Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧІ З ФІЗИКИ
ТА МЕТОДИКА ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Чернівці

2022

ББК 22.3я73 – 4
З – 153
УДК 53(076.3)

Рекомендовано навчально-методичною радою навчально-наукового Інституту фізико-технічних та комп'ютерних наук Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, протокол №3 від 5 січня 2022 р.

З – 153

Задачі з фізики та методика їх розв'язування / укл.: Курек І. Г., Курек Є. І, Олійнич–Лисюк А. В., Струк Я. М. – Чернівці , 2022. – 172с.

Даний посібник – це збірник задач з трьох розділів загальної фізики (механіки, молекулярної фізики та електромагнетизму). Він містить методику та приклади розв'язування типових задач з детальним аналізом кожного розв'язку. Всі задачі для самостійного роз'язування мають відповіді, що дозволить студентам самостійно провести аналіз правильності отриманих результатів. Для студентів інженерних спеціальностей, які вивчають весь університетський курс фізики протягом лише одного року, і тому змушені багато працювати самостійно.

ББК 22.3я73 – 4

ВСТУП

Добре відомо, що ґрунтовне засвоєння фізики неможливе без застосування теоретичного матеріалу на практиці при розв'язуванні задач або при виконанні лабораторних робіт. Уміння правильно розв'язати та провести аналіз задачі є чи не найвищим критерієм при оцінюванні глибини вивченого в фізиці матеріалу.

Метою даних методичних рекомендацій до розв'язування задач з фізики є стимулювання студентів не тільки (і не стільки) до отримання правильної відповіді при розв'язуванні задачі, але й до досконального аналізу процесів, які розглядаються в ній, бо отримання правильної відповіді зовсім не гарантує повного розуміння отриманих результатів.

Перш ніж розпочати розв'язування задачі, потрібно з'ясувати, яке фізичне явище лежить в її основі, яким фундаментальним законом природи чи його наслідком воно описується.

Приступаючи до розрахунку запропонованих у задачі величин, виконайте кілька стандартних кроків, які, як показує досвід, суттєво спрощують отримання кількісних результатів.

По-перше, проаналізуйте умову задачі, коротко запишіть її, зведіть усі відомі величини до однієї системи одиниць (наприклад, до SI) і намалюйте схему або рисунок, які допоможуть розібратися в суті досліджуваного явища.

По-друге, певним фізичним процесам поставте у відповідність математичні вирази, які кількісно їх описують: запишіть систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих фізичних величин.

По-третє, розв'яжіть отриману систему рівнянь відносно невідомих величин. Треба завжди прагнути розв'язати задачу не тільки правильно, але й раціонально, тобто розв'язок повинен містити мінімальну кількість кроків.

І, *по-четверте*, перевірте розмірність отриманої фізичної величини, проведіть числовий розрахунок і проаналізуйте отримані результати (не всі розв'язки алгебраїчних рівнянь можуть мати фізичний зміст тощо).

Аналіз фізичних явищ і пошук математичних рівнянь, які відображають дане фізичне явище, як правило, є чи не основною проблемою при розв'язуванні фізичних задач, оскільки цей процес потребує розуміння не тільки суті фізичних процесів, але й достатнього рівня знань елементарної алгебри, геометрії, тригонометрії, а також основ математичного та векторного аналізу.

Тому, перш ніж приступити до розв'язування задач, пригадаємо деякі елементи необхідного математичного апарату.

МАТЕМАТИЧНІ ДОПОВНЕННЯ

СПЕЦІАЛЬНІ ЗНАКИ

$\sim$ – пропорційно ($y \sim x$ – y пропорційно x);

const (*constanta*) – постійна величина;

∞ – нескінченно велика величина $(const/\infty = 0)$;

$\Rightarrow$ – знак слідування ($A \Rightarrow B$ – з A випливає B).

Δ (дельта) – знак зміни чи приросту величини; $dx = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x$ – нескінченно малий приріст.

$\vec{a}, \mathbf{a}$ – вектор. ($\vec{a} = const$ – модуль і напрямок вектора постійні).

$\sum$ (сигма) – знак суми. $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + ... + \mathbf{F}_n$;

i – індекс сумування, i=1,2,3,...,n.

$\int$ – інтеграл; $\iint\limits_S$ – інтеграл по поверхні; $\oiint\limits_S$ – інтеграл по замкнутій поверхні.

$\bar{\upsilon}, <\upsilon>$ – середнє значення.

$||$, $\uparrow\uparrow$ – паралельно; $\uparrow\downarrow$ – антипаралельно.

$\perp$ – перпендикулярно (нормально).

$|x|$ – модуль (абсолютне значення):

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

ВЕКТОРИ

Вектор – це напрямлений відрізок. Векторна рівність $\vec{a} = \vec{b}$ означає, що:

1. Модулі векторів дорівнюють один одному: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

2. Напрямки векторів збігаються: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

Вектори називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній або на паралельних прямих. Вектори називаються ортогональними або нормальними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих (кут між векторами становить 90°). Кут між векторами – це кут між напрямками.

Додавання векторів $\vec{a} + \vec{b}$

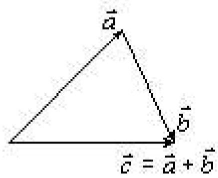

Рис. 1

Спосіб трикутника. Сумістити початок вектора $\vec{b}$ з кінцем вектора $\vec{a}$. Вектор суми $\vec{c}$ сполучає початок вектора $\vec{a}$ і кінець вектора $\vec{b}$ (рис. 1). У такий спосіб можна додавати довільну кількість векторів.

Спосіб паралелограма. Сумістити початки векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та добудувати на них паралелограм. Вектор суми $\vec{c}$ буде діагоналлю паралелограма, яка проходить через спільний початок векторів-доданків (рис. 2).

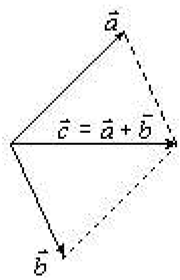

Рис. 2

Векторна сума, як і звичайна, володіє переставною $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ та комутативною $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ властивостями.

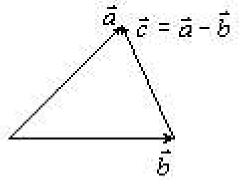

Рис. 3

Віднімання векторів $\vec{a} - \vec{b}$

Сумістити початки векторів. Вектор різниці сполучає кінці векторів і напрямлений до зменшуваного (рис. 3).

Множення вектора на число

Добутком $\lambda\vec{a}$ числа λ на вектор $\vec{a}$ у випадку $\vec{a} \neq 0, \lambda \neq 0$, називається вектор, колінеарний вектору $\vec{a}$, модуль якого дорівнює $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ і який напрямлений у той самий бік, що й вектор $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і в протилежний, якщо $\lambda < 0$. Якщо ж $\lambda = 0$ або $\vec{a} = 0$, то за визначенням $\lambda\vec{a} = 0$.

Проекція вектора на осі декартової ситеми координат

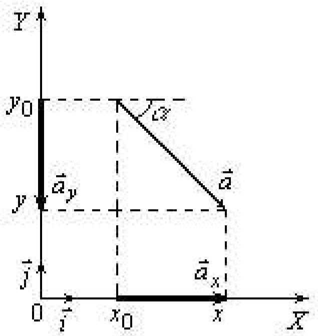

Рис. 4

З початку і кінця вектора $\vec{a}$ опускаємо перпендикуляри на осі координат (рис. 4). Вектори $\vec{a}_x$, $\vec{a}_y$, $\vec{a}_z$ – називають складовими вектора $\vec{a}$ за напрямками координатних осей, а числа $a_x = |\vec{a}_x|$, $a_y = |\vec{a}_y|$ та $a_z = |\vec{a}_z|$ – проекціями вектора $\vec{a}$ на координатні осі: $a_x = x - x_0 > 0$; $a_y = y - y_0 < 0$.

Це означає, що $\vec{a}_x$ збігається за напрямком з віссю *oX*, а $\vec{a}_y$ – не збігається з *oY*. На рис. 4 складові і проекції вектора $\vec{a}$ на вісь *oZ* не вказані. Якщо ввести одиничні вектори (орти): $\vec{i}$, який збігається з додатним напрямком осі *oX*, $\vec{j}$ – з додатним напрямком осі *oY* та $\vec{k}$ – осі *oZ*, тобто $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$; $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$, то складові вектора $\vec{a}$ можна записати у вигляді: $\vec{a}_x = a_x\vec{i}$; $\vec{a}_y = a_y\vec{j}$; $\vec{a}_z = a_z\vec{k}$, а сам вектор через складові: $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$. При цьому слід пам'ятати, що модуль вектора $|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Якщо вектор лежить у площині XoY, як це вказано на рис. 4, то

$$a_x = a\cos\alpha\,;\; a_y = a\sin\alpha\,;\; \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_y}{a_x}\,,$$

де α – кут між віссю oX і вектором $\vec{a}$.

Розклад вектора на складові вздовж довільних двох напрямків oX_1 та oX_2

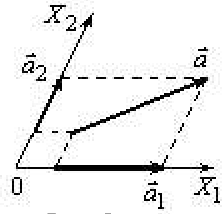

Рис. 5

Через кінець і початок вектора $\vec{a}$ проводять прямі паралельні oX_1 та oX_2 до перетину з осями і отримують складові $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$, $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, (рис. 5).

Скалярний добуток

Позначається $(\vec{a},\vec{b}) \equiv \vec{a}\cdot\vec{b}$. Результатом є число – скаляр. $c = (\vec{a},\vec{b}) = ab\cos\alpha$, $\angle\alpha = \vec{a}\,{}^\wedge\vec{b}$. Скалярний добуток має такі властивості: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$; $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$; $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a},\vec{b})$; $(\vec{a},\vec{a}) = |\vec{a}|^2 = a^2 \geq 0$; $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

У декартових координатах, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано через їх проекції $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$, то $c = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$. Кут між двома векторами визначається зі співвідношення:

$$\cos\alpha = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{ab}\,,$$

де

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,,\; b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}\,.$$

Векторний добуток

Позначається $[\vec{a},\vec{b}] = \vec{a}\times\vec{b}$. Результатом векторного добутку є вектор $\vec{c}$, нормальний до площини в якій лежать вектори-множники (рис. 6). Модуль векторного добутку

$c = ab\sin\alpha$, $\angle\alpha = \vec{a}\,\hat{}\,\vec{b}$. Векторний добуток має наступні властивості: $[\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{b},\vec{a}]$; $[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a},\vec{b}] + [\vec{a},\vec{c}]$; $[(\lambda\vec{a}),\vec{b}] = \lambda[\vec{a},\vec{b}]$; $[\vec{a},\vec{a}] = 0$; $\vec{a}\cdot[\vec{a},\vec{b}] = \vec{b}\cdot[\vec{a},\vec{b}] = 0$. Подвійний векторний добуток $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a},\vec{b})$. У декартових координатах $[\vec{i},\vec{i}] = [\vec{j},\vec{j}] = [\vec{k},\vec{k}] = 0$; $[\vec{i},\vec{j}] = \vec{k}$; $[\vec{j},\vec{k}] = \vec{i}$; $[\vec{k},\vec{i}] = \vec{j}$. Тоді:

$$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \ .$$

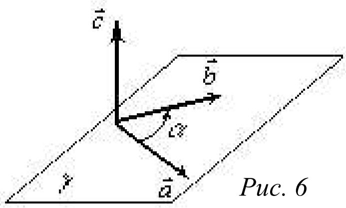

Рис. 6

Напрямок векторного добутку визначається за *правилом правого гвинта.* Якщо обертати гвинт з правою різьбою в напрямку від першого множника у векторному добутку до другого за найменшим кутом, то напрямок його поступального руху буде збігатися з напрямком результуючого вектора.

ПОХІДНА

Похідна від функції $y = f(x)$ позначається $y' = f'(x)$ або $\dfrac{dy}{dx}$. Це границя відношення приросту функції $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$ до приросту аргумента Δx при $\Delta x \to 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \ .$$

Властивості похідної

1. Похідна від суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) похідних:

$$y(x) = u(x) \pm \upsilon(x)\,; \qquad y'(x) = u'(x) \pm \upsilon'(x)\,.$$

2. Похідна від сталої величини дорівнює нулеві: $(const)' = 0$.

3. Похідна від добутку двох функцій:

$$y(x) = u(x) \cdot \upsilon(x)\,; \qquad y' = u'\upsilon + u\upsilon'\,.$$

4. Похідна від частки:

$$y(x) = \frac{u(x)}{\upsilon(x)}\,; \qquad y' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}\,.$$

5. Стала виноситься за знак похідної:

$$y(x) = Cu(x)\,; \qquad y' = (Cu)' = Cu'\,.$$

6. Похідна від складної функції:

$$y(x) = u(\upsilon(x))\,; \qquad y' = u'_\upsilon \cdot \upsilon'_x = \frac{du}{d\upsilon} \cdot \frac{d\upsilon}{dx}\,.$$

Наведемо похідні від деяких простих фукцій:

$(x^a)' = ax^{a-1}$; $(e^x)' = e^x$; $(a^x)' = a^x \ln a$; $(\ln x)' = 1/x$;

$(\log_a x)' = 1/(x \ln a)$; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;

$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

ІНТЕГРАЛ

$\int f(x)dx = F(x) + const$. Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$, або невизначеним інтегралом. Невизначений інтеграл – це функція, похідна від якої дає нам підінтегральну, тобто $\left(F(x) + const\right)' = f(x)$. Отже для отримання невизначеного інтегралу треба “вгадати” таку функцію $F(x)$, похідна від якої дає $f(x)$. Невизначений інтеграл береться з точністю до *const*, оскільки похідна від константи дорівнює нулеві.

Визначений інтеграл, тобто інтеграл з визначеними межами інтегрування, є уже не функцією, а числом. Для його обчислення існує формула Ньютона–Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Наведемо первісні для деяких простих функцій:

$\int dx = x + const$; $\int x^a dx = x^{a+1}/(a+1) + const$;

$\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + const$; $\int a^x dx = a^x/\ln a + const$;

$\int 1/x\, dx = \ln x + const$; $\int \sin x dx = -\cos x + const$;

$\int \cos x dx = \sin x + const$; $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \mathrm{tg}\, x + const$;

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{ctg}\, x + const$;

$\int (kx+b)^n dx = (kx+b)^{n+1}/(k(n+1)) + const$;

$\int 1/(x-a)\, dx = \ln(x-a) + const$.

ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

$a^{\log_a M} = M$; $\log_a a = 1$ $(a > 0, a \neq 1)$;

$\log_a\left(a^k\right) = k$ $(a > 0, a \neq 1)$;

$\log_a(M_1 \cdot M_2) = \log_a M_1 + \log_a M_2$, $(M_1 > 0, M_2 > 0)$;

$\log_a(M_1 / M_2) = \log_a M_1 - \log_a M_2$, $(M_1 > 0, M_2 > 0)$;

$\log_a\left(b^c\right) = c \log_a b$; $\log_a c = \frac{\log_b c}{\log_b a}$; $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$.

РОЗДІЛ 1. МЕХАНІКА

1. КІНЕМАТИКА

Основні співвідношення

Механіка вивчає найпростішу форму руху матерії – механічний рух, тобто зміну положення тіла (або частин тіла) в просторі відносно інших тіл з плином часу. Класична механіка виходить з того, що властивості простору і часу не залежать від того, які матеріальні тіла беруть участь в русі і від того як вони рухаються. Для того, щоб однозначно задати положення тіла в просторі потрібно мати *систему відліку*, яка складається з *тіла відліку*, пов’язаної з ним *системи координат* і *годинника*. Для опису руху тіл, в залежності від конкретних умов задачі, часто використовують різні спрощення – фізичні моделі – *матеріальна точка*, *абсолютно тверде тіло*, *абсолютно пружне тіло* тощо. Найпростішою фізичною моделлю тіла є матеріальна точка – тіло, розмірами і формою якого можна знехтувати у порівнянні з відстанями, які воно проходить.

Положення матеріальної точки в просторі задається *радіус-вектором* $\vec{r}$:

$$\vec{r} = \vec{i}\,x + \vec{j}y + \vec{k}z\,, \tag{1.1}$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти координатних осей, а x, y, z – координати точки.

Кінематичне рівняння руху (залежність координат від часу) для матеріальної точки в координатній формі записується так:

$$x = x(t);\; y = y(t);\; z = z(t), \tag{1.2}$$

а у векторній формі

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{1.3}$$

Середня швидкість руху:

$$< \vec{\upsilon} >= \Delta\vec{r} \,/\, \Delta t\,, \tag{1.4}$$

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення за час Δt.

Середньошляхова швидкість:

$$\upsilon = \Delta S \,/\, \Delta t\,, \tag{1.5}$$

де ΔS – шлях, пройдений тілом за час Δt.

Миттєва швидкість $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i}\,\frac{dx}{dt} + \vec{j}\,\frac{dy}{dt} + \vec{k}\,\frac{dz}{dt}. \qquad (1.6)$$

Модуль миттєвої швидкості можна знайти за формулою:

$$|\vec{\upsilon}| = \sqrt{\left(\upsilon_x^2\right) + \left(\upsilon_y^2\right) + \left(\upsilon_z^2\right)} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \qquad (1.7)$$

Миттєве прискорення $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{i}\,\frac{d\upsilon_x}{dt} + \vec{j}\,\frac{d\upsilon_y}{dt} + \vec{k}\,\frac{d\upsilon_z}{dt}. \qquad (1.8)$$

Повне прискорення при криволінійному русі можна представити як суму *нормального* $\vec{a}_n$ і *тангенційного* прискорень $\vec{a}_\tau$:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \qquad (1.9)$$

Модулі цих прискорень визначаються зі співвідношень:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R},\ a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt},\ a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}, \qquad (1.10)$$

де R – радіус кривизни траєкторії в даній точці.

Кінематичне рівняння рівномірного руху матеріальної точки вздовж осі oX:

$$x = x_0 + \upsilon t, \qquad (1.11)$$

де x_0 – початкова координата, t – час.

При рівномірному русі

$$\upsilon = const \text{ і } a = 0. \qquad (1.12)$$

Кінематичне рівняння рівноприскореного руху ($a = const$) вдовж осі oX:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad (1.13)$$

де υ_0 – початкова швидкість.

Швидкість точки при рівноприскореному русі:

$$\upsilon = \upsilon_0 + at. \qquad (1.14)$$

Положення твердого тіла, при заданому положенні осі обертання, визначається кутом повороту (або кутовим переміщенням) φ . *Кінематичне рівняння обертального руху*:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{1.15}$$

Середня кутова швидкість:

$$< \omega > = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{1.16}$$

де $\Delta\varphi$ – зміна кута повороту за час Δt .

Миттєва кутова швидкість:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.17}$$

Кутове прискорення:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{1.18}$$

Кінематичне рівняння рівномірного обертального руху:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \tag{1.19}$$

де φ_0 – початкове кутове переміщення. При рівномірному обертанні

$$\omega = const, \quad \varepsilon = 0. \tag{1.20}$$

Частота обертання:

$$n = N/t; \quad n = 1/T, \tag{1.21}$$

де N – кількість обертів, які тіло здійснює за час t; T – період обертання (час одного повного оберту).

Кінематичне рівняння рівноприскореного обертального руху ($\varepsilon = const$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1.22}$$

де ω_0 – початкова кутова швидкість.

Кутова швидкість тіла при рівноприскореному обертанні змінюється за законом:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \tag{1.23}$$

Зв'язок між лінійними та кутовими величинами для матеріальної точки:
– шлях, пройдений точкою по дузі кола радіусом R: $S = \varphi R$,
(φ – кут на який повернувся радіус-вектор точки);
– лінійна швидкість точки: $\upsilon = \omega R$, $\vec{\upsilon} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$;
– тангенційне прискорення: $a_\tau = \varepsilon R$, $\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}, \vec{R}]$;
– нормальне прискорення: $a_n = \omega^2 R$, $\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}$.

Методичні поради

1. Розв'язування задач з кінематики можна значно спростити, якщо дотримуватись наступних правил:
– проаналізуйте умову задачі і створіть фізичну модель процесів, розглядуваних у задачі;
– за умовою задачі виберіть систему відліку в якій буде розглядатися рух тіла. Визначте початкові умови руху тіла в цій системі відліку (початкові координати, швидкості, прискорення);
– виясніть, як рухається тіло, описане в задачі. Визначте характер руху (рівномірний, рівноприскорений, зі змінним прискоренням) та його траєкторію (пряма чи крива лінія). Такий аналіз допоможе перевірити правильність вибору фізичної моделі, зобразити модель у вигляді графіка чи схеми, а також вірно вибрати відповідні рівняння (закони) руху. Наприклад, якщо рух тіла рівноприскорений, то закон зміни швидкості можна знайти зі співвідношення:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = const \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\upsilon = adt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon' = \int_0^t adt' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon - \upsilon_0 = at \Rightarrow \upsilon = \upsilon_0 + at,$$

а закон руху зі співвідношення:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \upsilon dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (\upsilon_0 + at)dt \; .$$

Проінтегрувавши цей вираз, отримаємо:

$$x - x_0 = \upsilon_0 t + a\frac{t^2}{2} \Rightarrow x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2} \; .$$

2. Схематично зобразіть рух тіла в обраній системі координат. Вкажіть відомі з умови задачі напрямки переміщень, швидкостей, прискорень, а також відповідні величини, які необхідно знайти. Оскільки практично всі величини, які характеризують рух тіла (окрім часу і шляху), є векторними, необхідно спроектувати всі відомі вектори на координатні осі.

Запишіть відповідні кінематичні рівняння руху спочатку у векторній формі, а потім у скалярній (координатній) (див. формули (1.2) – (1.10)). Не забувайте, що для однозначного розв'язку задачі кількість рівнянь повинна дорівнювати кількості невідомих величин.

3. Для знаходження значення швидкості чи прискорення при складному русі слід скористатись правилом додавання (чи віднімання) векторів, а для визначення модуля результуючого вектора застосувати теорему косинусів.

4. Розв'яжіть отриману систему рівнянь у загальному вигляді, перевірте розмірність отриманих величин, визначте їх значення та оцініть вірогідність. Визначте фізичними чи нефізичними виявилися ці значення.

Приклади розв'язування задач

1. Тіло кинуто під кутом α до горизонту. Знайти величину цього кута, якщо горизонтальна дальність польоту тіла *S* в чотири рази більша за максимальну висоту траєкторії *H*. Опір повітря не враховувати.

Розв'язання

Відомо, що тіло, яке кинули під кутом до горизонту, перебуває у складному русі. Через відсутність опору повітря

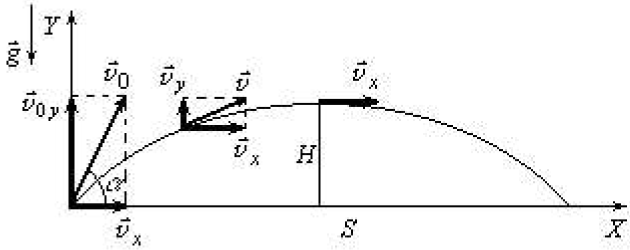

Рис. 7

вздовж осі oX воно рухається за інерцією – рівномірно зі швидкістю

$$v_x = v_0 \cos\alpha \,. \tag{1}$$

По вертикалі рух рівнозмінний і відбувається під дією сили тяжіння з прискоренням вільного падіння g, яке напрямлене вертикально вниз (рис. 7). Тому у вертикальному напрямку рух тіла спочатку рівносповільнений (до найвищої точки траєкторії), а потім – рівноприскорений.

Час T, протягом якого тіло знаходилось у польоті можна визначити з основних параметрів рівномірного руху: горизонтальної дальності польоту S і горизонтальної складової швидкості v_x – весь шлях тіло пролетить за час

$$T = S/v_x \,. \tag{2}$$

Знайдемо закон зміни швидкості у вертикальному напрямку. Для цього спроектуємо вектор початкової швидкості v_0 на вісь oY (див. рис. 7):

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt \,. \tag{3}$$

Тобто в напрямку осі oY тіло рухатиметься рівносповільнено з початковою швидкістю $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ і у найвищій точці траєкторії зупиниться. Оскільки в даній задачі ми не враховуємо опір повітря, то першу половину часу тіло буде підніматися, а другу – опускатися. Підставивши у (3) $v_y = 0$, знайдемо час польоту:

$$v_0 \sin\alpha - g\frac{T}{2} = 0 \Rightarrow \frac{T}{2} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \Rightarrow T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{4}$$

Підставимо (1) і (4) в (2) і отримаємо:

$$\frac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = \frac{S}{\upsilon_0 \cos\alpha}. \qquad (5)$$

Запишемо систему рівнянь для визначення кута:

$$\begin{cases} \dfrac{2\upsilon_0 \sin\alpha}{g} = \dfrac{S}{\upsilon_0 \cos\alpha} \\ 4H = S \\ H = \dfrac{\upsilon_{0y}^2}{2g} \\ \upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha \end{cases}. \qquad (6)$$

Із даної системи, підставивши четверте і третє рівняння у друге, визначимо S:

$$S = \frac{4\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Далі, підставляємо отриманий вираз у перше рівняння системи (6) і отримуємо:

$$\frac{2\upsilon_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{4\upsilon_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \qquad (7)$$

З рівняння (7) випливає, що $\cos\alpha = \sin\alpha$ або $tg\alpha = 1$. З отриманого тригонометричного рівняння кут $\alpha = arctg1 = 45^{\circ}$.
Відповідь: 45°.

2. Прискорення тіла змінюється за законом $a(t) = A + Dt$. Знайти закон руху, якщо тіло рухається прямолінійно вздовж осі oX.

Розв’язання

За визначенням, прискорення – це перша похідна від швидкості за часом $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, тому:

$$\frac{d\upsilon}{dt} = A + Dt\,. \qquad (1)$$

Ми одержали диференційне рівняння зі змінними, що розділяються. Перепишемо його у вигляді $d\upsilon = Adt + Dtdt$ і проінтегруємо отримане рівняння, важаючи, що при $t = 0$ швидкість дорівнює υ_0. Перепозначимо змінні інтегрування, щоб не плутати їх з межами інтегрування:

$$\int\limits_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon' = \int\limits_0^t \left(Adt' + Dt'dt'\right) = \int\limits_0^t Adt' + \int\limits_0^t Dt'dt'\,;$$

$$\upsilon - \upsilon_0 = At + Dt^2/2\,.$$

Отже швидкість тіла змінюється за законом:

$$\upsilon = \upsilon_0 + At + D\frac{t^2}{2}\,. \qquad (2)$$

Миттєва швидкість за визначенням є першою похідною від координати за часом $\upsilon = \dfrac{dx}{dt}$, тому

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_0 + At + D\frac{t^2}{2} \Rightarrow dx = \upsilon_0 dt + Atdt + \frac{D}{2}t^2 dt\,. \qquad (3)$$

Проінтегруємо отримане рівняння, важаючи, що при $t = 0$ координата тіла дорівнює x_0:

$$\int\limits_{x_0}^{x} dx = \int\limits_0^t \upsilon_0 dt' + \int\limits_0^t At'dt' + \int\limits_0^t \frac{D}{2}t'^2 dt'\,;$$

$$x - x_0 = \upsilon_0 t + \frac{A}{2}t^2 + \frac{D}{6}t^3\,. \qquad (4)$$

Отже, залежність координати тіла від часу має вигляд:

$$x = x_0 + \upsilon_0 t + \frac{A}{2}t^2 + \frac{D}{6}t^3\,.$$

Відповідь: $x = x_0 + \upsilon_0 t + \dfrac{A}{2}t^2 + \dfrac{D}{6}t^3$.

Задачі для самостійного розв'язування

1.1. Дві прямі дороги перетинаються під кутом $\alpha = 60^{\circ}$. Від перехрестя по них віддаляються автомобілі зі швидкостями $\upsilon_1 = 60\ км/год$ і $\upsilon_2 = 80\ км/год$. Визначити швидкості υ' і υ'', з якими автомобілі віддаляються один від одного. Перехрестя автомобілі проїхали одночасно.

1.2. Три чверті свого шляху автомобіль проїхав зі швидкістю $\upsilon_1 = 60\ км/год$, а решту шляху – зі швидкістю $\upsilon_2 = 80\ км/год$. Знайти середню швидкість $<\upsilon>$ автомобіля.

1.3. Тіло пройшло першу половину шляху за час $t_1 = 2\ с$, а другу – за час $t_2 = 8\ с$. Визначити середньошляхову швидкість тіла, якщо довжина шляху $S = 20\ м$.

1.4. Закон прямолінійного руху має вигляд $x = At + Bt^2$, де $A = 3\ м/с$; $B = -0{,}25\ м/с^2$. Побудувати графік залежності координати від часу.

1.5. Закон прямолінійного руху має вигляд $x = A + Bt^3$. $A = 5\ м$, $B = -0{,}125\ м/с^3$. Побудувати графіки залежності шляху, швидкості та прискорення від часу.

1.6. Рух матеріальної точки відбувається за законом $x = At + Bt^2$, де $A = 4\ м/с$; $B = -0{,}05\ м/с^2$. Визначити момент часу, в який швидкість точки υ дорівнюватиме нулеві. Знайти кординату і прискорення в цей момент. Побудувати графіки залежності координати, шляху, швидкості та прискорення від часу.

1.7. Два тіла, рухаючись рівноприскорено, проходять деяку точку, причому друге через 2 *с* після першого. В момент проходження початку відліку перше тіло мало швидкість $\upsilon_1 = 1\ м/с$ і прискорення $a_1 = 2\ м/с^2$, а друге – швидкість $\upsilon_2 = 10\ м/с$ і прискорення $a_2 = 1\ м/с^2$. Через який час і на якій відстані від початкового положення друге тіло наздожене перше?

1.8. Рух двох матеріальних точок відбувається за законами $x_1 = A_1 + B_1 t + C_1 t^2$ і $x_2 = A_2 + B_2 t + C_2 t^2$, де $A_1 = 20\ м$; $A_2 = 2\ м$; $B_1 = B_2 = 2\ м/с$; $C_1 = -4\ м/с^2$; $C_2 = 0{,}5\ м/с^2$. У який момент часу *t* швидкості точок будуть однаковими? Знайти швидкості і прискорення точок у цей момент.

1.9. Дві матеріальні точки рухаються за законами $x_1 = A_1 t + B_1 t^2 + C_1 t^3$ і $x_2 = A_2 t + B_2 t^2 + C_2 t^3$, де $A_1 = 4\, м/с$; $A_2 = 2\, м/с$; $B_1 = 8\, м/с^2$; $B_2 = -4\, м/с^2$; $C_1 = -16\, м/с^3$; $C_2 = 1\, м/с^3$. У який момент часу *t* прискорення точок будуть однаковими? Знайти швидкості точок у цей момент.

1.10. З якої висоти *H* впало тіло, якщо останній метр свого шляху воно пройшло за час $t = 0{,}1\, с$?

1.11. Рух матеріальної точки відбувається за законом $x = At + Bt^2$, де $A = 2\, м/с$; $B = -0{,}5\, м/с^2$. Знайти середню швидкість $<\upsilon>$ точки в інтервалі часу від $t_1 = 1\, с$ до $t_2 = 3\, с$.

1.12. Рух матеріальної точки відбувається за законом $x = At + Bt^3$, де $A = 6\, м/с$; $B = -0{,}125\, м/с^3$. Знайти середню швидкість $<\upsilon>$ точки в інтервалі часу від $t_1 = 2\, с$ до $t_2 = 6\, с$.

1.13. Закон прямолінійного руху має вигляд $x = A + Bt^2$, де $A = 3\, м$, $B = -0{,}25\, м/с^2$. Визначити середньошляхову швидкість $<\upsilon>$ між другою і шостою секундами.

1.14. Точка рухається за законом $x = At + Dt^3$, де $A = 6\, м/с$, $D = -0{,}125\, м/с^3$. Визначити середньошляхову швидкість $<\upsilon>$ в інтервалі часу від $t_1 = 12\, с$ до $t_2 = 16\, с$.

1.15. Точка рухається за законом $x = At + Bt^2 + Ct^3$, де $A = 6\, м/с$; $B = 2\, м/с^2$; $C = -0{,}125\, м/с^3$. Визначити середньошляхову швидкість $<\upsilon>$ в інтервалі часу від $t_1 = 2\, с$ до $t_2 = 6\, с$.

1.16. Прискорення тіла змінюється за законом $a(t) = A + Dt$. Записати закон, за яким змінюється з часом швидкість та координата цього тіла.

1.17. Швидкість тіла змінюється за законом $\upsilon(t) = A + Dt^2$. Знайти залежність координати від часу. Описати рух цього тіла, якщо відомо, що $A = 0{,}5\, м/с$, а $D = -0{,}5\, м/с^3$.

1.18. Тіло рухається прямолінійно вздовж осі *oX* і його прискорення змінюється за законом $a(t) = At + Dt^2$. Знайти закон руху тіла.

1.19. Рухоме тіло проходить *n* однакових проміжків шляху з різною швидкістю. Знайти $<\upsilon>$.

1.20. Рухоме тіло проходить *n* проміжків шляху за однакові проміжки часу. Визначити $<\upsilon>$.

1.21. Тіло рухалось протягом часу τ. При цьому його швидкість змінювалася за законом $\upsilon = at^2 + bt; 0 \le t \le \tau$. Визначити $<\upsilon>$.

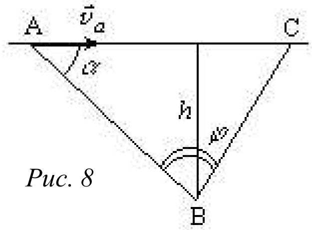

Рис. 8

1.22. Прискорення рухомого тіла залежить від швидкості υ за законом $a = -k\upsilon^2$. Знайти закон руху $S = S(t)$.

1.23. Залежність пройденого тілом шляху від часу задається рівнянням $S = 0{,}25t^4 - 9t^2$. Знайти екстремальне значення швидкості тіла. Побудувати графік залежності швидкості від часу за перші 5 *с* руху.

1.24. Між двома пунктами, розташованими на річці на відстані 100 *км* один від одного, курсує катер. Катер проходить цю відстань за течією за час $t_1 = 4\,год$, а проти течії за час $t_2 = 10\,год$. Визначити швидкість течії річки, та швидкість катера відносно води.

1.25. Людина, що знаходиться в точці B на відстані h від прямої ділянки дороги, бачить автобус, який рухається по шосе з постійною швидкістю $\vec{\upsilon}_a$ (рис. 8). Відстань від автобуса до людини в цей момент дорівнює AB. В якому напрямку потрібно бігти людині, щоб опинитися в точці C з максимальним випередженням за часом по відношенню до автобуса, якщо AB=2*h*, а відношення швидкостей людини і автобуса $\upsilon_л / \upsilon_a = 1/\sqrt{2}$?

1.26. Човен, який пливе через річку на веслах, рухається відносно води зі швидкістю 2 *м/с* в напрямку перпендикулярному до течії. Течія річки має швидкість 1 *м/с*. Знайти повну швидкість човна та напрямок вектора повної швидкості відносно берега.

1.27. Дві пристані розташовані одна навпроти одної на протилежних берегах річки, швидкість течії якої складає 0,5 *м/с*. У якому напрямку повинен плисти човен, щоб перетнути річку по прямій від однієї пристані до другої? З якою швидкістю $\upsilon_\perp$ повинен плисти човен через річку? Відносно води човен має швидкість 0,8 *м/с*.

1.28. На візку, який рівномірно рухається горизонтальною площиною, встановлена труба. Як повинна бути орієнтована на візку ця труба, щоб краплини дощу, падаючи вертикально, пролітали крізь неї, не торкаючись внутрішніх стінок? Рух крапель вважати рівномірним.

1.29. Два літаки вилітають одночасно з однієї точки двома взаємно перпендикулярними курсами. Один зі швидкістю $\upsilon_1 = 300\,км/год$, другий зі швидкістю $\upsilon_2 = 400\,км/год$. Як зростає з часом відстань між літаками? Якою буде ця відстань у той момент, коли перший літак пролетить $S_1 = 900\,км$?

1.30. Рибалка пливе човном вверх по річці і, пропливаючи під мостом, загубив рятувальний круг. Через півгодини він це помітив, повернув назад і наздогнав круг на 5 *км* нижче моста. Яка швидкість течії річки, якщо вверх і вниз по річці рибалка плив з однаковою швидкістю відносно води?

1.31. Камінь падає з висоти $h = 1200\,м$. Який шлях *S* пройде камінь за останню секунду свого руху?

1.32. Частка рухається в додатному напрямку осі *oX* так, що її швидкість змінюється за законом $\upsilon = \alpha\sqrt{x}$, де $\alpha -$ додатна стала. Маючи на увазі, що в момент часу $t = 0$ вона знаходилась в точці $x = 0$, знайти: а) залежність від часу швидкості та прискорення частки; б) середню швидкість частки за час, протягом якого вона пройшла перші *S* метрів.

1.33. Дві ракети стартують одночасно з однієї точки поверхні Землі з початковими швидкостями, які дорівнюють нулеві. Прискорення ракет $a_1 = 2t, a_2 = 5t$ напрямлені вертикально вгору. Знайти відстань між ракетами через 2 *с*.

1.34. Човен, що має швидкість υ_0, спускає вітрило в момент часу t_0, але продовжує рухатися. Під час цього руху були проведені вимірювання швидкості, які показали гіперболічну залежність швидкості від часу $(\upsilon \sim 1/t)$. Показати, що прискорення човна буде пропорційне квадрату його швидкості.

1.35. Користуючись умовою попередньої задачі, знайти залежності: 1) шляху *S*, що його пройшов човен, від часу *t*; 2) швидкості човна υ від шляху, після того як було спущене вітрило.

1.36. З вежі одночасно кинуто два тіла з однаковою початковою швидкістю υ: одне вертикально вгору, друге вертикально вниз. Як з часом буде змінюватись відстань S між тілами? Опором повітря знехтувати.

1.37. З аеростата, який знаходився на висоті 300 *м*, впав камінь. Через скільки часу камінь досягне землі, якщо: 1) аеростат піднімається зі швидкістю 5 *м/с*, 2) аеростат опускається зі швидкістю 5 *м/с*, 3) аеростат нерухомий? Опором повітря знехтувати.

1.38. Накреслити графіки залежності висоти h і швидкості υ від часу t для тіла, кинутого вертикально вгору з початковою швидкістю 9,8 *м/с*. Графік побудувати для інтервалу часу $0 \le t \le 2$ *с*, через кожні 0,2 *с*. Опір повітря не враховувати.

1.39. Тіло падає вертикально з висоти 19,6 *м* з нульовою початковою швидкістю. Який шлях тіло пройде: 1) за першу 0,1 *с* свого руху, 2) за останню 0,1 *с* свого руху? Опір повітря не враховувати.

1.40. Тіло падає вертикально з висоти 19,6 *м* з нульовою початковою швидкістю. За який час тіло пройде: 1) перший 1 *м* свого шляху, 2) останній 1 *м* свого шляху? Опір повітря не враховувати.

1.41. Тіло, що вільно падає, за останню секунду проходить половину шляху. Знайти: 1) з якої висоти h падає тіло, 2) тривалість падіння. Опір повітря не враховувати.

1.42. Тіло А кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю υ_1, тіло В падає з висоти h з початковою швидкістю $\upsilon_2 = 0$. Знайти залежність відстані x між тілами А і В від часу t, коли відомо, що тіла почали рухатися одночасно.

1.43. Тіло, кинуте горизонтально з деякої висоти з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 20\ м/с$, впало від місця кидання на відстані S, яка вдвічі більша за висоту. Знайти висоту H з якої кинули тіло.

1.44. Снаряд, випущений під кутом 30° до горизонту на висоті h побував двічі: через 10 *с* і 50 *с* після пострілу. Визначити початкову швидкість снаряда υ_0 і висоту h.

1.45. З артилерійської гармати проведено постріл під кутом φ до горизонту. Початкова швидкість снаряда υ_0. Дослідити аналітично рух снаряда, нехтуючи опором повітря та кривизною поверхні Землі. Знайдені залежності зобразити графічно. Знайти:

1) вертикальну і горизонтальну складові вектора швидкості $\boldsymbol{\upsilon}$ і модуль вектора швидкості як функцію часу; 2) час T польоту снаряда від вильоту з гармати до падіння на землю; 3) залежність від часу кута α між вектором швидкості снаряда і горизонтом; 4) декартові координати (вісь oX– горизонтальний напрямок, вісь oY–вертикальнийнапрямок)снаряда, якфункції часу; 5) рівняння траєкторії снаряда $y = f(x)$ (побудувати згідно з цим рівнянням траєкторію польоту снаряда); 6) максимальну висоту h_{max} польоту снаряда над землею; 7) горизонтальну дальність l польоту снаряда як функцію його початкової швидкості і кута φ. При якому куті $\varphi*$ дальність буде максимальною при заданій початковій швидкості снаряда?

1.46. З трьох труб, розміщених на землі, з однаковою швидкістю б'ють струмені води під кутом 60, 45 і 30° до горизонту. Знайти відношення найбільших висот h підйому струменів води, що витікають з кожної труби, і відношення дальностей падіння l води на землю. Опором повітря знехтувати.

1.47. Залежність координат частки від часу задається рівняннями: $x(t) = 2 + 3t$; $y(t) = 15 + 2t - 10t^2$. Визначити: 1) скільки часу частка буде підніматися? 2) на якій відстані від місця кидання вона буде знаходитися в цей момент часу?

1.48. Яку початкову швидкість повинна мати сигнальна ракета, випущена під кутом 45° до горизонту, щоб вона спалахнула в найвищій точці своєї траєкторії, якщо час горіння запалу ракети 6 *с*? Опором повітря знехтувати.

1.49. Камінь, кинутий горизонтально, впав на землю через 0,5 *с* на відстані 5 *м* по горизонталі від місця кидання. 1) З якої висоти h було кинуто камінь? 2) З якою початковою швидкістю υ_0 його було кинуто? 3) З якою швидкістю υ він упав на землю? 4) Який кут φ складає траєкторія каменя з горизонтом в точці його падіння на Землю? Опір повітря не враховувати.

1.50. М'яч, кинутий горизонтально, вдаряється об стінку на відстані 5 *м* від місця кидання. Висота місця удару м'яча об стінку на 1 *м* менша за висоту кидання. 1) З якою швидкістю υ_0 було кинуто м'яч? 2) Під яким кутом φ м'яч підлітає до поверхні стінки? Опір повітря не враховувати.

1.51. Камінь кинуто горизонтально. Через 0,5 *с* після початку руху швидкість каменя стала в 1,5 рази більшою за його початкову швидкість. Знайти початкову швидкість каменя. Опір повітря не враховувати.

1.52. Камінь кинуто горизонтально з початковою швидкістю $\upsilon_x = 15\,м/с$. Знайти нормальне і тангенційне прискорення каменя через 1 *с* після початку руху. Опір повітря не враховувати.

1.53. Камінь кинуто горизонтально з швидкістю 10 *м/с*. Знайти радіус кривизни траєкторії каменя через 3 *с* після початку руху. Опір повітря не враховувати.

1.54. М'яч кинули зі швидкістю $\upsilon_0 = 10\,м/с$ під кутом $\alpha = 40^\circ$ до горизонту. 1). На яку висоту підніметься м'яч? 2) На якій відстані від місця кидання він впаде на землю? 3) Скільки часу триватиме політ? 4) Знайти величину вектора повної швидкості м'яча через 1 *с* після кидання. Опір повітря не враховувати.

1.55. На спортивних змаганнях у Санкт-Петербурзі спортсмен штовхнув ядро на відстань 16 *м* 20 *см*. Яку відстань пролетить таке ж ядро в Ташкенті при тих же умовах? (При тій же початковій швидкості, направленій під тим же кутом до горизонту). Прискорення сили тяжіння в Санкт-Петербурзі дорівнює 981,9 $см/с^2$, в Ташкенті 980,1 $см/с^2$.

1.56. Компоненти швидкості частки змінюються з часом за законами $\upsilon_x = a\cos\omega t$; $\upsilon_y = a\sin\omega t$; $\upsilon_z = 0$, де a і ω - сталі. Знайти модулі швидкості $\boldsymbol{\upsilon}$ та прискорення $\boldsymbol{w}$, а також кут між векторами $\boldsymbol{\upsilon}$ та $\boldsymbol{w}$. На основі отриманих результатів зробити висновок про характер руху частки.

1.57. Залежність шляху від часу при русі точки по колу радіусом $R = 4\,м$ задається рівнянням $S = A + Bt + Ct^3$, де $A = 10\,м$; $B = -2\,м/с$; $C = 1\,м/с^3$. Визначити тангенційне a_τ, нормальне a_n і повне a прискорення точки в момент часу $t = 2\,с$.

1.58. Точка рухається по колу радіусом $R = 2\,м$. Залежність шляху від часу задається рівнянням $S = At^3$, де $A = 2\,м/с^3$. Знайти момент часу t_0 у який нормальне прискорення a_n точки дорівнюватиме тангенційному a_τ. Знайти повне прискорення a в цей момент.

1.59. Диск радіусом $r = 10\ см$ почав обертатися з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 0{,}5\ рад/с^2$. Визначити тангенційне a_τ, нормальне a_n і повне a прискорення точок на ободі диска наприкінці другої секунди після початку обертання.

1.60. Диск радіусом $r = 20\ см$ обертається за законом $\varphi = A + Bt + Ct^3$, де $A = 3\ рад$; $B = -1\ рад/с$; $C = 0{,}1\ рад/с^3$. Визначити тангенційне a_τ, нормальне a_n і повне a прискорення точок на ободі диска для момента часу $t = 10\ с$.

1.61. Тіло починає обертатись зі сталим кутовим прискоренням $\varepsilon = 0{,}04\ рад/с^{-2}$. Через який час повне прискорення буде напрямлене під кутом $\alpha = 76^\circ$ до напрямку швидкості?

1.62. Тіло оберталось з частотою $\nu_0 = 1200\ об/хв$, а потім почало обертатись рівносповільнено і зупинилось, зробивши *n*=2100 *об*. Знайти величину кутового прискорення та час, протягом якого відбулася зупинка тіла.

1.63. Відро опускається в колодязь, розкручуючи корбу радіуса 20 *см*. Скільки обертів зробить корба за 10 *с*, якщо швидкість відра 1 *м/с*?

1.64. Залежність координат частки від часу задається рівняннями: $x(t) = 2 + 3t;\ y(t) = 20 + 4t - 10t^2$. Визначити нормальне і тангенційне прискорення через 1 *с* після початку руху. Збільшується чи зменшується величина швидкості частки в цей момент?

