Довести, що система

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t^2}{t^2 + 2}x + \frac{\ln(t + 1)}{t + 1}y, \quad \frac{dy}{dt} = (\arctg t - \pi)y$$

асимптотично нестійка.

19. Дослідити бифуркацію у системі

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \mu x - y + x(x^2 + y^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \mu y + y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Список рекомендованой литературы

Основна литература

1. Введение в математическое моделирование: учеб. пособие для вузов / [В.Н. Ашихмин, М.Г. Бояршинов, М.Б. Гитман и др.] ; под ред. П.В. Трусова – М. : Интернет инжиниринг, 2000. – 336 с.
2. Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования : [сборник статей] / АН СССР ; [редкол. : И.М. Макаров и др.] – М. : Наука, 1988. – 169 с.
3. Коробейников В.П. Принципы математического моделирования / В.П. Коробейников. – Владивосток : Дальнаука, 1996. – 177 с.
4. Краснощеков П.С. Принципы построения моделей / П.С. Краснощеков, А.А. Петров. – М. : Фазис, 2000. – 412 с.
5. Маликов Р.Ф. Основы математического моделирования : учеб. пособие / Р.Ф. Маликов. – М. : Горячая линия-Телеком, 2010. – 368 с.
6. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа / Н.Н. Моисеев. – М. : Наука, 1981. – 488 с.
7. Мышкис А.Д. Элементы теории математических моделей / А.Д. Мышкис. – М. : КомКнига, 2007. – 192 с.
8. Неймарк Ю.И. Математические модели в естествознании и технике : учебник / Ю.И. Неймарк. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2004. – 401 с.
9. Самарский А.А. Математическое моделирование : Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М. : Наука. Физматлит, 2001. – 320 с.
10. Станжицкий О.М. Основы математического моделирования : начальный посібник / О.М. Станжицкий, Є.Ю. Таран, Л.Д. Гординський. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2006. – 95 с.
11. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс : учеб. пособие / Ю.Ю. Тарасевич. – М. : Либроком, 2013. – 148 с.

Додаткова література

12. Александров А.Ю. Сборник задач и упражнений по теории устойчивости / А.Ю. Александров, А.В. Екимов. – Иркутск : Изд-во Иркутского гос. ун-та, 2008. – 162 с.
13. Алиев А.В. Математическое моделирование в технике / А.В. Алиев, А.В. Мищенко. – М. : ИКИ, 2012. – 476 с.

14. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 208 с.
15. Андриевский Б.Р. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab / Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков. – СПб. : Наука, 2001. – 285 с.
16. Аргатов И.И. Введение в асимптотическое моделирование в механике : учеб. пособие / И.И. Аргатов. – СПб. : Политехника, 2004. – 302 с.
17. Арзамасцев А.А. Математическое и компьютерное моделирование : учеб. пособие / А.А. Арзамасцев. – Тамбов : Издательский дом ТГУ, 2010. – 257 с.
18. Арнольд В.И. "Жесткие" и "мягкие" математические модели / В.И. Арнольд. – М. : Изд-во МУНМО, 2011. – 32 с.
19. Асанов А.З. Введение в математическое моделирование динамических систем : учеб. пособие / А.З. Асанов. – Казань : Изд-во Казан. гос. ун-та, 2008. – 220 с.
20. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – М. : Ин-т компьютерных исследований, 2003. – 368 с.
21. Барботько А.И. Основы теории математического моделирования : учеб. пособие / А.И. Барботько, Л.О. Гладышкин. – Старый Оскол : ООО "ТНТ", 2008. – 212 с.
22. Бахвалов Ю.А. Математическое моделирование : учеб. пособие / Ю.А. Бахвалов. – Новочеркасск : Изд-во ЮРГТУ, 2010. – 141 с.
23. Башкирцева И.А. Компьютерное моделирование популяционной динамики / И.А. Башкирцева. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2009. – 88 с.
24. Белотелов Н.В. Сложность. Математическое моделирование. Гуманитарный анализ : Исследование исторических, военных, социально-экономических и политических процессов / Н.В. Белотелов, Ю.И. Бродский, Ю.Н. Павловский. – М. : Книжный дом "Либроком", 2009. – 320 с.
25. Белоцерковский О.М. Компьютерные модели и прогресс медицины / О.М. Белоцерковский, А.С. Холодов. – М. : Наука, 2001. – 302 с.
26. Березовская Ф.С. Дифференциальные уравнения в математических моделях : учеб. пособие / Ф.С. Березовская, Г.П. Карев. – М. : Изд-во МГИР, 2000. – 136 с.
27. Бігун Я.Й. Математичне моделювання екологічних, економічних і соціальних процесів : навч. посібник / Я.Й. Бігун. – Чернівці : Рута, 2005. – 80 с.
28. Бордовский Г.А. Физические основы математического моделирования / Г.А. Бордовский, А.С. Кондратьев, А.Д.Р. Чоудери. – М. : Издательский центр "Академия", 2005. – 320 с.

