ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ
ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

ПМ&ІТ
2022

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій

22-24 вересня 2022 року

Чернівці – 2022

Про розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для еволюційних рівнянь із псевдодиференціальними операторами у просторах типу S

Василь Городецький, Руслана Колісник, Ольга Мартинюк

o.martynyuk@chnu.edu.ua

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

Розглянемо еволюційне рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t + \hat{B}u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \tag{1}$$

$\hat{B} = B_{p,\omega}/S_2^{1/\omega}$ ($\omega \in (0,1]$, $p \in \mathbb{N}$ – фіксовані), при цьому $\hat{B} = F^{-1}[\varphi_{p,\omega} \cdot F]$.

Під розв'язком рівняння (1) розуміємо функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка володіє властивостями: 1) $u(t,\cdot) \in C^1(0,+\infty)$ при кожному $x \in \mathbb{R}$; 2) $u(\cdot,x) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t \in (0,+\infty)$; 3) $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (1).

Для рівняння (1) задамо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти функцію $u(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, яка задовольняє рівняння (1) та умову

$$\mu \lim_{t \to +0} u(t,\cdot) - \sum_{k=1}^{m} \mu_k B_k u(t_k,\cdot) = f, \quad f \in (S_{2,*}^{1/\omega})', \tag{2}$$

де граничне співвідношення (2) розглядається у просторі $(S_2^{1/\omega})'$, $\{\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m\} \subset (0,+\infty)$, $\{t_1,\ldots,t_m\} \subset (0,\infty)$, $m \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum_{k=1}^{m} \mu_k$, $B_1, \ldots, B_m$ – псевдодиференціальні оператори, побудовані за функціями (символами) $g_k\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ відповідно: $B_k = F^{-1}[g_k(\sigma)F]$, $k \in \{1,\ldots,m\}$. Функції g_k, $k \in \{1,\ldots,m\}$, задовольняють умови: $g_k \in C^\infty(\mathbb{R})$; $\forall \varepsilon > 0 \, \forall \sigma \in \mathbb{R}: \ g_k(\sigma) \le \exp\{\varepsilon|\sigma|\}$, $\exists M_k > 0 \, \forall s \in \mathbb{N}: \ |D_\sigma^s g_k(\sigma)| \le M_k^s s!$.

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *є розв'язною, розв'язок дається формулою*

$$u(t,x) = f * G(t,x), (t,x) \in \Omega,$$

де $G(t,x)$, $(t,x) \in \Omega$, *– фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння* (1), $u(t,\cdot) \in S_2^{1/\omega}$ *при кожному* $t > 0$.

Зауваження *Якщо в умові* (2) $B_1 = \cdots = B_m = I$ *(*I *– одиничний оператор), то можна довести, що тоді задача* (1), (2) *коректно розв'язна, розв'язок дається формулою* $u(t,x) = f * G(t,x)$, $f \in (S_{1,*}^{1/\omega})'$, $(t,x) \in \Omega$, $G(t,x) = F^{-1}[Q(t,\cdot)]$, $Q(t,\sigma) = e^{-ta(\sigma)}\Big(\mu - \sum_{k=1}^{m} \mu_k e^{-t_k a(\sigma)}\Big)^{-1}$, $G(t,\cdot) \in S_1^{1/\omega}$ *при кожному* $t > 0$.