1.65. Точка рухається по колу радіусом $R = 20\ см$ з постійним тангенційним прискоренням $a_\tau = 5\ см/с^2$. Через який час після початку руху нормальне прискорення a_n буде 1) дорівнювати тангенційному; 2) вдвічі більше тангенційного?

1.66. Точка рухається по колу радіусом $R = 10\ см$ з постійним тангенційним прискоренням a_τ. Знайти це прискорення, якщо відомо, що до кінця п'ятого оберту після початку руху лінійна швидкість точки стала такою, що дорівнює $\upsilon = 79{,}2\ см/с$.

1.67. Точка рухається по колу радіусом $R = 10\ см$ з постійним тангенційним прискоренням a_τ. Знайти нормальне прискорення a_n точки через 20 *с* після початку руху, якщо відомо, що до кінця п'ятого оберту після початку руху лінійна швидкість точки дорівнює $\upsilon = 10\ см/с$.

1.68. Колесо радіусом $R = 10\ см$ обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 3{,}14\ рад/с^2$. Знайти для точок на ободі колеса до кінця першої секунди після початку руху: 1) кутову швидкість; 2) лінійну швидкість; 3) тангенційне прискорення; 4) нормальне прискорення; 5) повне прискорення; 6) кут між повним прискоренням і радіусом колеса.

1.69. Знайти середню кутову швидкість штучного супутника Землі, якщо період його обертання по орбіті складає 105 *хв*.

1.70. Знайти середню лінійну швидкість штучного супутника Землі, якщо період його обертання складає 111 *хв*, а середня висота польоту 1200 *км*.

1.71. Знайти нормальне прискорення точок земної поверхні, викликане добовим обертанням Землі. Знайти значення проекції цього прискорення на напрямок земного радіуса в даній точці. Оцінити значення шуканих величин для широти Москви (55° Північної широти). Радіус Землі R=6400 *км*.

1.72. Якір електродвигуна обертається з частотою N *об/с*. Обертаючись після вимкнення струму рівносповільнено, він зупинився, зробивши n обертів. Знайти кутове прискорення якоря після вимкнення струму.

1.73. Автомобіль, що рухається зі швидкістю 40 *км/год*, проходить заокруглення шосе з радіусом кривизни 200 *м*. На повороті водій гальмує машину, надаючи їй прискорення –0,3 $м/с^2$. Знайти нормальне й повне прискорення автомобіля на повороті. Як напрямлений вектор повного прискорення по відношенню до швидкості?

1.74. Знайти кутове прискорення колеса, якщо відомо, що через 2 *с* після початку рівноприскореного руху вектор повного прискорення точки, що лежить на ободі, складає кут 60° з напрямком лінійної швидкості цієї точки.

1.75. Колесо обертається з постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2\ рад/с^2$. Через $t = 0{,}5\ с$ після початку руху повне прискорення колеса дорівнює $a = 13{,}6\ м/с^2$. Знайти радіус колеса.

2. ДИНАМІКА

Основні співвідношення

Перший закон Ньютона. В інерціальній системі відліку вільне або квазівільне тіло не може прискорюватися. Тобто, воно або знаходиться в стані спокою, або рівномірно і прямолінійно рухається.

Другий закон Ньютона. Швидкість змін імпульса дорівнює силі, яка викликала цю зміну і напрямлена у той самий бік. У векторній формі другий закон Ньютона має вигляд:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \text{ або } m\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i , \qquad (1.24)$$

де $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ – геометрична сума сил, які діють на матеріальну точку масою m; $\vec{a}$ – прискорення, $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ – імпульс. (1.24) називають рівнянням поступалльного руху матеріальної точки. У *координатній формі* рівняня руху має вид:

$$ma_x = \sum_{i=1}^{N} F_{ix} , \ ma_y = \sum_{i=1}^{N} F_{iy} , ma_z = \sum_{i=1}^{N} F_{iz} . \qquad (1.25)$$

Третій закон Ньютона. Два тіла діють одне на одне з силами, рівними за модулем і напрямленими в протилежні боки вздовж однієї прямої:

$$\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12} . \qquad (1.26)$$

Сила пружності (закон Гука):

$$F_{np} = -kx , \qquad (1.27)$$

де k – коефіцієнт пружності (жорсткості у випадку пружини), x – абсолютна деформація.

Сила гравітаційної взаємодії:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} . \qquad (1.28)$$

Сила тертя ковзання:

$$F_{mp} = \mu N , \qquad (1.29)$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання; N – сила нормального тиску.

Методичні поради

Динаміка розглядає причини виникнення руху і причини змін у ньому. Основне завдання динаміки полягає у встановленні рівняння руху. У динаміці зустрічаються як прямі (за відомими силами визначити місцеположення тіла), так і зворотні (за відомим законом руху визначити, під дією яких сил рухалось тіло) задачі.

В обох цих випадках розв'язок неможливий без вибору системи відліку. Якщо вибрана система відліку буде інерціальною, рівняння руху записують у вигляді (1.24). (Нагадаємо, що система називається інерціальною, якщо в ній виконується перший закон Ньютона. Будь-яка інша система відліку, яка рухається рівномірно і прямолінійно відносно даної інерціальної системи відліку, також буде інерціальною). У неінерціальній системі відліку слід ураховувати дію сил інерції.

З урахуванням вказаних особливостей розв'язування задач з динаміки слід розбити на декілька етапів.

1. За умовою задачі визначте характер і напрямок руху тіла. Проаналізуйте, які сили діють на це тіло (вияснiть природу цих сил, змінюються ці сили в часі, чи ні). Якщо в задачі розглядаються постійні сили, то тіло рухатиметься з постійним прискоренням, і для визначення його положення в просторі та часі можна скористатись другим законом Ньютона і відповідними законами кінематики для рівноприскореного руху.

Якщо сили, що діють на тіло (рівнодійна всіх сил), змінюються в часі, то рівняння руху слід записати у вигляді диференційного рівняння першого порядку $m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(t)$, і розв'язати його відповідним математичним методом (див. приклади розв'язування задач).

2. Виберіть систему відліку. Зробіть рисунок, вкажіть напрямки сил, які діють на тіло, і спроектуйте ці сили на осі координат.

3. Запишіть динамічне рівняння руху у векторній формі. (В інерціальних системах відліку – це рівняння (1.24)). Спроектуйте на осі координат також всі швидкості і прискорення, з якими рухається тіло.

4. Запишіть рівняння руху в координатній формі (рівняння (1.25)), ураховуючи знаки проекцій векторів та розв'яжіть отриману систему рівнянь одним із відомих методів (метод Гаусса, метод Крамера). Перевірте розмірність отриманих величин, визначте числові значення, оцініть їх відповідність фізичному змістові.

Приклади розв'язування задач

1. Невагомий блок закріплено на вершині похилої площини, яка утворює з горизонтом кут α. Вантажі m_1 і m_2 з'єднані ниткою, яка перекинута через блок. Знайти: 1) прискорення вантажів, 2) натяг нитки. Розв'язати задачу за умови, що коефіцієнт тертя вантажу m_2 об похилу площину дорівнює k, тертя в блоці відсутнє, а нитка нерозтяжна, невагома і не ковзає по блоку.

Розв'язання

Зробимо рисунок (рис. 9) і розкладемо сили. Нехай вантаж m_1 опускається. Тоді сила тертя вантажу m_2 об площину буде напрямлена вздовж похилої площини вниз. Запишемо рівняння руху для кожного вантажу у векторній формі:

$$\begin{cases} m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{T} \\ m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{т}} \end{cases}.$$

Поскільки нитка невагома і нерозтяжна, і тертя в блоці немає, то прискорення вантажів будуть рівні за модулем.

Системи координат вибираємо для кожного вантажу так, як це показано на рисунку.

Спроектуємо сили на вибрані координатні осі й отримаємо три рівняння відносно чотирьох невідомих $a, T, N, F_{\text{т}}$:

$$\begin{cases} oY: m_1 a = m_1 g - T \\ oX: m_2 a = T - F_{\text{т}} - m_2 g\sin\alpha \\ oY: 0 = N - m_2 g\cos\alpha \end{cases}.$$

Але $F_{\text{т}} = kN$. З третього рівняння системи $N = m_2 g\cos\alpha$, тому $F_{\text{т}} = km_2 g\cos\alpha$. Підставляючи $F_{\text{т}}$ в друге рівняння, отримуємо систему двох рівнянь з двома невідомими a і T:

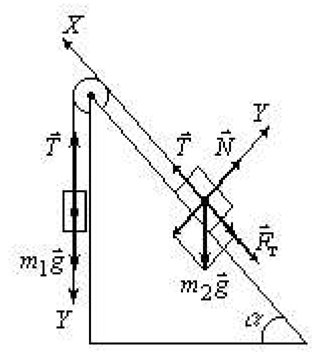

Рис. 9

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T - (k\cos\alpha + \sin\alpha) m_2 g \end{cases}.$$

Розв'яжемо дану систему. Для цього додамо два рівняння, тим самим виключимо T, і отримаємо для прискорення

$$a = \frac{m_1 - m_2(k\cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g .$$

Підставляючи a в будь-яке з рівнянь системи, отримуємо T

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + k\cos\alpha + \sin\alpha) g .$$

Відповідь: $a = \dfrac{m_1 - m_2(k\cos\alpha + \sin\alpha)}{m_1 + m_2} g$;

$T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + k\cos\alpha + \sin\alpha) g$.

2. При падінні тіла з великої висоти його швидкість при русі, що встановився, досягла $\upsilon_{вст} = 80\ м/с$. Визначити час τ від початку падіння, до того моменту, коли швидкість тіла становила $0{,}75\upsilon_{вст}$. Силу опору середовища прийняти пропорційною швидкості тіла.

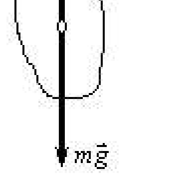

Рис. 10

Розв'язання

За умовою задачі на тіло діють дві сили, сила тяжіння $m\vec{g}$, напрямлена вертикально вниз, і сила опору повітря: $\vec{F}_{оп} = -k\vec{\upsilon}$, де k – коефіцієнт пропорційності, який залежить від розмірів і форми тіла та властивостей середовища, а сама сила напрямлена у бік, протилежний до напрямку руху (тобто вертикально вгору) (див. рис. 10).

Згідно з другим законом Ньютона рівняння руху такого тіла можна записати у вигляді;

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F}_{on},$$

або в проекції на вертикальний напрямок:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = mg - k\upsilon\,. \qquad (1)$$

Рівняння (1) – це диференційне рівняння першого порядку, яке можна розв'язати методом розділення змінних:

$$\frac{d\upsilon}{mg - k\upsilon} = \frac{dt}{m}\,. \qquad (2)$$

Проінтегруємо (2), враховуючи, що за час τ швидкість тіла змінилась від 0 до $0{,}75\upsilon_{вст}$:

$$\int\limits_0^{0{,}75\upsilon_{вст}} \frac{d\upsilon}{mg - k\upsilon} = \int\limits_0^{\tau} \frac{dt}{m}\,; \qquad (3)$$

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{mg - 0{,}75k\upsilon_{вст}}{mg}\right) = \frac{\tau}{m}\,, \qquad (4)$$

звідки

$$\tau = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg}{mg - 0{,}75k\upsilon_{вст}}\right). \qquad (5)$$

Невідомий коефіцієнт k знайдемо з наступних міркувань: у момент часу, коли швидкість руху тіла стане постійною $\upsilon_{вст}$, прискорення тіла дорівнюватиме нулеві. З цього моменту часу рівняння руху тіла матиме вигляд:

$$mg - k\upsilon_{вст} = 0 \Rightarrow k = \frac{mg}{\upsilon_{вст}}\,. \qquad (6)$$

Підставимо (6) в (5):

$$\tau = \frac{\upsilon_{вст}}{g}\ln\frac{mg}{mg - 0{,}75mg} = \frac{\upsilon_{вст}}{g}\ln 4 = 11{,}09\,(c)\,.$$

Відповідь: 11,09 *c*.

Задачі для самостійного розв'язування

1.76. На столі стоїть візок масою $m_1 = 4\,кг$. До візка прив'язаний один кінець мотузки перекинутої через блок. З яким прискоренням рухатиметься візок, якщо до другого кінця мотузки прив'язати вантаж масою $m_2 = 1\,кг$?

1.77. Два бруски масами $m_1 = 1\,кг$ і $m_2 = 4\,кг$ лежать на столі і з'єднані мотузкою. З яким прискоренням *a* рухатимуться бруски, якщо до одного них прикласти силу $F = 10\,H$, напрямлену горизонтально? Якою буде сила натягу мотузки *T*, якщо цю силу прикласти до першого? до другого бруска? Тертям знехтувати.

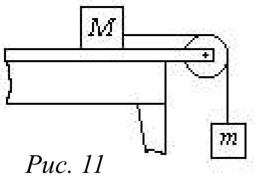

Рис. 11

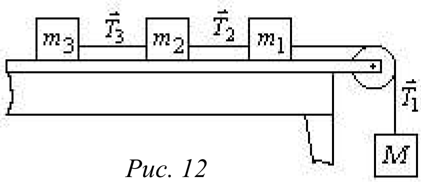

Рис. 12

1.78. На гладкій горизонтальній поверхні знаходиться тіло масою *M*. Друге тіло масою *m* підвішене на нитці, що перекинута через блок і прив'язана до маси *M* (рис. 11). Знайти прискорення мас *M* та *m* і натяг нитки. Тертям маси *M* об площину, тертям в блоці, а також масами блока і нитки знехтувати.

1.79. На установці, описаній у попередній задачі, на столі розміщено три маси m_1, m_2, m_3, які зв'язані ниткою між собою та з масою *M*, прив'язаною до нитки, що перекинута через блок (рис. 12). Знайти прискорення системи та натяги ниток за тих же умов, що й у попередній задачі.

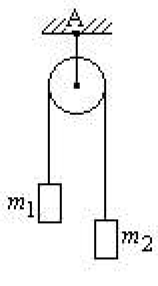

Рис. 13

1.80. Найпростішу машину, яка служить для перевірки законів рівноприскореного руху, можна уявити так: на нитці, перекинутій через блок, підвішено дві неоднакові маси m_1 і m_2 (рис. 13). Знайти прискорення мас, натяг нитки *T* і силу *F*, що діє на вісь блока цієї машини. Блок і нитку вважати невагомими, тертя в осі блока не враховувати.

1.81. На горизонтальній дошці лежить вантаж. Коефіцієнт тертя між дошкою і вантажем дорівнює $k = 0{,}1$. Яке прискорення в горизонтальному напрямку треба надати дошці, щоб вантаж міг з неї зісковзнути?

1.82. На столі лежить дошка масою $M = 1\,кг$, а на дошці вантаж вагою 19,6 *Н*. Яку силу *F* треба прикласти до дошки, щоб вона вислизнула з-під вантажу? Коефіцієнт тертя між вантажем і дошкою 0,25, а між дошкою і столом 0,5.

1.83. Повітряна куля масою *M* опускається з постійною швидкістю. Яку масу баласту *ΔM* треба викинути, щоб вона почала підніматися з тією ж швидкістю? Підйомну силу *P* кулі вважати постійною в обох випадках.

1.84. Два однакових тіла зв'язані ниткою і лежать на ідеально гладкому горизонтальному столі так, що нитка являє собою пряму лінію (рис. 14). Нитка може витримувати натяг ≤ 19,6 *Н*. Яку горизонтальну силу *F* потрібно прикласти до одного з тіл, щоб нитка розірвалась?

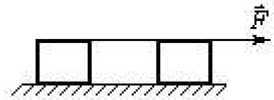

Рис. 14

1.85. Чи зміниться сила, необхідна для розриву нитки в умові попередньої задачі, якщо між тілами і столом є тертя і коефіцієнт тертя однаковий для обох тіл?

1.86. Невагомий блок закріплено на вершині двох похилих площин, які складають з горизонтом кути $\alpha = 30^\circ$ і $\beta = 45^\circ$. Вантажі масами $M_1 = M_2 = 1\,кг$ зв'язані ниткою, яка перекинута через блок (рис. 15). Знайти прискорення, з яким рухаються вантажі, та натяг нитки в системі. Тертя вантажів об площину та тертя в блоці відсутнє.

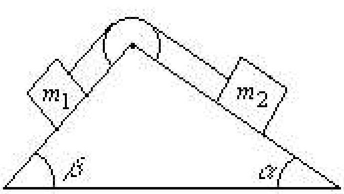

Рис. 15

1.87. Розв'язати попередню задачу за умови наявності тертя вантажів об площину. Коефіцієнти тертя для мас M_1 та M_2 дорівнюють $k_1 = k_2 = 0{,}1$. Тертя в блоці відсутнє.

1.88. Камінь кинуто вертикально вгору. В яких точках траєкторії він буде мати максимальне прискорення? Розглянути

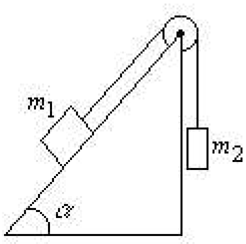

Рис. 16

два випадки: 1) опору повітря немає; 2) опір повітря зростає зі збільшенням швидкості.

1.89. На вершині ідеально гладкої похилої площини закріплено блок, через який перекинута нитка. До одного її кінця прив'язано вантаж масою m_1, який лежить на похилій площині. На другому кінці висить вантаж масою m_2 (рис. 16). З яким прискоренням рухаються вантажі? Який натяг нитки? Похила площина утворює з горизонтом кут α.

1.90*. На катері масою $M = 2\,т$ встановлено двигун потужністю $N = 50\,кВт$. Катер розвиває максимальну швидкість $\upsilon_{max} = 25\,м/с$. Визначити час *t*, протягом якого катер після вимкнення двигуна втратить половину своєї швидкості. Вважати, що сила опору рухові катера змінюється пропорційно квадрату швидкості.

1.91*. Снаряд масою $m = 10\,кг$ вилетів із зенітної гармати вертикально вгору зі швидкістю $\upsilon_0 = 800\,м/с$. Вважаючи силу опору повітря пропорційною швидкості, визначити час *t* піднімання снаряда до найвищої точки. Коефіцієнт опору $k = 0{,}25\,кг/с$.

1.92*. З гелікоптера, який нерухомо висить на деякій висоті над поверхнею Землі, скинуто вантаж масою $m = 100\,кг$. Уважаючи, що сила опору повітря змінюється пропорційно швидкості, визначити, через який проміжок часу Δt прискорення *a* вантажу дорівнюватиме половині прискорення вільного падіння. Коефіцієнт опору $k = 10\,кг/с$.

1.93*. Моторний човен масою $m = 400\,кг$ починає рухатися озером. Сила тяги двигуна $F = 0{,}2\,кН$. Уважаючи силу опору пропорційною швидкості, визначити швидкість υ човна через $\Delta t = 20\,с$ після початку руху. Коефіцієнт опору $k = 20\,кг/с$.

1.94*. Катер масою $M = 2\,т$ рушає з місця і протягом $\tau = 10\,с$ розвиває у стоячій воді швидкість $\upsilon = 4\,м/с$. Визначити силу тяги мотора, вважаючи її постійною. Сила опору пропорційна швидкості з коефіцієнтом $k = 100\,кг/с$.

1.95*. Початкова швидкість кулі $\upsilon_0 = 800\,м/с$. Рухаючись у повітрі, за час $t = 0{,}8\,с$ куля зменшила свою швидкість до

$\upsilon = 200\, м/с$. Маса кулі $m = 10\, г$. Вважаючи силу опору повітря пропорційною квадрату швидкості, визначити коефіцієнт опору *k*. Дією сили тяжіння знехтувати.

1.96*. Парашутист масою $m = 80\, кг$ виконує затяжний стрибок. Вважаючи силу опору повітря пропорційною швидкості, визначити через який час Δt швидкість парашутиста дорівнюватиме 0,9 від швидкості, яка повинна встановитися. Коефіцієнт опору $k = 10\, кг/с$. Початкова швидкість парашутиста дорівнювала нулеві.

1.97. Тіло на екваторі зважується на пружинних терезах опівдні, коли гравітаційні сили Землі і Сонця тягнуть його в різні боки. Одночасно таке ж тіло зважується опівночі в діаметрально протилежній точці земної кулі, коли обидві ці сили напрямлені в один бік. Вага якого тіла буде більшою? Неоднорідністю гравітаційного поля Сонця в околі Землі знехтувати.

1.98. Кулька масою m_1 знаходиться на відстані a від кінця тонкого однорідного стержня масою m_2 та довжиною l. а) Визначити силу притягання кульки і стержня. б) Узявши довжину стержня $l = 2a$, обчислити, як зміниться сила притягання, якщо стержень замінити кулькою маси m_2, розміщеною в точці, де знаходиться центр мас стержня.

1.99. Обчислити лінійну швидкість штучного супутника Землі на висоті 300 *км*. Орбіту супутника вважати коловою.

1.100. Маємо кільце з тонкого дроту, радіус якого дорівнює r. Знайти силу, з якою це кільце притягує матеріальну точку масою m, яка знаходиться на осі кільця на віддалі L від його центра. Радіус кільця дорівнює R, густина матеріалу дротини – ρ.

1.101. На яку відстань від поверхні Землі віддалилося б тіло, кинуте вертикально вгору зі швидкістю 5 *км/с*, якщо б у Землі не було атмосфери?

1.102. Визначити прискорення вільного падіння g на поверхні Землі за такими даними: середній радіус Землі $R = 6400\, км$, середня густина Землі $\rho = 5{,}4\, г/см^3$.

1.103. Визначити прискорення вільного падіння g на висоті 20 *км* над Землею, вважаючи, що прискорення вільного падіння на поверхні Землі дорівнює $g_0 = 9{,}81\, м/с^2$.

1.104. Знайти прискорення вільного падіння $g_м$ на поверхні Місяця, якщо його радіус дорівнює 1738 *км*, а середня густина складає 0,6 від густини Землі.

1.105. Знайти прискорення вільного падіння на поверхні Сонця, коли відомі $R = 150 \cdot 10^6$ *км* – радіус земної орбіти, $r = 7 \cdot 10^5$ *км* – радіус Сонця і T – час обертання Землі навколо Сонця.

1.106. Яке прискорення a надає Сонце тілам, що знаходяться на Землі?

1.107. Маятник, який робить в Санкт-Петербурзі 3601,4 коливань за годину, за той самий час і при тій же температурі робить в Москві 3600,0 коливань. Чому дорівнює відношення прискорень вільного падіння для цих двох міст?

1.108. Як зміниться хід маятникового годинника на Місяці в порівнянні з його ходом на Землі?

1.109. Час обертання Юпітера навколо Сонця в 12 разів більший за час обертання Землі. Скільки кілометрів становить відстань від Юпітера до Сонця, якщо відстань від Землі до Сонця дорівнює $150 \cdot 10^6$ *км*. Орбіти планет вважати колами.

1.110. Визначити відношення маси Сонця M до маси Землі m, якщо середня відстань R від Землі до Сонця в 390 разів більша ніж відстань r від Землі до Місяця, а час обертання T Землі навколо Сонця більший від часу обертання Місяця навколо Землі в 13,4 рази.

1.111. Знайти відстань d від планети до Сонця, якщо відомо: маса Сонця M, період обертання планети навколо Сонця T і гравітаційна стала G.

1.112. Знайти залежність прискорення вільного падіння g від відстані r, відрахованої від центра планети густиною ρ, яку можна вважати однаковою для всіх точок. Побудувати графік залежності $g(r)$. Радіус планети R вважати відомим.

1.113. Визначити роботу A, яку виконають сили гравітаційного поля Землі, якщо тіло масою $m = 1\,кг$ впаде на поверхню Землі: 1) з висоти h, що дорівнює радіусу Землі; 2) із нескінченності. Радіус Землі R і прискорення вільного падіння g на її поверхні вважати відомими.

1.114. Визначити значення потенціала гравітаційного поля φ на поверхнях Землі і Сонця.

1.115. Верхній кінець свинцевої дротини діаметром $d = 2\ мм$ і довжиною $l = 60\ м$ закріплений нерухомо. До нижнього кінця підвішено вантаж масою $m = 100\ кг$. Знайти напругу матеріалу дротини σ: 1) біля нижнього кінця; 2) на середині довжини; 3) біля верхнього кінця дротини.

1.116. Однорідний стержень завдовжки $l = 1{,}2\ м$, площею поперечного перерізу $S = 2\ см^2$ і масою $m = 10\ кг$ обертається з частотою $n = 2\ c^{-1}$ навколо осі, що проходить через один з кінців стержня, ковзаючи при цьому без тертя по горизонтальній поверхні. Знайти найбільшу напругу $\sigma_{\max}$ матеріалу стержня при заданій частоті обертання.

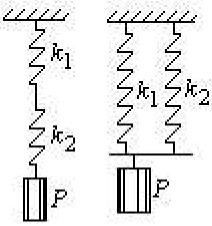

Рис. 17

1.117. Дві пружини жорсткістю $k_1 = 0{,}3\ кН/м$ і $k_2 = 0{,}8\ кН/м$ з'єднані послідовно. Визначити абсолютну деформацію x_1 першої пружини, якщо друга деформована на $x_2 = 1{,}5\ см$.

1.118. Визначити жорсткість k системи двох пружин при послідовному і паралельному з'єднанні (рис. 17). Жорсткість пружин $k_1 = 2\ кН/м$ і $k_2 = 6\ кН/м$.

3. РОБОТА І ЕНЕРГІЯ. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Основні співвідношення

Робота, яку здійснює постійна сила, дорівнює скалярному добутку сили на переміщення:

$$A = (\vec{F}, \Delta\vec{r}) = F\Delta r\cos\alpha\,, \qquad (1.30)$$

де α – кут між напрямком дії сили $\vec{F}$ і переміщення $\Delta\vec{r}$.

Робота, яка здійснюється змінною силою між точками, заданими радіус – векторами $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\cos\alpha\, dr\,. \qquad (1.31)$$

Середня потужність за час Δt:

$$<N>=A/\Delta t \tag{1.32}$$

або

$$<N>=F\upsilon\cos\alpha . \tag{1.33}$$

Миттєва потужність:

$$dN=dA/dt . \tag{1.34}$$

Кінетична енергія точки або тіла, які рухаються поступально:

$$T=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{p^2}{2m} . \tag{1.35}$$

Потенціальна енергія тіла і сила, яка діє на тіло в даній точці поля, пов'язані співвідношенням:

$$\vec{F}=-\mathrm{grad}\Pi \text{ або } \vec{F}=-\left(\vec{i}\,\frac{\partial\Pi}{\partial x}+\vec{j}\,\frac{\partial\Pi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial\Pi}{\partial z}\right), \tag{1.36}$$

У випадку, коли силове поле володіє сферичною симетрією:

$$F=-\frac{\partial\Pi}{\partial r} . \tag{1.37}$$

Потенціальна енергія пружнодеформованого тіла:

$$\Pi=\frac{1}{2}kx^2 . \tag{1.38}$$

Потенціальна енергія гравітаційної взаємодії двох точкових мас m_1 і m_2:

$$\Pi=-G\frac{m_1m_2}{r} . \tag{1.39}$$

Потенціальна енергія тіла, яке знаходиться в однорідному полі сили тяжіння:

$$\Pi=mgh , \tag{1.40}$$

h – висота над рівнем, умовно прийнятим за нульовий для відліку потенціальної енергії.

Основне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла відносно нерухомої осі:

$$M=J\varepsilon , \tag{1.41}$$

де M – момент сили, який діє на тіло, J – момент інерції тіла відносно даної осі; ε – кутове прискорення тіла

Момент імпульсу тіла, яке обертається відносно осі:

$$L = J\omega \cdot \qquad (1.42)$$

Момент інерції матеріальної точки:

$$J = mr^2, \qquad (1.43)$$

де m – маса точки; r – відстань від точки до осі обертання.

Момент інерції *твердого тіла* відносно нерухомої осі:

$$J = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 , \qquad (1.44)$$

де Δm_i – елемент маси, який знаходиться на відстані r_i від осі обертання. В інтегральній формі:

$$J = \int r^2 dm . \qquad (1.45)$$

Якщо тіло однорідне, тобто його густина ρ однакова по всьому об'єму, $dm = \rho dV$ і

$$J = \rho \int r^2 dV , \qquad (1.46)$$

де V – об'єм тіла.

Теорема Гюйгенса – Штейнера. Момент інерції тіла відносно довільної осі дорівнює моменту інерції J_0 цього тіла, відносно осі, яка проходить через його центр мас і паралельна даній, складеному з добутком його маси на квадрат відстані a між осями.

$$J = J_0 + ma^2 . \qquad (1.47)$$

Робота постійного моменту сили:

$$A = M\varphi , \qquad (1.48)$$

де φ – кут повороту тіла.

Миттєва потужність, яка виникає при обертанні тіла:

$$N = M\omega . \qquad (1.49)$$

Кінетична енергія тіла, яке обертається:

$$T_{об} = \frac{1}{2} J\omega^2 . \qquad (1.50)$$

Кінетична енергія тіла, яке одночасно пербуває в поступальному і обертальному рухах:

$$T_{повн} = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 . \qquad (1.51)$$

Закон збереження імпульсу. В ізольованій системі геометрична сума імпульсів усіх тіл, що утворюють систему, є величина стала:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{\upsilon}_i = const , \qquad (1.52)$$

де N – кількість матеріальних точок (або тіл), які входять до системи.

Закон збереження енергії в механіці виконується в ізольованій системі, в якій діють тільки консервативні сили, і записується у вигляді:

$$T + П = const , \qquad (1.53)$$

T – кінетична енергія, $П$ – потенціальна енергія.

Закон збереження моменту імпульсу. В ізольованій системі геометрична сума моментів імпульсів усіх тіл, що утворюють систему, є величина стала

$$\sum_{i=1}^{N} J_i\omega_i = const . \qquad (1.54)$$

Методичні поради

Досить часто застосування законів збереження значно спрощує розв’язування задачі, а іноді таке застосування – це єдиний шлях розв’язку, як, наприклад, при розгляді зіткнення куль, які котяться горизонтальною поверхнею.

При пружному зіткненні куль виконуються і закон збереження імпульсу, і закон збереження механічної енергії. При непружному зіткненні частина механічної енергії перетворюється у теплову енергію, тому в цьому випадку виконується закон збереження імпульсу і закон збереження повної енергії системи.

При використанні закону збереження імпульсу слід пам'ятати, що у замкнутій системі зберігається векторна сума імпульсів всіх тіл. Тому перед початком розв'язування необхідно вибрати систему відліку, спроектувати в ній всі імпульси системи до взаємодії і після. Сума проекцій імпульсів до взаємодії повинна дорівнювати сумі цих же проекцій після взаємодії. Якщо система частково ізольована, тобто сили діють лише в певному напрямку, то зберігатимуться тільки ті проекції імпульсів, які перпендикулярні до напрямку дії сили.

Це зауваження стосується також закону збереження моменту кількості руху відносно осі обертання з тією лише різницею, що момент кількості руху направлений вздовж осі обертання, тому систему відліку треба зв'язувати саме з віссю обертання. У випадку частково ізольованої системи зберігатимуться тільки ті проекції момента імпульсу, які перпендикулярні до осі вздовж якої діють моменти сил. Наприклад, якщо $M_x \neq 0$; $M_y \equiv 0$; $M_z \equiv 0$, то $L_x \neq const$; $L_y = const$; $L_z = const$.

Приклади розв'язування задач

1. Сталеві кульки масами m_1=100 *г* та m_2=200 *г* підвішені на нитках довжиною l = 50 *см* так, що нитки паралельні, а кульки дотикаються одна до одної. Меншу кульку відхилили на кут $\alpha = 90^o$ і відпустили. Яку швидкість матиме більша кулька після удару?

Розв'язання

Менша кулька, після того як її відхилили на кут α, а потім відпустили, в момент удару матиме кількість руху $m_1 \upsilon$. Друга кулька, яка до удару була нерухома, мала кількість руху, що дорівнювала нулеві. Таким чином, кількість руху даної замкнутої системи до удару дорівнювала $m_1 \upsilon$. Кількість руху кульок після удару буде $m_1 u_1 + m_2 u_2$, де u_1 та u_2 – швидкості більшої та меншої кульок після удару.

Для визначення швидкості u_2 скористаємось законом збереження імпульсу $m_1 \upsilon = m_1 u_1 + m_2 u_2$. Оскільки до останнього рівняння входить двоє невідомих – u_1 та u_2, для їх визначення потрібно мати ще одне рівняння, яке можна одержати на основі закону збереження кінетичної енергії для абсолютно пружного удару,

$$\frac{m_1 \upsilon^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} m_1 \upsilon = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ m_1 \upsilon^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \end{cases}.$$

Якщо в обох рівняннях системи перенести вліво доданки, що містять m_1, а потім розділити друге рівняння на перше, то отримаємо $\upsilon + u_1 = u_2$, звідки $u_1 = u_2 - \upsilon$. Підставивши цей вираз в перше рівняння системи і провівши нескладні математичні перетворення, для швидкості другої кульки після удару отримаємо вираз

$$u_2 = \frac{2 m_1 \upsilon}{m_1 + m_2}.$$

Швидкість меншої кульки знаходимо з формули $\upsilon = \sqrt{2gl}$, де l – висота падіння, що дорівнює довжині нитки. Підставляючи цей вираз в останню формулу, остаточно одержимо

$$u_2 = \frac{2 m_1 \sqrt{2gl}}{m_1 + m_2} = \frac{2 \cdot 0{,}1 \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}5}}{0{,}1 + 0{,}2} \approx 2\,(м/с)$$

Відповідь: $2\,м/с$.

2. Людина знаходиться в центрі горизонтальної круглої платформи, що обертається навколо осі, що проходить через центр мас людини та центр платформи. Людина горизонтально тримає в руках штангу завдовжки l = 2 *м* та масою m = 18 *кг*. Платформа при цьому робить ν = 30 обертів за хвилину. Людина повертає штангу у вертикальній площині на кут φ = 60°. Визначити кутову швидкість платформи після повороту штанги та роботу, яку виконала людина при цьому. Момент інерції людини вважати еквівалентним масі m_0 = 50 *кг*, що знаходиться на відстані r_0 = 4 *см* від осі обертання. Момент інерції платформи не враховувати.

Розв'язання

Розглядаючи платформу, що обертається з людиною, як замкнуту систему, можемо вважати її момент кількості руху незмінним.

Закон збереження кількості руху для даної системи запишеться у вигляді:

$$(I_0 + I_1)\omega_1 = (I_0 + I_2)\omega_2 ,$$

де момент інерції людини

$$I_0 = m_0 r_0^2 = 50 \cdot 0{,}0016 = 0{,}08\ (кг \cdot м^2) ;$$

момент інерції горизонтальної штанги

$$I_1 = \frac{ml^2}{12} = \frac{18 \cdot 4}{12} = 6\ (кг \cdot м^2) ;$$

момент інерції штанги, нахиленої на кут $\varphi = 60^\circ$

$$I_2 = \frac{1}{12} m(l \cos\varphi)^2 = \frac{1}{12} \cdot 18 \cdot 4 \cdot 0{,}25 = 1{,}5\ (кг \cdot м^2) .$$

Кутова швидкість після нахилу штанги, що визначається із закону збереження моменту кількості руху:

$$\omega_2 = \frac{I_0 + I_1}{I_0 + I_2} \omega_1 = \frac{I_0 + I_1}{I_0 + I_2} 2\pi\nu .$$

Числове значення кутової швидкості

$$\omega_2 = \frac{0{,}08 + 6}{0{,}08 + 1{,}5} \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}5 = 12{,}1\ (c^{-1}) .$$

Робота, виконана людиною при нахилі штанги, дорівнює зміні кінетичної енергії системи, внаслідок зміни кількості обертів,

$$A = \frac{(I_0 + I_2)\omega_2^2}{2} - \frac{(I_0 + I_1)\omega_1^2}{2} = 85{,}7\ (Дж) .$$

Відповідь: $12{,}1\, c^{-1}$; $85{,}7\ Дж$.

3. На яку відстань по дорозі під гору може вкотитися обруч за рахунок своєї кінетичної енергії, якщо перед цим він мав швидкість $\upsilon = 7{,}2\ км/год$, а ухил гори становить h = 10 *м* на кожні s = 100 *м* шляху? Тертя не враховувати.

Розв'язання

Відстань S, яку проходить обруч по дорозі, можна визначити, якщо буде відома висота H, на яку підніметься обруч, оскільки $S = H / \sin\alpha$, де α – кут нахилу дороги до горизонту. За умовою задачі $\sin\alpha = h / s$.

Висота, на яку підніметься обруч, буде залежати від його повної кінетичної енергії перед початком підйому. Повна кінетична енергія T дорівнює сумі його кінетичної енергії T_1 поступального та T_2 обертального рухів, тобто

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

але $I = mR^2$, а $\upsilon = \omega R$, тому

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2} = m\upsilon^2.$$

Ця кінетична енергія обруча при підйомі перетвориться на потенціальну енергію

$$П = mgH = mgS\sin\alpha.$$

Прирівнявши вирази для кінетичної та потенціальної енергій і розв'язавши одержане рівняння відносно відстані S, знаходимо, що

$$S = \frac{\upsilon^2}{g\sin\alpha}.$$

Урахувавши вираз для $\sin\alpha$, остаточно отримуємо:

$$S = \frac{\upsilon^2 s}{gh}.$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин, узятих в одиницях SI, знаходимо

$$S = \frac{2^2 \cdot 100}{9{,}8 \cdot 10} = 4{,}08\ м.$$

Відповідь: 4,08 *м*.

4. Момент інерції маховика $I = 10^6$ *г·см*^{2}. Через який час маховик матиме частоту обертання $\nu = 1800$ *об/хв*, якщо корисна потужність двигуна $N = 100$ *Вт*?

Розв'язання

Час, протягом якого маховик набере частоту обертання ν, можна визначити, якщо буде відома робота, що її виконає двигун при розкручуванні маховика. За рахунок роботи двигуна маховик одержує кінетичну енергію. Визначивши кінетичну енергію маховика після його розкручування і знаючи потужність двигуна, можна знайти час розкручування.

Роботу A, витрачену на розкручування маховика, знаходимо за формулою $A = Nt$. На підставі вищезазначеного маємо $Nt = \dfrac{I\omega^2}{2}$, звідки

$$t = \frac{I\omega^2}{2N} = \frac{I(2\pi\nu)^2}{2N} .$$

Підставляючи в останню формулу числові значення величин в одиницях SI, одержимо

$$t = \frac{0{,}1 \cdot (2 \cdot 3{,}14 \cdot 30)^2}{2 \cdot 100} = 17{,}7\ c .$$

Відповідь: 17,7 *с*.

Задачі для самостійного розв'язування

1.119. З похилої площини висотою 1*м* і довжиною схилу 10 *м* ковзає тіло масою 1 *кг*. Знайти кінетичну енергію біля підніжжя площини, швидкість тіла біля підніжжя площини та відстань, яку тіло пройде по горизонтальній ділянці шляху до зупинки. Коефіцієнт тертя на всьому шляху вважати однаковим і таким, що дорівнює 0,05.

1.120. Із залитого водою підвала, площа підлоги якого становить 50 $м^2$, треба відкачати воду на бруківку. Глибина води в підвалі 1,5 *м*, а відстань від рівня води в підвалі до рівня бруківки 5 *м*. Знайти роботу, яку треба виконати, щоб відкачати воду.

1.121. Яку роботу A потрібно виконати, щоб розтягнути на $x = 1\ мм$ сталевий стержень завдовжки $l = 1\ м$ і площею поперечного перерізу $S = 1\ см^2$?

1.122. Дві пружини жорсткістю $k_1 = 0{,}3\ кН/м$ і $k_2 = 0{,}5\ кН/м$ з'єднані послідовно і розтягнуті так, що абсолютна деформація другої пружини $x_2 = 3\,см$. Обчислити роботу A розтягу пружин.

1.123. З якою швидкістю v вилетить з пружинного пістолета кулька масою $m = 10\,г$, якщо пружина була стиснута на $x = 5\,см$? Жорсткість пружини $k = 0{,}2\,кН/м$.

1.124. У пружинній рушниці пружина стиснута на $x_1 = 20\,см$. При зведенні її стиснули ще на $x_2 = 30\,см$. З якою швидкістю вилетить з рушниці стріла масою $m = 50\,г$, якщо жорсткість пружини $k = 120\,Н/м$?

1.125. Визначити потенціальну енергію $П$ стиснутої пружини як функцію її деформації, якщо сила деформації пропорційна третьому степеню деформації з коефіцієнтом пропорційності β.

1.126. Визначити відношення потенціальних енергій деформації $П_1$ і $П_2$ двох пружин з коефіцієнтами жорсткості k_1 і k_2 в двох випадках (рис. 17): 1) пружини з'єднані послідовно і розтягуються грузом P; 2) пружини висять паралельно, причому груз P підвішено в такій точці, що обидві пружини розтягуються на однакову довжину. Деформацією пружин під дією власної ваги знехтувати.

1.127. Вантаж вагою 9,8 $Н$, що висить на нитці, відхиляють на кут $\alpha = 30°$ і відпускають. Знайти натяг нитки в момент проходження вантажем положення рівноваги.

1.128. На поверхню Землі з дуже великої віддалі падає метеорит. З якою швидкістю метеорит впав би на Землю, якщо б атмосфера не гальмувала його руху? Початкову швидкість метеорита вважати рівною нулеві.

1.129. Знайти, яку потужність розвиває двигун автомобіля масою 1$т$, коли відомо, що автомобіль їде зі швидкістю 36 $км/год$: 1) по горизонтальній дорозі; 2) вгору по схилу гори з нахилом 5 $м$ на кожні 100 $м$ шляху; 3) вниз по схилу гори з тим же нахилом. Коефіцієнт тертя дорівнює 0,07.

1.130. Вантаж масою 10 $кг$ піднімають на висоту 10 $м$, діючи на нього силою 196 $Н$. Яка при цьому виконується робота? Яку потенціальну енергію буде мати вантаж?

1.131. Яку роботу треба виконати, щоб втягти тіло масою m

на площину з довжиною основи l і висотою h. Коефіцієнт тертя між тілом і площиною дорівнює k, а кут нахилу площини може змінюватися вздовж площини, але його знак залишається постійним?

1.132. У кулю масою m_1, яка рухається зі швидкістю υ_1, вдаряється друга куля масою m_2, яка наздоганяє першу зі швидкістю υ_2. Вважаючи удар абсолютно непружним, знайти швидкість куль після удару та їх кінетичну енергію.

1.133. Дерев'яна кулька падає з висоти 2 *м* вертикально вниз без початкової швидкості. Коефіцієнт відновлення при ударі кульки об підлогу дорівнює 0,5. Знайти: 1) на яку висоту підніметься кулька після удару об підлогу; 2) кількість тепла, яка виділиться при ударі. Маса кульки 100 *г*.

1.134. Куля масою $m_1 = 5\,г$, яка летить горизонтально зі швидкістю $\upsilon_1 = 500\,м/с$, попадає в тіло кулястої форми масою $m_2 = 0{,}5\,кг$, підвішене на легкому однорідному стержні, і застрягає в ньому. При якій граничній довжині стержня (відстані від точки підвісу до центра тіла) воно від удару кулі підніметься до верхньої точки кола?

1.135. Два тіла рухаються назустріч одне одному і непружно стикаються. Швидкість першого тіла до удару дорівнює $\upsilon_1 = 2\,м/с$, другого – $\upsilon_2 = 4\,м/с$. Загальна швидкість тіл після удару збігається за напрямком зі швидкістю υ_1 і дорівнює $\upsilon = 1\,м/с$. У скільки разів кінетична енергія першого тіла була більша за кінетичну енергію другого?

1.136. З якою швидкістю υ після горизонтального пострілу з гвинтівки почне рухатися стрілець, що стоїть на ковзанах на дуже гладкому льоду? Маса стрільця з гвинтівкою і спорядженням складає 70 *кг*, а маса кулі 10 *г* і її початкова швидкість 700 *м/с*.

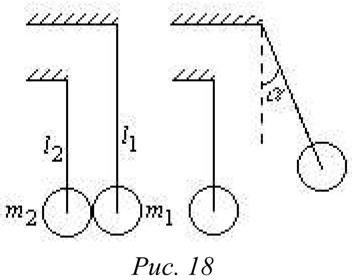

Рис. 18

1.137. Дві кульки різної маси m_1 і m_2 вільно підвішені на нитках різної довжини l_1 і l_2 так, що вони дотикаються (див. рис. 18). Першу кульку відхиляють у площині ниток на кут α і відпускають. Відбувається абсолютно пружний центральний удар. На які кути α_1 і α_2 відхиляться кульки?

1.138. Куля масою $m = 1\,кг$, що котиться без ковзання, вдаряється об стіну і відкочується від неї. Швидкість кулі до удару об стіну $\upsilon_1 = 10\,м/с$, після удару $\upsilon_2 = 8\,м/с$. Знайти кількість тепла, яка виділилася при ударі.

1.139. Хокейна шайба, пущена по поверхні льоду з початковою швидкістю $\upsilon_0 = 20\,м/с$, зупинилася через $t = 40\,с$. Знайти коефіцієнт тертя шайби по льоду.

1.140. Кулька масою $m = 300\,г$ вдарилася об стінку і відскочила від неї. Визначити імпульс p_1, отриманий стінкою, якщо в момент удару кулька мала швидкість $\upsilon_0 = 10\,м/с$ напрямлену під кутом $\alpha = 30^o$ до поверхні стінки. Удар вважати абсолютно пружним.

1.141. Куля масою $m_1 = 10\,кг$ рухається зі швидкістю $\upsilon_1 = 4\,м/с$ і вдаряється об другу кулю масою $m_2 = 4\,кг$, що має швидкість $\upsilon_2 = 2\,м/с$. Вважаючи удар абсолютно непружним і центральним, знайти швидкість u куль після удару в двох випадках: 1) мала куля наздоганяє велику; 2) кулі рухаються назустріч одна одній.

1.142. На залізничній платформі встановлена гармата. Маса платформи з гарматою $M = 15\,т$. Гармата стріляє вверх під кутом $\varphi = 60^o$ до горизонту. З якою швидкістю υ_1 покотиться платформа внаслідок віддачі, якщо снаряд масою $m = 20\,кг$ вилітає зі швидкістю $\upsilon_2 = 600\,м/с$?

1.143. Під дією постійної сили *F* візок пройшов шлях $S = 5\,м$ і набув швидкості $\upsilon = 2\,м/с$. Визначити роботу *А* сили, якщо маса візка $m = 400\,кг$ і коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}01$.

1.144. Визначити роботу *А*, при рівноприскореному підніманні вантажу масою масою $m = 100\,кг$ на висоту $h = 4\,м$ за час $t = 2\,с$.

