1.2. Перетворення Фур'є та його основні властивості

В аналізі та синтезі ОЕС важливе місце посідає математичний апарат перетворення Фур'є. За допомогою такого апарату порівняно легко роз'язуються задачі спектрального аналізу динаміки лінійних систем, при цьому вдасться перейти від схожих інтегральних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь.

1.2.1. Спектри періодичних сигналів

В абсолютному розумінні періодичних сигналів не існує, оскільки потреб не буде повторення одного і того ж процесу нескінчену кількість разів. Однак поняття періодичного сигналу дуже корисне в розгляді реальних процесів, що займають кінцеві інтервали часу та простору. Тут доцільно згадати роботу дифракційної гратки, випромінювання атомом квазімонохроматичного цугу хвиль і т.д.

А) найпростішим періодичним сигналом є *гармонійні коливання,* що визначаються тригонометричними функціями косинуса та синуса часу чи простору:

$$\varphi(t) = A\cos[(2\pi/T)t - \theta] =$$
$$= A\cos(\omega t - \theta) = A\cos\psi \qquad при \qquad -\infty < t < \infty$$

чи

$$\varphi(x) = A\cos[(2\pi/\lambda)x - \theta] =$$
$$= A\cos(\omega_x x - \theta) = A\cos\psi \qquad при \qquad -\infty < x < \infty.$$

Тут A, T - період коливань, $\omega_t = \dfrac{2\pi}{T}$ - кругова частота, $\nu = \dfrac{1}{T}$ - частота, λ - довжина хвилі, $\omega_x = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ - кругова просторова частота, $f = \dfrac{1}{\lambda}$ - просторова частота; θ, ψ - початкова та повна фази.

Графічно ці коливання зображені на рис. 10.

Гармонічне коливання можна розглядати у вигляді дійсної частини (або уявної, в різних джерелах береться або дійсна, або уявна) комплексної змінної

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}\varphi_k(t) = A\operatorname{Re}e^{i\psi} = A\operatorname{Re}[\cos\psi + i\sin\psi] = A\cos\psi\,,\ \psi = \omega t - \theta\,.$$

Комплексне представлення допускає таку інтерпретацію: комплексний вектор $\varphi_k(t)$ обертається в комплексній площині з кутовою частотою ω. Якщо за годинниковою стрілкою – знак «-», якщо проти – знак «+».

Модуль вектора $|\varphi_k| = A$. Проекцією $\varphi_k(t)$ на дійсну вісь і є сама функція $\varphi(t)$.

