1.4. Випадкові сигнали та їх проходження крізь лінійні системи

Проходження сигналу через елементи ОЕС описується у більшості випадків випадковими функціями та є випадковим процесом.

Якщо випадковий процес залежить тільки від одного аргументу (координати) x, то найбільш повне його представлення дає нескінченно великий набір випадкових функцій $\varphi(x)$, що отримується в результаті багатократного вимірювання та запису контрольованої величини $\varphi(x)$ з допомогою ідеального вимірювального пристрою, що не вносить власних спотворень у результати вимірювань.

Проте для інженерних розрахунків при такому представленні випадкової величини неможливо передбачити, яка саме з реалізацій випадкової величини діє в конкретному випадку.

Тому на практиці розрахунок систем, які знаходяться під дією випадкових факторів (випадкових сигналів), здійснюється з використанням усереднених характеристик і параметрів, отриманих у результаті статистичної обробки часткових реалізацій випадкових процесів.

1.4.1. Статистичний опис випадкових сигналів.

Нехай здійснюється багатократне вимірювання деякої випадкової величини φ , яка залежить від аргументу x, причому вимірювана величина може приймати довільні значення: $-\infty \leq \varphi(x) \leq \infty$ при кожному заданому значення x_i. Оскільки φ є випадковою величиною, то за результатами багаторазового її вимірювання в усіх точках аргументу x можна отримати ряд випадкових функцій $\varphi_k(x) \quad (k = 1,2,...)$, що називаються частковими реалізаціями. Як приклад можна навести вимірювання неперервного спектра на Фур'є-спектрометрі, де частковою реалізацією є одне сканування $B_i(\sigma) \rightarrow \varphi_i(x)$. Графічне зображення часткових реалізацій випадкового процесу наведеніена рис. 21.

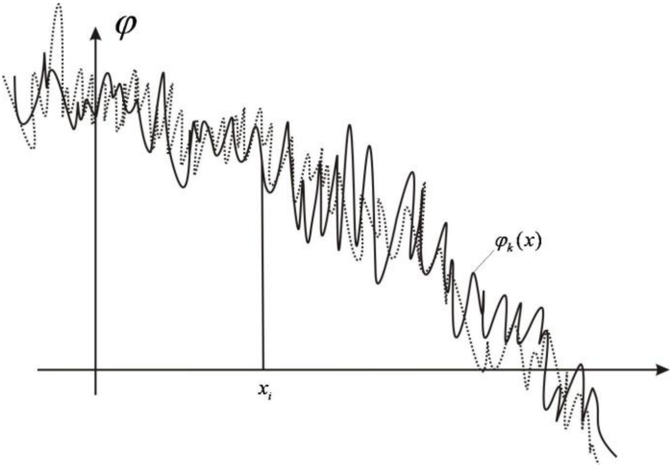

Рис. 21. Графіки часткових реалізацій випадкового процесу

Здійснюючи статистичну обробку отриманих значень $\varphi_k(x)$, для кожного значення аргументу x_i можна знайти функцію густини ймовірності $\psi[\varphi(x_i)]$, яка, згідно з правилами нормування, повинна задовольняти рівність:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi[\varphi(x_i)]d\varphi = 1 \tag{88}$$

Зміст функції густини ймовірності полягає ось у чому: при заданому аргументі x_i значення функції знаходиться в інтервалі $-\infty \le \varphi(x) \le \infty$ із ймовірністю, що дорівнює одиниці, а в інтервалі від $\varphi(x_i)$ до $\varphi(x_i) + d\varphi_i$ - із ймовірністю $\psi[\varphi(x_i)]d\varphi_i$.

Для випадкової функції $\varphi(x)$ характерне середнє значення математичного очікування $<\varphi(x_i)>$ та дисперсія $D[\varphi(x_i)]$, що визначаться згідно з формулами:

$$<\varphi(x_i)> = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_i)\psi[\varphi(x_i)]d\varphi_i, \tag{89}$$

$$D[\varphi(x_i)] = \sigma_\varphi^2(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_i) - <\varphi(x_i)>]^2 \psi[\varphi(x_i)] d\varphi_i. \qquad (90)$$

Знайдені в такий спосіб середнє значення та дисперсія в усіх точках аргументу x дадуть значення функцій $<\varphi(x_i)>$ та $D[\varphi(x_i)] = \sigma_\varphi^2(x_i)$ і будуть характеризувати їх виміри вздовж осі x. Введені величини ще називаються моментами першого та другого порядків.

Для характеристики випадкової величини виявляється недостатнім знання вказаних моментів і доводиться вводити моменти більш високих порядків.

Наприклад, при дослідженні динаміки систем необхідно знати не тільки самі значення $<\varphi(x_i)>$ та $\sigma_\varphi^2(x_i)$ у кожній точці на осі x, а й як швидко змінюється випадкова функція $\varphi(x)$ уздовж цієї осі.

Швидкість зміни випадкової функції $\varphi(x)$ можна оцінити, якщо буде знайдений середньостатистичний зв'язок між значеннями цієї функції у двох точках аргументу.

