# Залежність функцій на добутках

## від певної кількості координат

Володимир Михайлюк

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

**В. В. МИХАЙЛЮК**

# ЗАЛЕЖНІСТЬ ФУНКЦІЙ НА ДОБУТКАХ ВІД ПЕВНОЇ КІЛЬКОСТІ КООРДИНАТ

***МОНОГРАФІЯ***

ЧНУ РУТА

Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2023

УДК 517.51
М 69

*Друкується за ухвалою Вченої ради*
*Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича*
(протокол № 13 від 27 грудня 2022 року)

***Рецензенти*:**

***Банах Т.О.***, доктор фізико-математичних наук, професор Львівського національного університету імені Івана Франка,

***Максименко С.І.***, завідувач відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України, член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук, професор,

***Попов М.М.***, доктор фізико-математичних наук, професор, старший науковий співробітник Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника.

**Михайлюк В.В.**
М 69 Залежність функцій на добутках від певної кількості координат : монографія. Чернівці : Чернівец. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2023. 200 с.

**ISBN 978-966-423-775-5**

У монографії викладено результати про залежність від певної кількості координат неперервних і нарізно неперервних відображень на добутках, а також подано застосування результатів про залежність нарізно неперервних функцій до дослідження деяких питань берівської класифікації і вивчення властивостей компактних підмножин просторів неперервних функцій.

Призначена для науковців, аспірантів і студентів закладів вищої освіти математичних спеціальностей.

**УДК 517.51**

ISBN 978-966-423-775-5


---

Наукове видання

**Михайлюк В.В.**

**ЗАЛЕЖНІСТЬ ФУНКЦІЙ НА ДОБУТКАХ ВІД ПЕВНОЇ КІЛЬКОСТІ КООРДИНАТ**

Монографія

Підписано до друку 31.03.2023. Формат 60 х 84/16. Папір офсетний.
Друк різографічний. Ум.-друк. арк. 11,0. Обл.-вид. арк. 11,8. Зам.1002.
Видавництво та друкарня Чернівецького національного університету
58002, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК №891 від 08.04.2002 р.

# Зміст

# ВСТУП

Залежність неперервних функцій на добутках від певної кількості координат інтенсивно вивчалася математиками середини XX століття (І. Мібу, С. Мазур, Г. Корсон і Дж. Ізбелл, К. Росс і А. Стоун, Р. Енґелькінґ, А. Міщенко, Н. Нобл і М. Ульмер) і стала зручним інструментом для досліджень властивостей неперервних відображень, залишаючись, втім, не менше, впродовж кількох десятиліть поза увагою дослідників питань теорії нарізно неперервних відображень.

В 1992 році автором при вивченні нарізно неперервних функцій на добутках тихоновських кубів запропоновано новий підхід, який базувався на понятті залежності функцій від певної кількості координат. Подальший розвиток цього методу разом із використанням інших технічних прийомів та ідей показали, що даний підхід застосовний до розв'язання багатьох задач теорії нарізно неперервних відображень і дає можливість отримувати найбільш загальні результати у напрямку конкретних досліджень. Загальний варіант цього підходу дістав назву "координатного методу" і його використання стало основою результуючої роботи [55].

Мета цієї праці – методично опрацьований виклад різних підходів до одержання результатів про залежність від певної кількості координат неперервних і нарізно неперервних відображень. Крім того, ми подамо також застосування результатів про залежність нарізно неперервних функцій до дослідження деяких питань берівської класифікації і до вивчення властивостей компактних підмножин просторів неперервних функцій.

За своїм стилем поданий матеріал цілком доступний для студентів-математиків старших курсів, і його якісне усвідомлення не вимагає від читача надто глибоких знань, які виходять за межі стандартних курсів топології, математичного і функціонального аналізу. Дана праця зорієнтована також на широке коло науковців: від з математиків-початківців, для яких її опрацювання може послужити добрим стартовим майданчиком для подальших наукових звершень, і до фахівців даної тематики, котрі тут, сподіваємось, також зможуть знайти для себе корисну та цікаву інформацію.

При викладі матеріалу ми будемо дотримуватись нижченаведених підходів.

1) Порядок викладу матеріалу за розділами зорганізований, в цілому, у хронологічному порядку: від перших простіших результатів про залежність неперервних функцій від зліченної кількості координат до розгляду теорем про залежність функцій на підпросторах добутків і їх застосу-

вань.
2) Базисний теоретичний матеріал у розділах чи підрозділах методично зорієнтований на прикінцеве одержання основних результатів. Разом із тим, ми включили до детального розгляду, крім безпосередніх результатів про залежність та їх застосувань, три класичні теореми загальної теорії функцій: теорему Тихонова про компактність добутку, теорему Стоуна-Вейєрштрасса і теорему Тихонова про універсальність тихоновських кубів, оскільки вони відіграють ключову роль у розвитку наших досліджень на відповідних етапах.
3) Для збереження повноти історичної картини щодо різних доведень тих чи інших основних результатів в кожному розділі після викладу основного матеріалу ми подаємо заключні зауваження історично-бібліографічного характеру, які, зокрема, містять посилання на альтернативні доведення, що одержані незалежно від викладених в основному тексті.
4) В кінці кожного розділу ми помістили вправи, які, з одного боку, дають можливість закріпити ключові підходи, застосовані в головній змістовній частині, а з іншого – вони відображають ідеї та методи міркувань, які використовувалися в дослідженнях даної тематики, але не увійшли до основного розгляду.
5) В останньому розділі ми подали відкриті питання з даної тематики, які ще чекають свого розв'язання.
6) В цілому, ми будемо дотримуватися загальноприйнятої термінології і звичних позначень, які, наприклад, можна знайти в книзі [16]. В кінці ми також помістили перелік умовних позначень і термінів, який, зокрема, містить посилання на спеціальні позначення, використовувані впродовж усього тексту.

# Розділ 1

# НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ НА ДОБУТКАХ КОМПАКТНИХ ПРОСТОРІВ

У цьому розділі ми розглянемо найпростіші результати про залежність неперервних функцій на просторах-добутках від зліченної кількості координат. Ці результати стосуються дійснозначних функцій і відображень зі значеннями у метризовному просторі, які визначені в обох випадках на добутку сім'ї компактних просторів. Вони – нескладні наслідки двох класичних фундаментальних теорем: теореми Тихонова про компактність добутку і теореми Стоуна-Вейєрштрасса про кільце неперервних функцій на компакті. Беручи до уваги як важливість цих результатів для нашого викладу, так і загальнонаукову їхню цінність, ми у перших двох підрозділах подамо ці теореми з доведеннями. Потім у третьому розділі ми доведемо результати про залежність неперервних функцій від зліченної кількості координат.

# 1.1

## Теорема Тихонова про компактність добутку

У даному підрозділі ми викладемо одну із фундаментальних теорем загальної теорії функцій – теорему Тихонова про компактність добутку сім'ї компактних просторів. При цьому ми будемо використовувати схему міркувань, викладених при доведенні цієї теореми в книзі [16] (див. доведення теореми 3.2.4).

**1.1.1. Властивість скінченного перетину і характеризація компактних просторів.** У цьому пункті ми розглянемо класичну характеризацію компактного простору, яка формулюється у термінах перетинів сімей чи систем замкнених підмножин цього простору.

Під *системою* множин ми розуміємо множину, елементами якої є множини. Для різних елементів $A$ і $B$ системи $\mathcal{A}$ обов'язково $A \neq B$. Для довільної множини $X$ через $2^X$ ми позначаємо систему всіх підмножин множини $X$.

Нехай $I$ та $X$ – деякі множини. Функцію $\alpha : I \to 2^X$ називатимемо *сім'єю* множин і позначатимемо її $(A_i : i \in I)$ або $(A_i)_{i \in I}$. Зауважимо, що для довільних різних індексів $i, j \in I$ може виконуватись рівність $A_i = A_j$. У зв'язку з сім'єю множин $(A_i : i \in I)$ природно виникає система множин $\{A_i : i \in I\}$, яка для непорожньої множини $I$ не збігається з сім'єю $(A_i : i \in I)$.

Для сім'ї $(A_i : i \in I)$ підмножин множини $X$ під перетином цієї сім'ї ми розуміємо множину $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$, а під об'єднанням – множину $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Аналогічно для системи $\mathcal{B}$ підмножин множини $X$ під перетином і об'єднанням цієї системи ми розуміємо множини $\bigcap \mathcal{B} = \bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ і $\bigcup \mathcal{B} = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ відповідно.

Зауважимо, що у випадку, коли сім'я $(A_i : i \in I)$ – порожня, тобто $I = \emptyset$, чи ситема $\mathcal{B}$ – порожня, ми вважаємо, що

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \mathcal{B} = X.$$

Зазначимо, що при цьому зберігаються природні властивості перетинів. Наприклад, якщо $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, то $\bigcap \mathcal{A} \subseteq \bigcap \mathcal{A}'$.

Будемо казати, що сім'я $(A_i : i \in I)$ підмножин непорожньої множини $X$ має *властивість скінченного перетину*, якщо для довільної скінченної множини $J \subseteq I$ перетин $\bigcap\limits_{i \in J} A_i$ – непорожній.

Аналогічно вводиться поняття властивості скінченного перетину для систем множин. А саме, система $\mathcal{A}$ підмножин непорожньої множини $X$ має *властивість скінченного перетину*, якщо для довільної скінченної підсистеми $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ перетин $\bigcap \mathcal{B}$ непорожній.

Наступні два твердження мають очевидні доведення.

**Твердження 1.1.1.** *Сім'я $(A_i : i \in I)$ підмножин непорожньої множини $X$ має властивість скінченного перетину тоді і тільки тоді, коли відповідна їй система*

$$\mathcal{B} = \{A_i : i \in I\}$$

*має властивість скінченного перетину.*

*І навпаки, система $\mathcal{A}$ підмножин непорожньої множини $X$ має властивість скінченного перетину тоді і тільки тоді, коли відповідна їй сім'я $(A_B : B \in \mathcal{B})$ множин $A_B = B$ має властивість скінченного перетину.*

**Твердження 1.1.2.** *Нехай сім'я $(A_i : i \in I)$ підмножин непорожньої множини $X$ має властивість скінченного перетину і $f : X \to Y$ – довільне відображення. Тоді сім'я $(f(A_i) : i \in I)$ підмножин множини $Y$ також має властивість скінченного перетину.*

Сім'ю (чи систему), яка складається з відкритих множин у топологічному просторі $X$ називатимемо *відкритим покриттям* цього простору, якщо об'єднання всіх множин даної сім'ї (чи системи) дорівнює всьому простору $X$.

Нагадаємо, що топологічний простір $X$ називається *компактним*, якщо з довільного відкритого покриття цього простору можна виділити скінченне підпокриття.

Ми будемо використовувати наступну добре відому характеризацію компактних просторів (див. [16, теорема 3.1.1])

**Твердження 1.1.3.** *Для довільного непорожнього топологічного простору $X$ наступні умови рівносильні:*

- $(i)$ *простір $X$ – компактний;*
- $(ii)$ *довільна сім'я замкнених множин $(F_i : i \in I)$ з властивістю скінченного перетину має непорожній перетин $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$;*
- $(iii)$ *довільна система замкнених множин $\mathcal{F}$ з властивістю скінченного перетину має непорожній перетин $\bigcap \mathcal{F}$.*

*Доведення.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай $(F_i : i \in I)$ – довільна сім'я з властивістю скінченного перетину, яка складається зі замкнених множин $F_i$ у компактному просторі $X$. Для кожного $i \in I$ покладемо $U_i = X \setminus F_i$. Оскільки сім'я $(F_i : i \in I)$ має властивість скінченного перетину, то для довільної скінченної множини $J \subseteq I$ перетин $\bigcap\limits_{i \in J} F_i$ – непорожній, тобто

$$\bigcup_{i \in J} U_i = \bigcup_{i \in J} (X \setminus F_i) = X \setminus \left( \bigcap_{i \in J} F_i \right) \neq X.$$

Отже, зі сім'ї $(U_i : i \in I)$ відкритих множин $U_i$ не можна виділити скінченну підсім'ю, яка покриває весь компактний простір $X$. Тому сім'я $(U_i : i \in I)$ не є покриттям простору $X$, тобто

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = X \setminus \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) \neq \emptyset.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Міркуємо аналогічно. Нехай $(U_i : i \in I)$ – довільне відкрите покриття простору $X$ з властивістю $(ii)$. Для кожного $i \in I$ приймемо $F_i = X \setminus U_i$. Оскільки сім'я $(U_i : i \in I)$ є покриттям простору $X$, то

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus U_i) = X \setminus \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right) = \emptyset.$$

Отже, сім'я $(F_i : i \in I)$ замкнених множин $F_i$ в просторі $X$ з властивістю $(ii)$ має порожній перетин. Тому ця сім'я не має властивості скінченного перетину, тобто існує скінченна множина $J \subseteq I$ така, що перетин $\bigcap\limits_{i \in J} F_i$ порожній, тобто

$$\bigcup_{i \in J} U_i = X \setminus \left( \bigcap_{i \in J} F_i \right) = X.$$

Отже, з відкритого покриття $(U_i : i \in I)$ простору $X$ можна виділити скінченне підпокриття. Тому простір $X$ компактний.

Рівносильність умов $(ii)$ та $(iii)$ випливає безпосередньо з твердження 1.1.1. $\square$

**1.1.2. Один наслідок з леми Тейхмюллера – Тьюкі.** У цьому пункті ми подамо один простий наслідок з леми Тейхмюллера – Тьюкі, який стосується систем множин із властивістю скінченного перетину.

Нехай $X$ – непорожня множина і $\phi$ – деяка властивість підмножин множини $X$. Будемо казати, що $\phi$ це властивість скінченного характеру в $X$, якщо:

$(p_1)$ порожня множина має властивість $\phi$;

$(p_2)$ довільна множина $A \subseteq X$ має властивість $\phi$ тоді і тільки тоді, коли кожна її скінченна підмножина $B \subseteq A$ має властивість $\phi$.

У випадку, коли властивість $\phi$ стосується систем множин, тобто, множин, елементами яких є підмножини деякої множини $X$, то $\phi$ може мати скінченний характер у множині $2^X$ усіх підмножин множини $X$.

**Твердження 1.1.4.** *Властивість $\phi$ скінченного перетину систем підмножин непорожньої множини $X$ – властивість скінченного характеру у множині $2^X$.*

*Доведення.* Перевіримо умови $(p_1)$ і $(p_2)$ для систем $\mathcal{A} \subseteq 2^X$.

Якщо $\mathcal{A} = \emptyset$, то $\mathcal{B} = \mathcal{A}$ для довільної скінченної підсистеми $\mathcal{B}$ системи $\mathcal{A}$, і тоді $\bigcap \mathcal{B} = X \neq \emptyset$. Отже, порожня система $\mathcal{A}$ має властивість скінченного перетину $\phi$, тобто виконується умова $(p_1)$.

З іншого боку, довільна скінченна система $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ має властивість $\phi$ тоді і тільки тоді, коли $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Тому, згідно з означенням властивості скінченного перетину $\phi$, довільна система $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ має властивість $\phi$ тоді і тільки тоді, коли кожна її скінченна підсистема $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ має властивість $\phi$. Тобто, виконується умова $(p_2)$. □

Нехай $\mathcal{A}$ – деяка система множини. Елемент $A_0 \in \mathcal{A}$ називатимемо *максимальним* у системі $\mathcal{A}$, якщо для довільного елемента $A \in \mathcal{A}$ з умови $A_0 \subseteq A$ випливає рівність $A = A_0$.

Зрозуміло, що ця термінологія застосовна і у випадку, коли елементами систем множин також є системи множин. А саме, нехай $\mathfrak{A}$ – деяка сукупність систем множин. Систему множин $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{A}$ називатимемо *максимальною* в $\mathfrak{A}$, якщо для довільної системи $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ з умови $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ випливає рівність $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$.

Нам буде потрібна лема Тейхмюллера-Тьюкі, яка є одним із рівносильних переформулювань аксіоми вибору (дивись, наприклад, [16, розділ I.4]) і гарантує існування максимального елемента у системі множин, породженій властивістю скінченного характеру.

**Теорема 1.1.5** (Лема Тейхмюллера-Тьюкі). *Нехай $X$ – непорожня множина, $\phi$ – властивість скінченного характеру підмножин множини $X$ і $\mathcal{A}$ – система всіх підмножин $A$ множини $X$, які мають властивість $\phi$. Тоді для довільної множини $A \in \mathcal{A}$ в системі $\mathcal{A}$ існує максимальний елемент $A_0 \in \mathcal{A}$ такий, що $A \subseteq A_0$.*

Тепер із твердження 1.1.4 і теореми 1.1.5 негайно випливає наступний наслідок, який ми будемо використовувати для доведення основного результату даного підрозділу.

**Наслідок 1.1.6.** *Нехай $X$ – непорожня множина і $\mathfrak{A}$ – сукупність усіх систем $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ з властивістю скінченного перетину. Тоді для довільної системи $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ в сукупності $\mathfrak{A}$ існує максимальний елемент $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{A}$ такий, що $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_0$.*

Наступне твердження дає властивості максимальних систем множин із властивістю скінченного перетину.

**Твердження 1.1.7.** *Нехай $X$ – непорожня множина, $\mathfrak{A}$ – сукупність усіх систем $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ із властивістю скінченного перетину і $\mathcal{A}_0$ – максимальний елемент в $\mathfrak{A}$. Тоді*

(*i*) *$A_1 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{A}_0$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_0$;*

(*ii*) *якщо множина $A \subseteq X$ така, що $A \cap A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_0$, то $A \in \mathcal{A}_0$;*

(*iii*) *якщо множина $B \subseteq X$ така, що $B \cap A \neq \emptyset$ для кожного $A \in \mathcal{A}_0$, то $B \in \mathcal{A}_0$.*

*Доведення.* (*i*). Нехай $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_0$ і $A = A_1 \cap \dots \cap A_n$. Оскільки система $\mathcal{A}_0$ має властивість скінченного перетину, то і система $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \{A\}$ має властивість скінченного перетину, тобто $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$. Тепер із максимальності системи $\mathcal{A}_0$ і включення $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ випливає рівність $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, тобто $A \in \mathcal{A}_0$.

(*ii*). Нехай $A \subseteq X$ така множина, що $A \cap A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$ для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}_0$. Далі міркуємо аналогічно, як у випадку (*i*). Оскільки $\mathcal{A}_0 \in \mathfrak{A}$, то $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \cup \{A\} \in \mathfrak{A}$. І з максимальності $\mathcal{A}_0$ і включення $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ випливає, що $A \in \mathcal{A}_0$.

Властивість (*iii*) випливає безпосередньо з (*i*) та (*ii*). □

### 1.1.3. Топологічні добутки, проекції і базисні множини.

У даному пункті ми подамо деякі поняття і факти, пов'язані з топологічними добутками і уведемо позначення, які будемо використовувати в подальшому викладі.

Декартів добуток $\prod\limits_{s \in S} X_s$ сім'ї $(X_s)_{s \in S}$ непорожніх множин $X_s$ складається з усіх сімей $(x_s)_{s \in S}$ елементів $x_s \in X_s$. Елемент $x$ добутку $\prod\limits_{s \in S} X_s$ ми також позначатимемо як сім'ю $(x(s))_{s \in S}$ елементів $x(s) \in X_s$. При цьому елемент $(x(s))_{s \in S}$ є функцією $x : S \to \bigcup\limits_{s \in S} X_s$.

Для довільного елемента $x = (x_s)_{s \in S}$ добутку $\prod\limits_{s \in S} X_s$ і непорожньої множини $T \subseteq S$ через $x|_T$ ми позначаємо сім'ю $x = (x_s)_{s \in T}$, яка є елементом добутку $\prod\limits_{s \in T} X_s$.

У випадку, коли $X_s = Y$ для кожного $s \in S$ добуток $\prod\limits_{s\in S} X_s$ ми позначаємо $Y^S$ і він складається з усіх функцій $x : S \to Y$.

У зв'язку з декартовим добутком $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ природно виникає сім'я $(p_s)_{s\in S}$ відображень $p_s : X \to X_s$,

$$p_s((x_t)_{t\in S}) = x_s,$$

які називаються *$s$-ми проекціями.*

Тепер нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів $X_s$ і $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$. *Топологією добутку* $\tau$ на множині $X$ називається найслабша топологія на $X$, відносно якої всі проекції $p_s$ – неперервні. При цьому топологічний простір $(X, \tau)$ називається *топологічним добутком* сім'ї топологічних просторів $(X_s)_{s\in S}$.

Зазначимо, що базу топології добутку на топологічному добутку $\prod\limits_{s\in S} X_s$ утворюють множини вигляду

$$U = \bigcap_{s\in T} p_s^{-1}(U_s) = \prod_{s\in T} U_s \times \prod_{s\in S\setminus T} X_s,$$

де $T \subseteq S$ – скінченна множина і $(U_s)_{s\in T}$ – сім'я відкритих у просторі $X_s$ множин $U_s$. Базу, яка складається з таких множин $U$ ми називатимемо *стандартною*, а її елементи – *базисними відкритими множинами.* Іншими словами, відкрита множина $U$ в топологічному добутку $\prod\limits_{s\in S} X_s$ – базисна тоді і тільки тоді, коли

$$U = \prod_{s\in S} U_s,$$

де $(U_s)_{s\in S}$ – сім'я відкритих в просторі $X_s$ множин $U_s$ така, що множина

$$R(U) = \{s \in S : U_s \neq X_s\}$$

– скінченна.

Ми часто будемо використовувати наступну просту властивість базисних множин.

**Твердження 1.1.8.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів, $U = \prod\limits_{s\in S} U_s$ – базисна відкрита множина в топологічному добутку $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $x = (x_s)_{s\in S} \in U$ і $y = (y_s)_{s\in S} \in X$ такі, що $x|_{R(U)} = y|_{R(U)}$. Тоді $y \in U$.*

*Доведення.* З одного боку, $y_s = x_s \in U_s$ для кожного $s \in R(U)$. А з іншого – $y_s \in X_s = U_s$ для кожного $s \in S \setminus R(U)$. Отже, $y_s \in U_s$ для кожного $s \in S$, тобто $y \in U$. $\square$

**1.1.4. Теорема Тихонова.** У даному пункті ми доведемо одну із найважливіших теорем загальної теорії функцій про компактність добутку компактних просторів (див. [16, теорема 3.2.4]).

Нам буде потрібна така корисна властивість компактних просторів.

**Твердження 1.1.9.** *Нехай $X$ – компактний простір, $Y$ – топологічний простір і $f : X \to Y$ – неперервне відображення. Тоді множина $f(X)$ – компактна в просторі $Y$.*

*Доведення.* Нехай $\mathcal{V}$ – відкрите покриття множини $f(X)$ у просторі $Y$. Тоді система

$$\{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$$

– відкрите покриття компактного простору $X$. Тому існує скінченна система $\mathcal{V}_0$ така, що система

$$\{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}_0\}$$

також є покриттям простору $X$. Звідси випливає, що $\mathcal{V}_0$ – покриття множини $f(X)$. Отже, $f(X)$ – компактна множина в $Y$. □

Тепер доведемо основний результат цього підрозділу.

**Теорема 1.1.10** (теорема Тихонова). *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів $X_s$. Тоді наступні умови рівносильні*

(*i*) *топологічний добуток $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ – компактний простір;*

(*ii*) *кожний простір $X_s$ – компактний простір.*

*Доведення.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Зафіксуємо $s \in S$ і розглянемо $s$-ту проекцію $p_s : X \to X_s$,

$$p_s((x_t)_{t\in S}) = x_s,$$

яка є неперервним відображенням згідно з означенням топології добутку. Тепер із твердження 1.1.9 випливає, що простір $X_s$ – компактний, адже

$$p_s(X) = X_s.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$. Нехай кожний простір $X_s$ компактний і $\mathcal{F}$ – довільна система з властивістю скінченного перетину, яка складається зі замкнених у просторі $X$ множин. Згідно з твердженням 1.1.3 достатньо показати, що перетин цієї системи $\bigcap \mathcal{F}$ непорожній.

Нехай $\mathfrak{A}$ – сукупність усіх систем $\mathcal{A} \subseteq 2^X$ з властивістю скінченного перетину. Тоді згідно з наслідком 1.1.6 в сукупності $\mathfrak{A}$ існує максимальний елемент $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$ такий, що $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Залишилось показати, що існує елемент

$x \in X$, такий, що $x \in \overline{A}$ для кожного $A \in \mathcal{A}$, адже тоді $x \in \overline{F} = F$ для кожного $F \in \mathcal{F}$, тобто $x \in \bigcap \mathcal{F}$.

Для кожного $s \in S$ розглянеммо систему

$$\mathcal{A}_s = \{\overline{p_s(A)} : A \in \mathcal{A}\},$$

яка складається зі замкнених множин в просторі $X_s$. З твердження 1.1.2 і включення $p_s(A) \subseteq \overline{p_s(A)}$ випливає, що всі системи $\mathcal{A}_s$ мають властивість скінченного перетину у відповідному просторі $X_s$. Тепер згідно з $(ii)$ і твердженням 1.1.3 всі перетини $\bigcap \mathcal{A}_s$ непорожні, тобто для кожного $s \in S$ існує точка $x_s \in X_s$ така, що

$$x_s \in \overline{p_s(A)}$$

для кожного $A \in \mathcal{A}$.

Тепер розглянемо точку

$$x = (x_s)_{s \in S} \in X$$

і покажемо, що довільний її базисний окіл $U$ входить до системи $\mathcal{A}$. Нехай $T \subseteq S$ – скінченна множина, $(U_s)_{s \in T}$ – сім'я відкритих околів $U_s$ точок $x_s$ в просторах $X_s$ відповідно і

$$U = \bigcap_{s \in T} p_s^{-1}(U_s).$$

Зафіксуємо індекс $s \in T$ і множину $A \in \mathcal{A}$. Оскільки $x_s \in \overline{p_s(A)}$ і множина $U_s$ – це окіл точки $x_s$, то

$$U_s \cap p_s(A) \neq \emptyset,$$

тобто

$$p_s^{-1}(U_s) \cap A \neq \emptyset.$$

Отже, кожна множина $p_s^{-1}(U_s)$ перетинається з довільним елементом максимальної системи $\mathcal{A}$. Тому згідно з твердженням 1.1.7$(iii)$ маємо, що

$$p_s^{-1}(U_s) \in \mathcal{A}$$

для кожного $s \in T$. Тоді зі скінченності множини $T$ і твердження 1.1.7$(i)$ випливає, що

$$U = \bigcap_{s \in T} p_s^{-1}(U_s) \in \mathcal{A}.$$

Тепер легко встановити, що $x \in \overline{A}$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Зафіксуємо $A \in \mathcal{A}$. Оскільки кожний базисний окіл $U$ точки $x$ входить у систему $\mathcal{A}$ з властивістю скінченного перетину, то $U \cap A \neq \emptyset$ для кожного базисного околу $U$ точки $x$. Отже, $x \in \overline{A}$. $\square$

## 1.2

## Кільця неперервних функцій і теорема Стоуна – Вейєрштрасса

У даному підрозділі ми викладемо класичний результат – теорему Стоуна – Вейєрштрасса про кільце неперервних функцій на компакті. При цьому, як і в попередньому підрозділі, ми будемо в цілому дотримуватися схеми міркувань, викладених у [16] (див. доведення теореми 3.2.21)

**1.2.1. Кільце неперервних функцій.** Розпочнемо з вивчення поняття кільця неперервних функцій на топологічному просторі $X$ і одержимо найпростіші його властивості.

Нехай $X$ – топологічний простір. Через $C(X)$ ми позначаємо простір усіх неперервних дійснозначних функцій $f : X \to \mathbb{R}$, а через $\mathbb{R}^X$ – простір усіх дійснозначних функцій $f : X \to \mathbb{R}$. Зрозуміло, що кожна стала функція неперервна, а також сума, різниця і добуток двох неперервних дійснозначних функцій неперервні.

Наступне твердження, яке показує, що множина $C(X)$ є *замкнена відносно рівномірної границі*, доводиться стандартним способом.

**Твердження 1.2.1.** *Рівномірна границя послідовності неперервних функцій $f_n \in C(X)$ є неперервною функцією.*

*Доведення.* Нехай $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Виберемо номер $N \in \mathbb{N}$ такий, що

$$|f_N(x) - f(x)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

для кожного $x \in X$. Використовуючи неперервність функції $f_N$ знайдемо окіл $U$ точки $x$ такий, що

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

для кожного $x \in U$. Тепер для кожного $x \in U$ маємо

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| <$$

$$\tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Множина $F \subseteq \mathbb{R}^X$ *відокремлює точки* в $X$, якщо для довільних різних точок $x_1, x_2 \in X$ існує функція $f \in F$ така, що $f(x_1) \neq f(x_2)$.

**Твердження 1.2.2.** *Для довільного цілком регулярного простору $X$ множина $C(X)$ відокремлює точки в $X$.*

*Доведення.* Нехай $x_1, x_2 \in X$ – різні точки. Оскільки $X$ – $T_1$-простір, то множина $\{x_1\}$ – замкнена і, зокрема, існує окіл $U$ точки $x_1$ такий, що $x_2 \notin U$. З цілковитої регулярності простору $X$ випливає існування неперервної функції $f \in C(X)$ такої, що $f(x_1) = 1$ і $f(x) = 0$ для кожного $x \in U$, зокрема, $f(x_2) = 0$. □

**Означення 1.2.3.** *Множина $R \subseteq C(X)$ неперервних функцій на топологічному просторі $X$ називається кільцем функцій, якщо*

$$f + g, f - g, f \cdot g \in R$$

*для довільних $f, g \in R$.*

З тверджень 1.2.1 і 1.2.2 негайно випливає наступний результат.

**Твердження 1.2.4.** *Для довільного цілком регулярного простору $X$ множина $C(X)$ є кільцем функцій, яке містить всі сталі функції, замкнене відносно рівномірної границі і відокремлює точки в $X$.*

## 1.2.2. Теорема Діні.

Важливе місце у доведенні теореми Стоуна-Вейєрштрасса займає теорема Діні про монотонно збіжну послідовність неперервних функцій на зліченно компактному просторі, яку ми розглянемо у даному пункті.

При доведенні теореми Діні ми будемо використовувати наступний допоміжний результат, який, насправді, характеризує монотонні збіжні числові послідовності (див. вправу 1.5.8).

**Лема 1.2.5.** *Нехай $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – монотонна збіжна послідовність і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді якщо $|a_n - a| < \varepsilon$ для деяких $n \in \mathbb{N}$ і $\varepsilon > 0$, то $|a_k - a| < \varepsilon$ для кожного $k \geq n$.*

*Доведення.* Розглянемо випадок, коли послідовність $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ монотонно зростає. Нехай $|a_n - a| < \varepsilon$ для деяких $n \in \mathbb{N}$ і $\varepsilon > 0$. Оскільки

$$a = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\},$$

то $a_n \leq a_k \leq a$ для довільного $k \geq n$. Тоді

$$|a_k - a| \leq |a_n - a| < \varepsilon$$

для кожного $k \geq n$.

У випадку монотонно спадної послідовності $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ міркуємо аналогічно. □

Нагадаємо, що топологічний простір $X$ називається *зліченно компактним*, якщо з довільного зліченного відкритого покриття простору $X$ можна виділити скінченне підпокриття.

Наступний результат – основний у даному пункті.

**Теорема 1.2.6** (Теорема Діні)**.** *Нехай $X$ – зліченно компактний простір, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність неперервних функцій $f_n \in C(X)$ і $f \in C(X)$ такі, що для кожного $x \in X$ послідовність $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ монотонна і $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Тоді $f_n \rightrightarrows f$ на $X$.*

*Доведення.* Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ приймемо

$$G_n = \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}.$$

Оскільки функція $f$ і всі функції $f_n$ неперервні, то всі множини $G_n$ відкриті. Крім того, з леми 1.2.5 випливає, що

$$G_n = \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall\, k \geq n\}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо також, що

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n,$$

адже $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для кожного $x \in X$.

