1.1. Лінійні системи, методи їх дослідження та характеристики

Довільна динамічна система з математичної точки зору здійснює перетворення функцій деяких незалежних змінних, що описують вхідний сигнал, в інші функції, що характеризують вихідний сигнал. Якщо система одновимірна, то вхідні і вихідні сигнали описуються функцією одної незалежної змінної, а для багатовимірних сигналів описування останніх здійснюється з допомогою функцій, що залежать від декількох змінних.

Одновимірна динамічна система умовно може бути зображена у вигляді елемента (прямокутника), на вхід якого подається сигнал $g(x)$, а на виході спостерігається сигнал $y(x)$:

Рис. 5. Умова зображення одновимірної динамічної лінійної системи

У системі (окремому її вузлі) здійснюється перетворення однієї функції в іншу згідно з рівняннями:

$$y(x) = F\{g(x)\}. \tag{1}$$

$$F_y\{y(x)\} = F_g\{g(x)\} \tag{2}$$

де F, F_y, F_g - оператори, що визначають закон перетворення відповідних функцій.

Нехай на вхід подається одночасно декілька $g_i(x)$ сигналів. Якщо при цьому сигнал на виході від сукупності вхідних сигналів можна представити сумою вихідних сигналів від кожного вхідного сигналу взятого окремо, то така система буде називатись лінійною. Ця обставина є фундаментальною властивістю лінійної системи.

Приклади лінійних і нелінійних систем. Лінійні системи: електричне коло з параметрами, незалежними від напруги і струмів, прошарок простору та ін. Нелінійна система: фотографічна плівка, квадратичний детектор тощо.

$$F_y\{y(x)\} = \sum_{i=1}^{n} F_y\{y_i(x)\} = \sum_{i=1}^{n} F_g\{g_i(x)\}, \tag{3}$$

n - число всіх сигналів.

Здебільшого оператором F при дослідженні динамічних систем є зважені суми довільних відповідних сигналів від незалежних змінних x, тобто

$$F = a_n \frac{d^{(n)}}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}} + ... + a_1 \frac{d}{dx} + a_0. \tag{4}$$

Використовуючи позначення $p = \frac{d}{dx}$ маємо

$$F = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p^n + a_0. \tag{5}$$

Із врахуванням (5) закон зміни вихідного сигналу запишеться так:

$$\begin{aligned} F_y\{y(x)\} &= a_n p^n y(x) + a_{n-1} p^{n-1} y(x) + ... + a_1 p^n y(x) + a_0 y(x) = \\ &= (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p^n + a_0) y(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Для вихідного сигналу оператор F_g може бути записаний аналогічним чином (із іншими коефіцієнтами).

Для лінійних систем коефіцієнти $a_n ... a_0$ не залежать від рівня самого сигналу.

Для дослідження динамічних систем у теорії систем використовуються кілька характерних вхідних сигналів $g(x)$ (відгуком (реакцією) системи на які є $y(x)$), що будуть повністю визначати властивості системи при роботі з довільними сигналами. Ці сигнали такі: *імпульсний, одиничний, сходинковий і гармонійний.*

Імпульсний сигнал описується δ-функцією Дірака і володіє такими властивостями:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} \infty & при \quad x = x_0; \\ 0 & при \quad x \neq x_0; \end{cases} \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1, \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \delta(x - x_0) dx = \varphi(x_0), \quad \delta(ax) = \delta(x) / a. \tag{9}$$

Вихідний сигнал $y(x)$, при поданні на вхід лінійної системи імпульсного сигналу $\delta(x-x_0)=g(x)$ називається *функцією ваги* та позначається $\varpi(x)=y(x)$.

Дуже часто, для спрощення аналізу, початок координат поміщають у точку $x_0=0$.