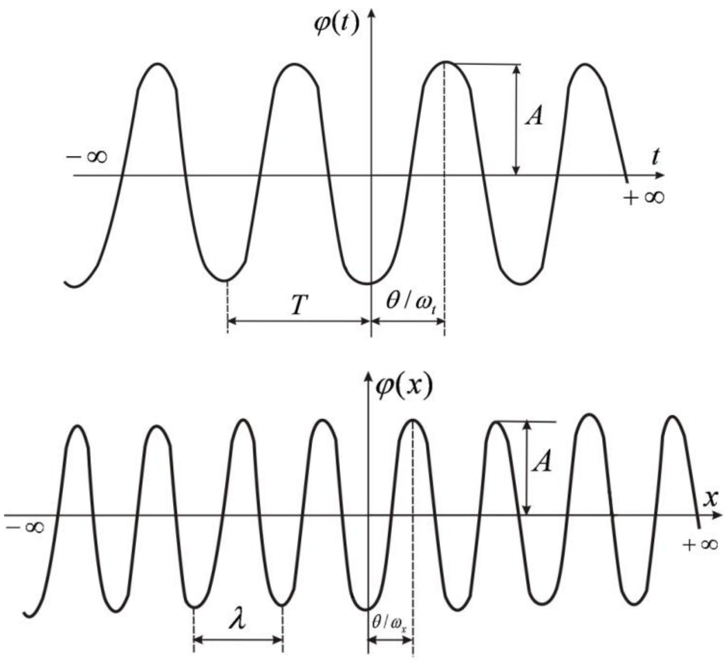

Рис. 10. Графічне зображення гармонійних коливань

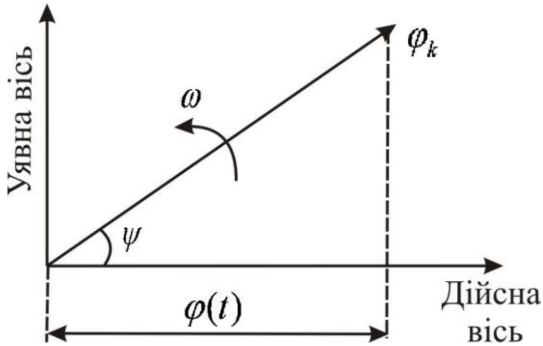

Рис. 11. Комплексне представлення гармонійного коливання

Гармонічне коливання $\varphi(t)$ можна також розглядати як суму двох комплексних коливань $\varphi_{+k}(t)$ і $\varphi_{-k}(t)$ з однаковим модулем $0{,}5A$, що обертаються у протилежних напрямках:

$$\varphi(t) = \varphi_{+k}(t) + \varphi_{-k}(t) = 0{,}5Ae^{i\psi} + 0{,}5Ae^{-i\psi} = A\cos\psi.$$

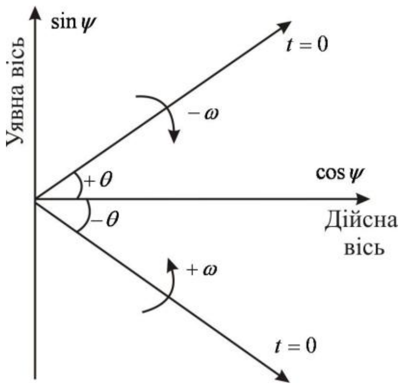

Рис. 12. Комплексне представлення гармонійного коливання у вигляді суми двох комплексних коливань $\varphi_{+k}(t)$ і $\varphi_{-k}(t)$

Один із доданків може трактуватись як коливання з «від'ємною» частотою $\omega_{-} = -\omega_{+}$ та фазою $\theta_{-} = -\theta_{+}$. Знак «+» зазвичай опускається.

$$\varphi(t) = \varphi_{+k}(t) + \varphi_{-k}(t) = 0{,}5Ae^{i\psi} + 0{,}5Ae^{-i\psi} =$$
$$= 0{,}5Ae^{i(\omega t-\theta)} + 0{,}5Ae^{-i(\omega t-\theta)} = 0{,}5Ae^{i(\omega t-\theta)} + 0{,}5Ae^{-i((-\omega)t-\theta_-)}.$$

Б) Будь-який складний періодичний процес може бути зображений із допомогою ряду Фур'є у вигляді суми елементарних гармонійних коливань.

Нехай функції $\varphi(x)$ та $\varphi(t)$ задані на інтервалі від x_1 до x_2 (t_1 до t_2) і повторюються з періодом $\lambda \equiv X$ (чи T) і частотою $\omega_{x_1} = \dfrac{2\pi}{X}$, $\omega_t = \dfrac{2\pi}{T}$.

$$\varphi(x) = \varphi(x + nX), \quad \varphi(t) = \varphi(t + nT); \quad n = 0,1,2...\infty.$$