Отже, $(G_n : n \in \mathbb{N})$ – відкрите покриття зліченно компактного простору $X$. Тому існує скінченна множина $M \subseteq \mathbb{N}$ така, що

$$X = \bigcup_{n\in M} G_n.$$

Покладемо $m = \max M$ і одержимо, що $X = G_m$, тобто

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

для всіх $n \geq m$. □

### 1.2.3. Операції $\max$ і $\min$ у кільці функцій.

Наступним важливим інструментом при доведенні теореми Стоуна – Вейєрштрасса є можливість переходити у межах кільця, складеного з неперервних функцій, до максимуму і мінімуму двох функцій. Саме цю властивість ми встановимо у цьому пункті.

Розпочнемо з двох допоміжних тверджень, які, в результаті, дадуть рівномірне наближення многочленами функції $f(t) = \sqrt{t}$ на відрізку $[0, 1]$.

**Лема 1.2.7.** *Нехай* $a_0 = 0$, $a \in [0,1]$ *і*

$$a_{n+1} = a_n + \tfrac{1}{2}(a^2 - a_n^2)$$

*для кожного* $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Тоді послідовність* $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ *монотонно зростаючи збігається до числа* $a$.

*Доведення.* Спочатку індукцією відносно $n$ покажемо, що

$$a_n \le a$$

для кожного $n = 0, 1, 2, \ldots$. При $n = 0$ ця нерівність очевидна. Припустимо, що $a_n \le a$ для деякого $n \ge 0$. Тоді

$$a - a_{n+1} = a - a_n - \tfrac{1}{2}(a^2 - a_n^2) = (a - a_n)(1 - \tfrac{1}{2}(a + a_n)) \ge$$

$$\ge (a - a_n)(1 - \tfrac{1}{2}(a + a)) = (a - a_n)(1 - a) \ge 0.$$

Крім того, для кожного $n = 0, 1, 2, \ldots$ маємо

$$a_{n+1} - a_n = a_n + \tfrac{1}{2}(a^2 - a_n^2) - a_n = \tfrac{1}{2}(a - a_n)(a_n + a) \ge 0.$$

Отже, послідовність $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ монотонно зростає і обмежена зверху. Тому існує

$$b = \lim_{n\to\infty} a_n \ge 0.$$

Тепер, перейшовши у рекурентній формулі до границі, одержимо, що

$$b = b + \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2),$$

тобто $a = b$. $\square$

**Лема 1.2.8.** *Існує послідовність многочленів* $p_n \in C([0,1])$, *яка рівномірно збігається до функції* $f(t) = \sqrt{t}$ *на відрізку* $[0,1]$.

*Доведення.* Послідовність многочленів $p_n \in C([0,1])$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ означимо рекурентно, поклавши $p_0 \equiv 0$ і

$$p_{n+1}(t) = p_n(t) + \tfrac{1}{2}(t - p_n^2(t))$$

для всіх $t \in [0,1]$ і кожного $n = 0, 1, 2, \ldots$.

З леми 1.2.7 випливає, що для кожного $t \in [0,1]$ послідовність $(p_n(t))_{n=0}^{\infty}$ – монотонна і $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(t) = f(t)$. Тоді $p_n \rightrightarrows f$ на $[0,1]$ згідно з теоремою 1.2.6. $\square$

Тепер доведемо основний результат даного пункту.

**Теорема 1.2.9.** *Нехай $X$ – топологічний простір і $R \subseteq C(X)$ – кільце обмежених неперервних функцій, яке містить всі сталі функції і замкнене відносно рівномірної границі. Тоді*

$$\max\{f,g\}, \min\{f,g\} \in R$$

*для довільних функцій $f, g \in R$.*

*Доведення.* Оскільки

$$\max\{f,g\} = \tfrac{1}{2}(f+g+|f-g|)$$

і

$$\min\{f,g\} = \tfrac{1}{2}(f+g-|f-g|),$$

то достатньо довести, що $|f| \in R$ для кожної функції $f \in R$.

Нехай $f \in R$ і $c > 0$ такі, що $|f(x)| \le c$ для кожного $x \in X$. Розглянемо функцію

$$h(x) = \tfrac{1}{c} \cdot f(x).$$

Згідно з лемою 1.2.8 виберемо послідовність многочленів $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, яка рівномірно на $[0,1]$ збігається до функції $\varphi(t) = \sqrt{t}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ пприймемо

$$f_n(x) = p_n(h^2(x)).$$

Оскільки кільце $R$ містить всі сталі функції і $h \in R$, то кожна функція $f_n$ також належить до кільця $R$. Крім того, за вибором многочленів $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ маємо, що

$$f_n \rightrightarrows \varphi(h^2) = \sqrt{h^2} = |h|$$

на $X$. Тому $|h| \in R$, а отже, і

$$|f| = c \cdot |h| \in R.$$

$\square$

## 1.2.4. Теорема Стоуна – Вейєрштрасса.

Центральне місце у доведенні теореми Стоуна-Вейєрштрасса займає наступний результат.

**Теорема 1.2.10.** *Нехай $X$ – компактний простір, $R \subseteq C(X)$ – кільце функцій, яке містить всі сталі функції і відокремлює точки в $X$, $f \in C(X)$ і $\varepsilon > 0$. Тоді існує функція $f_\varepsilon \in R$ така, що*

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon$$

*для кожного $x \in X$.*

*Доведення.* Спочатку здійснимо деякі побудови для довільних різних фіксованих точок $a, b \in X$. Оскільки $R$ відокремлює точки в $X$, то існує функція $g \in R$ така, що $g(a) \neq g(b)$. Розглянемо функцію $f_{a,b} : X \to \mathbb{R}$,

$$f_{a,b}(x) = f(a) + (f(b) - f(a)) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Оскільки всі сталі функції належать до кільця $R$, то $f_{a,b} \in R$. Крім того,

$$f_{a,b}(a) = f(a) \quad \text{і} \quad f_{a,b}(b) = f(b).$$

Приймемо

$$U_{a,b} = \{x \in X : f_{a,b}(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

і

$$V_{a,b} = \{x \in X : f_{a,b}(x) > f(x) - \varepsilon\}.$$

Зрозуміло, що $U_{a,b}$ і $V_{a,b}$ відкриті множини і $a, b \in U_{a,b} \cap V_{a,b}$.

Для кожного $b \in X$ з відкритого покриття $\{U_{a,b} : a \in X\}$ компактного простору $X$ виділимо скінченне підпокриття, тобто знайдемо скінченну множину $A(b) \subseteq X$ таку, що

$$X = \bigcup_{a \in A(b)} U_{a,b}.$$

Тепер позначимо

$$V_b = \bigcap_{a \in A(b)} V_{a,b}$$

і

$$g_b = \min\{f_{a,b} : a \in A(b)\}.$$

Зрозуміло, що множина $V_b$ – відкритий окіл точки $b$ і, згідно з теоремою 1.2.6, $g_b \in R$. Крім того, для кожного $x \in X$ існує точка $a \in A(b)$ така, що $x \in U_{a,b}$. Тоді

$$g_b(x) \leq f_{a,b}(x) < f(x) + \varepsilon.$$

Отже, $g_b < f + \varepsilon$ на $X$. Разом з тим для кожного $x \in V_b$ маємо

$$g_b(x) = \min\{f_{a,b}(x) : a \in A(b)\} > f(x) - \varepsilon,$$

тобто, $g_b > f - \varepsilon$ на $V_b$.

Тепер з відкритого покриття $\{V_b : b \in X\}$ компактного простору $X$ виділимо скінченне підпокриття, тобто знайдемо скінченну множину $B \subseteq X$ таку, що

$$X = \bigcup_{b \in B} V_b.$$

Розглянемо функцію

$$f_\varepsilon = \max\{g_b : b \in B\},$$

яка згідно з теоремою 1.2.6 належить до $R$. Візьмемо довільне $x \in X$. З одного боку, існує $b \in B$ таке, що $f_\varepsilon(x) = g_b(x)$, і тому

$$f_\varepsilon(x) < f(x) + \varepsilon.$$

А з іншого – існує $b \in B$ таке, що $x \in V_b$, і тому

$$f_\varepsilon(x) = g_b(x) > f(x) - \varepsilon.$$

Отже,

$$f(x) - \varepsilon < f_\varepsilon(x) < f(x) + \varepsilon$$

для кожного $x \in X$. □

З щойно доведеного результату легко випливає основний результат даного підрозділу.

**Теорема 1.2.11** (теорема Стоуна – Вейєрштрасса)**.** *Нехай $X$ – компактний простір і $R \subseteq C(X)$ – кільце функцій, яке містить всі сталі функції, замкнене відносно рівномірної границі і відокремлює точки в $X$. Тоді $R = C(X)$.*

*Доведення.* Нехай $f \in C(X)$. Згідно з теоремою 1.2.10 для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує функція $f_n \in R$ така, що

$$|f_n(x) - f(x)| < \tfrac{1}{n}$$

для кожного $x \in X$. Залишилося зауважити, що $f_n \rightrightarrows f$ на $X$, і тому, $f \in R$. □

**Зауваження 1.2.12.** Теорему 1.2.10 можна одержати також із допомогою однієї теореми Гальфанда-Шилова з теорії кілець [13]. При цьому простір $X$ відіграє роль множини всіх максимальних ідеалів

$$M_x = \{f \in R : f(x) = 0\}$$

у кільці $R$ (див. [16, Problem 3.12.22]).

## 1.3

# Залежність неперервних функцій на компактах від зліченної кількості координат

У цьому підрозділі ми перейдемо до розгляду перших основних результатів даної праці, а саме результатів про залежність відображень від зліченної кількості координат. Ці результати стосуються найпростішого випадку, коли область визначення, тобто простір-добуток, компактний. Зауважимо, що насправді їх доведення не потребують нових глибоких ідей і базуються на фактах, одержаних у попередніх двох підрозділах, але ми виокремили даний матеріал в окремий підрозділ, щоб підкреслити важливість початкового кроку у розвитку тієї чи іншої тематики. Перший з основних викладених у цьому підрозділі результатів стосується дійснозначних функцій на добутку компактних гаусдорфових просторів і, з одного боку, легко випливає з теорем Тихонова і Стоуна-Вейєрштрасса, а з іншого – вперше був одержаний у статті Й.Мібу [28] схожими міркуваннями з допомогою мінімальних кілець. Тому ми подамо тут обидва підходи, але метод Мібу викладемо у неповній редакції лише для неперервних функцій на тихоновському кубі $[0,1]^I$. Другий результат стосується відображень зі значеннями у метризовному просторі і ми також подамо два способи його доведення. Спочатку для добутку компактних гасдорфових просторів зведемо розгляд метризовнозначних відображень до дійснозначних функцій, як це зроблено, наприклад, у [18, Лема 2]. А потім застосуємо безпосередній спосіб міркувань з використанням компактності добутку компактних просторів і вигляду базисних відкритих множин у топологічному добутку.

### 1.3.1. Поняття залежності функцій від зліченної кількості координат і застосування теореми Стоуна – Вейєрштрасса.

Розпочнемо з розгляду першого варіанта основного поняття, яке є предметом нашого вивчення, а саме, поняття залежності від зліченної кількості координат.

Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і $f : X \to \mathbb{R}$ – довільна функція. Казатимемо, що функція $f$ *зосереджена на множині* $T \subseteq S$, якщо $f(x') = f(x'')$, як тільки $x', x'' \in X$ і $x'|_T = x''|_T$. Якщо до того ж множина $T$ – скінченна, то кажемо, що $f$ *залежить від скінченної кількості координат*, а якщо множина $T$ – не більш ніж зліченна, то кажуть, що $f$ *залежить не більше ніж від зліченної кількості координат*. Для скорочення замість точного виразу "залежить не більше ніж зліченної кількості координат" ми будемо вживати коротший термін "залежить від зліченної кількості координат".

Наступні два твердження мають досить прості доведення і вони підготовчі для застосування теореми Стоуна – Вейєрштрасса.

**Твердження 1.3.1.** *Сума, різниця і добуток двох функцій, які залежать від зліченної кількості координат, також залежить від зліченної кількості координат.*

*Доведення.* Нехай $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ та функції $f : X \to \mathbb{R}$ і $g : X \to \mathbb{R}$ залежать від зліченної кількості координат, тобто існують не більш ніж зліченні множини $T_1 \subseteq S$ і $T_2 \subseteq S$ такі, що $f$ і $g$ зосереджені на множині $T_1$ і $T_2$ відповідно. Зрозуміло, що функції $f+g$, $f-g$ і $f\cdot g$ зосереджені на не більш ніж зліченній множині $T = T_1 \cup T_2$. □

**Твердження 1.3.2.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $f : X \to \mathbb{R}$ і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$ такі, що $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для довільного $x \in X$ кожна функція $f_n$ залежить від зліченної кількості координат. Тоді функція $f$ також залежить від зліченної кількості координат.*

*Доведення.* Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо не більш ніж зліченну множину $T_n \subseteq S$ таку, що функція $f_n$ зосереджена на множині $T_n$. Легко бачити, що функція $f$ зосереджена на не більш ніж зліченній множині $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$. □

Тепер легко одержується наступний результат, доведення якого можна знайти, наприклад, у [18].

**Теорема 1.3.3.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я компактних гаусдорфових просторів і $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$. Тоді кожна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат.*

*Доведення.* Розглянемо множину $R$ всіх неперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$, які залежать від зліченної кількості координат. Згідно з твердженнями 1.3.1 і 1.3.2, множина $R$ – кільце, яке замкнене відносно рівномірної границі. Покажемо, що $R$ відокремлює точки в $X$.

Нехай $(a_s)_{s\in S}, (b_s)_{s\in S} \in X$ – різні точки. Виберемо індекс $t \in S$ такий, що $a(t) \neq b(t)$. Оскільки компактний гаусдорфовий простір $X_t$ цілком регулярний, то існує неперервна функція $g : X_t \to \mathbb{R}$ така, що $g(a_t) \neq g(b_t)$. Розглянемо неперервну функцію $h : X \to \mathbb{R}$,

$$h((x_s)_{s\in S}) = g(x_t).$$

Тепер маємо

$$h(a) = g(a_t) \neq g(b_t) = h(b).$$

Отже, $R$ задовольняє умови теореми Стоуна – Вейєрштрасса. Тому

$$R = C(X),$$

тобто кожна неперервна функцій $f : X \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат. $\square$

### 1.3.2. Мінімальні кільця і метод Мібу.

Тепер викладемо підхід Мібу з [28], який використовує поняття мінімального кільця, і доведемо послаблений варіант теореми 1.3.3 для тихоновських кубів.

Нехай $X$ – топологічний простір і $A \subseteq C(X)$ – непорожня множина. Множину $\mathcal{R}(A) \subseteq C(X)$ називатимемо *мінімальним кільцем*, яке містить $A$, якщо $\mathcal{R}(A)$ – кільце, $A \subseteq \mathcal{R}(A)$ і для довільного кільця $R \subseteq C(X)$ такого, що $A \subseteq R$ виконується включення $\mathcal{R}(A) \subseteq R$.

Для непорожньої множини $A \subseteq C(X)$ позначимо

$$S_1(A) = A \cup \{f + g : f, g \in A\} \cup \{f - g : f, g \in A\} \cup \{f \cdot g : f, g \in A\}$$

і для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$S_{n+1}(A) = S_1(S_n(A)).$$

Наступне твердження дає процедуру побудови мінімального кільця.

**Твердження 1.3.4.** *Нехай $X$ – топологічний простір і $A \subseteq C(X)$ – непорожня множина. Тоді*

$$\mathcal{R}(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n(A).$$

*Доведення.* Позначимо $P = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n(A)$ і доведемо, що $P = \mathcal{R}(A)$. Зрозуміло, що $A \subseteq P$.

Нехай $f, g \in P$. Оскільки послідовність множин $S_n(A)$ зростає, то існує номер $n$ такий, що $f, g \in S_n(A)$. Тоді

$$f \pm g, f \cdot g \in S_{n+1}(A) \subseteq P.$$

Отже, $P$ – кільце.

Тепер нехай $R \supseteq A$ – довільне кільце в $C(X)$. Індукцією відносно $n$ легко показати, що $S_n(A) \subseteq R$ для кожного натурального $n$. Тому $P \subseteq R$ і, отже, $\mathcal{R}(A) = P$. $\square$

Тепер з тверджень 1.3.1 і 1.3.4 негайно випливає наступний результат.

**Твердження 1.3.5.** *Нехай* $(X_s)_{s\in S}$ *– сім'я топологічних просторів,* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *і* $A \subseteq C(X)$ *– непорожня множина, яка складається з функцій, залежних від зліченної кількості координат. Тоді мінімальне кільце* $\mathcal{R}(A)$ *також складається з функцій, залежних від зліченної кількості координат.*

Тепер ми подамо результат Мібу [28] про залежність неперервних функцій на тихоновському кубі від зліченної кількості координат.

**Теорема 1.3.6.** *Нехай* $S$ *– довільна множина,* $X_s = [0, 1]$ *для кожного* $s \in S$ *і* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$*. Тоді кожна неперервна функція* $f : X \to \mathbb{R}$ *залежить від зліченної кількості координат.*

*Доведення.* Для кожного $s \in S$ розглянемо неперервну функцію обчислення $f_s : X \to \mathbb{R}$,

$$f_s\left((x_t)_{t\in S}\right) = x_s.$$

Позначимо через $A$ множину, яка складається з усіх сталих функцій на $X$ і усіх функцій обчислення $f_s$. Зрозуміло, що $A$ відокремлює точки в $X$ і кожна функція $f \in A$ залежить від зліченної кількості координат.

Тепер розглянемо мінімальне кільце $R = \mathcal{R}(A)$. Згідно з твердженням 1.3.5 кільце $R$ складається з функцій, залежних від зліченної кількості координат. Крім того, $R$ задовольняє умови теореми 1.2.10. Тому для довільної функції $f \in C(X)$ існує послідовність функцій $g_n \in R$, яка рівномірно на $X$ збігається до функції $f$. Отже, $f$ залежить від зліченної кількості координат згідно з твердженням 1.3.2. □

Наступне зауваження показує, зокрема, чому ми виклали метод Мібу лише для тихоновських кубів.

**Зауваження 1.3.7.** При доведенні теореми 1.3.6 Мібу використовував теорему Гальфанда-Шилова з теорії кілець замість теореми 1.2.10 (див. зауваження 1.2.12).

Крім того, міркування при доведенні теореми 1.3.6 без особливих змін переписуються на випадок добутку компактних гаусдорфових просторів. Але схема повного доведення теореми 1.3.3 у роботі Мібу виглядає так: спочатку добуток $X$ компактних гаусдорфових просторів він неперервно вкладає в тихоновський куб (тут він використовує універсальність тихоновських кубів, яка буде розглянута в пункті 4.1.1), а потім з допомогою замкненості простору $X$ в тихоновському кубі продовжує вихідне відображення за неперервністю на весь простір і застосовує теорему 1.3.6.

Такий виклад у роботі Мібу може бути пов'язаний з тим, що далі він у схожий спосіб помилково узагальнює теорему 1.3.3 на випадок добутку цілком регулярних просторів, використовуючи при цьому таку неправильну властивість: неперервну функцію на добутку цілком регулярних просторів можна продовжити до неперервної функції на добутку компактифікацій Стоуна-Чеха цих просторів.

### 1.3.3. Випадок відображень зі значеннями у метризовному просторі.

У даному пункті ми доведемо залежність від зліченної кількості координат відображень на добутку компактних просторів і зі значеннями у метризовному просторі.

Аналогічно, як для дійснозначних функцій, введемо поняття залежності відображень зі значеннями у довільній множині. Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Z$ – множина і $f : X \to Z$. Кажуть, що відображення $f$ *зосереджене на множині* $T \subseteq S$, якщо $f(x') = f(x'')$, як тільки $x', x'' \in X$ і $x'|_T = x''|_T$. Якщо до того ж множина $T$ не більш ніж зліченна, то кажуть, що $f$ *залежить не більше ніж від зліченної кількості координат.* Для скорочення замість точного виразу "залежить не більше ніж зліченної кількості координат"ми будемо вживати коротший термін "залежить від зліченної кількості координат".

Спочатку покажемо, як можна одержати такий результат з допомогою теореми 1.3.3. У цих міркуваннях центральне місце займає наступний результат.

**Теорема 1.3.8.** *Нехай* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *– добуток сім'ї топологічних просторів* $X_s$ *такий, що кожна неперервна функція* $g : X \to \mathbb{R}$ *залежить від зліченної кількості координат,* $Z$ *– топологічний простір і* $f : X \to Z$ *– неперервне відображення таке, що існує послідовність* $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ *функцій* $h_n \in C(Z)$*, яка відокремлює точки в просторі* $Z$*. Тоді відображення* $f$ *також залежить від зліченної кількості координат.*

*Доведення.* Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо неперервну функцію $g_n : X \to \mathbb{R}$,
$$g_n(x) = h_n(f(x)),$$
і згідно з умовою виберемо зліченну множину $S_n \subseteq T$ таку, що функція $g_n$ зосереджена на множині $S_n$. Залишилося показати, що відображення $f$ зосереджене на множині $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.

Нехай $x, y \in X$ такі, що $x|_T = y|_T$. Припустимо, що
$$z_1 = f(x) \neq f(y) = z_2.$$
Оскільки $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ відокремлює точки в просторі $Z$, то існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що
$$f_m(x) = h_m(z_1) \neq h_m(z_2) = f_m(y).$$

Але, з іншого боку, $S_m \subseteq T$. Тому згідно з вибором множини $S_m$ маємо:

$$f_m(x) = f_m(y),$$

що дає нам суперечність. $\square$

Тепер з допомогою сепарабельності метризовного компакту легко одержується результат про залежність відображень зі значеннями у метризовному просторі.

**Теорема 1.3.9.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я компактних гаусдорфових просторів, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і $Y$ – метризовний простір. Тоді кожне неперервне відображення $f : X \to Y$ залежить від зліченної кількості координат.*

*Доведення.* Ми будемо розглядати відображення $f$ зі значеннями у просторі $Z = f(X)$, який є метризовним компактом, як неперервний образ компактного простору. Тому згідно з [16, теорема 4.1.18], простір $Z$ є сепарабельним метризовним і, отже, задовольняє другу аксіому зліченності. Крім того, з цілковитої регулярності простору $Z$ випливає, що існує послідовність $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $h_n \in C(Z)$, яка відокремлює точки в просторі $Z$. Залишилося використати теореми 1.3.3 і 1.3.8. $\square$

Тепер розглянемо безпосередній спосіб міркувань, який базується лише на компактності добутку і застосовний для добутку не обов'язково цілком регулярних просторів.

Наступний результат – найзагальніший серед основних результатів даного підрозділу.

**Теорема 1.3.10.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я компактних просторів, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і $Z$ – метризовний простір. Тоді кожне неперервне відображення $f : X \to Z$ залежить від зліченної кількості координат.*

*Доведення.* Нехай $f : X \to Z$ – довільне неперервне відображення і $d$ – метрика на $Z$, яка породжує топологію простору $Z$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і для кожного $x \in X$ виберемо базисний відкритий окіл $U(x)$ точки $x$ такий, що

$$d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$$

для довільних $x', x'' \in U(x)$. З відкритого покриття $(U(x) : x \in X)$ компактного простору $X$ виберемо скінченне підпокриття, тобто знайдемо скінченну множину $A \subseteq X$ таку, що

$$X = \bigcup_{x\in A} U(x).$$

Розглянемо скінченну множину

$$S_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} R(U(x)).$$

Покажемо, що для довільних $x, y \in X$ виконується така умова:

$$x|_{S_\varepsilon} = y|_{S_\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Справді, нехай $x|_{S_\varepsilon} = y|_{S_\varepsilon}$ для деяких $x, y \in X$. Візьмемо $a \in A$ таке, що

$$x \in U = U(a).$$

Оскільки $R(U) \subseteq S_\varepsilon$, то

$$x|_{R(U)} = y|_{R(U)} \qquad \text{і} \qquad y \in U$$

згідно з твердженням 1.1.8. Тому $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ за вибором $U(a)$.

Тепер залишилось розглянути не більш, ніж зліченну множину

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}}.$$

Тоді

$$d(f(x), f(y)) < \tfrac{1}{n}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$, тобто

$$f(x) = f(y)$$

для довільних $x, y \in X$ з $x|_T = y|_T$. Отже, $f$ зосереджена на множині $T$ і залежить від зліченної кількості координат. $\square$

## 1.4 Заключні зауваження до розділу 1

А. Тихонов спочатку у 1930 році в роботі [44] довів формально слабший варіант теореми 1.1.10, показавши, що кожний тихоновський куб $[0,1]^I$ – компактний. Трохи пізніше у 1935 році ним же в праці [45] була вперше сформульована власне теорема 1.1.10. Доведення цієї теореми, викладене тут, належить К.Шевалле та О.Фрінку [11].

Теорема 1.2.6 має назву теореми Діні, оскільки такий результат для функцій, визначених на відрізку, вперше у 1878 році доведений У.Діні.

Теорема Стоуна-Вейєрштрасса, як узагальнення класичної теореми Вейєрштрасса про наближення неперервних функцій многочленами (див. вправу 1.5.9), вперше доведена М.Стоуном у 1937 році в роботі [41]. Спрощений спосіб доведення цієї теореми, який поданий тут (його можна знайти також у книзі [16]), опублікований М.Стоуном через 10 років у 1947 році в роботі [42].

Теорема 1.3.3 про залежність неперервної функції на добутку компактів вважалася простим наслідком теореми Стоуна-Вейєрштрасса і використовувалась без додаткових цитувань роботи [28] або з безпосереднім доведенням (див., наприклад, [6, с. 632], [38, с. 402] і [18, Лема 1]).

Теорема 1.3.9 у загальнішій редакції про залежність від $\aleph$ координат відображень на добутку компактних просторів і зі значеннями у цілком регулярному просторі з обмеженою топологічною вагою доведена у [18, Лема 2]). При цьому використовувалась теорема 1.3.3 і теорема Тихонова про вкладення у тихоновський куб, застосована до простору значень.

## 1.5 Вправи до розділу 1

**Вправа 1.5.1.** *Наведіть приклад послідовності* $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ *замкнених підмножин числової прямої* $\mathbb{R}$*, яка має властивістю скінченного перетину, але для якої перетин* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ *порожній.*

**Вправа 1.5.2.** *Доведіть, що для довільного топологічного простору* $X$ *довільна сім'я* $(F_i : i \in I)$ *замкнених в просторі* $X$ *множини* $F_i$*, яка володіє властивістю скінченного перетину, має непорожній перетин, якщо хоча б одна з множин* $F_i$ *компактна.*

**Вправа 1.5.3.** *Доведіть, що топологічний простір* $X$ *– зліченно компактний тоді і тільки тоді, коли довільна послідовність* $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ *замкнених підмножин простору* $X$*, яка володіє властивістю скінченного перетину, має непорожній перетин.*

**Вправа 1.5.4.** *Нехай* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *послідовність множин* $A_n \subseteq \mathbb{N}$ *таких, що для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *перетин* $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ *– нескінченна множина. Доведіть, що існує нескінченна множина* $A_0 \subseteq \mathbb{N}$ *така, що сім'я* $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ *має властивість скінченного перетину і для кожного* $n \in \mathbb{N}$ *множина* $A_n \setminus A_0$ *– нескінченна.*

**Вправа 1.5.5.** *Доведіть, що добуток компактного простору* $X$ *і зліченно компактного простору* $Y$ *– зліченно компактний простір ([16, наслідок 3.10.14]).*

*Вказівка.* Покажіть, що для довільного покриття $\mathcal{U}$ простору $X \times Y$ і довільної точки $y_0 \in Y$ існує скінченна система $\mathcal{V} \subseteq U$ і окіл $V$ точки $y_0$ такі, що $X \times V \subseteq \bigcup \mathcal{V}$.

**Вправа 1.5.6.** *Наведіть приклад кільця* $R \subseteq C(\mathbb{R})$*, яке не є замкненим відносно рівномірної границі.*

**Вправа 1.5.7.** *Доведіть, що лема 1.2.5 характеризує монотонні збіжні до числа a числові послідовності* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

**Вправа 1.5.8.** *Наведіть приклад метризовного сепарабельного простору* $X$*, для якого не справджується теорема Діні (теорема 1.2.6).*

*Вказівка.* Розгляньте зліченний дискретний простір.

**Вправа 1.5.9.** *З допомогою теореми Стоуна-Вейєрштрасса доведіть, що довільна неперервна на відрізку функція є рівномірною границею многочленів (теорема Вейєрштрасса).*

**Вправа 1.5.10.** *Нехай $X$ – цілком регулярний простір і $K$ – компактна підмножина простору $X$. З допомогою теореми Стоуна-Вейєрштрасса доведіть, що довільну неперервну на $K$ функцію $f \in C(K)$ можна неперервно продовжити на весь простір $X$, тобто існує функція $g \in C(K)$ така, що $g|_K = f$ (див. [42]).*

*Вказівка.* Розгляньте множину $R$ всіх звужень $f|_K$ функцій $f \in C(X)$ на множину $K$.

**Вправа 1.5.11.** *Доведіть, що теорема Стоуна-Вейєрштрасса не є правильною для кільця $C_b((0,1))$ всіх обмежених неперервних функцій $f : (0,1) \to \mathbb{R}$.*

*Вказівка.* Розгляньте кільце $R$ звужень на $(0,1)$ всіх неперервних функцій $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ і функцію $f_0(t) = \sin \frac{\pi}{t}$.

**Вправа 1.5.12.** *Нехай $X$ – цілком регулярний компактний простір і $Y$ – всюди щільна підмножина простору $X$ така, що для кільця $C_b(Y)$ всіх обмежених неперервних функцій $f : Y \to \mathbb{R}$ виконується теорема Стоуна-Вейєрштрасса. Доведіть, що $X = Y$ (дивись [14]).*

*Вказівка.* Якщо $x_0 \in X \setminus Y$ і $y_0 \in Y$, то розгляньте кільце $R$ всіх неперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ таких, що $f(x_0) = f(y_0)$.

**Вправа 1.5.13.** *Нехай $S$ – незліченна множина. Наведіть приклад функції $f : \{0,1\}^S \to \{0,1\}$, яка не залежить від зліченної кількості координат.*

**Вправа 1.5.14.** *Нехай множина $A \subseteq C(\mathbb{R})$ складається з двох функцій: одиничної функції $f_0$ і функції $f_1(x) = x$. Знайдіть мінімальне кільце $\mathcal{R}(A)$.*

**Вправа 1.5.15.** *Знайдіть найменше кільце $R \subseteq C([0,1])$, яке містить всі лінійні функції $f(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$, і замкнене відносно рівномірної границі.*

Топологічний простір $X$ називається *ліндселефовим*, якщо з довільного відкритого покриття простору $X$ можна виділити не більш ніж зліченне підпокриття.

**Вправа 1.5.16.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів таких, що добуток $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ – ліндселефовий. Доведіть, що кожне неперервне відображення $f : X \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат.*

Топологічний простір $Z$ *має $G_\delta$-діагональ*, якщо діагональ $\Delta = \{(z,z) : z \in Z\}$ є $G_\delta$-множиною в топологічному просторі $Z^2$, тобто діагональ $\Delta$ це перетин послідовності відкритих у просторі $Z^2$ множин.

**Вправа 1.5.17.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я компактних просторів, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і $Z$ – топологічний простір з $G_\delta$-діагоналлю. Доведіть, що кожне неперервне відображення $f : X \to Z$ залежить від зліченної кількості координат.*

Топологічний простір $X$ називається *$\sigma$-компактним*, якщо існує послідовність $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ компактних у просторі $X$ множин $X_n$ таких, що $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

**Вправа 1.5.18.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я $\sigma$-компактних просторів, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і $Z$ – регулярний простір з $G_\delta$-діагоналлю. Доведіть, що кожне неперервне відображення $f : X \to Z$ залежить від зліченної кількості координат.*

*Вказівка.* Нехай $X_s = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n^{(s)}$ для кожного $s \in S$. Застосуйте вправу 1.5.17 до звуження відображення $f$ на кожну множину $\prod\limits_{s\in S} X_n^{(s)}$.

# Розділ 2

# НЕПЕРЕРВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ НА ДОБУТКАХ АБСТРАКТНИХ ПРОСТОРІВ

У цьому розділі ми розглянемо результати про залежність від певної кількості координат неперервних відображень на добутках просторів, які не обов'язково задовольняють умову компактності. Зауважимо, що розвиток даної тематики потребував застосування нових методів і вироблення оригінальних інструментів дослідження. Вперше це було зроблено у 1952 році С.Мазуром у роботі [26], де автор, вивчаючи зв'язок між неперервністю і секвенціальною неперервністю, запропонував цікавий підхід, котрий, зокрема, у подальшому дав можливість одержати найзагальніші результати про залежність від певної кількості координат неперервних функцій на просторах-добутках. У першому підрозділі ми детально розглянемо метод Мазура, виокреслюючи його найважливіші складові.