1.145. Визначити роботу *А*, що виконується на переміщенні $S = 12\,м$ силою, яка рівномірно зростає. Початкове значення сили $F_1 = 10\,H$, а кінцеве – $F_2 = 46\,H$.

1.146. Матеріальна точка масою $m = 2\,кг$ рухалася під дією деякої сили за законом $x = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, де $A = 10\,м$;

$B = -2\,м/с$; $C = 1\,м/с^2$; $D = -0{,}2\,м/с^3$. Знайти потужність N, яка витрачається на рух точки, у моменти часу $t_1 = 2\,с$ і $t_2 = 5\,с$.

1.147. З гармати, яка жорстко закріплена на платформі, робиться постріл у горизонтальному напрямку. Маса снаряда $m = 10\,кг$ і його швидкість $\upsilon = 1\,км/с$. Маса платформи з гарматою $M = 20\,т$. На яку відстань l відкотиться платформа після пострілу, якщо коефіцієнт опору $\mu = 0{,}002$.

1.148. Куля масою $m = 10\,г$, що летіла зі швидкістю $\upsilon = 600\,м/с$, попала в балістичний маятник (рис. 19) масою $M = 5\,кг$ і застрягла у ньому. На яку висоту h підніметься маятник?

1.149. Два вантажі масами $m_1 = 10\,кг$ і $m_2 = 15\,кг$ підвішені на нитках довжиною $l = 2\,м$ так, що дотикаються один до одного. Менший вантаж відхилили на кут $\varphi = 60^o$ і відпустили. Вважаючи удар вантажів абсолютно непружним, визначити висоту h, на яку піднімуться вантажі після удару.

1.150. Горизонтальна платформа масою 100 *кг* обертається навколо вертикальної осі, що проходить через її центр, з частотою 10 *об/хв*. Людина вагою 600 *Н* стоїть при цьому біля краю платформи. З якою швидкістю почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центра? Вважати платформу однорідним диском, а людину – точковою масою.

1.151. Дерев'яний стержень масою $m = 1\,кг$ і довжиною $l = 40\,см$ може обертатися навколо осі, що проходить через його середину перпендикулярно до стержня. В кінець стержня попадає куля масою $m_1 = 10\,г$, яка летить перпендикулярно до осі і до стержня зі швидкістю $\upsilon = 200\,м/с$. Визначити: 1) кутову швидкість, якої набуде стержень, якщо куля застряває в ньому; 2) як змінилась при попаданні кулі в стержень сума їх кінетичних енергій.

1.152. Знайти лінійні швидкості центрів тяжіння 1) кулі, 2) диска і 3) обруча, які скочуються без ковзання з похилої площини висотою

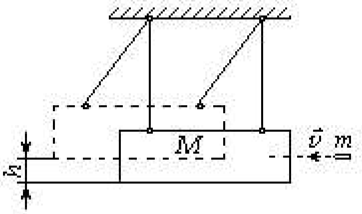

Рис. 19

$h = 0{,}5\,м$, початкова швидкість всіх тіл дорівнює нулю. 4) Порівняти знайдені швидкості зі швидкістю тіла, яке зісковзує з цієї похилої площини без тертя.

1.153. З якої найменшої висоти h повинен з'їхати велосипедист, щоб за інерцією (без тертя) проїхати доріжку, яка має форму "мертвої петлі" радіусом $R = 3\,м$, і не відірватись від неї у верхній точці? Маса велосипедиста разом з велосипедом $m = 75\,кг$, причому на масу коліс припадає $m_1 = 3\,кг$. Колеса велосипеда вважати обручами.

1.154. Мідна куля радіусом $R = 10\,см$ обертається з частотою $\nu = 2\,об/с$ навколо осі, яка проходить через її центр. Яку роботу треба виконати, щоб збільшити частоту обертання кулі вдвоє?

1.155. Диск радіусом 0,2 *м* і масою 100 *кг*, обертаючись рівносповільнено при гальмуванні, зменшив за 1 *хв* швидкість обертання від 300 *об/хв* до 180 *об/хв*. Знайти: 1) кутове прискорення диска; 2) гальмуючий момент; 3) роботу гальмування; 4) кількість обертів диска за цю хвилину.

1.156. Яку роботу треба виконати, щоб примусити рухоме тіло масою 2 *кг* збільшити свою швидкість від 2 *м/с* до 5 *м/с*?; зупинитися при початковій швидкості 8 *м/с*?

1.157. Камінь, пущений по поверхні льоду зі швидкістю 2 *м/с* , пройшов до повної зупинки відстань 20,4 *м*. Знайти коефіцієнт тертя каменя по льоду, вважаючи його постійним.

1.158. Вагон вагою $2 \cdot 10^5$ *Н*, який рухається рівносповільнено під дією сили тертя 6000 *Н*, через деякий час зупиняється. Початкова швидкість вагона 54 *км/год*. Знайти: 1) роботу сили тертя; 2) відстань, яку вагон пройде до зупинки.

1.159. З башти висотою 25 *м* горизонтально кинуто камінь масою 0,2 *кг* зі швидкістю 15 *м/с*. Знайти кінетичну і потенціальну енергію каменя через 1 *с* після початку руху. Опір повітря не враховувати.

1.160. Камінь масою 0,2 *кг* кинули під кутом $\alpha = 60^\circ$ до горизонту зі швидкістю $\upsilon = 15\,м/с$. Знайти кінетичну і потенціальну енергію каменя 1) через 1 *с* після початку руху; 2) у найвищій точці траєкторії. Опором повітря знехтувати.

1.161. Камінь вагою 20 *Н* впав з деякої висоти. Падіння тривало 1,43 *с*. Знайти кінетичну і потенціальну енергію каменя в середній точці шляху. Опором повітря знехтувати.

1.162. Людина вагою 600 *Н*, яка біжить зі швидкістю 8 *км/год*, наздоганяє візок вагою 800 *Н*, який рухається зі швидкістю 2,9 *км/год* і заскакує на нього. 1) З якою швидкістю почне рухатись візок? 2) З якою швидкістю буде рухатися візок, якщо людина бігла йому назустріч?

1.163. Снаряд вагою 980 *Н*, який летить горизонтально зі швидкістю 500 *м/с* вздовж залізниці, попадає в вагон з піском вагою 10^5 *Н* і застряває в ньому. З якою швидкістю почне рухатися вагон, якщо він: 1) стояв нерухомо, 2) рухався зі швидкістю 36 *км/год* в тому ж напрямку, що і снаряд, 3) рухався зі швидкістю 36 *км/год* назустріч снаряду?

1.164. Вагон вагою $19{,}6\cdot 10^5$ *Н* рухається зі швидкістю 54 *км/год*. Визначити середню силу, яка діє на вагон, якщо відомо, що вагон зупиняється через 1) 1 *хв* 40 *с*; 2) 10 *с*; 3) 1*с*.

1.165. Три маленькі кульки масою $m = 10\,г$ кожна розташовані у вершинах правильного трикутника зі стороною $a = 20\,см$ і скріплені між собою. Визначити момент інерції J системи відносно осі: 1) яка перпендикулярна до площини трикутника і проходить через центр описаного кола; 2) яка лежить у площині трикутника і проходить через центр описаного кола та одну з вершин трикутника. Масою стержнів, що з'єднують кульки, знехтувати.

1.166. Визначити момент інерції J тонкого однорідного стержня довжиною $l = 30\,см$ і масою $m = 100\,г$ відносно осі, яка перпендикулярна до стержня і проходить через: 1) його кінець; 2) його середину; 3) точку, яка відстоїть від кінця стержня на 1/3 його довжини.

1.167. Визначити момент інерції J тонкого однорідного стержня довжиною $l = 60\,см$ і масою $m = 100\,г$ відносно осі, яка перпендикулярна до стержня і проходить через точку стержня, що знаходиться на відстані $a = 20\,см$ від одного з його кінців.

1.168. Обчислити момен інерції J дротяного прямокутника зі сторонами $a = 12\,см$ і $b = 16\,см$ відносно осі, що лежить у площині прямокутника і проходить через середини малих сторін.

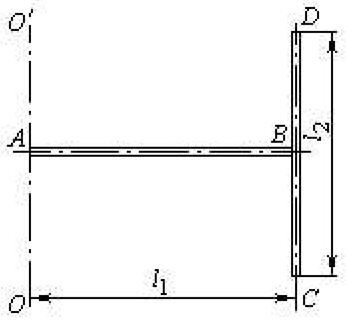

Рис. 20

Маса рівномірно розподілена по довжині дротини з лінійною густиною $\tau = 0{,}1\,кг/м$.

1.169. Два однорідних тонких стержня: *AB* довжиною $l_1 = 40\,см$ і масою $m_1 = 900\,г$ та *CD* довжиною $l_2 = 40\,см$ і масою $m_2 = 400\,г$ скріплені під прямим кутом (рис. 20). Визначити момент інерції *J* системи стержнів відносно осі OO', яка проходить через кінець стержня *AB* паралельно стержню *CD*.

1.170. Діаметр диска $d = 20\,см$, маса $m = 800\,г$. Визначити момент інерції *J* диска відносно осі, яка проходить через середину одного з радіусів перпендикулярно до площини диска.

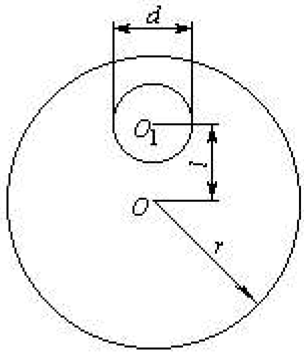

Рис. 21

1.171. В однорідному диску масою $m = 1\,кг$ і радіусом $r = 30\,см$ вирізано круглий отвір діаметром $d = 20\,см$, центр якого знаходиться на відстані $l = 15\,см$ від осі диска (рис. 21). Знайти момент інерції *J* отриманого тіла відносно осі, яка проходить перпендикулярно до площини диска через його центр.

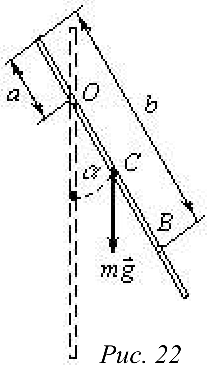

Рис. 22

1.172. Обчислити момен інерції *J* тонкої прямокутної пластини зі сторонами $a = 10\,см$ і $b = 20\,см$ відносно осі, яка проходить через центр мас пластини паралельно довшій стороні. Маса пластини рівномірно розподілена її поверхнею з поверхневою густиною $\sigma = 1{,}2\,кг/м^2$.

1.173. Тонкий однорідний стержень може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку *O* на стержні (рис. 22). Стержень відхилили на кут α від вертикалі й відпустили. Визначити для точки *B* на стержні кутове ε і тангенційне a_τ прискорення у початковий момент часу. Обчислення виконати для наступних випадків: 1) $a = 0$, $b = 2/3l$, $\alpha = \pi/2$; 2) $a = l/3$, $b = l$, $\alpha = \pi/3$; 3) $a = l/4$, $b = l/2$, $\alpha = 2/3\pi$.

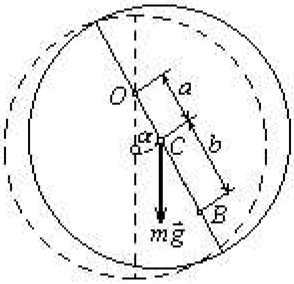

Рис. 23

1.174. Однорідний диск радіусом $R = 10\,см$ може обертатися навколо горизонтальної осі, яка перпендикулярна до площини диска і проходить через точку *O* на ньому (рис. 23). Диск відхилили на кут α й відпустили. Визначити для точки *B* на диску кутове ε і тангенційне a_τ прискорення у початковий момент часу. Обчислення виконати для наступних випадків: 1) $a = R$, $b = R/2$, $\alpha = \pi/2$; 2) $a = R/2$, $b = R$, $\alpha = \pi/6$; 3) $a = 2/3\,R$, $b = 2/3\,R$, $\alpha = 2/3\pi$.

1.175. Куля масою $m = 10\,кг$ і радіусом $R = 20\,см$ обертається навколо осі, що проходить через центр кулі. Закон обертання кулі має вигляд $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, де $A = 3\,рад$; $B = 4\,рад/c^2$; $C = -1\,рад/c^3$. Знайти закон зміни момента сил, які діють на кулю. Визначити цей момент сил *M* для момента часу $t = 2\,c$.

1.176. Однорідний стержень масою $m_1 = 0{,}2\,кг$ і довжиною $l = 1\,м$ може вільно обертатися навколо горизонтальної осі, яка проходить через точку *O* (рис. 24). У точку *A* на стержні попадає пластилінова кулька масою $m_2 = 10\,г$, яка летіла горизонтально зі швидкістю $\upsilon = 10\,м/с$, і прилипає до стержня. Визначити кутову швидкість ω стержня та лінійну швидкість u кінця стержня у початковий момент часу. Обчислення виконати для наступних значень відстані між точками *A* і *O*: 1) $l/2$; 2) $l/3$; 3) $l/4$.

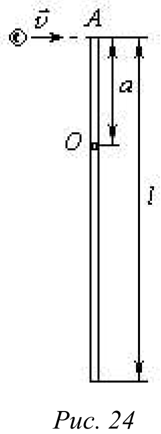

Рис. 24

1.177. Однорідний диск масою $m_1 = 0{,}2\,кг$ і радіусом $R = 20\,см$ може обертатися навколо горизонтальної осі, яка перпендикулярна до

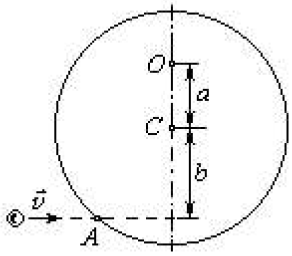

Рис. 25

площини диска і проходить через точку C (рис. 25). У точку А на ободі диска попадає пластилінова кулька масою $m_2 = 10\,г$, яка летіла горизонтально зі швидкістю $\upsilon = 10\,м/с$, і прилипає до нього. Визначити кутову швидкість ω диска та лінійну швидкість u точки O на диску у початковий момент часу. Обчислення виконати для наступних значень відстаней a і b: 1) $a = b = R$; 2) $a = R/2$, $b = R$; 3) $a = R/3,\ b = 2R/3$.

1.178. Людина стоїть на лаві Жуковського і ловить рукою м'яч масою $m_1 = 0{,}4\,кг$, який летів горизонтально зі швидкістю $\upsilon = 20\,м/с$. Траєкторія м'яча проходить на відстані $r = 0{,}8\,м$ від вертикальної осі обертання лави. З якою кутовою швидкістю ω почне обертатися лава Жуковського з людиною, що впіймала м'яч, якщо їх сумарний момент інерції J становить $6\,кг \cdot м^2$?

1.179. На краю горизонтальної платформи, що має форму диска радіусом $R = 2\,м$, стоїть людина масою $m_1 = 80\,кг$. Маса платформи $m_2 = 240\,кг$. Платформа може обертатися навколо вертикальної осі, яка проходить через її центр. Нехтуючи тертям, знайти, з якою кутовою швидкістю ω буде обертатися платформа, якщо людина буде йти її краєм зі швидкістю $\upsilon = 2\,м/с$ відносно платформи.

1.180. Платформа у формі диска може обертатися навколо вертикальної осі. На краю платформи стоїть людина масою $m_1 = 60\,кг$. На який кут φ повернеться платформа, якщо людина піде краєм платформи і, обійшовши її, повернеться у вихідну точку? Маса платформи $m_2 = 240\,кг$. Момент інерції J людини розраховувати як для матеріальної точки.

1.181. Маховик обертається за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $A = 2\,рад$; $B = 32\,рад/с$; $C = -4\,рад/с^2$. Знайти середню потужність $< N >$ моментів сил, що діють на маховик при його обертанні до повної зупинки, якщо момент інерції $J = 100\,кг \cdot м^2$.

1.182. Маховик обертається за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $A = 2\,рад$; $B = 16\,рад/с$; $C = -2\,рад/с^2$. Момент інерції

$J = 50\,кг \cdot м^2$. Знайти закони зміни обертового моменту M та потужності N. Чому дорівнює потужність у момент часу $t = 3\,с$?

1.183. Кінетична енергія T маховика, що обертається, дорівнює 1 *кДж*. Під дією постійного гальмуючого моменту маховик почав обертатися рівносповільнено і зупинився, зробивши $N = 80\,об$. Визначити гальмуючий момент.

1.184. Куля масою $m = 10\,г$ летить зі швидкістю $\upsilon = 800\,м/с$ і обертається навколо поздовжньої осі з частотою $n = 3000\,с^{-1}$. Вважаючи кулю циліндриком з діаметром $d = 8\,мм$, визначити її повну кінетичну енергію.

1.185. Суцільний циліндр масою $m = 4\,кг$ котиться без ковзання горизонтальною поверхнею. Лінійна швидкість осі циліндра $\upsilon = 1\,м/с$. Визначити повну кінетичну енергію циліндра.

Розділ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

1. ГАЗОВІ ЗАКОНИ. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНО – КІНЕТИЧНОЇ ТЕОРІЇ

Основні співвідношення

Молекулярна фізика вивчає властивості тіл в залежності від їх внутрішньої (молекулярної) будови. Найпростішою моделлю, яка для цього застосовується, є модель ідеального газу.

Ідеальним називають газ, в якому нехтують потенціальною енергією взаємодії між молекулами, а самі молекули вважають матеріальними точками. Для такої моделі справедливе рівняння Клапейрона – Менделєєва, яке називається рівнянням стану:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \quad \text{або} \quad PV = \nu RT, \tag{2.1}$$

де m – маса газу μ – його молярна маса, $R = 8{,}31\,Дж/(моль \cdot K)$ – універсальна газова стала, T – абсолютна температура, P – тиск, V – об'єм, $\nu = m/\mu$ – кількість речовини.

Відмітимо, що співвідношення (2.1) справедливе для розріджених газів і для газів, температура яких значно вище критичної. З рівняння Клапейрона – Менделєєва можна отримати всі відомі закони ідеального газу (закони Бойля – Маріотта, Шарля, Гей-Люссака, Дальтона, Авогадро).

Молярну масу суміші газів можна знайти зі співвідношення:

$$\mu = \frac{(m_1 + m_2 + ... + m_n)}{(\nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_n)} . \quad (2.2)$$

Концентрація часток (молекул чи атомів) однорідної системи:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A \rho}{\mu}, \quad (2.3)$$

де N – кількість часток в системі, V – об'єм системи, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{-23}$ $моль^{-1}$ – число Авогадро, ρ – густина речовини.

Основне рівняння молекулярно – кінетичної теорії газів:

$$P = \frac{2}{3} n < \varepsilon >, \quad (2.4)$$

де $< \varepsilon >$ – середня кінетична енергія поступального руху молекул.

Середня кінетична енергія, яка припадає на одну ступінь вільності молекули:

$$< \varepsilon_1 >= \frac{1}{2} kT, \quad (2.5)$$

а на *i* ступеней вільності

$$< \varepsilon >= \frac{i}{2} kT, \quad (2.6)$$

де $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ $Дж / К$ – стала Больцмана, T – абсолютна температура, i – кількість ступенів вільності.

Характеристичні швидкості молекул:

середня квадратична $$< \upsilon_{кв} >= \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}; \quad (2.7)$$

середня арифметична $$< \upsilon >= \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}}; \quad (2.8)$$

найбільш ймовірна $$< \upsilon_{йм} >= \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (2.9)$$

Розподіл Больцмана (розподіл часток у силовому полі)

$$n = n_0\, \mathrm{e}^{-\frac{U}{kT}}, \qquad (2.10)$$

де n – концентрація часток з потенціальною енергією U; n_0 – концентрація часток з потенціальною енергією $U = 0$; k – стала Больцмана; T– абсолютна температура, e – основа натурального логарифма.

Барометрична формула (розподіл тиску в однорідному полі сили тяжіння)

$$P = P_0\, \mathrm{e}^{-\frac{m_0 gh}{kT}} \text{ або } P = P_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\mu gh}{RT}}, \qquad (2.11)$$

де P – тиск газу на висоті h; m_0 – маса молекули; μ – молярна маса; P_0 – тиск на рівні моря (при $h = 0$); g – прискорення вільного падіння; R – універсальна газова стала.

Розподіл Максвелла (розподіл молекул за швидкостями) визначає кількість молекул, відносні швидкості яких знаходяться в межах від u до $u + du$, і записується у вигляді:

$$dN(u) = Nf(u)du = \frac{4}{\sqrt{\pi}} Ne^{-u^2} u^2 du, \qquad (2.12)$$

де $u = \upsilon/\upsilon_{йм}$ – відносна швидкість, $f(u) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} u^2$ – функція розподілу за відносними швидкостями.

Методичні поради

1. При розв'язуванні задач з ідеальними газами слід пам'ятати, що для даної маси газу рівняння Менделєєва – Клапейрона справедливе при будь-яких ізопроцесах (ізотермічних, ізобаричних, ізохоричних). Якщо стан системи змінюється, то рівняння Менделєєва – Клапейрона записують для кожного стану і розв'язують отриману систему рівнянь відносно невідомих величин.

2. При розв'язуванні задач на розподіли Больцмана і Максвелла варто пам'ятати, що фізичний зміст функції розподілу даної фізичної величини – це густина ймовірності деякого значення цієї величини. Для знаходження ймовірності

того, що розглядувана величина набуде значення з наперед заданого скінченного інтервалу її можливих значень, необхідно помножити функцію розподілу на ширину нескінченно малого інтервалу і проінтегрувати цей добуток в заданих межах.

Так, наприклад, для знаходження ймовірності того, що швидкість молекул набуде значення з інтервалу $[\upsilon_1, \upsilon_2]$ (або відносної кількості молекул, швидкості яких за даних умов набувають значень з інтервалу $[\upsilon_1, \upsilon_2]$), необхідно функцію розподілу Максвелла за швидкостями

$f(\upsilon) = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{m_0}{2kT} \right)^{3/2} \mathrm{e}^{-m_0 \upsilon^2 /(2kT)} \, \upsilon^2$ помножити на $d\upsilon$ і

проінтегрувати в межах від υ_1 до υ_2.

Приклади розв'язування задач

1. Визначити густину суміші $m_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ *кг* водню ($\mu_1 = 2$ *г/моль*) і $m_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ *кг* кисню ($\mu_2 = 32$ *г/моль*) при температурі $T = 280\,K$ і загальному тиску $P = 0{,}93 \cdot 10^5$ *Па*.

Розв'язання

Згідно з законом Дальтона тиск суміші газів дорівнює сумі парціальних тисків її складових:

$$P = P_1 + P_2 . \tag{1}$$

Запишемо рівняння стану для суміші та для кожного газу і знайдемо з них тиски:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow P = \frac{m}{V} \frac{RT}{\mu} \text{ – для суміші;} \tag{2}$$

$$P_1 V = \frac{m_1}{\mu_1} RT \Rightarrow P_1 = \frac{m_1}{V} \frac{RT}{\mu_1} \text{ – для водню;} \tag{3}$$

$$P_2 V = \frac{m_2}{\mu_2} RT \Rightarrow P_2 = \frac{m_2}{V} \frac{RT}{\mu_2} \text{ – для кисню;} \tag{4}$$

Підставимо (2) – (4) в (1) і отримаємо вираз для молярної маси суміші:

$$\frac{m}{V}\frac{RT}{\mu}=\frac{m_1}{V}\frac{RT}{\mu_1}+\frac{m_2}{V}\frac{RT}{\mu_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{m}{\mu}=\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\Rightarrow\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m}\left(\frac{m_1}{\mu_1}+\frac{m_2}{\mu_2}\right)\Rightarrow$$

$$\mu=\frac{m}{\nu_1+\nu_2}=\frac{m_1+m_2}{\nu_1+\nu_2}, \qquad (5)$$

де $\nu_1=m_1/\mu_1$ і $\nu_2=m_2/\mu_2$ кількості молів водню і кисню відповідно.

Густина за визначенням $\rho=m/V$. Урахувавши це в рівнянні (2), перепишемо його у вигляді:

$$P=\rho\frac{RT}{\mu},$$

звідки шукана густина

$$\rho=\frac{P\mu}{RT}. \qquad (6)$$

Підставивши (5) в (6), отримаємо остаточну формулу для густини:

$$\rho=\frac{P}{RT}\frac{m_1+m_2}{\nu_1+\nu_2}. \qquad (7)$$

Після підстановки числових значень величин в одиницях SI одержимо $\rho=0{,}48\,кг/м^3$.

Відповідь: $0{,}48\,кг/м^3$.

2. Припускаючи, що температура і прискорення вільного падіння не залежить від висоти, знайти на якій висоті h густина кисню зменшиться на 1%? Температура кисню 300 K, молярна маса – $\mu=32\,г/моль$.

Розв’язання

Запишемо барометричну формулу

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right), \tag{1}$$

де P_0 – тиск на рівні моря. Врахуємо той факт, що тиск зв’язаний з густиною співвідношенням $P = \rho\frac{RT}{\mu}$ і перепишемо (1) у вигляді:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right). \tag{2}$$

Зменшення густини на 1% означає, що $\rho = 0{,}99\rho_0$. Маса молекули кисню $m_0 = \frac{\mu}{N_A}$. З урахуванням цього (2) перепишеться:

$$0{,}99\rho_0 = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g h}{kN_A T}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0{,}99 = \exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right), \tag{3}$$

де враховано, що $kN_A = R$.

Прологарифмуємо (3) і одержимо:

$$\ln 0{,}99 = \ln\left(\exp\left(-\frac{\mu g h}{RT}\right)\right) \Rightarrow \ \ln 0{,}99 = -\frac{\mu g h}{RT} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = -\frac{\ln 0{,}99 RT}{\mu g} = -\frac{-0{,}01\cdot 8{,}31\cdot 300}{32\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}8} = 80\ \text{м}.$$

Відповідь: 80 *м*.

Задачі для самостійного розв'язування

2.1. Манометр у вигляді скляної U – подібної трубки з внутрішнім діаметром $d = 5$ *мм* (рис. 26а) заповнений ртуттю так, що повітря в запаяній частині трубки займає при нормальному атмосферному тиску об'єм $V_1 = 10\,мм^3$. При цьому різниця рівнів ртуті в обох колінах манометра Δh_1 становить 10 *см*. При під'єднанні відкритого кінця трубки до більшої посудини (рис. 26б) різниця Δh_2 зменшилася до 1 *см*. Визначити тиск *P* в посудині.

2.2. При нагріванні ідеального газу на $\Delta T = 1\,K$ при постійному тиску, його об'єм збільшився на 1/350 початкового об'єму. Знайти початкову температуру *T* газу.

2.3. Оболонка повітряної кулі об'ємом $V = 800\,м^3$ повністю заповнена воднем при температурі $T_1 = 273\,K$. На скільки зміниться піднімальна сила кулі при збільшенні температури до $T_2 = 293\,K$? Вважати об'єм *V* оболонки незмінним і зовнішній тиск нормальним. У нижній частині оболонки є отвір, через який водень може витікати в навколишнє середовище.

2.4. В оболонці сферичного аеростата об'ємом $V = 1500\,м^3$ знаходиться газ , який заповнює оболонку лише частково. На скільки зміниться піднімальна сила аеростата, якщо газ у ньому нагріти від $T_0 = 273\,K$ до $T = 293\,K$? Тиск газу в оболонці і навколишньому середовищі постійний і дорівнює нормальному атмосферному тиску.

2.5. Газовий термометр складається з кулі і припаяної до неї скляної трубки. Крапелька ртуті, поміщена в трубку, відокремлює об'єм кулі від навколишнього середовища (рис. 27). Площа поперечного перерізу трубки $S = 0{,}1\,см^2$.

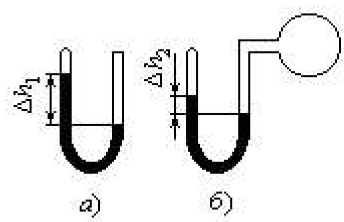

Рис. 26

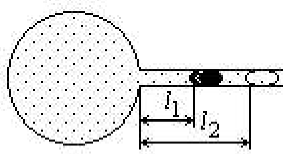

Рис. 27

При температурі $T_1 = 273\,K$ крапелька знаходилася на відстані $l_1 = 30\,см$ від поверхні кулі, при температурі $T_2 = 278\,K$ – на відстані $l_2 = 50\,см$. Знайти об'єм V кулі.

2.6. У велику посудину з водою було перекинуто циліндричну посудину. Рівні води всередині і поза посудиною – однакові. Відстань l від рівня води до дна перекинутої посудини дорівнює 40 *см*. На яку висоту h підніметься вода в циліндричній посудині при зменшенні температури від $T_1 = 310\,K$ до $T_2 = 273\,K$? Атмосферний тиск нормальний.

2.7. Оболонка аеростата об'ємом $V = 1600\,м^3$, який знаходиться на поверхні Землі на $k = 7/8$ заповнена воднем під тиском $P = 100\,кПа$ при температурі $T = 290\,K$. Аеростат підняли на деяку висоту, на якій тиск $P_1 = 80\,кПа$ і температура $T_1 = 280\,K$. Визначити масу водню, який витече з оболонки аеростата при його підніманні.

2.8. Який об'єм V займає суміш газів – азоту масою $m_1 = 1\,кг$ і гелію масою $m_2 = 1\,кг$ – за нормальних умов?

2.9. В 1 *кг* сухого повітря міститься $m_1 = 232\,г$ кисню і $m_2 = 768\,г$ азоту (масами інших газів нехтуємо). Визначити відносну молекулярну масу M_r повітря.

2.10. 10 *г* кисню знаходяться під тиском 3 *атм* при температурі 10 ^{O}C. Після розширення внаслідок нагрівання при постійному тиску кисень зайняв об'єм 10 *л*. Знайти: а) об'єм газу до розширення; б) температуру газу після розширення; в) густину газу до розширення; г) густину газу після розширення.

2.11. Компресор захоплює при кожному качанні 4 *л* повітря при нормальному атмосферному тиску і температурі –3 ^{O}C і нагнітає його в резервуар місткістю 1,5 $м^3$, причому температура повітря в резервуарі підтримується близько 45 ^{O}C. Скільки качань повинен зробити компресор, щоб тиск у резервуарі збільшився на $2 \cdot 10^5$ $Н/м^2$?

2.12. Із балона зі стиснутим воднем місткістю 10 *л* внаслідок несправності вентиля витікає газ. При температурі 7 ^{O}C манометр показує $4{,}9 \cdot 10^6$ $Н/м^2$. Через деякий час при температурі 17 ^{O}C манометр показав такий самий тиск. Скільки газу витекло?

2.13. Топочний газ має такий склад по масі: CO_2–21,4 %; H_2O –6,8 %; N_2–71,8 %. Визначити питомий об'єм такого газу при тиску 10^5 *Па* і температурі 500 *К*.

2.14. Три балони місткістю 3, 7, і 5 *л* наповнені, відповідно, киснем (2 *атм*), азотом (3 *атм*) і вуглекислим газом (0,6 *атм*) при однаковій температурі. Балони з'єднують між собою, причому утворюється суміш тієї ж температури. Який буде тиск цієї суміші?

2.15. У посудині об'ємом 20 *л* знаходиться 10 *г* азоту і 20 *г* вуглекислого газу при температурі 300 *К*. Визначити: 1) молярну масу суміші; 2) тиск у посудині; 3) тиск у посудині після нагрівання до 400 *К*.

2.16. Балон місткістю 20 *л* заповнений стиснутим повітрям. При температурі 20 ^{O}C манометр показує тиск $1{,}2 \cdot 10^7$ *Н*/*м*^{2}. Який об'єм води можна витіснити із цистерни підводного човна повітрям цього балона, якщо витіснення проводиться на глибині 30 *м* при температурі 5 ^{O}C? Вважати, що тиск стовпа води висотою 10 *м* дорівнює 10^5 *Н*/*м*^{2}, тиск атмосфери – 10^5 *Н*/*м*^{2}.

2.17. 12 *г* газу займають об'єм $4 \cdot 10^{-3}$ *м*^{3} при температурі 7 ^{O}C. Після нагрівання при постійному тиску густина газу стала $6 \cdot 10^{-4}$ *г*/*см*^{3}. До якої температури нагріли газ?

2.18. Посередині відкачаної і запаяної з обох кінців горизонтальної трубки довжиною L = 1 *м* знаходиться стовпчик ртуті завжовжки h = 20 *см*. Якщо трубку поставити вертикально, стовпчик ртуті зміститься на l = 10 *см*. До якого тиску була відкачана трубка?

2.19. Горизонтальна запаяна з обох кінців скляна трубка розділена стовпчиком ртуті на дві рівні частини. Довжина кожного стовпчика повітря 20 *см*. Тиск 750 *мм рт. ст.* Якщо трубку поставити вертикально, ртутний стовпчик опускається на 2 *см*. Визначити довжину стовпчика ртуті.

2.20. У скільки разів збільшиться об'єм повітряної кулі, якщо її внести з вулиці у тепле приміщення? Температура на вулиці –3 ^{O}C, у приміщенні – +27 ^{O}C.

2.21. Усередині закритого з обох боків горизонтального циліндра знаходиться тонкий поршень, який може рухатися без тертя. З одного боку від поршня міститься водень масою m_1= 3 *г*, з другого – азот масою m_2 = 23 *г*. Яку частину об'єму циліндра займає водень?

2.22. Дві посудини, які містять однакові маси одного і того самого газу з’єднані трубкою з краном. У першій посудині тиск $P_1 = 10^5$ *Па*, і в другій $P_2 = 3 \cdot 10^5$ *Па*. Температура однакова. Який встановиться тиск після відкриття крана?

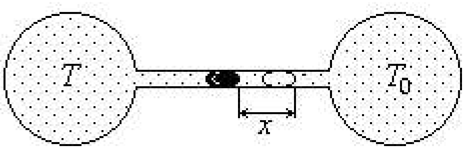

Рис. 28

2.23. Газовий термометр (рис. 28) складається з двох однакових посудин з газом, що мають об’єм V_0 кожна, які з’єднані трубкою довжиною l з поперечним перерізом S. Трубку перекриває крапля ртуті. Якщо температури газів у об’ємах однакові, ртуть знаходиться посередині трубки. Правий об’єм поміщають у термостат з температурою T_0. Проградуюйте термометр, знайшовши залежність температури газу в лівому об’ємі від зміщення x ртуті від положення рівноваги.

2.24. Загальновідоме жартівливе запитання:”Що важче: тонна свинцю чи тонна корку?” Підрахувати, на скільки істинна вага корку, який у повітрі важить 1 *кН*, більша за істинну вагу свинцю, який у повітрі також важить 1 *кН*. Температура повітря 17 ^{O}C, тиск 760 *мм рт. ст.*

2.25. Якою повинна бути вага оболонки дитячої повітряної кулі діаметром 25 *см*, заповненої воднем, щоб результуюча піднімальна сила кульки у повітрі дорівнювала нулеві. Повітря і водень знаходяться за нормальних умов. Тиск усередині кульки дорівнює зовнішньому.

2.26. У скляній посудині сферичної форми з внутрішнім діаметром 3 *см* знаходиться азот, тиск якого при температурі 190 ^{O}C дорівнює 0,01 *мм рт. ст.* На стінках посудини є мономолекулярний шар адсорбованого азоту. Площа, яку займає одна молекула азоту на стінках посудини, дорівнює 10^{-15} *см*^{2}. Який тиск азоту в посудині при температурі 427 ^{O}C, за умови, що всі молекули повністю десорбуються зі стінок ?

2.27. Знайти кількість молекул азоту, що містяться за нормальних умов у 1 *см*^{3} і володіють швидкістю: а) між 99 і 101 *м/с*; б) між 499 і 501 *м/с*.

2.28. При якій температурі кількість молекул азоту, що володіють швидкостями в інтервалі 299 – 301 *м/с*, дорівнює кількості молекул, що мають швидкості в інтервалі 599 – 601 *м/с*?

2.29. Який тиск суміші газів у колбі об'ємом 2,5 *л*, якщо в ній знаходиться 10^{15} молекул кисню, $4\cdot10^{15}$ молекул азоту і $3{,}3\cdot10^{-7}$ *г* аргону? Температура суміші 150 ^{O}C.

2.30. Перрен, спостерігаючи за допомогою мікроскопа зміну концентрації зважених часточок гумігута зі зміною висоти і застосувавши барометричну формулу, експериментально визначив сталу Авогадро. В одному із своїх дослідів Перрен знайшов, що при відстані між двома шарами 100 *мкм* кількість зважених часточок гумігута вдвоє більша, ніж у другому. Температура гумігута 20 ^{O}C. Часточки гумігута діаметром $0{,}3\cdot10^{-4}$ *см* були зважені в рідині, густина якої на 0,2 *г/см*^{3} менша за густину часточок. Знайти за цими даними значення сталої Авогадро?

2.31. Знайти кінетичну енергію теплового руху молекул, що знаходяться в 1 *г* повітря при температурі 15 ^{O}C. Повітря вважати однорідним газом, маса одного кіломоля якого 29 *кг/кмоль*.

2.32. Чому дорівнює енергія теплового руху молекул двохатомного газу, що міститься в посудині об'ємом 2 *л* під тиском $1{,}5\cdot10^5$ *Н/м*^{2}?

2.33. У посудині місткістю 2 *л* знаходиться 10 *г* кисню під тиском 680 *мм рт. ст.* Знайти: 1) середню квадратичну швидкість молекул газу; 2) кількість молекул у посудині; 3) густину газу.

2.34. На якій висоті h над поверхнею Землі атмосферний тиск удвічі менший, ніж на її поверхні? Вважати температуру T незалежною від висоти і такою, що дорівнює 290 *К*.

2.35. Барометр у кабіні гелікоптера, що летить, показує $P = 90\ кПа$. На якій висоті h летить гелікоптер, якщо на злітній смузі барометр показував тиск $P_0 = 100\ кПа$? Вважати, що температура T дорівнює 290 *К* і не змінюється з висотою.

2.36. Знайти зміну висоти Δh, що відповідає зміні тиску на $\Delta P = 100\ Па$, у двох випадках: 1) біля поверхні Землі, де температура $T_1 = 290\ К$ і тиск $P_1 = 100\ кПа$; 2) на деякій висоті, де температура $T_2 = 220\ К$ і тиск $P_2 = 25\ кПа$.

2.37. Барометр у кабіні літака, що летить, весь час показує однаковий тиск $P = 80\ кПа$, завдяки чому пілот вважає висоту польоту сталою. Але температура змінилася на $\Delta T = 1\ K$. Якої похибки Δh у визначенні висоти припускається пілот? Вважати, що температура не залежить від висоти і що біля поверхні Землі тиск $P_0 = 100\ кПа$.

2.38. На якій висоті тиск повітря складає 75 % від тиску на рівні моря? Температуру вважати постійною і такою, що дорівнює 0 $^{\circ}C$.

2.39. Пасажирський літак виконує політ на висоті 8000 *м*. Щоб не забезпечувати пасажирів кисневими масками, у салоні за допомогою компресора підтримується постійний тиск, що відповідає висоті 2700 *м*. Знайти різницю тисків всередині і зовні кабіни. Середню температуру зовнішнього повітря вважати такою, що дорівнює 0 $^{\circ}C$.

2.40. Скільки важить 1 $м^3$ повітря: 1) біля поверхні Землі; 2) на висоті 4 *км* від поверхні Землі? Температуру вважати постійною і такою, що дорівнює 0 $^{\circ}C$. Тиск повітря біля поверхні Землі 10^5 *Па*.

2.41. На якій висоті густина газу складає 50 % від її густини на рівні моря? Температуру вважати постійною і такою, що дорівнює 0 $^{\circ}C$. Задачу розв'язати для: 1) повітря і 2) водню.

2. ОСНОВИ ТЕРМОДИНАМІКИ. ЕНТРОПІЯ

Основні співвідношення

Рівняння Майєра

$$C_p - C_V = R\,, \qquad (2.13)$$

де $C_P = \dfrac{i+2}{2}R$ і $C_V = \dfrac{i}{2}R$ – молярні теплоємності при постійному тиску та постійному об'ємі, відповідно.

Внутрішня енергія ідеального газу:

$$U = \frac{m}{\mu}C_V T\,. \qquad (2.14)$$

Кількість теплоти, що отримує система в процесі теплообміну:

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} C(T_2 - T_1), \tag{2.15}$$

де C – молярна теплоємність процесу.

Робота газу, пов'язана зі зміною об'єму, в загальному випадку визначається за співвідношенням:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV, \tag{2.16}$$

де V_1 – початковий об'єм газу, V_2 – кінцевий. При ізобаричному процесі:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} PdV = P(V_2 - V_1); \tag{2.17}$$

при ізотермічному процесі;

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{m}{\mu} RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right); \tag{2.18}$$

при адіабатичному процесі:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2). \tag{2.19}$$

Рівняння Пуассона (рівняння адіабатичного процесу)

$$PV^{\gamma} = const, \tag{2.20}$$

де $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ – показник адіабати.

Перше начало термодинаміки:

$$\Delta Q = \Delta U + A; \tag{2.21}$$

де ΔQ – кількість теплоти, яку надали газові; ΔU – зміна його внутрішньої енергії; A – робота, яку здійснює газ проти зовнішніх сил.

Термодинамічний *коефіцієнт корисної дії* (к. к. д.) циклу в загальному випадку:

$$\eta = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|}, \tag{2.22}$$

де Q_1 – кількість теплоти, яку отримало робоче тіло (газ) від нагрівника; $|Q_2|$ – абсолютне значення кількості теплоти, яку робоче тіло передало охолоджувачу.

К. к. д. циклу Карно (циклу, за яким працює ідеальна теплова машина) можна визначити за формулою (2.22) або через температури нагрівника (T_1) і охолоджувача (T_2):

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \qquad (2.23)$$

Зміна ентропії

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T}, \qquad (2.24)$$

де умовні межі інтегрування відповідають початковому і кінцевому станам системи.

Формула Больцмана для ентропії системи в певному стані:

$$S = k \ln W, \qquad (2.25)$$

де S – ентропія системи; W – термодинамічна ймовірність її стану; k – стала Больцмана.

Методичні поради

1. Перед розв'язуванням задач на основи термодинаміки, в яких розглядається зміна станів системи з різними термодинамічними параметрами, доцільно зобразити процес на відповідній діаграмі (у координатах PV, PT, VT, ST т.п.) і записати відомі та невідомі параметри системи для кожного стану. Наприклад, стан 1 (P_1, V_1, T_1, m_1).

2. Слід також пам'ятати , що графічне зображення процесів в яких бере участь газ, значно полегшує знаходження невідомих величин. Так представлення процесу в координатах PV допоможе знайти роботу, яку виконує газ, за площею під кривою графіка функції $P(V)$.

Приклади розв'язування задач

1. Яка зовнішня робота буде виконана, якщо 200 *г* азоту нагріти від 20 до 100 $^{\circ}C$ при сталому тиску?

Розв'язання

При ізобаричному нагріванні газу кількість теплоти ΔQ, яку він отримує, йде на збільшення його внутрішньої енергії ΔU та на виконання роботи A проти зовнішніх сил. На основі першого начала термодинаміки маємо:

$$\Delta Q = \Delta U + A\,, \tag{1}$$

звідки

$$A = \Delta Q - \Delta U\,. \tag{2}$$

Теплоту передану газу, можна обчислити за формулою

$$\Delta Q = \frac{m}{\mu} C_P \Delta T\,, \tag{3}$$

а зміну внутрішньої енергії – за формулою

$$\Delta U = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T\,, \tag{4}$$

тоді робота, виконана проти зовнішніх сил, буде

$$A = \frac{m}{\mu} C_P \Delta T - \frac{m}{\mu} C_V \Delta T = \frac{m}{\mu} R \Delta T =$$

$$= \frac{200\,г}{28\,\frac{г}{моль}} \cdot 8{,}31 \frac{Дж}{моль \cdot К} \cdot 80\,К = 4754\,Дж\,.$$

Відповідь: 4,754 *кДж*.

2. Ідеальний газ здійснює цикл, який складається з ізотерми (1→2), політропи (2→3) та адіабати (3→1). Ізотермічний процес відбувається при максимальній температурі циклу. Знайти к.к.д. циклу, якщо температура в його межах зменшується в k разів.

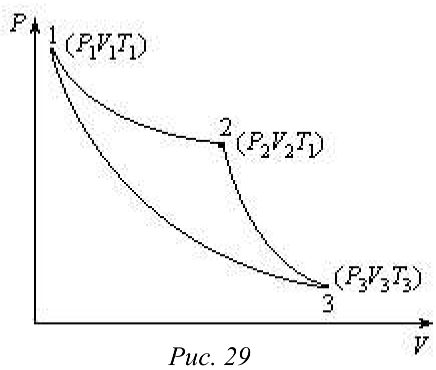

Рис. 29

Розв'язання

На рис. 29 зображено PV– діаграму циклу, яка містить три характерні точки, в яких вказані значення параметрів стану і задано напрям обходу циклу. Вважатимемо, що як робоче тіло використано 1 моль ідеального газу. Знайдемо кількості теплоти, які газ поглинає і віддає у даному циклі.

При ізотермічному розширенні газ отримує кількість теплоти

$$Q_{12} = A_{12} = RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} > 0 \; .$$

При політропічному процесі кількість теплоти

$$Q_{23} = C(T_3 - T_1) = -C(T_1 - T_3) < 0 \, ,$$

тому що $T_1 > T_3$ за умовою задачі, отже, газ теплоту виділяє. $Q_{31} = 0$, оскільки процес адіабатичний. Тоді згідно з співвідношенням (2.22)

$$\eta = \frac{RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} - C(T_1 - T_3)}{RT_1 \ln\frac{V_2}{V_1}} \; . \qquad (1)$$

Тепер потрібно виразити к.к.д. через величини, відомі за умовою задачі. Вважаємо, що показник політропи n. Виразимо молярну теплоємність політропічного процесу через n та показник адіабати γ. $n = \dfrac{C - C_P}{C - C_V}$, звідки випливає, що

$$C = \frac{nC_V - C_P}{n - 1} \; . \qquad (2)$$

Оскільки $C_P = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$, а $C_V = \dfrac{R}{\gamma - 1}$, то

$$C = \frac{R(n - \gamma)}{(\gamma - 1)(n - 1)} \, . \qquad (3)$$

За умовою задачі об'єми газу невідомі. Виразимо їх відношення через відношення температур у відповідних станах, скориставшись рівняннями адіабати $T_1V_1^{\gamma-1}=T_3V_3^{\gamma-1}$, та політропи $T_1V_2^{n-1}=T_3V_3^{n-1}$. Одержуємо:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}=\left(\frac{T_1}{T_3}\right)^{\frac{n-\gamma}{\gamma-1}},$$

або

$$\ln\frac{V_2}{V_1}=\frac{n-\gamma}{(n-1)(\gamma-1)}\ln k\,. \qquad (4)$$

Підставляючи в (1) співвідношення (3) і (4), отримаємо к.к.д. циклу

$$\eta=\frac{T_1\ln k-(T_1-T_3)}{T_1\ln k}=1-\frac{k-1}{k\ln k}\,.$$

Відповідь: $\eta=1-\dfrac{k-1}{k\ln k}$.