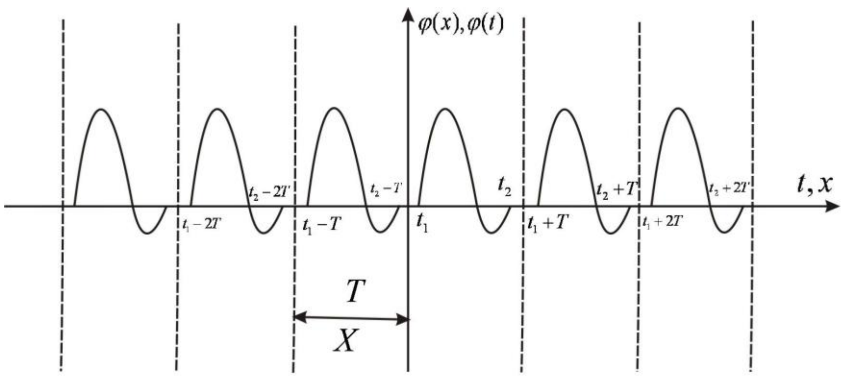

Рис. 13. Графік періодичного сигналу

Тоді при умові, що функція $\varphi(t)$ задовольняє умову Діріхле, тобто має бути неперервною чи мати в межах періоду скінчену кількість розривів та максимумів і мінімумів, то її можна представити рядом Фур'є у вигляді суми тригонометричних функцій:

$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_{x_1} x + b_n \sin n\omega_{x_1} x), \tag{41}$$

де

$$a_0 = \frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)\cos n\omega_{x_1} xdx,$$

$b_n = \frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)\sin n\omega_{x_1} xdx,$ причому $\int_{X_2}^{X_1} dx$ може бути записаний

як $\int_0^{X_\tau} dx$, де X_τ - протяжність одиночного імпульсу, тобто інтервал простору або часу, в межах якого одиночний імпульс $\varphi(x) \neq 0$.

Вводячи позначення

$$a_n = A_n \cos\theta_n, \quad b_n = A_n \sin\theta_n,$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \theta_n = arctg(\frac{b_n}{a_n}),$$

вираз (41) може бути переписаний у більш компактній формі:

$$\varphi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos n\omega_{x_1} x - \theta_n), \qquad (42)$$

що випливає з перетворення:

$$a_n \cos n\omega_{x_1} x + b_n \sin n\omega_{x_1} x =$$

$$= A_n(\cos\theta_n \cos n\omega_{x_1} x + \sin\theta_n \cos n\omega_{x_1} x) = A_n \cos(n\omega_{x_1} x - \theta_n),$$

$$A_0 = a_0.$$

Із (41) і (42) випливає, що довільний періодичний процес може бути зображений у вигляді суми гармонічних складових і визначатися сукупностями значень A_n та θ_n.

Сукупність величин A_n називається *спектром амплітуд*, а сукупність величин θ_n - спектром фаз. Зазвичай під словом спектр розуміють спектр амплітуд. Графічно спектр амплітуд зображається вертикальними відрізками, що відповідають значенню *n*-ї гармоніки.

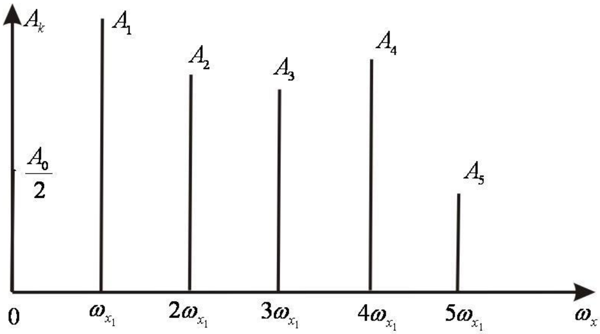

Рис. 14. Спектр періодичної функції

Спектр періодичної функції складається з окремих ліній, які відповідають дискретним частотам 0, ω_{x_1} , $2\omega_{x_1}$, $3\omega_{x_1}$ і т. д. Слід мати на увазі, що дискретність спектра не є ознакою періодичності функції. Спектр періодичної функції буде не тільки дискретним, а й гармонічним, тобто буде складатися з еквідестантно розміщених спектральних ліній – гармонік, кратних значенню ω_{x_1} .

Функції, що мають дискретні спектри з довільно розміщеними на шкалі частот спектральних ліній, називаються квазіперіодичними. Зокрема, квазіперіодичними будуть модульовані коливання, суперпозиція із двох періодичних процесів, із не кратними частотами.