Впродовж наступних двадцяти років тематика залежності неперервних відображень від певної кількості координат інтенсивно розвивалася багатьма математиками: Г. Корсоном та І. Ізбеллом, К. Россом і А. Стоуном, А. Ґлісоном, А. Міщенком, Р. Енгелькінгом, що привело до різних модифікацій і узагальнень результатів Мазура, які ми детальніше розглянемо в історичному підрозділі 2.5, а також відобразимо використані там методи у підрозділі 2.6.

Значною мірою завершальним етапом у даній тематиці є фундаментальна праця Н.Нобла і М.Ульмера [34] 1972-го року, в якій на основі важливої для таких досліджень леми Шаніна одержано досить потужний інструмент для вивчення різних кардинальних властивостей топологічних добутків і отримано необхідні і достатні умови залежності від певної кількості координат неперервних функцій на добутках. Результати даної роботи ми викладемо у підрозділах 2.2 – 2.4.

## 2.1 Підхід Мазура

У цьому підрозділі ми викладемо дещо модифікований метод С.Мазура [26] дослідження залежності від зліченної кількості координат неперервних відображень на добутках просторів з другою аксіомою зліченності. Зауважимо, що застосований в [26] підхід став визначальним для подальшого розвитку даної тематики. Мазур у своїй роботі вперше використав лему Шаніна, простори типу $\sigma$-добутків і найменшу множину залежності, які в майбутніх дослідженнях стали звичними технічними інструментами при доведенні залежності від певної кількості координат неперервних відображень на добутках.

**2.1.1. Лема Шаніна про скінченні множини.** Ми розпочнемо з викладу варіанта леми Шаніна [48, с.185] для незліченних сімей скінченних множин. При цьому ми подамо тут оригінальне доведення Мазура цієї властивості.

У подальшому викладі не більш ніж зліченні множини ми називатимемо просто зліченними.

Сім'я множин $(A_i : i \in I)$ називається *точково зліченною*, якщо для кожного $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ множина $\{i \in I : x \in A_i\}$ – зліченна.

Наступне твердження є допоміжним для доведення основного результату даного підрозділу.

**Твердження 2.1.1.** *Нехай $I$ – незліченна множина і $(A_i : i \in I)$ – точково зліченна сім'я непорожніх зліченних множин. Тоді існує незліченна множина $J \subseteq I$ така, що $A_i \cap A_j = \emptyset$ для довільних різних $i, j \in J$.*

*Доведення.* Для кожного $a \in X = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ позначимо

$$I(a) = \{i \in I : a \in A_i\}.$$

Оскільки сім'я $(A_i : i \in I)$ точково зліченна, то кожна множина $I(a)$ зліченна.

Два довільні індекси $i, j \in I$ назвемо *сусідніми* (позначатимемо це $i \sim j$), якщо існують натуральне число $n \in \mathbb{N}$ та індекси $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$ такі, що виконуються наступні умови:

(1) $A_{i_{k-1}} \cap A_{i_k} \neq \emptyset$ для кожного $k = 1, \ldots, n$;

(2) $i_0 = i$ та $i_n = j$.

Зрозуміло, що відношення "бути сусідніми індексами" є відношенням еквівалентності на множині $I$, тобто це відношення задовольняє умови *рефлексивності* $(i \sim i)$, *симетричності* $(i \sim j \;\Leftrightarrow\; j \sim i)$ та *транзитивності* $(i \sim j,\, j \sim l \;\Rightarrow\; i \sim l)$.

Для кожного $i \in I$ позначимо через $U_i$ клас еквівалентності елемента $i$ в множині $(I, \sim)$, тобто

$$U_i = \{j \in I : i \sim j\}.$$

Покажемо, що кожна множина $U_i$ зліченна. Зафіксуємо $i \in I$. Позначимо $V_0 = \{i\}$, $B_0 = A_i$,

$$V_n = \bigcup_{a \in B_{n-1}} I(a) \qquad \text{і} \qquad B_n = \bigcup_{j \in V_n} A_j$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки всі множини $I(a)$ і $A_j$ зліченні, то і всі множини $V_n$ і $B_n$ також зліченні. Крім того, для деяких $n \in \mathbb{N}$ і $j \in I$ існують індекси $i_0, i_1, \ldots, i_n \in S$, які задовольняють умови (1) і (2) тоді і тільки тоді, коли $i_k \in V_k$ для кожного $k = 1, \ldots, n$. Отже, згідно з означенням сусідніх індексів, маємо, що

$$U_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n,$$

що і доводить зліченність множини $U_i$.

Оскільки відношення "бути сусідніми індексами" є відношенням еквівалентності на множині $I$, то $i \in U_i$ для кожного $i \in I$ та

$$j \in U_i \qquad \Leftrightarrow \qquad U_i = U_j$$

для довільних $i, j \in I$. Отже, система

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$$

складається з попарно неперетинних множин і

$$I = \bigsqcup_{U \in \mathcal{U}} U,$$

причому множина $I$ незліченна, а всі множини $U$ зліченні. Тому система $\mathcal{U}$ незліченна.

Для кожного $U \in \mathcal{U}$ виберемо $i_U \in I$ таке, що $U_{i_U} = U$, і позначимо

$$J = \{i_U : U \in \mathcal{U}\}.$$

Оскільки система $\mathcal{U}$ незліченна і складається з попарно неперетинних множин, то множина $J$ також незліченна. Залишилося показати, що

$$A_i \cap A_j = \emptyset$$

для довільних різних $i, j \in J$.

Припустимо, що це не так і існують різні $i, j \in J$ такі, що $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Тоді поклавши $n = 1$, $i_0 = i$ та $i_1 = j$, ми одержимо, що елементи $i$ та $j$ сусідні. Тому

$$U_i = U_j = U \in \mathcal{U} \qquad \text{і} \qquad i = i_U = j,$$

що дає нам суперечність. $\square$

Тепер перейдемо до основного результату даного пункту.

**Твердження 2.1.2** (Лема Шаніна)**.** *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $I$ – незліченна множина і $(A_i : i \in I)$ – сім'я скінченних множин таких, що $|A_i| \leq n$ для кожного $i \in I$. Тоді існують скінченна множина $B$ і незліченна множина $J \subseteq I$ такі, що $A_i \cap A_j = B$ для довільних різних $i, j \in J$.*

*Доведення.* Розглянемо множину $L$ всіх невід'ємних цілих чисел $l$ таких, що існують $l$-елементна множина $B'$ і незліченна множина індексів $I' \subseteq I$ такі, що $B' \subseteq A_i$ для кожного $i \in I'$. Зрозуміло, що $0 \in L$, адже $\emptyset \subseteq A_i$ для кожного $i \in I$. Крім того, кожне натуральне число $k > n$ не є елементом множини $L$, адже всі множини $A_i$ мають щонайбільше $n$ елементів і не можуть містити $k$-елементних підмножин. Отже,

$$\{0\} \subseteq L \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Позначимо

$$m = \max L$$

і знайдемо $m$-елементну множину $B$ і незліченну множину індексів $I_0 \subseteq I$ такі, що $B \subseteq A_i$ для кожного $i \in I_0$.

Для кожного $i \in I_0$ позначимо

$$B_i = A_i \setminus B$$

і розглянемо систему $(B_i : i \in I_0)$. Покажемо, що ця система точково зліченна.

Нехай $a \in \bigcup\limits_{i\in I_0} B_i$ – довільна точка. Зауважимо, що $a \notin B$, адже $B \cap B_i = \emptyset$ для кожного $i \in I_0$. Тому множина $B' = B \cup \{a\}$ є $(m+1)$-елементною. Крім того,

$$J' = \{i \in I_0 : a \in B_i\} \subseteq \{i \in I : B' \subseteq A_i\} = I'.$$

Оскільки $m + 1 \notin L$, то множина $I'$ зліченна. Тоді множина $J'$ також зліченна. Тоді сім'я $(B_i : i \in I_0)$ точково зліченна.

Отже, сім'я $(B_i : i \in I_0)$ задовольняє умови твердження 2.1.1, згідно з яким існує незліченна множина індексів $J \subseteq I_0$ така, що $B_i \cap B_j = \emptyset$ для довільних різних $i, j \in J$. Тоді

$$A_i \cap A_j = B$$

для довільних різних $i, j \in J$. □

**2.1.2. $\sigma$-добутки і неперервні відображення на них.** У цьому пункті ми розглянемо поняття $\sigma$-добутку, яке починаючи з роботи [26] стало звичним інструментом при дослідженні залежності неперервних функцій на добутках, а також топологічних властивостей добутків.

Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і $a = (a_s)_{s\in S} \in X$. Множина

$$\sigma(a) = \{x = (a_s)_{s\in S} : |\{s \in S : x_s \neq a_s\}| < \aleph_0\}$$

називається *$\sigma$-добутком.*

Для добутку топологічних просторів легко одержується наступна властивість $\sigma$-добутків.

**Твердження 2.1.3.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів $X_s$, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і $a = (a_s)_{s\in S} \in X$. Тоді $\sigma$-добуток $\sigma(a)$ є щільною множиною в просторі $X$.*

*Доведення.* Нехай $U = \prod\limits_{s\in S} U_s$ – довільна непорожня базисна відкрита множина. Для кожного $s \in R(U)$ виберемо довільну точку $x_s \in U_s$ і розглянемо елемент $x = (x_s)_{s\in S} \in X$, взявши $x_s = a_s$ для кожного $s \in S \setminus R(U)$. Зрозуміло, що $x \in \sigma(a) \in U$. □

Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $Y \subseteq \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Z$ – довільна множина і $f : Y \to Z$ – довільне відображення. Казатимемо, що відображення $f$ *зосереджене на множині* $T \subseteq S$, якщо $f(x') = f(x'')$, як тільки $x', x'' \in Y$

і $x'|_T = x''|_T$. Якщо до того ж множина $T$ – зліченна, то кажуть, що $f$ *залежить від зліченної кількості координат.*

Наступне твердження показує, що при доведенні залежності від певної кількості координат відображень на добутках достатньо розглядати звуження цих відображень на деякий $\sigma$-добуток.

**Твердження 2.1.4.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів $X_s$, $a = (a_s)_{s\in S} \in \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Y = \sigma(a) \subseteq X \subseteq \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Z$ – гаусдорфовий топологічний простір і $f : X \to Z$ – неперервне відображення. Тоді якщо звуження $g$ відображення $f$ на $\sigma$-добуток $Y$ зосереджене на деякій множині $T \subseteq S$, то і відображення $f$ зосереджене на множині $T$. Зокрема, якщо $g$ залежить від зліченної кількості координат, то і $f$ залежить від зліченної кількості координат.*

*Доведення.* Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що відображення $g$ зосереджене на деякій множині $T \subseteq S$, а відображення $f$ – ні, тобто існують елементи $x = (x_s)_{s\in S}, y = (y_s)_{s\in S} \in X$ такі, що $x_s = y_s$ для кожного $s \in T$ і

$$z_1 = f(x) \neq f(y) = z_2.$$

Оскільки простір $Z$ гаусдорфовий, то існують такі базисні околи $W_1$ і $W_2$ точок $z_1$ і $z_2$ відповідно, що $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Використовуючи неперервність відображення $f$ в точках $x$ і $y$, виберемо базисні відкриті околи $U$ і $V$ точок $x$ і $y$ відповідно такі, що

$$f(U \cap X) \subseteq W_1 \qquad \text{і} \qquad f(V \cap X) \subseteq W_2.$$

Тоді, зокрема, $f(u) \neq f(v)$ для довільних $u \in U \cap X$ і $v \in V \cap X$.

Покладемо $R = R(U) \cup R(V)$ і розглянемо елементи добутку $u = (u_s)_{s\in S}$,

$$u_s = \begin{cases} x_s, & s \in R; \\ a_s, & s \in S \setminus R \end{cases}$$

і $v = (v_s)_{s\in S}$,

$$v_s = \begin{cases} y_s, & s \in R; \\ a_s, & s \in S \setminus R. \end{cases}$$

Тепер з одного боку, зі скінченності множини $R$ випливає, що $u, v \in Y$. Крім того,

$$u_s = a_s = v_s$$

для кожного $s \in T \setminus R$ і

$$u_s = x_s = y_s = v_s$$

для кожного $s \in T \cap R$. Отже, $u|_T = v|_T$ і згідно з вибором множини $T$, маємо, що

$$f(u) = g(u) = g(v) = f(v).$$

А з іншого боку,

$$u|_{R(U)} = x|_{R(U)} \qquad \text{і} \qquad v|_{R(V)} = y|_{R(V)}.$$

Тому згідно з твердженням 1.1.8, $u \in U$ і $v \in V$. А отже,

$$f(u) \neq f(v),$$

що дає нам суперечність.

□

### 2.1.3. Одна властивість $\sigma$-добутку просторів з другою аксіомою зліченності.

У даному пункті ми подамо певну властивість незліченних сімей елементів у $\sigma$-добутку просторів з другою аксіомою зліченності, яка доводиться з допомогою леми Шаніна і відіграє важливу роль у методі Мазура.

Нагадаємо, що топологічний простір $X$ задовольняє *другу аксіому зліченності*, якщо в просторі $X$ існує не більш ніж зліченна база топології.

**Лема 2.1.5.** *Нехай $Y$ – топологічний простір з другою аксіомою зліченності, $I$ – незліченна множина і $(y_i)_{i\in I}$ – сім'я елементів $y_i \in Y$. Тоді існує послідовність $(i_n)_{n=0}^{\infty}$ різних індексів $i_n \in I$ така, що $y_{i_n} \to y_{i_0}$ в просторі $Y$.*

*Доведення.* Для кожної відкритої множини $V$ в просторі $Y$ позначимо

$$I(V) = \{i \in I : y_i \in V\}.$$

Нехай $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ – база топології простору $Y$, $I_n = I(B_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і

$$M = \{n \in \mathbb{N} : |I_n| \leq \aleph_0\}.$$

Доведемо, що існує точка

$$y^* \in Y_0 = \{y_i : i \in I\}$$

така, що довільного відкритого околу $V$ точки $y^*$ множина $I(V)$ незліченна.

Припустимо, що це не так. Для кожного $i \in I$ існує окіл $V$ точки $y_i$ такий, що множина $I(V)$ – зліченна. Вибравши номер $n \in \mathbb{N}$ так, що $y_i \in B_n \subseteq V$, одержимо, що $I_n \subseteq I(V)$. А тому множина $I_n$ також зліченна і

$$i \in I_n \qquad \text{і} \quad n \in M.$$

Тепер маємо

$$I \subseteq \bigcup_{n\in M} I_n,$$

звідки випливає зліченність множини $I$, що дає нам суперечність.

Тепер побудуємо шукану послідовність $(i_n)_{n=0}^{\infty}$. Спочатку виберемо індекс $i_0 \in I$ так, що $y_{i_0} = y^*$ і зафіксуємо довільну спадну базу $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ околів точки $y_{i_0}$ в просторі $Y$. Залишилось, використовуючи індукцію відносно $n \in \mathbb{N}$, вибрати індекси

$$i_n \in I(V_n) \setminus \{i_k : 0 \le k < n\}.$$

$\square$

Нагадаємо, що для базисної відкритої множини $U = \prod\limits_{s\in S} U_s$ в топологічному добутку $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ через $R(U)$ ми позначаємо скінченну множину $\{s \in S : U_s \ne X_s\}$. Далі, якщо $B \subseteq S$, то через $U|_B$ позначатимемо множину $\prod\limits_{s\in B} U_s$ в добутку $\prod\limits_{s\in B} X_s$. Нехай, крім того, $Y$ – підпростір простору $X$. Тоді непорожню відкриту множину $V$ в $Y$ назвемо *базисною*, якщо існує базисна відкрита в $X$ множина $U$ така, що $V = U \cap Y$; при цьому приймемо $R(V) = R(U)$.

Тепер перейдемо до випадку $\sigma$-добутку просторів з другою аксіомою зліченності.

**Лема 2.1.6.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів $X_s$ з другою аксіомою зліченності, $a = (a(s))_{s\in S} \in \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Y = \sigma(a)$, $I$ – незліченна множина і $(y_i)_{i\in I}$ – сім'я елементів $y_i = (y_i(s))_{s\in S} \in Y$. Тоді існують послідовність $(i_n)_{n=0}^{\infty}$ різних індексів $i_n \in I$ і скінченна множина $B \subseteq S$ такі, що $y_{i_n} \to x_0$ в просторі $Y$, де $x_0(s) = y_{i_0}(s)$ для кожного $s \in B$ і $x_0(s) = a(s)$ для кожного $s \in S \setminus B$.*

*Доведення.* Позначимо

$$S_i = \{s \in S : y_i(s) \ne a(s)\}$$

для кожного $i \in I$ і

$$I_n = \{i \in I : |S_i| \le n\}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки всі множини $S_i$ скінченні, то

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Тому існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що множина $I_m$ незліченна. Застосувавши твердження 2.1.2 до сім'ї $(S_i : i \in I_m)$ одержимо скінченну множину $B \subseteq S$ і незліченну множину $J \subseteq I_m$ такі, що

$$S_i \cap S_j = B$$

для довільних різних індексів $i, j \in J$.

Тепер до сім'ї $(z_i)_{i \in J}$ елементів $z_i = y_i|_B$ простору $Z = \prod\limits_{s \in B} X_s$ з другою аксіомою зліченності застосуємо лему 2.1.5 і одержимо послідовність $(i_n)_{n=0}^{\infty}$ різних індексів $i_n \in J$ таку, що $z_{i_n} \to z_{i_0}$ в просторі $Z$. Залишилося показати, що $y_{i_n} \to x_0$ в просторі $Y$, де

$$x_0(s) = \begin{cases} y_{i_0}(s), & s \in B; \\ a(s), & s \in S \setminus B. \end{cases}$$

Іншими словами, потрібно довести, що

$$y_{i_n}(s) \to x_0(s)$$

для кожного $s \in S$. Справді, для кожного $s \in B$ маємо

$$y_{i_n}(s) = z_{i_n}(s) \to z_{i_0}(s) = x_0(s).$$

Крім того, для кожного $s \in S \setminus B$ множина $\{n \in \mathbb{N} : y_{i_n}(s) \neq a(s)\}$ містить щонайбільше один елемент. Адже, якщо $y_{i_n}(s) \neq a(s) \neq y_{i_k}(s)$ для деяких різних номерів $n, k \in \mathbb{N}$, то $s \in S_{i_n} \cap S_{i_k}$, і $S_{i_n} \cap S_{i_k} \neq B$, що суперечить вибору множин $B$ і $J$. Тому

$$y_{i_n}(s) \to a(s) = x_0(s).$$

Отже, так чи інакше, $y_{i_n}(s) \to x_0(s)$ для кожного $s \in S$, тобто $y_{i_n} \to x_0$ в просторі $Y$. $\square$

### 2.1.4. Найменша множина зосередженості відображень на $\sigma$-добутках.

У даному пункті ми розглянемо побудову множини індексів, яка має досить природний вигляд і відіграє ключову роль у доведенні достатніх умов залежності.

Нехай $(X_s)_{s \in S}$ – сім'я непорожніх множин, $Y \subseteq \prod\limits_{s \in S} X_s$, $Z$ – довільна множина і $f : Y \to Z$. Множина $S_0 \subseteq S$ називається *найменшою множиною, на якій зосереджене відображення* $f$, якщо $f$ зосереджене на $S_0$ і для довільної множини $T \subseteq S$, на якій зосереджене $f$, виконується включення $S_0 \subseteq T$.

Наступне твердження дає конструкцію найменшої множини для довільних відображень на $\sigma$-добутках.

**Твердження 2.1.7.** *Нехай* $(X_s)_{s\in S}$ *– сім'я непорожніх множин,* $a = (a_s)_{s\in S} \in \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Y = \sigma(a)$, $Z$ *– довільна множина і* $f : Y \to Z$. *Тоді множина*

$$S_0 = \{s \in S : (\exists x_s, y_s \in Y)(x_s|_{S\setminus\{s\}} = y_s|_{S\setminus\{s\}} \ \ \text{\textit{i}}\ f(x_s) \neq f(y_s))\}$$

*є найменшою множиною, на якій зосереджене* $f$.

*Доведення.* Спочатку доведемо, що множина $S_0$ міститься в довільній множині $T \subseteq S$, на якій зосереджене відображення $f$. Справді, нехай $S_0 \not\subseteq T \subseteq S$. Тоді існує елемент $s \in S_0 \setminus T$. Тепер маємо

$$x_s|_T = y_s|_T \qquad \text{і} \qquad f(x_s) \neq f(y_s),$$

тобто $f$ не зосереджене на множині $T$.

Залишилося довести, що $f$ зосереджене на множині $S_0$. Нехай $u = (u(s))_{s\in S}, v = (v(s))_{s\in S} \in Y$ – різні елементи, такі, що $u|_{S_0} = v|_{S_0}$. Покажемо, що $f(u) = f(v)$. Оскільки $u, v \in \sigma(a)$, то множина

$$R = \{s \in S : u(s) \neq v(s)\}$$

скінченна, тобто

$$R = \{s_k : 1 \leq k \leq n\}.$$

Позначимо $u_0 = u$. Далі послідовно для кожного $k = 1, 2, \dots, n$ приймемо

$$u_k(s) = \begin{cases} u_{k-1}(s), & s \in S \setminus \{s_k\}; \\ v(s_k), & s = s_k. \end{cases}$$

Зафіксуємо натуральне число $k \leq n$. Зауважимо, що

$$u_{k-1}|_{S\setminus\{s_k\}} = u_k|_{S\setminus\{s_k\}}.$$

Крім того, $s_k \notin S_0$, адже $u(s_k) \neq v(s_k)$ і $u|_{S_0} = v|_{S_0}$. Тому $f(u_{k-1}) = f(u_k)$.

Отже, $f(u_{k-1}) = f(u_k)$ для кожного $k = 1, 2, \dots, n$. Тепер, беручи до уваги, що $u_n = v$, одержимо

$$f(u) = f(u_0) = f(u_1) = \dots = f(u_n) = f(v).$$

□

Тепер ми одержуємо вигляд найменшої множини для неперервних відображень на топологічних добутках.

**Наслідок 2.1.8.** *Нехай $X$ – добуток сім'ї $(X_s)_{s\in S}$ топологічних просторів $X_s$, $Y$ – гаусдорфовий простір і $f : X \to Y$ – неперервне відображення. Тоді множина*

$$S_0 = \{s \in S : (\exists x_s, y_s \in X)(x_s|_{S\setminus\{s\}} = y_s|_{S\setminus\{s\}} \ \text{ і } \ f(x_s) \neq f(y_s))\}$$

*є найменшою множиною, на якій зосереджене $f$.*

*Доведення.* Аналогічно, як при доведенні твердження 2.1.7 доводиться, що множина $S_0$ міститься в довільній множині $T \subseteq S$, на якій зосереджене $f$. Крім того, з тверджень 2.1.7 і 2.1.4 випливає, що $f$ зосереджене на множині $S_0$. □

### 2.1.5. Залежність від зліченної кількості координат неперервних відображень на добутках просторів з другою аксіомою зліченності.

Тепер ми викладемо результати про залежність неперервних відображень від зліченної кількості координат, які одержуються методом Мазура.

Наступний результат займає центральне місце у даному підрозділі і є фактичною реалізацією методу Мазура.

**Теорема 2.1.9.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів $X_s$ з другою аксіомою зліченності, $a = (a_s)_{s\in S} \in \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Y = \sigma(a)$ і $Z$ – топологічний простір з $G_\delta$-діагоналлю. Тоді кожне неперервне відображення $f : Y \to Z$ залежить від зліченної кількості координат.*

*Доведення.* Розглянемо множину

$$T = \{s \in S : (\exists x_s, y_s \in Y)(x_s|_{S\setminus\{s\}} = y_s|_{S\setminus\{s\}} \ \text{ і } \ f(x_s) \neq f(y_s))\},$$

яка згідно з наслідком 2.1.8 є найменшою множиною, на якій зосереджене $f$. Доведемо, що множина $T$ зліченна.

Припустимо, що множина $T$ незліченна. Оскільки простір $Z$ має $G_\delta$-діагональ $\Delta = \{(z, z) : z \in Z\}$, то існує послідовність $(F_n)_{n=1}^\infty$ замкнених в просторі $Z^2$ множин $F_n$ така, що

$$Z^2 \setminus \Delta = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$T_n = \{s \in T : (f(x_s), f(y_s)) \in F_n\}.$$

Оскільки $(f(x_s), f(y_s) \in Z^2 \setminus \Delta$ для кожного $s \in T$, то $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$. Тому існує номер $m$ такий, що множина $T_m$ незліченна.

До сім'ї $(x_s : s \in T_m)$ застосуємо лему 2.1.6 і одержимо послідовність $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ різних індексів $s_n \in T_m$ і скінченну множину $B \subseteq S$ такі, що $x_{s_n} \to x$ в просторі $Y$, де $x(s) = x_{s_0}(s)$ для кожного $s \in B$ і $x(s) = a(s)$ для кожного $s \in S \setminus B$.

Покажемо, що $y_{s_n} \to x$ в просторі $Y$. Зафіксуємо $s \in S$ і доведемо, що $y_{s_n}(s) \to x(s)$ в просторі $X_s$. Оскільки

$$\{t \in S : x_{s_n}(t) \neq y_{s_n}(t)\} = \{s_n\}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$, то множина

$$\{n \in \mathbb{N} : x_{s_n}(s) \neq y_{s_n}(s)\} = \{n \in \mathbb{N} : s_n = s\}$$

складається не більше ніж з одного елемента, адже всі координати $s_n$ різні. Отже, послідовність $(y_{s_n}(s))_{n=1}^{\infty}$ відрізняється від збіжної до $x(s)$ послідовності $(x_{s_n}(s))_{n=1}^{\infty}$ щонайбільше одним елементом, і тому вона також збігається до $x(s)$.

З неперервності відображення $f$ в точці $x$ випливає, що

$$(f(x_{s_n}), f(y_{s_n})) \to (f(x), f(x))$$

в просторі $Z^2$. Крім того, нагадаємо, що

$$(f(x_{s_n}), f(y_{s_n})) \in F_m$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і множина $F_m$ замкнена. Тому

$$(f(x), f(x)) \in \Delta \cap F_m = \emptyset,$$

що дає нам суперечність. □

Зі щойно доведеної теореми і твердження 2.1.4 випливає наступний результат, який фактично доведений у [26].

**Теорема 2.1.10.** *Довільне неперервне відображення $f : X \to Z$, визначене на добутку $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ сім'ї топологічних просторів $X_s$ з другою аксіомою зліченності, і зі значеннями у топологічному просторі $Z$ з замкненою $G_\delta$-діагоналлю залежить від зліченної кількості координат.*

**Зауваження 2.1.11.** Зауважимо, що С.Мазур в [26], вивчаючи зв'язки між секвенціально неперервними і неперервними відображеннями на добутках, досліджував залежність від зліченної кількості координат секвенціально неперервних відображень. При цьому аналог твердження 2.1.4 для секвенціально неперервних відображень – досить нетривіальний факт, який встановлений в [26] для добутку сім'ї $(X_s : s \in S)$ сім'ї топологічних просторів $X_s$, потужність $|S|$ якої менша від першого недосяжного кардиналу.

# 2.2

## Загальний варіант леми Шаніна

У даному підрозділі ми викладемо загальний варіант леми Шаніна. При цьому подамо дещо опрацьований метод доведення цього факту, застосований у [34].

### 2.2.1. Один наслідок з леми Куратовського – Цорна.

Розпочнемо з корисного для нас твердження про існування максимального елемента.

Нагадаємо деякі означення, пов'язані зі впорядкованими множинами. Множина $A$ із заданим на ній відношенням $\le$ називається *частково впорядкованою множиною*, якщо виконуються такі умови:

1) $a \le a$ для кожного $a \in A$;

2) якщо $a \le b$ і $b \le a$, то $a = b$;

3) якщо $a \le b$ і $b \le c$, то $a \le c$.

Нехай $\mathcal{A}$ – довільна непорожня система множин. Для довільних двох множин $A, B \in \mathcal{A}$ приймемо

$$A \le B \qquad \Leftrightarrow \qquad A \subseteq B.$$

Зрозуміло, що $(\mathcal{A}, \le)$ – частково впорядкована множина, яку ми будемо називати системою $\mathcal{A}$, *впорядкованою за включенням*, а порядок, породжений відношенням $\le$, будемо називати *порядком включення*.

Частково впорядкована множина $(A, \le)$ називається *лінійно впорядкованою множиною*, якщо $a \le b$ або $b \le a$ для довільних елементів $a, b \in A$.

Лінійно впорядкована множина $(A, \le)$ називається *цілком впорядкованою множиною*, якщо довільна непорожня множина $B \subseteq A$ має найменший елемент.

Підмножина $B$ частково впорядкованої множини $(A, \le)$ є *обмеженою зверху в множині* $A$, якщо існує елемент $a \in A$ такий, що $b \le a$ для кожного $b \in B$.

Елемент $a_0$ частково впорядкованої множини $(A, \le)$ називається *максимальним елементом множини* $A$, якщо для довільного $a \in A$ з умови $a_0 \le a$ випливає рівність $a = a_0$. Зокрема, для впорядкованої за включенням системи $\mathcal{A}$ елемент $A_0 \in \mathcal{A}$ є максимальним, якщо для довільного $A \in \mathcal{A}$ з умови $A_0 \subseteq A$ випливає рівність $A = A_0$.

Наступні теорема Цермело і лема Куратовського – Цорна є рівносильними до аксіоми вибору (див., наприклад, [16, розділ I.4]).

**Теорема 2.2.1** (Теорема Цермело). *Для довільної непорожньої множини $A$ існує відношення $\leq$ на $A$ таке, що множина $(A, \leq)$ цілком впорядкована.*

**Теорема 2.2.2** (Лема Куратовського – Цорна). *Нехай $(A, \leq)$ – частково впорядкована множина така, що кожна лінійно впорядкована підмножина $B$ множини $A$ обмежена зверху в множині $A$. Тоді в множині $A$ існує максимальний елемент.*

Непорожню систему множин $\mathcal{A}$ називатимемо *замкненою відносно об'єднання ланцюжків*, якщо

$$\bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{A}$$

для довільної лінійно впорядкованої за включенням непорожньої підсистеми $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Зрозуміло, що якщо система $\mathcal{A}$ замкнена відносно об'єднання ланцюжків, то кожна лінійно впорядкована за включенням підсистема $\mathcal{B}$ системи $\mathcal{A}$ є обмеженою зверху в $\mathcal{A}$, адже $A \subseteq \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$ для кожного $A \in \mathcal{B}$.

Тепер з леми Куратовського – Цорна ми одержуємо наступний результат для впорядкованих за включенням систем.

**Наслідок 2.2.3.** *Довільна замкнена відносно об'єднання ланцюжків система $\mathcal{A}$ має максимальний елемент.*

### 2.2.2. Регулярні і сингулярні кардинали.

В цьому пункті ми розглянемо деякі властивості кардиналів, які ми будемо використовувати у подальшому викладі.

Нехай $\aleph$ – довільний нескінченний кардинал. *Конфінальністю* $\mathrm{cof}\,(\aleph)$ кардинального числа $\aleph$ називається найменше кардинальне число $\aleph'$, для якого існує сім'я $(A_i : i \in I)$ множин $A_i$, що задовольняє такі умови

1) $|I| = \aleph'$;

2) $|A_i| < \aleph$ для кожного $i \in I$;

3) $\left|\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right| = \aleph$.

Легко помітити, що $\mathrm{cof}\,(\aleph) \leq \aleph$. Для перевірки цієї нерівності досить вибрати нескінченну множину $I$ з $|I| = \aleph$ і для кожного $i \in I$ прийеяти $A_i = \{i\}$.

Нескінченний кардинал $\aleph$ називається *регулярним*, якщо $\mathrm{cof}\,(\aleph) = \aleph$, і *сингулярним*, якщо $\mathrm{cof}\,(\aleph) < \aleph$.