3. Обчислити зміну ентропії 14 *г* азоту, що охолоджується від температури T_1=300*К* до T_2=273*К* при сталому об'ємі.

Розв'язання

Процес охолодження азоту при сталому об'ємі оборотний, тому можна скористатися формулою:

$$\Delta S=\frac{m}{\mu}C_V\ln\frac{T_2}{T_1}\,.$$

Молярна теплоємність азоту при сталому об'ємі, оскільки азот двоатомний газ, дорівнює

$$C_V=\frac{5}{2}R=20{,}775\frac{Дж}{моль\cdot К}\,.$$

Тоді

$$\Delta S=\frac{14г}{28\,г/моль}20{,}775\frac{Дж}{моль\cdot К}\cdot\ln\frac{273К}{300К}=-1{,}03\frac{Дж}{К}\,.$$

Відповідь: $-1{,}03\ Дж/К$.

4. Знайти зміну ентропії ΔS при нагріванні води масою $m = 100\,г$ від температури $t_1 = 0\,°C$ до температури $t_2 = 100\,°C$ з подальшим перетворенням її у пару такої ж температури.

Розв'язання

Знайдемо окремо зміну ентропії ΔS_1 при нагріванні води до температури кипіння і зміну ентропії ΔS_2 при перетворенні її в пару. Тоді повна зміна ентропії $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2$.

У загальному випадку зміна ентропії визначається за співвідношенням:

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}. \qquad (1)$$

При нескінченно малій зміні температури dT тіла, яке нагрівається, затрачується кількість теплоти $dQ = cmdT$, m – маса тіла, c – питома теплоємність. Підставивши вираз для теплоти в (1), знайдемо формулу для визначення зміни ентропії при нагріванні води до температури кипіння:

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cmdT}{T} = cm\ln(T_2 / T_1) = 132\ Дж/К. \qquad (2)$$

При розрахунку зміни ентропії при перетворенні води в пару такої ж температури, врахуємо у формулі (1) той факт, що температура у цьому процесі постійна. Тому винесемо її за знак інтеграла:

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_1^2 dQ = \frac{Q}{T} = \frac{\lambda m}{T}, \qquad (3)$$

де λ – питома теплота пароутворення. Підставивши у (3) числові значення величин, що у неї входять, одержимо $\Delta S_2 = 605\ Дж/К$.

Сумарна зміна ентропії дорівнюватиме $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 737\ Дж/К$.

Відповідь: 735 *Дж/К*.

Задачі для самостійного розв'язування

2.42. Азот масою $m = 5\,кг$ нагрівають на $\Delta T = 150\,K$ при постійному об'ємі. Знайти: 1) отриману кількість теплоти ΔQ; 2) зміну ΔU внутрішньої енергії; 3) виконану газом роботу A.

2.43. Кисень нагрівається при постійному тиску $P = 80\,кПа$. Його об'єм збільшується від $V_1 = 1\,м^3$ до $V_2 = 3\,м^3$. Визначити: 1) зміну внутрішньої енергії; 2) роботу A, виконану при розширенні; 3) кількість теплоти ΔQ, що була надана газу.

2.44. Кисень масою $m = 2\,кг$ займає об'єм $V_1 = 1\,м^3$ і перебуває під тиском $P_1 = 0{,}2\,МПа$. Газ нагрівають спочатку при постійному тиску до об'єму $V_2 = 3\,м^3$, а потім при постійному об'ємі до тиску $P_2 = 0{,}5\,МПа$. Знайти: 1) зміну внутрішньої енергії ΔU; 2) виконану газом роботу A; 3) кількість теплоти ΔQ, що була надана газу. Побудувати графік процесу.

2.45. На нагрівання кисню масою $m = 160\,г$ на $\Delta T = 12\,K$ була затрачена кількість теплоти $\Delta Q = 1{,}76\,кДж$. Як відбувалося нагрівання: при постійному тиску чи при постійному об'ємі?

2.46. У циліндрі під поршнем знаходиться водень масою $m = 0{,}02\,кг$ при температрі $T_1 = 300\,K$. Водень спочатку розширюється адіабатично, при цьому його об'єм зростає у п'ять разів, а потім стискується ізотермічно так, що його об'єм зменшується у п'ять разів. Знайти температуру T_2 після адіабатичного розширення, а також повну роботу A виконану газом. Зобразити процес графічно.

2.47. Паливо в дизельному двигуні спалахує при температурі $T_2 = 1100\,K$. Початкова температура повітря, яке стискується в циліндрі двигуна $T_1 = 350\,K$. У скільки разів потрібно зменшити об'єм повітря при стискуванні, щоб паливо спалахнуло? Стискування вважати адіабатичним. Показник адіабати для повітря $\gamma = 1{,}4$.

2.48. Яка частка ω_1 кількості теплоти ΔQ, що підводиться до ідеального газу при ізобарному розширенні, витрачається на збільшення внутрішньої енергії ΔU газу, і яка частка ω_2 – на роботу розширення? Розглянути три випадки, якщо газ: а) одноатомний; б) двоатомний; в) багатоатомний.

2.49. У закритій посудині міститься 14 *г* азоту під тиском 10^5 *Па* при температурі 27 ^{O}C. Після нагрівання тиск у посудині збільшився у 5 разів. Знайти: 1) до якої температури нагріли газ; 2) об'єм посудини; 3) яку кількість теплоти надано газу?

2.50. Гелій знаходиться в закритій посудині місткістю 2 *л* при температурі 20 ^{O}C и тиску 10^5 *Па*. 1) Яку кількість теплоти потрібно надати гелію, щоб нагріти його на 100 ^{O}C? 2) Якою буде середня квадратична швидкість його молекул при новій температурі? 3) Який встановиться тиск? 4) Яка буде густина гелію? 5) Якою буде енергія теплового руху молекул?

2.51. У закритій посудині об'ємом 2 *л* знаходиться 12 *г* азоту при температурі 10 ^{O}C. Після нагрівання тиск у посудині став 10^4 *мм рт. ст.* Яку кількість тепла було надано газу при нагріванні?

2.52. При нагріванні 40 *г* кисню від 16 ^{O}C до 40 ^{O}C затрачено 150 *кал* тепла. Ізобарно чи ізохорно нагрівався газ?

2.53. Азот міститься в закритій посудині об'ємом 3 *л* при температурі 27 ^{O}C і тиску 3 *атм*. Після нагрівання тиск у посудині збільшився до 25 *атм*. Визначити: 1) температуру азоту після нагрівання; 2) кількість теплоти, надану азоту.

2.54. Повітряний буфер складається з циліндра щільно закритого рухомим поршнем. Довжина циліндра 50 *см*, а діаметр 20 *см*. Параметри повітря, що наповнює циліндр, відповідають параметрам навколишнього середовища: тиск 0,1 *МПа*, температура 20 ^{O}C. Визначити енергію, яку може акумулювати повітряний буфер при адіабатичному стискуванні повітря, якщо поршень, рухаючись без тертя, зміститься на 40 *см*. Знайти також кінцеві значення тиску і температури.

2.55. 2 *л* азоту знаходяться під тиском 10^5 *Па*. Яку кількість теплоти потрібно надати азоту, щоб 1) при $P = const$ збільшити об'єм удвоє; 2) при $V = const$ збільшити тиск удвоє?

2.56. 2 *кмолі* вуглекислого газу нагріваються при постійному тиску на 50 ^{O}C. Знайти: 1) зміну його внутрішньої енергії; 2) роботу розширення; 3) кількість теплоти, яку отримав газ.

2.57. 10,5 *г* азоту ізотермічно розширюються при температурі –23 ^{O}C від тиску $P_1 = 2{,}5$ *атм* до тиску $P_2 = 1$ *атм*. Знайти роботу, яку виконує газ при розширенні.

2.58. При ізотермічному розширенні 10 *г* азоту, що знаходився при температурі 17 ^{O}C, була виконана робота 860 *Дж*. У скільки разів змінився тиск азоту при розширенні?

2.59. Робота ізотермічного розширення 10 *г* деякого газу від об'єму V_1 до об'єму $V_2 = 2V_1$ дорівнює 575 *Дж*. Знайти середню квадратичну швидкість молекул газу при температурі розширення.

2.60. Цикл, у якому робочим тілом є водень, складається з двох ізохор та двох ізобар. Зобразити цикл на PV – діаграмі, знайти роботу A та к.к.д. даного циклу. Відомо, що в межах циклу максимальні значення об'єму і тиску газу в два рази більші за свої мінімальні значення, що дорівнюють $V_{min} = 0{,}5$ *м*^{3}, $P_{min} = 10^5$ *Па*.

2.61. 14 *г* азоту адіабатично розширюються так, що тиск зменшується в 5 разів, а потім ізотермічно стискуються до початкового тиску. Початкова температура азоту $T_1 = 420$ *К*. Зообразити процес на PV – діаграмі. Знайти: а) температуру газу T_2 в кінці процесу; б) кількість тепла, що віддав газ ΔQ; в) приріст внутрішньої енергії газу ΔU; г) виконану газом роботу A.

2.62. 1 *кмоль* ідеального одноатомного газу розширюється політропічно з показником політропи $n = 1{,}5$, причому його температура зменшується на 1^{O}. Обчислити: а) молярну теплоємність газу в цьому процесі; б) кількість теплоти, отриману газом; в) роботу, виконану газом. За рахунок яких джерел енергії виконується дана робота?

2.63. Один кубометр повітря стискують так, що його об'єм зменшується у 5 разів, а тиск збільшується у 10 разів. Початковий тиск 100 *кПа*. Вважаючи процес стискування політропічним, обчислити: а) показник політропи; б) приріст внутрішньої енергії; в) кількість теплоти, отриману газом; г) роботу, затрачену на стискування.

2.64.* Молярна теплоємність ідеального газу при деякому процесі змінюється за законом $C=\alpha/T$, де α – деяка стала. Знайти: а) роботу, виконану кіломолем цього газу при нагріванні його від температури T_1 до температури $T_2 = 2T_1$; б) рівняння, що зв'язує параметри P і V у цьому процесі.

2.65. 1 *кмоль* кисню винонує цикл Карно в інтервалі температур від 27 ^{O}C до 327 ^{O}C. Відомо,що відношення максимального за цикл тиску P_{max} до мінімального тиску P_{min} дорівнює 20. Обчислити: а) к.к.д. циклу; б) кількість тепла Q_1, отриманого від нагрівника за цикл; в) кількість тепла Q_2, відданого холодильнику за цикл; г) роботу A газу за цикл.

2.66. Знайти к.к.д. циклу, що складається з двох ізохор та двох адіабат. Робочим тілом є азот. Відомо, що у межах циклу об'єм газу змінюється у 10 разів.

2.67. Цикл, що виконується двома кіломолями ідеального двоатомного газу, складається з ізотерми, ізобари та ізохори. Ізотермічний процес відбувається при максимальній температурі циклу, яка дорівнює $T = 400$ *К*. Відомо також, що в межах циклу об'єм газу змінюється у два рази, тобто $a = V_{max}/V_{min} = 2$. 1) Обчислити роботу A газу за цикл та к.к.д. циклу η. 2) Порівняти отримане значення η з к.к.д. циклу Карно η_0, що здійснюється в інтервалі температур від T_{min} до T_{max} даного циклу.

2.68. 1 моль двоатомного ідеального газу виконує цикл, який складається з двох ізохор і двох ізобар. Найменший об'єм $V_{min} = 10\,л$, найбільший – $V_{max} = 20\,л$, найменший тиск $P_{min} = 246\,кПа$, найбільший – $P_{max} = 410\,кПа$. Побудувати графік циклу. Визначити температуру T для характерних точок циклу та його к. к. д.

2.69. Ідеальний багатоатомний газ виконує цикл, який складається з двох ізохор і двох ізобар. Найбільший тиск газу в два рази більший за найменший, а найбільший об'єм у чотири рази більший за найменший. Визначити к. к. д

2.70. Ідеальна теплова машина, яка працює за циклом Карно, отримує за один цикл від нагрівника 600 *кал* тепла. Температура нагрівника 400 *К*, температура охолоджувача 300 *К*. Знайти роботу, яку виконує газ за один цикл, та кількість теплоти, яку він віддає охолоджувачу.

2.71. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. Визначити к.к.д. циклу, якщо відомо, що за один цикл виконується робота 3 *кДж*, а охолоджувач отримує 3,2 *ккал* тепла.

2.72. Ідеальна теплова машина, яка працює за циклом Карно виконує за один цикл роботу $7{,}35 \cdot 10^4$ *Дж*. Температура нагрівника 100 ^{O}C, температура охолоджувача 0 ^{O}C. Знайти:

1) к.к.д. машини; 2) кількість теплоти, отриману машиною за один цикл; 3) кількість теплоти віддану охолоджувачу.

2.73. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно. При цьому 80 % тепла, отриманого від нагрівника передається охолоджувачу. Кількість тепла, отримана від нагрівника становить 1,5 *ккал*. Знайти: 1) к.к.д. циклу; 2) роботу, що виконує газ за один цикл.

2.74. Ідеальна теплова машина працює за циклом Карно з нагрітим повітрям як робочим тілом. Початкова температура повітря 127 ^{O}C, початковий тиск 7 *атм*, початковий об'єм $2\cdot10^{-3}$ $м^3$. Після першого ізотермічного розширення повітря зайняло об'єм 5 *л*; після адіабатичного розширення об'єм став таким, що дорівнює 8 *л*. Знайти: 1) координати перетину ізотерм та адіабат; 2) роботу на кожній ділянці циклу; 3) повну роботу за цикл; 4) к.к.д. циклу; 5) кількість теплоти, отриману за один цикл від нагрівника; 6) кількість теплоти, віддану охолоджувачу.

2.75. 1 *кмоль* ідеального газу здійснює цикл, що складається з двох ізохор і двох ізобар. При цьому об'єм газу змінюється від $V_1 = 25$ $м^3$ до $V_2 = 50$ $м^3$, а тиск від $P_1 = 1$ *атм* до $P_2 = 2$ *атм*. У скільки разів робота, що виконується в даному циклі, менша за роботу, яка виконується у циклі Карно, ізотерми якого відповідають найбільшій та найменшій температурам циклу, що розглядається, якщо при ізотермічному розширенні об'єм газу збільшується удвічі?

2.76. Ідеальна холодильна машина, яка працює за зворотним циклом Карно, виконує за один цикл роботу $3{,}7\cdot10^4$ *Дж*. При цьому вона забирає тепло від тіла з температурою –10 ^{O}C і передає його тілу з температурою +17 ^{O}C. Знайти: 1) к.к.д. циклу; 2) кількість теплоти, що відбирається за один цикл від холодного тіла; 3) кількість теплоти, яка передається гарячому тілу.

2.77. Ідеальна холодильна машина, яка працює за зворотним циклом Карно, передає тепло від холодильника з водою при температурі $0^{O}C$ кип'ятильнику з водою при температурі $100^{O}C$. Яку кількість води потрібно заморозити у холодильнику, щоб перетворити у пару 1 *кг* води у кип'ятильнику?

2.78. Знайти приріст ентропії при перетворенні 1 *г* води при 0 ^{O}C в пару при 100 ^{O}C.

2.79. Лід масою $m_1 = 2\,кг$ при температурі $t_1 = 0^{o}\,C$ був перетворений у воду тієї ж температури за допомогою пари, що мала температуру $t_2 = 100^{o}\,C$. Визначити масу m_2 використаної пари. Яка зміна ентропії системи лід – пара?

2.80. Знайти зміну ентропії при переході 8 *г* кисню від об'єму 10 *л* при температурі 80 ^{O}C до об'єму 40 *л* при температурі 300 ^{O}C.

2.81. 10,5 *г* азоту ізотермічно розширюються від об'єму $V_1 = 2$ *л* до об'єму $V_2 = 5$ *л*. Знайти зміну ентропії у цьому процесі.

2.82. 10 *г* кисню нагріваються від температури t_1=50 ^{O}C до $t_2 = 150$ ^{O}C. Знайти зміну ентропії, якщо нагрівання проходить: а) при $V = const$; б) при $P = const$.

2.83. При нагріванні одного кіломоля двоатомного газу його абсолютна температура збільшується у 1,5 рази. Знайти зміну ентропії, якщо нагрівання відбувається: а) ізохорно; б) ізобарно.

2.84. У результаті нагрівання 22 *г* азоту його абсолютна температура збільшилася у 1,2 рази, а ентропія зросла на 4,19 *Дж/К*. За яких умов проводилося нагрівання (при постійному об'ємі чи при постійному тиску)?

2.85. 10 $м^3$ повітря знаходяться за нормальних умов. Його переводять у стан з температурою 400 ^{O}C а) ізохорно; б) ізобарно; в) адіабатно; г) політропно з показником політропи $n = 2{,}2$. Вважаючи повітря однорідним двоатомним газом, знайти приріст ентропії у кожному процесі.

2.86. Брусок міді масою $m_1 = 300$ *г* при температурі $t_1 = 97$ ^{O}C помістили у калориметр, де міститься вода масою $m_2 = 100$ *г* при температурі $t_2 = 7$ ^{O}C. Знайти зміну ентропії такої системи до моменту встановлення теплової рівноваги.

2.87. Знайти приріст ентропії алюмінієвого бруска масою $m = 3$ *кг* при нагріванні його від температури $T_1 = 300$ *К* до температури $T_2 = 600$ *К*, якщо в цьому інтервалі температур питома теплоємність алюмінію $C = a + bT$, де $a = 0{,}77$ *Дж/(г·К)*, $b = 0{,}46$ *мДж/(г·К²)*.

2.88. Знайти зміну ентропії ΔS при ізобарному розширенні азоту масою $m = 4\,г$ від об'єму $V_1 = 5\,л$ до об'єму $V_2 = 9\,л$.

3. РЕАЛЬНІ ГАЗИ, РІДИНИ, ТВЕРДІ ТІЛА

Основні співвідношення

У реальних газах, на відміну від ідеальних, молекули мають скінченні розміри і між ними існують сили взаємодії. Урахування цих двох факторів вимагає введення певних поправок у рівняння стану ідеального газу. Одним із рівнянь, яке досить добре якісно описує поведінку реального газу, є *рівняння Ван-дер-Ваальса*. Для одного моля реального газу воно має вигляд:

$$\left(P+\frac{a}{V_0^2}\right)\left(V_0-b\right)=RT\ . \qquad (2.26)$$

Тут a і b – поправки Ван-дер-Ваальса, які сталі для даного газу, але різні для різних газів; V_0 – молярний об'єм.

Поправка b враховує сили відштовхування і чисельно дорівнює об'єму, який займає один моль реального газу при нескінченно високому тиску; поправка a/V_0^2 – ураховує сили притягання і по суті є внутрішнім тиском, зумовленим цими силами.

Для довільної кількості реального газу рівняння (2.26) матиме вигляд:

$$\left(P+\frac{m^2}{\mu^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V-\frac{m}{\mu}b\right)=\frac{m}{\mu}RT\ , \qquad (2.27)$$

де $V=\frac{m}{\mu}V_0$ – об'єм ν молів реального газу.

Критичні параметрим $P_к$, $V_{0к}$, $T_к$ зв'язані з поправками Ван-дер-Ваальса a і b співвідношеннями:

$$P_к=\frac{a}{27b^2}\ ;\ V_к=3b\ ;\ T_к=\frac{8a}{27bR}\ , \qquad (2.28)$$

звідки

$$\frac{P_к V_к}{T_к}=\frac{3}{8}R\ . \qquad (2.29)$$

Зауважимо, що для певної маси m реального газу критичний стан при $P_к$ і $T_к$ можливий тільки в об'ємі

$$V_к = \frac{m}{\mu} V_{0к} . \qquad (2.30)$$

Внутрішня енергія реального газу залежить не тільки від температури, але й від об'єму, оскільки складається з кінетичної енергії теплового руху його молекул та потенціальної енергії притягання. Для ν молів реального газу вираз для внутрішньої енергії має вид:

$$U = \nu \left(C_V T - \frac{\nu a}{V} \right). \qquad (2.31)$$

Молярна теплоємність газу Ван-дер Ваальса при сталому об'ємі така ж сама, як і для ідеального газу

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \frac{i}{2} R , \qquad (2.32)$$

проте молярна теплоємність при сталому тиску C_p залежить від параметрів стану, і ця залежність іноді буває дуже складною.

Рідкий стан речовини є проміжним станом між газоподібним і твердим. Поверхня рідини подібна до натягнутої плівки, яка прагне зробити свою поверхню якомога меншою. Це явище називається поверхневим натягом. Сили поверхневого натягу напрямлені по дотичній до поверхні і діють нормально до будь-якої лінії, проведеної на цій поверхні. Фізична величина σ, яка чисельно дорівнює відношенню сили F, яка діє на лінію довжиною L, до цієї довжини називається коефіцієнтом поверхневого натягу

$$\sigma = \frac{F}{L} . \qquad (2.33)$$

З термодинамічної точки зору коефіцієнт поверхневого натягу чисельно дорівнює роботі, яку треба виконати, щоби при постійній температурі збільшити площу поверхні рідини на одиницю

$$\sigma = \frac{dA}{dS} . \qquad (2.34)$$

Робота dA іде на збільшення вільної енергії поверхневого шару, тому σ має зміст вільної енергії одиниці площі поверхні.

Поверхневий натяг призводить до того, що над викривленою поверхнею існує додатковий тиск (тиск Лапласа), який дорівнює:

$$\Delta P = \sigma\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \qquad (2.35)$$

Тут R_1 і R_2 – головні радіуси кривизни для даного елемента поверхні рідини. Додатковий тиск у будь-якій точці поверхні завжди напрямлений уздовж радіуса кривизни в бік центра кривизни.

Висота підняття (опускання) стовпчика рідини у капілярі визначається за формулою

$$h = \frac{\Delta P}{\rho g}, \qquad (2.36)$$

де ρ – густина рідини.

Довільне тверде тіло являє собою систему сконденсованих часток атомів, іонів, молекул, які при будь-яких температурах знаходяться у безперервному коливному русі біля певних положень рівноваги. Найбільш характерною особливістю твердих тіл є збереження своєї форми та об'єму, чого не спостерігається для інших агрегатних станів. Підвищення температури твердого тіла приводить до зміни його розмірів, яку можна кількісно оцінити. При невеликій зміні температури кожна одиниця довжини твердого тіла змінюється прямопропорційно до зміни температури:

$$\frac{\Delta l}{l\Delta t} = \alpha = const, \qquad (2.37)$$

де Δl – приріст l одиниць довжини при підвищенні температури на Δt градусів, α – лінійний коефіцієнт теплового розширення, який вказує на яку величину зміниться одиниця довжини твердого тіла при нагріванні його на 1 *K*. Для твердих тіл величини α досить малі і складають 10^{-5} – 10^{-6} *град*$^{-1}$.

Якщо початкову довжину твердого тіла при 0 °*C* позначити через l_0, то $\Delta l = l_t - l_0$, де l_t – його довжина при *t* °*C*, а $\Delta t = t - 0 = t$, то з (2.37) отримаємо:

$$l_t = l_0(1+\alpha t). \qquad (2.38)$$

Унаслідок теплового розширення буде збільшуватися й об'єм твердого тіла. У цьому випадку легко отримати формулу, анолгічну (2.38):

$$V_t = V_0(1 + \beta t), \qquad (2.39)$$

де величина β називається коефіцієнтом об'ємного теплового розширення. Для ізотропного твердого тіла $\beta = 3\alpha$.

Для одного моля хімічно простого твердого тіла атомна теплоємність буде дорівнювати:

$$C = 3R . \qquad (2.40)$$

Отримане співвідношення виражає собою *закон Дюлонга і Пті,* який стверджує, що атомна теплоємність хімічно простих твердих тіл при достатньо високих температурах є постійною і такою, що дорівнює $3R = 25 \cdot 10^3$ *Дж*/(*моль·К*).

У випадку коли ізотропне тверде тіло піддане односторонньому розтягу або стиску, співвідношення між величиною деформації і силами, які є причиною цієї дефомації, виражається *законом Гука*. При пружних деформаціях механічна напруга пропорційна деформації

$$\sigma = E\varepsilon , \qquad (2.41)$$

де $\sigma = F/S$ – механічна напруга, яка виникає в тілі під дією сили F, S – площа поперечного перерізу тіла, ε – величина, яка характеризує деформацію, E – модуль Юнга.

Для деформації розтягу $\varepsilon = \Delta l/l$ і називається відносним видовженням. Δl – абсолютне видовження, l – початкова довжина тіла. З урахуванням вищесказаного закон Гука можна переписати у вигляді:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l} . \qquad (2.42)$$

Методичні поради

1. Загальне правило, яким треба користуватися при розв'язуванні задач, в яких мова йде про реальні гази, полягає у тому, що методи їх розв'язування нічим не відрізняються від методів, які застосовувалися при розв'язуванні задач, у яких фігурував ідеальний газ. Відмінність лише в тому, що рівняння стану ідеального газу замінюється скрізь на рівняння Ван-дер-Ваальса (2.26).

2. Деяку специфіку мають задачі в яких потрібно розглянути ефект Джоуля – Томсона, який властивий тільки реальним газам. Тут слід розрізняти два випадки: а) розширення газу в пустоту, при якому зовнішня робота не виконується, оскільки $P = 0$, а також $dQ = 0$, бо немає зовнішнього середовища, з яким можливий теплообмін. Отже умова розширення газу в пустоту:

$$dU = 0 \quad \text{або} \quad U = const;$$

б) диференціальний ефект Джоуля – Томсона, коли газ перетікає через пористу перегородку при малому перепаді тисків. У цьому випадку внутрішня енергія газу змінюється. Але залишається сталою теплова функція стану (ентальпія)

$$U + PV = const.$$

3. При розв'язуванні задач на капілярні явища слід пам'ятати, що додатковий тиск ΔP завжди обчислюється за загальною формулою (2.35), яка в залежності від умови задачі набуває того чи іншого конкретного вигляду. У капілярній трубці радіусом r, меніск є сферичним сегментом радіусом

$$R = \frac{r}{\cos\vartheta},$$

де ϑ – крайовий кут, тобто кут між стінкою капіляра і дотичною до меніска, проведеною у точці дотику меніска зі стінкою капіляра. Оскільки радіуси кривизни нормальних перерізів сфери однакові, тобто $R_1=R_2=R$, то

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R} = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{r}.$$

Якщо поверхня рідини є частиною циліндричної поверхні (наприклад, коли рідина міститься між двома довгими плоскопаралельними пластинками), то радіус кривизни нормального перерізу поверхні рідини, що паралельний твірній циліндра $R_1=\infty$, $R_2=R$, тоді

$$\Delta P = \frac{\sigma}{R} = \frac{\sigma\cos\vartheta}{r} = \frac{2\sigma\cos\vartheta}{d},$$

де $d = 2r$ – відстань між пластинами.

Випадок, коли $\vartheta = 0$ називається повним змочуванням, а коли $\vartheta = \pi$ – повним незмочуванням.

Приклади розв'язування задач

1. Користуючись рівнянням Ван-дер-Ваальса, обчислити тиск 1,1 *кг* вуглекислого газу, що знаходиться в балоні місткістю 20 *л* при температурі 13 $^{\circ}C$. Результат порівняти з тиском ідеального газу за тих самих умов.

Розв'язання

Рівняння Ван-дер-Ваальса має вигляд

$$\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT .$$

Звідки

$$P=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2},$$

де $a=3{,}64\cdot10^5\ Н\big/кмоль^2$; $b=0{,}043\ м^3\big/кмоль$.

Кількість кіломолів вуглекислого газу дорівнює

$$\frac{m}{\mu}=\frac{1{,}1}{44}=0{,}025\ кмоля .$$

Об'єм, що займає один кіломоль вуглекислого газу, дорівнює

$$\frac{0{,}02}{0{,}025}=0{,}8\ м^3\big/кмоль ;$$

$$P=\frac{8{,}32\cdot10^3\ Дж/(кмоль\cdot град)\cdot 286\ град}{0{,}8\ м^3/кмоль-0{,}043\ м^3/кмоль}-$$

$$-\frac{3{,}64\cdot105\ H^4/кмоль^2}{0{,}8^2\ м^6/кмоль^2}=25{,}4\cdot10^5\ Н/м^2 .$$

Тиск, що обчислюється за рівнянням Клапейрона – Менделєєва

$$P=\frac{RT}{V}=$$

$$=\frac{8{,}31\cdot10^3\ Дж/(кмоль\cdot К)\cdot 286\ К}{0{,}8\ м^3/кмоль}=29{,}7\cdot10^5\ Н/м^2 .$$

Останній результат відрізняється від результату, одержаного при урахуванні поправок a та b, на величину ΔP=4,3·10^5 $Н/м^2$, що дає відносну похибку

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{4{,}3 \cdot 10^5}{25{,}4 \cdot 10^5} = 0{,}169 .$$

Відповідь: $P = 25{,}4 \cdot 10^5 \ Н/м^2$; $\Delta P/P = 0{,}169$.

2. Вивести формулу диференціального ефекту Джоуля – Томсона для одного моля газу Ван-дер-Ваальса. Вважати зміну температури малою і знехтувати вищими степенями сталих a і b.

Розв'язання

При диференціальному ефекті Джоуля – Томсона, коли газ переходить з одного об'єму V_1 в інший V_2 внаслідок малого перепаду тисків, параметри стану газу змінюються від P_1, V_1, T_1 до $P_1 = P_1 - dP$, V_2, $T_2 = T_1 - dT$, причому $P \gg dP$, $T \gg dT$. У такому процесі

$$U_1 + P_1V_1 = U_2 + P_2V_2 .$$

Якщо скористатися співвідношенням (2.31), виразити PV з рівняння Ван-дер Ваальса та урахувати відповідні наближення, це співвідношення можна звести до вигляду

$$C_V T_1 - \frac{a}{V_1} + RT_1 + P_1 b - \frac{a}{V_1} =$$
$$C_V\left(T_1 + dT\right) - \frac{a}{V_2} + R\left(T_1 + dT\right) + \left(P_1 - dP\right)b - \frac{a}{V_2} . \qquad (1)$$

З (1) випливає, що

$$\left(C_V + R\right)dT = bdP - 2a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right). \qquad (2)$$

Величину $\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}$ можна наближено обчислити, якщо вважати газ ідеальним, а температуру практично сталою. Тоді $P_1V_1 = RT_1$, $P_2V_2 = RT_2$ $\left(T_1 \approx T_2\right)$, звідки $\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = \frac{dP}{RT}$. Отже підставивши вираз для $\left(\frac{1}{V_1}-\frac{1}{V_2}\right)$ у (2), матимемо

$$dT=\left[\frac{b}{C_V+R}-\frac{2a}{(C_V+R)RT}\right]dP\ . \qquad (3)$$

З формули (3) видно, що в досліді Джоуля – Томсона реальний газ при $a = 0$ нагрівається, а при $b = 0$ – охолоджується.

3. Яку роботу проти сил поверхневого натягу необхідно виконати, щоб надути мильну бульбашку радіусом 5 *см*? Чому дорівнює додатковий тиск Лапласа всередині бульбашки? σ = 0,04 *Н/м*.

Розв'язання

Мильна бульбашка являє собою дуже тонку плівку мильного розчину приблизно сферичної форми. Ця плівка має дві поверхні – внутрішню і зовнішню. Нехтуючи товщиною плівки і вважаючи тому радіуси обох поверхонь однаковими, знайдемо їх загальну площу:

$$S=4\pi R^2+4\pi R^2=8\pi R^2\ .$$

Оскільки до утворення бульбашки поверхня, з якої вона була видута – мала, то можна вважати, що S виражає приріст площі поверхні мильного розчину ΔS. Користуючись формулою (2.34), одержуємо:

$$\Delta A=\sigma\Delta S=0{,}04\frac{Н}{м}\cdot 8\cdot 3{,}14\cdot 0{,}0025 м^2=2{,}5 мДж\ .$$

Додатковий тиск Лапласа для мильної бульбашки можна обчислити за формулою (8.9)

$$\Delta P=\frac{4\sigma}{R}=\frac{4\cdot 0{,}04\, Н/м}{0{,}05 м}=3{,}2 Па\ .$$

Відповідь: $\Delta P=3{,}2 Па$.

4. У бензол (σ = 0,03 *Н/м*) занурено капіляр, внутрішній діаметр якого становить 0,4 *мм*. Знайти вагу бензолу, що увійшов у капіляр за умови повного змочування.

Розв'язання

Вага бензолу, що увійшов у капіляр:

$$P = mg = \rho gV = \rho g\pi r^2 h,$$

де m – маса бензолу; r – внутрішній радіус капіляра. Висота підняття бензолу в капілярі

$$h = \frac{2\sigma}{\rho gr}.$$

Підставивши вираз для h у вираз для P, отримаємо

$$P = 2\pi r\sigma;$$

$$P = 2\cdot 3{,}14\cdot 2\cdot 10^{-4}\,м\cdot 0{,}03\,Н/м \approx 3{,}8\cdot 10^{-5}\,Н.$$

Відповідь: $P \approx 3{,}8\cdot 10^{-5}\,Н$.

Задачі для самостійного розв'язування

2.89. Яку температуру мають 2 *г* азоту, що займає об'єм 820 $см^3$ при тиску 2 *атм*? Газ розглядати як: а) ідеальний, б) реальний.

2.90. 10 *г* гелію займають об'єм 100 $см^3$ при тиску 10^8 *Па*. Знайти температуру газу, розглядаючи його як: а) ідеальний, б) реальний.

2.91. У закритій посудині об'ємом $V = 0{,}5\ м^3$ знаходиться 0,6 *моль* вуглекислого газу під тиском $3\cdot 10^6$ *Па*. Користуючись рівнянням Ван-дер-Ваальса, знайти, у скільки разів потрібно збільшити температуру газу, щоб тиск збільшився вдвоє.

2.92. У посудині місткістю 10 *л* знаходиться 0,25 *кг* азоту при температурі 27 ^oC. а) Яку частину тиску газу складає тиск, зумовлений силами взаємодії між молекулами? б) Яку частину об'єму посудини складає власний об'єм молекул?

2.93. Було запропоновано багато емпіричних та напівемпіричних рівнянь, що описують стани реальних газів. Нижче наведено деякі з них.

Рівняння Бертло: $\left(P + \frac{a}{TV^2}\right)(V - b) = RT$.

Рівняння Клаузіуса: $\left(P + \frac{a}{T(V+c)^2}\right)(V-b)$.

Перше рівняння Дітерічі: $P(V-b) = RT\exp\left\{-\frac{a}{RTV}\right\}$.

Друге рівняння Дітерічі: $\left(P + \frac{a}{V^{5/3}}\right)(V-b) = RT$, де a, b, c – постійні величини. Знайти для цих рівнянь критичні параметри $P_{кр}$, $V_{кр}$, $T_{кр}$, значення критичного коефіцієнта $RT_{кр}/(P_{кр}V_{кр})$ та температури Бойля.

2.94. Яку частину скляної ампули повинен займати рідкий ефір при 20 ^{O}C, щоб при його нагріванні можна було спостерігати перехід речовини у критичний стан? Молярна маса ефіру 74 *г/моль*, густина 714 *кг/м*^{3} при 20 ^{O}C, критична температура 194 ^{O}C, критичний тиск 35,6 *атм*.

2.95. Визначити тиск повітря (у *мм рт.ст.*) у повітряній бульбашці діаметром d = 0,01 *мм*, яка знаходиться на глибині h = 20 *см* під поверхнею води. Зовнішній тиск P_1 = 765 *мм рт.ст.*

2.96. У посудину зі ртуттю занурено відкритий капіляр внутрішнім діаметром d = 3 *мм*. Різниця рівнів ртуті в посудині і капілярі дорівнює Δh = 3,7 *мм*. Чому дорівнює радіус кривизни ртутного меніска в капілярі?

2.97. У посудину з водою занурено відкритий капіляр внутрішнім діаметром d = 1 *мм*. Різниця рівнів води в посудині і капілярі дорівнює Δh = 2,8 см. 1) Чому дорівнює радіус кривизни меніска в капілярі? 2) Якою була б різниця рівнів рідини в посудині та капілярі, якщо б змочування було повним?

2.98. На яку висоту підніметься бензол у капілярі з внутрішнім діаметром 1 *мм*? Змочування вважати повним.

2.99. Яким повинен бути діаметр пор у гноті керогаза, щоб гас зміг піднятися на висоту 10 *см*? Пори вважати циліндричними трубками, які повністю змочуються гасом.

2.100. Капіляр, внутрішнім радіусом 2 *мм*, занурено в рідину. Вага рідини, що піднялася у капілярі, дорівнює $9{\cdot}10^{-4}$ *Н*. Знайти за цими данними коефіцієнт поверхневого натягу рідини.

2.101. Між двома вертикальними плоско–паралельними скляними пластинками, що знаходяться на відстані 0,25 *мм* одна від одної, налито рідину. Знайти густину рідини, якщо коефіцієнт поверхневого натягу становить 0,03 *Н/м* і висота, на яку вона піднялася між пластинками, дорівнює 3,1 *см*. Змочування повне.

2.102. Скляна капілярна трубка внутрішнім діаметром d = 0,2 *мм* та довжиною l = 20 *см* вертикально опускається у воду. Верхній кінець трубки запаяний. Який відрізок x трубки повинен знаходитися під водою, щоб рівні води у капілярі і поза ним були однаковими? Тиск повітря $P_0 = 10^5$ *Па*, σ = 0,073 *Н/м*.

2.103. Обчислити приріст вільної енергії ΔF поверхневого шару в процесі злиття двох однакових крапель ртуті в одну. Процес вважати ізотермічним, радіус крапель до злиття r = 2,5 *мм*.

2.104. Дві мильні бульбашки радіусами R_1 = 2 *см* і R_2 = 3 *см* зливаються в одну. Визначити енергію, що виділяється при цьому процесі, якщо коефіцієнт поверхневого натягу α = 0,045 *Н/м*.

2.105. Яка кількість енергії поглинається при розбитті великої краплини води масою 2 *г* на дрібні краплини радіусом 10^{-5} *см*?

2.106. Користуючись законом Дюлонга і Пті, знайти, з якого матеріалу виготовлено металеву кульку масою 0,025 *кг*, якщо відомо, що для її нагрівання від 10 $^{\circ}C$ до 30 $^{\circ}C$ затрачено 117 *Дж* тепла.

2.107. Свинцева куля, яка летить зі швидкістю 400 *м/с*, вдаряється об стінку і застрягає в ній. Вважаючи, що 10 % кінетичної енергії кулі витрачається на її нагрівання, знайти, на скільки градусів вона нагрілася. Питому теплоємність свинцю знайти за законом Дюлонга і Пті.

2.108. Які сили треба прикласти до кінців сталевого стержня з площею поперечного перерізу S = 10 *см*^{2}, щоб не дати йому розширитися при нагріванні від t_1 = 0 $^{\circ}C$ до t_2 = 30 $^{\circ}C$?

2.109. При температурі 0 $^{\circ}C$ довжина алюмінієвого стержня l =50 *см*, а залізного на Δl = 0,5 *мм* більше. Перерізи стержнів однакові. При якій температурі t_1 будуть однакові довжини стержнів і при якій температурі t_2 будуть однакові їх об'єми?

2.110. Довжина металевого стержня при температурі 20 $^{\circ}C$ становить 500,12 *мм*; після нагрівання його до 100 $^{\circ}C$ довжина стержня стала такою, що дорівнює 500,6 *мм*. Визначити з якого матеріалу зроблено стержень.

2.111. Об'єм цинкової кулі при температурі 15 ^{O}C дорівнює 100 *см*^{3}. Який об'єм витіснить куля при зануренні її у воду, що має температуру 100 ^{O}C? Вважати, що об'єм гарячої води набагато більший за об'єм кулі.

2.112. До сталевої дротини довжиною 1 *м* і радіусом 1 *мм* підвісили вантаж 980 *Н*. Яка робота виконується по розтягуванню дротини?

2.113. Знайти потенціальну енергію дротини довжиною 5 *см* і діаметром $4\cdot10^{-3}$ *см,* закрученої на кут 10$''$. Модуль зсуву матеріалу дротини дорівнює $5{,}9\cdot10^{10}$ *Н/м*^{2}.

2.114. Знайти відносну зміну густини циліндричного мідного стержня при стискуванні його тиском $P = 10^8$ *Па*. Коефіцієнт Пуассона для міді вважати таким, що дорівнює $\mu = 0{,}34$.

2.115. Залізна дротина довжиною 5 *м* висить вертикально. На скільки зміниться об'єм дротини, якщо до неї прив'язати гирю вагою 100 *Н*?

Розділ 3. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

1. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

Основні співвідношення

В основі всіх фізичних явищ, які вивчаються в електродинаміці, лежить взаємодія заряджених тіл.

Під *електричним зарядом* розуміють кількісну міру здатності тіл до електромагнітної взаємодії.

Заряд існує у двох видах, які називають *позитивним* та *негативним* (*додатним та від'ємним*) зарядами. Експериментально встановлено, що однойменні заряди відштовхуються, а різнойменні – притягуються.

Сила взаємодії між двома точковими зарядами визначається за *законом Кулона*

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q_1Q_2}{r^2}, \quad (3.1)$$

де F – сила взаємодії двох точкових зарядів Q_1 і Q_2; r – відстань між зарядами; ε – відносна діелектрична проникність середовища; $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ Ф/м$ – електрична стала.

У будь-якій електрично ізольованій системі алгебраїчна сума зарядів (додатних і від'ємних) не змінюється. Це твердження називають *законом збереження заряду* і математично записують так:

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = const, \tag{3.2}$$

n – кількість зарядів у системі.

У класичній електродинаміці прийнято, що усі заряди, які зустрічаються в природі, кратні заряду електрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл$. Цю властивість називають *законом квантування заряду*.

За сучасними уявленнями взаємодія між зарядами здійснюється через *електричне поле*. Поле нерухомих зарядів не змінюється з часом і характеризується напруженістю $\vec{E}$ та потенціалом φ.

Напруженість електричного поля – це силова характеристика поля, і визначає силу $\vec{F}$, з якою дане поле діє на одиничний додатний пробний заряд q

$$\vec{E} = \vec{F}/q. \tag{3.3}$$

Напрямок вектора $\vec{E}$ збігається за напрямком з силою $\vec{F}$. Вимірюють напруженість у $[Н/Кл] \equiv [В/м]$.

Напруженість поля, яке створюється точковим зарядом Q на відстані r від нього, визначається за співвідношенням:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{3.4}$$

Дослідним шляхом встановлено, що напруженість електричного поля системи зарядів дорівнює геометричній сумі напруженостей полів кожного із зарядів окремо. Це твердження називається *принципом суперпозиції полів* і математично записується так:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i, \tag{3.5}$$

де $\vec{E}_i$ – напруженість поля, створеного i – тим зарядом; n – кількість зарядів у системі.

У випадку, якщо заряджене тіло не можна вважати точковим, його розбивають на достатньо малі елементи, заряди яких Δq_i можна вважати точковими, і згідно з принципом суперпозиції знаходять напруженість поля

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta q_i}{r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i},$$

або

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\lim_{\Delta q_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta q_i}{r_i^2}\frac{\vec{r}_i}{r_i} = k\int\frac{dq}{\varepsilon r^2}\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (3.6)$$

де $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cong 9\cdot 10^9\ \dfrac{м}{Ф}$.

Лініями напруженості (*силовими лініями*) електричного поля називають лінії, проведені в полі так, що дотичні до них в кожній точці збігаються за напрямком з вектором напруженості поля у цій точці.

Потоком Φ_E вектора напруженості електричного поля через поверхню S, довільно орієнтовану відносно силових ліній, називають кількість ліній напруженості, які пронизують цю поверхню. Для однорідного електричного поля $\Phi_E = \left(\vec{E}, \vec{S}\right) = ES\cos\alpha$, де α – кут між вектором $\vec{E}$ і вектором $\vec{S} = \vec{n}S$ ($\vec{n}$ – вектор нормалі до поверхні S).

Потік Φ_E напруженості $\vec{E}$ електричного поля через довільну поверхню S, розташовану в неоднорідному електричному полі

$$\Phi_E = \iint_S E\cos\alpha dS = \iint_S E_n dS, \qquad (3.7)$$

де α – кут між вектором $\vec{E}$ і нормаллю $\vec{n}$ до елемента поверхні, dS – площа елемента поверхні, E_n – проекція вектора напруженості на напрям нормалі.

Закон Кулона і принцип суперпозиції електричних полів дозволяють вирахувати напруженість поля створеного будь-якими зарядженими тілами, що супроводжується здебільшого досить громіздкими розрахунками. Задача знаходження $\vec{E}$ значно спрощується, якщо використати *теорему*

Остроградського – Гаусса: потік вектора напруженості електричного поля через будь-яку замкнуту поверхню, яка охоплює заряди $Q_1, Q_2, ..., Q_n$, дорівнює алгебраїчній сумі цих зарядів, поділеній на ε_0:

$$\Phi_E = \oint\limits_S E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i\,, \tag{3.8}$$

де $\sum_{i=1}^{n} Q_i$ – алгебраїчна сума зарядів, які охоплені замкнутою поверхнею, n – кількість зарядів.

Лінійна густина рівномірно розподіленого заряду:

$$\tau = \Delta Q / \Delta l \ \text{ або } \ \tau = dQ / dl\,. \tag{3.9}$$

Поверхнева густина рівномірно розподіленого заряду:

$$\sigma = \Delta Q / \Delta S \ \text{ або } \ \sigma = dQ / dl\,. \tag{3.10}$$

Об'ємна густина рівномірно розподіленого заряду:

$$\rho = \Delta Q / \Delta V \ \text{ або } \ \rho = dQ / dV\,. \tag{3.11}$$

Вектор електричного зміщення $\vec{D}$ для ізотропного середовища

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\,. \tag{3.12}$$

Потік Ψ вектора електричного зміщення $\vec{D}$ через довільну поверхню S в однорідному електричному полі дорівнює скалярному добутку

$$\Psi = \left(\vec{D}, \vec{S}\right) = DS\cos\alpha\,, \tag{3.13}$$

де α – кут між вектором $\vec{D}$ і вектором $\vec{S} = \vec{n}S$ ($\vec{n}$ – вектор нормалі до поверхні S).