Поряд із дійсною формою періодичного процесу (41), (42) велике поширення отримала комплексна форма, основою якого є представлення окремого гармонічного коливання як суми двох комплексних векторів.

Вираз $\sum_{n=1}^{\infty} A_n (\cos n\omega_{x_1} x - \theta_n)$ можна записати так:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos n\omega_{x_1}x-\theta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}e^{i(n\omega_{x_1}x-\theta_n)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}e^{-i(n\omega_{x_1}x-\theta_n)}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{2}e^{i(n\omega_{x_1}x-\theta_n)}+\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{A_n}{2}e^{i(n\omega_{x_1}x-\theta_{-n})}=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-1}^{-\infty}A_n e^{i(n\omega_{x_1}x-\theta_{-n})}+\sum_{n=-1}^{-\infty}A_n e^{i(n\omega_{x_1}x-\theta_n)}\right],$$

оскільки A_n - величина парна, а θ_n - не парна, $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$,

$\theta_n = arctg(\frac{b_n}{a_n})$.

$$a_n=\frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)\cos n\omega_{x_1}xdx,\qquad a_{-n}=a_{+n},$$

$$b_n=\frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)\sin n\omega_{x_1}xdx,\qquad b_{-n}=b_{+n}.$$

$$A_{-n}=A_{+n},\qquad -\theta_{-n}=+\theta_{+n},\qquad \theta_{-n}=-\theta_{+n}.$$

Окрім цього, при $n=0$ $b_n=b_0=0$; $\theta_n=\theta_0=0$; $e^{i(n\omega_{x_1}x-\theta_n)}=1$. Тоді вираз (42) записується так:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}A_n e^{i(n\omega_{x_1}x-\theta_n)}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}A_n e^{-i\theta_n}e^{in\omega_{x_1}x}. \qquad (43)$$

Уведемо вектор комплексної амплітуди для *n*-ї гармоніки:

$$\overline{A}_n=A_n e^{-i\theta_n}. \qquad (44)$$

Отже,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\overline{A}_n e^{in\omega_{x_1}x}. \qquad (45)$$

Значення $\overline{A}_n$ можна отримати з виразів:

$$\overline{A}_n=A_n e^{-i\theta_n}=a_n-ib_n=\frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)\cos\omega_{x_1}xdx-i\frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)\sin\omega_{x_1}xdx=$$

$$=\frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)(\cos n\omega_{x_1}x-i\sin n\omega_{x_1}x)dx$$

або

$$\overline{A}_n = \frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)e^{-in\omega_{x_1}x}dx. \tag{45a}$$

Спектр Фур’є періодичного процесу (41), (45) визначається рядом Фур’є:

$$\begin{aligned} F(i\omega_x) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{-i\omega_x x}dx = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{A}_n e^{in\omega_{x_1}x}e^{-i\omega_x x}dx = \\ &= \pi\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\overline{A}_n\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(n\omega_{x_1}x-\omega_x x)}dx = \pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\overline{A}_n\delta(n\omega_{x_1}-\omega_x). \end{aligned} \tag{46}$$

Згідно з (46), спектр Фур’є періодичного процесу являє собою суму гармонійних складових комплексних амплітуд. Фізично результат множення на $\delta(\omega_x - n\omega_{x_1}) = \infty$ отримується за рахунок додавання нескінченої кількості періодично повторюваних процесів на інтервалі $[-\infty < x < +\infty]$.

Амплітудний спектр (46) такий:

$$\left|F(i\omega_x)\right| = \pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n\delta(\omega_x - \omega_{x_1}) \tag{47}$$

Із (47) видно, що спектр Фур’є періодичного процесу визначається наявністю характерних гармонійних складових амплітудного спектра.

Для знаходження спектра амплітуд виразимо значення $F(i\omega_x)$ періодичного процесу через інтеграл Фур’є функції $\varphi(x)$ для одного відліку на інтервалі $\left[-\frac{X}{2} \div \frac{X}{2}\right]$ чи $\left[-X_1 \div X_2\right]$.