Кількісну міру, що характеризує середньостатистичний зв'язок між значеннями $\varphi(x_i)$ та $\varphi(x_k)$ випадкової функції $\varphi(x)$ у точках x_i та x_k, що рознесені на інтервал $\Delta x = \xi = x_k - x_i$, прийнято визначати автокореляційною функцією

$$K_\varphi(x_i, x_k) = \langle \varphi(x_i)\varphi(x_k) \rangle =$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_i)\varphi(x_k)\psi[\varphi(x_i), \varphi(x_k), x_i, x_k] d\varphi_i d\varphi_k, \qquad (91)$$

де $\psi[\varphi(x_i), \varphi(x_k), x_i, x_k]$ - двовимірна густина ймовірності, яка показує, що, якщо в точці x_i випадкова величина $\varphi(x)$ має значення в інтервалі від $\varphi(x_i)$ до $\varphi(x_i) + d\varphi_i$, то в точці x_k її значення буде знаходитись в інтервалі від $\varphi(x_k)$ до $\varphi(x_k) + d\varphi_k$ із ймовірністю $\psi[\varphi(x_i), \varphi(x_k), x_i, x_k] d\varphi_i d\varphi_k$.

Процеси, що швидко та повільно змінюються, ілюструються графіком на рис. 22.

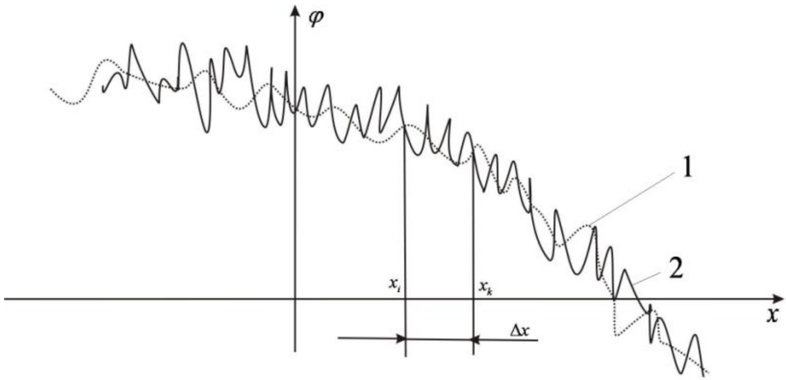

Рис. 22. Графіки реалізацій швидко та повільно змінних випадкових процесів (1 - повільно змінний процес, 2 - швидко змінний процес)

При швидко змінних процесах імовірність правильного визначення випадкової величини в точці x_k, яка знаходиться на інтервалі Δx від точки x_i, в якій відомі значення функції $\varphi(x_i)$, практично дорівнює нулю.

У залежності від характеру зміни вздовж x уведених середньостатистичних характеристик $<\varphi(x_i)>$, $\sigma_\varphi^2(x_i)$, $K_\varphi(x_i, x_k)$ випадкові процеси поділяються на стаціонарні та нестаціонарні.

Стаціонарний випадковий процес буде у тому випадку, коли вигляд густини ймовірності та моментів будь-якого порядку не залежить від початку відліку на осі аргументу.

Із даного вище визначення для стаціонарного процесу маємо:

а) одновимірна густина ймовірності одна й та ж для будь-якого значення x_i та не залежить від самого аргументу, тобто залежить тільки від самого значення сигналу:

$$\psi[\varphi(x_i)] = \psi[\varphi(x_k)] = \psi(\varphi). \tag{92}$$

б) двовимірна густина ймовірності повинна залежати тільки від значення функції $\varphi(x)$ та інтервалу $\xi = x_k - x_i$ вздовж значення осі аргументу x:

$$\psi[\varphi(x_i), \varphi(x_k), x_i, x_k] = \psi[\varphi(x), \varphi(x+\xi), \xi]. \tag{93}$$

На основі (92) та (93) отримаємо:

$$<\varphi(x)>=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\psi(\varphi)d\varphi=<\varphi>, \text{ для всіх } x \tag{94}$$

$$D_{\varphi}(x)=\sigma_{\varphi}^{2}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(x)-<\varphi>]^{2}\psi(\varphi)d\varphi=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi^{2}(x)-2\varphi(x)<\varphi>+<\varphi>^{2}]\psi(\varphi)d\varphi=<\varphi^{2}>-<\varphi>^{2}=\sigma_{\varphi}^{2}. \tag{95}$$

$$K_{\varphi}(x_i,x_k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int\varphi(x)\varphi(x+\xi)\psi[\varphi(x),\varphi(x+\xi),\xi]d\varphi(x)d\varphi(x+\xi)=K_{\varphi}(\xi). \tag{96}$$

Із (96) випливає, що *для стаціонарних процесів АКФ залежить тільки від інтервалу* ξ.

Для стаціонарних випадкових процесів характерна ергодичність. Вона полягає в тому, що для стаціонарних процесів середні значення, які отримані по набору випадкових реалізацій, дорівнюють середнім значенням, одержаним у результаті однієї реалізації функції $\varphi(x)$ достатньо великої протяжності (тобто усереднення функції $\varphi(x)$).

Для математичного очікування $<\varphi(x)>$ та АКФ $K_{\varphi}(\xi)$ стаціонарного випадковавого процесу, відповідно до властивостей ергодичності, отримаємо:

$$<\varphi(x)>=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\psi(\varphi)d\varphi=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}\varphi(x)d\varphi=<\varphi>. \tag{97}$$

$$K_{\varphi}(\xi)=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}\varphi(x)\varphi(x+\xi)dx. \tag{98}$$

Враховуючи, що (98) можна записати у вигляді $K_{\varphi}(\xi)=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{0}^{X}\varphi(x)\varphi(x+\xi)dx$, АКФ приблизно обчислюється, розбивши інтервал $0-X$ на *n* частин із кроком $\Delta X=\frac{X}{n}$, вважаючи, що $\xi=\Delta x\cdot m$, m - кількість відрізків Δx, що вкладаються на інтервалі кореляції, та замінивши інтеграл сумою значень, що відповідають величинам на відрізках розбиття:

$$K_\varphi(\xi) \approx \frac{1}{x-\xi} \sum_{i=1}^{i_{\max}=(x-\xi)/n} \varphi(x_i)\varphi(x_i+\xi)\Delta x = \\ = \frac{1}{n-m}\sum_{i=1}^{n-m}\varphi(x_i)\varphi(x_i+\xi). \qquad (99)$$

Зазвичай ξ підбирають так, щоб воно дорівнювало цілому числу та, як правило, вважають таким, що дорівнює Δx, тобто *m=1* .