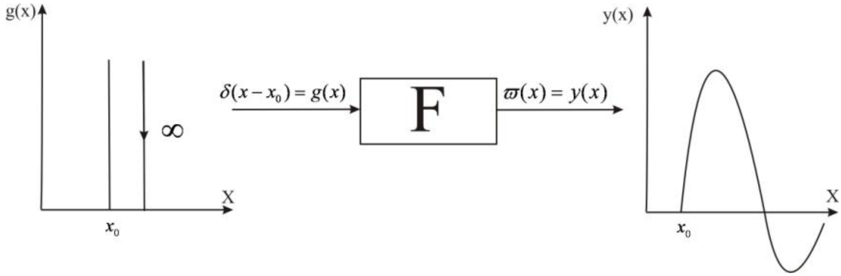

Рис. 6. Схема, що демонструє реакцію лінійної системи на імпульсний сигнал

Одиничний сигнал позначається $\sigma(x-x_0)$ і має такі властивості:

$$\sigma(x-x_0)=\begin{cases}1 & при \quad x\geq x_0;\\ 0 & при \quad x<x_0;\end{cases} \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\sigma(x-x_0)dx=\int_{x_0}^{x}\varphi(x)dx, \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\sigma(x-x_0)=\delta(x-x_0), \tag{12}$$

$$\sigma(x-x_0)=\int_{-\infty}^{x}\delta(x-x_0)dx\,. \tag{13}$$

Функція $y(x)=h(x)$, що визначає сигнал на виході лінійної системи, коли на її вхід поданий сигнал $g(x)=\sigma(x-x_0)$, *називається перехідною функцією системи*.

Між функцією ваги $\varpi(x)$ і перехідною функцією $h(x)$ існує однозначний зв'язок, що випливає із властивостей лінійності системи:

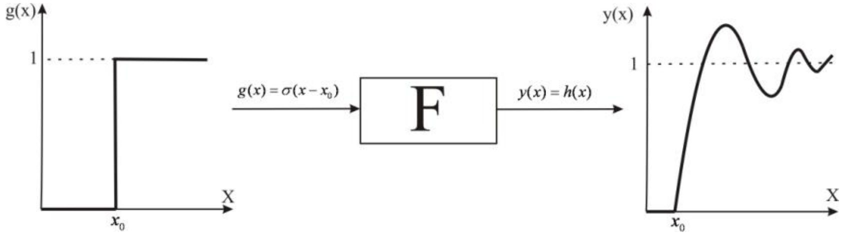

Рис. 7. Схема, що демонструє реакцію лінійної системи на сходинковий сигнал

$$\varpi(x)=\frac{dh(x)}{dx}, \quad h(x)=\int_{-\infty}^{x}\varpi(x)dx. \tag{14}$$

Якщо відомі функції $\varpi(x)$ та $h(x)$, то можна знайти реакцію лінійної системи $y(x)$ на довільний вхідний сигнал із допомогою *інтеграла згортки*:

$$y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varpi(x-\xi)g(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\varpi(x^{'})g(x-x^{'})dx^{'}. \tag{15}$$

1.1.1. Фізичне обґрунтування рівняння згортки

Розглянемо довільний вхідний сигнал $g(t)$. Ми можемо розкласти довільний вхідний сигнал $g(t)$ у послідовність імпульсів довжиною Δt та амплітудою, рівною амплітуді даного сигналу в розглянуті моменти часу.

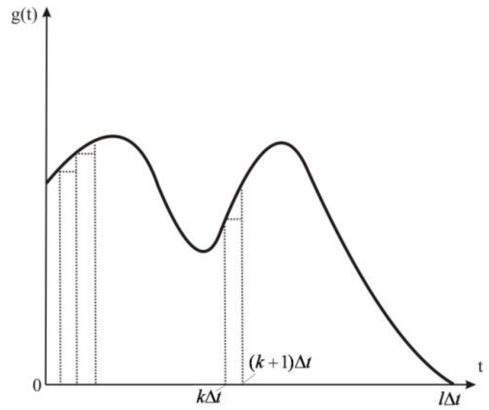

Рис. 8. Розклад довільного вхідного сигналу $g(t)$ у послідовність імпульсів

Нехай $g(0)$, $g(\Delta t)$, $g(2\Delta t)$ … $g(k\Delta t)$ … - значення $g(t)$ в моменти 0, Δt, $2\Delta t$ … $k\Delta t$. Позначимо через $\varpi_1(t)$ відгук системи на імпульс довжиною Δt і амплітудою $\frac{1}{\Delta t}$. Тоді величина $\varpi_1(t)\Delta t$ буде являти собою відгук системи на імпульс довжиною Δt одиничної амплітуди.