Потік Ψ вектора електричного зміщення через довільну поверхню S в неоднорідному електричному полі дорівнює

$$\Psi = \iint\limits_S DdS\cos\alpha = \iint\limits_S D_n dS\,, \tag{3.14}$$

де D_n – проекція вектора $\vec{D}$ на напрям нормалі до елемента поверхні dS.

Теорема Остроградського – Гаусса для середовища: Потік вектора електричного зміщення через будь-яку замкнуту поверхню, яка охоплює заряди $Q_1, Q_2, ..., Q_n$:

$$\Psi = \oint\limits_S D_n dS = \sum_{i=1}^{n} Q_i \ , \qquad (3.15)$$

n – кількість зарядів (зі своїми знаками), розташованих всередині замкнутої поверхні.

Потенціал електростатичного поля φ в даній точці – це величина, яка чисельно дорівнює відношенню потенціальної енергії Π точкового додатного заряду Q, розміщеного в даній точці поля до величини цього заряду:

$$\varphi = \Pi / Q \ . \qquad (3.16)$$

За фізичним змістом потенціал електростатичного поля в даній точці чисельно дорівнює відношенню роботи поля по переміщенню точкового додатного заряду з даної точки поля на нескінченність до величини цього заряду:

$$\varphi = A / Q \ . \qquad (3.17)$$

Потенціал електричного поля на нескінченності умовно прийнято вважати таким, що дорівнює нулеві.

Відмітимо, що при переміщенні заряду в електричному полі робота зовнішніх сил $A_{з.с.}$ за абсолютним значенням дорівнює роботі $A_{с.п.}$ сил поля і протилежна їй за знаком:

$$A_{з.с.} = -A_{с.п.} \ .$$

Потенціал електричного поля, створеного точковим зарядом Q на відстані r від заряду:

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r} \ . \qquad (3.18)$$

Потенціал електричного поля системи n точкових зарядів в даній точці, у відповідності з принципом суперпозиції електричних полів, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$, створених окремими точковими зарядами $Q_1, Q_2, ..., Q_n$:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \ . \qquad (3.19)$$

Енергія взаємодії W системи точкових зарядів $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ визначається роботою, яку може здійснити ця система зарядів при віддаленні їх один від одного на нескінченність, і виражається формулою:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i \,, \qquad (3.20)$$

де φ_i – потенціал поля, створений системою із $n-1$ зарядів (за виключенням *i*-того) в точці, де знаходиться заряд Q_i.

Потенціал зв'язаний з напруженістю поля співвідношенням:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \,. \qquad (3.21)$$

У випадку сферично симетричного електричного поля цей зв'язок виражається співвідношенням

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$$

у векторній або

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$

– у скалярній формах.

У випадку однорідного електричного поля, в якому напруженість в кожній точці однакова як за модулем, так і за напрямком

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} \,.$$

Робота, яка здійснюється електричним полем при переміщенні точкового заряду Q з однієї точки поля з потенціалом φ_1 в іншу точку з потенціалом φ_2 в неоднорідному полі

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

або

$$A = Q\int_L E_L dl \,, \qquad (3.22)$$

де E_l – проекція вектора напруженості $\vec{E}$ на напрямок переміщення $d\vec{l}$.

У випадку однорідного поля робота визначається за формулою:

$$A = QEl\cos\alpha \,, \qquad (3.23)$$

де α – кут між напрямком вектора $\vec{E}$ і переміщенням $\vec{l}$.

Електричний диполь – це система з двох точкових зарядів, однакових за модулем і протилежних за знаком, які знаходяться на деякій відстані один від одного.

Електричний момент диполя – вектор $\vec{p}$, дорівнює добутку величини заряду $|Q|$ на вектор $\vec{l}$, який називається плечем диполя, і направлений від від'ємного заряду до додатного:

$$\vec{p} = |Q|\vec{l} \ . \tag{3.24}$$

Диполь називається точковим, якщо плече диполя набагато менше за відстань до точки, в якій визначається поле.

Напруженість поля точкового диполя визначається за формулою:

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1+3\cos^2\alpha} \ , \tag{3.25}$$

де p – електричний момент диполя; r – абсолютне значення радіус-вектора, проведеного з центра диполя до точки, в якій визначається напруженість поля ; α – кут між радіус-вектором і плечем диполя.

Потенціал поля точкового диполя:

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha \ . \tag{3.26}$$

Механічний момент, який діє на диполь з електричним моментом $\vec{p}$, який розміщений в однорідному електричному полі з напруженістю $\vec{E}$, дорівнює векторному добутку

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}] \ . \tag{3.27}$$

У неоднорідному електричному полі, окрім пари сил (моменту сил) на диполь діє ще деяка сила. Якщо поле діє вздовж осі *x*, то ця сила виражається співвідношенням

$$F_x = p\frac{\partial E}{\partial x}\cos\alpha \ , \tag{3.28}$$

де $\frac{\partial E}{\partial x}$ – частинна похідна від напруженості поля за координатою, яка характеризує ступінь неоднорідності поля в напрямку осі *x*. При $\alpha > \pi/2$ сила F_x додатна. Це означає, що під дією цієї сили диполь втягується в область з більшою напруженістю поля.

Дослід показує, що між зарядом q віддаленого провідника і його потенціалом існує просте співвідношення:

$$q = C\varphi \ , \tag{3.29}$$

де коефіцієнт пропорційності C – називається *електроємністю* (або просто *ємністю*) провідника. Згідно з (3.29), ємність вимірюється в $[Кл/В]=[Ф]$ (у фарадах).

При наближенні до віддаленого провідника іншого провідника його ємність зростає. Цю властивість покладено в основу будови *конденсатора* – два провідники (*обкладки конденсатора*), заряджені однаковими за величиною, але протилежними за знаком зарядами і розділені шаром діелектрика. Ємність конденсатора залежить від розмірів та форми обкладок, від величини проміжку між ними, та від діелектричної проникності діелектрика, який заповнює конденсатор.

Вирази для ємності деяких конденсаторів, заповнених діелектриком з діелектричною проникністю ε, з площею обкладок S, з товщиною діелектрика d, з радіусами сфер (або циліндрів) r_1, r_2, з висотою циліндрів l задаються співвідношеннями:

$$C=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \qquad (3.30)$$

для плоского конденсатора;

$$C=4\pi\varepsilon\varepsilon_0\frac{r_1 r_2}{r_2-r_1} \qquad (3.31)$$

для сферичного конденсатора;

$$C=\frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)} \qquad (3.32)$$

для циліндричного конденсатора.

Промисловість випускає конденсатори певної номінальної ємності. На практиці буває важливим отримати конденсатор деякої ємності, яка відрізняється від номінальної. Якщо конденсатора потрібної ємності бракує, то використовують батареї конденсаторів, з'єднуючи їх певним чином. У такий спосіб можна отримати ємність більшу або меншу за номінальну.

При паралельному з'єднанні конденсаторів їх ємності додаються:

$$C=\sum_{i=1}^{n}C_i\ , \qquad (3.33)$$

а при послідовному – додаються величини, обернені до ємностей конденсаторів:

$$\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}\ . \qquad (3.34)$$

Результуюча ємність такої батареї завжди менша за ємність найменшого з використаних конденсаторів.

Методичні поради

1. При розв’язуванні задач з електрики, як і в попередніх розділах фізики, потрібно спочатку визначити до якого розділу електрики відносяться явища, описані в умові задачі, точкові чи розподілені заряди в ній розглядаються, однорідні чи неоднорідні поля, постійні чи змінні в часі потенціали тощо.

2. Якщо розглядається взаємодія точкових зарядів, які знаходяться на визначених відстанях, то доцільно використовувати формули (3.1) – (3.4), (3.16), ураховуючи, де це необхідно, принцип суперпозиції полів (3.5) і закон збереження зарядів у ізольованих системах (3.2). Розв’язування таких задач нічим не відрізнятиметься від розв’язування задач з динаміки (див. розділ “Механіка”), з урахуванням центрального характеру сил взаємодії в законі Кулона.

3. Якщо заряджене тіло за умовою задачі не можна розглядати як точкове, його потрібно розбити на велику кількість зарядів, які можна вважати точковими, визначити шукану величину для одного з цих зарядів, а потім проінтегрувати її у відповідних межах, які визначаються умовою задачі. При інтегруванні векторних фізичних величин слід спочатку замінити їх проекціями.

4. При визначенні напруженості поля, яка створюється нескінченно великими зарядженими тілами правильної геометричної форми (дроти, циліндри, площини, кулі) варто використовувати теорему Остроградського – Гаусса (для вакууму або середовища), яка значно спрощує визначення напруженості поля, створюваного зарядженим тілом. При цьому важливо лише правильно вибирати поверхню, якою ми оточуємо заряджене тіло за умовою теореми. Розв’язування задачі значно

спроститься, якщо поверхня в кожній точці буде перпендикулярною до ліній напруженості електричного поля.

5. Зображення взаємодії тіл за допомогою рисунків, електричних схем або фізичних моделей також значно спрощує розв'язування задач. На таких схемах слід вказати всі задані в умові задачі величини, а також ті величини, які необхідно визначити.

6. Якщо в задачі потрібно визначити результуючу силу взаємодії, напруженість електричного поля або вектор електричного зміщення, створеного системою, яка складається з кількох заряджених тіл, то для знаходження напрямку результуючого вектора користуються правилом додавання векторів, а для знаходження модуля результуючого вектора – теоремою косинусів.

7. При знаходженні потенціалу, створеного розподіленим зарядом, слід користуватись співвідношенням $E(r) = -grad\varphi$. Знаючи явний вигляд функції $E(r)$, шляхом інтегрування можна визначити відповідну різницю потенціалів. Так, наприклад, для електричного поля циліндричної або сферичної симетрії

$$E(r) = -d\varphi / dr\,,\ d\varphi = -E(r)dr\,,$$

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_{r_1}^{r_2} E(r)dr\,.$$

8. При знаходженні роботи по переміщенню заряду можна скористатись або співвідношеннями (3.22), або прямим визначенням роботи в механіці $A = (\vec{F}, \Delta\vec{r})$. При використанні останнього співвідношення слід враховувати постійна чи змінна сила діє на заряд.

Якщо поле, в якому переміщують заряд, однорідне і сила постійна, то роботу розраховують за формулою $A = F\Delta r\cos\alpha$. Якщо ж поле неоднорідне, то спочатку знаходять елементарну роботу, яка виконується на відрізку dr настільки малому, що силу можна вважати постійною в межах цього відрізка: $dA = F(r)dr$, а потім інтегрують в заданих межах:

$$\int_0^{A_{12}} dA = \int_{r_1}^{r_2} F(r)dr\,.$$

9. При розрахунку ємності шаруватих конденсаторів (конденсаторів з кількома шарами діелектрика), їх можна замінити еквівалентною схемою послідовно з'єднаних конденсаторів. Справді, якщо між шарами діелектрика розмістити металеву фольгу, то ємність конденсатора при цьому не зміниться, але його можна буде уявити собі як n послідовно з'єднаних конденсаторів (n – кількість діелектричних шарів). Тоді ємність такої батареї простих послідовно з'єднаних конденсаторів можна визначити за співвідношенням (3.34).

Приклади розв'язування задач

1. Три однакових додатних заряди $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1\,нКл$, розміщених у вершинах рівностороннього трикутника. Який від'ємний заряд Q_4 треба розташувати в центрі трикутника, щоб сила притягання з його боку зрівноважила б сили взаємного відштовхування зарядів, що знаходяться у вершинах?

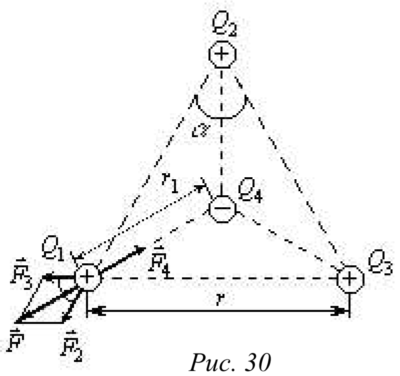

Рис. 30

Розв'язання

Оскільки в умові задачі не вказано розміри зарядів, вважатимемо їх точковими. Намалюємо схему розміщення зарядів (рис. 30) та проаналізуємо її. Всі три заряди, які розміщені у вершинах трикутника, знаходяться в однакових умовах, тому для розв'язку задачі необхідно визначити, який від'ємний заряд необхідно розташувати в центрі трикутника, щоб у рівновазі знаходився хоча б один з трьох зарядів, наприклад Q_1.

У відповідності з принципом суперпозиції на цей заряд діє кожен з решти зарядів незалежно від інших. Тому заряд Q_1 буде знаходитись у рівновазі, якщо векторна сума сил, що на нього діють, дорівнюватиме нулеві:

$$\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4=\vec{F}+\vec{F}_4=0\,, \qquad (1)$$

де $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ – сили, з якими діють на заряд Q_1 заряди Q_2, Q_3, Q_4, а $\vec{F}$ – рівнодійна сил $\vec{F}_2$ та $\vec{F}_3$.

Оскільки сили $\vec{F}$ і $\vec{F}_4$ діють уздовж однієї прямої, то векторне рівняння (1) можна замінити скалярним:

$$F-F_4=0 \text{ або } F=F_4\,. \qquad (2)$$

Знайдемо результуючу силу $\vec{F}$, як векторну суму сил $\vec{F}_2$ і $\vec{F}_3$. За теоремою косинусів:

$$F^2=F_2^2+F_3^2-2F_2F_3\cos(\pi-\alpha)\,. \qquad (3)$$

Оскільки трикутник $Q_1Q_2Q_3$ рівносторонній, то $\alpha=60^{\circ}$ і останнє рівняння перепишеться у вигляді:

$$F^2=F_2^2+F_3^2+2F_2F_3\cos 60^0\,. \qquad (4)$$

Використаємо закон Кулона у рівнянні (4) і, з урахуванням (2), перепишемо його так:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}Q_1Q_4=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\sqrt{Q_2^2Q_1^2+Q_3^2Q_1^2+2Q_1^2Q_2Q_3\cos 60^0}\,. \qquad (5)$$

З урахуванням того, що $Q_1=Q_2=Q_3$, рівняння (5) набуде вигляду:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r_1^2}Q_1Q_4=\frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}\sqrt{2(1+\cos 60^0)}\,. \qquad (6)$$

Після скорочення однакових величин рівняння (6) перепишеться:

$$Q_4=\frac{Q_1r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos 60^0)}\,. \qquad (7)$$

Знайдемо відношення $\frac{r_1}{r}$. З $\Delta Q_1Q_4Q_3$ видно, що $\frac{r/2}{r_1}=\cos 30^0$, отже

$$r_1/r=1/\sqrt{3}\,. \qquad (8)$$

Підставивши (8) у (7) і врахувавши, що $\cos 60^0=1/2$, отримаємо остаточну відповідь: $Q_4=Q_1/\sqrt{3}=0{,}58\,(нКл)$.

Відмітимо, що рівновага цієї системи зарядів буде нестійкою.

Відповідь: $-0{,}58\,нКл$.

2. Тонкий стержень завдовжки $l = 30\,см$ заряджений рівномірно розподіленим по довжині зарядом з лінійною густиною $\tau = 1\,мкКл/м$. На відстані $r_0 = 20\,см$ від стержня знаходиться заряд $Q_1 = 10\,нКл$, рівновіддалений від кінців стержня. Визначити силу взаємодії $\vec{F}$ точкового заряду зі стержнем.

Розв'язання

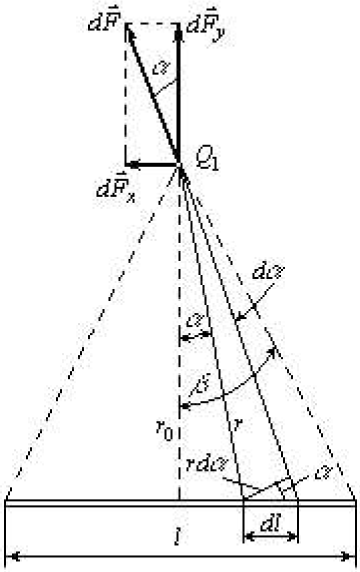

Рис. 31

За умовою задачі один із зарядів неточковий, тому знайти силу взаємодії безпосередньо за законом Кулона не можна. Розіб'ємо стержень на велику кількість нескінченно малих ділянок довжиною dl і знайдемо силу взаємодії однієї такої ділянки з зарядом Q_1. Заряд ділянки $dQ = \tau dl$ можна розглядати як точковий і застосувати до нього закон Кулона.

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1\tau dl}{r^2}, \qquad (1)$$

де r – відстань від виділеного елемента dl до заряду Q_1. З рисунка 31 видно, що

$$r = \frac{r_0}{\cos\alpha} \Rightarrow dl = \frac{rd\alpha}{\cos\alpha}, \qquad (2)$$

де r_0 – відстань від заряду Q_1 до стержня. Підставивши (2) в (1), отримаємо:

$$dF = \frac{Q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}d\alpha. \qquad (3)$$

Відмітимо, що $d\vec{F}$ – вектор, тому перш ніж інтегрувати, розкладемо його на дві складові (спроектуємо його на осі oX і oY).

$$dF_y = dF\cos\alpha, \text{ а } dF_x = dF\sin\alpha. \qquad (4)$$

Підставивши в (4) співвідношення (3), отримаємо:

$$dF_y = \frac{Q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha \text{ і } dF_x = \frac{Q_1 \tau \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha . \qquad (5)$$

Як видно з рисунка кут α змінюється від $-\beta$ до β, тому інтегруватимемо саме в цих межах:

$$F_y = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{Q_1 \tau \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha = \frac{Q_1 \tau (\sin\beta - \sin(-\beta))}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = \frac{2Q_1 \tau \sin\beta}{4\pi\varepsilon_0 r_0}; \qquad (6)$$

$$F_x = \int_{-\beta}^{\beta} \frac{Q_1 \tau \sin\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r_0} d\alpha = -\frac{Q_1 \tau (\cos\beta - \cos\beta)}{4\pi\varepsilon_0 r_0} = 0 . \qquad (7)$$

Таким чином, сила, яка діє на заряд Q_1

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = F_y = \frac{Q_1 \tau \sin\beta}{2\pi\varepsilon_0 r_0} . \qquad (8)$$

З рисунка видно, що $\sin\beta = \dfrac{l/2}{\sqrt{r_0^2 + l^2/4}} = \dfrac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}$.

Підставивши це значення у формулу (8), отримаємо

$$F = F_y = \frac{Q_1 \tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0} \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}} = 0{,}54\,(мН) .$$

Відповідь: $0{,}54\,мН$.

3. Електричне поле створене двома точковими зарядами $Q_1 = 30\,нКл$ і $Q_2 = -10\,нКл$, які знаходяться на відстані 20 *см* один від одного. Визначити напруженість електричного поля E в точці А, яка знаходиться на відстані $r_1 = 15\,см$ від першого та на відстані $r_2 = 10\,см$ від другого заряду.

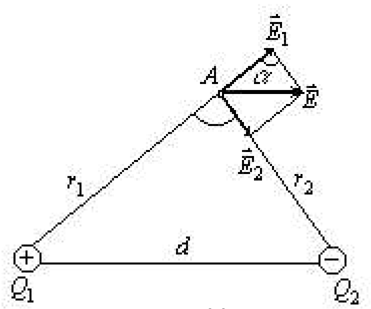

Рис. 32

Розв'язання

Згідно з принципом суперпозиції електричних полів, кожний заряд створюватиме поле незалежно від присутності іншого заряду. Тому напрямок вектора напруженості електричного поля в точці А слід шукати як векторну суму напруженості $\vec{E}_1$ і напруженості $\vec{E}_2$ полів (див. рис. 32), створюваних відповідно першим та другим зарядами: $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, а модуль вектора $\vec{E}$ – за теоремою косинусів.

Модулі напруженості для точкових зарядів в точці А знайдемо зі співвідношень:

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \text{ і } E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}. \qquad (1)$$

Модуль результуючої напруженості $\left|\vec{E}\right|$ знайдемо з трикутника, утвореного векторами $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ і $\vec{E}$. За теоремою косинусів:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2\cos\alpha. \qquad (2)$$

Кут α невідомий, але він дорівнює куту $\angle Q_1AQ_2$ трикутника, у вершинах якого знаходяться точкові заряди Q_1, Q_2 і точка А. Знайдемо косинус кута $\angle Q_1AQ_2$, застосувавши до цього трикутника теорему косинусів до цього трикутника:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\angle Q_1AQ_2 . \qquad (3)$$

Зі співвідношення (3) визначимо

$$\cos\angle Q_1AQ_2 = \cos\alpha = (r_1^2 + r_2^2 - d^2)/2r_1r_2 = -0{,}25. \qquad (4)$$

Підставши (1) в (2), одержимо:

$$E^2 = \left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\right)^2 - 2\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}\frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}\cos\alpha. \qquad (5)$$

З урахуванням числових значень величин у (5), отримаємо: $E = 16700\,(В/м)$.

Відповідь: $16{,}7\,кВ/м$.

4. Електричне поле створене у вакуумі нескінченною площиною, зарядженою з поверхневою густиною $\sigma = 400\,нКл/м^2$, і нескінченною прямою ниткою, зарядженою з лінійною густиною $\tau = 100\,нКл/м$. На відстані $r = 10\,см$ від нитки знаходиться точковий заряд $Q = 10\,нКл$. Знайти напруженість поля, яке створюється площиною та ниткою в точці, де розміщений точковий заряд.

Розв'язання

Для того, щоб отримати величину вектора напруженості електричного поля $\vec{E}$ в точці, де розташований точковий заряд, знайдемо спочатку напруженості полів створених зарядженою ниткою $\vec{E}_1$ і зарядженою площиною $\vec{E}_2$, а потім, скориставшись принципом суперпозиції електричних полів, знайдемо величину $\vec{E}$ як векторну суму $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ ($\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$).

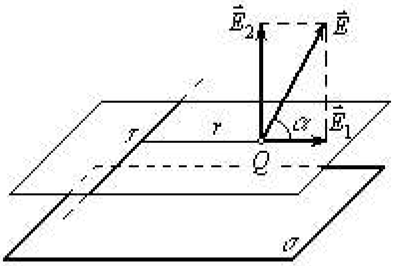

Рис. 33

Визначимо величину $\vec{E}_1$, скориставшись теоремою Остроградського – Гаусса. Для цього оточимо заряджену нитку замкнутою (гаусовою) поверхнею у вигляді циліндра. Такий вибір замкнутої поверхні значно спростить розв'язування цієї частини задачі, бо лінії напруженості електростатичного поля в кожній точці будуть перпендикулярними до гаусової поверхні. Вектор $\vec{E}_1$ буде паралельний вектору нормалі до поверхні $\vec{n}$, і формула для визначення потоку Φ_E спроститься: $\Phi_E = \oint\!\!\oint_S E_1 \cos\alpha dS = \oint\!\!\oint_S E_1 dS$, бо за таких умов $\cos\alpha = 1$. Отже, теорема Остроградського – Гаусса перепишеться так:

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S E_1 dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{1}{\varepsilon_0} l\tau\,. \qquad (1)$$

Урахуємо, що на відстані *r* від нитки напруженість поля буде однаковою у всіх напрямках, тому величину E_1 можна винести за знак інтеграла. Інтеграл по поверхні $\oint\!\!\oint_S dS = S_G$, де S_G –

площа гаусової поверхні (бічна поверхня циліндра, бо потік вектора $\vec{E}$ через основи циліндра, які паралельні цьому вектору, дорівнює нулеві). Отже, теорема Остроградського – Гаусса набуде остаточного вигляду:

$$\Phi_E = E_1 S_G = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{\tau l}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Оскільки $S_G = 2\pi r l$, то $2\pi r l E_1 = \frac{\tau l}{\varepsilon_0}$, звідки

$$E_1 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}. \qquad (3)$$

Визначимо тепер величину $\vec{E}_2$. Як гаусову поверхню виберемо паралелепіпед, дві грані якого паралельні до розглядуваної площини. За такого вибору лінії напруженості електричного поля, створюваного зарядженою площиною, будуть перпендикулярними до граней паралелепіпеда, а отже

$$\Phi_E = E_2 S_G = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{\sigma S_{пов}}{\varepsilon_0}. \qquad (4)$$

При цьому $S_G = 2S_{пов}$, бо тільки до двох граней паралелепіпеда лінії $\vec{E}_2$ перпендикулярні. До всіх інших вони будуть паралельними, а це означає, що скалярний добуток $\left(\vec{E},\vec{S}\right) = ES\cos\alpha = 0$, бо для цих граней $\cos\alpha = 0$.

Отже, $2E_2 S_{пов} = \frac{\sigma S_{пов}}{\varepsilon_0}$, звідки

$$E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (5)$$

З рис. 33 видно, що вектори $\vec{E}_1$ і $\vec{E}_2$ взаємно перпендикулярні, а отже результуюче значення модуля вектора $\vec{E}$ можна знайти за теоремою Піфагора:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}. \qquad (6)$$

Підставивши в (6) модулі векторів напруженості полів зі співвідношенть (5) і (3), отримаємо шукану величину:

$$E=\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\right)^2+\left(\frac{\tau}{2\rho\varepsilon_0 r}\right)^2}=\frac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2+\left(\frac{\tau}{\pi r}\right)^2}\ .$$

Відповідь: $E=28{,}9\ кВ/м$.

5. Точковий заряд $Q_1=+25\ нКл$ знаходиться в полі, створеному нескінченим циліндром радіусом $R=1\,см$, рівномірно зарядженим з поверхневою густиною $\sigma=2\ мкКл/м^2$. Визначити силу, яка діє на заряд, розміщений на відстані $r=10\ см$ від осі циліндра.

Розв’язання

Заряджений циліндр створює електричне поле, яке діє на точковий заряд з силою

$$\vec{F}=Q\vec{E}\ , \qquad (1)$$

де $\vec{E}$ – напруженість поля, створеного циліндром у точці, де знаходиться заряд. Оскільки циліндр нескінченно довгий, то можна знехтувати крайовими ефектами і знайти $\vec{E}$ за теоремою Остроградського – Гаусса. Як гаусову поверхню візьмемо циліндр радіусом $r_G=10\ см$, що проходитиме через точку, яка нас цікавить. При такому виборі замкнутої гаусової поверхні лінії напруженості електричного поля будуть перпендикулярними до неї, а отже формула для потоку Φ_E вектора напруженості електричного поля запишеться у вигляді:

$$\Phi_E=\oint\!\!\oint_S E\cos\alpha dS=\oint\!\!\oint_S EdS\ , \qquad (2)$$

оскільки $\cos\alpha=1$. На поверхні однакового радіуса $r_G=10\ см$ величина напруженості поля E буде постійною, тому її можна винести за знак інтегралу, а інтеграл по поверхні $\oint\!\!\oint_S dS=S_G$, де S_G – площа гаусової поверхні (у нашому випадку бічна поверхня циліндра). Тоді теорема Остроградського – Гаусса перепишеться так:

$$\Phi_E=ES_G=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}Q_i=\frac{\sigma 2\pi Rl}{\varepsilon_0} \qquad (3)$$

або

$$2\pi r_G lE = \frac{1}{\varepsilon_0} 2\pi Rl\sigma . \qquad (4)$$

З останнього співвідношення:

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0 r_G} R\sigma . \qquad (5)$$

Підставивши (5) в (1) і провівши розрахунки, отримаємо:

$$F = Q\frac{R\sigma}{\varepsilon_0 r_G} = 5{,}65 \cdot 10^{-4}\ (H) .$$

Відповідь: $0{,}565\ мH$.

6. Знайти роботу A поля по переміщенню заряду $Q = 10\ нКл$ з точки 1 в точку 2 відстань l між якими дорівнює $3\ см$, які знаходяться між двома різнойменно зарядженими нескінченними паралельними пластинами. Поверхнева густина заряду пластин $\sigma = 0{,}4\ мкКл / м^2$.

Розв'язання

Можливі два способи розв'язку цієї задачі.

1-й спосіб. Роботу сил поля по переміщенню заряду Q з точки 1 з потенціалом φ_1 в точку 2 з потенціалом φ_2 знайдемо за формулою

$$A = Q(\varphi_1 - \varphi_2) . \qquad (1)$$

Для визначення різниці потенціалів між точками 1 і 2 пригадаємо, що напруженість поля E зв'язана з потенціалом співвідношенням $E = -\frac{d\varphi}{dr}$. Оскільки поле між нескінченними плоскими пластинами однорідне, то

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{l} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l} .$$

Отже для такого поля справедливе співвідношення:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = El , \qquad (2)$$

де l – відстань між точками 1 і 2.

Напруженість поля, яку створюють дві різнойменно заряджені нескінченні пластини

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{3}$$

Підставивши (2) і (3) в (1), отримаємо:

$$A = Q\sigma l / \varepsilon_0. \tag{4}$$

2-й спосіб. Оскільки поле однорідне, то сила, що діє на заряд Q при його переміщенні, буде постійною. Тому робота по переміщенню заряду з точки 1 в точку 2

$$A = F\Delta r \cos\alpha, \tag{5}$$

де F – сила, яка діє на заряд; Δr – модуль переміщення заряду Q з точки 1 в точку 2; α – кут між напрямками переміщення і сили. Але

$$F = QE = Q\frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \tag{6}$$

Підставивши (6) в (5) та врахувавши, що проекція переміщення Δr на напрям дії сили дорівнює відстані між еквіпотенціальними поверхнями ($\Delta r \cos\alpha = l$), отримаємо:

$$A = QE = Q\sigma l / \varepsilon_0. \tag{7}$$

Отже, обидва розв'язки привели до однакових результатів. Підставивши у формулу (7) числові значення величин, отримаємо:

$$A = Q\sigma l / \varepsilon_0 =$$

$$10^{-8} \cdot 0{,}4 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-2} / 8{,}85 \cdot 10^{-12} = 13{,}6 \cdot 10^{-6}\ (\text{Дж})$$

Відповідь: 13,6 *мкДж*.

7. Електричне поле створене довгим циліндром радіусом $R = 1\,см$, рівномірно зарядженим з лінійною густиною $\tau = 20\,нКл/м$. Визначити різницю потенціалів між двома точками цього поля, які знаходяться на відстані $a_1 = 0{,}5\,см$ і $a_2 = 2\,см$ від поверхні циліндра навпроти його середини.

Розв'язання

Для визначення різниці потенціалів скористаємося співвідношенням між напруженістю поля та потенціалом $E = -\operatorname{grad}\varphi$. Для циліндра модуль напруженості електричного поля $E = -\frac{d\varphi}{dr}$ або

$$d\varphi = -E(r)dr\,. \tag{1}$$

Оскільки циліндр нескінченно довгий, то знехтуємо крайовими ефектами і знайдемо $\vec{E}$ за теоремою Остроградського – Гаусса. Для цього оточимо циліндр гаусовою поверхнею у формі циліндра радіусом $r_G = 2\,см$. При такому виборі замкнутої гаусової поверхні лінії напруженості електричного поля будуть перпендикулярними до неї, а отже формулу для потоку вектора напруженості електричного поля, можна переписати у вигляді:

$$\varPhi_E = \oint\!\!\oint_S E\cos\alpha dS = \oint\!\!\oint_S EdS\,, \tag{2}$$

оскільки $\cos\alpha = 1$. На поверхні однакового радіуса величина напруженості поля E буде постійною, тому її можна винести за знак інтегралу. Інтеграл по поверхні $\oint\!\!\oint_S dS = S_G$, де $S_G = 2\pi rl$ – площа гаусової поверхні (у нашому випадку – тільки бічна поверхня циліндра, оскільки він нескінченний). Тоді теорема Остроградського – Гаусса перепишеться так:

$$\varPhi_E = ES_G = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} Q_i = \frac{\tau l}{\varepsilon_0} \tag{3}$$

або

$$E = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\tau}{2\pi r}\,. \tag{4}$$

Підставивши (4) в (1), отримаємо:

$$d\varphi = -E(r)dr = -\frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\tau}{2\pi r}dr\,, \tag{5}$$

а різницю потенціалів між точками знайдемо, проінтегрувавши (5) в межах від $r_1 = R + a_1$ до $r_2 = R + a_2$:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

або

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \qquad (6)$$

Підставивши в (6) числові значення відповідних величин, знайдемо: $\varphi_1 - \varphi_2 = 250\ B$.
Відповідь: 250 *В*.

8. Диполь з електричним моментом $p = 2\,нКл \cdot м$ знаходиться в однорідному електричному полі напруженістю $E = 30\,кВ/м$. Вектор $\vec{p}$ складає кут $\alpha_0 = 60°$ з напрямком силових ліній поля. Визначити роботу зовнішніх сил *A*, яку треба виконати, щоб повернути диполь на кут $\beta = 30°$.

Розв'язання

Із початкового положення диполь можна повернути на кут $\beta = 30° = \pi/6$ двома способами: за годинниковою стрілкою до кута $\alpha_1 = \alpha_0 - \beta = \pi/3 - \pi/6 = \pi/6$ та проти годинникової стрілки до кута $\alpha_2 = \alpha_0 + \beta = \pi/3 + \pi/6 = \pi/2$ (див. рис. 34). У першому випадку диполь буде повертатись під дією сил поля. Тому робота зовнішніх сил буде від'ємною. У другому випадку поворот можливий тільки під дією зовнішніх сил.

Отже, елементарна робота при повороті диполя на кут $d\alpha$

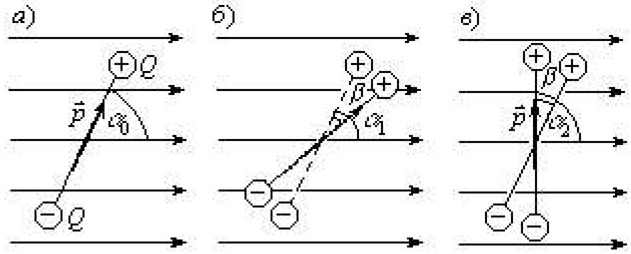

Рис. 34

$$dA = Md\alpha = pE\sin\alpha d\alpha, \qquad (1)$$

а повна робота при повороті на кут від α_0 до α

$$A=\int_{\alpha_0}^{\alpha} pE\sin\alpha d\alpha=-pE(\cos\alpha-\cos\alpha_0). \qquad (2)$$

Тоді робота зовнішніх сил при повороті диполя за годинниковою стрілкою:

$$A_1=pE(\cos\alpha_0-\cos\alpha_1)=-21{,}9\ мкДж, \qquad (3)$$

а проти годинникової стрілки

$$A_2=pE(\cos\alpha_0-\cos\alpha_2)=30\ мкДж. \qquad (4)$$

Відповідь: $A_1=-21{,}9\ мкДж$; $A_2=30\ мкДж$.

9. Визначити електричну ємність C плоского шаруватого конденсатора, який має три шари діелектрика: фарфору, ебоніту і слюди завтовшки $d_1=2\ мм$, $d_2=1{,}5\ мм$ та $d_3=1{,}7\ мм$ відповідно, якщо площа пластин конденсатора $S=100\ см^2$.

Розв'язання

Шаруватий конденсатор можна уявити собі як три послідовно з'єднаних конденсатори. Тоді ємність такої батареї можна записати у вигляді:

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}$$

або

$$\frac{1}{C}=\frac{d_1}{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}+\frac{d_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0 S}+\frac{d_3}{\varepsilon_3\varepsilon_0 S}. \qquad (1)$$

Із співвідношення (1)

$$C=\frac{\varepsilon_0 S}{\dfrac{d_1}{\varepsilon_1}+\dfrac{d_2}{\varepsilon_2}+\dfrac{d_3}{\varepsilon_3}}. \qquad (2)$$

Зробивши розрахунки отримаємо $C=77{,}4\cdot10^{-15}\ (Ф)$.

Відповідь: $77{,}4\cdot10^{-15}\ Ф$.

10. Два плоских конденсатори електроємністю $C_1=C_2=C$ з'єднані в батарею послідовно і підключені до джерела струму з електрорушійною силою E. Як зміниться різниця потенціалів U_1

на пластинах першого конденсатора, якщо простір між пластинами другого конденсатора, не відмикаючи джерела струму, заповнити діелектриком з діелектричною проникністю $\varepsilon = 7$?

Розв'язання

До заповнення другого конденсатора діелектриком напруга на обкладинках обох конденсаторів була однаковою: $U_1 = U_2 = E/2$. Після заповнення другого конденсатора діелектриком його електроємність збільшиться в $\varepsilon = 7$ разів $C_2' = \varepsilon C_2 = \varepsilon C$, а ємність першого не зміниться: $C_1' = C$.

Оскільки джерело струму не відмикалося, то різниця потенціалів на батареї конденсаторів залишиться незмінною, вона тільки перерозподілиться між конденсаторами. Різниця потенціалів на першому конденсаторі:

$$U_1' = \frac{Q}{C_1'} = \frac{Q}{C}, \tag{3}$$

де Q – заряд на пластинах конденсатора.

При послідовному з'єднанні конденсаторів заряд на кожній пластині і на всій батареї буде однаковим, тобто

$$Q = C_{бат}' E\ , \tag{4}$$

де

$$C_{бат}' = \frac{C_1' C_2'}{C_1' + C_2'} = \frac{C \cdot \varepsilon C}{C + \varepsilon C} = \frac{\varepsilon C}{1+\varepsilon}. \tag{5}$$

Таким чином

$$Q = \frac{\varepsilon \cdot C}{1+\varepsilon} E\,. \tag{6}$$

Підставивши цей вираз у формулу (1), отримаємо:

$$U_1' = \frac{Q}{C} = \frac{\varepsilon C E}{(1+\varepsilon)C} = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} E\,. \tag{7}$$

Відношення

$$\frac{U_1'}{U_1} = \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot E}{(1+\varepsilon)E} = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

показує як змінилася різниця потенціалів на пластинах першого конденсатора.

Підставивши значення, отримаємо:

$$\frac{U_1'}{U_1} = 1{,}75 \,.$$

Відповідь: напруга на пластинах першого конденсатора збільшилася в 1,75 рази.

Задачі для самостійного розв'язування

3.1. Визначити силу взаємодії двох точкових зарядів $Q_1 = Q_2 = 1\,Кл$, що знаходяться у вакуумі на відстані $r = 1\,м$ один від одного.

3.2. Дві кульки масою $m = 0{,}1\,г$ кожна підвішені в одній точці на однакових нитках завдовжки $l = 20\,см$. Отримавши однаковий заряд, кульки розійшлися так, що нитки утворили між собою кут $\alpha = 60^{\circ}$. Знайти заряд кожної кульки.

3.3. Дві однакові кульки підвішені в одній точці на нитках однакової довжини. При цьому нитки утворюють кут α. Кульки занурюють в олію, що має густину $\rho_0 = 8 \cdot 10^2\,кг/м^3$. Визначити діелектричну проникність ε олії, якщо кут між нитками при зануренні кульок залишається незмінним. Густина матеріалу кульок $\rho = 1{,}6 \cdot 10^3\,кг/м^3$.

3.4. Дано дві кульки масою $m = 1\,г$ кожна. Який заряд Q потрібно надати кожній кульці, щоб сила взаємного відштовхування зрівноважила силу взаємного притягання за законом всесвітнього тяжіння? Кульки вважати матеріальними точками.

3.5. У вершинах квадрата знаходяться однакові заряди по $0{,}3\,нКл$ кожний. Який від'ємний заряд треба розмістити в центрі квадрата, щоб сила притягання зрівноважила силу відштовхування?

3.6*. У вершинах правильного шестикутника зі стороною $a = 10\,см$ розміщені точкові заряди Q, $2Q$, $3Q$, $4Q$, $5Q$, $6Q$ ($Q = 0{,}1$ $мкКл$). Визначити силу F, яка діятиме на заряд , який знаходиться у площині шестикутника і рівновіддалений від його вершин.

3.7. Два додатні точкові заряди Q і $4Q$ закріплені на відстані $l = 60\,см$ один від одного. Визначити, в якій точці на прямій, яка проходить через заряди, потрібно розмістити третій заряд Q_1 так, щоб він знаходився у рівновазі. Вказати, який знак повинен мати цей заряд для того, щоб рівновага була стійкою, якщо переміщення можливе тільки вздовж прямої, яка проходить через закріплені заряди.

3.8. Відстань між двома вільними зарядами $l = 60\,см$. Величина першого з них $Q_1 = 180\,нКл$, а другого – $Q_2 = 720\,нКл$. Визначити точку на прямій, яка з'єднує ці заряди, в якій потрібно розмістити третій заряд Q_3 так, щоб система знаходилася в рівновазі. Визначити величину і знак заряду. Стійкою чи нестійкою буде рівновага?

3.9. Три однакових заряди величиною $1\,нКл$ кожен розміщені у вершинах рівностороннього трикутника. Який від'ємний заряд треба розмістити у центрі трикутника, щоб його притягання зрівноважило сили взаємного відштовхування зарядів? Чи буде ця рівновага стійкою?

3.10*. У вершинах правильного п'ятикутника знаходяться однакові заряди по $0{,}3\,нКл$. Який від'ємний заряд Q_1 треба розмістити в центрі п'ятикутника, щоб сила взаємного відштовхування додатних зарядів зрівноважилася силою притягання від'ємного?

3.11. Тонкий стержень завдовжки $l = 10\,см$ рівномірно заряджений з лінійною густиною $\tau = 1\,нКл/м$. На продовженні стержня на відстані 20 *см* від його найближчого кінця знаходиться точковий заряд $Q = 100\,нКл$. Визначити силу взаємодії зарядженого стержня і точкового заряду.

3.12. Тонкий довгий стержень рівномірно заряджений з лінійною густиною $\tau = 10\,мкКл/м$. На продовженні осі стержня на відстані 20 *см* від найближчого його кінця знаходиться точковий заряд $Q = 10\,нКл$. Визначити силу взаємодії зарядженого стержня і точкового заряду.

3.13. Тонкий дуже довгий стержень рівномірно заряджений з лінійною густиною $\tau = 10\,мкКл/м$. На перпендикулярі до осі стержня, встановленому з його кінця, знаходиться точковий заряд $Q = 10\,нКл$. Відстань від заряду до кінця стержня $a = 20\,см$. Знайти силу F взаємодії зарядженого стержня і точкового заряду.

3.14. Тонке кільце радіусом $R = 10\,см$ рівномірно заряджене з лінійною густиною $\tau = 1\,мкКл/м$. Визначити у скільки разів зміниться сила F, що діє на точковий заряд, розміщений на перпендикулярі до площини кільця на відстані 20 *см* від його центра, якщо відстань збільшиться до 2 *м*?

3.15*. Тонке півкільце радіусом 10 *см* рівномірно заряджене з лінійною густиною $\tau = 1\,мкКл/м$. У центрі кривизни півкільця знаходиться заряд $q = 20\,нКл$. Визначити силу взаємодії заряду і півкільця.

3.16. Дротяне кільце радіусом $R = 10\,см$ заряджене від'ємним зарядом $q = 5\,нКл$. 1). Знайти силу з якою кільце діє на заряд $q_1 = 1\,нКл$, що розміщений в точці А, яка знаходиться на осі кільця на відстані l від його центра (l = 0; 0,1 *м*; 2 *м*). Намалювати графік залежності $F = F(l)$.

3.17. Відстань між двома точковими зарядами $Q_1 = +8\,нКл$ і $Q_2 = -5{,}3\,нКл$ дорівнює 40 *см*. Вирахувати напруженість електричного поля в точці, яка лежить посередині між двома зарядами. Чому дорівнюватиме напруженість, якщо другий заряд буде додатним?

3.18. Електричне поле створене двома точковими зарядами в $Q_1 = +40\,нКл$ та $Q_2 = -10\,нКл$, які знаходяться на відстані 8 *см* один від одного. Визначити напруженість електричного поля E в точці, яка відділена від першого з них на 12 *см*, а від другого – на 10 *см*.

3.19. Відстань між двома додатними точковими зарядами $Q_1 = 9Q$ і $Q_2 = Q$ дорівнює 8 *см*. На якій відстані r від першого заряду знаходиться точка, в якій напруженість поля зарядів $E = 0$? Де б знаходилась ця точка, якби другий заряд був від'ємним?

3.20. Два точкових заряди $Q_1 = 2Q$ і $Q_2 = -Q$ знаходяться на відстані d один від одного. Знайти положення точки на прямій, яка проходить через ці заряди, в якій напруженість поля $E = 0$.

3.21. Відстань між зарядами диполя дорівнює 12 *см*. Знайти напруженість поля E і потенціал поля в точці, рівновіддаленій від обох зарядів на відстань 8 *см*.

3.22. Тонке кільце радіусом $R = 8\,см$ рівномірно заряджене з лінійною густиною $\tau = 10\,нКл/м$. Яка напруженість поля в точці, рівновіддаленій від усіх точок кільця на відстань $r = 10\,см$?

3.23* . На металевій сфері радіусом $R = 10\,см$ знаходиться заряд $Q = 1\,нКл$. Визначити напруженість *E* електричного поля в таких точках: 1) на відстані $r_1 = 8\,см$ від центра сфери; 2) на поверхні сфери $r_2 = R$; 3) на відстані $r_3 = 15\,см$ від центра сфери.

3.24*. Дротяне кільце радіусом $R = 10\,см$ заряджене від'ємним зарядом $Q = 5\,нКл$. Знайти напруженість електричного поля на осі кільця на відстані $L = 10\,см$ від його центра.

3.25*. Дві концентричні металеві заряджені сфери радіусами $R_1 = 6\,см$ і $R_2 = 10\,см$ заряджені відповідно зарядами $Q_1 = 1\,нКл$ і $Q_2 = -0{,}5\,нКл$. Знайти напруженості *E* поля в точках, які знаходяться на відстанях $r_1 = 5\,см$; $r_2 = 9\,см$; $r_3 = 15\,см$ від центра сфер. Побудувати графік залежності $E(r)$.

3.26. Тонке кільце радіусом $R = 10\,см$ рівномірно заряджене з лінійною густиною $\tau = 1\,мкКл/м$. Визначити напруженість поля *E* в точці, розміщеній на перпендикулярі до кільця на відстані 20 *см* від його центра. У скільки разів зміниться напруженість поля, якщо відстань збільшиться до 2*м*?

3.27. Поверхнева густина заряду рівномірно зарядженої півсфери $\sigma = 1\,нКл/м^2$. Знайти напруженість *E* електричного поля в геометричному центрі півсфери.