29. Братусь А.С. Динамические системы и модели биологии / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. – М. : Физматлит, 2010. – 400 с.
30. Будақ В.М. Сборник задач по математической физике: учеб. пособие для студентов университетов / В.М. Будақ, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. 4-е изд. испр. – М. : Физматлит, 2004. – 689 с.
31. Бурак Я.Й. Фізико-математичне моделювання складних систем / Я.Й. Бурак. – Львів : Сполом, 2004. – 264 с.
32. Ванько В.И. Вариационные принципы и задачи математической физики : учеб. пособие / В.И. Ванько. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 191 с.
33. Васин В.В. Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу / В.В. Васин, Л.Б. Ряшко. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2003. – 160 с.
34. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра. – М. : Наука, 1976. – 288 с.
35. Галанин Н.П. Методы численного анализа математических моделей / Н.П. Галанин, Е.Б. Савенков. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 591 с.
36. Гельфанд И.М. Очерки о совместной работе математиков и врачей / И.М. Гельфанд, Б.И. Розенфельд, М.А. Шифрин. – М. : Наука, 1989. – 270 с.
37. Горстко А.Б. Введение в моделирование эколого-экономических систем / А.Б. Горстко, Г.А. Угольницкий. – Ростов н/Д : Изд-во Ростовского ун-та, 1990.- 112 с.
38. Григорків В.С. Моделювання економіки : навчальний посібник / В.С. Григорків. – Чернівці : ЧНУ, 2009. – 320 с.
39. Гроп Д. Методы идентификации систем / Д. Гроп. – М. : Мир, 1979. – 302 с.
40. Давыдова М.А. Математические модели гидродинамики : учеб. пособие / М.А. Давыдова. – М. : Изд-во МГУ, 2011. – 64 с.
41. Дроздов Н.Д. История и методология прикладной математики : учеб. пособие / М.А. Дроздов. – Тверь : Изд-во Твер. ун-та, 2006. – 303 с. (pmkinfo.tversu.ru/pers/droz dov/iim.pdf)
42. Дулов В.Г. Математическое моделирование в современном естествознании : учеб. пособие / В.Г. Дулов, В.А. Цибаров. – СПб. : Изд-во СПГУ, 2001. – 247 с.
43. Дьяконов В.П. VisSim+Mathcad+МАТЛАВ. Визуальное математическое моделирование / В.П. Дьяконов. – М. : Солон-Пресс, 2010. – 384 с.
44. Зарубин В.С. Математическое моделирование в технике : учебник для студентов высших технических учебных заведений / В.С. За-

рубин. – М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 495 с.

45. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. Классические и новые методы. Нелинейные математические модели : учебник.: пер. с англ. / Н.Х. Ибрагимов. – Нижний Новгород : Изд-во НГУ им. Н.И. Лобачевского, 2007. – 421 с.

46. Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике / Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов. – М. : Наука, 1979. – 304 с.

47. Ильин А.М. Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин. – М. : Физматлит, 2009. – 248 с.

48. Ильинский А.С. Математические модели электродинамики / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов. – М. : Высшая школа, 1991. – 222 с.

49. Калиткин Н.Н. Математические модели природы и общества / Н.Н. Калиткин. – М. : Физматлит, 2005. – 358 с.

50. Капица С.П. Общая теория роста человечества / С.П. Капица. – М. : Наука, 1999. – 190 с.

51. Колесин И.Д. Математические модели эпидемий : учеб. пособие / И.Д. Колесин, Е.М. Житкова. – СПб. : НИИ физики СПбГУ, 2004. – 88 с.