Позначимо:

$$F_0(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(x)e^{-i\omega_x x}dx = \int_{X_1}^{X_2}\varphi_0(x)e^{-i\omega_x x}dx. \tag{48}$$

Підставляючи у (48) , що $n\omega_{x_1} = \omega_x$, згідно з формулами (45а) та (48), маємо:

$$F_0(i\omega_x) = \overline{A}_n\frac{X}{2}. \tag{49}$$

Підставляючи з (49) $\overline{A}_n$ у (46), отримаємо:

$$F(i\omega_x)=\frac{2\pi}{X}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}F_0(i\omega_x)\delta(\omega_x-n\omega_{x_1}). \quad (50)$$

Згідно з (50), спектр амплітуд періодичної функції визначається дотичною (модулем) Фур’є перетворення одного відліку функції з дискретизацією частот, яка дорівнює рівна $n\omega_{x_1}=\omega_x$ (рис. 15).

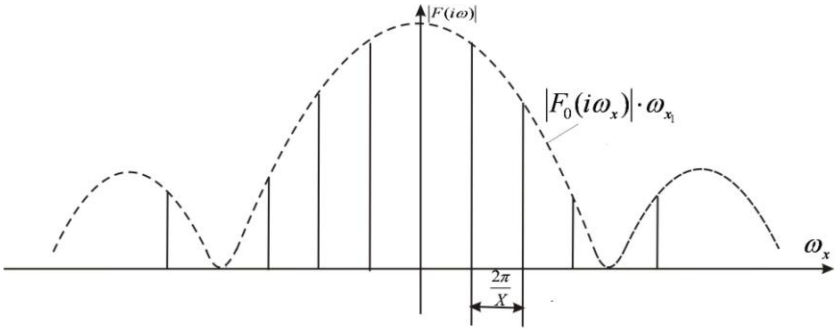

Рис. 15. Графік амплітудного спектра Фур’є періодичного сигналу

1.2.2. Спектри неперіодичних сигналів

Нехай функція $\varphi(x)$ (чи $\varphi(t)$), яку зазвичай називають сигналом, неперіодична, задовольняє умову Діріхле та абсолютно інтегрована, тобто $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(x)|dx=N<\infty$. Це свідчить про те, що $\varphi(x)$ перетворюється в нуль при $x\to\pm\infty$. Для зручності представлення вважатимемо, що $\varphi(x)$ відмінна від нуля на інтервалі $X_1<X<X_2$.

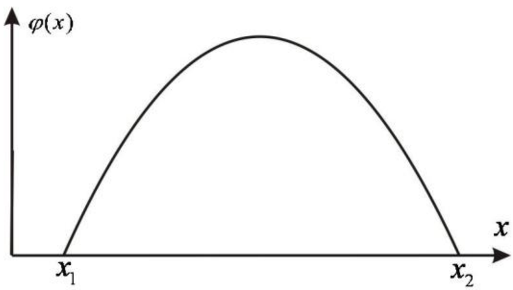

Рис. 16. Функція $\varphi(x)$ відмінна від нуля на інтервалі $X_1 < X < X_2$

Для проведення гармонічного аналізу побудуємо із функції $\varphi(x)$, шляхом її еквідестантного повторення із періодом $X > X_2 - X_1$, нову періодичну функцію $\varphi'(x)$, розглянуту вище.

$$\varphi'(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_{x_1} x + b_n \sin n\omega_{x_1} x) = \\ = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos n\omega_{x_1} x - \theta_n) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n++\infty} A_n e^{in\omega_{x_1} x}. \tag{51}$$

Амплітуди окремих гармонічних складових будуть тим меншим, чим більшим буде інтервал *X*.

$$A_0 = a_0 = \frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)dx,\ \ a_n = \frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)\cos n\omega_{x_1} xdx,$$

$$b_n = \frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)\sin n\omega_{x_1} xdx,\ \ \overline{A}_n = \frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2}\varphi(x)e^{-in\omega_{x_1} x}dx.$$

Очевидно, що при $X \to \infty$, $\varphi(x) \to \varphi'(x)$. При прямуванні періоду X до безмежності, в межах отримуються нескінченно малі амплітуди гармонійних складових, а їхня кількість стає нескінченно великою на обмеженому відрізку просторових частот ω_x, оскільки основна частота $\omega_{x_1} = \frac{2\pi}{X}$, при $X \to \infty$ стає нескінченно малою, як і сама відстань між спектральними лініями буде нескінченно малою.