3.28. Нескінченна пряма нитка рівномірно заряджена з лінійною густиною $\tau_1 = 1\,мкКл/м$. На одній осі з ниткою розміщене кільце, заряджене з лінійною густиною $\tau_2 = 10\,нКл/м$. Визначити силу *F*, яка розтягує кільце. Взаємодією між окремими елементами кільця не враховувати.

3.29. Дуже довга тонка пряма дротина, рівномірно заряджена по довжині. Розрахувати лінійну густину τ заряду, якщо напруженість *E* поля на відстані $a = 0{,}5\,м$ від дротини напроти її середини дорівнює 200 *В/м*.

3.30. Відстань між двома довгими тонкими дротинами, розміщеними паралельно одна одній, дорівнює 16 *см*. Дротини рівномірно заряджені різнойменними зарядами з лінійною густиною $|\tau| = 150\,мкКл/м$. Яка напруженість поля *E* в точці, віддаленій на $a = 10\,см$ як від першої так і від другої дротини?

3.31. Прямий металевий стержень діаметром 5 *см* і довжиною 4 *м* має рівномірно розподілений по його поверхні заряд $Q = 500\,нКл$. Визначити напруженість E поля в точці, яка знаходиться навпроти середини стержня на відстані $a = 1\,см$ від його поверхні.

3.32. Нескінченно довга тонкостінна металева трубка радіусом $R = 2\,см$ заряджена рівномірно розподіленим її поверхнею зарядом ($\sigma = 1\,нКл/м^2$). Визначити напруженість E поля в точках, які знаходяться на відстанях $r_1 = 1\,см$; і $r_2 = 3\,см$ від осі трубки. Побудувати графік залежності $E(r)$.

3.33. Дві довгі тонкостінні коаксіальні трубки радіусами $R_1 = 2\,см$ і $R_2 = 4\,см$ мають рівномірно розподілені по довжині заряди з лінійними густинами $\tau_1 = 1\,нКл/м$ і $\tau_2 = -0{,}5\,нКл/м$. Простір між трубками заповнили ебонітом. Визначити напруженість поля E в точках, які знаходяться на відстанях $r_1 = 1\,см$; $r_2 = 3\,см$; $r_3 = 5\,см$ від осі трубок. Побудувати графік залежності $E(r)$.

3.34*. Тонкий стержень завдовжки 12 *см* заряджений з лінійною густиною $\tau = 200\,нКл/м$. Знайти напруженість E електричного поля в точці, яка знаходиться на відстані 5 *см* від стержня навпроти його середини.

3.35*. Електричне поле створене зарядом тонкого рівномірно зарядженого стержня, зігнутого по трьох сторонах квадрата (рис. 35). Довжина a сторони квадрата дорівнює 20 *см*. Лінійна густина заряду $\tau = 500\,нКл/м$. Визначити напруженість E поля в точці А, яка знаходиться посередині четвертої сторони квадрата.

3.36. Довгий циліндр радіусом $R = 6\,см$ має рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 40\,нКл/м$. Визначити напруженість E і зміщення D електричного поля в точках, що знаходяться від осі циліндра на відстанях $r_1 = 1\,см$; $r_2 = 4\,см$; $r_3 = 7\,см$. Усі точки рівновіддалені від кінців циліндра.

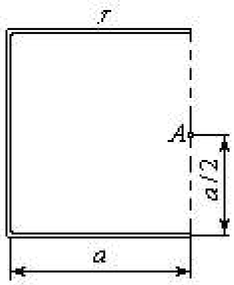

Рис. 35

3.37. Тонка нескінченна нитка зігнута під кутом 90°. Нитка заряджена рівномірно розподіленим зарядом з лінійною густиною $\tau = 1\,мкКл/м$. Визначити силу F, яка діє на точковий заряд $Q = 0{,}1\,мкКл$, розміщений на продовженні однієї із сторін і віддалений від вершини на $a = 50\,см$.

3.38. Два тонких стержня довжинами $l_1 = 12\,см$ і $l_2 = 16\,см$ заряджені з лінійною густиною $\tau = 400\,нКл/м$ утворюють прямий кут. Знайти напруженість поля E в точці А, що знаходиться на відстані l_2 від першого з них і на відстані l_1 від другого.

3.39. Довгий металевий циліндр радіусом $R = 2\,см$ має рівномірно розподілений по поверхні заряд з густиною $\sigma = 10\,нКл/м^2$. Визначити напруженість E і зміщення D електричного поля в точках, що знаходяться на відстанях $r_1 = 1\,см$; $r_2 = 3\,см$ від осі циліндра. Обидві точки рівновіддалені від кінців циліндра.

3.40. Нескінченна площина заряджена рівномірно з поверхневою густиною $\sigma = 4\,нКл/м^2$. Визначити значення і напрямок градієнта потенціалу електричного поля, створеного цією площиною.

3.41. Електричне поле створене двома нескінченими пластинами, які заряджені однаково з поверхневою густиною $\sigma = 1\,нКл/м^2$. Визначити напруженість E поля: 1) між пластинами; 2) поза пластинами. Побудувати графік зміни напруженості вздовж лінії, перпендикулярної до пластин.

3.42. Електричне поле створене двома нескінченними паралельними пластинами, які заряджені рівномірно розподіленими зарядами з поверхневими густинами $\sigma_1 = 1\,нКл/м^2$ і $\sigma_2 = 3\,нКл/м^2$. Визначити напруженість поля E: 1) між пластинами; 2) поза пластинами. Побудувати графік зміни напруженості вздовж лінії, перпендикулярної до пластин.

3.43. Електричне поле створене двома рівномірно зарядженими нескінченними паралельними пластинами. Поверхнева густина зарядів $\sigma_1 = 2\,нКл/м^2$ і $\sigma_2 = -5\,нКл/м^2$ відповідно. Визначити напруженість поля E: 1) між пластинами; 2) поза пластинами. Побудувати графік зміни напруженості вздовж лінії, перпендикулярної до пластин.

3.44. Дві нескінченні паралельні пластини заряджені рівномірно з поверхневими густинами заряду $\sigma_1 = 10\,нКл/м^2$ і $\sigma_2 = -30\,нКл/м^2$. Визначити силу, з якою взаємодіють пластини, розраховану на $1\,м^2$ площі.

3.45. Дві круглі паралельні пластини радіусом $R = 10\,см$ знаходяться на малій (у порівнянні з радіусом) відстані одна від одної. Пластинам надали однакового за модулем, але протилежний за знаком заряду Q. Визначити цей заряд, якщо пластини притягаються з силою $F = 2\,мН$. Вважати, що заряди розподіляються поверхнями пластин рівномірно.

3.46. Велика металева пластина має рівномірно розподілений по поверхні заряд ($\sigma = 10\,нКл/м^2$). На невеликій відстані від пластини знаходиться заряд $Q = 100\,нКл$. Знайти силу *F*, яка діє на заряд.

3.47. Довгий ебонітовий циліндр радіусом $R = 6\,см$ має заряд, що рівномірно розподілений по об'єму з густиною $\rho = 40\,нКл/м^3$. Визначити напруженість *E* і зміщення *D* електричного поля в точках, що знаходяться на відстанях $r_1 = 1\,см$; $r_2 = 4\,см$; $r_3 = 7\,см$ від його осі. Всі точки рівновіддалені від кінців циліндра.

3.48. Ебонітова куля радіусом $R = 10\,см$ рівномірно заряджена по об'єму з густиною $\rho = 1{,}2\,нКл/м^3$. Визначити напруженість *E* і зміщення *D* електричного поля в точках, що знаходяться на відстанях $r_1 = 5\,см$; $r_2 = 10\,см$; $r_3 = 17\,см$ від центра кулі.

3.49*. Порожниста скляна куля заряджена рівномірно розподіленим по об'єму зарядом, об'ємна густина якого $\rho = 100\,нКл/м^3$. Внутрішній радіус кулі $R_1 = 5\,см$, а зовнішній – $R_2 = 10\,см$. Розрахувати напруженість електричного поля і електричне зміщення в точках, які знаходяться на відстанях $r_1 = 3\,см$; $r_2 = 6\,см$; $r_3 = 12\,см$ від цеентра кулі. Побудувати графіки залежності $E(r)$ і $D(r)$.

3.50. Нескінченна площина має рівномірно розподілений поверхнею заряд з густиною $\sigma = 1\,мкКл/м^2$. На деякій відстані від площини паралельно до неї розміщений круг радіусом $R = 10\,см$. Обчислити потік Φ_E вектора напруженості через цей круг.

3.51. Плоска квадратна пластина зі стороною $a = 10\,см$ знаходиться на деякій відстані від нескінченної рівномірно зарядженої площини. Пластина утворює кут 30° з лініями напруженості поля. Знайти потік електричного зміщення Ψ через цю пластину.

3.52. Електричне поле створене точковим зарядом $Q = 0{,}1\ мкКл$. Визначити потік Ψ електричного зміщення через круг радіусом $R = 30\ см$. Заряд рівновіддалений від точок кільця і знаходиться на відстані $a = 40\ см$ від його центра.

3.53. Точковий заряд $Q = 10\ нКл$, який знаходиться в деякій точці поля, володіє потенціальною енергією $П = 10\ мкДж$. Знайти потенціал φ в даній точці поля.

3.54. При переміщенні заряду $Q = 20\ нКл$ між двома точками поля зовнішніми силами була виконана робота $A = 4\ мкДж$. Визначити роботу A_1 сил поля та різницю потенціалів $\Delta\varphi$ цих точок поля.

3.55. Електричне поле створене точковим додатним зарядом $Q_1 = 6\ нКл$. Додатний заряд Q_2 переноситься з точки А цього поля в точку В. Яка зміна потенціальної енергії $\Delta П$, яка припадає на одиницю заряду, який переноситься, якщо $r_A = 20\ см$, $r_B = 50\ см$?

3.56. Електричне поле створене точковим зарядом $Q_1 = 50\ нКл$. Не використовуючи поняття потенціалу, вирахувати роботу A зовнішніх сил по переміщенню точкового заряду $Q_2 = -2\ нКл$ з точки С в точку В, якщо $r_C = 10\ см$, $r_B = 20\ см$. Визначити також зміну потенціальної енергії системи зарядів.

3.57. Поле створене точковим зарядом $Q = 1\ нКл$. Визначити потенціал φ поля в точці, віддаленій від заряду на відстань $r = 20\ см$.

3.58. Визначити потенціал φ електричного поля в точці, віддаленій від зарядів $Q_1 = -0{,}2\ мкКл$ і $Q_2 = 0{,}5\ мкКл$ відповідно на $r_1 = 15\ см$ і $r_2 = 25\ см$. Визначити також мінімальні і максимальні відстані між зарядами, при яких можливий розв'язок.

3.59. Заряди $Q_1 = 1\ мкКл$, $Q_2 = -1\ мкКл$ знаходяться на відстані 10 *см*. Визначити напруженість E і потенціал φ поля в точці, яка знаходиться на відстані $r = 10\ см$ від першого заряду і лежить на лінії, проведеній через перший заряд, перпендикулярно до напрямку $\overrightarrow{Q_1Q_2}$.

3.60. Розрахувати потенціальну енергію $П$ системи двох точкових зарядів $Q_1 = 100\ нКл$ і $Q_2 = 10\ нКл$, які знаходяться на відстані 10 *см* один від одного.

3.61. Чому дорівнює потенціальна енергія Π системи трьох точкових зарядів $Q_1 = 10\,нКл$, $Q_2 = 20\,нКл$, $Q_3 = -30\,нКл$, розміщених у вершинах рівностороннього трикутника зі стороною $a = 10\,см$?

3.62. Дротяне кільце радіусом $R = 5\,см$ зарядили від'ємним зарядом $Q = -5\,нКл$. Знайти 1) напруженість електричного поля на осі кільця на відстані $l = 15\,см$ від усіх точок кільця; 2) потенціал поля в цій точці.

3.63. Відрізок тонкого прямого провідника має рівномірно розподілений заряд з лінійною густиною $\tau = 10\,нКл/м$. Вирахувати потенціал поля, створеного цим зарядом у точці, розміщеній на осі провідника і розташованій від його найближчого кінця на відстані, яка дорівнює довжині провідника.

3.64. Тонкий стержень завдовжки 10 *см* має заряд $Q = 1\,нКл$, що рівномірно розподілений по довжині. Визначити потенціал електричного поля φ в точці, яка лежить на осі стержня на відстані $a = 20\,см$ від його найближчого кінця.

3.65*. Тонкі стержні утворюють квадрат зі стороною *a*. Стержні заряджені з лінійною густиною $\tau = 1{,}33\,нКл/м$. Знайти потенціал в центрі квадрата.

3.66. Заряд, рівномірно розподілений нескінченню площиною з поверхневою густиною $\sigma = 10\,нКл/м^2$. Визначити різницю потенціалів $\Delta\varphi$ двох точок поля, одна з яких знаходиться на площині, а друга віддалена від площини на відстань $d = 10\,см$.

3.67. Визначити потенціал поля φ, до якого можна зарядити віддалену металеву кулю радіусом $R = 10\,см$, якщо напруженість електричного поля *E*, при якій відбувається пробій повітря, дорівнює 3 *МВ/м*. Знайти максимальну поверхневу густину електричних зарядів перед пробоєм.

3.68. Дві нескінчені паралельні площини знаходяться на відстані $l = 0{,}5\,см$ одна від одної. Площини мають рівномірно розподілені заряди з поверхневою густиною $\sigma_1 = 0{,}2\,мкКл/м^2$ і $\sigma_2 = -0{,}3\,мкКл/м^2$. Визначити різницю потенціалів *U* між площинами.

3.69. Дві нескінчені паралельні площини знаходяться на відстані $d = 1\,см$ одна від одної. На площинах рівномірно розподілені заряди з поверхневою густиною $\sigma_1 = 0{,}2\,мкКл/м^2$ і $\sigma_2 = 0{,}5\,мкКл/м^2$. Визначити різницю потенціалів U між площинами.

3.70. Металева кулька діаметром $d = 2\,см$ заряджена до потенціалу $\varphi = 150\,В$. Скільки електронів знаходиться на поверхні кульки?

3.71. Сто однакових крапель ртуті, заряджених до потенціалу $\varphi = 20\,В$, зливаються в одну велику краплю. Який потенціал φ_1 краплі, що утворилась?

3.72. Напруженість E однорідного електричного поля в деякій точці дорівнює 120 *В/м*. Визначити різницю потенціалів U між цією точкою та іншою, яка лежить на тій же силовій лінії, але знаходиться на відстані $\Delta r = 1\,мм$ від попередньої точки.

3.73*. Ебонітова товстостінна порожниста куля має заряд, що рівномірно розподілений по об'єму з густиною $\rho = 2\,мкКл/м^3$. Внутрішній радіус кулі дорівнює 3 *см*, зовнішній – 6 *см*. Визначити потенціал φ в точках 1) на зовнішній поверхні кулі; 2)на внутрішній поверхні кулі; 3) в центрі кулі.

3.74. Суцільна парафінова куля радіусом 10 *см* рівномірно заряджена з об'ємною густиною $\rho = 1\,мкКл/м^3$. Знайти потенціал φ в центрі кулі.

3.75. Нескінченна тонка пряма нитка має рівномірно розподілений по довжині заряд з лінійною густиною $\tau = 1\,нКл/м$. Який градієнт потенціалу в точці, яка віддалена від нитки на 10 *см*? Вказати напрямок градієнта потенціалу.

3.76*. Суцільна куля з парафіну радіусом 10 *см* рівномірно заряджена з об'ємною густиною $\rho = 40\,нКл/м^3$. Визначити напруженість електричного поля E всередині кулі. Обчислити різницю потенціалів $\Delta\varphi$ між центром кулі та її поверхнею.

3.77. Електричне поле створене двома однаковими додатними точковими зарядами Q. Знайти роботу A_{12} сил поля по переміщенню заряду $Q_1 = 10\,нКл$ з точки 1 з потенціалом $\varphi_1 = 300\,В$ в точку 2 (рис. 36).

3.78. Визначити роботу A_{12} по переміщенню заряда $Q_1 = 50\,нКл$ з точки 1 в точку 2 в полі, створеному двома зарядами, модуль $|Q|$ яких дорівнює 1 *мкКл* і відстань між ними $a = 0{,}1\,м$.

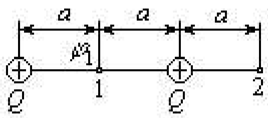

Рис. 36

3.79. Визначити роботу сил поля по переміщенню заряду 1 *мкКл* з точки 1 в точку 2 поля, створеного зарядженою кулею. Потенціал кулі $-1\,кВ$. Радіус кулі *R*. Точка 1 знаходиться на відстані *R* від поверхні кулі, точка 2 – на відстані 2*R*.

3.80. На прямому нескінченно довгому провіднику рівномірно розподілено заряд з лінійною густиною $\tau = 1\,мкКл\,/\,м$. Визначити роботу сил поля по переміщенню заряду $Q = 1\,нКл$ з точки B, що знаходиться на відстані 10 *см*, в точку C – на відстані 20 *см* від провідника навпроти його середини.

3.81. Тонкий стержень зігнули в кільце радіусом 10 *см* і зарядили з лінійною густиною $\tau = 300\,нКл\,/\,м$. Яку роботу *A* треба здійснити, щоб перевести заряд 5 *нКл* з центра кільця в точку, розміщену на осі кільця на відстані 20 *м* від його центра?

3.82. Електричне поле створене зарядом, що рівномірно розподілений по кільцю, з лінійною густиною $\tau = 1\,мкКл\,/\,м$. Визначити роботу A_{12} сил поля по переміщенню заряду $Q_1 = 10\,нКл$ з точки 1 (в центрі кільця) в точку 2, яка знаходиться на перпендикулярі до площини кільця (рис. 37).

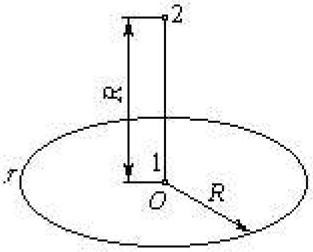

Рис. 37

3.83. Електрон знаходиться в однорідному електричному полі напруженістю $E = 200\,кВ\,/\,м$. Який шлях пройде електрон за час 1 *нс*, якщо його початкова швидкість дорівнювала нулеві? Якою швидкістю буде володіти електрон у кінці цього проміжку часу?

3.84. Різниця потенціалів між катодом і анодом електронної лампи 90 *В*, відстань між катодом і анодом 1 *мм*. З яким прискоренням рухається електрон від катода до анода? Якою буде швидкість електрона в момент удару об анод? За який час електрон пролітає відстань між катодом і анодом? Поле вважати однорідним.

3.85. Пилинка масою 1 *нг* несе на собі 5 електронів. Пилинка пройшла у вакуумі різницю потенціалів $U = 3\ MB$. Яка кінетична енергія пилинки? Яку швидкість має пилинка в кінці шляху?

3.86. Заряджена частка, пройшовши прискорюючу різницю потенціалів 600 *кВ*, набула швидкості 5,4 Мм/с. Визначити питомий заряд частки?

3.87. Протон, початкова швидкість якого дорівнювала 100 км/с, влетів в однорідне електричне поле напруженістю $E = 300\ B/см$ в напрямку силових ліній. Який шлях l повинен пройти протон , щоб його швидкість подвоїлась.

3.88. Нескінченна площина заряджена від'ємним зарядом з поверхневою густиною $\sigma = 35{,}4\ мкКл/м^2$. В напрямку силової лінії поля, яке створює площина, летить електрон. Визначити мінімальну відстань $l_{\min}$, на яку зможе підійти до площини електрон, якщо на відстані $l_0 = 5\ см$ він мав кінетичну енергію $T = 80\ eB$.

3.89. Електрон, який летів горизонтально зі швидкістю $\upsilon = 1{,}6\ Мм/с$, влетів в однорідне електричне з напруженістю $E = 90\ B/см$, направлене вертикально вгору. Визначити абсолютне значення і напрямок швидкості υ електрона через 1 *нс*?

3.90. Уздовж силової лінії електричного поля рухається протон. У точці поля з потенціалом φ_1 протон мав швидкість $\upsilon = 0{,}1\ Мм/с$. Визначити потенціал φ_2 точки поля, в якій швидкість протона зросте в $n = 2$ рази. Відношення заряду протона до його маси $e/m_p = 96\ МКл/кг$.

3.91. В однорідне електричне поле напруженістю $E = 1\ кB/м$ вздовж силової лінії влітає електрон зі швидкістю $\upsilon = 1\ Мм/с$. Визначити відстань, яку пройде електрон до точки, в якій його швидкість $\upsilon_1 = \upsilon/2$.

3.92. Електрон влетів у плоский конденсатор паралельно до його пластин, знаходячись на однаковій відстані від кожної з них. Швидкість електрона $\upsilon = 10\ Мм/с$. Відстань між пластинами $d = 2\ см$. Довжина кожної пластини 10 *см*. Яку найменшу різницю потенціалів треба прикласти до пластин, щоб електрон не вилетів з конденсатора?

3.93. Обчислити електричний момент p диполя, якщо його заряд $Q_1 = 10\ нКл$, а плече $l = 0{,}5\ см$.

3.94. Відстань l між зарядами $Q = \pm 3{,}2\ нКл$ дорівнює

12 $см$. Знайти напруженість E і потенціал поля φ в точках A і B, які знаходяться на відстані 8 $см$ від центра диполя.

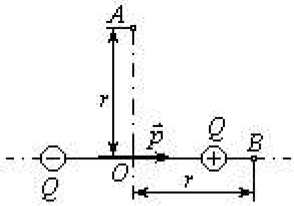

Рис. 38

3.95. Визначити напруженість E і потенціал поля φ, створеного точковим диполем в точках A і B (рис. 38). Електричний момент диполя $p = 1\,пКл \cdot м$, відстань від точок A і B до центра диполя дорівнює 10 $см$.

3.96. Визначити напруженість E і потенціал поля φ, створеного точковим диполем з електричним моментом $p = 4\,пКл \cdot м$ на відстані 10 $см$ від центра диполя в напрямку, який утворює кут 60^o з вектором електричного моменту.

3.97*. Точковий диполь з електричним моментом $p = 1\,пКл \cdot м$ рівномірно обертається з частотою $n = 10^3\,c^{-1}$ відносно осі, яка проходить через центр диполя і перпендикулярна до його плеча. Вивести закон зміни потенціалу як функції часу в деякій точці, яка знаходиться на відстані 1 $см$ від центра диполя і лежить в площині його обертання. Вважати, що потенціал у цій точці в початковий момент часу дорівнював нулеві. Побудувати графік залежності $\varphi(t)$.

3.98. Диполь з електричним моментом $p = 100\,нКл \cdot м$ прикріплено до пружної нитки (див. рис. 39). Коли в просторі, де знаходиться диполь створили електричне поле напруженістю $E = 3\,кВ/м$ перпендикулярне до плеча диполя і нитки, диполь повернувся на кут $\alpha = 30^0$. Визначити постійну кручення* нитки C. (**Постійною кручення нитки називається величина, яка чисельно дорівнює моменту сили, який викликає закручування нитки на* 1 *рад*).

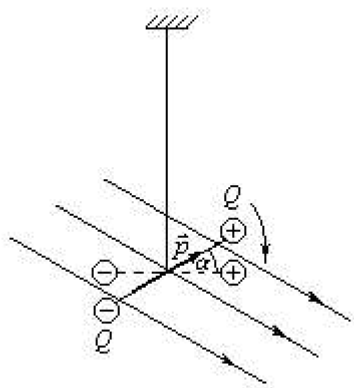

Рис. 39

3.99. В умовах попередньої задачі диполь під дією поля повертається на малий кут. Визначити постійну кручення нитки *C*.

3.100. Диполь з електричним моментом $p = 20\,нКл \cdot м$ знаходиться в однорідному електричному полі $E = 50\,кВ / м$. Вектор електричного момента утворює кут в 60° з лініями напруженості. Яка потенціальна енергія *П* диполя? (*Вказівка. За нульову потенціальну енергію прийняти енергію, яка відповідає такому положенню диполя, коли вектор електричного моменту диполя перпендикулярний лініям поля*).

3.101. Диполь з електричним моментом $p = 100\,нКл \cdot м$ вільно встановився в однорідному електричному полі напруженістю $E = 150\,кВ / м$. Розрахувати роботу *A*, необхідну для того, щоб повернути диполь на кут 180°.

3.102. Диполь з електричним моментом $p = 100\,нКл \cdot м$ вільно встановився в однорідному електричному полі, напруженістю $E = 10\,кВ / м$. Визначити зміну потенціальної енергії $\Delta П$ диполя при повороті його на кут 60°.

3.103. Перпендикулярно до плеча диполя з електричним моментом $p = 12\,нКл \cdot м$ збуджується однорідне електричне поле напруженістю $E = 300\,кВ / м$. Під дією сил поля диполь починає повертатись відносно осі, яка проходить через його центр. Знайти кутову швидкість ω диполя в момент проходження ним положення рівноваги. Момент інерції *J* відносно осі, яка перпендикулярна плечу і проходить через його центр, дорівнює $2 \cdot 10^{-9}$ *кг·м*^{2}.

3.104. Точковий диполь з електричним моментом $p = 100\,нКл \cdot м$ вільно встановився в електричному полі напруженістю $E = 9\,МВ / м$. Диполь повернули на невеликий кут і відпустили. Визначити частоту власних коливань диполя в електричному полі. Момент інерції *J* диполя відносно осі, яка проходить через його центр, дорівнює $4 \cdot 10^{-12}$ *кг·м*^{2}.

3.105. Диполь з електричним моментом $p = 20\,нКл \cdot м$ знаходиться в неоднорідному електричному полі. Ступінь неоднорідності характеризується величиною $\frac{dE}{dx} = 1\,МВ / м^2$ в напрямку осі диполя. Розрахувати силу, яка діє на диполь.

3.106. Точковий диполь з електричним моментом $p = 5\, пКл \cdot м$ вільно встановився в полі точкового заряду $Q = 100\, нКл$ на відстані $r = 10\, см$ від нього. Визначити для цієї точки величину $\frac{dE}{dr}$, яка характеризує ступінь неоднорідності поля в напрямку силової лінії, та силу F, яка діє на диполь в цьому напрямку.

3.107. Точковий диполь з електричним моментом $p = 4\, пКл \cdot м$ вільно встановився в полі, створеному нескінченною прямою ниткою, зарядженою з лінійною густиною $\tau = 500\, нКл / м$ на відстані $r = 10\, см$ від неї. Визначити в цій точці величину $\frac{dE}{dr}$, яка характеризує ступінь неоднорідності поля в напрямку силової лінії, і силу F, яка діє на диполь.

3.108. Між пластинами плоского конденсатора, зарядженого до різниці потенціалів 600 *В*, знаходяться два шари діелектриків: скла завтовшки $d_1 = 7\, мм$ і ебоніту – $d_2 = 3\, мм$. Площа кожної пластини конденсатора дорівнює 200 $см^2$. Знайти: 1) електроємність конденсатора; 2) зміщення *D*, 3) напруженість поля *E* і спад напруги $\Delta\varphi$ в кожному шарі.

3.109. В плоскому горизонтально розміщеному конденсаторі, відстань між пластинками якого $d = 1\, см$, знаходиться заряджена крапелька масою $m = 5{,}8 \cdot 10^{-11}\, г$. При відсутності електричного поля крапелька, через існування опору повітря, рухається з деякою постійною швидкістю. Якщо до пластин конденсатора прикладена різниця потенціалів $U = 600\, В$, то крапелька падає вдвічі повільніше. Знайти заряд крапельки.

3.110. Відстань *d* між пластинами плоского конденсатора дорівнює 1,33 *мм*, площа пластин $S = 20\, см^2$. У просторі між пластинами конденсатора знаходяться два діелектрики: слюда завтовшки $d_1 = 0{,}7\, мм$ та ебоніт – $d_2 = 0{,}3\, мм$. Визначити електроємність *C* конденсатора.

3.111. На пластинах плоского конденсатора розподілений заряд з поверхневою густиною $\sigma = 0{,}2\, мкКл / м^2$. Відстань між пластинами $d_1 = 1\, мм$. На скільки зміниться різниця потенціалів між обкладками конденсатора, якщо відстань між ними збільшити до $d_2 = 3\, мм$.

3.112. У плоский конденсатор вставили плитку парафіну завтовшки $d = 1\,см$, яка впритул прилягає до його пластин. На скільки треба збільшити відстань між пластинами, щоб ємність стала такою ж, як була спочатку?

3.113. Електроємність плоского конденсатора $C = 1{,}5\,мкФ$, відстань між пластинами $d = 5\,мм$. Якою стане ємність конденсатора, якщо на нижню пластину покласти лист ебоніту завтовшки 3 *мм*?

3.114. Вивести формулу для ємності шаруватого сферичного конденсатора, який має два шари діелектрика

3.115. Три однакових плоских конденсатора з'єднані послідовно. Ємність такої батареї $C = 89\,пФ$. Площа кожної пластини $S = 100\,см^2$. Діелектрик – ебоніт. Яка товщина ебоніту?

3.116. Конденсатор ємністю $C_1 = 0{,}2\,мкФ$ був заряджений до різниці потенціалів $U_1 = 320\,В$. Після того, як його з'єднали паралельно з іншим конденсатором ємністю C_2, зарядженим до різниці потенціалів $U_1 = 450\,В$, напруга U на ньому стала 400 *В*. Знайти C_2

3.117. Вивести формулу для ємності плоского шаруватого конденсатора, який має три шари діелектриків з діелектричною проникністю ε_1, ε_2, ε_3.

3.118. Вивести формулу для ємності лейденської банки (циліндричного конденсатора з радіусами обкладок R_1 і R_2, діелектрик – повітря).

3.119. Вивести формулу та знайти ємність повітряного сферичного конденсатора, що утворений концентричними сферами з радіусами 15,5 і 16 *мм*.

3.120. Визначити ємність батареї з 12 однакових конденсаторів, з'єднаних наступним чином: 4 паралельні гілки, в яких три конденсатори з'єднані послідовно.

3.121. Конденсатор електроємністю 0,6 *мкФ* зарядили до різниці потенціалів 300 *В* і з'єднали з іншим конденсатором з електроємністю 0,4 *мкФ*, зарядженим до різниці потенціалів 150 *В*. Знайти заряд ΔQ, який перетік з пластин першого конденсатора на другий.

3.122. Знайти ємність конденсатора утвореного двома кульками радіусом a, зарядженими однаковими за величиною, але різними за знаком зарядами. Кульки знаходяться на відстані b одна від одної. Як зміниться величина ємності цього конденсатора, якщо $a << b$?

2. ПОСТІЙНИЙ СТРУМ

Основні співвідношення

Сила постійного *струму*

$$I = \frac{Q}{t}, \qquad (3.35)$$

де Q – заряд, що пройшов через поперечний переріз провідника за час t.

Густина електричного струму – векторна величина, яка за модулем дорівнює відношенню сили струму до площі поперечного перерізу провідника:

$$\vec{j} = \frac{I}{S}\vec{k}, \qquad (3.36)$$

де $\vec{k}$ – одиничний вектор, який напрямлений в бік руху позитивних носіїв заряду.

Опір однорідного провідника:

$$R = \rho\frac{l}{S}, \qquad (3.37)$$

де ρ – питомий опір матеріалу, з якого зроблено провідник; S – площа поперечного перерізу провідника; l – його довжина.

Питомий опір провідника залежить від температури:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \qquad (3.38)$$

де ρ і ρ_0 – питомі опори при температурах t і 0 $°C$ відповідно, α – температурний коефіцієнт опору.

Опір при послідовному з’єднанні n провідників з опорами R_i:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i; \qquad (3.39)$$

при паралельному з’єднанні:

$$\frac{1}{R}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}. \tag{3.40}$$

Закон Ома для ділянки кола:

$$I=\frac{U}{R}; \tag{3.41}$$

для повного кола:

$$I=\frac{E}{R+r}, \tag{3.42}$$

де U – спад напруги на ділянці, E – е. р. с. джерела, r – його внутрішній опір.

*Перше правило Кірхгоф*а (правило струмів): алгебраїчна сума струмів для вузла дорівнює нулеві, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}I_i=0. \tag{3.43}$$

Друге правило Кірхгофа: у замкнутому контурі алгебраїчна сума спадів напруги на всіх ділянках контура дорівнює алгебраїчній сумі е. р. с. увімкнутих в контур, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}I_iR_i=\sum_{j=1}^{m}E_j. \tag{3.44}$$

Робота, що виконана електростатичним полем і сторонніми силами на ділянці кола постійного струму за час t:

$$A=IUt=I^2Rt=U^2t/R. \tag{3.45}$$

Потужність струму

$$P=IU=I^2R=U^2/R. \tag{3.46}$$

Закон Джоуля – Лєнца

$$Q=IUt=I^2Rt=U^2t/R, \tag{3.47}$$

де Q – кількість теплоти, що виділяється на ділянці кола за час t. Закон Джоуля – Лєнца справедливий у випадку, коли ділянка кола нерухома і в ній не відбуваються хімічні перетворення.

Густина струму j, середня швидкість $<\upsilon>$ впорядкованого руху носіїв заряду та їх концентрація n зв'язані співвідношенням:

$$j = en < \upsilon >, \qquad (3.48)$$

де e – елементарний заряд.

Закон Ома в диференціальній формі:

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}, \qquad (3.49)$$

де γ – питома провідність, $\vec{E}$ – напруженість електричного поля.

Перший закон Фарадея для електролізу: маса речовини, що виділилася на електроді пропорційна заряду, що пройшов через електроліт:

$$m = kQ = kIt, \qquad (3.50)$$

де k – електрохімічний еквівалент речовини, Q – заряд, I – сила струму, t – час протікання струму через електроліт.

Другий закон Фарадея для електролізу: електрохімічний еквівалент пропорційний хімічному еквіваленту:

$$k = \frac{1}{F}\frac{\mu}{Z}, \qquad (3.51)$$

де $F = 96{,}5\,кКл/моль$ – стала Фарадея, μ – молярна маса іонів даної речовини, Z – валентність іонів.

Об'єднаний закон електролізу:

$$m = \frac{1}{F}\frac{\mu}{Z}Q = \frac{1}{F}\frac{\mu}{Z}It. \qquad (3.52)$$

Рухливість іонів

$$b = < \upsilon > / E, \qquad (3.53)$$

де $< \upsilon >$ – середня швидкість впорядкованого руху іонів.

Закон Ома для електролітів і газів при самостійному розряді в області, далекій від насичення:

$$\vec{j} = Qn(b_+ + b_-)\vec{E}, \qquad (3.54)$$

де Q – заряд іона; n – концентрація іонів; b_+ і b_- – рухливість позитивних і негативних іонів відповідно.

Густина струму насичення

$$j_{нас} = Qn_0 d, \qquad (3.55)$$

де n_0 – кількість іонних пар, що створює іонізатор в одиниці об'єму за одиницю часу; d – відстань між електродами.

Методичні поради

1. При розв'язуванні задач на основні закони постійного струму слід пам'ятати, що ці закони справедливі лише для постійного струму і не можуть бути використані при розрахунках струмів зі змінними характеристиками. У випадку, коли в умові задачі характеристики струму змінюються в часі, слід вибрати такий інтервал часу dt, протягом якого характеристики струму змінюються настільки мало, що їх можна вважати постійними (слабозмінними). Для цього інтервалу часу можна скористатись законами постійного струму, а потім отриману величину проінтегрувати.

2. Розв'язування задач з даного розділу значно спрощується якщо зобразити електричну схему, на якій вказати всі задані в умові задачі величини, а також ті величини, які необхідно визначити.

3. При розрахунку розгалужених кіл з використанням законів Кірхгофа потрібно пам'ятати такі правила:

– виберіть довільно напрямки струмів, які протікають через відповідні опори й вкажіть їх стрілками. (Якщо при розв'язуванні задачі значення сили струму виходить від'ємне, то це означає тільки те, що напрямок відповідного струму був вибраний неправильно);

– виберіть довільно напрямок обходу контура. При цьому майте на увазі, що обраний напрям обходу в даній задачі повинен бути однаковим для всіх розглядуваних контурів;

– при складанні рівнянь за першим законом Кірхгофа дотримуйтесь правила знаків: струм, що надходить до вузла в рівнянні позначається знаком "+", а струм, що йде від вузла, – знаком "–". За першим правилом Кірхгофа потрібно складати на одне рівняння менше, ніж кількість вузлів у колі;

– при складанні рівнянь за другим правилом Кірхгофа вибирайте контури так, щоб до кожного нового контура входила хоча б одна ділянка, що не використовувалася в жодному з попередніх контурів. Кількість незалежних рівнянь, які можна скласти за другим законом Кірхгофа також менше від кількості контурів;

– якщо напрям струму збігається з напрямком обходу контурів, то добуток IR входить у відповідне рівняння зі знаком "+", якщо навпаки, то зі знаком "–";

– якщо при обході контура в додатному напрямку перший електрод джерела струму буде негативний, а другий – позитивний, то е. р. с. беруть зі знаком "+" (незалежно від того, куди напрямлений струм відповідної ділянки контура), тобто якщо переходити від "–" до "+" всередині джерела, якщо навпаки – то відповідне значення E беруть зі знаком "–".

4. Якщо в розгалуженому колі є кілька (n) струмів, а за умовою задачі необхідно знайти лише один із них, то при розв'язуванні системи n рівнянь доцільно скористатись методом визначників (методом Крамера). Для цього складають головний визначник Δ з коефіцієнтів при невідомих величинах та допоміжні визначники системи Δ_{I_1}, Δ_{I_2}, Δ_{I_3},…, які отримують заміною відповідних стовпців визначника Δ стовпцями, складеними з вільних членів вище зазначених рівнянь. Шукану силу струму визначають, зі співвідношень $I_1 = \Delta_{I_1} / \Delta$, $I_2 = \Delta_{I_2} / \Delta$, $I_3 = \Delta_{I_3} / \Delta$ і т.п.

Приклади розв'язування задач

1. Визначити який заряд Q пройде через провідник з опором $R = 5\,Ом$, якщо струм в ньому лінійно наростає від $I_0 = 2\,A$ до $I_1 = 4\,A$ за час $\tau = 20\,c$.

Розв'язання

Оскільки сила струму в провіднику змінюється, скористатись співвідношенням $Q = It$ ми не можемо. Тому виберемо нескінченно малий інтервал часу dt, протягом якого силу струму можна вважати постійною (мало змінною). Тоді заряд dQ, який протече за цей час через провідник, буде таким, що дорівнює $dQ = I(t)dt$, а за весь проміжок часу:

$$\int_0^Q dQ' = \int_0^\tau I(t)dt. \qquad (1)$$

Запишемо аналітичний вираз для струму, який лінійно наростає:

$$I = I_0 + kt = I_0 + \frac{I_1 - I_0}{\tau} t \qquad (2)$$

і підставимо його в (1):

$$Q = \int_0^{\tau} I_0 dt + \int_0^{\tau} ktdt = I_0\tau + k\tau^2 / 2 = 2 \cdot 20 + 0{,}1\frac{400}{2} = 60\,(Кл)$$

Відповідь: $60\,Кл$.

2. Три джерела е. р. с. $E_1 = 11\,В$, $E_2 = 4\,В$, $E_3 = 6\,В$ і три реостати з опорами $R_1 = 5\,Ом$, $R_2 = 10\,Ом$ і $R_3 = 2\,Ом$ з'єднані так, як показано на рис. 40. Визначити сили струмів у реостатах. Внутрішніми опорами джерел струмів знехтувати.

Розв'язання

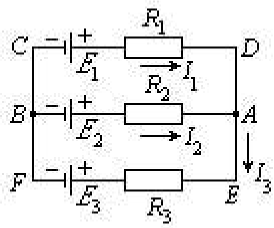

Рис. 40

На представленій схемі виберемо напрямки струмів I_1, I_2 і I_3 та напрямки обходу контурів (за годинниковою стрілкою). Оскільки нам необхідно визначити величини трьох струмів, то складемо три рівняння, які пов'язуватимуть ці струми. Скористаємось для цього законами Кірхгофа.

Для вузла А: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$;

Для контура ABCD: $I_1R_1 - I_2R_2 = E_1 - E_2$; $\Leftrightarrow$

Для контура BAEF: $I_2R_2 + I_3R_3 = E_2 - E_3$;

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 5I_1 - 10I_2 - 0 = 7 \\ 0 + 10I_2 + 2I_3 = -2 \end{cases}.$$

Для розв'язку цієї системи рівнянь скористаємось методом визначників (методом Крамера). Для цього складемо головний визначник $\varDelta$ та допоміжні визначники системи $\varDelta_{I_1}$, $\varDelta_{I_2}$, $\varDelta_{I_3}$, які отримують заміною відповідних стовпців визначника стовпцями, складеними з вільних членів трьох вищенаведених рівнянь:

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & -10 & 0 \\ 0 & 10 & 2 \end{vmatrix} = -20 - 50 - 10 = -80 ;$$

$$\varDelta_{I_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 7 & -10 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 70 + 20 - 14 = -64 ;$$

$$\varDelta_{I_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 14 + 10 = 24 ;$$

$$\varDelta_{I_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -10 & 7 \\ 0 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 20 + 10 - 70 = -40 .$$

Ураховуючи, що $I_1 = \Delta_{I_1} / \Delta$, $I_1 = 0{,}8\,A$; $I_2 = \Delta_{I_2} / \Delta$, $I_2 = -0{,}3\,A$; $I_3 = \Delta_{I_3} / \Delta$, $I_3 = 0{,}5\,A$. Знак " – " для струму I_2 означає, що напрямок цього струму був вибраний помилково.

Відповідь: $I_1 = 0{,}8\,A$, $I_2 = 0{,}3\,A$, $I_3 = 0{,}5\,A$.

3. Сила струму в провіднику опором $R = 100\,Ом$ рівномірно зменшується з $I_0 = 10\,A$ до $I_1 = 5\,A$ за час 10 *с*. Яка кількість тепла виділилась при цьому в провіднику?

Розв'язання

Виберемо нескінченно малий проміжок часу dt, протягом якого струм можна буде вважати постійним, і використаємо в межах цього проміжку часу закон Джоуля – Лєнца.

Кількість тепла dQ, що виділиться за час dt при миттєвому значенні сили струму $I(t)$ можна визначити зі співвідношення:

$$dQ = I^2(t)Rdt\,. \qquad (1)$$

Закон, за яким змінюється струм з плином часу, запишемо у вигляді:

$$I(t) = I_0 - kt\,, \qquad (2)$$

де $k = \dfrac{I_1 - I_0}{\tau}$ – швидкість зменшення струму.

Отже, загальна кількість тепла, яка виділиться за 10 *с*

$$Q = \int_0^{\tau}(I_0 - kt)^2 Rdt =$$

$$= \int_0^{\tau} I_0^2 Rdt - \int_0^{\tau} 2I_0 kRtdt + \int_0^{\tau} k^2 Rt^2 dt =$$

$$= I_0^2 R\tau - 2I_0 kR\frac{\tau^2}{2} + k^2 R\frac{\tau^3}{3} = 58333\,(Дж)\,. \qquad (3)$$

Відповідь: $58{,}33\,кДж$.

Задачі для самостійного розв'язування

3.123. Сила струму в провіднику рівномірно зростає від $I_0 = 0$ до $I = 3\,A$ протягом $t = 10\,c$. Визначити заряд *Q*, що пройшов через провідник.

3.124. Визначити густину струму в залізному провіднику довжиною $l = 10\,м$, якщо напруга на кінцях провідника становить $U = 6\,B$.

3.125. Обчислити опір графітового провідника, який має форму прямого зрізаного конуса висотою $h = 20\,см$ і радіусами основ $r_1 = 12\,мм$ та $r_2 = 8\,мм$. Температура провідника 20 °*С*.

3.126. Мідний провідник має опір $R_0 = 10\,Ом$ (при 0 °*С*). Один кінець цього провідника знаходиться при температурі $t_1 = 20\ ^oC$, а другий – при $t_2 = 400\ ^oC$. Знайти опір *R* провідника при цих умовах, вважаючи градієнт температури уздовж осі провідника постійним.

3.127. Внутрішній опір батареї акумуляторів дорівнює $R = 3\,Ом$. Який відсоток від точного значення е. р. с. складає похибка, якщо, вимірючи різницю потенціалів на затискачах батареї вольтметром, який має опір $R_В = 200\,Ом$, прийняти її такою, що дорівнює е. р. с.

3.128. До джерела струму з е. р. с. $E = 1{,}5\,В$ під'єднали котушку опором $R = 0{,}1\,Ом$. Амперметр показав силу струму $I_1 = 0{,}5\,А$. Коли до джерела струму послідовно під'єднали ще одне джерело з такою ж е. р. с., то сила струму в котушці стала $I_2 = 0{,}4\,А$. Визначити внутрішні r_1 і r_2 опори обох джерел.

3.129. Дві групи з трьох послідовно з'єднаних елементів з'єднані паралельно. Е. р. с. кожного елемента становить $E = 1{,}2\,В$, внутрішній опір $r = 0{,}2\,Ом$. Отримана батарея замкнута на зовнішній опір $R = 1{,}5\,Ом$. Знайти силу струму I в зовнішньому колі.

3.130. Дано 12 елементів з е. р. с. $E = 1{,}5\,В$ і внутрішнім опором $r = 0{,}4\,Ом$. Як потрібно з'єднати ці елементи, щоб отримати максимальну силу струму в зовнішньому колі, яке має опір $R = 0{,}3\,Ом$? Визначити максимальну силу струму I_{max}.

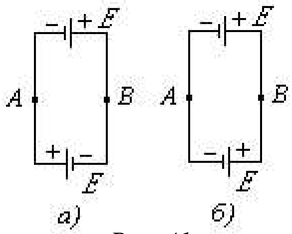

Рис. 41

3.131. Два однакових джерела струму з е. р. с. $E = 1{,}2\,В$ і внутрішнім опором $r = 0{,}4\,Ом$ з'єднані так, як показано на рис. 41. Визначити силу струму I в колі та різницю потенціалів U між точками A і B в обох випадках.

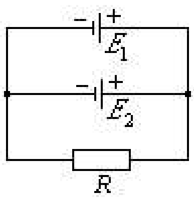

Рис. 42

3.132. Дві батареї акумуляторів ($E_1 = 10\,В; r_1 = 1\,Ом$; $E_2 = 8\,В; r_2 = 2\,Ом$) і реостат ($R = 6\,Ом$) з'єднані так, як показано на рис. 42. Знайти силу струму в батареях і реостаті.

3.133. Два джерела струму ($E_1 = 8\,В; r_1 = 2\,Ом$; $E_2 = 6\,В; r_2 = 1{,}5\,Ом$) і реостат ($R = 10\,Ом$) з'єднані так, як показано

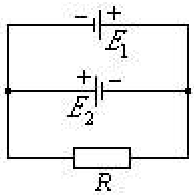

Рис. 43

на рис. 43. Визначити силу струму в реостаті.