52. Колмогоров А.Н. Качественное изучение математических моделей динамики популяций / А.Н. Колмогоров // Проблемы кибернетики. Вып. 25 – М. : Наука, 1972. – С. 100-106.

53. Королев А.Л. Компьютерное моделирование / А.Л. Королев. – М. : Бином, 2010. – 230 с.

54. Красс М.С. Моделирование эколого-экономических систем : учеб. пособие / М.С. Красс. – М. : Инфра, 2010. – 272 с.

55. Кузнецов О.А. Математическое моделирование процессов отбора : учеб. пособие / О.А. Кузнецов, Е.А. Рябова. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2007. – 324 с.

56. Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – М. : Физматлит, 2001. – 296 с.

57. Лаврентьев М.А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1977. – 407 с.

58. Лотов А.В. Введение в экономико-математическое моделирование / А.В. Лотов. – М. : Наука, 1984. – 391 с.

59. Ляшенко І.М. Моделивання біологічних та екологічних процесів : Навчальний посібник / І.М. Ляшенко, А.П. Мукоєд. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2002. – 340 с.

60. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: введение в нелинейную динамику / Г.Г. Малинецкий. – М.: УРСС, 2002. – 253 с.

61. Мари Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях : Пер. с англ. / Дж. Марри. – М. : Мир, 1983. – 397 с.
62. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. Вычислительные методы и эксперименты / Г.И. Марчук. – М. : Наука, 1991. – 299 с.
63. Маценко В.Г. Основи математичного моделювання : навч. посіб. / В.Г. Маценко. – Чернівці : Рута, 2004. – 60 с.
64. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики / Н.Н. Моисеев. – М. : Наука, 1969. – 379 с.
65. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент / Н.Н. Моисеев. – М. : Наука, 1979. – 223 с.
66. Молчанов И.Н. Машинные методы решения задач прикладной математики. Алгебра, приближение функций, дифференциальные уравнения / И.Н. Молчанов. – К. : Наукова думка, 2007. – 548 с.
67. Мюррей Дж. Математическая биология. Том I. Введение / Дж. Мюррей. – М.-Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", ИКИ, 2009. – 776 с.
68. Нахушев В.А. Уравнения математической биологии / В.А. Нахушев. – М. : Высшая школа, 1995. – 301 с.
69. Недорезов Л.В. Лекции по математической экологии / Л.В. Недорезов. – Новосибирск : Сибирский хронограф, 1997. – 161 с.
70. Неймарк Ю.И. Математическое моделирование как наука и искусство : Учебник / Ю.И. Неймарк. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского ун-та, 2010. – 420 с.
71. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD : учеб. пособие / В.А. Охорзин. – СПб. : Лань, 2008. – 348 с.
72. Павловский Ю.Н. Имитационное моделирование : учеб. пособие / Ю.Н. Павловский. – М. : Академия, 2008. – 234 с.
73. Павловский Ю.Н. Математический и гуманитарный анализ механизма ядерного сдерживания / Ю.Н. Павловский // Вестник РАН. – 2000. – № 4. – С. 195-202.
74. Панюков А.В. Математическое моделирование экономических процессов : учеб. пособие / А.В. Панюков. – М. : Книжный дом "Либроком", 2010. – 192 с.
75. Петров А.А. Опыт математического моделирования экономики / А.А. Петров, И.Г. Поспелов, А.А. Шананин. – М. : Энергоатомиздат, 1996. – 544 с.
76. Подходова Н.С. Введение в моделирование. Математические модели в естествознании : учеб. пособие / Н.С. Подходова. – СПб. : Изд-во РГПУ, 2009. – 177 с.