1.4.2. Властивості кореляційної функції

АКФ (у теорії оптичних пристроїв її називають для спрощення кореляційною функцією)

Кореляційна функція $K_\varphi(\xi)$ одновимірного випадкового стаціонарного процесу володіє рядом важливих властивостей, які широко використовуються в практичних розрахунках. До таких властивостей належать:

1. Автокореляційна функція є парною:

$$K_\varphi(\xi) = K_\varphi(-\xi). \qquad (100)$$

Властивість парності випливає із спектрального представлення кореляційної функції (див. (66)), а також із визначення (98), де усереднення проводиться по нескінченно великому інтервалу шкали *x*, а тому не повинна простежуватись залежність від ξ в той чи інший бік від довільного початку координат.

2. Значення АКФ при ξ=0 дорівнює середній квадратичній величині випадкової функції:

$$K_\varphi(\xi) = K_\varphi(0) = <\varphi^2(x)> \qquad (101)$$

Властивість випливає з (98).

3. При $\xi \to \infty$ АКФ набирає значення квадрата середньої величини випадкової функції:

$$K_\varphi(\xi)_{\xi\to\infty} = K_\varphi(\infty) = (<\varphi(x)>)^2. \qquad (102)$$

Властивість випливає із (98). Позначимо $\varphi(x) = <\varphi> + \alpha(x)$, $\varphi(x+\xi) = <\varphi> + \alpha(x+\xi)$. Тоді:

$$K_\varphi(\xi)=\lim\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}[<\varphi>+\alpha(x)][<\varphi>+\alpha(x+\xi)]dx=$$

$$=\lim\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}[<\varphi>^2+<\varphi>\alpha(x+\xi)++<\varphi>\alpha(x)+\alpha(x)\alpha(x+\xi)]dx=$$

$$=<\varphi>^2\lim\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}\alpha(x)\alpha(x+\xi)dx.$$

$\alpha(x)=\varphi(x)-<\varphi>$ - випадкова величина, що характеризує відхилення $\varphi(x)$ від середнього значення.

$$\lim\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}\alpha(x)dx=0;\quad \lim\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}\alpha(x+\xi)dx=0;$$

$\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}\alpha(x)\alpha(x+\xi)dx\to 0$ при $\xi\to\infty$. Оскільки при нескінченності величини $\alpha(x)$ та $\alpha(x+\infty)$ не скорельовані й, за аналогією аналогією $\lim\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}\alpha(x)\alpha(x+\xi)dx=K_\alpha(\xi)$,

$K_\alpha(\infty)=(\langle\alpha\rangle^2)=0$.

4. Із ростом ξ кореляційна функція зменшується, допускається осциляція. Зменшення її пов'язано з послабленням статистичного зв'язку функцій $\varphi(x)$ і $\varphi(x+\xi)$. Саме тому $K_\varphi(0)\ge K_\varphi(\xi)_{\xi\ne 0}$.

Типовий хід кореляційної функції наведено на рис. 23.

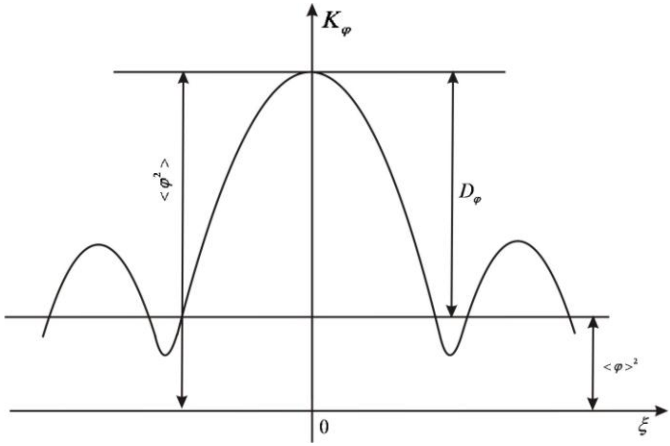

Рис. 23. Типовий хід кореляційної функції

Отримані результати свідчать про те, що кореляційна функції є універсальною характеристикою стаціонарного випадкового процесу та дозволяє визначити всі його числові параметри:

- математичне очікування

$$<\varphi(x)>=[K_\varphi(\infty)]^{1/2};$$

- середньоквадратичне відхилення

$$<\varphi^2(x)>=K_\varphi(0);$$

- дисперсію

$$D[\varphi(x)]=\sigma_\varphi^2=K_\varphi(0)-K_\varphi(\infty).$$

1.4.3. Спектральне представлення А.К.Ф. Спектр потужності.

До випадкової функції $\varphi(x)$ також можна застосувати перетворення Фур'є. Враховуючи, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\varphi(x+\xi)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(i\omega_x)|^2\exp(i\omega_x)d\omega_x \qquad \text{(див. 66)}$$

автокореляційна функція $K_\varphi(\xi)$ можна представити так

$$K_{\varphi}(\xi)=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\int_{-X}^{+X}\varphi(x)\varphi(x+\xi)dX=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega_x)\exp(i\omega_x\xi)d\omega_x. \quad (106)$$

де

$$S(\omega_x)=\lim_{X\to\infty}\frac{\left|F(i\omega_x)\right|^2}{2X}=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{2X}\left|\int_{-X}^{+X}\varphi(x)\exp(-i\omega_x x)dx\right|^2. \quad (107)$$

Функція $S(\omega_x)$ - спектральна густина потужності стаціонарного випадкового процесу.