3.134. Визначити силу струму I_3 в резисторі R_3 (рис. 44) і напругу U_3 на кінцях резистора, якщо ($E_1 = 4\,В$; $E_2 = 3\,В$; $R_1 = 2\,Ом$; $R_2 = 6\,Ом$; $R_3 = 1\,Ом$). Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

3.135. Три батареї з е. р. с. $E_1 = 12\,В$, $E_2 = 5\,В$ і $E = 10\,В$ й однаковими внутрішніми опорами $r = 1\,Ом$ з'єднані між собою однойменними полюсами. Визначити сили струмів, які проходять через кожну батарею. Опором з'єднувальних провідників знехтувати.

3.136. Три джерела струму з е. р. с. $E_1 = 22\,В$, $E_2 = 8\,В$ і $E_3 = 12\,В$ і три реостата $R_1 = 10\,Ом$, $R_2 = 20\,Ом$ та $R_3 = 4\,Ом$ з'єднані так, як це показано на рис. 40. Визначити сили струмів у реостатах. Внутрішнім опором джерел струму знехтувати.

3.137. $R_1 = 5\,Ом$, $R_2 = 1\,Ом$ та $R_3 = 3\,Ом$ і джерело струму з е. р. с. $E = 1{,}4\,В$ з'єднані так, як показано на рис. 45. Визначити е. р. с. джерела струму, яке треба увімкнути між точками А і В, щоб через опір R_3 йшов струм $I = 1\,А$ у напрямку вказаному стрілкою. Опором джерела струму знехтувати.

3.138. До батареї акумуляторів з е. р. с. $E = 2\,В$ і внутрішнім опором $r = 0{,}5\,Ом$ під'єднано провідник. Визначити 1) опір провідника *R* при якому потужність, що на ньому виділяється, максимальна; 2) максимальну потужність *P*.

3.139. Обмотка електричного кип'ятильника має дві секції. Якщо увімкнена тільки перша секція, то вода закипає через $t_1 = 15\,хв$, якщо тільки друга, то через $t_2 = 30\,хв$. Через який час

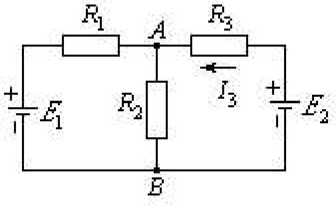

Рис. 44

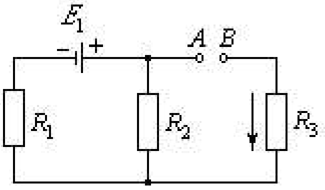

Рис. 45

закипить вода, якщо обидві секції з'єднати послідовно? паралельно?

3.140. Сила струму в провіднику з опором $r = 100\,Ом$ рівномірно зростає від $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 10\,A$ протягом $\tau = 30\,c$. Визначити кількість теплоти Q, що виділиться у провіднику за цей час.

3.141. Сила струму в провіднику з опором $R = 12\,Ом$ рівномірно спадає від $I_0 = 5\,A$ до $I = 0$ протягом $\tau = 10\,c$. Визначити кількість теплоти Q, що виділиться у провіднику за цей час.

3.142. По провіднику, що має опір $R = 3\,Ом$, тече струм, сила якого збільшується. Кількість теплоти Q, що виділилася у провіднику за час $\tau = 8\,c$ дорівнює 200 *Дж*. Визначити заряд, який пройшов через провідник. У початковий момент часу сила струму в провіднику дорівнює нулеві.

3.143. Сила струму в провіднику опором $R = 15\,Ом$ рівномірно зростає від $I_0 = 0$ до деякого максимального значення протягом часу $\tau = 5\,c$. За цей час у провіднику виділяється $Q = 10\,кДж$ теплоти. Знайти середню силу струму $< I >$ в провіднику за цей проміжок часу.

3.144. Сила струму в провіднику рівномірно збільшується від нуля до деякого максимального значення протягом часу $\tau = 10\,c$. За цей час у провіднику виділяється $Q = 1\,кДж$ теплоти. Визначити швидкість наростання струму в провіднику, якщо його опір R дорівнює 3 *Ом*.

3.145. Сила струму I в металевому провіднику, площа поперечного перерізу якого $S = 4\,мм^2$, дорівнює 0,8 *А*. Вважаючи, що в кожному кубічному сантиметрі провідника міститься $n = 2{,}5 \cdot 10^{22}$ вільних електронів, визначити середню швидкість $< \upsilon >$ їх впорядкованого руху.

3.146. Густина струму в алюмінієвому провіднику $j = 1\,A/мм^2$. Знайти середню швидкість впорядкованого руху електронів, вважаючи, що кількість вільних електронів у 1 $см^3$ алюмінія дорівнює кількості атомів.

3.147. Густина струму в мідному провіднику $j = 3\,A/мм^2$. Знайти напруженість електричного поля в провіднику.

3.148. У мідному провіднику об'ємом $V = 6\,см^3$ при проходженні по ньому постійного струму протягом часу $t = 1\ хв$ виділилася кількість теплоти $Q = 216\ Дж$. Знайти напруженість електричного поля в провіднику.

3.149. При силі струму $I = 5\ A$ за час $t = 10\ хв$ в електролітичній ванні виділилося $m = 1{,}02\ г$ двовалентного металу. Визначити його відносну атомну масу A_r.

3.150. Електролітична ванна з розчином мідного купоросу під'єднана до батареї акумуляторів з е. р. с. $E = 4\ В$ і внутрішнім опором $r = 0{,}1\ Ом$. Визначити масу двовалентної міді, яка виділиться при електролізі за час $t = 10\ хв$, якщо е. р. с. поляризації $E_{п} = 1{,}5\ В$ і опір розчину $R = 0{,}5\ Ом$.

3.151. Визначити товщину h шару міді, яка виділиться за час $t = 5\ год$ при електролізі мідного купоросу, якщо густина струму $j = 80\ А/м^2$.

3.152. Сила струму, який проходить через ванну з мідним купоросом рівномірно збільшується протягом $\Delta t = 20\ с$ від $I_0 = 0$ до $I = 2\ А$. Знайти масу міді, яка виділиться за цей час на катоді ванни.

3.153. Скільки атомів двовалентного металу виділиться на 1 $см^2$ поверхні електрода за час $t = 5\ хв$ при густині струму $j = 10\ А/м^2$?

3.154. Повітря між плоскими електродами іонізаційної камери іонізується за допомогою X – променів. Сила струму, який проходить через камеру $I = 1{,}2\ мкА$. Площа кожного електрода $S = 300\ см^2$, відстань між ними $d = 2\ см$, різниця потенціалів $U = 100\ В$. Знайти концентрацію n пар іонів між пластинами, якщо струм далекий від насичення. Рухливість позитивних іонів $b_+ = 1{,}4$ і негативних $b_- = 1{,}9\ см^2/(В \cdot с)$. Заряд кожного іона дорівнює елементарному заряду.

3.155. Об'єм V газу, що знаходиться між електродами іонізаційної камери, дорівнює 0,5 $л$. Газ іонізується за допомогою X – променів. Сила струму насичення $I_{нас} = 4\ нА$. Скільки пар іонів утворюється за одну секунду в 1 $см^3$ газу? Заряд кожного іона дорівнює елементарному заряду.

3.156. Знайти силу струму насичення між пластинами конденсатора, якщо під дією іонізатора в кожному кубічному сантиметрі об'єму між пластинами щосекунди утворюється $n_0 = 10^8$ пар іонів, кожний з яких має один елементарний заряд. Відстань між пластинами $d = 1\,см$, площа пластин $S = 100\,см^2$.

3.157. В іонізаційній камері відстань між плоскими електродами якої $d = 5\,см$, проходить струм насичення густиною $j = 16\,мкА/м^2$. Визначити кількість пар іонів *n*, які утворюються щосекунди в кожному кубічному сантиметрі об'єму камери.

3. МАГНІТНЕ ПОЛЕ

Основні співвідношення

Магнітна індукція $\vec{B}$ зв'язана з *напруженістю магнітного поля* $\vec{H}$ співвідношенням

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \qquad (3.56)$$

у середовищі і

$$\vec{B}_0 = \mu_0\vec{H} \qquad (3.57)$$

у вакуумі, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ Гн/м$ – магнітна стала, μ – магнітна проникність середовища.

Магнітна індукція в центрі кругового провідника зі струмом:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2}\frac{I}{R}, \qquad (3.58)$$

де *R* – радіус кривизни провідника.

Індукція магнітного поля, створеного нескінченно довгим прямим провідником зі струмом:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2}\frac{I}{r}, \qquad (3.59)$$

де *r* – відстань від осі провідника.

Індукція магнітного поля, створеного соленоїдом у його середній частині:

$$B = \mu\mu_0 nI, \qquad (3.60)$$

де *n* – кількість витків, що припадає на одиницю довжини соленоїда.

Принцип суперпозиції магнітних полів: магнітна індукція $\vec{B}$ результуючого поля дорівнює векторній сумі магнітних індукцій полів, що додаються:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{n} \vec{B}_i \ . \tag{3.61}$$

Закон Ампера. Сила, що діє на провідник зі струмом в магнітному полі:

$$\vec{F} = I[\vec{l}, \vec{B}], \tag{3.62}$$

де I – сила струму, $\vec{l}$ – вектор, модуль якого дорівнює довжині провідника, а напрямок збігається з напрямком струму.

Сила взаємодії між двома нескінченно довгими паралельними провідниками зі струмами I_1 і I_2, які знаходяться на відстані d один від одного, розрахована для відрізка провідника довжиною l:

$$F = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l \ . \tag{3.63}$$

Магнітний момент контура зі струмом:

$$\vec{p}_{\text{m}} = IS\vec{n} \ , \tag{3.64}$$

де S – площа обмежена контуром, $\vec{n}$ – вектор нормалі.

Механічний момент, що діє на контур зі струмом у магнітному полі

$$\vec{M} = [\vec{p}_{\text{m}}, \vec{B}] \ . \tag{3.65}$$

Магнітний потік, що пронизує плоску поверхню площею S в однорідному магнітному полі індукцією $\vec{B}$:

$$\Phi = (\vec{B}, \vec{S}) = BS\cos\alpha \ , \tag{3.66}$$

де S – площа обмежена контуром, $\vec{n}$ – вектор нормалі.

Е. р. с. індукції, що виникає в контурі пропорційна швидкості зміни магнітного потоку (закон Фарадея):

$$E_i = -N\frac{d\Phi}{dt} \ , \tag{3.67}$$

де N – кількість витків контура.

Різниця потенціалів, що виникає на кінцях провідника довжиною l, який рухається зі швидкістю υ в магніткому полі індукцією B:

$$U = Bl\upsilon\sin\alpha \ , \tag{3.68}$$

де α – кут між вектором магнітної індукції та вектором швидкості.

Е. р. с. індукції, що виникає в рамці, яка містить N – витків площею S, при обертанні рамки з кутовою швидкістю ω в однорідному магнітному полі індукцією B:

$$E_i = BNS\omega \sin \omega t . \tag{3.69}$$

Е. р. с. самоіндукції виникає в замкнутому провіднику по якому тече змінний струм і пропорційна швидкості зміни сили струму:

$$E_i = -L\frac{dI}{dt}, \tag{3.70}$$

де L – індуктивність провідника. Для соленоїда, що має площу поперечного перерізу S, довжину l, та кількість витків на одиницю довжини n

$$L = \mu_0 \mu n^2 Sl . \tag{3.71}$$

Методичні поради

1. При розв'язуванні задач з даного розділу слід враховувати, що магнітне поле, яке створюється постійним струмом, характеризується вектором магнітної індукції $\vec{B}$, величину і напрямок якого можна визначити за законом Біо – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}[d\vec{l}, \vec{r}]\frac{I}{r^3},$$

або в скалярній формі

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{I \sin\alpha}{r^2}dl,$$

де α – кут між векторами $d\vec{l}$ і $\vec{r}$.

Задаючи форму провідника з електричним струмом можна розрахувати величину вектора магнітної індукції для провідника будь-якої форми.

При цьому слід пам'ятати, що вектор $\vec{B}$ завжди перпендикулярний до векторів $d\vec{l}$ і $\vec{r}$. Його напрямок у просторі можна знайти за правилом правого свердлика: якщо напрям струму збігається з напрямком поступального руху правого свердлика (гвинта з правою різьбою), то дотична до кола, яке описує руків'я свердлика в кожній точці збігатиметься за напрямком з вектором $\vec{B}$. Лінії магнітної індукції завжди замкнені самі на себе. Це означає, що в природі немає "магнітних зарядів".

2. Якщо магнітне поле створене кількома струмами, то напрямок магнітної індукції результуючого поля можна знайти за принципом суперпозиції магнітних полів, використавши правила додавання векторів. Модуль вектора $\vec{B}$ обчислюється за теоремою косинусів.

3. Сила, яка діє на провідник зі струмом з боку магнітного поля (сила Ампера) завжди буде перпендикулярна і до напрямку струму, і до напрямку індукції магнітного поля $\vec{B}$. Її напрямок визначається за правилом лівої руки: ліву руку розміщують так, щоб її чотири пальці були напрямлені вздовж струму, а вектор магнітної індукції входив у долоню. Тоді відігнутий на 90^{o} великий палець вкаже напрямок сили. За модулем ця сила дорівнює:

$$F = BIl\sin\alpha ,$$

де α – кут між напрямками струму і вектора $\vec{B}$.

4. Оскільки струм – це впорядкований рух заряджених часток, то із закону Ампера випливає, що магнітне поле буде діяти і на окремуу заряджену частку, яка рухається в магнітному полі. Справді,

$$F_{\text{л}} = B\frac{q}{t}l\sin\alpha = Bq\upsilon\sin\alpha$$

– *сила Лорентца*. У векторному вигляді сила Лорентца визначається за формулою:

$$\vec{F}_{\text{л}} = q[\vec{\upsilon},\vec{B}],$$

з якої випливає, що вона перпендикулярна і до швидкості зарядженої частки, і до вектора магнітної індукції. Отже під дією сили Лорентца заряджена частка рухатиметься по колу радіусом r і модуль вектора швидкості не буде змінюватися:

$$\frac{m\upsilon^2}{r} = q\upsilon B .$$

5. Якщо заряджена частка влітає в магнітне поле під деяким кутом $\alpha \neq 90°$, то вона буде рухатись гвинтовою лінією, радіус якої буде визначатись перпендикулярною до поля складовою швидкості $\upsilon_\perp$ і силою Лорентца, а крок гвинта – паралельною складовою швидкості $\upsilon_\parallel$ і часом T одного повного оберту зарядженої частки навколо лінії магнітної індукції: $h = \upsilon_\parallel T$.

6. При визначенні напрямку індукційного струму потрібно користуватися *правилом Лєнца*: "Індукційний струм тече в такому напрямку, щоб своїм магнітним полем знищити причину своєї появи."

Приклади розв'язування задач

1. Два паралельні нескінченно довгі провідники, по яким течуть в одному напрямку струми силою $I = 60\ A$ розміщені на відстані $d = 10\,см$ один від одного. Визначити магнітну індукцію в точці, яка знаходиться на відстані $r_1 = 5\,см$ від одного провідника і $r_2 = 12\,см$ від іншого.

Розв'язування

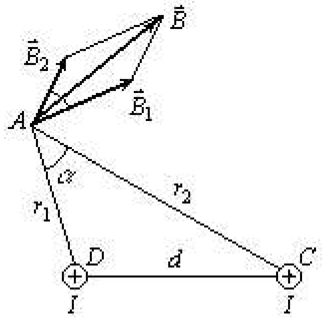

Рис. 46

Для розв'язання цієї задачі намалюємо схему (рис. 46) і визначимо напрямки магнітної індукції, створюваної кожним струмом окремо, а потім додамо їх геометрично. Напрямки векторів магнітної індукції $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ знайдемо за правилом правого свердлика: будемо обертати свердлик так, щоб він рухався в напрямку струму (за площину рисунка), тоді дотична до кола, яке описуватиме його руків'я, вкаже напрямок векторів $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$. Додамо ці два вектори і визначимо напрямок результуючого магнітного поля. Скориставшись теоремою косинусів, знайдемо модуль результуючого вектора:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos\alpha}\,. \tag{1}$$

Знаючи модулі векторів індукції $\left|\vec{B}_1\right|$ і $\left|\vec{B}_2\right|$ на відстанях r_1 і r_2, запишемо результуючий вираз:

$$B=\sqrt{\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)^2\left(\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{2}{r_1r_2}\cos\alpha\right)}. \qquad (2)$$

Визначимо косинус кута α з трикутника DCA. Справді $\angle DAC=\alpha$, як кути між двома взаємно перпендикулярними сторонами. Застосувавши ще раз теорему косинусів, отримаємо:

$$\cos\alpha=\frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2}=0{,}576.$$

Підставляючи отриманий результат у (2), дістанемо, що $B=286\cdot10^{-6}\ (Тл)$.

Відповідь: $286\ мкТл$.

Задачі для самостійного розв'язування

3.158. Знайти магнітну індукцію в центрі тонкого кільця, по якому протікає струм $I=10\ A$. Радіус кільця дорівнює 5 *см*.

3.159. Обмоткою дуже короткої котушки радіусом $r=16\ см$ тече струм силою $I=5\ A$. Скільки витків N має котушка, якщо напруженість H магнітного поля в її центрі становить 800 *А/м*?

3.160. Напруженість H магнітного поля в центрі кругового витка радіусом $r=8\ см$ дорівнює 30 *А/м*. Визначити напруженість поля H_1 на осі витка в точці, що знаходиться на відстані $d=6\ см$ від центра витка.

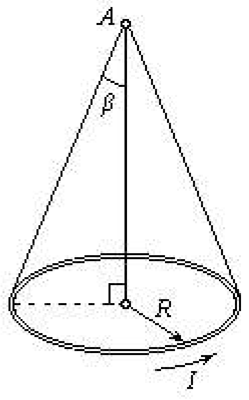

Рис. 47

3.161. Тонким провідним кільцем радіусом $R=10\ см$ тече струм силою $I=80\ A$. Знайти магнітну індукцію B в точці, яка рівновіддалена від усіх точок кільця на відстань $r=20\ см$.

3.162. Тонким провідним кільцем радіусом $R=10\ см$ тече струм. Чому дорівнює сила цього струму, якщо магнітна індукція B цього поля в точці А (рис. 47) дорівнює 1 *мкТл*? Кут $\beta=10^{\circ}$.

3.163. Прямим нескінченно довгим провідником тече струм силою $I=50\ A$.

Визначити магнітну індукцію B в точці, яка віддалена на відстань $r = 5\,см$ від провідника.

3.164. Два довгих паралельних провідники знаходяться на відстані $r = 5\,см$ один від одного. Провідниками у протилежних напрямках течуть струми силою $I = 10\,A$ кожний. Знайти напруженість H магнітного поля в точці, яка знаходиться на відстані $r_1 = 2\,см$ від одного і $r_2 = 3\,см$ від другого провідника.

3.165. Відстань d між двома довгими паралельними провідниками дорівнює 5 *см*. Провідниками в одному напрямку течуть однакові струми силою $I = 30\,A$ кожний. Знайти напруженість H магнітного поля в точці, яка знаходиться на відстані $r_1 = 4\,см$ від одного і на $r_2 = 3\,см$ від другого провідника.

3.166. Двома нескінченно довгими прямими паралельними провідниками течуть у протилежних напрямках струми силою $I_1 = 50\,A$ та $I_2 = 100\,A$. Відстань d між провідниками дорівнює 20 *см*. Визначити магнітну індукцію B в точці, яка знаходиться на відстанях $r_1 = 25\,см$ від одного і на $r_2 = 40\,см$ від другого провідника.

3.167. Двома нескінченно довгими прямими паралельними провідниками в одному напрямку течуть струми силою $I_1 = 20\,A$ та $I_2 = 30\,A$. Відстань d між провідниками дорівнює 10 *см*. Визначити магнітну індукцію B у точці, яка знаходиться на однаковій відстані $r = 10\,см$ від обох провідників.

3.168. Два нескінченно довгих прямих провідники схрещені під прямим кутом (рис. 48). Провідниками течуть струми силою $I_1 = 80\,A$ та $I_2 = 60\,A$. Відстань d між провідниками дорівнює 10 *см*. Визначити магнітну індукцію B в точці А, яка віддалена від обох провідників на однакову відстань.

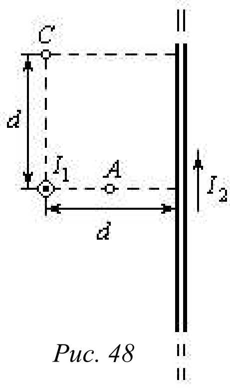

Рис. 48

3.169. Нескінченно довгий прямий провідник зігнуто під прямим кутом. По провіднику тече струм силою $I = 20\,A$. Яка магнітна індукція B в точці А (рис. 49), якщо $r = 5\,см$.

3.170. Нескінченно довгим прямим провідником, зігнутим так, як показано на (рис. 50), тече струм силою $I = 100\,A$. Визначити магнітну індукцію *B* у точці О, якщо $r = 10\,см$.

3.171. Нескінченно довгий прямий провідник зігнуто під прямим кутом. По провіднику тече струм силою $I = 100\,A$. Визначити магнітну індукцію *B* у точці, яка лежить на бісектрисі кута і віддалена від його вершини на $a = 100\,см$.

3.172. Прямий провідник довжиною $l = 10\,см$, по якому тече струм силою $I = 20\,A$, знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}01\,Тл$. Знайти кут α між вектором **B** і струмом, якщо на провідник діє сила $F = 10\,мН$.

3.173. Квадратна дротяна рамка розміщена в одній площині з довгим прямим провідником так, що дві її сторони паралельні провіднику. Рамкою і провідником течуть однакові струми силою $I = 1\,кA$. Визначити силу *F*, що діє на рамку, якщо найближча до провідника сторона рамки знаходиться від нього на відстані, яка дорівнює її довжині.

3.174. Провідник у вигляді тонкого півкільця радіусом $R = 10\,см$ знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 50\,мТл$. По провіднику тече струм силою $I = 10\,A$. Знайти силу *F*, що діє на провідник, якщо площина півкільця перпендикулярна до ліній індукції, а з'єднувальні провідники знаходяться поза межами поля.

3.175. Двома паралельними провідниками завдовжки $l = 1\,м$ течуть струми однакової сили. Відстань *d* між провідниками дорівнює 1 *см*. Струми взаємодіють з силою $F = 1\,мН$. Знайти силу струмів *I* в провідниках.

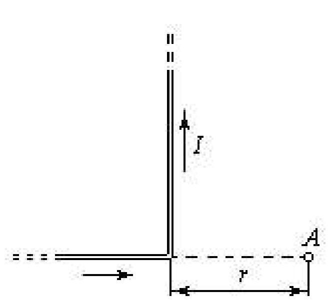

Рис. 49

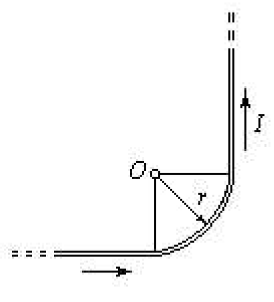

Рис. 50

3.176. Двома тонкими провідниками, зігнутими у формі кілець радіусом $R = 10\,см$, течуть однакові струми силою $I = 10\ A$ в кожному. Знайти силу F взаємодії цих кілець, якщо площини, в яких лежать кільця, паралельні, а відстань d між центрами кілець дорівнює 1 *мм*.

3.177. У незбудженому атомі водню електрон рухається навколо ядра по колу радіусом $r = 53\,пм$. Визначити магнітний момент p_m еквівалентного кругового струму та механічний момент M, що діє на круговий струм, якщо атом розміщений у зовнішньому магнітному полі так, що лінії індукції паралельні площині орбіти електрона. Магнітна індукція B поля дорівнює 0,1 *Тл*.

3.178. Електрон в атомі водню рухається навколо ядра коловою орбітою деякого радіуса. Знайти відношення магнітного моменту p_m еквівалентного колового струму до момента імпульсу L орбітального руху електрона. Заряд електрона та його масу вважати відомими. Вказати також напрямки векторів $\mathbf{p}_m$ і $\mathbf{L}$.

3.179. Тонке кільце радіусом $R = 10\,см$ має заряд $Q = 10\,нКл$. Кільце рівномірно обертається з частотою $n = 10\,c^{-1}$ відносно осі, яка перпендикулярна площині кільця і проходить через його центр. Знайти: 1) магнітний момент колового струму $\mathbf{p}_m$, створеного кільцем; 2) відношення магнітного моменту до момента імпульсу $\left(p_m/L\right)$, якщо маса кільця m дорівнює 10 *г*.

3.180. Диск радіусом $R = 10\,см$ має заряд $Q = 0{,}2\,мкКл$, що рівномірно розподілений по його поверхні. Диск рівномірно обертається з частотою $n = 20\,c^{-1}$ відносно осі, яка перпендикулярна площині диска і проходить через його центр. Знайти: 1) магнітний момент колового струму $\mathbf{p}_m$, створеного диском; 2) відношення магнітного моменту до момента імпульсу $\left(p_m/L\right)$, якщо маса диска m дорівнює 100 *г*.

3.181. Тонкостінна металева сфера радіусом $R = 10\,см$ має заряд $Q = 3\,мКл$, що рівномірно розподілений по її поверхні. Сфера рівномірно обертається з кутовою швидкістю $\omega = 10\,рад/с$ відносно осі, що проходить через її центр. Знайти: 1) магнітний момент колового струму $\mathbf{p}_m$, створеного сферою;

2) відношення магнітного моменту до момента імпульсу (p_m/L), якщо маса сфери m дорівнює 100 *г*.

3.182. Визначити силу Лорентца F, яка діє на електрон, що влітає зі швидкістю $\upsilon = 4\ Мм/с$ в однорідне магнітне поле під кутом $\alpha = 30^\circ$ до ліній індукції. Індукція B поля дорівнює 0,2 *Тл*.

3.183. Обчислити радіус R дуги кола, яку описує протон в магнітному полі з індукцією $B = 15\ мТл$, якщо його швидкість $\upsilon = 2\ Мм/с$.

3.184. Двічі іонізований атом гелію (α – частка) рухається в однорідному магнітному полі з напруженістю $H = 100\ кА/м$ по колу радіусом $R = 100\ см$. Знайти швидкість υ частки.

3.185. Іон, який має один елементарний заряд, рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}015\ Тл$ по колу радіусом $R = 10\ см$. Визначити імпульс p іона.

3.186. Частка, яка має один елементарний заряд, влітає в однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0{,}5\ Тл$. Визначити момент імпульса L, яким володіє частка рухаючись в магнітному полі, якщо її траєкторія є дугою кола радіусом $R = 0{,}1\ см$.

3.187. Електрон рухається в магнітному полі з індукцією $B = 0{,}02\ Тл$ по колу радіусом $R = 1\ см$. Визначити кінетичну енергію T електрона (в джоулях і електронвольтах).

3.188. Заряджена частка влетіла в створене в середовищі магнітне поле перпендикулярно до ліній індукції. Внаслідок взаємодії з речовиною частка, перебуваючи в полі, втратила половину початкової енергії. У скільки разів будуть відрізнятися радіуси кривизни траєкторії на початку і в кінці шляху?

3.189. Протон, який пройшов прискорюючу різницю потенціалів $U = 600\ В$, влетів у однорідне магнітне поле з індукцією $B = 0{,}3\ Тл$ і почав рухатися по колу. Обчислити радіус R цього кола.

3.190. Заряджена частка, яка пройшла прискорюючу різницю потенціалів $U = 2\ кВ$, рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 15{,}1\ мТл$ по колу радіусом $R = 1\ см$. Визначити питомий заряд $|e|/m$ частки та її швидкість υ.

3.191. Заряджена частка з кінетичною енергією $T = 1\ кеВ$ рухається в однорідному магнітному полі по колу радіусом $R = 1\ мм$. Знайти силу F, яка діє на частку з боку поля.

3.192. Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}1\,Тл$ перпендикулярно до лінії індукції. Визначити силу *F*, яка діє на електрон з боку поля, якщо радіус *R* кривизни траєкторії дорівнює 0,5 *см*.

3.193. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 100\,мкТл$ гвинтовою лінією рухається електрон. Визначити швидкість υ електрона, якщо крок *h* гвинтової лінії дорівнює 20 *см*, а радіус $R = 5\,см$.

3.194. Електрон рухається в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 9\,мТл$ гвинтовою лінією радіусом $R = 1\,см$ і кроком $h = 7{,}8\,см$. Визначити період обертання *T* електрона та його швидкість υ.

3.195. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 2\,Тл$ рухається протон. Траєкторія його руху є гвинтовою лінією радіусом $R = 10\,см$ і кроком $h = 60\,см$. Визначити кінетичну енергію *T* протона.

3.196. Перпендикулярно магнітному полю з індукцією $B = 0{,}1\,Тл$ створене електричне поле з напруженістю $E = 100\,кВ/м$. Перпендикулярно обом полям, не відхиляючись від прямолінійної траєкторії, рухається заряджена частинка. Обчислити швидкість υ цієї частинки.

3.197. Заряджена частка пройшла прискорюючу різницю потенціалів $U = 104\,В$ і влетіла в схрещені під прямим кутом електричне ($E = 10\,кВ/м$) і магнітне ($B = 0{,}1\,Тл$) поля. Знайти відношення Q/m, якщо частка рухається перпендикулярно обом полям прямолінійно.

3.198. Заряджена частка рухається по колу радіусом $R = 1\,см$ в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}1\,Тл$. Паралельно магнітному полю збуджене електричне поле з напруженістю $E = 100\,В/м$. Визначити проміжок часу Δt, протягом якого повинно діяти електричне поле, щоб кінетична енергія частки збільшилася вдвоє.

3.199. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}01\,Тл$ знаходиться прямий провідник завдовжки $l = 8\,см$, розміщений перпендикулярно до ліній індукції. По провіднику тече струм силою $I = 2\,А$. Під дією сил, що діють на нього з боку поля, провідник перемістився на відстань $s = 5\,см$. Знайти роботу *A* сил поля.

3.200. Плоский контур, площею $S = 300\,см^2$, знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}01\,Тл$. Площина контура перпендикулярна до ліній індукції. В контурі тече постійний струм силою $I = 10\ А$. Визначити роботу *A* зовнішніх сил по переміщенню контура зі струмом в ту область простору, де магнітне поле відсутнє.

3.201. Дротяний виток діаметром $d = 10\,см$ вільно встановився в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}016\,Тл$. У витку тече струм силою $I = 20\ А$. Визначити робота *A*, яку треба виконати, щоб повернути виток на кут $\alpha = \pi/2$ відносно осі, яка збігається з діаметром. Те ж саме, якщо кут $\alpha = 2\pi$.

3.202. Прямий провідник завдовжки $l = 40\,см$ рухається в однорідному магнітному полі зі швидкістю $\upsilon = 5\,м/с$ перпендикулярно до ліній індукції. Напруга на кінцях провідника $U = 0{,}6\ В$. Обчислити індукцію *B* магнітного поля.

3.203. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 1\,Тл$ знаходиться прямий провідник завдовжки $l = 20\,см$, кінці якого замкнуті поза межами поля. Опір *R* всього кола дорівнює 0,1 *Ом*. Знайти силу *F*, яку треба прикласти до провідника, щоб рухати його перпендикулярно до ліній індукції зі швидкістю $\upsilon = 2{,}5\,м/с$.

3.204. В однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}35\,Тл$ з частотою $n = 480\,хв^{-1}$ рівномірно обертається рамка площею $S = 50\,см^2$, яка містить $N = 1500$ витків. Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна до ліній індукції. Визначити максимальну е. р. с. індукції $E_{\max}$, яка виникає в рамці.

3.205. Дротяний виток радіусом $r = 4\,см$, який має опір $R = 0{,}01\,Ом$, знаходиться в однорідному магнітному полі з індукцією $B = 0{,}04\,Тл$. Площина рамки утворює кут $\alpha = 30^\circ$ з лініями індукції поля. Знайти заряд *Q*, який протече по витку, у разі зникнення магнітного поля.

3.206. Дротяне кільце радіусом $r = 10\,см$ лежить на столі. Який заряд *Q* протече по кільцю, якщо його повернути з одного боку на інший? Опір кільця $R = 1\,Ом$. Вертикальна складова індукції *B* магнітного поля Землі дорівнює 50 *мкТл*.

3.207. Тонка мідна дротина масою $m = 1\,г$ зігнута у формі квадрата і кінці її замкнуті. Квадрат розміщено в однорідному магнітному полі ($B = 0{,}1\,Тл$) так, що його площина перпендикулярна до ліній індукції. Знайти заряд Q, який протече по дротині, якщо квадрат, потягнувши за протилежні вершини, витягнути в лінію.

3.208. На картонний каркас завдовжки $l = 50\,см$ і площею поперечного перерізу $S = 4\,см^2$, намотано в один шар дріт діаметром $d = 0{,}2\,мм$ так, що витки щільно прилягають один до одного (товщиною ізоляції нехтуємо). Обчислити індуктивність L отриманого соленоїда.

3.209. Індуктивність L соленоїда завдовжки $l = 1\,м$, намотаного в один шар на немагнітний каркас, дорівнює $1{,}6\,мГн$. Площа поперечного перерізу соленоїда $S = 20\,см^2$. Визначити кількість витків n на кожному сантиметрі довжини соленоїда.

3.210. Скільки витків дроту діаметром $d = 0{,}4\,мм$ потрібно намотати на картонний циліндр діаметром $D = 2\,см$, щоб отримати одношарову котушку з індуктивністю $L = 1\,мГн$? Витки щільно прилягають один до одного. Товщиною ізоляції знехтувати.

ВІДПОВІДІ

Розділ 1. МЕХАНІКА

1.1. $\upsilon' = 122\,км/год; \upsilon'' = 72{,}2\,км/год$. **1.2.** $64\,км/год$. **1.3.** $<\upsilon> = S/(t_1 + t_2) =$ $=2\,м/с$. **1.6.** 40 *с*; 80 *м*; –0,1 *м/с*. **1.7**. Зустрінуться двічі: через 3,4 *с* на відстані 15 *м* і через10,6 *с* на відстані 123 *м*. **1.8**. 0; 2 *м/с*; 2 *м/с*; –8 *м/с*^{2}; 1 *м/с*^{2}. **1.9.** 0,235 *с*; 5,1 *м/с*; 0,286 *м/с*. **1.10.** $H = (2S + gt^2)^2/(8gt^2)$ = 5,61 *м*, де $S = 1$ *м*. **1.11.** 0,5 *м/с*. **1.12.** 3 *м/с*. **1.13.** 1 *м/с*. **1.14.** 68 *м/с*. **1.15.** 15,5 *м/с*. **1.16.** $\upsilon = \upsilon_0 + At + Dt^2/2$; $x = x_0 + \upsilon_0 t + At^2/2 + Dt^3/6$.
1.17. $x = x_0 + 0{,}5t - 0{,}5t^3/3$. **1.18.** $x = x_0 + \upsilon_0 t + At^3/6 + Dt^4/12$.
1.19. $<\upsilon> = n\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\upsilon_i}$. **1.20.** $<\upsilon> = \sum\limits_{i=1}^{n}\upsilon_i\Big/n$. **1.21.** $<\upsilon> = \tau\left(\dfrac{a\tau}{3} + \dfrac{b}{2}\right)$.
1.22. $S = S_0 + \dfrac{1}{k}\ln(1 + k\upsilon_0 t)$. **1.24.** $\upsilon_к = 17{,}5\,км/год; \upsilon_m = 7{,}5\,км/год$. **1.25.** $\varphi = 105^\circ$, кут між прямими АВ і ВС. **1.26.** $|\upsilon| = \sqrt{5}\,м/с$; вектор швидкості складає з берегом річки, від якого віддаляється човен, кут $\alpha = 63^\circ 30'$. **1.27.** Курс човна повинен складати кут $\alpha = 39^\circ$ з прямою, яка з'єднує пристані; $\upsilon = 0{,}62\,м/с$. **1.28.** Труба повинна бути нахилена вперед під кутом $\alpha = \mathrm{arctg}(\upsilon_в/\upsilon_к)$. **1.29.** $S = 500t$; $S(3) = 1500\,км$. **1.30.** $\upsilon = 5\,км/год$. **1.31.** 150 *м*. **1.32.** $\upsilon = \alpha^2 t/2$; $a = \alpha/2$; $<\upsilon> = \alpha\sqrt{S}/2$.
1.33. 4 *м*. **1.34.** $a = -\dfrac{\upsilon^2}{\upsilon_0 t_0}$ для $t > t_0$. **1.35.** 1) $S = \upsilon_0 t_0 \ln\dfrac{t}{t_0}$ для $t > t_0$; 2) $\upsilon = \upsilon_0 \exp\left(-\dfrac{S}{\upsilon_0 t_0}\right)$ для $S > 0$. **1.36.** $S = 2\upsilon_0 t$. **1.37.** 1) 8,4 *с*; 2) 7,3 *с*; 3) 7,8 *с*.
1.39. 1) 0,049 *м*; 2) 1,9 *м*. **1.40.** 1) 0,45 *с*; 2) 0,05 *с*. **1.41.** 1) $h = 57\,м$; 2) $t = 3{,}4\,с$.
1.42. $x = h - \upsilon_1 t$. **1.43.** $h = \upsilon^2/2g = 20{,}4\,м$. **1.44.** $\upsilon_0 = \dfrac{g(t_1 + t_2)}{2\sin\alpha} = 588\,м/с$; $h = gt_1 t_2 = 245\,км$. **1.45.** 1) $\upsilon_x = \upsilon_0\cos\varphi$, $\upsilon_y = \upsilon_0\sin\varphi - gt$, $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + g^2t^2 - 2\upsilon_0 gt\sin\varphi}$; 2) $T = \dfrac{2\upsilon_0\sin\varphi}{g}$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\varphi - \dfrac{gt}{\upsilon_0\cos\varphi}$; 4) $x = \upsilon_0 t\cos\varphi$, $y = \upsilon_0 t\sin\varphi - \dfrac{gt^2}{2}$; 5) $y = x\,\mathrm{tg}\,\varphi - \dfrac{gx^2}{2\upsilon_0^2\cos^2\varphi}$; 6) $H = \dfrac{\upsilon_0^2\sin^2\varphi}{2g}$; 7) $L = \dfrac{\upsilon_0^2\sin 2\varphi}{g}$, $\varphi^* = 45^\circ$.
1.46. $h_1 : h_2 : h_3 = 3:2:1$; $l_1 : l_2 : l_3 = \sqrt{3} : 2 : \sqrt{3}$. **1.47.** 1) 0,1 *с*; 2) 0,3 *м*.

1.48. $\upsilon_0 = 82\,м/с$. **1.49.** 1) $h = 1{,}22\,м$; 2) $\upsilon_0 = 10\,м/с$; 3) $\upsilon = 11{,}1\,м/с$; 4) $\varphi = 26^{o}12'$. **1.50.** 1) $\upsilon_0 = 11{,}1\,м/с$; 2) $\varphi = 68^{o}12'$. **1.51.** $\upsilon_0 = 4{,}4\,м/с$.
1.52. $a_\tau = 5{,}4\,м/с^2$; $a_n = 8{,}2\,м/с^2$. **1.53.** $R = 305\,м$. **1.54.** 1) 2,1 *м*; 2) 10 *м*; 3) 1,3 *с*; 4) 8,37 *м/с*. **1.55.** 16,23 *м*. **1.56.** $|\boldsymbol{v}| = a$; $|\boldsymbol{w}| = a\omega$; $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}$; рух по колу радіусом $R = a/\omega$. **1.57.** 2 $м/с^2$; 1 $м/с^2$; 2,24 $м/с^2$. **1.58.** 0,872 *с*; 14,8 $м/с^2$. **1.59.** 5 $см/с^2$; 10 $см/с^2$; 11 $см/с^2$. **1.60.** 1,2 $м/с^2$; 168 $м/с^2$; ~ 168 $м/с^2$.
1.61. 10 *с*. **1.62.** 3,5 *хв*. **1.63.** ~8 обертів. **1.64.** $a_\tau = 19{,}6\,м/с^2$; $a_n = 3{,}7\,м/с^2$. Швидкість зростає, оскільки $a_\tau > 0$. **1.65.** 1) 2 *с*; 2) 2,8 *с*. **1.66.** 0,1 $м/с^2$.
1.67. 0,01 $м/с^2$. **1.68.** 1) 3,14 *рад/с*; 2) 0,314 *м/с*; 3) 0,314 $м/с^2$; 4) 0,986 $м/с^2$; 5) 1,03 $м/с^2$; 6) $\alpha = 17^{o}46'$. **1.69.** 0,00093 $с^{-1}$. **1.70.** 72 *км/с*. **1.71.** $a_n = 0{,}03\cos\varphi$; $a_R = 0{,}03\cos^2\varphi$, де φ – географічна широта. Для Москви $a_n = 0{,}017\,м/с^2$ і $a_R = 0{,}01\,м/с^2$. **1.72.** $\beta = \pi N^2/n$. **1.73.** $a_n = 0{,}6\,м/с^2$; $a = 0{,}67\,м/с^2$; $\mathbf{a}^\wedge\mathbf{R} = 153^{o}$. **1.74.** 0,43 $рад/с^2$. **1.75.** 6,1 *м*. **1.76.** $a = m_2 g/(m_1 + m_2) = 1{,}96\,м/с^2$.
1.77. 2 $м/с^2$; 8 *Н*; 2 *Н*. **1.78.** $a = \dfrac{m}{M+m}g$; $T = \dfrac{mM}{M+m}g$.
1.79. $a = \dfrac{M}{M + m_1 + m_2 + m_3}g$; $T_1 = (m_1 + m_2 + m_3)a$; $T_2 = (m_2 + m_3)a$; $T_3 = m_3 a$. **1.80.** $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$; $T = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}g$; $F = 2T$. **1.81.** $a \geq 0{,}98\,м/с^2$.
1.82. $F \geq 22{,}5$ *Н*. **1.83.** $\Delta M = 2(M - P/g)$. **1.84.** $F \geq 39{,}2$ *Н*. **1.85.** Не зміниться.
1.86. $a = 1{,}02\,м/с^2$, $T = 5{,}9$ *Н*. **1.87.** 0,244 $м/с^2$; 6 *Н*. **1.89.** $a = \dfrac{m_1 \sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}g$; $T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(1 + \sin\alpha)g$. **1.90*.** $t = m\upsilon_{\max}/N = 25\,с$.
1.91*. $t = \dfrac{m}{k}\ln\dfrac{mg + k\upsilon_0}{mg} = 44{,}5\,с$. **1.92*.** $\Delta t = (m/k)\ln 2 = 6{,}93\,с$.
1.93*. $\upsilon = \dfrac{F}{k}\left(1 - \mathbf{e}^{-(k/m)\Delta t}\right) = 6{,}3\,м/с$. **1.94*.** $F = \dfrac{k\upsilon}{1 - \mathbf{e}^{-(k/M)\tau}} = 1{,}03\,Н$.
1.95*. $k = \dfrac{m}{t}\dfrac{\upsilon_0 - \upsilon}{\upsilon_0 \upsilon} = 4{,}7 \cdot 10^{-5}\,кг/м$. **1.96*.** $\Delta t = (m/k)\ln 10 = 18{,}4\,с$.
1.97. Вага обох тіл однакова. **1.98.** $F = G\dfrac{m_1 m_2}{a(l + a)}$. **1.99.** 7,8·10³ *м/с*.
1.100. $F = \dfrac{2\pi^2 G m \rho r^2 RL}{\left(R^2 + L^2\right)^{3/2}}$. **1.101.** 1600 *км*. **1.102.** 974 $см/с^2$. **1.103.** 975 $см/с^2$.
1.104. 162 $см/с^2$. **1.105.** $a = 28g$. **1.106.** 0,62 $см/с^2$. **1.107.** $g_{\text{с-п}} = g_{\text{м}}(1 + 0{,}0008)$.
1.108. Годинник йшов би повільніше в ~2,5 рази.

1.109. $R \approx 785 \cdot 10^6$ *км* . **1.110.** $M/m \approx 3{,}3 \cdot 10^5$. **1.111.** $d = \sqrt[3]{\dfrac{MGT^2}{4\pi^2}}$.

1.112. $g(r) = 4/3\pi G\rho r$ при $r \le R$, $g(r) = \dfrac{4\pi G\rho R^3}{3r^2}$ при $r \ge R$.
1.113. 1) $A = 1/2\, mgR = 31{,}2$ *МДж* ; 2) $A = mgR = 62{,}4$ *МДж* .
1.114. $\varphi = -62{,}6$ *МДж / кг* ; $\varphi = -190$ *ГДж / кг* .
1.115. 1) $\sigma = 4mg/(\pi d^2) = 3{,}12$ *МПа* ; 2) $\sigma = 4mg/(\pi d^2) + \rho gl/2 = 6{,}45$ *МПа* ;
3) $\sigma = 4mg/(\pi d^2) + \rho gl = 9{,}78$ *МПа* . **1.116.** $\sigma_{\max} = \dfrac{2\pi^2 n^2 ml}{S} = 4{,}74$ *МПа* .

1.117. $x_1 = (k_2/k_1)x_2 = 4$ *см*. **1.118.** $k' = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 1{,}5$ *кН / м* ; $k'' = k_1 + k_2 = 8$ *кН / м* .
1.119. T = 4,9 *Дж*; υ = 3,1 *м/с*; S = 10 *м*. **1.120.** 4,3 *МДж*.
1.121. $A = ESx^2/(2l) = 10$ *Дж* . **1.122.** $A = \dfrac{k_2}{2k_1}(k_1 + k_2)x_2^2 = 0{,}6$ *Дж* .
1.123. $\upsilon = x\sqrt{k/m} = 7{,}07$ *м / с* . **1.124.** $\upsilon = x\sqrt{(k/m)(x_2^2 - x_1^2)} = 22{,}5$ *м / с* .
1.125. $U = \beta x^4/4$. **1.126.** 1) $U_1/U_2 = k_2/k_1$; 2) $U_1/U_2 = k_1/k_2$. **1.127.** 12,4 *Н*.
1.128. 11,2 *км/с*. **1.129.** 1) 6,9 *кВт*; 2) 11,8 *кВт*; 3) 1,98 *кВт*. **1.130.** 2 *кДж*;
1*кДж*. **1.131.** $A = mg(H + kl)$. **1.132.** $\upsilon = \dfrac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$; $T = \dfrac{(m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$.
1.133. 1) 0,5 *м*; 2) 1,48 *Дж*. **1.134.** 0,64 *м*. **1.135.** У 1,25 рази. **1.136.** 10 *см/с*.