Тому відгук системи y_0 на імпульс з амплітудою $g(0)$ у момент часу $t=0$ дорівнюватиме $y_0 = g(0)\varpi_1(t)\Delta t$.

Аналогічно відгук системи $y_{\Delta t}$ на імпульс з амплітудою $g(\Delta t)$ у момент $t=\Delta t$ буде $y_{\Delta t} = g(\Delta t)\varpi_1(t-\Delta t)\Delta t$.

Продовжуючи підрахунок відліків системи для імпульсів у моменти часу $k\Delta t$ ($k=0,1,2...l$), отримаємо такий ланцюг рівностей:

$$\begin{cases} y_0 = g(0)\varpi_1(t)\Delta t \\ y_{\Delta t} = g(\Delta t)\varpi_1(t-\Delta t)\Delta t \\ y_{2\Delta t} = g(2\Delta t)\varpi_1(t-2\Delta t)\Delta t \\ ... \\ y_{k\Delta t} = g(k\Delta t)\varpi_1(t-k\Delta t)\Delta t. \end{cases}$$

Повний вихідний сигнал $y(t)$ у довільний момент часу t від усієї сукупності вхідних сигналів унаслідок лінійності системи визначиться сумою:

$$y(t)=\sum_{k=0}^{l} g(k\Delta t)\varpi_1(t-k\Delta t)\Delta t. \qquad \text{(I)}$$

Зауважимо, що згідно з принципом причинності відгук фізичної системи $\varpi_1(t)$, повинен дорівнювати нулю для $t<0$, тому $\varpi_1(t-k\Delta t)=0$, коли $t<k\Delta t$ (результат наступає після дії). Тому рівняння (I) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} y(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} g(k\Delta t)\varpi_1(t-k\Delta t)\Delta t, \\ y(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} g(k\Delta t)\varpi_1(t-k\Delta t)\Delta t. \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

Очевидно, що послідовність $g(k\Delta t)$ прямує до функції $g(t)$, відгук $\varpi_1(t)$ - до імпульсного відгуку системи при $\Delta t\to 0$, тобто $\varpi_1(t)\to\varpi(t)$. При $\Delta t\to 0$ суми (II) можна замінити інтегралами, попередньо вводячи змінні $k\Delta t=t^{'}$ та $\Delta t=dt^{'}$.

$$\begin{cases} y(t)=\int\limits_{0}^{\infty} g(t^{'})\varpi(t-t^{'})dt^{'} \\ y(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(t^{'})\varpi(t-t^{'})dt \\ y(t)=\int\limits_{0}^{t} g(t^{'})\varpi(t-t^{'})dt. \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

Вирази (III) носять назву рівняння згортки. Скорочений запис $y(t)=g(t)*\varpi(t)$.

Розглянемо проходження через лінійну систему *гармонійного сигналу*. Такий розгляд важливий з точки зору випромінювання динамічних характеристик системи. Сигнал $g(x)=g_m\sin(\omega_x x-\theta_g)$ називається гармонійним сигналом, де g_m - амплітуда, ω_x - частота,

θ_g - фаза. Оскільки в даному випадку для значення частоти ω_x амплітуда та фаза можуть мати різні значення, то вхідний гармонійний описується функцією

$$g(x) = g_m(\omega_x)\sin[(\omega_x x - \theta_g(\omega_x)]. \qquad (16)$$

В теорії сигналів найбільше поширення отримала комплексна форма представлення сигналу, яка значно спрощує проведення підрахунків:

$$g(x) = G(i\omega_x)\exp(i\omega_x x). \qquad (17)$$

$G(i\omega_x) = g_m(\omega_x)\exp[-i\theta_g(\omega_x)]$ - комплексна амплітуда, що залежить від амплітуди та фази вхідного сигналу. У відповідності до формули Ейлера, комплексна частина сигналу (17) у точності відповідає гармонійному сигналу (16):

$$g_m(\omega_x)\exp\{i[(\omega_x x - \theta_g(\omega_x)]\} =$$

$$= g_m(\omega_x)\{\cos[(\omega_x x - \theta_g(\omega_x)] + i\sin[(\omega_x x - \theta_g(\omega_x)]\}.$$