Отримуємо відомі інтегральні перетворення неперіодичних функцій двома способами. Маємо

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \overline{A}_n e^{in\omega_{x_1} x};$$

$$\overline{A}_n = \frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) e^{in\omega_{x_1} x} dx. \tag{52}$$

Домножимо першу з нерівностей на інтервал частот $\Delta\omega_x = \omega_{x_1}$, щоб отримати умову $X = \dfrac{2\pi}{\Delta\omega_x}$:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\overline{A}_n}{\Delta\omega_x} e^{in\omega_{x_1} x} \Delta\omega_x.$$

Переходячи до границі, враховуючи, що $X \to \infty$, $\Delta\omega_x = d\omega_x \to 0$. Позначивши $\lim\limits_{\substack{X\to\infty \\ \overline{A}_n \to 0}} \dfrac{\overline{A}_n X}{2} = F(i\omega_x)$, $n\omega_{x_1} = \omega_x$ та замінюючи суму інтегралом, отримуємо:

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(i\omega_x) e^{i\omega_x x} d\omega_x. \tag{53}$$

Друга з рівностей (52) дає таке:

$$\lim_{X\to\infty} \frac{\overline{A}_n X}{2} = F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_x x} dx. \tag{54}$$

Вирази (53) та (54) являють собою пару спряжених інтегральних перетворень Фур'є, що пов'язують неперіодичну функцію $\varphi(x)$ з її спектральною густиною $F(i\omega_x)$, яка в загальному випадку може бути комплексною.

Аналогічний результат отримується при підстановці комплексної амплітуди $\overline{A}$ в першу нерівність:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [\frac{2}{X}\int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) e^{-in\omega_x x} dx] e^{in\omega_x x} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{in\omega_x x} f_x \int_{X_1}^{X_2} \varphi(x) e^{-in\omega_x x} d\omega_x.$$

При $X \to \infty$, $\varphi_1(x) \to \varphi(x)$; $f_x = \dfrac{1}{X} \to df_x$; $n\omega_{x_1} = \omega_x = 2\pi f_x$, а операцію сумування перетворюється в операцію інтегрування:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f_x x} df_x \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i2\pi f_x x} df_x dx.$$

Позначимо внутрішній інтеграл $F(if_x)$: $F(if_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i2\pi f_x x} dx$, тоді отримаємо

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(if_x) e^{i2\pi f_x x} df_x. \tag{55}$$

$F(if_x)$ - спектральна густина функції $\varphi(x)$, задана в шкалі просторових частот ($f_x = \dfrac{1}{X}$). Звернемо увагу на те, що у (55) множник $\dfrac{1}{2\pi}$ перед інтегралом відсутній. Проте при розрахунках функції через її спектральну густину, задану у шкалі просторових кругових частот (чи просто кругових частот ω_t), множник $\dfrac{1}{2\pi}$ присутній обов’язково.

Вирази

$$\begin{aligned} F(i\omega_x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i\omega_x x} dx; \\ F(if_x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-i2\pi f_x x} dx. \end{aligned} \tag{56}$$

називаються прямими перетвореннями Фур’є, а самі функції $F(i\omega_x)$, $F(if_x)$ - спектральною густиною, спектральною характеристикою, комплексним спектром Фур’є функції $\varphi(x)$.

Вирази

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(i\omega_x)e^{i\omega_x x}d\omega_x;$$

$$\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(if_x)e^{i2\pi f_x x}df_x. \qquad (57)$$

називаються зворотними перетвореннями Фур'є.