1.137. $\sin\dfrac{\alpha_1}{2} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$; $\sin\dfrac{\alpha_2}{2} = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{\dfrac{l_1}{l_2}}\sin\dfrac{\alpha}{2}$. **1.138.** $2{,}51 \cdot 10^{-3}$ *Дж*.

1.139. 0,051. **1.140.** $p_1 = 2m\upsilon_0 \sin\alpha = 3\ H \cdot c$. **1.141.** 1) 6,3 *м/с*; 2) –0,57 *м/с*.
1.142. 0,4 *м / с* . **1.143.** $A = \mu mgS + m\upsilon^2/2 = 996$ *Дж* .
1.144. $A = mh(g + 2h/t^2) = 4{,}72$ *кДж* . **1.145.** 336 *Дж*. **1.146.** 0,32 *Вт*; 56 *Вт*.
1.147. $l = m^2\upsilon_1^2/\left(2\mu g M^2\right) = 6{,}37$ *м* . **1.148.** $h = m^2\upsilon^2/(2gM) = 7{,}34$ *см* .
1.149. $h = l(1 - \cos\varphi)\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} = 7{,}34$ *см* . **1.150.** 22 *об/хв*. **1.151.** $3 \cdot 10^3$ c^{-1}; $T_c / T_к \approx 3\%$. **1.152.** 1) 2,65 *м/с*; 2) 2,56 *м/с*; 3) 3,21 *м/с*; 4) 3,13 *м/с*. **1.153.** 7,56 *м*.
1.154. 34,1 *Дж*. **1.155.** $\varepsilon = -0{,}21$ *рад/с*^{2}; $M_{\Gamma} = 0{,}42\ H \cdot м$; $A = 630$ *Дж*; $N = 240$ *об*.
1.156. 1) 21 *Дж*; 2) – 64 *Дж*. **1.157.** k=0,01. **1.158.** 1) $2{,}25 \cdot 10^6$ *Дж*; 2) 375 *м*.
1.159. T = 32,2 *Дж*, U = 39,4 *Дж*. **1.160.** 1) T = 6,6 *Дж*, U = 15,9 *Дж*; 2) T = 5,7 *Дж*, U = 16,8 *Дж*. **1.161.** $T = U$ = 98,1 *Дж*. **1.162.** 1) 5,14 *км/год*; 2) 1,71 *км/год*. **1.163.** 1) 17,8 *км/год*; 2) 53,5 *км/год*; 3) –17,8 *км/год*. **1.164.** 1) 3 *кН*; 2) 30 *кН*; 3) 0,3 *МН*.
1.165. $J = ma^2$; 1) $4 \cdot 10^{-4}$ *кг · м*^{2} ; 2) $2 \cdot 10^{-4}$ *кг · м*^{2} .

1.166. 1) $J = 1/3\,ml^2 = 3\cdot10^{-3}$ *кг·м²*; $J = 1/12\,ml^2 = 0{,}75\cdot10^{-3}$ *кг·м²*; 3) $J = 1/9\,ml^2 = 10^{-3}$ *кг·м²*. **1.167.** $4\cdot10^{-8}$ *кг·м²*.

1.168. $J = 1/2\,\tau a^2(b + 1/3\,a) = 1{,}44\cdot10^{-4}$ *кг·м²*.

1.169. $J = (m_1/3 + m_2)l_1^2 = 0{,}112$ *кг·м²*. **1.170.** $J = 3/4\,mR^2 = 6\cdot10^{-3}$ *кг·м²*.

1.171. $J = 1/2\,mR^2 - \dfrac{md^2}{32R^2}(d^2 + 8l^2) = 4{,}19\cdot10^{-2}$ *кг·м²*.

1.172. $J = 1/12\sigma a^3 b = 2\cdot10^{-5}$ *кг·м²*. **1.173.** 1) $\varepsilon = \dfrac{3g}{2l} = 14{,}7$ *рад/с²*, $a_\tau = g = 9{,}8$ *м/с²*; 2) $\varepsilon = \dfrac{3g}{2l}\sin\alpha = 12{,}7$ *рад/с²*, $a_\tau = g\sin\alpha = 8{,}49$ *м/с²*; 3) $\varepsilon = \dfrac{12g}{7l}\sin\alpha = 14{,}6$ *рад/с²*, $a_\tau = 6/7\,g\sin\alpha = 7{,}27$ *м/с²*.

1.174. 1) 65,3 *рад/с²*, 9,8 *м/с²*; 2) 32,7 *рад/с²*, 4,9 *м/с²*; 3) 59,9 *рад/с²*, 7,99 *м/с²*. **1.175.** $M = 4/5\,mR^2(B + 3Ct) = -0{,}64$ *Н·м*.

1.176. 1) $\omega = \dfrac{6m_2\upsilon}{(3m_2 + m_1)l} = 2{,}61$ *рад/с*, $u = \dfrac{3m_2\upsilon}{3m_2 + m_1} = 1{,}3$ *м/с*; 2) $\omega = \dfrac{3m_2\upsilon}{(m_2 + m_1)l} = 1{,}43$ *рад/с*, $u = \dfrac{2m_2\upsilon}{m_2 + m_1} = 0{,}952$ *м/с*; 3) $\omega = \dfrac{4m_2\upsilon}{(m_2 + 7/3\,m_1)l} = 0{,}833$ *рад/с*, $u = \dfrac{3m_2\upsilon}{m_2 + 7/3\,m_1} = 0{,}625$ *м/с*.

1.177. 1) 4,55 *рад/с*, 0,909 *м/с*; 2) 2,27 *рад/с*, 0,454 *м/с*; 3) 3,03 *рад/с*, 0,303 *м/с*; 4) 1,52 *рад/с*, 0,202 *м/с*. **1.178.** $\omega = m\upsilon r/(J + mr^2) = 1{,}02$ *рад/с*.

1.179. $\omega = \dfrac{2m_1\upsilon}{(m_2 + 2m_1)R} = 0{,}445$ *рад/с*. **1.180.** $\varphi = \dfrac{4\pi m_2}{m_2 + 2m_1} = 2\pi/3$.

1.181. 12,8 *кВт*. **1.182.** $M = const = 200$ *Н·м*; $N = 3{,}2 - 0{,}8t$; $N = 0{,}8$ *кВт*.

1.183. $M = T/2\pi N = 1{,}99$ *Н·м*. **1.184.** $T = (m/4)(2\upsilon^2 + \pi^2 d^2 n^2) = 3{,}21$ *кДж*.

1.185. $T = 3m\upsilon^2/4 = 3$ *Дж*.

Розділ 2. МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА

2.1. 2,32 *кПа*. **2.2.** 350 *К*. **2.3.** Зменшиться на 642 *Н*. **2.4.** 1,39 *кН*. **2.5.** 106 *см³*. **2.6.** 4,5 с*м*. **2.7.** 6,2 *кг*. **2.8.** 6,4 *м³*. **2.9.** 28,8. **2.10.** а) $2{,}4\cdot10^{-3}$ *м³*; б) 1170 *К*; в) 4,14 *кг/м³*; г) 1*кг/м³*. **2.11.** 637. **2.12.** 1,48 *г*. **2.13.** 1,45 *м³/кг*. **2.14.** 2 *атм*. **2.15.** 1) 37 *г/моль*; 2) $1{,}01\cdot10^5$ *Па*; 3) $1{,}34\cdot10^5$ *Па*. **2.16.** 554 *л*. **2.17.** 1400 *К*.

2.18. $P = \dfrac{\rho g h(d^2 - l^2)}{2dl} \approx 5{,}1\cdot10^4$ *Па*, де $d = \dfrac{L - h}{2}$. **2.19.** $l \approx 15$ *см*.

2.20. $V_2/V_1 = 1{,}07$. **2.21.** $V_B/V_A = m_B\mu_A/(m_A\mu_B + m_B\mu_A) = 0{,}65$.

2.22. $P = \dfrac{2P_1P_2}{P_1 + P_2} = 0{,}15$ *МПа*. **2.23.** $T = T_0\,\dfrac{2V_0 + S(l + 2x)}{2V_0 + S(l - 2x)}$. **2.24.** 58,6 *Н*.

2.25. 0,096 *Н*. **2.26.** 4,77 *Н/м²*. **2.27.** $1{,}75\cdot10^{16}$ *см*$^{-3}$; $1{,}01\cdot10^{17}$ *см*$^{-3}$. **2.28.** 55 ^{O}*С*. **2.29.** $2{,}5\cdot10^{14}$ *см*$^{-3}$. **2.30.** $6{,}1\cdot10^{23}$ *моль*$^{-1}$. **2.31.** 210 *Дж*. **2.32.** 750 *Дж*. **2.33.** 1) $\sqrt{\upsilon^2}$ = 230 *м/с*; 2) $N = 1{,}9\cdot10^{23}$; 3) $\rho = 5{,}0$ *кг/м³*. **2.34.** 5,88 *км*. **2.35.** 885 *м*. **2.36.** 1) 8,78 *м*; 2) 25,8 *м*. **2.37.** 6,5 *м*. **2.38.** 2,3 *км*. **2.39.** 0,346 *атм*. **2.40.** 1) 12,8 *Н*; 2) 0,78 *Н*. **2.41.** 1) 5,5 *км*; 2) 80 *км*. **2.42.** 1) 7,75 *МДж*; 2) 7,75 *МДж*; 3) 0. **2.43.** 1) 0,4 *МДж*; 2) 160 *кДж*; 3) 560 *кДж*. **2.44.** 1) 3,25 *МДж*; 2) 0,4 *МДж*; 3) 3,65 *МДж*. **2.45.** При постійному тиску. **2.46.** 157 *К*; – 21 *кДж*. **2.47.** 17,6. **2.48.** а) 0,6 і 0,4; б) 0,71 і 0,29; в) 0,75 і 0,25. **2.49.** 1) 1500*К*; 2) $12{,}4\cdot10^{-3}$ *м³*; 3) 12,4 *кДж*. **2.50.** 1) 102 *Дж*; 2) 1570 *м/с*; 3) $1{,}33\cdot10^{5}$ *Па*; 4) 0,164 *кг/м³*; 5) 400 *Дж*. **2.51.** 4,14 *кДж*. **2.52.** При $V = const$. **2.53.** 1) 2500 *К*; 2) 16,3 *кДж*. **2.54.** 2314 *Дж*; 558*К*; 0,95 *МПа*. **2.55.** 1) 700 *Дж*; 2) 500 *Дж*. **2.56.** 1) ΔU=2500 *Дж*; 2) A=830 *Дж*; 3) Q=3330 *Дж*. **2.57.** 720 *Дж*. **2.58.** У 2,72 рази. **2.59.** $\sqrt{\upsilon^2}$ = 500 *м/с*. **2.60.** $\eta = 2/19$.**2.61.** а) 264*К*; б) 176 *кДж*; в) –1,62 *кДж*; г) –0,14 *кДж*. **2.62.** а) $C = -R/2$; б) $Q = 4{,}16$ *кДж/кмоль*; в) $A = 16{,}6$ *кДж/кмоль*. **2.63.** а) $n = 1{,}43$; б) $\Delta U = 0{,}25$ *МДж*; в) $\Delta Q = 0{,}02$ *МДж*; г) $A = -0{,}23$ *МДж*. **2.64.** а) $A = \alpha\ln 2 - RT_1/(\gamma-1)$; б) $PV^{\gamma}\exp\big(\alpha(\gamma-1)/(PV)\big) = const$, де $\gamma = C_P/C_V$. **2.65.** а) 50%; б) 2,8 *МДж*; в) 1,4 *МДж*; г) 1,4 *МДж*. **2.66.** $\eta = 1-\left(\frac{V_{\min}}{V_{\max}}\right)^{\gamma-1} = 60\%$. **2.67.** 1) $A = \nu RT\left[\ln a - (a-1)/a\right] = 1{,}28\ МДж$; 2) $\eta = \frac{\ln a - (a-1)a}{\ln a + (a-1)/((\gamma-1)a)} = 13\%$; $\frac{\eta}{\eta_0} = 0{,}27$. **2.68.** 300 *К*; 500 *К*; 1000 *К*; 650 *К*; 8,55%. **2.69.** 0,11. **2.70.** 630 *Дж*, 1880 *Дж*. **2.71.** 18%. **2.72.** 1) 26,8%; 2) 274*кДж*; 3) 200 *кДж*. **2.73.** 1) 20%; 2) 1,26 *кДж*. **2.74.** 1) $V_1 = 2$ *л*, $P_1 = 7$ *атм*; $V_2 = 5$ *л*, $P_2 = 2{,}8$ *атм*; $V_3 = 8$ *л*, $P_3 = 1{,}44$ *атм*; $V_4 = 3{,}22$ *л*, $P_4 = 3{,}6$ *атм*; 2) 1300 *Дж*, 620 *Дж*, –1070 *Дж*, –620 *Дж*; 3) 230 *Дж*; 4) 17,5%; 5) 1300 *Дж*, 6) 1070 *Дж*. **2.75.** У 2,1 рази. **2.76.** 1) 0,093; 2) $Q_2 = \frac{1-\eta}{\eta}$ = 360 *Дж*; 3) 397 *кДж*. **2.77.** 4,94 *кг*. **2.78.** 7,4 *Дж/К*. **2.79.** $m_2 = \frac{m_1 r}{\lambda + c(t_2 - t_1)} = 251\ г$; $\Delta S = \frac{m_1 r}{T_1} - \frac{m_2\lambda}{T_2} - cm_2\ln\frac{T_2}{T} = 457\ Дж/К$. **2.80.** 5,4 *Дж/К*. **2.81.** 2,9 *Дж/К*. **2.82.** а) 1,76 *Дж/К*; б) 2,46 *Дж/К*. **2.83.** а) 8,5 *кДж/К*; б) 11,8 *кДж/К*. **2.84.** При постійному тиску. **2.85.** а) 8,42 *кДж/К*; б) 11,7 *кДж/К*; в) 0; г) 5,61 *кДж/К*. **2.86.** 4,9 *Дж/К*. **2.87.** $\Delta S = m\big(\alpha\ln(T_2/T_1) + b(T_2 - T_1)\big)$ = 2 *кДж/К*. **2.88.** 2,43 *Дж/К*. **2.89.** а) 280 *К*; б) 280 *К*. **2.90.** а) 482 *К*; б) 204 *К*. **2.91.** 1,85. **2.92.** а) 4,95 %; б) 0,86 %. **2.93.** Для рівняння Бертло:

$P_{кр}^2 = \frac{Ra}{216b^3}$; $T_{кр}^2 = \frac{8a}{27Rb}$; $V_{кр} = 3b$; $\frac{RT_{кр}}{P_{кр}V_{кр}} = \frac{8}{3}$; $T_{В} = \sqrt{\frac{a}{Rb}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}T_{кр}$;

для рівняння Клаузіуса:

$P_{кр}^2 = \frac{Ra}{216(b+c)^3}$; $T_{кр}^2 = \frac{8a}{27R(b+c)}$; $V_{кр} = 3b + 2c$; $\frac{RT_{кр}}{P_{кр}V_{кр}} = \frac{8(b+c)}{3b+2c}$; $T_В = \sqrt{\frac{a}{Rb}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{b+c}{b}}T_{кр}$; для I рівняння Дітерічі: $P_{кр} = \frac{a}{4e^2 b^2}$; $T_{кр} = \frac{a}{4Rb}$; $V_{кр} = 2b$; $\frac{RT_{кр}}{P_{кр}V_{кр}} = \frac{e^2}{2}$; $T_В = \sqrt{\frac{a}{Rb}} = 4T_{кр}$; e – основа натуральних логарифмів; для II рівняння Дітерічі:

$P_{кр} = \frac{a}{4(4b)^{5/3}}$; $T_{кр} = \frac{15ab}{4R(4b)^{5/3}}$; $V_{кр} = 4b$; $\frac{RT_{кр}}{P_{кр}V_{кр}} = 3{,}75$; температури Бойля не існує. **2.94.** $\frac{V_{рід}}{V} = 0{,}25$. **2.95.** 999 *мм рт. ст.* **2.96.** 2 *мм*.
2.97. 1) 0,53 *мм*; 2) $\Delta h = 2{,}98$ *см*. **2.98.** 13,9 *мм*. **2.99.** 1,15 *мм*. **2.100.** 0,07 *Н/м*. **2.101.** 790 *кг/м*^{3}. **2.102.** 2,9 *мм*. **2.103.** –16 *мкДж*. **2.104.** $261{,}09\cdot10^{-6}$ *Дж*. **2.105.** 4,38 *Дж*. **2.106.** Кулька виготовлена зі срібла. **2.107.** *Н*а 66^{О}. **2.108.** 71 *кН*. **2.109.** 1) 83 ^{О}C; 2) 28 ^{О}C. **2.110.** Із заліза. **2.111.** 100,1 *м*^{3}. **2.112.** 0,84 *Дж*. **2.113.** $1{,}25\cdot10^{-12}$ *Дж*. **2.114.** 0,027 %. **2.115.** *Н*а 1 *мм*^{3}.

Розділ 3. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

3.1. 9 *ГН*. **3.2.** $Q = 4l\sin(\alpha/2)\sqrt{\pi\varepsilon_0 gm\,\mathrm{tg}(\alpha/2)} = 50{,}1\,нКл$.

3.3. $\varepsilon = \rho/(\rho - \rho_0) = 2$. **3.4.** $Q = 2m\sqrt{\pi\varepsilon_0 G} = 86{,}7\,фКл$.

3.5. $Q_1 = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)Q = -0{,}287\,нКл$. **3.6.** $F = \frac{6Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = 54\,мН$.

3.7. Між зарядами на відстані $x = 40\,см$ від заряду 4*Q*; додатний.

3.8. Точка знаходиться на відстані $l_1 = 20\,см$ від заряду Q_1; $-8\cdot10^{-8}\,Кл$; нестійке. **3.9.** $Q_1 = Q\sqrt{3}/3 = -0{,}577\,нКл$; буде нестійким.

3.11. $F = \frac{Q\tau l}{4\pi\varepsilon_0(l+a)a} = 1{,}5\,мН$. **3.12.** $F = \frac{Q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} = 4{,}5\,мН$.

3.13. $F = \frac{\sqrt{2}Q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} = 6{,}37\,мН$. **3.14.** $\frac{a_2}{a_1}\left(\frac{R^2 + a_1^2}{R^2 + a_2^2}\right)^{3/2}$.

3.15. $F = \frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0 R} = 3{,}6\,мН$. **3.16.** $F = \frac{qq_1 l}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + l^2\right)^{3/2}}$; (0; 0,56 *мкН*; 0,01 *мкН*).

3.17. 2,99 *кВ/м*. **3.18.** 34 *кВ/м*. **3.19.** 6 *см*; 12 *см*. **3.20.** За від'ємним зарядом на відстані $d_1 = d\left(\sqrt{2} + 1\right)$. **3.22.** $E = \frac{1}{2}\frac{\tau R\sqrt{r^2 - R^2}}{\varepsilon_0 r^3} = 2{,}71\,кВм$. **3.23.** 1) 0; 2) 900 *В/м*;

3) 400 *В/м*. **3.24.** $E = \dfrac{QL}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2 + L^2\right)^{3/2}} = 560\ В/м$. **3.25.** $E_1 = 0$; $E_2 = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = 1{,}11\ кВ/м$; $E_3 = \dfrac{Q - |Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2} = 200\ В/м$.

3.26. $E_{0,2} = \dfrac{\tau \cdot l_1 \cdot R}{2\varepsilon_0\left(R^2 + l_1^2\right)^{3/2}} = 101{,}8\ кВ/м$; $\dfrac{E_2}{E_{0,2}} = \dfrac{l_2}{l_1}\left(\dfrac{R^2 + l_1^2}{R^2 + l_2^2}\right)^{3/2} = 647{,}6$.

3.27. $E = \dfrac{\sigma}{4\varepsilon_0} = 28{,}3\ В/м$. **3.28.** $F = \tau_1\tau_2/\varepsilon_0 = 1{,}13\ мН$. **3.29.** 5,55 *нКл/м*.

3.30. 43,2 *МВ/м*. **3.31.** 64,3 *кВ/м*. **3.32.** $E_1 = 0$; $E_2 = \dfrac{R\sigma}{\varepsilon_0 r_2} = 75{,}5\ В/м$.

3.33. $E_1 = 0$; $E_2 = \dfrac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0 r_2 E} = 200\ В/м$; $E_3 = \dfrac{\tau_1 + \tau_2}{2\pi\varepsilon_0 r_3} = 180\ В/м$.

3.34. $E_2 = \dfrac{\tau l}{2\pi\varepsilon_0 r\sqrt{4r^2 + l^2}} = 55{,}7\ кВ/м$. **3.35.** 60,2 *кВ/м*. **3.36.** $E_1 = 0$; $E_2 = 0$; $E_3 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_3} = 10{,}3\ кВ/м$; $D_1 = 0$; $D_2 = 0$; $D_3 = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r_3} = 90{,}95 \cdot 10^{-9}\ Кл/м^2$. **3.37.** $F = \dfrac{\sqrt{5}Q\tau}{4\pi\varepsilon_0 a} = 4{,}03\ мН$. **3.38.** 38 *кВ/м*.

3.39. $E_1 = 0$; $E_2 = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r_2} = 750\ В/м$; $D_1 = 0$; $D_2 = \dfrac{\sigma R}{r_2} = 6{,}7 \cdot 10^{-9}\ Кл/м^2$.

3.40. $\operatorname{grad}\varphi = -\vec{E}$; $|\operatorname{grad}\varphi| = E = \sigma/(2\varepsilon_0) = 226\ В/м$. **3.41.** 1) $E = 0$; 2) $E = \sigma/\varepsilon_0 = 113\ В/м$. **3.42.** 1) $E_1 = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{2\varepsilon_0} = 113\ В/м$; 2) $E_2 = \dfrac{\sigma_2 + \sigma_1}{2\varepsilon_0} = 226\ В/м$. **3.43.** 1) 396 *В/м*; 2) 170 *В/м*.

3.44. $p = F/S = \dfrac{\sigma_1\sigma_2}{2\varepsilon_0} = 17\ мкПа$. **3.45.** $|Q| = R\sqrt{2\pi\varepsilon_0 F} = 33{,}3\ нКл$.

3.46. $F = \dfrac{\sigma Q}{2\varepsilon_0} = 56{,}5\ мкН$. **3.47.** $E_1 = \dfrac{\rho r_1}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 7{,}5\ В/м$; $E_2 = \dfrac{\rho r_2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = 30{,}1\ В/м$;

$E_3 = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r_3} = 116{,}2\ В/м$; $D_1 = \dfrac{\rho r_1}{2} = 0{,}2 \cdot 10^{-9}\ Кл/м^2$;

$D_2 = \dfrac{\rho r_2}{2} = 0{,}8 \cdot 10^{-9}\ Кл/м^2$; $D_3 = \dfrac{\rho R^2}{2r_3} = 1{,}03 \cdot 10^{-9}\ Кл/м^2$.

3.48. $E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon\varepsilon_0} = 0{,}75\ В/м$; $E_2 = \frac{\rho r_2}{3\varepsilon\varepsilon_0} = 1{,}5\ В/м$; $E_3 = \frac{\rho R^3}{2\varepsilon_0 r_3^2} = 9{,}2\ В/м$; $D_1 = \frac{\rho r_1}{3}$; $D_2 = \frac{\rho r_2}{3}$; $D_3 = \frac{\rho R^3}{3r_3^2} = 1{,}38 \cdot 10^{-11}\ Кл/м^2$.

3.49. 1) $E_1 = 0$, $D_1 = 0$; 2) $E_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0\varepsilon}\left(r_2 - \frac{R_1^3}{r_2^2}\right) = 13{,}6\ В/м$, $D_2 = 843\ нКл/м^2$; 3) $E_3 = \frac{\rho\left(R_2^3 - R_1^3\right)}{3\varepsilon_0\varepsilon r_3^2} = 229\ В/м$, $D_3 = 2{,}02\ нКл/м^2$.

3.50. $\Phi_E = \pi\sigma r^2/(2\varepsilon_0) = 1{,}78\ кВ \cdot м$. **3.51.** $\Psi = \frac{1}{2}\sigma a^2 \sin\beta = 2{,}5\ нКл$.

3.52. $\Psi = \frac{Q}{2}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}\right) = 10\ нКл$. **3.53.** 1 *кВ*. **3.54.** $A_1 = -A = -4\ мкДж$.

3.55. $\frac{\Delta\Pi}{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = -162\ Дж/Кл$. **3.56.** $A = 4{,}5\ мкДж$.

3.57. $\varphi = 45\ В$. **3.58.** $\varphi = 6\ кВ$; $d_{\min} = 10\ см$; $d_{\max} = 40\ см$.

3.59. $E = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{1}{r^4} + \frac{1}{\left(r^2 + d^2\right)^2} - \frac{1}{r\left(r^2 + d^2\right)^{3/2}}} = 664\ кВ/м$;

$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + l^2}}\right) = 26{,}4\ кВ$. **3.60.** $\Pi = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 90\ мкДж$.

3.61. $\Pi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(Q_1 Q_2 + Q_1 Q_3 + Q_2 Q_3\right) = -63\ мкДж$.

3.62. $\varphi = \frac{\tau R}{2\varepsilon_0\sqrt{a^2 + R^2}} = 505\ В$. **3.63.** $\varphi = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0}\ln 2 = 62{,}4\ В$.

3.64. $\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{l + a}{a} = 36{,}5\ В$. **3.65.** 33,6 *В*. **3.66.** $\Delta\varphi = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} = 56{,}6\ В$.

3.67. $\varphi = ER = 300\ кВ$; $\sigma = \varepsilon_0 E = 55{,}6\ мкКл/м^2$. **3.68.** $U = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0} = 141\ В$.

3.69. 170 *В*. **3.70.** $1{,}04 \cdot 10^9$. **3.71.** 432 *В*. **3.72.** 0,12 *В*.

3.73. 1) $\varphi_1 = \frac{\left(R_2^3 - R_1^3\right)\rho}{3\varepsilon_0 R_2} = 238\ В$; 2) і 3) $\varphi_2 = \varphi_3 = 116\ В$.

3.74. $\varphi_1 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}\left(1 + \frac{1}{2\varepsilon}\right) = 472\ В$; $\varphi_2 = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} = 377\ В$.

3.75. $|\mathrm{grad}\,\varphi| = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} = 180\ В/м$; градієнт напрямлений до нитки уздовж силової лінії. **3.76.** $\Delta\varphi = \dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0\varepsilon} = 3{,}14\ В$. **3.77.** $A_{12} = \dfrac{2}{3}Q_1\varphi_1 = 2\ мкДж$.

3.78. $A_{12} = \dfrac{QQ_1}{8\pi\varepsilon_0 a}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 659\ мкДж$. **3.79.** $A_{12} = Q\varphi/4 = 250\ мкДж$.

3.80. $A = \dfrac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_C}{r_B} = 12{,}5\ мДж$.**3.81.** $A = \dfrac{Q\tau}{2\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{R}{\sqrt{R^2 + l^2}}\right) = 47\ мкДж$.

3.82. $A_{12} = \dfrac{Q\tau}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}\right) = 165\ мкДж$. **3.83.** $S = \dfrac{|e|Et^2}{2m} = 1{,}76\ см$; $\upsilon = \dfrac{|e|E}{m} = 35{,}2\ Мм/с$. **3.84.** $1{,}58\cdot10^{16}\ м/с^2$; $5{,}63\ Мм/с$; $0{,}356\ нс$.

3.85. 15 *МеВ*; 2,19 *м/с*. **3.86.** 24,3 *МКл/кг*. **3.87.** $l = \dfrac{3m\upsilon^2}{2eE} = 5{,}19\ мм$.

3.88. $l = l_0 - \dfrac{\varepsilon_0 T}{|e|\sigma} = 1\ см$. **3.89.** 2,24 *Мм/с*; відхилиться на кут 45° від початкового напрямку. **3.90.** $\varphi_2 = \varphi_1 - \dfrac{3m\upsilon_1^2}{e} = 289\ В$.

3.91. $l = \dfrac{3m\upsilon_1^2}{2eE} = 2{,}13\ мм$. **3.92.** 22,5 *В*. **3.93.** 50 *нКл·м*. **3.94.** 6,75 *кВ/м*.

3.95. $E_A = 9\ В/м$; $\varphi_A = 0$; $E_B = 18\ В/м$; $\varphi_B = 0{,}9\ В$. **3.96.** 4,76 *В/м*; 1,8 *В*.

3.97. $\varphi = A\sin\omega t$, де $A = 90\ В$, $\omega = 6{,}28\cdot10^3\ с^{-1}$.

3.98. $C = \dfrac{pE\sin\alpha}{\alpha} = 286\ нН\cdot м/рад$. **3.99.** $C = pE = 300\ нН\cdot м/рад$.

3.100. $П = -pE\cos\alpha = -500\ мкДж$. **3.101.** $A = 2pE = 30\ мкДж$.

3.102. $\Delta П = pE(1-\cos\alpha) = 0{,}5\ мкДж$. **3.103.** $\omega = \sqrt{2pE/J} = 6\ рад/с$ **.**

3.104. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{pE/J} = 239\ Гц$. **3.105.** $F = p\dfrac{dE}{dx} = 0{,}2\ мН$.

3.106. $\dfrac{dE}{dr} = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = 1{,}8\ МВ/м^2$; $F = \dfrac{Qp}{2\pi\varepsilon_0 r^3} = 9\ мкН$.

3.107. $\dfrac{dE}{dr} = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r^2} = 0{,}9\ МВ/м^2$; $F = p\dfrac{dE}{dr} = 3{,}6\ мкН$.

3.108. 1) 88,5 пФ; 2) $D_1 = D_2 = 2{,}66\ мкКл/м^2$; $E_1 = 42{,}8\ кВ/м$; $E_2 = 100\ кВ/м$; $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2 = 300\ В$. **3.109.** $q = \dfrac{mgd}{2U} = 4{,}8\cdot10^{-18}\ Кл$.

3.110. $C = \varepsilon_0 S\left(\dfrac{d_1}{\varepsilon_1} + \dfrac{d_2}{\varepsilon_2} + \dfrac{d-(d_1+d_2)}{\varepsilon_3}\right)^{-1} = 35{,}4\ пФ$.

3.111. $\Delta U = (\sigma/\varepsilon_0)(d_2 - d_1) = 22{,}6\ В$. **3.112.** 0,5 *см*. **3.113.** 2,5 *мкФ*.

3.114. $C_{сф} = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2 R_1R_2R_3}{(R_2-R_1)\varepsilon_2R_3 + (R_3-R_2)\varepsilon_1R_1}$. **3.115.** 2,32 *мм*.

3.116. $C_2 = \frac{U - U_1}{U_2 - U_1} C_1 = 0{,}32\ мкФ$. **3.117.** $C = \varepsilon_0 S \left(\frac{d}{\varepsilon_1} + \frac{d}{\varepsilon_2} + \frac{d}{\varepsilon_3} \right)^{-1}$.

3.118. $C = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ – ємність погонного метра конденсатора.

3.119. $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_2 R_1}{R_2 - R_1} = 55{,}13\ nФ$.**3.120.** $C_{бат} = 4C/3$.

3.121. $\Delta Q = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}(U_1 - U_2) = 36\ мкКл$. **3.122.** $C = \frac{4\pi\varepsilon_0 (b - 2a)a}{b - 3a}$; $C = 4\pi\varepsilon_0 a$. **3.123.** 15 *Кл*. **3.124.** 6,1 *МА/м*^{2}. **3.125.** 2,58 *мОм*. **3.126.** 18,8 *Ом*. **3.127.** 1,48%. **3.128.** 2,9 *Ом*. **3.129.** 2 *А*. **3.130.** Чотири паралельно з'єднаних групи по три послідовно з'єднаних елемента в кожній; 7,5 *А*. **3.131.** а) $I = 3\ A, U = 0$, б) $I = 0, U = 1{,}2\ B$. **3.132.** 6,4 *А*; 5,8 *А*; 0,6 *А*. **3.133.** 0,63 *А*.

3.134. $I_3 = 0, U_3 = 0$. **3.135.** 3 *А*; 4 *А*; 1 *А*. **3.136.** 0,45 *А*; 0,05 *А*; 0,5 *А*. **3.137.** 3,6 *В*. **3.138.** 0,5 *Ом*, 2 *Вт*. **3.139.** 45 *хв*, 10 *хв*.

3.140. $Q = \frac{I_{\max}^2 r}{\tau^2} \int_0^\tau t^2 dt = \frac{1}{3} I_{\max}^2 r\tau = 100\ кДж$. **3.141.** 1 *кДж*.

3.142. $q = 1/2\sqrt{3Q\tau / R} = 20\ Кл$. **3.143.** $< I >= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3Q}{R\tau}} = 10\ A$.

3.144. $\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{3Q}{R\tau}} = 1\ A/c$. **3.145.** 0,05 *мм/с*. **3.146.** 0,1 *мм/с*. **3.147.** 0,05 *В/м*. **3.148.** 0,1 *В/м*. **3.149.** 65,4. **3.150.** 0,83 *г*. **3.151.** 54 *мкм*. **3.152.** 6,6 *мг*. **3.153.** $9{,}3 \cdot 10^{17}$. **3.154.** $1{,}52 \cdot 10^{14}\ м^{-3}$. **3.155.** $5 \cdot 10^7\ м^{-3}c^{-1}$. **3.156.** $1{,}6 \cdot 10^{-9}\ A$. **3.157.** $2 \cdot 10^9\ м^{-3}c^{-1}$. **3.158.** 126 *мкТл*. **3.159.** 51. **3.160.** 15,4 *А/м*.

3.161. $B = \frac{\mu_0 I}{2r^3} R^2 = 62{,}8\ мкТл$. **3.162.** $I = \frac{2BR}{\mu_0 \sin^3 \beta} = 305\ A$.

3.163. 200 *мкТл*. **3.164.** 132 *А/м*. **3.165.** 200 *А/м*.

3.166. $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{I_2^2}{r_2^2} - \frac{I_1 I_2}{r_1^2 r_2^2}\left(r_1^2 + r_2^2 - d^2\right)} = 21{,}2\ мкТл$.

3.167. $B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_1 I_2} = 87{,}2\ мкТл$.

3.168. $B = \frac{\mu_0}{\pi d}\sqrt{I_1^2 + I_2^2} = 400\ мкТл$. **3.169.** 40 *мкТл*.

3.170. $B = \frac{\pi + 4}{8\pi}\frac{\mu_0 I}{r} = 357\ мкТл$. **3.171.** $B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}(\sqrt{2} + 1) = 482\ мкТл$.

3.172. $\pi / 6$. **3.173.** $F = \mu_0 I^2 /(4\pi) = 0{,}1\ H$. **3.174.** $F = 2B / R = 0{,}1\ H$.

3.175. 7 A. **3.176.** $F=\mu_0 I^2 r/d=12{,}6\,мН$. **3.177.** $9{,}4\cdot10^{-24}\,А\cdot м^2$; $9{,}4\cdot10^{-25}\,Н\cdot м$. **3.178.** $\dfrac{p_m}{L}=\dfrac{e}{2m}=87{,}9\,ГКл/кг$.

3.179. 1) $p_m=\pi qnR^2=3{,}14\,нА\cdot м^2$; 2) $500\,нКл/кг$. **3.180.** 1) $62{,}8\,нА\cdot м^2$; 2) $1\,мкКл/кг$. **3.181.** 1) $1\,нА\cdot м^2$; 2) $1{,}5\,нКл/кг$. **3.182.** 64 *фН*. **3.183.** 1,38 *м*. **3.184.** 0,61 *Мм/с*. **3.185.** $2{,}4\cdot10^{-22}\,кг\cdot м/с$.

3.186. $L=B|e|R^2=3{,}2\cdot10^{-25}\,кг\cdot м^2/с$.

3.187. $T=\dfrac{B^2r^2e^2}{2m}=0{,}563\,фДж\,(3{,}52кеВ)$. **3.188.** $\dfrac{R_1}{R_2}=\sqrt{\dfrac{T_1}{T_2}}=\sqrt{2}$.

3.189. 12 *мм*. **3.190.** 175 *ГКл/кг*; 26,5 *Мм/с*. **3.191.** $F=2T/R=0{,}32\,пН$.

3.192. $F=\dfrac{B^2e^2r}{m}=1{,}4\,пН$. **3.193.** $\upsilon=\dfrac{B|e|}{m}\sqrt{R_2+\dfrac{h^2}{4\pi^2}}=1{,}04\,Мм/с$.

3.194. 3,97 *нс*; 25 *Мм/с*. **3.195.** $T=\dfrac{\left(4\pi^2R^2+h^2\right)B^2e^2}{8\pi^2m}=580\,фДж$.

3.196. $\upsilon=E/B=1\,Мм/с$. **3.197.** $\dfrac{e}{m}=\dfrac{E^2}{2UB^2}=48\,МКл/кг$.

3.198. $\Delta t=BR/E=10\,мкс$. **3.199.** 80 *мкДж*. **3.200.** 3 *мДж*. **3.201.** 2,51 *мДж*, 0.

3.202. 0,3 *Тл*. **3.203.** $F=\dfrac{B^2l^2\upsilon}{R}=1\,Н$. **3.204.** $E_{\max}=2\pi nNBS=132\,В$.

3.205. $Q=\dfrac{\pi Br^2}{R}\cos\alpha=10\,мКл$. **3.206.** 3,14 *мКл*.

3.207. $Q=\dfrac{mB}{16\rho D}=41{,}4\,мКл$ (D – густина міді). **3.208.** 6,28 *Гн*. **3.209.** 8 витків на 1 *см*. **3.210.** 10^3.

ДОДАТОК

Таблиця 1. **Фундаментальні фізичні константи**

Константа	Позначення	Числове значення
Швидкість світла	c	$3\cdot10^{8}$ *м/с*
Гравітаційна стала	G	$6{,}67\cdot10^{-11}$ *Н·м²·кг⁻²*
Стала Авогадро	N_A	$6{,}022\cdot10^{23}$ *моль*$^{-1}$
Стала Больцмана	k	$1{,}38\cdot10^{-23}$ *Дж/К*
Універсальна газова стала	R	8,314 *Дж*/(*моль·К*)
Стандартний об’єм газу	V_m	$22{,}42\cdot10^{-3}$ *м*^{3}/*моль*
Елементарний заряд	e	$1{,}6\cdot10^{-19}$ *Кл*
Маса спокою електрона	m_e	$9{,}11\cdot10^{-31}$ *кг*
Питомий заряд електрона	e/m_e	$1{,}76\cdot10^{11}$ *Кл/кг*
Стала Фарадея	F	$9{,}65\cdot10^{4}$ *Кл/моль*
Атомна одиниця маси	*а.о.м.*	$1{,}66\cdot10^{-27}$ *кг*
Електрична стала	ε_0	$8{,}85\cdot10^{-12}$ *Ф/м*
Магнітна стала	μ_0	$4\pi\cdot10^{-7}$ *Гн/м*
Стала Планка	h	$6{,}62\cdot10^{-34}$ *Дж·с*

Таблиця 2. **Деякі астрономічні постійні**

Середній радіус Землі	6370 *км*
Середня густина Землі	5500 *кг/м*^{3}
Маса Землі	$5{,}96\cdot10^{24}$ *кг*
Радіус Сонця	$6{,}95\cdot10^{8}$ *м*
Маса Сонця	$1{,}97\cdot10^{30}$ *кг*
Радіус Місяця	$1{,}74\cdot10^{6}$ *м*
Маса Місяця	$7{,}3\cdot10^{22}$ *кг*
Середня відстань між центрами Місяця і Землі	$3{,}84\cdot10^{8}$ *м*
Середня відстань між центрами Сонця і Землі	$1{,}5\cdot10^{11}$ *м*
Період обертання Місяця навколо Землі	27 *діб* 7 *год* 43 *хв*
Середня густина Сонця	1400 *кг/м*^{3}

Таблиця 3. **Густина речовин ρ, $кг/м^3$**

Гази за нормальних умов (T=273,15 K, P=1,01·10^5 $Па$)

Азот	1,250	Кисень	1,429
Водень	0,089	Метан	0,717
Вуглекислий газ	1,977	Неон	0,900
Гелій	0,178	Повітря	1,293

Рідини, (ρ, 10^3 $кг/м^3$)

Бензол (t=20 °C)	879	Гліцерин (t=0 °C)	1260
Вода (t=4 °C)	1000	Етанол (t=0 °C)	789
Гас (t=0 °C)	800	Ртуть (t=0 °C)	13596

Тверді тіла при 293 K (ρ, 10^3 $кг/м^3$)

Алюміній	2,69	Олово лите	7,23
Залізо	7,86	Сталь лита	7,7 - 8,0
Латунь	8,3 - 8,7	Свинець	11,22 - 11,44
Лід (t=0 °C)	0,91	Срібло	10,42 - 10,57
Мідь	8,88 - 8,96	Цинк	6,86 - 7,24

Таблиця 4. **Деякі фізичні характеристики рідин**

Коефіцієнт поверхневого натягу на межі “рідина – повітря” σ при 20 °C, 10^{-3} $Н/м$; коефіцієнт внутрішнього тертя η при 20 °C, 10^{-3} $Па{\cdot}с$; коефіцієнт об’ємного розширення β при 20 °C, 10^{-6} K^{-1}; точка кипіння $t_к$ при P=1,01·10^5 $Па$; питома теплота пароутворення при точках кипіння r, 10^5 $Дж/кг$; питома теплоємність c при 20 °C, $Вт/(м{\cdot}K)$.

Рідина	σ	η	β	$t_к$	r	c
Вода	72,6	1,005	21	100,0	22,6	4190
Гліцерин	66	1480	50	290	-	2390
Ртуть	500	1590	18	356,7	2,85	138
Спирт	22,0	1,2	110	78,3	8,57	2470

Таблиця 5. **Властивості деяких твердих тіл**

Густина ρ, *кг/м*^{3}, питома теплоємність $c^{пит}$ при 20 ^{O}C, *Дж/кг·град*; температура плавлення, ^{O}C; питома теплота плавлення λ, 10^5 *Дж/кг*; коефіцієнт лінійного теплового розширення α при 20 ^{O}C, 10^{-5} K^{-1}.

Речовина	ρ	$c^{пит}$	$t_{пл}$	λ	α
Алюміній	2600	896	659	3,22	2,3
Залізо	7900	500	1530	2,72	1,2
Лід	900	2100	0	3,35	–
Мідь	8600	395	1100	1,76	1,6
Срібло	10500	234	960	0,88	1,9

Таблиця 6. **Пружні властивості твердих тіл**
Модуль Юнга E, 10^{10}*Па*; модуль зсуву G, 10^{10}*Па*; коефіцієнт Пуассона μ; межа міцності σ_μ, 10^8*Па*.

Матеріал	E	G	μ	σ_μ
Алюміній	6,1 - 7,4	2,2 - 2,6	0,33	0,98 - 3,90
Залізо	20 - 22	6,9 - 8,3	0,28	3,90 - 5,90
Сталь	20 - 22	7,8 - 8,1	0,28	4,9 - 15,7
Чавун	7,4 - 17,6	4,9	0,23 - 0,27	1,17 - 1,27
Латунь	7,8 - 9,8	2,6 - 3,6	0,3 - 0,4	0,98 - 4,90
Мідь	10 - 13	3,8 - 4,7	0,31 - 0,40	1,56 - 4,41
Свинець	1,5 - 1,7	0,54	0,44	0,0196

Таблиця 7. **Постійні Ван–дер–Ваальса для деяких речовин**

Речовина	a, *Н·м*^{3}*/моль*	b, *см*^{3}*/моль*
Азот	0,135	38,6
Вода	0,545	30,4
Водень	0,024	6,6
Гелій	0,003	23,6
Кисень	0,136	31,7
Вуглекислий газ	0,36	42,8

Таблиця 8. **Діелектрична проникність ε**

Вода	81
Олива (трансформаторна)	2,2
Парафін	2,0
Слюда	7,0
Скло	7,0
Фарфор	5,0
Ебоніт	2,0

Таблиця 9. **Питомий опір ρ (при $20°C$), $нОм \cdot м$ і температурний коефіцієнт опору $\alpha, °C^{-1}$.**

Речовина	ρ	α
Алюміній	26	$3{,}6 \cdot 10^{-3}$
Залізо	98	$6{,}2 \cdot 10^{-3}$
Графіт	$3{,}9 \cdot 10^{3}$	$-0{,}8 \cdot 10^{-3}$
Мідь	17	$4{,}2 \cdot 10^{-3}$

Таблиця 10. **Множники і приставки для утворення десяткових кратних і дольних одиниць та їх найменувань**

Множник	Префікс	Позначення	Множник	Префікс	Позначення
10^{18}	екса	Е	10^{-1}	деци	д
10^{15}	пета	П	10^{-2}	санти	с
10^{12}	тера	Т	10^{-3}	мілі	м
10^{9}	гіга	Г	10^{-6}	мікро	мк
10^{6}	мега	М	10^{-9}	нано	н
10^{3}	кіло	к	10^{-12}	піко	п
10^{2}	гекто	г	10^{-15}	фемто	ф
10^{1}	дека	да	10^{-18}	атто	а

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Задачі з механіки та методика їх розв'язування / Укл.: Курек І.Г. – Чернівці, ЧДУ, 1998. – 120 с.
2. Задачі з молекулярної фізики та методика їх розв'язування / Укладачі: Курек І. Г., Лотоцький В. Б. – Чернівці : Рута, 2003. – 128 с.
3. Чертов А. Г. Задачник по физике / Чертов А. Г., Воробьев А. А. – М. : Высшая школа, 1981. – 496 с., ил.
4. Дубровский И. М. Справочник по физике / Дубровский И. М., Егоров Б. В., Рябошапка К. П. – К. : Наукова думка, 1986. – 560 с.
5. Иродов И.Е. Основные законы механики / Иродов И. Е. – М. : Высшая школа, 1997. – 240 с.
6. Иродов И.Е. Основные законы электромагнетизма / Иродов И. Е. – М. : Высшая школа, 1991. – 288 с.
7. Чертов А. Г. Физические величины / Чертов А. Г. – М. : Высшая школа, 1990. – 335 с.

ЗМІСТ

Навчально-методичне видання

Задачі з фізики та методика їх розв'язування

Укладачі: ***Курек Ігор Геннадійович***
Курек Єлена Ігорівна
Олійнич – Лисюк Алла Василівна
Струк Ярослав Михайлович