Якщо на вхід лінійної системи подати гармонійний сигнал (16), то після завершення перехідних процесів у встановленому режимі сигнал на виході також буде гармонійним із тою ж частотою, проте з іншими амплітудними та фазовими значеннями:

$y(x) = y_m(\omega_x)\sin(\omega_x x - \theta_y(\omega_x))$ чи в комплексній формі:

$$y(x) = y_m(\omega_x)\exp\{i[(\omega_x x - \theta_y(\omega_x)]\} = Y(i\omega_x)\exp(i\omega_x x). \qquad (18)$$

Комплексна амплітуда $Y(i\omega_x)$ характеризує одночасно амплітуду та фазу вхідного сигналу.

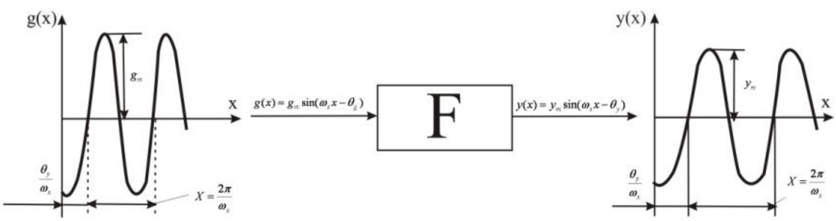

Рис. 9. Схема, що демонструє реакцію лінійної системи на гармонійний сигнал

Наведена вище схема демонструє реакцію лінійної системи на вхідний гармонійний сигнал. Зміну динамічних характеристик лінійної системи у встановленому режимі при поданні на її вхід гармонійного сигналу в залежності від частоти ω_x можна визначити комплексною функцією $W(i\omega_x)$:

$$W(i\omega_x) = \frac{y(x)}{g(x)} = \frac{Y(i\omega_x)\exp(i\omega_x x)}{G(i\omega_x)\exp(i\omega_x x)} =$$
$$= \frac{y_m(\omega_x)\exp[-i\theta_y(\omega_x)]}{g_m(\omega_x)\exp[-i\theta_g(\omega_x)]} = \frac{y_m(\omega_x)}{g_m(\omega_x)}\exp(i\theta(\omega_x)], \tag{19}$$

де $\theta(\omega_x) = \theta_g(\omega_x) - \theta_y(\omega_x)$ - різниця фаз між вхідним і вихідним сигналами для заданої частоти.

Функція $W(i\omega_x)$ називається *амплітудно-фазовою частотною передаточною функцією*.

Знайдемо вираз для функції $W(i\omega_x)$, коли в динаміці зв'язок між вхідним вхідним і вихідними сигналами визначається формулою $F_y\{y(x)\} = F_g\{g(x)\}$, а самі оператори F_y та F_g є операторами диференціювання у вигляді (4).

Тоді для вхідного гармонійного сигналу $g(x) = g_m\exp(i\omega_x x)$ маємо:

$$[a_n\frac{d^{(n)}}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{d}{dx} + a_0]y_m\exp(i\theta)\exp(i\omega_x x) =$$
$$= [b_m\frac{d^{(m)}}{dx^m} + b_{m-1}\frac{d^{(m-1)}}{dx^{m-1}} + \ldots + b_1\frac{d}{dx} + b_0]g_m\exp(i\omega_x x). \tag{20}$$

Проводячи диференціювання та скорочуючи на багаточлен $\exp(i\omega_x x)$, отримаємо:

$$[(i\omega_x)^n a_n + (i\omega_x)^{n-1}a_{n-1} + \ldots + (i\omega_x)a_1 + a_0]y_m\exp(i\theta) =$$
$$= [(i\omega_x)^m b_m + (i\omega_x)^{m-1}b_{m-1} + \ldots + (i\omega_x)b_1 + b_0]g_m. \tag{21}$$