Для довільного кардиналу $\aleph$ через $\aleph^+$ ми позначатимемо наступний після $\aleph$ кардинал.

Ми будемо використовувати такий факт.

**Твердження 2.2.4.** *Довільний сингулярний кардинал є граничним.*

*Доведення.* Нехай $\aleph$ – довільний нескінченний кардинал. Достатньо довести, що кардинал $\aleph^+$ регулярний.

Використовуючи означення конфінальності, виберемо сім'ю $(A_i : i \in I)$ множин $A_i$, яка задовольняє такі умови

1) $|I| = \mathrm{cof}(\aleph^+)$;

2) $|A_i| < \aleph^+$ для кожного $i \in I$;

3) $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \aleph^+$.

Тоді $|A_i| \leq \aleph$ для кожного $i \in I$ і тепер маємо, що

$$\aleph^+ = \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \leq |I| \times \aleph = \max\{|I|, \aleph\}.$$

Отже, $\aleph^+ \leq |I| = \mathrm{cof}(\aleph^+)$, тобто $\aleph^+ = \mathrm{cof}(\aleph^+)$. □

**Наслідок 2.2.5.** *Нехай $\aleph$ – сингулярний кардинал. Тоді існує сім'я $(\mathfrak{m}_s : s \in S)$ різних регулярних кардиналів $\mathfrak{m}_s$ така, що*

$$\aleph = \sup_{s\in S} \mathfrak{m}_s,$$

*$|S| = \mathrm{cof}(\aleph)$ і $\mathfrak{m}_s > \mathrm{cof}(\aleph)$ для кожного $s \in S$.*

*Доведення.* Виберемо сім'ю $(A_i : i \in I)$ множин $A_i$, яка задовольняє такі умови

1) $|I| = \mathrm{cof}(\aleph)$;

2) $|A_i| < \aleph$ для кожного $i \in I$;

3) $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \aleph$.

Для кожного $i \in I$ позначимо

$$\mathfrak{n}_i = \max\{|A_i|, \mathrm{cof}(\aleph)\}^+.$$

Зрозуміло, що $\mathfrak{n}_i > \mathrm{cof}(\aleph)$ для кожного $i \in I$. Покажемо, що $\aleph = \sup_{i\in I} \mathfrak{n}_i$.

Справді, з одного боку, оскільки $\max\{|A_i|, \mathrm{cof}(\aleph)\} < \aleph$, то $\mathfrak{n}_i \leq \aleph$ для кожного $i \in I$ і тому

$$\mathfrak{n} = \sup_{i\in I} \mathfrak{n}_i \leq \aleph.$$

А з іншого боку, $|I| \le \mathfrak{n}$ і $|A_i| \le \mathfrak{n}$ для кожного $i \in I$. Тому маємо, що

$$\aleph = \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \le \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n} = \mathfrak{n}.$$

Тепер позначимо

$$S = \{\mathfrak{n}_i : i \in I\}$$

і $\mathfrak{m}_s = s$ для кожного $s \in S$. Зрозуміло, що

$$\aleph = \sup_{i\in I} \mathfrak{n}_i = \sup_{s\in S} \mathfrak{m}_s$$

і $\mathfrak{m}_s > \operatorname{cof}(\aleph)$ для кожного $s \in S$. Звідси, зокрема, випливає, що $|S| \ge \operatorname{cof}(\aleph)$. Але $|S| \le |I| = \operatorname{cof}(\aleph)$. Тому $|S| = \operatorname{cof}(\aleph)$. □

Ми будемо також використовувати наступну просту властивість регулярних кардиналів.

**Твердження 2.2.6.** *Нехай $\aleph$ – регулярний кардинал, $I$ – довільна множина потужності $|I| < \aleph$ і $(A_i : i \in I)$ – сім'я множин $A_i$ такі, що $\left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| = \aleph$. Тоді існує індекс $j \in I$ такий, що $|A_j| = \aleph$.*

*Доведення.* Припустимо, що $|A_i| < \aleph$ для кожного $i \in I$. Тоді сім'я $(A_i : i \in I)$ задовольняє умови 1) – 3) з означення конфінальності. Тому

$$\operatorname{cof}(\aleph) \le |I| < \aleph,$$

що суперечить регулярності кардиналу $\aleph$. □

### 2.2.3. Узагальнення леми Шаніна.

Тепер викладемо основний результат даного підрозділу.

**Твердження 2.2.7** (Узагальнена лема Шаніна)**.** *Нехай $I$ – незліченна множина і $(A_i : i \in I)$ – сім'я скінченних множин. Тоді*

*(i) якщо кардинал $\aleph = |I|$ регулярний, то існують скінченна множина $B$ і множина $J \subseteq I$ такі, що $|J| = \aleph$ і $A_i \cap A_j = B$ для довільних різних $i, j \in J$;*

*(ii) якщо кардинал $\aleph = |I|$ сингулярний, то існують множини $B$ і $J \subseteq I$ такі, що $|B| = \operatorname{cof}(\aleph)$, $|J| = \aleph$ і $A_i \cap A_j \subseteq B$ для довільних різних $i, j \in J$.*

*Доведення.* $(i)$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$I_n = \{i \in I : |A_i| \le n\}.$$

Оскільки всі множини $A_i$ скінченні, то $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Крім того, кардинал $\aleph$ регулярний і $|\mathbb{N}| = \aleph_0 < \aleph$. Тому згідно з твердженням 2.2.6 існує номер $n \in \mathbb{N}$ такий, що $|I_n| = \aleph$.

Далі аналогічно, як при доведенні твердження 2.1.2, розглянемо множину $L$ всіх невід'ємних цілих чисел $l$ таких, що існують $l$-елементна множина $B'$ і множина індексів $I' \subseteq I_n$ потужності $\aleph$ такі, що $B' \subseteq A_i$ для кожного $i \in I'$. Зрозуміло, що $0 \in L$ і кожне натуральне число $k > n$ не є елементом множини $L$, тобто,

$$\{0\} \subseteq L \subseteq \{0, 1, \dots, n\}.$$

Позначимо

$$m = \max L$$

і знайдемо $m$-елементну множину $B$ і множину індексів $I_0 \subseteq I$ потужності $\aleph$ такі, що $B \subseteq A_i$ для кожного $i \in I_0$.

Тепер розглянемо систему $\mathcal{U}$ всіх множин $U \subseteq I_0$ таких, що $A_i \cap A_j = B$ для довільних різних $i, j \in U$. Покажемо, що система $\mathcal{U}$ замкнена відносно об'єднання ланцюжків. Нехай $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ – лінійно впорядкована за включенням підсистема системи $\mathcal{U}$ і $U = \bigcup\limits_{V \in \mathcal{V}} V$. Для довільних різних $i, j \in U$ виберемо $V_i, V_j \in \mathcal{V}$ такі, що $i \in V_i$ та $j \in V_j$. Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $V_i \subseteq V_j$. Тоді $i, j \in V_j$ і $A_i \cap A_j = B$, адже $V_j \in \mathcal{U}$. Отже, $U \in \mathcal{U}$ і система $\mathcal{U}$ замкнена відносно об'єднання ланцюжків.

Згідно з наслідком 2.2.3, в системі $\mathcal{U}$ існує максимальний елемент $J \in \mathcal{U}$. Залишилось показати, що $|J| = \aleph$. Припустимо, що це не так, тобто $|J| < \aleph$. Розглянемо множину

$$A = \bigcup_{i \in J} A_i.$$

Оскільки всі множини $A_i$ скінченні і $\aleph_0 < \aleph$, то

$$|A| \le |J| \times \aleph_0 \times |J| < \aleph.$$

Для кожного $a \in A \setminus B$ позначимо

$$I(a) = \{i \in I_0 \setminus J : a \in A_i\}$$

і покажемо, що

$$I_0 \setminus J = \bigcup_{a \in A \setminus B} I(a).$$

Зафіксуємо $i \in I_0 \setminus J$. З максимальності елемента $J$ в системі $\mathcal{U}$ випливає, що $J \cup \{i\} \notin \mathcal{U}$. Тому існує індекс $j \in J$ такий, що $A_i \cap A_j \neq B$. Оскільки $B \subseteq A_i \cap A_j$, то існує $a \in A_j \setminus B \subseteq A \setminus B$ таке, що $i \in I(a)$.

Зауважимо, що $|I_0 \setminus J| = \aleph$, адже $|I_0| = \aleph$ і $|J| < \aleph$. Тепер до сім'ї $(I(a) : a \in A \setminus B)$ застосуємо твердження 2.2.6 і одержимо, що існує елемент $a \in A \setminus B$ такий, що $|I(a)| = \aleph$. Тоді

$$|B \cup \{a\}| = m + 1$$

і $B \cup \{a\} \subseteq A_i$ для кожного $i \in I(a)$, що суперечить максимальності $m$.

$(ii)$. За допомогою наслідку 2.2.5 виберемо сім'ю $(\mathfrak{m}_s : s \in S)$ різних регулярних кардиналів $\mathfrak{m}_s$ таку, що

$$\aleph = \sup_{s \in S} \mathfrak{m}_s,$$

$|S| = \mathrm{cof}(\aleph)$ і $\mathfrak{m}_s > \mathrm{cof}(\aleph)$ для кожного $s \in S$. Крім того, для кожного $s \in S$ виберемо множину $I_s \subseteq I$ потужності $\mathfrak{m}_s$ і, застосувавши частину $(i)$ до сім'ї $(A_i : i \in I_s)$, одержимо скінченну множину $B_s$ і множину $J_s \subseteq I_s$ такі, що $|J_s| = \aleph_s$ і $A_i \cap A_j = B_s$ для довільних різних $i, j \in J_s$. Позначимо $B = \bigcup\limits_{s \in S} B_s$. Зрозуміло, що

$$|B| \leq \aleph_0 \cdot |S| = \mathrm{cof}(\aleph).$$

Для довільних $s \in S$ і скінченної множини $D$ позначимо

$$I_s(D) = \{i \in I_s : A_i \cap D \not\subseteq B\}$$

і покажемо, що всі множини $I_s(D)$ скінченні. Припустимо, що для деяких $s \in S$ і $D$ множина $I_s(D)$ нескінченна. Тоді

$$|I_s(D)| > |D \setminus B|$$

і для кожного індексу $i \in I_s(D)$ існує елемент $d \in D \setminus B$ такий, що $d \in A_i$. Тому існує елемент $d \in D \setminus B$ і різні індекси $i, j \in I_s(D)$ такі, що $d \in A_i \cap A_j$. Отже, $B_s = A_i \cap A_j \not\subseteq B$, що дає нам суперечність.

Тепер для кожного $s \in S$ позначимо

$$T_s = \{t \in S : \mathfrak{m}_t < \mathfrak{m}_s\} \qquad \text{і} \qquad J_s = I_s \setminus \bigcup_{t \in T_s} \bigcup_{i \in I_t} I_s(A_i).$$

Зауважимо, що $|T_s| \leq |S| = \mathrm{cof}(\aleph) < \mathfrak{m}_s$, $|I_t| = \mathfrak{m}_t < \mathfrak{m}_s$ для кожного $t \in T_s$, всі множини $I_s(A_i)$ скінченні і кардинал $\mathfrak{m}_s$ регулярний. Тому $\left|\bigcup_{t \in T_s} \bigcup_{i \in I_t} I_s(A_i)\right| < \mathfrak{m}_s$. Взявши до уваги, що $|I_s| = \mathfrak{m}_s$, одержимо, що $|J_s| = \mathfrak{m}_s$.

Покажемо, що множина

$$J = \bigcup_{s \in S} J_s$$

є шуканою, тобто $|J| = \aleph$ і $A_i \cap A_j \subseteq B$ для довільних різних $i, j \in J$. Оскільки $J \subseteq I$, то $|J| \leq |I| = \aleph$. Разом з тим

$$|J| \geq \sup_{s \in S} |J_s| = \sup_{s \in S} \mathfrak{m}_s = \aleph.$$

Отже, $|J| = \aleph$. Тепер нехай $i, j \in J$ – довільні різні індекси. Виберемо $s, t \in S$ такі, що $i \in J_s$ та $j \in J_t$. Якщо $s = t$, то

$$A_i \cap A_j = B_s \subseteq B.$$

Розглянемо випадок, коли $s \neq t$. Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $\mathfrak{m}_t < \mathfrak{m}_s$, тобто $t \in T_s$. Оскільки $i \in J_s$, то $i \notin I_s(A_j)$, тобто $A_i \cap A_j = B_s \subseteq B$.

$\square$

# 2.3

# Насичені властивості сімей і топологічні властивості добутків

У цьому підрозділі ми викладемо подане в роботі [34] застосування загального варіанта леми Шаніна до дослідження деяких кардинальних властивостей топологічних добутків, які використовувалися в [34] при дослідженні залежності неперервних відображень від певної кількості координат, а також в [54] при дослідженні залежності нарізно неперервних відображень від певної кількості координат. Крім того, ми наведемо проведені в [54] побудови, які використовуються для якісного порівняння цих властивостей.

**2.3.1. Насичені властивості сімей множин у топологічних просторах.** Спочатку введемо деякі поняття і позначення.

Будемо казати, що сім'я множин $\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$ *міститься в сім'ї множин* $\mathcal{V} = (V_j : j \in J)$ (або $\mathcal{V}$ *містить* $\mathcal{U}$) і позначатимемо $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, якщо $I \subseteq J$ і $V_i = U_i$ для кожного $i \in I$. При цьому сім'ю $\mathcal{U}$ ми називатимемемо *підсім'єю* сім'ї $\mathcal{V}$.

Для сім'ї множин $\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$ потужність $\aleph = |I|$ називатимемо *потужністю* сім'ї $\mathcal{U}$. При цьому сім'ю $\mathcal{U}$ ми називатимемо $\aleph$-*сім'єю.*

Наступне поняття було введено в [34] і стало там одним із технічних інструментів для дослідження цілого класу топологічних властивостей добутків.

**Означення 2.3.1.** *Властивість $\phi$ сімей множин у топологічних просторах називається* **насиченою**, *якщо вона задовольняє такі умови:*

*(a) якщо сім'я підмножин $\mathcal{U}$ топологічного простору $X$ має $\phi$ в $X$ і міститься в сім'ї $\mathcal{V}$ підмножин простору $X$, то $\mathcal{V}$ має $\phi$ в $X$;*

*(b) якщо $\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$ – сім'я підмножин топологічного простору $X$ і $V$ – підмножина топологічного простору $Y$ такі, що сім'я $(U_i \times V : i \in I)$ має $\phi$ в $X \times Y$, то $\mathcal{U}$ має $\phi$ в $X$;*

*(c) якщо сім'я підмножин $(U_i : i \in I)$ топологічного простору $X$ має $\phi$ в $X$ і для кожного $i \in I$ множина $V_i$ – непорожня підмножина топологічного простору $X_i$, то сім'я $(U_i \times V_i \times \prod\limits_{j \in I \setminus \{i\}} X_j : i \in I)$ має $\phi$ в $X \times \prod\limits_{i \in I} X_i$.*

Нехай $\aleph$ – довільний кардинал. Ми казатимемо, що сім'я множин $(U_i : i \in I)$ *має властивість* $\aleph$*-перетину*, якщо для довільної множини $J \subseteq I$ потужності $|J| \leq \aleph$ перетин $\bigcap\limits_{i \in J} U_i$ непорожній.

Точка $x$ в топологічному просторі $X$ називається *точкою накопичення* сім'ї $(U_i : i \in I)$ підмножин простору $X$, якщо для кожного околу $U$ точки $x$ в просторі $X$ множина $\{i \in I : U \cap U_i \neq \emptyset\}$ нескінченна, і *точкою дотику* сім'ї $(U_i : i \in I)$, якщо $x \in \overline{U_i}$ для кожного $i \in I$.

Наступний результат є основним у даному пункті і дає потрібні нам приклади насичених властивостей.

**Теорема 2.3.2.** *Для довільних кардиналів* $\mathfrak{m}$ *і* $\mathfrak{n}$ *наступні властивості сімей множин у топологічних просторах є насиченими:*

($\phi_1$) *сім'я* $\mathcal{U}$ *містить* $\mathfrak{m}$*-підсім'ю* $\mathcal{V}$ *з властивістю* $\mathfrak{n}$*-перетину;*

($\phi_2$) *сім'я* $\mathcal{U}$ *містить* $\mathfrak{m}$*-підсім'ю* $\mathcal{V}$*, кожна* $\mathfrak{n}$*-підсім'я* $\mathcal{W}$ *якої має точку накопичення;*

($\phi_3$) *сім'я* $\mathcal{U}$ *містить* $\mathfrak{m}$*-підсім'ю* $\mathcal{V}$*, кожна* $\mathfrak{n}$*-підсім'я* $\mathcal{W}$ *якої має точку дотику.*

*Доведення.* Зрозуміло, що властивості $(\phi_1) - (\phi_3)$ задовольняють умову $(a)$ з означення насиченої властивості, адже якщо сім'я $\mathcal{U}$ містить деяку підсім'ю з певними властивостями, то цю ж підсім'ю містить і ширша сім'я $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{U}$.

Перевіримо $(b)$. Нехай $\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$ – сім'я підмножин топологічного простору $X$, $V$ – підмножина топологічного простору $Y$ і сім'я $\mathcal{U}' = (U_i \times V : i \in I)$ має властивість $(\phi_k)$, де $k \in \{1, 2, 3\}$. Тоді існує множина $J \subseteq I$ потужності $|J| = \mathfrak{m}$ така, що сім'я $\mathcal{V}' = (U_i \times V : i \in J)$ має відповідну властивість. Покажемо, що сім'я $\mathcal{V} = (U_i : i \in J)$ також має цю властивість.

Якщо $k = 1$, то $\mathcal{V}'$ має властивість $\mathfrak{n}$-перетину. Оскільки

$$\bigcap_{i \in K} (U_i \times V) = \left( \bigcap_{i \in K} U_i \right) \times V$$

для довільної множини $K \subseteq J$, то і сім'я $\mathcal{V}'$ також має властивість $\mathfrak{n}$-перетину.

Якщо $k = 2$, то кожна $\mathfrak{n}$-підсім'я $\mathcal{W}'$ сім'ї $\mathcal{V}'$ має точку накопичення в $X \times Y$, тобто для кожної множини $K \subseteq J$ потужності $|K| \leq \mathfrak{n}$ існує точка $z_K = (x_K, y_K) \in X \times Y$ така, що для довільного околу $W$ точки $z_K$ в просторі $X \times Y$ множина

$$\{i \in K : (U_i \times V) \cap W \neq \emptyset\}$$

нескінченна. Зокрема, для довільного околу $U$ точки $x_K$ в просторі $X$ множина

$$\{i \in K : (U_i \times V) \cap (U \times Y) \neq \emptyset\} = \{i \in K : U_i \cap U \neq \emptyset\}$$

нескінченна. Отже, кожна $\mathfrak{n}$-підсім'я $\mathcal{W}$ сім'ї $\mathcal{V}$ має точку накопичення.

Якщо $k = 3$, то кожна $\mathfrak{n}$-підсім'я $\mathcal{W}'$ сім'ї $\mathcal{V}'$ має точку дотику, тобто для кожної множини $K \subseteq J$ потужності $|K| \leq \mathfrak{n}$ існує точка $z_K = (x_K, y_K) \in X \times Y$ така, що

$$z_K \in \overline{U_i \times V}$$

для кожного $i \in K$. Це означає, що $y_K \in \overline{V}$ і $x_K \in \overline{U_i}$ для кожного $i \in K$. Зокрема, $x_K$ точка дотику сім'ї $(U_i : i \in K)$. Отже, кожна $\mathfrak{n}$-підсім'я $\mathcal{W}$ сім'ї $\mathcal{V}$ має точку дотику.

Тепер доведемо $(c)$. Нехай $\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$ – сім'я підмножин топологічного простору $X$ має властивість $(\phi_k)$ в $X$, де $k \in \{1, 2, 3\}$, і для кожного $i \in I$ множина $V_i$ є непорожньою підмножиною топологічного простору $X_i$. Покажемо, що сім'я $\mathcal{U}' = (U_i \times V_i \times \prod\limits_{j \in I \setminus \{i\}} X_j : i \in I)$ має $\phi_k$ в $X \times \prod\limits_{i \in I} X_i$. Для кожного $i \in I$ виберемо точку $y_i \in V_i$ і позначимо $y = (y_i)_{i \in I} \in Y = \prod\limits_{i \in I} X_i$. Оскільки $\mathcal{U}$ має властивість $(\phi_k)$, то існує множина $J \subseteq I$ потужності $|J| = \mathfrak{m}$ така, що сім'я $\mathcal{V} = (U_i : i \in J)$ має відповідну властивість. Покажемо, що сім'я $\mathcal{V}' = (U_i \times V_i \times \prod\limits_{j \in I \setminus \{i\}} X_j : i \in J)$ також має цю властивість.

Якщо $k = 1$, то $\mathcal{V}$ має властивість $\mathfrak{n}$-перетину. Оскільки

$$x \in \bigcap_{i \in K} U_i \qquad \Leftrightarrow \qquad (x, y) \in \bigcap_{i \in K} \left( U_i \times V_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j \right)$$

для довільної множини $K \subseteq J$, то і сім'я $\mathcal{V}'$ також має властивість $\mathfrak{n}$-перетину.

Якщо $k = 2$, то кожна $\mathfrak{n}$-підсім'я $\mathcal{W}$ сім'ї $\mathcal{V}$ має точку накопичення, тобто для кожної множини $K \subseteq J$ потужності $|K| \leq \mathfrak{n}$ існує точка $x_K \in X$ така, що для довільного околу $U$ точки $x_K$ в просторі $X$ множина

$$\{i \in K : U_i \cap U \neq \emptyset\}$$

нескінченна. Оскільки $y \in V_i \times \prod\limits_{j \in I \setminus \{i\}} X_j$ для кожного $i \in I$, то множина

$$\{i \in K : (U_i \times V_i \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} X_j) \cap (U \times V) \neq \emptyset\}$$

– нескінченна для довільних околів $U$ точки $x_K$ в просторі $X$ і $V$ точки $y$ в просторі $\prod\limits_{i\in I} X_i$. Отже, $(x_K, y)$ точка накопичення сім'ї $(U_i \times V_i \times \prod\limits_{j\in I\setminus\{i\}} X_j : i \in K)$, тобто кожна $\mathfrak{n}$-підсім'я $\mathcal{W}'$ сім'ї $\mathcal{V}'$ має точку накопичення.

Якщо $k = 3$, то кожна $\mathfrak{n}$-підсім'я $\mathcal{W}$ сім'ї $\mathcal{V}$ має точку дотику, тобто для кожної множини $K \subseteq J$ потужності $|K| \leq \mathfrak{n}$ існує точка $x_K \in X$ така, що

$$x_K \in \overline{U_i}$$

для кожного $i \in K$. Зрозуміло, що тоді

$$(x_K, y) \in \overline{U_i \times V_i \times \prod_{j\in I\setminus\{i\}} X_j}$$

для кожного $i \in K$. Отже, кожна $\mathfrak{n}$-підсім'я $\mathcal{W}'$ сім'ї $\mathcal{V}'$ має точку дотику.

$\square$

**Зауваження 2.3.3.** У випадку $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ властивість $(\phi_1)$ має наступний вигляд: сім'я $\mathcal{U}$ містить $\mathfrak{m}$-підсім'ю $\mathcal{V}$ з непорожнім перетином.

### 2.3.2. Топологічні властивості добутків у термінах насичених сімей.

Тепер перейдемо до подальшого розвитку викладеного в [34] підходу, який приводить до розгляду кардинальних топологічних властивостей добутків, які описуються в термінах насичених властивостей сімей відкритих множин.

Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $\phi$ – насичена властивість сімей множин і $\mathcal{B}$ – база відкритих множин у топологічному просторі $X$. Позначимо через $P(\phi, \aleph, \mathcal{B})$ наступну властивість топологічного простору $X$: *кожна $\aleph$-сім'я непорожніх множин з $\mathcal{B}$ має властивість $\phi$*. Якщо топологічний простір $X$ має властивість $P(\phi, \aleph, \mathcal{B})$, то ми будемо також казати, що $X$ має властивість $P(\phi, \aleph)$ відносно бази $\mathcal{B}$. У разі, якщо база $\mathcal{B}$ стандартна і зрозуміла з контексту, властивість $P(\phi, \aleph, \mathcal{B})$ ми будемо позначати просто $P(\phi, \aleph)$ і також казати, що $X$ має властивість $P(\phi, \aleph)$.

Наступний результат з [34], одержаний з допомогою леми Шаніна, дає можливість дослідження кардинальних топологічних властивостей добутків зводити до вивчення добутків "малої" кількості множників.

**Теорема 2.3.4.** *Нехай $(X_s : s \in S)$ – сім'я топологічних просторів $X_s$, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $\aleph$ – нескінченний кардинал і $\phi$ – насичена властивість сімей множин. Тоді*

*(i) якщо кардинал $\aleph$ регулярний, то топологічний простір $X$ має властивість $P(\phi, \aleph)$ відносно стандартної бази тоді і тільки тоді, коли для довільної непорожньої скінченної множини $T \subseteq S$ топологі-*

*чний добуток $\prod\limits_{s\in T} X_s$ має властивість $P(\phi,\aleph)$ відносно стандартної бази;*

(ii) *якщо кардинал $\aleph$ сингулярний і $\mathfrak{n}=\mathrm{cof}(\aleph)$, то топологічний простір $X$ має властивість $P(\phi,\aleph)$ відносно стандартної бази тоді і тільки тоді, коли для довільної множини $T\subseteq S$ потужності $|T|\le\mathfrak{n}$ топологічний добуток $\prod\limits_{s\in T} X_s$ має властивість $P(\phi,\aleph)$ відносно стандартної бази.*

*Доведення.* Спочатку доведемо необхідність в обох випадках $(i)$ та $(ii)$. Нехай простір $X$ має властивість $P(\phi,\aleph)$. Достатньо довести, що для довільної непорожньої множини $T\subseteq S$ топологічний добуток $X_T=\prod\limits_{s\in T} X_s$ має властивість $P(\phi,\aleph)$. Зафіксуємо довільну непорожню множину $T\subseteq S$ і довільну $\aleph$-сім'ю $\mathcal{U}$ непорожніх базисних відкритих множин у просторі $X_T$. Покладемо $Y_T=\prod\limits_{s\in S\setminus T} X_s$. Зрозуміло, що сім'я

$$\mathcal{U}'=(U\times Y_T : U\in\mathcal{U})$$

є $\aleph$-сім'єю непорожніх базисних відкритих множин у просторі $X=X_T\times Y_T$. Оскільки $X$ має властивість $P(\phi,\aleph)$, то сім'я $\mathcal{U}'$ має властивість $\phi$ у просторі $X$. Тому, згідно з умовою $(b)$, сім'я $\mathcal{U}$ має властивість $\phi$ у просторі $X_T$. Отже, простір $X_T$ має властивість $P(\phi,\aleph)$.

Тепер доведемо достатність. Розпочнемо з випадку $(i)$. Нехай для довільної непорожньої скінченної множини $T\subseteq S$ топологічний добуток $\prod\limits_{s\in T} X_s$ має властивість $P(\phi,\aleph)$. Покажемо, що простір $X$ має властивість $P(\phi,\aleph)$. Нехай $\mathcal{U}=(U_i : i\in I)$ – довільна $\aleph$-сім'я непорожніх базисних відкритих множин у просторі $X$. Нагадаємо, що для кожної базисної відкритої множини

$$U_i=\prod_{s\in S} U_s^{(i)}$$

множина

$$A_i=R(U_i)=\{s\in S : U_s^{(i)}\neq X_s\}$$

скінченна. До $\aleph$-сім'ї $(A_i : i\in I)$ множин $A_i\subseteq S$ застосуємо твердження 2.2.7$(i)$ і знайдемо скінченну множину $T\subseteq S$ і множину $J\subseteq I$ потужності $|J|=\aleph$ такі, що $A_i\cap A_j=T$ для довільних різних $i,j\in J$. Зафіксуємо довільний індекс $j_0\in J$ і позначимо

$$S_{j_0}=(A_{j_0}\setminus T)\cup\left(S\setminus\bigcup_{i\in J} A_i\right)\qquad\text{і}\qquad S_j=A_j\setminus T$$

для кожного $j \in J \setminus \{j_0\}$. Крім того, позначимо

$$Y = \prod_{s \in T} X_s, \qquad \text{і} \qquad Y_j = \prod_{s \in S_j} X_s.$$

для кожного $j \in J$. Зрозуміло, що

$$S = T \bigsqcup \left( \bigsqcup_{j \in J} S_j \right),$$

а тому

$$X = Y \times \prod_{j \in J} Y_j.$$

Тепер для кожного $j \in J$ покладемо

$$V_j = \prod_{s \in T} U_s^{(j)} \qquad \text{і} \qquad W_j = \prod_{s \in S_j} U_s^{(i)}.$$

Оскільки $R(U_j) = A_j \subseteq T \sqcup S_j$, то

$$U_j = V_j \times W_j \times \prod_{i \in J \setminus \{j\}} Y_i$$

для кожного $j \in J$. Згідно з нашим припущенням, простір $Y$ має властивість $P(\phi, \aleph)$. Тому $\aleph$-сім'я $(V_j : j \in J)$ непорожніх базисних відкритих множин $V_j$ у просторі $Y$ має властивість $\phi$. З умови $(c)$ випливає, що $\aleph$-сім'я $(U_j : j \in J)$ має властивість $\phi$ в $X$. Отже, згідно з умовою $(a)$, $\aleph$-сім'я $\mathcal{U}$ також має властивість $\phi$ і простір $X$ має властивість $P(\phi, \aleph)$.

У випадку $(ii)$ ми міркуємо цілком аналогічно, використовуючи твердження 2.2.7$(ii)$ і відповідне припущення. $\square$

### 2.3.3. Псевдо-$\aleph$-компактність, точково скінченна клітковість і калібр топологічних добутків.

У даному пункті ми застосуємо результат попереднього пункту до вивчення деяких кардинальних властивостей топологічних добутків.

Сім'я $\mathcal{A} = (A_i : i \in I)$ підмножин $A_i$ топологічного простору $X$ називається *локально скінченною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл $U$, що множина

$$I(U) = \{i \in I : A_i \cap U \neq \emptyset\}$$

– скінченна, *точково скінченною* чи $\aleph$-*точковою*, де $\aleph$ – довільний кардинал, якщо для кожного $x \in X$ множина

$$I(x) = \{i \in I : x \in A_i\}$$

– скінченна чи має потужність, яка не перевищує $\aleph$.

**Твердження 2.3.5.** *Нехай $X$ – топологічний простір і $\mathcal{A} = (A_i : i \in I)$ – сім'я підмножин $A_i$ топологічного простору $X$. Тоді*

*(i) сім'я $\mathcal{A}$ локально скінченна тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{A}$ не має точки накопичення;*

*(ii) сім'я $\mathcal{A}$ точково скінченна тоді і тільки тоді, коли кожна $\aleph_0$-підсім'я сім'ї $\mathcal{A}$ має порожній перетин;*

*(iii) сім'я $\mathcal{A}$ є $\aleph$-точковою, де $\aleph$ – довільний кардинал, тоді і тільки тоді, коли кожна $\aleph^+$-підсім'я сім'ї $\mathcal{A}$ має порожній перетин.*

*Доведення.* $(i)$. Згідно з означенням локальної скінченності, сім'я $\mathcal{A}$ локально скінченна, якщо для кожної точки $x \in X$ існує такий її окіл $U$, що множина $I(U) = \{i \in I : A_i \cap U \neq \emptyset\}$ скінченна, тобто $x$ не є точкою накопичення сім'ї $\mathcal{A}$.

$(ii)$. З означення випливає, що сім'я $\mathcal{A}$ точково скінченна тоді і тільки тоді, коли для довільної нескінченної множини $J \subseteq I$ перетин $\bigcap\limits_{i\in J} A_i$ порожній. Це означає, що для довільної зліченної множини $J \subseteq I$ перетин $\bigcap\limits_{i\in J} A_i$ порожній, тобто кожна $\aleph_0$-підсім'я має порожній перетин.