Із властивостей автокореляційної функції, а також безпосередньо з (66) випливає, що $S(\omega_x)$ буде парною, дійсною та додатною функцією.

Тому для стаціонарного випадкового процесу дійсна пара спряжених Фур'є-перетворень:

$$\begin{aligned} S_{\varphi}(\omega_x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}K_{\varphi}(\xi)\exp(-i\omega_x\xi)d\xi;\\ K_{\varphi}(\xi)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\varphi}(\omega_x)\exp(i\omega_x\xi)d\omega_x. \end{aligned} \quad (108)$$

1.4.4. Проходження випадкових сигналів через лінійні системи

Припустимо, що на вхід лінійної системи із функцією ваги $\omega(x)$ подається часткова реалізація випадкового сигналу із функцією $g(x)$. Тоді вихідний сигнал також буде випадковим і визначатиметься інтегралом згортки:

$$y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-u)\omega(u)du \quad (109)$$

Обчислимо автокореляційну функцію вихідного сигналу, що пов'язує статистичні значення вихідного сигналів $y(x_i)$ та $y(x_k)$ у двох точках x_i та x_k.

Згідно з вище наведеним визначенням,

$$K_y(x_i, x_k) = \langle y(x_i) y(x_k) \rangle =$$
$$= \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_i - u)\omega(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_k - \vartheta)\omega(\vartheta)d\vartheta \right\rangle =$$
$$= \int \int_{-\infty}^{+\infty} g(x_i - u) g(x_k - \vartheta)\omega(u)\omega(\vartheta) du d\upsilon =$$
$$= \int \int_{-\infty}^{+\infty} K_g(x_i - u) g(x_k - \vartheta)\omega(u)\omega(\vartheta) du d\upsilon, \tag{110}$$

де $K_g(x_i - u, x_k - \vartheta)$ - автокореляційна функція вхідного випадкового процесу $g(x)$. За умови, що процес стаціонарний, автокореляційна функція повинна залежати тільки від різниці аргументів $\xi' = (x_k - \vartheta) - (x_i - u) = \xi + u - u$, де $\xi' = x_k - x_i$, тобто

$$K_y(\xi) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} K_g(\xi + u - \vartheta)\omega(u)\omega(\vartheta) du d\upsilon. \tag{111}$$

Для переходу до спектра потужності стаціонарного випадкового процесу проінтегруємо (111) відповідно до перетворення Фур’є:

$$S_y(\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_y(\xi) \exp(-i\omega_x \xi) d\xi =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int \int_{-\infty}^{+\infty} K_g(\xi + u - \vartheta)\omega(u)\omega(\vartheta) du d\upsilon \right] \exp(-i\omega_x \xi) d\xi,$$

Змінюючи порядок інтегрування, отримаємо:

$$S_y(\omega_x) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(u)\omega(\vartheta) du d\upsilon \int_{-\infty}^{+\infty} K_g(\xi + u - \vartheta) \exp(-i\omega_x \xi) d\xi.$$

З урахуванням введених вище позначень, $\xi' = \xi + u - \vartheta$, перепишемо:

$$S_y(\omega_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(u)\exp(i\omega_x u)du \int_{-\infty}^{+\infty} K_g(\xi')\exp(-i\omega_x \xi')d\xi' \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\upsilon)\exp(-i\omega_x \upsilon)d\upsilon.$$

За визначенням:

$W(i\omega_x)\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\upsilon)\exp(-i\omega_x \upsilon)d\upsilon$ - амплітудно-фазова частотна передаточна функція лінійної системи, $W(i\omega_x) = W^*(i\omega_x)\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(u)\exp(-i\omega_x u)du$ - аналогічно, тільки комплесно спряжена величина. Відповідно:

$$S_y(\omega_x) = \left|W(i\omega_x)\right|^2 S_g(\omega_x). \qquad (112)$$

Спектр потужності вихідного сигналу дорівнює спектру потужності вхідного помноженого на $\left|W(i\omega_x)\right|^2$.

1.4.5. Багатовимірні випадкові процеси

Поряд з одновимірними випадковими процесами можна ввести багатовимірний випадковий процесс функції, що описує залежність від декількох аргументів:

$$\varphi = \varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi(\vec{x}). \qquad (113)$$

Усереднені характеристики багатовимірних випадкових процесів:

- $\psi\left[\varphi(\vec{x})\right]$ - одновимірна функція густини ймовірності випадкового багатовимірного процесу $\varphi(\vec{x})$, що характеризує густину ймовірності в деякій точці простору із координатою $\vec{x}$;

- $\psi\left[\varphi(\vec{x}_i), \varphi(\vec{x}_k), \vec{x}_i, \vec{x}_k\right]$ - двовимірна густина ймовірності, що характеризує середньо статистичний зв’язок між імовірнісними значеннями функції одночасно у двух точках *n*-вимірного простору, координати якого задаються радіус-векторами $\vec{x}_i$ та $\vec{x}_k$;

- $S_\varphi(\omega_x)$ - спектр потужності випадкового багатовимірного стаціонарного процесу.