Враховуючи, що $Y(i\omega_x) = y_m\exp(i\theta)$ та $G(i\omega_x) = g_m$, відповідно до (19) $Y(i\omega_x) = W(i\omega_x)G(i\omega_x)$, будемо мати:

$$W(i\omega_x)=\frac{(i\omega_x)^m b_m+(i\omega_x)^{m-1}b_{m-1}+...+(i\omega_x)b_1+b_0}{(i\omega_x)^n a_n+(i\omega_x)^{n-1}a_{n-1}+...+(i\omega_x)a_1+a_0}. \qquad (22)$$

Оскільки згідно з (19) та (20) функція $W(i\omega_x)$ комплексна, то її можна зобразити у вигляді

$$W(i\omega_x)=A(\omega_x)\exp[i\theta(\omega_x)]=U(\omega_x)+iV(\omega_x), \qquad (23)$$

де $A(\omega_x)$ називається *амплітудо-частотною характеристикою* лінійної системи, а функція $\theta(\omega_x)$ - *фазово-частотною характеристикою* лінійної системи. Відповідно до (19) та (23) ці характеристики будуть такими:

$$A(\omega_x)=\frac{y_m(\omega_x)}{g_m(\omega_x)}=[U^2(\omega_x)+V^2(\omega_x)]^{1/2}, \qquad (24)$$

$$\theta(\omega_x)=arctg\,\frac{V(\omega_x)}{U(\omega_x)}. \qquad (25)$$

Введення характеристики повністю визначає динамічні властивості лінійної системи. Значення амплітудно-фазової частотної передаточної функції $W(i\omega_x)$ та функції ваги $\vartheta(x)$ дає можливість знайти сигнал на виході лінійної системи по вхідному сигналу довільної форми, а не тільки гармонійному. Отримаємо цю залежність, застосувавши до співвідношення (15) $y(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(x')g(x-x')dx'$ перетворення Фур'є:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}y(x)\exp(-i\omega_x x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega(x')g(x-x')dx']\exp(-i\omega_x x)dx. \qquad (26)$$

Права частина виразу (26) являє собою Фур'є-перетворення від згортки двох функцій $\varpi(x)$ та $g(x)$. Згідно з властивостями такого перетворення, воно буде дорівнювати добутку Фур'є-перетворенню цих функцій:

$$Y(i\omega_x)=W(i\omega_x)G(i\omega_x), \qquad (27)$$

де:

$$
\left.\begin{aligned}
Y(i\omega_x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(x)\exp(-i\omega_x x)dx,\\
G(i\omega_x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\exp(-i\omega_x x)dx.
\end{aligned}\right. \qquad (28)
$$

спектри Фур'є вихідного та вхідного сигналів.

$$
W(i\omega_x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varpi(x)\exp(-i\omega_x x)dx. \qquad (29)
$$

спектр Фур'є функції ваги системи.

Отже, для негармонійного сигналу амплітудо-фазова частотна передаточна функція $W(i\omega_x)$ містить багато спектральних гармонік і являє собою Фур'є-перетворення від функції $\varpi(x)$. Щодо змісту рівняння (27) функція $W(i\omega_x)$ є лінійним фільтром, що пропускає вхідні сигнали різних частот (спектральних гармонік) і тим самим характеризує динамічні властивості лінійної системи. Якщо знайдений комплексний спектр $Y(i\omega_x)$ вихідного сигналу згідно з (27) та (28), то перехід до самого сигналу $y(x)$ здійснюється на основі зворотнього Фур'є перетворення.

1.1.2. Сигнали з кількома змінними

При роботі ОЕС вхідні та вихідні сигнали дуже часто залежать від кількох незалежних параметрів. Дослідження динаміки таких лінійних систем здійснюється з допомогою функцій, уведених вище, але залежних від кількох змінних.