$(iii)$. Міркуємо аналогічно, як в попередньому випадку. З означення випливає, що сім'я $\mathcal{A}$ є $\aleph$-точковою тоді і тільки тоді, коли для довільної множини $J \subseteq I$ потужності $|J| > \aleph$ перетин $\bigcap\limits_{i\in J} A_i$ порожній. Це означає, що для довільної множини $J \subseteq I$ потужності $|J| = \aleph^+$ перетин $\bigcap\limits_{i\in J} A_i$ порожній, тобто кожна $\aleph^+$-підсім'я сім'ї $\mathcal{A}$ має порожній перетин. $\square$

Топологічний простір $X$ називається *псевдо-$\aleph$-компактним*, де $\aleph$ – деякий нескінченний кардинал, якщо довільна локально скінченна сім'я непорожніх відкритих в $X$ множин має потужність, меншу ніж $\aleph$. У цьому випадку також кажуть, що простір $X$ має *дискретну кліткoвість*, яка не перевищує $\aleph$.

**Наслідок 2.3.6.** *Нехай $(X_s : s \in S)$ – сім'я топологічних просторів $X_s$, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $\aleph$ – довільний нескінченний кардинал. Тоді*

*(i) якщо кардинал $\aleph$ регулярний, то топологічний простір $X$ псевдо-$\aleph$-компактний тоді і тільки тоді, коли для довільної непорожньої скінченної множини $T \subseteq S$ топологічний добуток $\prod\limits_{s\in T} X_s$ псевдо-$\aleph$-компактний;*

(ii) *якщо кардинал $\aleph$ сингулярний, то топологічний простір $X$ псевдо-$\aleph$-компактний тоді і тільки тоді, коли для довільної множини $T \subseteq S$ потужності $|T| \leq \mathrm{cof}(\aleph)$ топологічний добуток $\prod\limits_{s\in T} X_s$ псевдо-$\aleph$-компактний.*

*Доведення.* Нехай $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} = \aleph$ і $\phi$ – це властивість $(\phi_2)$ з теореми 2.3.2. Тоді властивість $P(\phi, \aleph)$ довільного топологічного простору $Y$ відносно довільної фіксованої бази $\mathcal{B}$ простору $Y$ означає, що

> *довільна $\aleph$-сім'я $\mathcal{U}$ множин з бази $\mathcal{B}$ містить деяку $\aleph$-сім'ю $\mathcal{V}$ кожна $\aleph$-підсім'я $\mathcal{W}$ має точку накопичення.*

Тепер, згідно з теоремою 2.3.4, достатньо довести, що наступні умови рівносильні:

1) $Y$ має властивість $P(\phi, \aleph)$;

2) довільна локально скінченна в просторі $Y$ сім'я непорожніх відкритих множин з бази $\mathcal{B}$ має потужність, меншу, ніж $\aleph$, тобто довільна $\aleph$-сім'я множин з бази $\mathcal{B}$ має точку накопичення;

3) $Y$ псевдо-$\aleph$-компактний.

1) $\Rightarrow$ 2). Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що умова 2) не виконується, тобто існує $\aleph$-сім'я $\mathcal{U}$ множин з бази $\mathcal{B}$, яка не має точки накопичення. Тоді і довільна $\aleph$-підсім'я сім'ї $\mathcal{U}$ також не має точки накопичення, що заперечує умову 1).

2) $\Rightarrow$ 1). Для доведення властивості $P(\phi, \aleph)$ простору $Y$ досить прийняти $\mathcal{V} = \mathcal{U}$. Тоді, згідно з 1), кожна $\aleph$-підсім'я сім'ї $\mathcal{V}$ має точку накопичення, тобто $Y$ має $P(\phi, \aleph)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Нехай $(U_i : i \in I)$ – довільна локально скінченна сім'я непорожніх відкритих в $Y$ множин. Для кожного $i \in I$ виберемо непорожню множину $V_i \subseteq U_i$, яка належить базі $\mathcal{B}$. Зрозуміло, що сім'я $(V_i : i \in I)$ також локально скінченна. Тому, $|I| < \aleph$ згідно з 2). Отже, $Y$ є псевдо-$\aleph$-компактним.

Імплікація 3) $\Rightarrow$ 2) очевидна. $\square$

Нехай $X$ – топологічний простір і $\mathfrak{A}$ – сукупність усіх точково скінченних сімей непорожніх відкритих множин в просторі $X$. Кардинальне число

$$\sup\{|\mathcal{A}| : \mathcal{A} \in \mathfrak{A}\}$$

називається *точково скінченною клітковістю* топологічного простору $X$ і позначається $p(X)$.

**Наслідок 2.3.7.** *Нехай $(X_s : s \in S)$ – сім'я топологічних просторів $X_s$, $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$, $\aleph$ – довільний нескінченний кардинал. Тоді $p(X) \leq \aleph$ тоді і тільки тоді, коли $p\left(\prod\limits_{s \in T} X_s\right) \leq \aleph$ для довільної непорожньої скінченної множини $T \subseteq S$.*

*Доведення.* Нехай $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} = \aleph_0$ і $\phi$ – це властивість $(\phi_1)$ з теореми 2.3.2. Згідно з зауваженням 2.3.3, властивість $P(\phi, \aleph^+)$ довільного топологічного простору $Y$ відносно бази $\mathcal{B}$ в $Y$ має такий вигляд

> *довільна $\aleph^+$-сім'я $\mathcal{U}$ непорожніх множин з бази $\mathcal{B}$ містить деяку $\aleph_0$-підсім'ю $\mathcal{V}$ з непорожнім перетином,*

або іншими словами,

> *довільна $\aleph^+$-сім'я $\mathcal{U}$ непорожніх множин з бази $\mathcal{B}$ не є точково скінченною.*

Тепер, беручи до уваги регулярність кардиналу $\aleph^+$ і теорему 2.3.4, достатньо довести, що наступні умови рівносильні:

1) $Y$ має властивість $P(\phi, \aleph^+)$;

2) $p(Y) \leq \aleph$.

Зауважимо, що умова 2) рівносильна тому, що довільна $\aleph^+$-сім'я $\mathcal{U}$ непорожніх відкритих множин у просторі $Y$ не є точково скінченною. Тепер імплікація 2) $\Rightarrow$ 1) очевидна, а імплікація 1) $\Rightarrow$ 2) доводиться аналогічно, як імплікація 2) $\Rightarrow$ 3) в наслідку 2.3.6. $\square$

Кардинальне число $\aleph$ називається *калібром* топологічного простору $X$, якщо для довільної $\aleph$-сім'ї $\mathcal{A}$ відкритих в $X$ непорожніх множин існує $\aleph$-сім'я $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ з непорожнім перетином.

Спочатку розглянемо випадок добутку двох просторів.

**Твердження 2.3.8.** *Нескінченний кардинал $\aleph$ є калібром топологічного добутку $X \times Y$ тоді і тільки тоді, коли $\aleph$ є калібром кожного простору $X$ і $Y$.*

*Доведення. Необхідність.* Нехай $\aleph$ – калібр топологічного добутку $X \times Y$. Достатньо показати, що $\aleph$ – калібр топологічного простору $X$. Розглянемо довільну $\aleph$-сім'ю $(U_i : i \in I)$ відкритих непорожніх множин в $X$. Для кожного $i \in I$ позначимо

$$W_i = U_i \times Y.$$

Оскільки $\aleph$ – калібр простору $X \times Y$, то існує множина $J \subseteq I$ потужності $\aleph$ така, що перетин $\bigcap\limits_{i \in J} W_i$ непорожній. Зрозуміло, що і перетин $\bigcap\limits_{i \in J} U_i$ також непорожній. Отже, $\aleph$ – калібр простору $X$.

*Достатність.* Нехай $\aleph$ – калібр кожного простору $X$ і $Y$. Покажемо, що $\aleph$ – калібр простору $X \times Y$. Розглянемо довільну $\aleph$-сім'ю $(W_i : i \in I)$ відкритих непорожніх множин в $X \times Y$. Для кожного $i \in I$ виберемо відкриті непорожні множини $U_i$ і $V_i$ у просторах $X$ і $Y$ відповідно, такі, що

$$U_i \times V_i \subseteq W_i.$$

Оскільки $\aleph$ – калібр простору $X$, то існує множина $J \subseteq I$ потужності $\aleph$ така, що перетин $\bigcap\limits_{i \in J} U_i$ непорожній. Тепер використаємо, що $\aleph$ є калібром простору $Y$ і одержимо, що існує множина $K \subseteq J$ потужності $\aleph$ така, що перетин $\bigcap\limits_{i \in K} V_i$ непорожній. Зрозуміло, що і перетин $\bigcap\limits_{i \in K} W_i$ також непорожній. Отже, $\aleph$ – калібр простору $X \times Y$. □

**Наслідок 2.3.9.** *Нехай $(X_s : s \in S)$ – сім'я топологічних просторів $X_s$, $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$, $\aleph$ – довільний нескінченний кардинал. Тоді $\aleph^+$ є калібром простору $X$ тоді і тільки тоді, коли $\aleph^+$ є калібром кожного простору $X_s$.*

*Доведення.* Згідно з твердженням 2.3.8, достатньо довести, що $\aleph^+$ – калібр простору $X$ тоді і тільки тоді, коли $\aleph^+$ – калібр кожного скінченного піддобутку.

Нехай $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} = \aleph^+$ і $\phi$ – це властивість $(\phi_1)$ з теореми 2.3.2. Тоді, згідно із зауваженням 2.3.3, властивість $P(\phi, \aleph^+)$ довільного топологічного простору $Y$ відносно бази $\mathcal{B}$ в $Y$ означає, що

> *довільна $\aleph^+$-сім'я $\mathcal{U}$ непорожніх множин з бази $\mathcal{B}$ містить деяку $\aleph^+$-підсім'ю $\mathcal{V}$ з непорожнім перетином.*

Тепер, знову беручи до уваги регулярність кардиналу $\aleph^+$ і теорему 2.3.4, достатньо зауважити, що аналогічно, як при доведенні наслідку 2.3.7, наступні умови рівносильні:

1) $Y$ має властивість $P(\phi, \aleph^+)$;

2) $\aleph^+$ – калібр простору $Y$.

□

### 2.3.4. Простір $P_\aleph$ і порівняння деяких властивостей топологічних просторів.

У даному пункті ми викладемо побудови з [54], які, зокрема, дають можливість якісно порівняти розглянуті в попередньому пункті властивості топологічних добутків.

Нехай $X$ – топологічний простір і $\mathcal{A}$ – система всіх всюди щільних в $X$ множин. Нагадаємо, що кардинальне число

$$\max\{\aleph_0, \min\{|A| : A \in \mathcal{A}\}\}$$

називається *щільністю* топологічного простору $X$ і позначається $d(X)$. Зокрема, простір $X$ – сепарабельний, якщо $d(X) = \aleph_0$.

Наступне твердження має стандартне доведення.

**Твердження 2.3.10.** *Для довільного топологічного простору $X$ кожне регулярне кардинальне число $\aleph > d(X)$ є калібром простору $X$. Зокрема, кожне незліченне регулярне кардинальне число $\aleph$ є калібром сепарабельного простору $X$.*

*Доведення.* Нехай $A = \{a_s : s \in S\}$, де $|S| = d(X)$ і $X = \overline{A}$, $|I| = \aleph$ і $(U_i : i \in I)$ – довільна сім'я непорожніх відкритих множин $U_i$ у просторі $X$. Для кожного $s \in S$ позначимо

$$I(s) = \{i \in I : a_s \in U_i\}.$$

Оскільки $X = \overline{A}$ і всі множини $U_i$ відкриті і непорожні, то

$$I = \bigcup_{s \in S} I(s).$$

З твердження 2.2.6 випливає, що існує $s \in S$ таке, що $|I(s)| = \aleph$. Тоді $\aleph$-сім'я $(U_i : i \in I(s))$ має непорожній перетин. $\square$

Топологічні властивості, розглянуті в попередньому пункті, мають наступний природний зв'язок.

**Твердження 2.3.11.** *Для довільного топологічного простору $X$ і довільного нескінченного кардиналу $\aleph$ з кожного з наступних тверджень випливає попереднє:*

$(I_\aleph)$ *простір $X$ псевдо-$\aleph^+$-компактний;*

$(II_\aleph)$ $p(X) \le \aleph$;

$(III_\aleph)$ $\aleph^+$ *є калібром простору $X$.*

*Доведення.* Згідно з означеннями, умови $(I_\aleph)$, $(II_\aleph)$ і $(III_\aleph)$ рівносильні тому, що кожна відповідно локально скінченна, точково скінченна і $\aleph$-точкова сім'я непорожніх відкритих у просторі $X$ множин має потужність, яка не перевищує $\aleph$. Залишилося зауважити, що довільна локально скінченна сім'я точково скінченна, а довільна точково скінченна сім'я $\aleph$-точкова. □

Ми будемо використовувати також наступну властивість.

**Твердження 2.3.12.** *Кожний регулярний псевдо-$\aleph_0$-компактний простір є берівським.*

*Доведення.* Нехай $X$ – псевдо-$\aleph_0$-компактний простір, тобто кожна локально скінченна сім'я відкритих непорожніх множин в $X$ є скінченною. Покажемо, що $X$ берівський.

Нехай $U_0$ – довільна відкрита непорожня множина в $X$. Припустимо, що $U_0$ першої категорії в $X$. Тоді існує послідовність $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ ніде не щільних замкнених множин $F_n$ в $X$ така, що $U_0 \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Легко побудувати спадну послідовність $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих в $X$ непорожніх множин $U_n$ таку, що $\overline{U_n} \subseteq U_{n-1}$ і $U_n \cap F_n = \emptyset$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \cap U_0 = (\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) =$$

$$= \bigcup_{m=1}^{\infty} ((\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n) \cap F_m) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \cap F_n) = \emptyset.$$

Тому послідовність $(\overline{U_n})_{n=1}^{\infty}$ локально скінченна, отже, послідовність $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ також локально скінченна. А це суперечить псевдо-$\aleph_0$-компактності простору $X$. Отже, $U_0$ – множина другої категорії в $X$, а $X$ – берівський простір. □

Далі ми розглянемо приклади просторів, які ми будемо використовувати при доведенні істотності певних умов у теоремах про залежність функцій на добутках від певної кількості координат. Вони, зокрема, ілюструють зв'язки між вищезгаданими кардинальними характеристиками топологічних просторів.

Топологічний простір $X$ називається *$\aleph$-компактним*, де $\aleph$ – деякий нескінченний кардинал, якщо з довільного відкритого покриття простору $X$, яке має потужність, яка не перевищує $\aleph$, можна виділити скінченне підпокриття.

Для довільної функції $f : X \to \mathbb{R}$ множина

$$\operatorname{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

називається *носієм* функції $f$.

Наступний простір відіграє роль модельного у нашому викладі.

**Означення 2.3.13.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал і $S$ – така множина, що $|S| = \aleph^+$. Позначимо*

$$P_\aleph = \{x \in [0,1]^S : |\operatorname{supp} x| \le \aleph\}$$

*і наділимо цей простір топологією поточкової збіжності на множині $S$. Іншими словами, $P_\aleph$ – це підпростір тихоновського куба ваги $\aleph^+$, який складається з усіх функцій з носіями потужності меншої ніж $\aleph^+$.*

Для підмножини $A$ добутку $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і множини $T \subseteq S$ через $A|_T$ ми будемо позначати підмножину

$$A|_T = \{(x_s)_{s\in T} : (x_s)_{s\in S} \in X\}$$

добутку $\prod\limits_{s\in T} X_s$, яка є проекцією множини $A$ на добуток $\prod\limits_{s\in T} X_s$. Зокрема, для множини $U = \prod\limits_{s\in S} U_s$ маємо, що

$$U|_T = \prod_{s\in T} U_s.$$

Наступна теорема дає потрібні нам властивості простору $P_\aleph$.

**Теорема 2.3.14.** *Нехай $\aleph$ – довільний нескінченний кардинал. Тоді*

*(a) $p(P_\aleph) \le \aleph_0$;*

*(b) $\aleph^+$ не є калібром топологічного простору $P_\aleph$;*

*(c) $\mathfrak{n}^+$ є калібром топологічного простору $P_\aleph$ для довільного нескінченного кардинала $\mathfrak{n} \neq \aleph$;*

*(d) $P_\aleph$ є $\aleph$-компактним.*

*Доведення.* Нехай $S$ – така множина, що $|S| = \aleph^+$ і $P_\aleph \subseteq [0,1]^S$.

$(a)$. Нехай $\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$ – довільна сім'я базисних відкритих непорожніх множин $U_i$ в $P_\aleph$, причому $|I| > \aleph_0$. Для кожного $i \in I$ позначимо через $\tilde{U}_i$ таку базисну відкриту непорожню множину в $[0,1]^S$, що

$$U_i = \tilde{U}_i \cap P_\aleph.$$

Розглянемо сім'ю $(B_i : i \in I)$, де $B_i = R(\tilde{U_i})$. Згідно з твердженням 2.1.2, існує скінченна множина $B \subseteq S$ і незліченна множина $I_1 \subseteq I$ такі, що

$$B_i \cap B_j = B$$

для довільних різних $i, j \in I_1$. Оскільки простір $[0,1]^B$ сепарабельний, то $p([0,1]^B) \le \aleph_0$ і сім'я $(V_i : i \in I_1)$, де $V_i = \tilde{U_i}|_B$, не є точково скінченною. Отже, існують точка $x_0 \in [0,1]^B$ і злічення множина $I_0 \subseteq I_1$ такі, що $x_0 \in V_i$ для довільного $i \in I_0$. Виберемо для кожного $i \in I_0$ довільну точку $x_i \in \tilde{U_i}$ і розглянемо функцію $x : S \to [0,1]$, яка визначається так:

$$x(s) = \begin{cases} x_0(s), & s \in B; \\ x_i(s), & s \in B_i \setminus B,\ i \in I_0; \\ 0, & s \in S \setminus (\bigcup\limits_{i \in I_0} B_i). \end{cases}$$

Оскільки $B_i \cap B_j = B$, то

$$(B_i \setminus B) \cap (B_j \setminus B) = \emptyset$$

для довільних різних $i, j \in I_0$. Тому функція $x$ визначена коректно. Крім того,

$$\operatorname{supp} x \subseteq \bigcup_{i \in I_0} B_i \qquad \text{і} \qquad \left| \bigcup_{i \in I_0} B_i \right| \le |I_0| \cdot \aleph_0 \le \aleph.$$

Отже, $|\operatorname{supp} x| \le \aleph$, тобто $x \in P_\aleph$. Зауважимо також, що

$$x|_B = x_0 \in V_i = \tilde{U_i}|_B \qquad \text{і} \qquad x|_{B_i \setminus B} = x_i|_{B_i \setminus B} \in \tilde{U_i}|_{B_i \setminus B}.$$

Тому $x|_{B_i} \in \tilde{U_i}|_{B_i}$, тобто $x \in \tilde{U_i}$ для кожного $i \in I_0$. Тоді $x \in U_i$ для кожного $i \in I_0$ і сім'я $\mathcal{U}$ не є точково скінченною. Отже,

$$p(P_\aleph) \le \aleph_0.$$

$(b)$. Для кожного $s \in S$ позначимо

$$U_s = \{x \in P_\aleph : x(s) > 0\}.$$

Зрозуміло, що сім'я $(U_s : s \in S)$ є $\aleph$-точковою в $P_\aleph$, причому

$$|S| = \aleph^+ > \aleph.$$

Отже, $\aleph^+$ не є калібром топологічного простору $P_\aleph$.

$(c)$. Нехай $\mathfrak{n}$ – нескінченний кардинал, відмінний від $\aleph$, і

$$\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$$

– сім'я непорожніх відкритих базисних множин в $P_\aleph$, причому $|I| = \mathfrak{n}^+$. Для кожного $i \in I$ виберемо базисну відкриту множину $\tilde{U}_i$ в $[0,1]^S$ таку, що $U_i = \tilde{U}_i \cap P_\aleph$, і покладемо $B_i = R(\tilde{U}_i)$.

Спочатку розглянемо випадок, коли $\mathfrak{n} < \aleph$. Позначимо

$$B = \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Зауважимо, що щільність $d([0,1]^B)$ топологічного простору $[0,1]^B$ не перевищує $\mathfrak{n}^+$, тому, згідно з твердженням 2.3.10, кардинальне число $\mathfrak{n}^+$ – калібр топологічного простору $[0,1]^B$ і сім'я

$$(V_i : i \in I),$$

де $V_i = \tilde{U}_i|_B$, не є $\mathfrak{n}$-точковою. Отже, існують

$$x \in [0,1]^B \qquad \text{i} \qquad I_1 \subseteq I$$

такі , що

$$|I_1| > \mathfrak{n} \qquad \text{i} \qquad x \in V_i$$

для кожного $i \in I_1$. Визначимо точку $y \in [0,1]^S$ так:

$$y(s) = \begin{cases} x(s), & s \in B; \\ 0, & s \in S \setminus B. \end{cases}$$

Оскільки

$$\operatorname{supp} y \subseteq B \qquad \text{i} \qquad |B| \le |I| \cdot \aleph_0 \le \mathfrak{n}^+ \cdot \aleph_0 \le \aleph,$$

то $y \in P_\aleph$. Крім того, для кожного $i \in I_1$ маємо, що

$$y|_{B_i} = x|_{B_i} \in V_i|_{B_i} = \tilde{U}_i|_{B_i}.$$

Тоді $y \in U_i$ для кожного $i \in I_1$. Тому $\mathcal{U}$ не є $\mathfrak{n}$-точковою. Отже, $\mathfrak{n}^+$ є калібром топологічного простору $P_\aleph$.

Тепер нехай $\mathfrak{n} > \aleph^+$. Розглянемо систему $\mathcal{A}$ усіх скінченних підмножин множини $S$. Зрозуміло, що $|\mathcal{A}| = |S| = \aleph^+$. Для кожного $A \in \mathcal{A}$ позначимо

$$I_A = \{i \in I : B_i = A\}.$$

Припустимо, що $|I_A| \le \mathfrak{n}$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Тоді

$$|I| = |\bigcup_{A \in \mathcal{A}} I_A| \le |\mathcal{A}| \cdot \mathfrak{n} = \aleph^+ \cdot \mathfrak{n} \le \mathfrak{n},$$

а це суперечить тому, що $|I| = \mathfrak{n}^+$. Отже, існують такі $A_0 \in \mathcal{A}$ і $I_0 \subseteq I$, що

$$|I_0| > \mathfrak{n} \qquad \text{i} \qquad B_i = A_0$$

для кожного $i \in I_0$.

Врахувавши, що $\mathfrak{n}^+$ є калібром топологічного простору $[0,1]^{A_0}$, отримаємо, що існують такі $x \in [0,1]^{A_0}$ та $I_1 \subseteq I_0$, що

$$|I_1| > \mathfrak{n} \qquad \text{і} \qquad x \in \tilde{U}_{i|_{A_0}}.$$

Тоді точка $y \in [0,1]^S$, яка визначається так:

$$y(s) = \begin{cases} x(s), & s \in A_0; \\ 0, & s \in S \setminus A_0, \end{cases}$$

належить до $P_\aleph$, причому $y \in U_i$ для кожного $i \in I_1$.

Отже, $\mathcal{U}$ не є $\mathfrak{n}$-точковою і $\mathfrak{n}^+$ – калібр топологічного простору $P_\aleph$.

$(d)$. Це випливає з того, що замикання в $P_\aleph$ довільної множини, потужність якої не перевищує $\aleph$, є компактним. $\square$

З цієї теореми, зокрема, отримується, що властивості $(III_\aleph)$ непорівнянні між собою для різних $\aleph$, хоча легко бачити, що $(I_\aleph) \Rightarrow (I_{\aleph'})$ і $(II_\aleph) \Rightarrow (II_{\aleph'})$, якщо $\aleph < \aleph'$. Крім того, приклад дискретного простору потужності $\aleph$ показує, що імплікація $(III_\aleph) \Rightarrow (I_{\aleph'})$ не виконується при $\aleph > \aleph'$. А приклад компактифікації Александрова [17, с. 261] дискретного простору потужності $\aleph^+$ вказує на те, що з компактності не випливає жодна з властивостей $(II_\aleph)$, а отже, і $(III_\aleph)$.

Отже, властивості, які фігуруватимуть в дослідженнях залежності неперервних і нарізно неперервних функцій від $\aleph$ координат, можна зобразити у вигляді наступної діаграми, причому жодна із незображених імплікацій не має місця.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\text{псевдо}-\aleph_0-\text{компакт.} & \Rightarrow & (I_{\aleph_0}) & \Rightarrow & (I_{\aleph_1}) & \Rightarrow & \dots & \Rightarrow & (I_\aleph) \\
\Downarrow (\text{рег.}) & & \Uparrow & & \Uparrow & & & & \Uparrow \\
\text{беровість} & & (II_{\aleph_0}) & \Rightarrow & (II_{\aleph_1}) & \Rightarrow & \dots & \Rightarrow & (II_\aleph) \\
 & & \Uparrow & & \Uparrow & & & & \Uparrow \\
 & & (III_{\aleph_0}) & & (III_{\aleph_1}) & & \dots & & (III_\aleph)
\end{array}$$

## 2.4

# Характеризація залежності неперервних відображень на добутках від $\aleph$ координат

У даному підрозділі ми викладемо результати з [34], які є основними результатами всього розділу і дають необхідні і достатні умови залежності неперервних відображень на добутках від певної кількості координат.

**2.4.1. Достатні умови залежності від певної кількості координат.** Розпочнемо з розгляду достатніх умов.

Нам буде потрібний наступний результат, який фактично описує псевдо-$\aleph$-компактність $\sigma$-добутків.

**Твердження 2.4.1.** *Нехай $\aleph$ – довільний регулярний незліченний кардинал, $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $a = (a_s)_{s\in S} \in X$ і $\sigma(a) \subseteq Y \subseteq X$. Тоді простір $X$ псевдо-$\aleph$-компактний тоді і тільки тоді, коли простір $Y$ псевдо-$\aleph$-компактний.*

*Доведення. Достатність.* Згідно з твердженням 2.1.3, простір $Y$ є щільним підпростором простору $X$. Тому з псевдо-$\aleph$-компактності простору $Y$ випливає псевдо-$\aleph$-компактність простору $X$.

*Необхідність.* Нехай $X$ – псевдо-$\aleph$-компактний простір. Доведемо, що простір $Y$ також псевдо-$\aleph$-компактний. Розглянемо довільну сім'ю $(U_i : i \in I)$ потужності $|I| = \aleph$, яка складається з непорожніх відкритих базисних множин

$$U_i = \prod_{s\in S} U_s^{(i)}$$

у просторі $X$. Покажемо, що існує точка $y \in Y$, яка є точкою накопичення сім'ї $(U_i \cap Y : i \in I)$. Оскільки простір $Y \supseteq \sigma(a)$ щільний підпростір простору $X$, то достатньо показати, що існує точка $y \in \sigma(a)$, яка є точкою накопичення сім'ї $(U_i : i \in I)$. До сім'ї $(A_i : i \in I)$ скінченних множин $A_i = R(U_i)$ застосуємо твердження 2.2.7 і одержимо скінченну множину $T \subseteq S$ і множину $J \subseteq I$ потужності $|J| = \aleph$ такі, що $A_i \cap A_j = T$ для довільних різних $i, j \in J$. Згідно з наслідком 2.3.6, простір $Z = \prod\limits_{s\in T} X_s$ псевдо-$\aleph$-компактний. Тому сім'я $(V_i : i \in J)$ непорожніх відкритих базисних множин

$$V_i = \prod_{s\in T} U_s^{(i)}$$

має точку накопичення $z = (z_s)_{s\in T}$. Покажемо, що точка $y = (y_s)_{s\in S} \in \sigma(a)$,

$$y_s = \begin{cases} z_s, & s \in T; \\ a_s, & s \in S \setminus T, \end{cases}$$

є точкою накопичення сім'ї $(U_i : i \in J)$.

Нехай $W = \prod\limits_{s\in S} W_s$ – довільний базисний окіл точки $y$ в просторі $X$. Тоді множина $V = \prod\limits_{s\in T} W_s$ є базисним околом точки $z$ в просторі $Z$. Оскільки точка $z$ є точкою накопичення сім'ї $(V_i : i \in J)$, то множина

$$J_0 = \{i \in J : V \cap V_i\}$$

нескінченна. Покажемо, що множина

$$J_1 = \{i \in J_0 : A_i \cap R(W) \not\subseteq T\}$$

скінченна. Для кожного $i \in J_1$ виберемо індекс

$$s_i \in (A_i \cap R(W)) \setminus T.$$

Якщо $s = s_i = s_j$, то

$$s \in (A_i \cap Aj) \setminus T,$$

і тоді $i = j$ згідно з вибором множини $T$. Отже, усі індекси $s_i \in R(W)$ є різними. І тому,

$$|J_1| = |\{s_i : i \in J_1\}| \leq |R(W)| < \aleph_0.$$

Тобто множина $J_1$ скінченна. Тому множина

$$J_2 = J_0 \setminus J_1 = \{i \in J_0 : A_i \cap R(W) \subseteq T\}$$

нескінченна. Залишилося зауважити, що

$$W \cap U_i \neq \emptyset$$

для кожного $i \in J_2$. Отже, точка $y$ є точкою накопичення сім'ї $(U_i : i \in J)$. □

Наступне поняття – природний розвиток залежності від зліченної кількості координат. Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $Y \subseteq \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Z$ – довільна множина і $f : Y \to Z$ – довільне відображення. Казатимемо, що відображення $f$ *залежить від* $\aleph$ *координат*, де $\aleph$ – нескінченний кардинал, якщо $f$ зосереджене на деякій множині $T \subseteq S$ потужності $|T| \leq \aleph$.

Топологічний простір $Z$ *має* $\overline{G}_\delta$*-діагональ*, якщо діагональ

$$\Delta = \{(z,z) : z \in Z\}$$

є перетином послідовності $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнених множин $E_n$ в топологічному просторі $Z^2$ таких, що $\Delta \subseteq \operatorname{int}(E_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, де через $\operatorname{int}(A)$ ми позначаємо внутрішність множини $A$.

Наступний результат дає достатні умови залежності неперервних відображень від певної кількості координат і застосовний не лише для просторів-добутків, а й до їх підпросторів певного типу.

**Теорема 2.4.2.** *Нехай* $\aleph$ *– незліченний регулярний кардинал,* $(X_s)_{s\in S}$ *– сім'я топологічних просторів* $X_s$ *таких, що простір* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *– псевдо-*$\aleph$*-компактний,* $a = (a_s)_{s\in S} \in X$, $Y_0 = \sigma(a) \subseteq Y \subseteq X$ *і* $Z$ *– топологічний простір з* $\overline{G}_\delta$*-діагоналлю. Тоді кожне неперервне відображення* $f : Y \to Z$ *залежить менше ніж від* $\aleph$ *координат.*

*Доведення.* Спочатку міркуватимемо подібно, як при доведенні теореми 2.1.9. Для фіксованого неперервного відображення $f : Y \to Z$ розглянемо множину

$$T = \{s \in S : (\exists x_s, y_s \in Y_0)(x_s|_{S\setminus\{s\}} = y_s|_{S\setminus\{s\}} \text{ і } f(x_s) \neq f(y_s))\},$$

яка, згідно з наслідком 2.1.8, найменша множина, на якій зосереджене $f$. Доведемо, що $|T| < \aleph$.

Припустимо, що множина $|T| \geq \aleph$. Оскільки простір $Z$ має $\overline{G}_\delta$-діагональ $\Delta = \{(z,z) : z \in Z\}$, то існує послідовність $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнених у просторі $Z^2$ множин $W_n$ така, що

$$\Delta = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \qquad \text{і} \qquad \Delta \subseteq \operatorname{int}(E_n)$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$G_n = Z^2 \setminus E_n \qquad \text{і} \qquad T_n = \{s \in T : (f(x_s), f(y_s)) \in G_n\}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $(f(x_s), f(y_s) \in Z^2 \setminus \Delta$ для кожного $s \in T$, то

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n.$$

Крім того, кардинал $\aleph$ регулярний і незліченний. Тому існує номер $m$ такий, що $|T_m| \geq \aleph$.