Якщо в *n*-вимірному просторі статистичні характеристики залишаються постійними і не залежать від початку відліку в системі, що визначається сукупністю координат $\vec{x}$, то такий процес буде стаціонарним.

Кореляційна функція в цьому випадку виявляється залежною не від самих координат $\vec{x}_i$ та $\vec{x}_k$, а від розміру та напрямку вектора $\vec{\xi} = \vec{x}_k - \vec{x}_i$. Враховуючи властивість ергодичності стаціонарного випакового процесу автокореляційна функція може бути обчислена так:

$$K_\varphi(\vec{\xi}) = \lim_{\substack{X_1\to\infty \\ \dots \\ X_n\to\infty}} \frac{1}{(2)^n X_1 \dots X_n} \int_{-X_1}^{X_1} \dots \int_{-X_1}^{X_1} \varphi(x_1 \dots x_n) \times \\ \times \varphi(x_1 + \xi_1, \dots, x_n + \xi_n) dx_1 \dots dx_n. \tag{114}$$

Наприклад, стаціонарна випадкова функція $\varphi = \varphi(x_1, x_2)$ задана на площині прямокутних координат. Тоді автокореляційну функцію можна визначити так:

$$K_\varphi(\vec{\xi}) = K_\varphi(\xi_1, \xi_2) = \\ = \lim_{\substack{X_1\to\infty \\ X_2\to\infty}} \frac{1}{4X_1X_2} \int_{-X_1}^{X_1} \int_{-X_2}^{X_2} \varphi(x_1 x_2) \times \varphi(x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2) dx_1 dx_2. \tag{115}$$

Спектральна густина потужності *n*-вимірного процесу $S_\varphi(\vec{\omega}_x) = S_\varphi(\omega_{x_1}, \omega_{x_2}, \dots, \omega_{x_n})$ пов'язана з *n*-вимірною автокореляційною функцією $K_\varphi(\vec{\xi})$ парою спряжених перетворень Фур'є:

$$S_\varphi(\vec{\omega}_x) = \int\limits_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{+\infty} K_\varphi(\vec{\xi}) \exp(-i\vec{\omega}_x \vec{\xi}) d\vec{\xi}; \tag{116}$$

$$K_\varphi(\vec{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\vec{\omega}_x) \exp(i\vec{\omega}_x \vec{\xi}) d\vec{\omega}_x. \tag{117}$$

Стаціонарні *n*-вимірні процеси можуть володіти властивостями ізотропності. Так, шорстка поверхня отримана методом вільного протиру. Для таких процесів автокореляційна функція залежить тільки від відстані між точками $\vec{x}_i$ та $\vec{x}_k$ і не залежить від напрямку самого вектора (тобто залежить від $\left|\vec{\xi}\right|$:

$$\left\langle \varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{x}+\vec{\xi}) \right\rangle = K_\varphi(\left|\vec{\xi}\right|). \qquad (118)$$

У цьому випадку, якщо простір аргументів є площиною з прямокутними x_1, x_2 чи полярними координатами ρ, α, то автокреляційна функція з ізотропними властивостями випадкового процесу $\varphi(x_1, x_2)$ буде володіти осьовою симетрією:

$$K_\varphi(\xi_1, \xi_2) = K_\varphi\left[(\xi_1^2 + \xi_1^2)^{1/2}\right] = K_\varphi(\rho).$$

Приклад: шорстка поверхня отримана методом вільної притирки. При цьому спектр потужності такого процесу можна знайти з перетворень Ганкеля:

$$S_\varphi(\omega_r) = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho K_\varphi(\rho) I_0(\omega_r \rho) d\rho, \qquad (119)$$

де

$\omega_r = (\omega_{x_1}^2 + \omega_{x_2}^2)^{1/2}$ - відстань у площині зворотних кутових частот, а сама функція $S_\varphi(\omega_r)$ також буде мати осьову симетрію.

1.4.6. Автокореляційна функція вихідного *n*-вимірного сигналу та його спектр потужності

Нехай на вхід лінійної *n*-вимірної системи, що має функцію ваги $\omega(\vec{x})$ і амплітудночастотнопередаточну функцію - $W(i\vec{\omega}_x)$ (*n*-вимірні) подається випадковий сигнал $g(\vec{x})$ зі статичними характеристиками $K_g(\vec{\xi})$ і $S_g(\vec{\omega}_x)$. Тоді автокореляційна функція і спектр потужності вихідного сигналу визначається такими рівностями, аналогічними виразам (111), (112):

$$K_y(\vec{\xi}) = \underset{(n)}{\int\int_{-\infty}^{+\infty}} K_g(\vec{\xi} + \vec{u} - \vec{v}) \omega(\vec{u}) \omega(\vec{v}) d\vec{u} d\vec{v} \qquad (120)$$

$$S_y(\vec{\omega}_x) = \left|W(i\omega_x)^2 d\right| S_g(\vec{\omega}_x). \tag{121}$$

1.4.7. Оптимальна фільтрація корисних сигналів від завад

Проходження корисних сигналів через ОЕС, через окремі її елементи, як правило, завжди супроводжується завадами. Виникає задача знаходження (синтезу) таких функцій ваги $\omega(x)$ та амплітудо-частотних передаточних функцій $W(i\omega_x)$ (як окремих елементів, так і системи загалом), які при заданих характеристиках корисних сигналів і завад забезпечували би мінімальне спотворення сигналів. Для виконання цього завдання оптимізації в літературі найбільше поширення отримав метод синтезу оптимальних фільтрів, заснований на використанні критерію мінімуму середньоквадратичної похибки відтворення корисного сигналу.