77. Полуэктов Р.А. Динамические модели экологических систем / Р.А. Полуэктов, Ю.А. Пых, И.А. Швытов. – Л. : Гидрометеиздат, 1980. – 288 с.
78. Полянин А.Д. Методы решений нелинейных уравнений математической физики и механики / А.Д. Полянин, В.Ф. Зайцев, А.И. Журов. – М. : Физматлит, 2005. – 256 с.
79. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений / К.К. Пономарев. – Минск : Вышэйшая школа, 1973. – 560 с.
80. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. – М. : Наука, 1982. – 331 с.
81. Поршнев С.В. Компьютерное моделирование физических процессов в пакете MATLAB : учеб. пособие / С.В. Поршнев. – СПб. : Лань, 2011. – 726 с.
82. Призва Г.Й. Диференціальні рівняння та їх застосування / Г.Й. Призва. – К. : Вища школа, 1978. – 104 с.
83. Райбман Н.С. Что такое идентификация / Н.С. Райбман. – М. : Наука, 1970. – 118 с.
84. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии / Г.Ю. Ризниченко. – Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. – 232 с.
85. Романовский Ю.М. Математическая биофизика / Ю.М. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. – М. : Наука, 1984. – 304 с.
86. Самарский А.А. Численные методы: учеб. пособие для вузов / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М. : Наука, 1989. – 432 с.
87. Диференціальні моделі. Стійкість : навчальний посібник / [А.М. Самойленко, С.Д. Борисенко, Дж. Матарazzo та ін.] ; за ред. А.М. Самойленка. – К. : Вища школа, 2000. – 329 с.
88. Свирежев Ю.М. Устойчивость биологических сообществ / Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
89. Семененко М.Г. Введение в математическое моделирование : учеб. пособие / М.Г. Семененко. – М. : Солон-Р, 2002. – 111 с.
90. Солодов А.П. MATHCAD. Дифференциальные модели / А.П. Солодов. – М. : Изд-во МЭИ, 2002. – 237 с.
91. Староверов О.В. Азы математической демографии / О.В. Староверов. – М. : Наука, 1997. – 157 с.
92. Степанова Л.В. Математическое моделирование. Теория, задачи и упражнения : учеб. пособие / Л.В. Степанова. – Самара : Изд-во Самарского ун-та, 2003. – 95 с.
93. Стоян В.А. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами / В.А. Стоян, В.В. Скопечький, Ю.Г. Кривонос. – К. : Наукова думка, 2002. – 361 с.

94. Тихонов А.Н. Вводные лекции по прикладной математике / А.Н. Тихонов, Д.П. Костомаров. – М. : Наука, 1984. – 190 с.
95. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики : учебник. – 7-е изд. / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М. : Изд-во МГУ, 2004. – 798 с.
96. Трубников С.В. Компьютерное моделирование : учеб. пособие / С.В. Трубников. – Брянск : Изд-во БГУ, 2004. – 335 с.
97. Форрестер Дж. Мировая динамика. : пер. с англ. / Дж. Форрестер ; под ред. Гвишиани. – М. : Наука, 1977. – 197 с.
98. Франс Дж. Математические модели в сельском хозяйстве. : пер. с англ. / Дж. Франс, Дж.Х.М. Торнли ; под ред. А.С. Каменского. – М. : Агропромиздат, 1987. – 400 с.
99. Хакимзянов Г.С. Математическое моделирование : учеб. пособие в 2-х частях / Г.С. Хакимзянов, Л.Б. Чубаров, П.В. Воронина. – Новосибирск : Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2010. – 148 с.
100. Хусаинов Д.Я. Моделювання динамічних систем : навчальний посібник / Д.Я. Хусаинов, І.І. Харченко, А.В. Шатирко. – К. : Видавничий поліграфічний центр "Київський університет", 2004. – 69 с.
101. Чернецкий В.И. Математическое моделирование динамических систем / В.И. Чернецкий. – Петрозаводск : Изд-во Петрозав. ун-та, 1996. – 429 с.
102. Черноморец А.А. Компьютерное моделирование : учеб. пособие / А.А. Черноморец. – Белгород : Белгородский гос. ун-т, 2007. – 213 с.
103. Чуличков А.И. Математические модели нелинейной динамики / А.И. Чуличков. – М. : Физматлит, 2003. – 294 с.
104. Шарковский А.Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Украинский мат. журн. – 1964. – XVI, №1. – С. 61-70.
105. Шеннон Р. Имитационное моделирование систем. Искусство и наука / Р. Шеннон. – М. : Мир, 1978. – 417 с.
106. Эдвардс И.Г. Дифференциальные уравнения и краевые задачи: Моделирование и вычисления с помощью Mathematica, Maple и МАТЛАВ / И.Г. Эдвардс, Д.Э. Пенни. – М. : ООО "И.Д. Вильямс", 2008. – 1104 с.
107. Юдович В.И. Математические модели естественных наук : учеб. пособие / В.И. Юдович. – СПб. : Лань, 2011. – 336 с.