Для кожного $t \in T_m$, використовуючи неперервність відображення $f$ в точках $x_t$ і $y_t$, виберемо базисні відкриті околи

$$U_t = \prod_{s \in S} U_s^{(t)} \qquad \text{i} \qquad V_t = \prod_{s \in S} V_s^{(t)}$$

точок $x_t$ і $y_t$ в просторі $X$ такі, що

$$(f(x), f(y)) \in G_m$$

для довільних $x \in U_t \cap Y$ і $y \in V_t \cap Y$. Оскільки

$$x_t|_{S \setminus \{t\}} = y_t|_{S \setminus \{t\}},$$

то без обмеження загальності ми можемо вважати, що

$$U_s^{(t)} = V_s^{(t)}$$

для кожного $s \in S \setminus \{t\}$.

Оскільки $|T_m| \geq \aleph$ і, згідно з твердженням 2.4.1, простір $Y_0$ псевдо-$\aleph$-компактний, то сім'я $(U_t \cap Y_0 : t \in T_m)$ не є локально скінченною, тобто ця сім'я має точку накопичення $p \in Y_0$. Зауважимо, що множина $E_m$ є околом точки $(f(p), f(p))$ в просторі $Z^2$. Тому з неперервності відображення $F$ в точці $p$ випливає, що існує базисний відкритий окіл

$$W = \prod_{s \in S} W_s$$

точки $p$ в просторі $X$ такий, що

$$(f(x), f(y)) \in E_m$$

для довільних $x, y \in W \cap Y$. Оскільки множина

$$S_0 = \{t \in T_m : W \cap U_t \neq \emptyset\}$$

нескінченна, а множина

$$R = \{s \in S : W_s \neq X_s\}$$

скінченна, то множина $S_0 \setminus R$ непорожня.

Виберемо довільний індекс $t \in S_0 \setminus R$ і довільну точку

$$x = (x(s))_{s \in S} \in U_t \cap W \cap Y_0.$$

Розглянемо точку $y = (y(s))_{s \in S} \in X$, яка означається так:

$$y(s) = \begin{cases} x(s), & s \in S \setminus \{t\}; \\ y_t(t), & s = t. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $y \in Y_0$, адже $x \in Y_0$ і $x(s) = y(s)$ на $S \setminus \{t\}$. Покажемо, що $y \in V_t \cap W$, тобто
$$y(s) \in V_s^{(t)} \cap W_s$$
для кожного $s \in S$. Якщо $s \in S \setminus \{t\}$, то
$$y(s) = x(s) \in U_s^{(t)} \cap W_s = V_s^{(t)} \cap W_s,$$
адже $U_s^{(t)} = V_s^{(t)}$ і $x(s) \in U_s^{(t)} \cap W_s$. Якщо ж $s = t$, то $y_t \in V = \prod\limits_{s \in S} V_s^{(t)}$ і $t \notin R$, тобто $W_t = X_t$. Тому
$$y(t) = y_t(t) \in V_t^{(t)} \cap W_t.$$

Тепер, з одного боку, згідно з вибором околів $U_t$ і $V_t$, маємо
$$(f(x), f(y)) \in G_m.$$
А з іншого, згідно з вибором околу $W$, маємо, що
$$(f(x), f(y)) \in E_m,$$
що дає нам суперечність. $\square$

Зокрема, для залежності від зліченної кількості координат одержуємо такий результат.

**Теорема 2.4.3.** *Нехай $(X_s)_{s \in S}$ – сім'я топологічних просторів $X_s$ таких, що простір $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ є псевдо-$\aleph_1$-компактним, $a = (a_s)_{s \in S} \in X$, $\sigma(a) \subseteq Y \subseteq X$ і $Z$ – топологічний простір з $\overline{G}_\delta$-діагоналлю. Тоді кожне неперервне відображення $f : Y \to Z$ залежить від зліченної кількості координат.*

### 2.4.2. Необхідні умови залежності від певної кількості координат.

Тепер перейдемо до доведення необхідних умов. Спочатку ми викладемо деякі допоміжні твердження.

**Твердження 2.4.4.** *Нехай $X$, $Y$ – топологічні простори, $(U_i : i \in I)$ – локально скінченна сім'я множин в просторі $X$ і $(V_i : i \in I)$ – сім'я множин у просторі $Y$. Тоді сім'я $(W_i : i \in I)$ множин $W_i = U_i \times V_i$ локально скінченна у просторі $X \times Y$.*

*Доведення.* Зафіксуємо точку $(x, y) \in X \times Y$ і виберемо окіл $U$ точки $x$ у просторі $X$ такий, що множина
$$I_0 = \{i \in I : U \cap U_i \neq \emptyset\}$$

скінченна. Тоді для околу $W = U \times Y$ точки $(x, y)$ у просторі $X \times Y$ маємо

$$\{i \in I : W \cap W_i \neq \emptyset\} = I_0.$$

$\square$

На завершальному етапі побудов ми будемо використовувати такий допоміжний факт.

**Твердження 2.4.5.** *Нехай $X$ – топологічний простір і $(f_i : i \in I)$ – сім'я неперервних функцій $f_i : X \to \mathbb{R}$ такі, що сім'я $(U_i : i \in I)$ носіїв $U_i = \operatorname{supp} f_i$ локально скінченна у просторі $X$. Тоді функція $f : X \to \mathbb{R}$, означена формулою*

$$f(x) = \sum_{i \in I} f_i(x),$$

*є неперервною.*

*Доведення.* Зафіксуємо точку $x_0 \in X$ і виберемо окіл $U$ точки $x_0$ у просторі $X$ такий, що множина

$$I_0 = \{i \in I : U \cap U_i \neq \emptyset\}$$

скінченна. Функція $f_0 : X \to \mathbb{R}$, означена формулою

$$f_0(x) = \sum_{i \in I_0} f_i(x),$$

є неперервною, як скінченна сума неперервних функцій. Крім того, $f = f_0$ на множині $U$. Тому функція $f$ неперервна в точці $x_0$. $\square$

Топологічний простір $X$ називатимемо *нетривіальним*, якщо він містить принаймні дві різні точки.

Наступний результат дає необхідні умови залежності.

**Теорема 2.4.6.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $(X_s)_{s \in S}$ – сім'я потужності $|S| \geq \aleph$, яка складається з нетривіальних топологічних просторів $X_s$, така, що простір $X = \prod_{s \in S} X_s$ цілком регулярний і кожне неперервне відображення $f : X \to \mathbb{R}$ залежить менше ніж від $\aleph$ координат. Тоді простір $X$ псевдо-$\aleph$-компактний.*

*Доведення.* Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що простір $X$ не є псевдо-$\aleph$-компактним. Тоді, згідно з наслідком 2.3.6, існує множина $T \subseteq S$ така, що $|T| < \aleph$ і простір $Y = \prod_{s \in T} X_s$ не є псевдо-$\aleph$-компактним, тобто існує локально скінченна сім'я $(V_i : i \in I)$ потужності $|I| = \aleph$ непорожніх відкритих множин $V_i$ у просторі $Y$. Оскільки $|S \setminus T| \geq \aleph$, то існує сім'я $(s_i : i \in I)$ різних індексів $s_i \in S \setminus T$. Зауважимо, що простір $Y$ і всі простори $X_s$ цілком регулярні. Для кожного $i \in I$ виберемо неперервну ненульову функцію $\varphi_i : Y \to \mathbb{R}$ таку, що $\operatorname{supp} \varphi_i \subseteq V_i$, а також візьмемо довільну несталу неперервну функцію $\psi_i : X_{s_i} \to \mathbb{R}$, існування якої випливає з нетривіальності простору $X_{s_i}$. Для кожного $i \in I$ функція $f_i : X \to \mathbb{R}$,

$$f_i((x_s)_{s\in S}) = \psi_i(x_{s_i}) \cdot \varphi_i((x_s)_{s\in T}),$$

є неперервною і

$$\operatorname{supp} f_i = \operatorname{supp} \varphi_i \times \operatorname{supp} \psi_i \times \prod_{s\in S\setminus(T\cup\{s_i\})} X_s.$$

Розглянемо функцію $f : X \to \mathbb{R}$, означену формулою

$$f(x) = \sum_{i\in I} f_i(x).$$

Оскільки сім'я $(\operatorname{supp} \varphi_i : i \in I)$ локально скінченна, то, згідно з твердженням 2.4.4, сім'я $(\operatorname{supp} f_i : i \in I)$ також локально скінченна. Тепер з твердження 2.4.5 випливає, що функція $f$ неперервна.

Для одержання потрібної суперечності покажемо, що $f$ не залежить від $\aleph$ координат. Достатньо показати, що

$$s_i \in \{s \in S : (\exists y_s, z_s \in X)(y_s|_{S\setminus\{s\}} = z_s|_{S\setminus\{s\}} \text{ i } f(y_s) \neq f(z_s))\}$$

для кожного $i \in I$. Зафіксуємо $i \in I$ і виберемо точки

$$p_i = (p_i(s))_{s\in T} \in Y \qquad \text{i} \qquad u_i, v_i \in X_{s_i}$$

такі, що

$$\varphi_i(p_i) \neq 0 \qquad \text{i} \qquad \psi_i(u_i) \neq \psi_i(v_i).$$

Крім того, для кожного $s \in S \setminus (T \cup \{s_i\})$ зафіксуємо довільну точку $w_s \in X_s$. Точки $y_{s_i} = (y_{s_i}(s))_{s\in S} \in X$ і $z_{s_i} = (z_{s_i}(s))_{s\in S} \in X$ означимо у такий спосіб:

$$y_{s_i}(s) = \begin{cases} p_i(s), & s \in T; \\ u_i, & s = s_i; \\ w_s, & s \in S \setminus (T \cup \{s_i\}); \end{cases}$$

і

$$z_{s_i}(s) = \begin{cases} y_{s_i}(s), & s \in S \setminus \{s_i\}; \\ v_i, & s = s_i. \end{cases}$$

Зауважимо, що

$$f_j(y_{s_i}) = \psi_j(w_{s_j}) \cdot \varphi_j(p_i) = f_j(z_{s_i})$$

для кожного $j \in J \setminus \{i\}$. Крім того,

$$f_i(y_{s_i}) = \psi_j(u_i) \cdot \varphi_i(p_i) \neq \psi_j(v_i) \cdot \varphi_i(p_i) = f_i(z_{s_i}).$$

Тому

$$f(y_{s_i}) - f(z_{s_i}) = \sum_{j \in J} (f_j(y_{s_i}) - f_j(z_{s_i})) = f_i(y_{s_i}) - f_i(z_{s_i}) \neq 0.$$

□

Враховуючи результат попереднього пункту, одержуємо наступну теорему, яка дає характеризацію залежності.

**Теорема 2.4.7.** *Нехай $\aleph$ – незліченний кардинал, $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я потужності $|S| \geq \aleph$, яка складається з нетривіальних топологічних просторів $X_s$. Тоді кожна з наступних умов випливає з попередньої, а для цілком регулярного простору $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ всі наступні умови рівносильні:*

1) *простір $X$ псевдо-$\aleph$-компактний;*

2) *для довільного простору $Z$ з $\overline{G}_\delta$-діагоналлю кожне неперервне відображення $f : X \to Z$ залежить менше, ніж від $\aleph$ координат;*

3) *кожна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ залежить менше, ніж від $\aleph$ координат.*

*Доведення.* Імплікація 1) $\Rightarrow$ 2) випливає з теореми 2.4.2, імплікація 2) $\Rightarrow$ 3) очевидна, а імплікація 3) $\Rightarrow$ 1) для цілком регулярного простору $X$ випливає з теореми 2.4.6. □

Для залежності від зліченної кількості координат одержуємо такий результат.

**Теорема 2.4.8.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ незліченна сім'я нетривіальних топологічних просторів $X_s$. Тоді кожна з наступних умов випливає з попередньої, а для цілком регулярного простору $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ всі наступні умови рівносильні:*

1) *простір $X$ псевдо-$\aleph_1$-компактний;*

2) *для довільного простору $Z$ з $\overline{G}_\delta$-діагоналлю кожне неперервне відображення $f : X \to Z$ залежить від зліченної кількості координат;*

3) *кожна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат.*

## 2.5 Заключні зауваження до розділу 2

Загальна версія леми Шаніна (твердження 2.2.7 $(i)$) була анонсована М. Шаніним у 1946 році в роботі [40] і доведена у 1948 році в праці [48, с. 24]. Зліченний варіант леми Шаніна (твердження 2.1.2) був перевідкритий (без згадування результату Шаніна) в роботах [26, лема (vii)] і [52, лема 10], і саме доведення С. Мазура цього твердження з [26] викладене тут. Твердження 2.2.7 $(i)$ в дещо загальнішій редакції було одержано П. Ердьошем і Р. Радо [19, теорема I (ii)] (інший варіант доведення їх результату можна знайти в [12]), Е. Майклом в [27, теорема 1.1] (адаптований до леми Шаніна варіант його доведення можна знайти в [15, лема 1]). Аналог леми Шаніна для нерегулярних кардиналів (твердження 2.2.7 $(ii)$) був отриманий Н.Ноблом і М.Ульмером в роботі [34, лема 1.1] і тут ми подали їх метод доведення всього твердження 2.2.7. Формально у своїй роботі Мазур не вводив поняття $\sigma$-добутку і найменшої множини зосередженості відображень на добутках, а використовував їх у неявному вигляді. Вперше найменшу множину у явному вигляді, але без назви, розглянув А.Міщенко в [29], вона використовувалась також у роботі [34], і дістала свою назву в [56].

Теорема 2.1.10 не була у такому вигляді сформульована Мазуром в [26], але вона легко випливає з його теореми II (див. [9, доведення теореми 2] або [17, додаток 2]). Це може бути пов'язане з тим, що для автора у праці [26] пріоритетною є теорема про залежність від зліченної кількості координат саме секвенціально неперервних відображень, яка значно складніша для доведення (тут не працює твердження 2.1.4) і одержується лише за додаткових припущень на кількість множників.

Г. Корсон та І. Ізбелл [10, теорема 2.1], використовуючи один результат М.Бокштейна [7] про відокремність відкритих множин, довели теорему, дещо слабшу від теореми 2.1.10, яка дає залежність від зліченної кількості координат неперервних відображень, визначених на добутку метризовних сепарабельних просторів і зі значеннями у метризовному просторі.

К. Росс і А. Стоун в [38], використовують метод міркувань, аналогічний до застосованого в [10], узагальнили результат Корсона та Ізбелла на випадок добутку просторів з властивістю $(K)$ (див. означення перед вправою 2.6.4). Зазначимо, що відповідні результати в [10] і [38] сформульовані для відображень зі значеннями у метризовному сепарабельному просторі. Але нескладні міркування (див. вправи 2.6.2 і 2.6.7) показують, що умову сепарабельності образу в цих теоремах можна зняти.

А. Ґлісон [21, с.130-131] запропонував підхід, який фактично базується на залежності відображень від зліченної кількості координат в точці (див. означення перед вправою 2.6.12), і одержав результат про залежність від зліченної кількості координат неперервних відображень на добутку сепарабельних просторів і зі значеннями в просторі, кожна точка якого є $G_\delta$-множиною.

А. Міщенко в [29] досліджував необхідні і достатні умови залежності від $\aleph$ координат неперервних відображень на добутках і зі значеннями у гаусдорфовому просторі з псевдовагою, яка не перевищує $\aleph$ (див. означення перед вправою 2.6.15). Він показав [29, теорема 3], що якщо кожний скінченний добуток $\prod\limits_{s\in T} X_s$ має калібр $\aleph^+$, то неперервне відображення $f : \prod\limits_{s\in S} X_s \to Z$ залежить від $\aleph$ координат. З іншого боку [29, твердження 3.4], він встановив, що якщо $|S| > \aleph$, всі множники $X_s$ цілком регулярні і нетривіальні ($|X_s| > 1$) і для деякого $s_0 \in S$ простір $X_{s_0}$ має локальну псевдовагу, яка не перевищує $\aleph$, а кардинал $\aleph^+$ не є калібром простору $X_{s_0}$, то існують гаусдорфовий простір $Z$ з локальною псевдовагою, що не перевищує $\aleph$, і неперервне відображення $f : X \to Z$, яке не залежить від $\aleph$ координат.

Р. Енгелькінг в [17] узагальнив результати І. Мібу і С. Мазура, показавши [17, теорема 1], що для добутку $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ сім'ї $(X_s)_{s\in S}$ $T_1$-просторів $X_s$ таких, що кожний скінченний добуток $\prod\limits_{s\in T} X_s$ ліндельофовий, і гаусдорфового простору $Z$ з $G_\delta$-діагоналлю кожне неперервне відображення $f : X \to Z$ залежить від зліченної кількості координат. Крім того, він розвинув результат А. Ґлісона, послаблюючи умови на простір значень, і довів [17, теорема 2], що якщо $f$ – неперервне відображення, визначене на добутку $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ просторів $X_s$ з другою аксіомою зліченності, зі значеннями в гаусдорфовому просторі $Z$ такому, що існує щільна в $X$ множина $Q$ така, що кожна точка з $f(Q)$ є $G_\delta$-множиною в $Z$, то $f$ залежить від зліченної кількості координат.

## 2.6 Вправи до розділу 2

Топологічний простір $X$ має *властивість зліченності ланцюжків*, якщо довільна система попарно неперетинних відкритих в $X$ непорожніх множин є не більш ніж зліченною.

**Вправа 2.6.1.** *Доведіть, що неперервний образ простору з умовою зліченності ланцюжків також задовольняє умову зліченності ланцюжків.*

**Вправа 2.6.2.** *Доведіть, що метризовний простір з умовою зліченності ланцюжків сепарабельний.*

*Вказівка.* Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розгляньте максимальну множину $A_n$ таку, що сім'я всіх відкритих куль з центрами в точках множини $A_n$ і радіусом $\frac{1}{n}$ складається з попарно неперетинних множин і доведіть, що множина $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ зліченна і щільна в $X$.

**Вправа 2.6.3.** *Доведіть, що топологічний добуток $X = \prod_{s\in S} X_s$ сепарабельних просторів $X_s$ задовольняє умову зліченності ланцюжків.*

*Вказівка.* З допомогою наслідку 2.3.7 доведіть, що $p(X) \leq \aleph_0$.

Топологічний простір $X$ *має властивість* $(K)$, якщо з кожної незліченної сім'ї непорожніх відкритих в $X$ множин можна виділити незліченну підсім'ю, в якій кожні дві множини мають непорожній перетин.

**Вправа 2.6.4.** *Доведіть, що неперервний образ простору з властивістю $(K)$ також має властивість $(K)$.*

**Вправа 2.6.5.** *Доведіть, що добуток двох просторів з властивістю $(K)$ також має властивість $(K)$.*

**Вправа 2.6.6** ([24])**.** *Доведіть, що топологічний добуток $X = \prod_{s\in S} X_s$ просторів $X_s$ з властивістю $(K)$ також має властивість $(K)$.*

*Вказівка.* Розгляньте властивість $\phi$, яка полягає у властивості $(\phi_1)$ з теореми 2.3.2 у випадку $\mathfrak{m} = \aleph_1$ і $\mathfrak{n} = 2$, покажіть, що $(K)$ це є $P(\phi, \aleph_1)$ і застосуйте теорему 2.3.4.

**Вправа 2.6.7.** *Доведіть, що метризовний простір з властивістю $(K)$ сепарабельний.*

*Вказівка.* Використайте вправу 2.6.2.

Непорожні підмножини $A$ і $B$ добутку $\prod\limits_{s\in S} X_s$ *відокремлюються по множині* $T \subseteq S$, якщо $A|_T \cap B|_T = \emptyset$.

**Вправа 2.6.8** (Бокштейн [7]). *Доведіть, що дві непорожні неперетинні відкриті множини $U_0$ і $V_0$ у топологічному добутку $\prod\limits_{s\in S} X_s$ з умовою зліченності ланцюжків відокремлюються по не більш ніж зліченній множині.*

*Вказівка.* Розгляньте максимальні системи $\mathcal{U}$ і $\mathcal{V}$ попарно неперетинних базисних відкритих підмножин $U_0$ і $V_0$ відповідно і доведіть, що множини $U_0$ і $V_0$ відокремлюються по не більш ніж зліченній множині

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} R(U) \bigcup \bigcup_{V\in\mathcal{V}} R(V).$$

**Вправа 2.6.9** (Росс і Стоун [38]). *Доведіть, що дві непорожні неперетинні відкриті множини $U_0$ і $V_0$ у топологічному добутку $\prod\limits_{s\in S} X_s$ з властивістю $(K)$ відокремлюються по не більш, ніж зліченній множині.*

**Вправа 2.6.10** (Корсон та Ізбелл [10]). *Використовуючи вправи 2.6.3 і 2.6.8, доведіть, що кожна неперервна функція на добутку сепарабельних просторів залежить від зліченної кількості координат.*

**Вправа 2.6.11** (Росс і Стоун [38]). *Використовуючи вправи 2.6.4, 2.6.6, 2.6.7 і 2.6.9, доведіть, що кожне неперервне відображення, визначене на добутку просторів з властивістю $(K)$ і зі значеннями у метризовному просторі залежить від зліченної кількості координат.*

Відображення $f : X \to Y$, де $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, *зосереджене на множині* $T \subseteq S$ в точці $x_0 \in X$, якщо $f(x) = f(x_0)$, як тільки $x \in X$ і $x|_T = x_0|_T$, і $f$ *залежить від* $\aleph$ *координат* у точці $x_0$, якщо $|T| \leq \aleph$.

**Вправа 2.6.12.** *Доведіть, що неперервне відображення топологічного добутку $\prod\limits_{s\in S} X_s$ у топологічний простір $Y$, в якому кожна одноточкова множина є $G_\delta$-множиною, залежить від зліченної кількості координат в кожній точці.*

**Вправа 2.6.13.** *Нехай $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ – добуток сім'ї топологічних просторів $X_s$, $Y$ – гаусдорфовий простір, $f : X \to Y$ – неперервне відображення, $T \subseteq S$, $a \in X$, $Z = \{x \in X : x|_T = a|_T\}$ і $B \subseteq Z$ – щільна в $Z$ множина такі, що відображення $f$ зосереджене на множині $T$ в кожній точці $b \in B$. Доведіть, що відображення $f$ зосереджене на множині $T$.*

**Вправа 2.6.14** (Ґлісон [21])**.** *Нехай* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *– добуток сім'ї сепарабельних просторів просторів* $X_s$ *і* $Y$ *– гаусдорфовий простір, в якому кожна одноточкова множина є* $G_\delta$*-множиною. Доведіть, що кожне неперервне відображення* $f : X \to Y$ *залежить від зліченної кількості координат.*

*Вказівка.* Нехай $A_s$ – зліченні всюди щільні множини в $X_s$ і $a \in X$. Використовуючи вправу 2.6.12, індукцією відносно $n \in \mathbb{N}$ побудуйте зростаючу послідовність зліченних множин $T_n \subseteq S$, які для кожного $n \in \mathbb{N}$ задовольняють таку умову: відображення $f$ зосереджене на множині $T_{n+1}$ в кожній точці $x \in \sigma(a)$ з $x|_{T_n} \in \prod\limits_{s\in T_n} A_s$. Далі застосуйте вправу 2.6.13 і доведіть, що $f$ осереджене на множині $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$.

Кажемо, що *локальна псевдовага* топологічного простору $X$ не перевищує нескінченного кардинала $\aleph$, якщо для кожної точки $x \in X$ існує сім'я $(G_i : i \in I)$ відкритих у просторі $X$ множин $G_i$ таких, що $\{x\} = \bigcap\limits_{i\in I} G_i$.

**Вправа 2.6.15.** *Доведіть, що неперервне відображення топологічного добутку* $\prod\limits_{s\in S} X_s$ *у топологічний простір* $Y$*, який має локальну псевдовагу, що не перевищує нескінченного кардинала* $\aleph$*, залежить від* $\aleph$ *координат у кожній точці.*

**Вправа 2.6.16** (Міщенко [29])**.** *Нехай* $\aleph$ *– нескінченний кардинал, топологічний добуток* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *має калібр* $\aleph^+$ *і гаусдорфовий простір* $Y$ *має локальну псевдовагу, яка не перевищує* $\aleph$*. Доведіть, що кожне неперервне відображення* $f : X \to Y$ *залежить від* $\aleph$ *кординат.*

*Вказівка.* Розгляньте найменшу множину $T \subseteq S$, на якій зосереджене $f$, і сім'ю $(G_s : s \in T)$ відкритих непорожніх множин $G_s$ таких, що для кожного $x \in G_s$ існує $z \in X$ таке, що $x|_{S\setminus\{s\}} = z|_{S\setminus\{s\}}$ і $f(x) \neq f(z)$. Використовуючи вправу 2.6.15, доведіть, що $|T| \leq \aleph$.

**Вправа 2.6.17** (Міщенко [29])**.** *Нехай* $X_0$ *– топологічний простір,* $(G_s : s \in S)$ *– сім'я відкритих непорожніх множин в просторі* $X_0$*,* $X_s = [0,1]$ *для кожного* $s \in S$*,* $S_0 = S \sqcup \{0\}$*,* $X = \prod\limits_{s\in S_0} X_s$ *і*

$$S(x) = \{s \in S : x(0) \in G_s\}$$

*для кожного* $x \in X$*. Розглянемо наступне відношення еквівалентності на* $X$*:*

$$x \sim y \qquad \Leftrightarrow \qquad x(0) = y(0) \quad \text{і} \quad x|_{S(x)} = y|_{S(x)}.$$

*Доведіть, що*

(*a*) *для кожного* $x \in X$ *множина* $\pi(x) = \{y \in X : y \sim x\}$ *замкнена;*

(*b*) *сукупність усіх підмножин* $W$ *множини* $Z = \pi(X) = \{\pi(x); x \in X\}$ *таких, що множина* $\pi^{-1}(W)$ *відкрита у просторі* $X$*, утворює топологію простору* $Z$ *(яка називається* **фактор-топологією***);*

(*c*) *відображення* $\pi : X \to Z$ *неперервне;*

(*d*) *якщо простор* $X_0$ *гаусдорфовий, то простір* $Z$ *також гаусдорфовий;*

(*e*) *якщо локальна псевдовага простору* $X_0$ *не перевищує нескінченного кардинала* $\aleph$ *і сім'я* $(G_s : s \in S)$ *є* $\aleph$*-точковою, то локальна псевдовага простору* $Z$ *не перевищує* $\aleph$*;*

(*f*) *якщо сім'я* $(G_s : s \in S)$ *є* $\aleph$*-точковою і* $|S| > \aleph$*, то* $\pi$ *не залежить від* $\aleph$ *координат.*

**Вправа 2.6.18** (Енгелькінг [17]). *Нехай* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *– топологічний добуток такий, що кожний скінченний добуток* $\prod\limits_{s\in T} X_s$ *лінделефовий простір,* $a \in X$ *і* $(x_i)_{i\in I}$ *– незліченна сім'я точок* $x_i \in \sigma(a)$*. Доведіть, що існує точка* $x \in \sigma(a)$*, яка є точкою накопичення сім'ї* $(\{x_i\})_{i\in I}$*.*

*Вказівка.* Спочатку застосуйте міркування, аналогічні до використаних при доведенні леми 2.1.6, а потім використайте лінделефовість відповідного скінченного добутку.

**Вправа 2.6.19** (Енгелькінг [17]). *Нехай* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *– топологічний добуток* $T_1$*-просторів* $X_s$ *такий, що кожний скінченний добуток* $\prod\limits_{s\in T} X_s$ *лінделефовий простір і* $Z$ *– гаусдорфовий простір з* $G_\delta$*-діагоналлю. Доведіть, що кожне неперервне відображення* $f : X \to Z$ *залежить від зліченної кількості координат.*

*Вказівка.* Спочатку з допомогою вправи 2.6.18 доведіть аналог теореми 2.1.9 (використовуючи подібні міркування), а потім застосуйте твердження 2.1.4.

**Вправа 2.6.20** (Н. Нобл і М. Ульмер [34]). *Нехай* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$*,* $Y = \prod\limits_{s\in S} Y_s$*, причому простори* $Y_s$ *є всюди щільними підпросторами просторів* $X_s$ *відповідно, і* $Z$ *– гаусдорфовий простір. Доведіть, що якщо кожне неперервне відображення* $g : Y \to Z$ *залежить від зліченної кількості координат, то і кожне неперервне відображення* $f : X \to Z$ *залежить від зліченної кількості координат.*

# Розділ 3

# ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ПЕВНОЇ КІЛЬКОСТІ КООРДИНАТ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Наступним етапом у розвитку тематики залежності відображень від певної кількості координат став розгляд нарізно неперервних функцій двох змінних. Першим тривіальним кроком у даному напрямку є зведення до випадку неперервних відображень зі значеннями у просторі неперервних функцій з топологією поточкової збіжності, яке, наприклад, для одержання залежності від зліченної кількості координат можливе лише для сепарабельних просторів. Тому у загальній ситуації у порівнянні з випадком неперервних функцій у даних дослідженнях виникають нові аспекти, пов'язані з наявністю двох змінних, які можуть задовольняти різні умови.

Вивчення залежності нарізно неперервних функцій від зліченної кількості чи, загальніше, від $\aleph$ координат, а також її застосування, були проведені у циклі праць [52], [53], [50], [56], [51], [54]. В даному розділі ми подамо найзагальніші результати про залежність нарізно неперервних функцій від певної кількості координат, які були одержані в [56] та [54] і викладені також в [55]. Зокрема, в першому підрозділі ми дослідимо загальний випадок і одержимо необхідні умови і достатні умови залежності, у другому підрозділі вивчатимемо випадок, коли простори змінних задовольняють умову типу компактності і одержимо характеризацію залежності для добутку двох зліченно компактних змінних, і в третьому підрозділі наведемо приклади, які вказують на істотність певних умов у викладених раніше теоремах. Як і раніше, решту результатів ми детальніше розглянемо в історичному підрозділі 3.4, а також відобразимо використані там методи у підрозділі 3.5.

## 3.1 Необхідні і достатні умови залежності нарізно неперервних функцій

У даному підрозділі ми вивчатимемо необхідні і достатні умови залежності від певної кількості координат нарізно неперервних функцій двох змінних у загальному випадку без додаткових умов на простори-добутки.

**3.1.1. Поняття залежності для функцій двох змінних і зв'язок з відображеннями однієї змінної.** Спочатку ми розвинемо поняття, пов'язані із залежністю відображень однієї змінної від певної кількості координат, на випадок відображень двох змінних і обговоримо зв'язок залежності нарізно неперервних функції двох змінних з залежністю неперервних відображень однієї змінної.

Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Y$, $Z$ – довільні множини і $f : X \times Y \to Z$ – довільне відображення. Кажуть, що відображення $f$ *зосереджене на множині* $T \subseteq S$ *відносно змінної* $x$ (або *відносно першої змінної*), якщо

$$f(x', y) = f(x'', y)$$

для довільних $x', x'' \in X$ з $x'|_T = x''|_T$ і довільного $y \in Y$. Якщо, до того ж, $|T| \le \aleph$, то кажемо, що $f$ *залежить не більше ніж від* $\aleph$ *координат відносно змінної* $x$ (або *відносно першої змінної*).

Аналогічно вводиться поняття залежності відображення $g : X \times Y \to Z$ не більше ніж від $\aleph$ координат відносно другої змінної. А саме, якщо $(Y_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $Y = \prod\limits_{s\in S} Y_s$, $X$, $Z$ – довільні множини і $f : X\times Y \to Z$ – довільне відображення, то казатимемо, що $f$ *зосереджене на множині* $T \subseteq S$ *відносно змінної* $y$ (або *відносно другої змінної*), якщо

$$f(x, y') = f(x, y'')$$

для довільного $x \in X$ і довільних $y', y'' \in Y$ з $y'|_T = y''|_T$. Якщо ж $|T| \le \aleph$, то кажемо, що $f$ *залежить не більше ніж від* $\aleph$ *координат відносно* *змінної $y$* (або *відносно другої змінної*).

Як і для відображень однієї змінної замість повного терміна "залежить не більше ніж від $\aleph$ координат відносно тієї чи іншої змінної" ми будемо вживати коротший вислів "залежить від $\aleph$ координат відносно тієї чи іншої змінної".

Для відображення $f : X \times Y \to Z$ відображення $\varphi : X \to Z^Y$,

$$\varphi(x)(y) = f(x, y),$$

і $\psi : Y \to Z^X$,

$$\psi(y)(x) = f(x, y),$$

називаються *асоційованими відображеннями* з відображенням $f$.

Наступні два твердження показують, що залежність від певної кількості координат відображення двох змінних відносно тієї чи іншої змінної це насправді залежність від певної кількості координат відповідного асоційованого відображення.