Нехай на вхід лінійної системи надходить адитивна суміш корисного сигналу $m(x)$ та завади $n(x)$, що характеризують одновимірні випадкові стаціонарні процеси з кореляційними функціями $K_m(\xi)$ та $K_n(\xi)$ відповідно:

$$g(x) = m(x) + n(x). \tag{122}$$

Для будь-якої часткової реалізації стаціонарного випадкового процесу $g(x)$ (вхідний сигнал) сигнал на виході $y(x)$ визначається інтегралом згортки:

$$y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-u)\omega(u)du. \tag{123}$$

Визначимо таку функцію ваги $\omega(x)$ чи відповідну їй амплутудо-частотну передаточну функцію $W(i\omega_x)$ лінійної системи, яка би забезпечувала мінімальну середньоквадратичну похибку вимірювання корисного сигналу, тобто мінімальне середньоквадратичне відхилення між корисним вхідним сигналом та можливим сумарним вихідним сигналом $y(x)$.

Будемо вважати, що у встановленому статичному режимі при відсутності завад система відтворює вхідну величину відповідно до рівності $y_{вст}(x) = m(x)$. При цьому середньоквадратична похибка вимірів при наявності завад визначається виразом

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} [m(x) - y(x)]^2 dx,$$

чи згідно (123):

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} \left[m(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-u)\omega(u)du \right]^2 dx. \qquad (124)$$

Розкриваючи дужки та змінюючи порядок інтегрування, маємо:

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} m^2(x)dx - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(u)du \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} m(x)g(x-u)dx +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\vartheta)d\vartheta \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} g(x-u)g(x-\vartheta)dx. \qquad (125)$$

Перепишемо вираз (125), використовуючи позначення

$$K_m(u) = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} m(x)m(x-u)dx, \qquad (126)$$

$$K_{mg}(u) = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} m(x)g(x-u)dx, \qquad (127)$$

$$K_g(\vartheta - u) = \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{+X} g(x-u)g(x-\vartheta)dx. \qquad (128)$$

У результаті:

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = K_m(0) - 2\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(u)K_{mg}(u)du +$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(u)du \int_{-\infty}^{+\infty} K_g(\vartheta - u)\omega(\vartheta)d\vartheta, \qquad (129)$$

де $K_m(u)$ - автокореляційна функція корисного вхідного сигналу (парна функція),

$K_{mg}(u)$ - функція взаємної кореляції корисного та суміші корисного із завадами на вході системи $K_{mg}(u) = K_{mg}(-u)$,

$K_g(\vartheta-u)$ - автокореляційна функція адитивної суміші $g(x)$ корисного сигналу та завад на вході системи (парна функція) $K_g(\vartheta-u)=K_g(u-\vartheta)$.

Будемо вважати, що функція ваги лінійної системи оптимальна ($\omega_{опт}(x)$), якщо при її підстановці в рівняння (129) з невідомими статистичними характеристиками сигналів отримується мінімальне значення середньоквадратичної похибки $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min}$. Рівняння для визначення $\omega(u)$ можна отримати, виконавши варіацію (129) для довільної функції $\omega(u)$, прирівнюючи ліву частину рівності до нуля. Варіаційний розрахунок показує, що необхідною і достатньою умовою мінімуму величини $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle$ буде значення $\omega_{опт}(u)$, яке задовольняє наступному інтегральному рівняння:

$$K_{mg}(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} K_g(\upsilon-u)\omega_{опт}(\upsilon)d\upsilon, \tag{130}$$

Доведення:

$$\delta\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle = 0-2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[\omega(u)]K_{mg}(u)du+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[\omega(u)]du\int_{-\infty}^{+\infty}K_g(\vartheta-u)\omega(\vartheta)d\vartheta+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(u)du\int_{-\infty}^{+\infty}K_g(\vartheta-u)\delta[\omega(\vartheta)]d\vartheta=$$

$$\{u\to\upsilon\}$$

$$=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[\omega(u)]K_{mg}(u)du+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[\omega(u)]du\int_{-\infty}^{+\infty}K_g(\vartheta-u)\omega(\vartheta)d\vartheta+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[\omega(u)]du\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(\vartheta)K_g(u-\vartheta)d\vartheta=$$

$$\{K_g(x)=K_g(-x)\}$$

$$=-2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[\omega(u)]K_{mg}(u)du+2\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[\omega(u)]du\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(\vartheta)K_g(\vartheta-u)d\vartheta=0.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta[\omega(u)]\cdot\left[-K_{mg}(u)+\int_{-\infty}^{+\infty}\omega(\vartheta)K_g(\vartheta-u)d\vartheta\right]du=0.$$

Оскільки варіація $\delta[\omega(u)]\neq 0$, $\omega(u)$ - довільна функція,

$$K_{mg}(\vartheta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_{onm}(\vartheta)K_g(\vartheta-u)d\vartheta.$$

При цьому значення середньоквадратичної похибки вимірювання корисного сигналу буде таким:

$$\left\langle\varepsilon^2\right\rangle_{onm}=K_m(0)-\int\int_{-\infty}^{+\infty}\omega_{onm}(u)\omega_{onm}(\vartheta)K_n(\vartheta-u)dud\vartheta=$$
$$=K_m(0)-K_y(0)=\left\langle m^2\right\rangle-\left\langle y^2\right\rangle. \qquad (131)$$

де $K_y(0)$ - автокореляційна функція вихідного сигналу при аргументі $\xi=0$ (див. (111)).