При використанні шкали кругових просторових частот і введенні позначень $\lim\frac{\overline{A}_n X}{4\pi}=F(i\omega_x)$, множник $\frac{1}{2\pi}$ з'являться у виразі для прямого перетворення Фур'є. У книзі М.М. Мірошникова «Теоретичні основи оптико електронних пристроїв» робиться висновок, що «тільки так буде правильно: $\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(i\omega_x)e^{i\omega_x x}d\omega_x$ й інші автори роблять помилку». Проте ніякої помилки тут немає: непорозуміння виникає через масштаб задання функції.

Звернемо увагу на розмірність функцій $F(i\omega_x)$ та $\varphi(x)$. Якщо розмірність $\varphi(x)$ - *B*, то, згідно з (57), розмірність $F(i\omega_x)$ - $B[x]=\frac{B}{[x^{-1}]}$. Із вигляду прямого Фур'є-перетворення $\mathrm{Re}[F(i\omega_x)]$ - завжди парна функція, $\mathrm{Im}[F(i\omega_x)]$ - непарна (рис. 17).

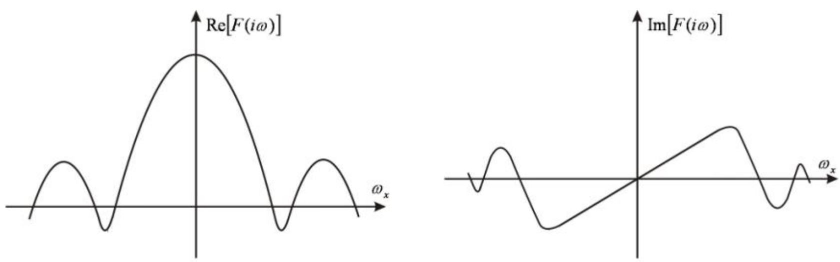

Рис. 17. $\mathrm{Re}[F(i\omega_x)]$ - завжди парна функція, $\mathrm{Im}[F(i\omega_x)]$ - непарна

Якщо $\varphi(x)$ - парна функція, то $\varphi(x) = \varphi(-x)$, тоді $F(i\omega_x)$ - парна, дійсна функція.

$$F(i\omega_x) = 2\int_0^{\infty} \varphi(x)\cos\omega_x x dx.$$

Якщо $\varphi(x)$ - непарна функція, тобто $\varphi(x) = -\varphi(-x)$, то

$$F(i\omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\cos\omega_x x dx - i\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\sin\omega_x x dx =$$

$$= -i\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\sin\omega_x x dx = -i2\int_0^{\infty} \varphi(x)\sin\omega_x x dx$$

- суто комплексна непарна функція, а $\mathrm{Im}[F(i\omega_x)] = 2\int_0^{\infty} \varphi(x)\sin\omega_x x dx$.

Для функції залежної від *n*-аргументів, пара перетворень Фур'є визначається згідно формул:

$$\begin{gathered}\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty} F(i\vec{\omega}_x)e^{i\vec{\omega}_x\vec{x}}d\vec{\omega}_x; \\ F(i\vec{\omega}_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\vec{x})e^{-i\vec{\omega}_x\vec{x}}d\vec{x}.\end{gathered} \tag{58}$$

Тут $\vec{\omega}_x\vec{x} = \omega_{x_1}x_1 + \omega_{x_2}x_2 + ... + \omega_{x_n}x_n$ - скалярний добуток *n*-вимірних веторів у просторі координат $\vec{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ та у просторі частот $\vec{\omega}_x = \{\omega_{x_1}, \omega_{x_2}, ..., \omega_{x_n}\}$; $d\vec{x} = dx_1dx_2...dx_n$; $d\vec{\omega}_x = d\omega_{x_1}d\omega_{x_2}...d\omega_{x_n}$ - елементарні об'єми у використовуваних *n*-вимірних просторах.