**Твердження 3.1.1.** *Нехай $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Y$, $Z$ – довільні множини, $f : X \times Y \to Z$ – довільне відображення, $\varphi : X \to Z^Y$ – асоційоване з $f$ відображення і $T \subseteq S$. Тоді відображення $f$ зосереджене на множині $T$ відносно першої змінної тоді і тільки тоді, коли відображення $\varphi$ зосереджене на множині $T$.*

*Доведення.* Зауважимо, що для довільних $x', x'' \in X$ з $x'|_T = x''|_T$ рівність

$$\varphi(x') = \varphi(x'')$$

рівносильна тому, що

$$f(x', y) = f(x'', y)$$

для кожного $y \in Y$. Залишилося використати означення відповідної зосередженості на множині $T$ для відображень $f$ і $\varphi$. $\square$

Аналогічно доводиться твердження щодо залежності відносно другої змінної.

**Твердження 3.1.2.** *Нехай $(Y_s)_{s\in S}$ – сім'я множин, $Y = \prod\limits_{s\in S} Y_s$, $X$, $Z$ – довільні множини, $f : X \times Y \to Z$ – довільне відображення, $\psi : Y \to Z^X$ – асоційоване з $f$ відображення і $T \subseteq S$. Тоді відображення $f$ зосереджене на множині $T$ відносно першої змінної тоді і тільки тоді, коли відображення $\psi$ зосереджене на множині $T$.*

Як показує наступне твердження, випадок нарізно неперервних функцій зводиться до неперервних асоційованих відображень.

**Твердження 3.1.3.** *Нехай $X$ і $Y$ – топологічні простори, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, $\varphi : X \to \mathbb{R}^Y$ і $\psi : Y \to \mathbb{R}^X$ – асоційовані з $f$ відображення. Тоді наступні умови рівносильні:*

(*i*) *функція $f$ нарізно неперервна;*

(*ii*) *$\varphi(X) \subseteq C(Y)$ і відображення $\varphi$ неперервне;*

(*iii*) *$\psi(Y) \subseteq C(X)$ і відображення $\psi$ неперервне.*

*Доведення.* $(i) \Leftrightarrow (ii)$. Неперервність функції $f$ відносно змінної $x$ рівносильна наперервності відображення $\varphi$, а неперервність функції $f$ відносно змінної $y$ рівносильна включенню $\varphi(X) \subseteq C(Y)$.

Аналогічно одержується імплікація $(i) \Leftrightarrow (iii)$. □

Як випливає з попередніх тверджень, вивчення залежності від певної кількості координат нарізно неперервних функцій двох змінних можна зводити до випадку неперервних відображень зі значеннями у просторі $C_p(X)$ неперервних функцій з топологією поточкової збіжності. У зв'язку з цим природно виникає питання про застосовність результатів попереднього розділу до таких досліджень. Зокрема, виникає потреба вивчення, за яких умов на топологічний простір $X$ простір $C_p(X)$ має $G_\delta$-діагональ чи $\overline{G}_\delta$-діагональ або кожна одноточкова множина є $G_\delta$-множиною.

**Твердження 3.1.4.** *Нехай $X$ – сепарабельний топологічний простір. Тоді простір $C_p(X)$ має $\overline{G}_\delta$-діагональ.*

*Доведення.* Спочатку зауважимо, що для довільних $\varepsilon > 0$ і скінченної множини $A \subseteq X$ множини

$$G(\varepsilon, A) = \{(f, g) \in C_p(X)^2 : (\forall\, a \in A)\, (|f(a) - g(a)| < \varepsilon)\}$$

і

$$F(\varepsilon, A) = \{(f, g) \in C_p(X)^2 : (\forall\, a \in A)\, (|f(a) - g(a)| \le \varepsilon)\}$$

є відкритою і замкненою в просторі $C_p(X)^2$ відповідно, причому

$$\overline{G(\varepsilon, A)} \subseteq F(\varepsilon, A).$$

Візьмемо довільну всюди щільну в просторі $X$ множину

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

і для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$A_n = \{a_k : 1 \le k \le n\} \qquad \text{і} \qquad H_n = G(A_n, \tfrac{1}{n}).$$

Тепер маємо, що

$$\overline{H_{n+1}} \subseteq F(A_{n+1}, \tfrac{1}{n+1}) \subseteq F(A_n, \tfrac{1}{n+1}) \subseteq H_n$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$ і

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n = \{(f,g) \in C_p(X)^2 : (\forall\, a \in A)\,(\forall\, n \in \mathbb{N})\,(|f(a) - g(a)| < \tfrac{1}{n})\} =$$

$$= \{(f,g) \in C_p(X)^2 : (\forall\, a \in A)\,(f(a) = g(a))\} = \{(f,g) \in C_p(X)^2 : f = g\},$$

адже якщо дві неперервні функції збігаються на всюди щільній множині, то вони збігаються на всьому просторі. □

Зі щойно доведеної теореми і теореми 2.4.2 негайно випливає такий результат про залежність нарізно неперервних функцій.

**Теорема 3.1.5.** *Нехай $\aleph$ – незліченний регулярний кардинал, $(X_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів $X_s$ таких, що простір $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ псевдо-$\aleph$-компактний і $Y$ – сепарабельний топологічний простір. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить менше ніж від $\aleph$ координат відносно змінної $x$.*

З іншого боку, як показує наступне твердження, у класі цілком регулярних просторів $Y$ умова сепарабельності є істотною для зведення до випадку відображень однієї змінної.

**Твердження 3.1.6.** *Нехай $X$ – несепарабельний цілком регулярний простір. Тоді кожна одноточкова множина в просторі $C_p(X)$ не є $G_\delta$-множиною, зокрема простір $C_p(X)$ не має $G_\delta$-діагоналі.*

*Доведення.* Оскільки простір $C_p(X)$ топологічно однорідний, то достатньо показати, що множина $\{f_0\}$, де $f_0$ – нульова функція на $X$, не є $G_\delta$-множиною в просторі $C_p(X)$.

Нехай $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність базисних околів точки $f_0$ в просторі $C_p(X)$. Оскільки простір $X$ несепарабельний, то не більш ніж зліченна множина

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} R(U_n)$$

не є щільною в просторі $X$, тобто відкрита множина $G = X \setminus \overline{A}$ непорожня. Візьмемо довільну точку $x_0 \in G$ і за цілковитою регулярністю простору $X$ виберемо неперервну функцію $f : X \to \mathbb{R}$ таку, що

$$f(x_0) = 1 \qquad \text{і} \qquad f(x) = 0$$

для кожного $x \in X \setminus G$. Оскільки

$$f \neq f_0 \qquad \text{і} \qquad f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n,$$

адже $f(x) = 0$ для кожного $x \in A$, то

$$\{f_0\} \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Тому $\{f_0\}$ не є $G_\delta$-множиною в просторі $C_p(X)$. $\square$

Отже, у випадку несепарабельних множників питання залежності нарізно неперервних функцій двох змінних потребують окремого вивчення, а відповідні технічні інструменти, які застосовувались при дослідженні неперервних відображень, – додаткового розвитку.

Множина $S_0 \subseteq S$ називається *найменшою множиною, на якій зосереджене відображення* $f : X \times Y \to Z$ *відносно змінної* $x$, де $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$, якщо $f$ зосереджене на $S_0$ відносно змінної $x$ і для довільної множини $S_1 \subseteq S$, на якій зосереджене $f$ відносно змінної $x$, виконується включення $S_0 \subseteq S_1$. Аналогічно вводиться поняття найменшої множини, на якій зосереджене відображення відносно змінної $y$.

**Твердження 3.1.7.** *Нехай* $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ *– топологічний добуток сім'ї непорожніх топологічних просторів* $X_s$, $Y$ *– деяка множина,* $Z$ *– гаусдорфовий топологічний простір і* $f : X \times Y \to Z$ *– неперервне відносно першої змінної відображення. Тоді множина*

$$S_0 = \{s \in S : (\exists y \in Y)(\exists u, v \in X)(u|_{S \setminus \{s\}} = v|_{S \setminus \{s\}} \;\; i \;\; f(u, y) \neq f(v, y))\}$$

*є найменшою множиною, на якій зосереджене* $f$ *відносно першої змінної.*

*Доведення.* Спочатку покажемо, що $f$ зосереджене на множині $S_0$ відносно першої змінної.

Згідно з наслідком 2.1.8, для кожного фіксованого $y \in Y$ множина

$$T_y = \{s \in S : (\exists u_s, v_s \in X)(u_s|_{S \setminus \{s\}} = v_s|_{S \setminus \{s\}} \;\; \text{і} \;\; f(u_s, y) \neq f(v_s, y))\}$$

є найменшою множиною, на якій зосереджене відображення $f_y : X \to Z$, $f_y(x) = f(x, y)$. Зауважимо, що, згідно з означеннями, кожна множина $T_y$ міститься в множині $S_0$. Тому кожне відображення $f_y$ зосереджене на множині $S_0$. Це означає, що відображення $f$ зосереджене на множині $S_0$ відносно першої змінної.

Тепер покажемо, що множина $S_0$ – найменша множина, на якій $f$ зосереджене відносно першої змінної. Міркуватимемо від супротивного. Нехай $S_0 \not\subseteq T \subseteq S$. Тоді існує елемент $s \in S_0 \setminus T$. Тепер згідно з означенням множини $S_0$, існують $y \in Y$ і $u, v \in X$ такі, що

$$u|_{S\setminus\{s\}} = v|_{S\setminus\{s\}} \qquad \text{і} \qquad f(u_s, y) \neq f(v_s, y).$$

Тоді, зокрема, $u|_T = v|_T$ і відображення $f$ не зосереджене на множині $T$ відносно першої змінної. $\square$

Аналогічно доводиться подібне твердження щодо залежності відносно другої змінної.

**Твердження 3.1.8.** *Нехай $X$ – деяка множина, $Y = \prod\limits_{s\in S} Y_s$ – топологічний добуток сім'ї непорожніх топологічних просторів $Y_s$, $Z$ – гаусдорфовий топологічний простір і $f : X \times Y \to Z$ – неперервне відносно другої змінної відображення. Тоді множина*

$$S_0 = \{s \in S : (\exists y \in Y)(\exists u, v \in X)(u|_{S\setminus\{s\}} = v|_{S\setminus\{s\}} \ \text{ і } \ f(u, y) \neq f(v, y))\}$$

*є найменшою множиною, на якій зосереджене $f$ відносно другої змінної.*

### 3.1.2. Необхідні умови залежності нарізно неперевних функцій.

У даному пункті ми доведемо необхідні умови залежності нарізно неперервних функцій двох змінних від певної кількості координат відносно тієї чи іншої змінної.

Спочатку ми викладемо два допоміжні твердження, які є певними аналогами тверджень 2.4.4 і 2.4.5.

**Твердження 3.1.9.** *Нехай $X$, $Y$ – топологічні простори, $(U_s : s \in S)$ – точкова скінченна сім'я множин у просторі $X$ і $(V_s : s \in S)$ – сім'я множин в просторі $Y$. Тоді сім'я $(W_s : s \in S)$ множин $W_s = U_s \times V_s$ точково скінченна в просторі $X \times Y$.*

*Доведення.* Зафіксуємо довільну точку $(x, y) \in X \times Y$. Оскільки

$$S_0 = \{s \in S : (x, y) \in W_s\} \subseteq \{s \in S : x \in U_s\} = S_1$$

і множина $S_1$ скінченна, то множина $S_0$ також скінченна. $\square$

На завершальному етапі побудов ми будемо використовувати наступний допоміжний факт.

**Твердження 3.1.10.** *Нехай $X$ і $Y$ – топологічні простори, $(f_i : i \in I)$ і $(g_i : i \in I)$ – сім'ї неперервних функцій $f_i : X \to \mathbb{R}$ і $g_i : Y \to \mathbb{R}$ такі, що сім'я $(U_i : i \in I)$ носіїв $U_i = \operatorname{supp} f_i$ локально скінченна в просторі $X$ і сім'я $(V_i : i \in I)$ носіїв $V_i = \operatorname{supp} f_i$ локально скінченна в просторі $Y$. Тоді функція $h : X \times Y \to \mathbb{R}$, означена формулою*

$$h(x, y) = \sum_{i \in I} f_i(x) g_i(y),$$

*є нарізно неперервною.*

*Доведення.* Зафіксуємо точку $x \in X$ і покажемо, що функція $h^x : Y \to \mathbb{R}$, $h^x(y) = h(x, y)$, непереорвна. Оскільки множина

$$I_0 = \{i \in I : x \in U_i\}$$

скінченна, то функція $\varphi : Y \to \mathbb{R}$, означена формулою

$$\varphi(y) = \sum_{i \in I_0} f_i(x) g_i(y),$$

є неперервною як скінченна сума неперервних функцій. Крім того, $f_i(x) = 0$ для довільного індексу $i \in I \setminus I_0$. Тому

$$h^x(y) = \sum_{i \in I} f_i(x) g_i(y) = \sum_{i \in I_0} f_i(x) g_i(y) = \varphi(y)$$

для кожного $y \in Y$. Отже, функція $h^x$ неперервна.

Аналогічно доводимо, що для кожного $y \in Y$ функція $h_y : X \to \mathbb{R}$, $h_y(x) = h(x, y$, неперервна. □

Необхідні умови залежності нарізно неперервних функцій від $\aleph$ координат відносно другої змінної дає наступний результат.

**Теорема 3.1.11.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – цілком регулярний простір, $(Y_t : t \in T)$ – сім'я потужності $|T| > \aleph$, яка складається з нетривіальних топологічних просторів $Y_t$, такі, що простір $Y = \prod_{t \in T} Y_t$ цілком регулярний і кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. Тоді виконуються наступні умови:*

(*i*) *простір $X \times Y$ псевдо-$\aleph^+$-компактний;*

(*ii*) $p(X) \leq \aleph$ *або* $p(Y) \leq \aleph$.

*Доведення.* $(i)$. Без обмежень загальності ми можемо вважати, що $0 \notin T$. Позначимо

$$Y_0 = X, \quad T_0 = T \cup \{0\} \quad \text{і} \quad Z = \prod_{t \in T_0} Y_t = X \times Y.$$

Розглянемо довільну неперервну функцію $f : Z \to \mathbb{R}$ і відповідну їй функцію двох змінних $g : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y) = f((z_t)_{t \in T_0}),$$

де $x = z_0$ і $y = (z_t)_{t \in T}$. Зрозуміло, що неперервність функції $f$ означає сукупну неперервність функції $g$. Зокрема, функція $g$ нарізно неперервна і, згідно з умовою теореми, вона залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. Тому існує множина $S \subseteq T$ потужності $|S| \le \aleph$, на якій зосереджена функція $g$ відносно другої змінної, тобто

$$g(x, y') = g(x, y'')$$

для довільних $x \in X$ і $y', y'' \in Y$ з $y'|_S = y''|_S$. Легко бачити, що функція $f$ зосереджена на множині $S_0 = S \cup \{0\}$. Справді, нехай

$$z' = (z'_t)_{t \in T_0}, z'' = (z''_t)_{t \in T_0} \in Z$$

такі, що $z'|_{S_0} = z''|_{S_0}$. Зауважимо, що

$$z'_0 = z''_0 = x \in X,$$

адже $0 \in S_0$. Крім того, оскільки $S \subseteq S_0$, то для точок

$$y' = (z'_t)_{t \in T}, y'' = (z''_t)_{t \in T} \in Y$$

маємо $y'|_S = y''|_S$. Тепер, урахувавши, що функція $g$ зосереджена на множині $S$ відносно другої змінної, одержимо, що

$$f(z') = g(x, y') = g(x, y'') = f(z'').$$

Отже, функція $f$ зосереджена на множині $S_0$ потужності

$$|S_0| = |S \cup \{0\}| \le \max\{|S|, \aleph_0\} \le \aleph.$$

Тому $f$ залежить від $\aleph$ координат, і згідно з теоремою 2.4.6, простір $Z$ псевдо-$\aleph^+$-компактний.

$(ii)$. Міркуватимемо від супротивного. Припустимо, що $p(X) > \aleph$ і $p(Y) > \aleph$. Доведемо, що існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.

Оскільки $p(Y) > \aleph$, то згідно з наслідком 2.3.7 існує скінченна множина $T_0 \subseteq T$ така, що $p(Y_0) > \aleph$, де $Y_0 = \prod\limits_{t \in T_0} Y_t$. Зауважимо, що $|T \setminus T_0| > \aleph$, адже множина $T_0$ скінченна і $|T| > \aleph$. Тому існує множина $I \subseteq T \setminus T_0$ така, що $|I| = \aleph^+$.

Згідно з нашим припущенням і вибором множини $T_0$, існують точково скінченні сім'ї

$$(U_i : i \in I) \qquad \text{і} \qquad (V_i : i \in I)$$

непорожніх відкритих множин $U_i$ та $V_i$ в просторах $X$ та $Y_0$ відповідно. Для кожного $i \in I$ виберемо точки

$$x_i \in U_i, \quad v_i = (v_i(t))_{t \in T_0} \in V_i \quad \text{і} \quad a_i, b_i \in Y_i$$

такі, що $a_i \neq b_i$. Оскільки простори $X$, $Y_0$ та $Y_i$ цілком регулярні, то існують неперервні функції $f_i : X \to [0,1]$, $g_i : Y_0 \to [0,1]$ та $h_i : Y_i \to [0,1]$ такі, що

$$f_i(x_i) = g_i(v_i) = h_i(a_i) = 1,$$

$$f_i(X \setminus U_i) = g_i(Y_0 \setminus V_i) = \{0\} \quad \text{і} \quad h_i(b_i) = 0.$$

Зауважимо, що для кожного $i \in I$ функція $\varphi_i : Y \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_i(y) = g_i(y|_{T_0}) h_i(y(i)),$$

де $y = (y(t))_{t \in T} \in Y$, є неперервною, як добуток неперервних функцій.

Оскільки

$$\operatorname{supp} f_i = \{x \in X : f_i(x) \neq 0\} \subseteq U_i$$

і сім'я $(U_i : i \in I)$ точково скінченна, то сім'я $(\operatorname{supp} f_i : i \in I)$ також точково скінченна у просторі $X$. Аналогічно сім'я $(\operatorname{supp} g_i : i \in I)$ точково скінченна в просторі $Y_0$, адже $\operatorname{supp} g_i \subseteq V_i$ для кожного $i \in I$ і сім'я $(V_i : i \in I)$ точково скінченна. Крім того,

$$\operatorname{supp} \varphi_i = \operatorname{supp} g_i \times \operatorname{supp} h_i \times \prod_{t \in T \setminus (T_0 \cup \{i\})} Y_t$$

для кожного $i \in I$. Тому, згідно з твердженням 3.1.9, сім'я $(\operatorname{supp} \varphi_i : i \in I)$ точково скінченна в просторі $Y = Y_0 \times \prod\limits_{t \in T \setminus T_0} Y_t$.

Тепер розглянемо функцію $f : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \sum_{i \in I} f_i(x) \cdot \varphi_i(y),$$

яка є нарізно неперервною згідно з твердженням 3.1.10. Залишилось показати, що функція $f$ не залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$.

Нехай $\tilde{T}$ – найменша множина, на якій зосереджена функція $f$ відносно змінної $y$. Для кожного $i \in I$ точки $y_i = (y_i(t))_{t\in T}, z_i = (z_i(t))_{t\in T} \in Y$ означимо у такий спосіб:

$$y_i(t) = \begin{cases} v_i(t), \text{ якщо } & t \in T_0; \\ a_i, \text{ якщо } & t = i; \\ \text{довільно у решті випадків}, \end{cases}$$

$$z_i(t) = \begin{cases} y_i(t), \text{ якщо } & t \neq i; \\ b_i, \text{ якщо } & t = i. \end{cases}$$

Зауважимо, що для різних $i, j \in I$ маємо $y_i(j) = z_i(j)$ та $y_i|_{T_0} = z_i|_{T_0}$, адже $i \notin T_0$. Тому

$$\varphi_j(y_i) = g_j(y_i|_{T_0})h_j(y_i(j)) = g_j(z_i|_{T_0})h_j(z_i(j)) = \varphi_j(z_i)$$

для довільних різних $i, j \in I$. Отже, для кожного $i \in I$ маємо

$$f(x_i, y_i) - f(x_i, z_i) = \sum_{j\in I} (f_j(x_i)\varphi_j(y_i) - f_j(x_i)\varphi_j(z_i)) =$$

$$= \sum_{j\in I} f_j(x_i)\,(\varphi_j(y_i) - \varphi_j(z_i)) = f_i(x_i)(\varphi_i(y_i) - \varphi_i(z_i))$$

$$= 1 \cdot (g_i(v_i)h_i(a_i) - g_i(v_i)h_i(b_i)) = 1.$$

Тому, як випливає з твердження 3.1.8, $I \subseteq \tilde{T}$. Отже, $|\tilde{T}| \geq |I| > \aleph$, тобто $f$ не залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$, що суперечить умові теореми. Отже, наше припущення неправильне і $p(X) \leq \aleph$ або $p(Y) \leq \aleph$. $\square$

Аналогічно доводиться наступне твердження щодо залежності нарізно неперервних функцій відносно першої змінної.

**Теорема 3.1.12.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $(X_s : s \in S)$ – сім'я потужності $|S| > \aleph$, яка складається з нетривіальних топологічних просторів $X_s$, і $Y$ – цілком регулярний простір, такі, що простір $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ цілком регулярний і кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $x$. Тоді виконуються наступні умови:*

(*i*) *простір $X \times Y$ псевдо-$\aleph^+$-компактний;*

(*ii*) *$p(X) \leq \aleph$ або $p(Y) \leq \aleph$.*

### 3.1.3. Достатні умови залежності відносно другої змінної в термінах обмежень на перший множник.

Зауважимо, що хоча теореми 3.1.11 і 3.1.12 дають необхідні умови залежності нарізно неперервних відображень від певної кількості координат відносно різних (першої або другої) змінних, все ж отримані умови є симетричними відносно змінних, тобто необхідні умови в цих теоремах однакові. Виявилося, що в дослідженнях достатніх умов залежності нарізно неперервних функцій симетричність відносно змінних уже втрачається, а доведення відповідних результатів, хоча і зберігають певну загальну схему міркувань, все ж відрізняються за своєю складністю. Тому ми розглянемо ці два випадки окремо і при цьому будемо вивчати залежність відносно другої змінної, накладаючи додаткові обмеження спочатку на перший множник (простіший випадок), а потім – на другий (складніший випадок). Зрозуміло, що мають місце аналогічні результати і щодо залежності відносно першої змінної, але ми не будемо їх формулювати, адже тоді потрібно накладати обмеження на іншу змінну.

У цьому пункті ми розглянемо випадок з обмеженістю на перший множник.

Зрозуміло, з достатніх умов залежності повинні випливати необхідні умови, одержані в попередньому пункті. Наступне твердження показує, що нарізні умови на множники $X$ і $Y$ у подальших теоремах забезпечують псевдо-$\aleph$-компактність добутку $X \times Y$.

**Твердження 3.1.13.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір, для якого $\aleph^+$ є калібром, і $Y$ – псевдо-$\aleph^+$-компактний простір. Тоді простір $X \times Y$ псевдо-$\aleph^+$-компактний.*

*Доведення.* Нехай $(W_i : i \in I)$ – довільна сім'я потужності $|I| \geq \aleph^+$, яка складається з непорожніх відкритих у просторі $X \times Y$ множин $W_i$. Достатньо показати, що дана сім'я не є локально скінченною в просторі $X \times Y$, тобто має точку накопичення в цьому просторі.

Для кожного $i \in I$ виберемо відкриті непорожні множини $U_i$ та $V_i$ у просторах $X$ та $Y$ відповідно, такі, що $U_i \times V_i \subseteq W_i$. Оскільки кардинальне число $\aleph^+$ є калібром простору $X$, то існують множина $J \subseteq I$ потужності $|J| = \aleph^+$ і точка $x \in X$ такі, що $x \in U_i$ для кожного $i \in J$. Крім того, простір $Y$ псевдо-$\aleph^+$-компактний. Тому сім'я $(V_i : i \in J)$ має точку накопичення $y$ в просторі $Y$.

Покажемо, що точка $z = (x, y)$ – це точка накопичення сім'ї $(W_i : i \in I)$. Нехай $W$ – довільний окіл точки $z$ в просторі $Z$. Виберемо окіл $U$ точки $x$ в просторі $X$ і окіл $V$ точки $y$ в просторі $Y$ такі, що $U \times V \subseteq W$. Оскільки $x \in U_i$ для кожного $i \in J$, то

$$I_1 = \{i \in I : W \cap W_i \neq \emptyset\} \supseteq \{i \in J : W \cap W_i \neq \emptyset\} = \{i \in J : V \cap V_i \neq \emptyset\} = I_2,$$

причому множина $I_2$ нескінченна, згідно з вибором точки $y$. Отже, множина $I_1$ також нескінченна і точка $z$ точка накопичення сім'ї $(W_i : i \in I)$. $\square$

Наступна теорема – основний результат даного пункту.

**Теорема 3.1.14.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір, для якого $\aleph^+$ є калібром, $(Y_t : t \in T)$ – сім'я топологічних просторів така, що топологічний простір $Y = \prod\limits_{t\in T} Y_t$ псевдо-$\aleph^+$-компактний. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$.*

*Доведення.* Нехай це не так, тобто існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. Тоді, як випливає з твердженням 3.1.8, множина

$$T_0 = \{t \in T : (\exists x \in X)(\exists y, z \in Y)(y|_{T\setminus\{t\}} = z|_{T\setminus\{t\}} \text{ і } f(x,y) \neq f(x,z))\}$$

є найменшою множиною, на якій зосереджена функція $f$ відносно другої змінної, а отже, $T_0$ має потужність, більшу ніж $\aleph$. Для кожного $t \in T_0$ позначимо через $x_t$, $y_t$ і $z_t$ відповідні точки $x \in X$, $y \in Y$ і $z \in Y$, які фігурують в означенні множини $T_0$ і позначимо

$$\varepsilon_t = |f(x_t, y_t) - f(x_t, z_t)|.$$

Крім того, для кожного $t \in T_0$, скориставшись неперервністю функцій $f_{y_t} : X \to \mathbb{R}$, $f_{y_t}(x) = f(x, y_t)$, і $f_{z_t} : X \to \mathbb{R}$, $f_{y_t}(x) = f(x, y_t)$, знайдемо відкритий окіл $U_t$ точки $x_t$ такий, що

$$|f_{y_t}(x) - f_{y_t}(x_t)| < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{і} \qquad |f_{z_t}(x) - f_{z_t}(x_t)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

для кожного $x \in U_t$. Тоді

$$|f(x, y_t) - f(x, z_t)| = |f_{y_t}(x) - f_{z_t}(x)| =$$

$$= |f_{y_t}(x) - f_{y_t}(x_t) + f_{y_t}(x_t) - f_{z_t}(x_t) + f_{z_t}(x_t) - f_{z_t}(x)| \geq$$

$$\geq |f_{y_t}(x_t) - f_{z_t}(x_t)| - |f_{y_t}(x) - f_{y_t}(x_t)| - |f_{z_t}(x) - f_{z_t}(x_t)| >$$

$$> \varepsilon - \tfrac{\varepsilon}{2} - \tfrac{\varepsilon}{2} = 0,$$

як тільки $x \in U_t$. Тому $f(x, y_t) \neq f(x, z_t)$ для кожного $x \in U_t$.

Розглянемо сім'ю $\mathcal{U} = (U_t : t \in T_0)$. Оскільки $\aleph^+$ є калібром простору $X$ і $|T_0| \geq \aleph^+$, то існує точка $x^* \in X$ така, що множина

$$T^* = \{t \in T_0 : x^* \in U_t\}$$

має потужність, більшу ніж $\aleph$. Зауважимо, що функція $f^* : Y \to \mathbb{R}$, $f^*(y) = f(x^*, y)$, неперервна на псевдо-$\aleph^+$-компактному просторі $Y$. Тоді, як випливає з теореми 2.4.2, функція $f^*$ залежить від $\aleph$ координат. Тому найменша множина $\tilde{T}$, на якій зосереджена функція $f^*$, має потужність, що не перевищує $\aleph$. Але

$$f^*(y_t) = f(x^*, y_t) \neq f(x^*, z_t) = f^*(z_t)$$

для кожного $t \in T^*$. З твердження 2.1.7 випливає, що $T^* \subseteq \tilde{T}$, що неможливо, адже $|\tilde{T}| \leq \aleph < |T^*|$. Отже, ми одержали суперечність і теорема доведена. □

**3.1.4. Достатні умови залежності відносно другої змінної в термінах обмежень на другий множник.** Тепер перейдемо до вивчення залежності від $\aleph$ координат відносно другої змінної нарізно неперервних функцій на добутку двох просторів у випадку, коли $\aleph^+$ є калібром другого множника.

Відображення $f$ між топологічними просторами $X$ і $Y$ називається *гомеоморфізмом*, якщо $f$ бієктивне, а також $f$ і $f^{-1}$ неперервні.

Наступний результат дає можливість розглядати замість другого множника канторовий куб відповідної ваги.

**Теорема 3.1.15.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір, $(Y_t : t \in T)$ – сім'я топологічних просторів, причому $\aleph^+$ є калібром топологічного простору $Y = \prod\limits_{t\in T} Y_t$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, яка не залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. Тоді існують множина $S \subseteq T$ з $|S| > \aleph$ і нарізно неперервна функція $g : X \times Y_1 \to \mathbb{R}$, де $Y_1 = \{0, 1\}^S$, яка не залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

*Доведення.* Спочатку міркуємо аналогічно, як при доведенні попередньої теореми. Згідно з твердженням 3.1.8, множина

$$T_0 = \{t \in T : (\exists x \in X)(\exists y, z \in Y)(y|_{T\setminus\{t\}} = z|_{T\setminus\{t\}} \text{ і } f(x, y) \neq f(x, z))\}$$

є найменшою множиною, на якій зосереджена функція $f$ відносно другої змінної, а отже, $T_0$ має потужність, більшу ніж $\aleph$. Для кожного $t \in T_0$ позначимо через $x_t$, $y_t$ і $z_t$ відповідні точки $x \in X$, $y \in Y$ і $z \in Y$, які фігурують в означенні множини $T_0$. Використовуючи неперервність $f$ відносно другої змінної для кожного $t \in T_0$, знайдемо базисні відкриті околи

$$\tilde{V}_t = \prod_{s\in T} \tilde{V}_s^{(t)} \qquad \text{і} \qquad \tilde{W}_t = \prod_{s\in T} \tilde{W}_s^{(t)}$$

відповідно точок $y_t$ і $z_t$ в просторі $Y$ такі, що

$$f(x_t, y) \neq f(x_t, z)$$

для довільних $y \in \tilde{V}_t$ і $z \in \tilde{W}_t$. Зауважимо, що $\tilde{V}_t \cap \tilde{W}_t = \emptyset$ для кожного $t \in T_0$. Врахувавши також, що $\tilde{V}_s^{(t)} \cap \tilde{W}_s^{(t)} \neq \emptyset$ як тільки $s \in T \setminus \{t\}$, адже множини $\tilde{V}_s^{(t)}$ і $\tilde{W}_s^{(t)}$ є околами точки $y_t(s) = z_t(s)$ в просторі $Y_s$, одержимо, що

$$\tilde{V}_t^{(t)} \cap \tilde{W}_t^{(t)} = \emptyset$$

для кожного $t \in T_0$.

Позначимо

$$V_s^{(t)} = \tilde{V}_s^{(t)} \bigcap \tilde{W}_s^{(t)}$$

для кожного $s \in T \setminus \{t\}$,

$$V_t^{(t)} = \tilde{V}_t^{(t)} \qquad \text{і} \qquad V_t = \prod_{s \in T} V_s^{(t)}.$$

Зауважимо, що $V_t$ відкритий окіл точки $y_t$ і $V_t \subseteq \tilde{V}_t$. Крім того, для кожного $y \in V_t$ точка $z \in Y$, яка визначається так:

$$z(s) = \begin{cases} y(s), & \text{якщо} \quad s \in T \setminus \{t\}; \\ z_t(t), & \text{якщо} \quad s = t, \end{cases}$$

входить в $\tilde{W}_t$ і, отже, $f(x_t, y) \neq f(x_t, z)$.