Розв'яжемо рівняння (130) частотними методами, застосувавши до його лівої та правої частин перетворення Фур'є. Отже, отримаємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}K_{mg}(u)\exp(-i\omega_x u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}K_g(\vartheta-u)\omega_{onm}(\vartheta)d\vartheta\right]\exp(-i\omega_x u)du.$$

Ліва частина цього виразу є прямим Фур'є-перетворенням від кореляційної функції $K_{mg}(u)$, яка в загальному випадку - не парна функцією. Їй в загальному випадку буде відповідати спектр потужності $S_{mg}(i\omega_x)$. Права частина являє собою Фур'є-перетворення від згортки і дорівнює добутку Фур'є-трансформацій відповідних функцій $S_g(\omega_x)$ і $W_{onm}(i\omega_x)$, тобто

$$S_{mg}(i\omega_x)=W_{onm}(i\omega_x)\,S_g(\omega_x).$$

Таким чином, оптимальна амплітудо фазова частотна (АФЧ) передаточна функція лінійної системи визначається відношенням спектрів потужності корисного сигналу до сумарного сигналу.

$$W_{onm}(i\omega_x)=S_{mg}(i\omega_x)/S_g(\omega_x). \qquad (132)$$

Знайдемо частотне представлення $\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min}$. Відповідну оптимальну функцію ваги системи (чи оптимальну апартну функцію) можна знайти з Фур’є-перетворення:

$$\omega_{onm}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W_{onm}(i\omega_x)\exp(i\omega_x x)d\omega_x .$$

Згідно з (108), (112), (131), отримуємо:

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min} = K_m(0) - K_y(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[S_m(\omega_x) - S_y(\omega_x)\right]d\omega_x = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[S_m(\omega_x) - \left|W_{onm}(i\omega_x)\right|^2 S_g(\omega_x)\right]d\omega_x. \quad (133)$$

При цьому вираз

$$\left\langle \varepsilon^2 \right\rangle_{\min} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[S_m(\omega_x) - \frac{\left|S_{mg}(i\omega_x)\right|^2}{S_g(\omega_x)}S_y(\omega_x)\right]d\omega_x . \quad (134)$$

визначає мінімальне значення середньоквадратичної похибки при вимірюваннях із допомогою оптимізованої ОЕС випадкової величини на фоні випадкових завад у спектральному представленні.

У загальному випадку, коли на вході лінійної системи сигнал $m(x)$ чи завада $n(x)$ взаємноскорельовані, то відповідно до визначення спектра потужності випадкового сигналу (див. 106) та виразів (127, 128), значення $S_{mg}(i\omega_x)$ та $S_g(\omega_x)$ визначається такими сумами:

$$S_g(\omega_x) = S_m(\omega_x) + S_{mn}(i\omega_x) + S_{nm}(i\omega_x) + S_n(\omega_x) = \\ = S_m(\omega_x) + S_n(\omega_x) + 2RES_{mn}(i\omega_x), \quad (135) \\ S_{mg}(i\omega_x) = S_m(\omega_x) + S_{mn}(i\omega_x).$$

Причому $S_{mn}(i\omega_x) = S_{nm}(-i\omega_x) = S_{nm}^*(i\omega_x)$.

Доведення:

Згідно з (108) і визначенням кореляційної функції:

$$K_{mg}(u)=K_{gm}(-u)$$
$$K_{mn}(u)=K_{nm}(-u)\,,$$
$$K_{mg}(u)=\langle m(x)g(x+u)\rangle$$
$$K_{mn}(u)=\langle m(x)n(x+u)\rangle$$
$$K_{nm}(-u)=\langle n(x)m(x-u)\rangle=\langle n(x+u)m(x)\rangle=\langle m(x)n(x+u)\rangle=K_{mn}(u).$$
$$S_{mg}(i\omega_x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_{mg}(u)\exp(-i\omega_x u)du.$$
$$S_{gm}(i\omega_x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_{gm}(u)\exp(-i\omega_x u)du=\{u=-y\}=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_{gm}(-y)\exp(i\omega_x y)dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_{mg}(y)\exp(i\omega_x y)dy,$$
$$S^*_{gm}(i\omega_x)=S_{gm}(-i\omega_x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K_{mg}(y)\exp(-i\omega_x y)dy=S_{mg}(i\omega_x).$$
$$S_{gm}(i\omega_x)=S_{mg}(-i\omega_x)=S^*_{mg}(i\omega_x).$$
$$S_{mn}(i\omega_x)=S^*_{nm}(i\omega_x).$$
$$S_{nm}(i\omega_x)=S^*_{mn}(i\omega_x)$$

Якщо завада та сигнал не скорельовані, то $S_{mn}(i\omega_x)=S_{nm}(i\omega_x)=0$, і тоді:

$$\begin{aligned}&S_g(\omega_x)=S_m(\omega_x)+S_n(\omega_x),\\&S_{mg}(i\omega_x)=S_m(\omega_x).\end{aligned}\qquad(136)$$

При умові (136) мінімальне значення середньоквадратичної похибки вимірювання випадкової величини, згідно із (134), буде таким:

$$\left\langle \varepsilon^2\right\rangle_{\min}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_m(\omega_x)S_n(\omega_x)}{S_m(\omega_x)+S_n(\omega_x)}d\omega_x,\qquad(137)$$

а оптимальна амплітудочастотна фазова передаточна функція $W_{опт}(i\omega_x) = W_{опт}(\omega_x)$ визначиться з умови

$$W_{опт}(\omega_x) = \frac{S_m(\omega_x)}{S_m(\omega_x) + S_n(\omega_x)}. \quad (138)$$

З останньої формули випливає, що в області частот, де виконується умова $S_m(\omega_x) >> S_n(\omega_x)$, $W_{опт}(\omega_x) \approx 1$, а коли $S_m(\omega_x) << S_n(\omega_x)$, оптимальне значення функції $W_{опт}(\omega_x)$ буде таким:

$$W_{опт}(\omega_x) \approx \frac{S_m(\omega_x)}{S_n(\omega_x)}.$$

Звідси можна зробити такі висновки:

1) При некорельованій заваді оптимальна робота ОЕС за рахунок підбору її аплітудо частотної фазової передаточної функції (АЧФПФ) здійснюється тільки за рахунок фільтрації за амплітудою (фільтрація за фазою відсутня, функція $W_{опт}(\omega_x)$ - дійсна, додатна, фільтрація всіх частот здійснюється з однією і тією ж фазою.