Нехай вхідний g та вихідний сигнали є функціями n незалежних змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. Сукупність таких змінних позначимо вектором $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Відповідні сигнали запишуться у вигляді:

$$
\left.\begin{aligned}
g &= g(x_1, x_2, ..., x_n) = g(\vec{X})\\
y &= y(x_1, x_2, ..., x_n) = y(\vec{X})
\end{aligned}\right\}. \qquad (30)
$$

Уведемо n - вимірну δ -функцію:

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)=\begin{cases}\infty & при \quad \vec{x}=\vec{x}_0, \quad (x_1=x_{10}, x_2=x_{20}, ..., x_n=x_{n0});\\ 0 & при \quad \vec{x}\neq\vec{x}_0, \quad (x_1\neq x_{10}, x_2\neq x_{20}, ..., x_n\neq x_{n0}).\end{cases} \quad (31)$$

$$\int\limits_{\substack{-\infty\\(n)}}^{\infty}\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)d\vec{x}=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int ...\int\limits_{-\infty}^{\infty}}_{n}\delta(x_1-x_{10}, x_2-x_{20}, ..., x_n-x_{n0})dx_1dx_2...dx_n=1; \quad (32)$$

$$\int\limits_{\substack{-\infty\\(n)}}^{\infty}\varphi(\vec{x})\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)d\vec{x}=\varphi(\vec{x}_0); \quad (33)$$

$$\delta(a_1x_1, a_2x_2, ..., a_nx_n)=\frac{1}{a_1a_2...a_n}\delta(x_1, x_2, ..., x_n). \quad (34)$$

Будемо враховувати, що при поданні на вхід лінійної системи сигналу $g(\vec{x})=\delta(\vec{x}-\vec{x}_0)$ відгук системи (сигнал на виході) буде $y(\vec{x})=\varpi(\vec{x})=\varpi(x_1, x_2, ..., x_n)$. Функція $\varpi(\vec{x})$ називається n-вимірною функцією ваги лінійної системи.

Сигнал на виході такої системи визначається через вхідний сигнал та функцією ваги n-вимірним інтегралом згортки:

$$\begin{aligned} y(\vec{x})&=\int\limits_{\substack{-\infty\\(n)}}^{\infty}\varpi(\vec{x}^{'})g(\vec{x}-\vec{x}^{'})d\vec{x}^{'}=\\ &=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int ...\int\limits_{-\infty}^{\infty}}_{n}\varpi(\vec{x}_1^{'}, \vec{x}_2^{'}, ..., \vec{x}_n^{'})\times g(\vec{x}_1-\vec{x}_1^{'}, \vec{x}_2-\vec{x}_2^{'}, ..., \vec{x}_n-\vec{x}_n^{'})dx_1^{'}dx_2^{'}...dx_n^{'}; \end{aligned} \quad (35)$$

Частотний зв'язок між n-вимірними спектрами вихідного $Y(i\vec{\omega}_x)$ та вхідного $G(i\vec{\omega}_x)$ сигналів визначається виразом:

$$Y(i\vec{\omega}_x)=W(i\vec{\omega}_x)G(i\vec{\omega}_x), \quad (36)$$

де $\vec{\omega}_x$ - n-вимірна кругова частота, що вводиться при використанні n-вимірного перетворення Фур’є. Нехай задана функція $f(\vec{x})$. Її n-вимірний спектр визначається n-вимірним інтегралом Фур’є:

$$F(i\vec{\omega}_x) = F(i\omega_{x_1}, i\omega_{x_2}, ..., i\omega_{x_n}) = \int\limits_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{\infty} f(\vec{x}) \exp[-i\vec{\omega}_x \vec{x}] d\vec{x} =$$

$$= \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int ... \int\limits_{-\infty}^{\infty}}_{n} f(x_1, x_2, ..., x_n) \times \exp[-i(\omega_{x_1} x_1, \omega_{x_2} x_2, ..., \omega_{x_n} x_n)] dx_1 dx_2 ... dx_n; \quad (37)$$

Відповідно до (37), спектри вхідного та вихідного сигналів визначаються так:

$$G(i\vec{\omega}_x) = \int\limits_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{\infty} g(\vec{x}) \exp(-i\vec{\omega}_x \vec{x}) d\vec{x}; \quad (38)$$

$$Y(i\vec{\omega}_x) = \int\limits_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{\infty} y(\vec{x}) \exp(-i\vec{\omega}_x \vec{x}) d\vec{x}. \quad (39)$$

При цьому n-вимірна амплітудо-фазова частотна передаточна функція визначається через функцію ваги:

$$W(i\vec{\omega}_x) = \int\limits_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{\infty} \varpi(\vec{x}) \exp(-i\vec{\omega}_x \vec{x}) d\vec{x}. \quad (40)$$