2) При некорельованій заваді, в області частот, де $S_m(\omega_x) >> S_n(\omega_x)$ оптимізація роботи системи досягається за рахунок фільтра з неселективним пропусканням на частоті гармонічних складових сигналу.

3) При некорельованій заваді в області частот, де $S_m(\omega_x) << S_n(\omega_x)$ оптимізація роботи системи досягається за рахунок селективного фільтра із пропусканням, що дорівнює відношенню $\dfrac{S_m(\omega_x)}{S_n(\omega_x)}$ (тобто, зворотно пропорційно до спектра потужності завади при однаковому енергетичному спектру корисного сигналу).

4) При наявності кореляції між завадою та сигналом оптимізація частотно амплітудно фазової передаточної функції можлива за рахунок одночасної фільтрації за амплітудою та фазою, так як $W_{опт}(i\omega_x)$ буде комплесною.

Для незалежних величин сигналу та завади функцію $W_{onm}(\omega_x)$ можна представити в простому аналітичному вигляді, якщо ввести позначення $S_m(\omega_x)+S_n(\omega_x)=\psi(-i\omega_x)\cdot\psi(i\omega_x)=|\psi|^2$. Відповідно до (132), після послідовних Фур'є-перетворень для розглядаємого випадку.

$$W_{onm}(\omega_x)=\frac{S_m(\omega_x)}{S_m(\omega_x)+S_n(\omega_x)}=\frac{S_m(\omega_x)}{\psi(-i\omega_x)\cdot\psi(i\omega_x)};$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}W_{onm}(\omega_x)\psi(i\omega_x)\exp(i\omega_x x)d\omega_x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_m(\omega_x)}{\psi(-i\omega_x)}\exp(i\omega_x x)d\omega_x.$$

Формально отримаємо:

$$W_{onm}(\omega_x)=\frac{1}{2\pi\psi(i\omega_x)}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\omega_x x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_m(\omega_x)}{\psi(-i\omega_x)}\exp(i\omega_x x)d\omega_x. \quad (140)$$

Позначимо $\dfrac{S_m(\omega_x)}{\psi(-i\omega_x)}=\sum_{l=1}^{n}\dfrac{A_l}{i\omega_x+\alpha_l}$.

Тоді подвійний інтеграл $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\omega_x x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{S_m(\omega_x)}{\psi(-i\omega_x)}\exp(i\omega_x x)d\omega_x$ згідно із властивістю функції $f(x)=\left\{\begin{matrix}\exp(-\alpha x) & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{matrix}\right\}$, $F(i\omega_x)=\dfrac{1}{\alpha+i\omega_x}$ буде дорівнювати виразу

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-i\omega_x x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_m(\omega_x)}{\psi(-i\omega_x)}\exp(i\omega_x x)d\omega_x=$$

$$=\sum_{l=1}^{n}\frac{A_l}{i\omega_x+\alpha_l}=\sum_{l=1}^{n}A_l\exp(-iarctg(\frac{\omega_x}{\alpha_l})).$$

У зв'язку із цим оптимальне значення А.Ч.Ф. передаточної функції для нескорельованого сигналу та завади можна представити виразом:

$$W_{опт}(\omega_x) = \frac{1}{\psi(i\omega_x)} \sum_{l=1}^{n} \frac{A_l}{i\omega_x + \alpha_l}, \tag{141}$$

де $\psi(i\omega_x) = \left[S_m(\omega_x) + S_n(\omega_x)\right]^{1/2} \exp(-iartg\,\psi(i\omega_x))$.

Значення коефіцієнтів A_l, α_l визначається з розв'язку рівності:

$$\frac{S_m(\omega_x)}{\left[S_m(\omega_x) + S_n(\omega_x)\right]^{1/2}} = \exp(-i\arg\psi(i\omega_x)) \sum_{l=1}^{n} \frac{A_l}{i\omega_x + \alpha_l}. \tag{142}$$

Якщо сигнали є функціями *n*-змінних, що позначаються вектором $\vec{X}$, то для знаходження оптимальної функції ваги $\omega(\vec{X})$ та амплітудочастотно фазової передаточної функції $W(i\vec{\omega}_x)$ можна використати рівняння

$$K_{mg}(\vec{u}) = \int\limits_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{+\infty} \omega_{опт}(\vec{v}) K_g(\vec{v} - \vec{u}) d\vec{v}, \tag{143}$$

$$W_{опт}(i\vec{\omega}_x) = \frac{S_{mg}(i\vec{\omega}_x)}{S_g(\vec{\omega}_x)}, \tag{144}$$

а також

$$\omega_{опт}(\vec{X}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{+\infty} W_{опт}(i\vec{\omega}_x) \exp(i\vec{\omega}_x \vec{X}) d\vec{\omega}_x. \tag{145}$$