Розглянемо сім'ю $\mathcal{V} = (V_t : t \in T_0)$. Оскільки кардинал $\aleph^+$ є калібром простору $Y$ і $|T_0| > \aleph$, то існують множина $S \subseteq T_0$ і точка $y^* \in Y$ такі, що $|S| > \aleph$ і $y^* \in V_s$ для всіх $s \in S$.

Для кожного $s \in S$ позначимо $a_s = y^*(s)$, $b_s = z_s(s)$ і позначимо

$$z_s^*(t) = \begin{cases} y^*(t), & \text{якщо} \quad t \in T \setminus \{s\}; \\ b_t, & \text{якщо} \quad s = t. \end{cases}$$

Зауважимо, що

$$y^*|_{T \setminus \{s\}} = z_s^*|_{T \setminus \{s\}} \qquad \text{і} \qquad f(x_s, y^*) \neq f(x_s, z_s^*),$$

згідно з описаною вище властивістю множини $V_s$.

Розглянемо простір

$$Y^* = \prod_{t \in S} \{a_t, b_t\} \times \prod_{t \in T \setminus S} \{y^*(t)\}$$

і звуження $f^* = f_{|_{X \times Y^*}}$ функції $f$ на добуток $X \times Y^*$. З нарізної неперервності функції $f$ випливає, що функція $f^*$ також нарізно неперервна. Крім того, $y^* \in Y^*$, $z_s^* \in Y^*$ і

$$f^*(x_s, y^*) = f(x_s, y^*) \neq f(x_s, z_s^*) = f^*(x_s, z_s^*)$$

для кожного $s \in S$.

Для кожного $s \in S$ відображення $\psi_s : \{0,1\} \to \{a_s, b_s\}$, яке діє за правилом $\psi_s(0) = a_s$ і $\psi_s(1) = b_s$, є гомеорфізмом, адже $V_s^{(s)}$ і $\tilde{W}_s^{(s)}$ – неперетинні околи точок $a_s$ і $b_s$ в просторі $Y_s$. З [16, твердження 2.3.6] випливає, що відображення $\psi : \{0,1\}^S \to \prod\limits_{s \in S} \{a_s, b_s\}$,

$$\psi(u(s)_{s\in S}) = (\psi_s(u(s)))_{s\in S}\,,$$

– гомеоморфізм. Тому гомеморфізмом також є відображення $\varphi : \{0,1\}^S \to Y^*$,

$$\varphi(u) = (\psi(u), (y^*(t))_{t\in T\setminus S}).$$

Залишилося показати, що функція $g : X \times Y_1 \to \mathbb{R}$, де $Y_1 = \{0,1\}^S$ і

$$g(x, u) = f^*(x, \varphi(u))$$

для кожного $u \in Y_1$, шукана. Нарізна неперевність функції $g$ випливає з нарізної неперевності функції $f^*$ і неперервності відображення $\varphi$. Позначимо $u^* = \varphi^{-1}(y^*)$ і $v_s^* = \varphi^{-1}(z_s^*)$ для кожного $s \in S$. Оскільки

$$u^*(t) = \psi^{-1}(y^*(t)) = \psi^{-1}(z_s^*(t)) = v_s^*(t)$$

як тільки $t \in S \setminus \{s\}$, то

$$u^*|_{S\setminus\{s\}} = v_s^*|_{S\setminus\{s\}}$$

для кожного $s \in S$. Крім того,

$$g(x_s, u^*) = f^*(x_s, y^*) \neq f^*(x_s, z_s^*) = g(x_s, v_s^*)$$

для кожного $s \in S$. Тому, згідно з твердженням 3.1.8, множина $S$ найменша множина, на якій зосереджене відображення $g$ відносно другої змінної. Отже, функція $g$ не залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної. $\square$

Тепер розглянемо функції на добутку берівського простору і канторового куба.

Для доведення основного результату нам потрібна наступна властивість канторового куба, яка вперше одержана А.Бузіадом в [8] і випливає з його наслідку 1.2 чи теореми 2.2.

**Теорема 3.1.16** (Бузіад [8])**.** *$X$ – берівський простір, $Y = \{0,1\}^T$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді існує всюди щільна в просторі $X$ множина $A$ типу $G_\delta$ така, що функція $f$ є неперервною в кожній точці множини $A \times Y$.*

Наступна теорема – один із основних результатів даного пункту.

**Теорема 3.1.17.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – берівський псевдо-$\aleph^+$-компактний простір і $Y = \{0,1\}^T$. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

*Доведення.* Припустимо, що це не так, тобто існує така нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. Зрозуміло, що це можливо лише у випадку, коли $|T| > \aleph$. Як і раніше, згідно з твердженням 3.1.8 множина

$$T_0 = \{t \in T : (\exists x \in X)(\exists y, z \in Y)(y|_{T\setminus\{t\}} = z|_{T\setminus\{t\}} \text{ і } f(x,y) \neq f(x,z))\}$$

має потужність $|T_0| > \aleph$. Для кожного $t \in T_0$ позначимо через $\tilde{x}_t$, $y_t$ і $z_t$ відповідні точки $x \in X$, $y \in Y$ і $z \in Y$, які фігурують в означенні множини $T_0$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$T_n = \{t \in T_0 : |f(\tilde{x}_t, y_t) - f(\tilde{x}_t, z_t)| > \tfrac{1}{n}\}.$$

Зрозуміло, що $T_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$. Оскільки $\aleph$ нескінченний кардинал, то існує такий номер $n_0$, що $|T_{n_0}| > \aleph$.

Позначимо $S = T_{n_0}$ і $\varepsilon = \frac{1}{n_0}$. Використовуючи неперервність функції $f$ відносно змінної $x$ для кожного $s \in S$ знайдемо відкритий окіл $\tilde{U_s}$ точки $\tilde{x_s}$ в $X$ такий, що

$$|f(x, y_t) - f(x, z_t)| > \varepsilon$$

для довільного $x \in \tilde{U_s}$. Згідно з теоремою 3.1.16, в кожній відкритій непорожній множині $\tilde{U_s}$ можна вибрати точку $x_s$ так, що $f$ неперервна в точках $(x_s, y_s)$ і $(x_s, z_s)$.

Для кожного $s \in S$, використовуючи неперервність функції $f$ в точках $(x_s, y_s)$ і $(x_s, z_s)$, виберемо відкритий окіл $U_s$ точки $x_s$ в просторі $X$ і базисні відкриті околи $V_s$ і $W_s$ відповідно точок $y_s$ і $z_s$ в просторі $Y$ такі, що

$$R(V_s) = R(W_s), \quad V_s|_{T\setminus\{s\}} = W_s|_{T\setminus\{s\}} \quad \text{і} \quad |f(x,y) - f(x,z)| > \varepsilon$$

для довільних $x \in U_s$, $y \in V_s$ і $z \in W_s$.

Розглянемо сім'ю $(R(V_s) : s \in S)$, що складається зі скінченних множин $R(V_s)$. Оскільки кардинал $\aleph^+$ регулярний, то, згідно з твердженням 2.2.7, існує скінченна множина $B \subseteq S$ і множина $S_1 \subseteq S$ такі, що

$$|S_1| > \aleph, \quad B \cap S_1 = \emptyset \quad \text{і} \quad R(V_s) \cap R(V_t) = B$$

для довільних різних $s, t \in S_1$. Оскільки множина $\{0,1\}^B$ скінченна і всі множини $V_s|_B$ непорожні, де $s \in S_1$, то існує таке $y' \in \{0,1\}^B$, що множина

$$S_0 = \{s \in S_1 : y' \in V_s|_B\}$$

має потужність, більшу ніж $\aleph$.

Покажемо, що сім'я $(U_s : s \in S_0)$ – локально скінченна в просторі $X$. Нехай $x_0 \in X$. Використовуючи компактність простору $Y$ і неперервність функції $f^{x_0} : Y \to \mathbb{R}$, $f^{x_0}(y) = f(x_0, y)$, і міркуючи аналогічно, як при побудові множини $S_\varepsilon$ у доведенні теореми 1.3.3, легко знайти таку скінченну множину $B_0 \subseteq T$, що

$$|f(x_0, y) - f(x_0, z)| < \varepsilon$$

для довільних $y, z \in Y$ з $y|_{B_0} = z|_{B_0}$.

Розглянемо точки $y_0, z_0 \in Y$, які визначаються у такий спосіб:

$$y_0(t) = \begin{cases} y'(t), & \text{якщо} \quad t \in B; \\ y_s(t), & \text{якщо} \quad t \in R(V_s) \setminus B, \ s \in S_0 \setminus B_0; \\ 0, & \text{в іншому випадку}, \end{cases}$$

$$z_0(t) = \begin{cases} y'(t), & \text{якщо} \quad t \in B; \\ z_s(t), & \text{якщо} \quad t \in R(V_s) \setminus B, \ s \in S_0 \setminus B_0; \\ 0, & \text{в іншому випадку}. \end{cases}$$

Зауважимо, що згідно з вибором $B$ і $S_1$ множини $R(V_s) \setminus B$ попарно неперетинні при $s \in S_1$ і означення коректні. Крім того, оскільки

$$y_s|_{S \setminus \{s\}} = z_s|_{S \setminus \{s\}}$$

для кожного $s \in S_0$, то

$$y_s(t) = z_s(t)$$

для довільних $t \in B_0$ і $s \in S_0 \setminus B_0$. Тому

$$y_0|_{B_0} = z_0|_{B_0} \quad \text{і} \quad |f(x_0, y_0) - f(x_0, z_0)| < \varepsilon.$$

Використовуючи неперервність $f$ відносно змінної $x$ виберемо такий окіл $U_0$ точки $x_0$ в $X$, що

$$|f(x, y_0) - f(x, z_0)| < \varepsilon$$

для кожного $x \in U_0$.

З іншого боку, оскільки $S_0 \cap B = \emptyset$, то

$$V_s|_B = W_s|_B,$$

тому

$$y' \in W_s|_B$$

для кожного $s \in S_0$. Крім того,

$$y_0|_{R(V_s) \setminus B} = y_s|_{R(V_s) \setminus B} \quad \text{і} \quad z_0|_{R(V_s) \setminus B} = z_s|_{R(V_s) \setminus B}$$

для всіх $s \in S_0 \setminus B_0$. Урахувавши, що $y_s \in V_s$ і $z_s \in W_s$, одержимо, що

$$y_0|_{R(V_s)} \in V_s|_{R(V_s)} \quad \text{i} \quad z_0|_{R(V_s)} \in W_s|_{R(V_s)},$$

тому $y_0 \in V_s$ і $z_0 \in W_s$, адже $R(W_s) = R(V_s)$ для кожного $s \in S_0 \setminus B_0$. Згідно з вибором околів $U_s$, $V_s$ і $W_s$ маємо, що

$$|f(x, y_0) - f(x, z_0)| > \varepsilon$$

для довільних $x \in U_s$ і $s \in S_0 \setminus B_0$.

Отже, $U_0 \cap U_s = \emptyset$ для кожного $s \in S_0 \setminus B_0$. Тому множина

$$\{s \in S_0 : U_0 \bigcap U_s \neq \emptyset\}$$

скінченна, а сім'я $(U_s : s \in S_0)$ локально скінченна в $X$. А це суперечить тому, що $X$ псевдо-$\aleph^+$-компактний, адже $|S_0| > \aleph$. $\square$

З теорем 3.1.15 і 3.1.17 негайно випливає наступний результат.

**Теорема 3.1.18.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – берівський псевдо-$\aleph^+$-компактний простір, $(Y_t : t \in T)$ – сім'я топологічних просторів, причому $\aleph^+$ є калібром топологічного простору $Y = \prod\limits_{t \in T} Y_t$. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

# 3.2

## Залежність нарізно неперервних функцій на добутку просторів з умовами типу компактності

У даному підрозділі ми вивчатимемо необхідні і достатні умови залежності від певної кількості координат нарізно неперервних функцій двох змінних, заданих на добутках, у яких принаймні співмножник задовольняє умову типу компактності. Як і в загальному випадку, достатні умови залежності тут залишаються несиметричними відносно змінних, але у класі зліченно компактних просторів одержується характеризація залежності, яка має симетричний вигляд.

### 3.2.1. Неперервні функції на псевдо-$\aleph_0$-компактному просторі.

Першим аналогом компактності у наших дослідженнях виступатиме псевдо-$\aleph_0$-компактність і ми у даному пункті доведемо результат про неперервні функції на псевдо-$\aleph_0$-компактному просторі, який доповнює теорему 2.4.2 і узагальнює відповідну властивість відображень на компактних просторах, яку ми використовували при доведенні теорем 1.3.3 і 3.1.17.

**Теорема 3.2.1.** *Нехай $(X_s : s \in S)$ – сім'я топологічних просторів така, що простір $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ псевдо-$\aleph_0$-компактний, і $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченна множина $S_0 \subseteq S$ така, що*

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

*для довільних $x, y \in X$ з $x|_{S_0} = y|_{S_0}$.*

*Доведення.* Нехай це не так, тобто існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для довільної скінченної множини $S' \subseteq S$ існують точки $x, y \in X$ такі, що

$$x|_{S'} = y|_{S'} \qquad \text{і} \qquad |f(x) - f(y)| > \varepsilon_0.$$

Індукцією відносно $n \in \mathbb{N}$ побудуємо послідовності $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ і $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх базисних відкритих в $X$ множин

$$U_n = \prod_{s\in S} U_s^{(n)} \qquad \text{і} \qquad V_n = \prod_{s\in S} V_s^{(n)}$$

і послідовність $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ множин

$$S_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} R(U_k),$$

які для кожного $n \in \mathbb{N}$ задовольняють наступні умови:

$a)$ $U_s^{(n)} = V_s^{(n)}$ для кожного $s \in S_n$;

$b)$ $R(U_n) = R(V_n)$;

$c)$ $|f(x) - f(y)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$ для довільних $x \in U_n$ і $y \in V_n$.

Розпочнемо з множини $S_1 = \emptyset$. Згідно з нашим припущенням, існують точки $x_1, y_1 \in X$ такі, що

$$|f(x_1) - f(y_1)| > \varepsilon_0.$$

Користуючись неперервністю функції $f$ в точках $x_1$ і $y_1$, виберемо відкриті околи

$$U_1 = \prod_{s \in S} U_s^{(1)} \qquad \text{і} \qquad V_1 = \prod_{s \in S} V_s^{(1)}$$

точок $x_1$ і $y_1$ відповідно такі, що

$$U_s^{(1)} = V_s^{(1)}$$

для кожного $s \in S_1$,

$$R(U_1) = R(V_1), \quad |f(x) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon_0}{4} \quad \text{і} \quad |f(y) - f(y_1)| < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

для довільних $x \in U_1$ і $y \in V_1$. З останніх двох умов і вибору точок $x_1$ і $y_1$ випливає, що

$$|f(x) - f(y)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

для довільних $x \in U_1$ і $y \in V_1$.

Позначимо

$$S_2 = R(U_1) \cup S_1.$$

Згідно з нашим припущенням, існують точки $x_2, y_2 \in X$ такі, що

$$x_2|_{S_2} = y_2|_{S_2} \qquad \text{і} \qquad |f(x_2) - f(y_2)| > \varepsilon_0.$$

Аналогічно, як і на першому кроці міркувань, виберемо відкриті околи

$$U_2 = \prod_{s \in S} U_s^{(2)} \qquad \text{і} \qquad V_2 = \prod_{s \in S} V_s^{(2)}$$

точок $x_2$ і $y_2$ відповідно такі, що

$$U_s^{(2)} = V_s^{(2)}$$

для кожного $s \in S_2$,

$$R(U_2) = R(V_2) \qquad \text{і} \qquad |f(x) - f(y)| \geq \tfrac{\varepsilon_0}{2}$$

для довільних $x \in U_2$ і $y \in V_2$.

Далі позначимо

$$S_3 = R(U_2) \cup S_2$$

і знайдемо такі відкриті непорожні множини

$$U_3 = \prod_{s \in S} U_s^{(3)} \qquad \text{і} \qquad V_3 = \prod_{s \in S} V_s^{(3)},$$

що

$$U_s^{(3)} = V_s^{(3)}$$

для кожного $s \in S_3$,

$$R(U_3) = R(V_3) \qquad \text{і} \qquad |f(x) - f(y)| \geq \tfrac{\varepsilon_0}{2}$$

для довільних $x \in U_3$ і $y \in V_3$.

Продовжуючи цей процес до нескінченності, одержимо потрібні нам послідовності, які задовольняють умови $a) - c)$.

Тепер розглянемо сім'ю $\mathcal{U} = (U_n : n \in \mathbb{N})$. Оскільки простір $X$ псевдо-$\aleph_0$-компактний, то сім'я $\mathcal{U}$ не є локально скінченною, тобто існує точка $\tilde{x} \in X$ така, що довільний окіл $U$ цієї точки перетинається з нескінченною кількістю елементів сім'ї $\mathcal{U}$. За неперервністю функції $f$ в точці $\tilde{x}$ виберемо базисний окіл

$$\tilde{U} = \prod_{s \in S} \tilde{U}_s$$

точки $\tilde{x}$ в просторі $X$ такий, що

$$|f(x) - f(y)| < \tfrac{\varepsilon_0}{4}$$

для довільних $x, y \in \tilde{U}$. Тоді існує строго зростаюча послідовність $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ номерів $n_k \in \mathbb{N}$ така, що

$$\tilde{U} \cap U_{n_k} \neq \emptyset$$

для кожного $k \in \mathbb{N}$. З умови $c)$, використаної для номерів $n_k$, випливає, що

$$\tilde{U} \cap V_{n_k} = \emptyset,$$

тобто для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує індекс $s_k \in S$ такий, що

$$\tilde{U}_{s_k} \cap V_{s_k}^{(n_k)} = \emptyset.$$

Зауважимо, що тоді для фіксованого номера $k$ маємо,що

$$s_k \in R(\tilde{U}) \cap R(V_{n_k}) \subseteq R(U_{n_k}) \subseteq S_{n_{k+1}}.$$

Але

$$\tilde{U}_{s_k} \cap U_{s_k}^{(n_k)} \neq \emptyset,$$

тому

$$U_{s_k}^{(n_k)} \neq V_{s_k}^{(n_k)}$$

і, як випливає з умови $a$), $s_k \notin S_{n_k}$. Отже, $s_k \in S_{n_{k+1}} \setminus S_{n_k}$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що всі точки $s_k$ різні, що неможливо, бо всі вони належать скінченній множині $R(\tilde{U})$. $\square$

### 3.2.2. Нарізно неперервні функції з псевдо-$\aleph_0$-компактним множником.

У даному пункті ми застосуємо результат попереднього пункту до вивчення залежності відносно другої змінної нарізно неперервних функцій двох змінних.

Спочатку ми доведемо твердження, яке подібне до твердження 3.1.13 і має аналогічне доведення, а також показує, що нарізні умови на множники $X$ і $Y$ у подальших теоремах забезпечують псевдо-$\aleph$-компактність добутку $X \times Y$.

**Твердження 3.2.2.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір з $p(X) \leq \aleph$ і $Y$ – псевдо-$\aleph_0$-компактний простір. Тоді простір $X \times Y$ псевдо-$\aleph^+$-компактний.*

*Доведення.* Покажемо, що довільна сім'я $(W_i : i \in I)$ потужності $|I| \geq \aleph^+$, яка складається з непорожніх відкритих у просторі $X \times Y$ множин $W_i$, не є локально скінченною в просторі $X \times Y$, тобто має точку накопичення в цьому просторі.

Для кожного $i \in I$ виберемо відкриті непорожні множини $U_i$ та $V_i$ в просторах $X$ та $Y$ відповідно, такі, що $U_i \times V_i \subseteq W_i$. Оскільки $p(X) \leq \aleph$, то існують нескінченна множина $J \subseteq I$ і точка $x \in X$ такі, що $x \in U_i$ для кожного $i \in J$. Крім того, простір $Y$ псевдо-$\aleph_0$-компактний. Тому сім'я $(V_i : i \in J)$ має точку накопичення $y$ просторі $Y$. Міркуючи далі, в точності, як при доведенні твердження 3.1.13, легко показати, що точка $z = (x, y)$ є точкою накопичення сім'ї $(W_i : i \in I)$. $\square$

Тепер викладемо основний результат даного пункту.

**Теорема 3.2.3.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір з $p(X) \leq \aleph$, $(Y_t : t \in T)$ – сім'я топологічних просторів така, що топологічний простір $Y = \prod\limits_{t \in T} Y_t$ псевдо-$\aleph_0$-компактний. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

*Доведення.* Міркуватимемо від супротивного і першу частину міркувань проведемо у звичний спосіб.

Припустимо, що це не так, тобто існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. Тоді, як випливає з твердження 3.1.8, множина

$$\tilde{T} = \{t \in T : (\exists x \in X)(\exists y, z \in Y)(y|_{T\setminus\{t\}} = z|_{T\setminus\{t\}} \text{ і } f(x, y) \neq f(x, z))\}$$

має потужність, більшу ніж $\aleph$. Для кожного $t \in \tilde{T}$ позначимо через $x_t$, $y_t$ і $z_t$ відповідні точки $x \in X$, $y \in Y$ і $z \in Y$, які фігурують в означенні множини $\tilde{T}$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$T_n = \{t \in \tilde{T} : |f(x_t, y_t) - f(x_t, z_t)| > \tfrac{1}{n}\}.$$

Оскільки $|\tilde{T}| > \aleph$ і $\tilde{T} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} T_n$, то існує номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що множина $T_0 = T_{n_0}$ має потужність більшу ніж $\aleph$.

Функція $f$ неперервна відносно змінної $x$, тому для кожного $t \in T_0$ існує окіл $U_t$ точки $x_t$ в просторі $X$ такий, що

$$|f(x, y_t) - f(x_t, y_t)| < \tfrac{1}{4n_0} \qquad \text{і} \qquad |f(x, z_t) - f(x_t, z_t)| < \tfrac{1}{4n_0}$$

для кожного $x \in U_t$. Тоді, зокрема,

$$|f(x, y_t) - f(x, z_t)| > \tfrac{1}{2n_0}$$

для кожного $x \in U_t$.

Розглянемо сім'ю $\mathcal{U} = (U_t : t \in T_0)$. Оскільки $p(X) \leq \aleph$ і $|T_0| > \aleph$, то сім'я $\mathcal{U}$ не є точково скінченною, тобто існують $\tilde{x} \in X$ і зліченна множина $R \subseteq T_0$ такі, що $\tilde{x} \in U_t$ для кожного $t \in R$. Тепер до неперервної функції $f^{\tilde{x}} : Y \to \mathbb{R}$, $f^{\tilde{x}}(y) = f(\tilde{x}, y)$ застосуємо твердження 3.2.2 і одержимо, що існує скінченна множина $\tilde{R} \subseteq T$ така, що

$$|f^{\tilde{x}}(y) - f^{\tilde{x}}(z)| < \tfrac{1}{2n_0}$$

для довільних точок $y, z \in Y$ з $y|_{\tilde{R}} = z|_{\tilde{R}}$.

Візьмемо довільну точку $t$ з множини $R\setminus\tilde{R}$, яка обов'язково непорожня, як різниця зліченної і скінченної множини. Тепер, з одного боку, маємо, що

$$|f(\tilde{x}, y_t) - f(\tilde{x}, z_t)| = |f^{\tilde{x}}(y_t) - f^{\tilde{x}}(z_t)| < \tfrac{1}{2n_0},$$

адже $y_t|_{\tilde{R}} = z_t|_{\tilde{R}}$. А з іншого,

$$|f(\tilde{x}, y_t) - f(\tilde{x}, z_t)| > \tfrac{1}{2n_0},$$

бо $\tilde{x} \in U_t$.

Отже, ми отримали суперечність. Тому наше припущення неправильне, тобто кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. $\square$

### 3.2.3. Нарізно неперервні функції зі зліченно компактним множником.

Тепер перейдемо до розгляду випадку, коли умову типу компактності задовольняє перший множник. При цьому аналогом компактності тут буде зліченна компактність.

Спочатку ми подамо зв'язок між зліченною компактністю і псевдо-$\aleph_0$-компактністю.

**Твердження 3.2.4.** *Кожний зліченно компактний $T_1$-простір є псевдо-$\aleph_0$-компактним.*

*Доведення.* Міркуватимемо від супротивного. Нехай $X$ – зліченно компактний $T_1$-простір, який не є псевдо-$\aleph_0$-компактним, тобто існує локально скінченна сім'я $(U_n : n \in \mathbb{N})$ непорожніх відкритих у просторі $X$ множин $U_n$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо точку $x_n \in U_n$. З локальної скінченності сім'ї $(U_n : n \in \mathbb{N})$ випливає, що для кожної точки $x \in X$ існує відкритий окіл $V_x$ цієї точки, такий, що множина

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in V_x\}$$

скінченна. Оскільки $X$ – $T_1$-простір, то множина

$$F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

замкнена, адже кожна точка $x \in X \setminus F$ має окіл $V \subseteq V_x$, який не перетинається з можиною $F$.

Залишилося розглянути відкрите покриття

$$\mathcal{U} = \{X \setminus F\} \cup \{V_{x_n} : n \in \mathbb{N}\}$$

простору $X$. Оскільки для кожного $U \in \mathcal{U}$ множина

$$\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$$

скінченна, то зі зліченного покриття $\mathcal{U}$ не можна виділити скінченного підпокриття, що дає нам суперечність. □

Аналогічно, як і для сімей множин, точка $x$ у топологічному просторі $X$ називається *точкою накопичення* сім'ї $(x_i : i \in I)$ точок $x_i \in X$, якщо для кожного околу $U$ точки $x$ у просторі $X$ множина $\{i \in I : x \in U_i\}$ нескінченна.

Нам буде потрібна наступна властивість зліченно компактних просторів, яка є характеристичною для гаусдорфових зліченно компактних просторів (див. [16, теорема 3.10.3]).

**Твердження 3.2.5.** *У довільному зліченно компактному просторі $X$ кожна нескінченна сім'я $(x_i : i \in I)$ точок $x_i \in X$ має точку накопичення.*

*Доведення.* Достатньо розглянути випадок, коли $I = \mathbb{N}$. Припустимо, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $x_n \in X$ не має точки накопичення. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}.$$

Зрозуміло, що $F_{n+1} \subseteq F_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Покажемо, що

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset.$$

Припустимо, що це не так, тобто існує точка $x \in X$ така, що $x \in F_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді для кожного околу $U$ точки $x$ існує строго зростаюча послідовність $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ така, що $x_{n_k} \in U$ для кожного $k \in \mathbb{N}$. Звідси випливає, що точка $x$ є точкою накопичення послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, що суперечить нашому припущенню.

Отже, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. Тоді система $\{X \setminus F_n : n \in \mathbb{N}\}$ – зліченне відкрите покриття простору $X$, з якого не можна виділити скінченне підпокриття. □

Наступний результат займає центральне місце у даному пункті.

**Теорема 3.2.6.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – зліченно компактний простір, $(Y_t : t \in T)$ – сім'я топологічних просторів така, що $p(Y) \leq \aleph$, де $Y = \prod\limits_{t \in T} Y_t$. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

*Доведення.* Знову міркуємо від супротивного. Нехай існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка не залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. Тоді аналогічно, як при доведенні теореми 3.2.3, існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що множина

$$\{t \in T : (\exists x \in X)(\exists y, z \in Y)(y|_{T \setminus \{t\}} = z|_{T \setminus \{t\}} \text{ і } |f(x,y) - f(x,z)| > \tfrac{1}{n_0})\},$$

яку ми позначимо через $T_0$, має потужність, більшу ніж $\aleph$. При цьому для кожного $t \in T_0$ відповідні точки $x \in X$, $y \in Y$ і $z \in Y$, які фігурують в означенні множини $T_0$, ми позначимо через $x_t$, $y_t$ і $z_t$ відповідно.

Оскільки функція $f$ неперервна відносно змінної $y$, то для кожного $s \in T_0$ існують базисні відкриті околи

$$V_s = \prod_{t \in T} V_t^{(s)} \qquad \text{і} \qquad W_s = \prod_{t \in T} W_t^{(s)}$$

точок $y_s$ і $z_s$ відповідно такі, що

$$R(V_s) = R(W_s), \qquad V_t^{(s)} = W_t^{(s)}$$

для кожного $t \neq s$,

$$|f(x_s, y_s) - f(x_s, y)| < \tfrac{1}{4n_0} \quad \text{і} \quad |f(x_s, z_s) - f(x_s, z)| < \tfrac{1}{4n_0}$$

для довільних $y \in V_s$ і $z \in W_s$. Зауважимо, що тоді

$$|f(x_s, y) - f(x_s, z)| > \tfrac{1}{2n_0}$$

для кожного $s \in T_0$ та довільних $y \in V_s$ і $z \in W_s$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$S(n) = \{t \in T_0 : |R(V_t)| = n\}.$$

Оскільки $|T_0| > \aleph$ і $T_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S(n)$, то існують номер $k \in \mathbb{N}$ і множина $S_0 \subseteq S(k)$ такі, що $|S_0| = \aleph^+$. Беручи до уваги регулярність кардиналу $\aleph^+$ за допомогою твердження 2.2.7 знайдемо скінченну множину $\tilde{T} \subseteq T$ і множина $\tilde{S} \subseteq S_0$ такі, що

$$|\tilde{S}| = \aleph^+ \quad \text{і} \qquad R(V_s) \cap R(V_t) = \tilde{T}$$

для довільних різних $s, t \in \tilde{S}$.

Оскільки $p(Y) \leq \aleph$, то сім'я $(V_s : s \in \tilde{S})$ не є точково скінченною, тобто існують $\tilde{y} \in Y$ і зліченна множина $\tilde{R} \subseteq \tilde{S} \setminus \tilde{T}$ такі, що $\tilde{y} \in V_s$ для кожного $s \in \tilde{R}$. Простір $X$ зліченно компактний, тому, згідно з твердженням 3.3.1, сім'я $(x_s : s \in \tilde{R})$ має точку накопичення $\tilde{x}$. Використовуючи неперервність функції $f$ відносно змінної $y$ знайдемо базисний окіл $\tilde{V}$ точки $\tilde{y}$ в просторі $Y$ такий, що

$$|f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{x}, y)| < \tfrac{1}{4n_0}$$

для кожного $y \in \tilde{V}$.

Зауважимо, що множина $R_0 = \tilde{R} \setminus R(\tilde{V})$ також зліченна, як різниця зліченної і скінченної множин, і точка $\tilde{x}$ є точкою накопичення сім'ї $(x_s : s \in R_0)$. Розглянемо точку $\tilde{z} \in Y$, яка означається наступним чином:

$$\tilde{z}(t) = \begin{cases} z_t(t), \text{ якщо } & t \in R_0; \\ \tilde{y}(t), \text{ якщо } & t \notin R_0. \end{cases}$$

Зафіксуємо $s \in R_0$ і переконаймося, що $\tilde{z} \in W_s$. Зрозуміло, що для цього достатньо перевірити, що $\tilde{z}(t) \in W_t^{(s)}$ для кожного $t \in R(W_s) = R(V_s)$.

Нехай $t \in R(V_s) \setminus R_0$. Тоді $\tilde{z}(t) = \tilde{y}(t)$, а $\tilde{y} \in V_s$, адже $s \in R_0 \subseteq \tilde{R}$. Тому

$$\tilde{z}(t) = \tilde{y}(t) \in V_t^{(s)} = W_t^{(s)},$$

адже $t \neq s$ і $V_t^{(s)} = W_t^{(s)}$.

Тепер нехай $t \in R(V_s) \cap R_0$. Зауважимо, що оскільки

$$V_t \neq W_t \qquad \text{і} \qquad V_r^{(t)} = W_r^{(t)}$$

для всіх $r \neq t$, то $V_t^{(t)} \neq W_t^{(t)}$, тому

$$t \in R(V_t) = R(W_t).$$

Отже,

$$t \in R(V_s) \cap R(V_t) \cap R_0.$$

Але $t, s \in \tilde{R}$, і, якщо $t \neq s$, то $R(V_s) \cap R(V_t) = \tilde{T}$, а $R_0 \subseteq \tilde{R} \subseteq \tilde{S} \setminus \tilde{T}$, звідки легко вивести, що

$$R(V_s) \cap R(V_t) \cap R_0 = \emptyset.$$

Тоді $t = s$, тобто $R(V_s) \cap R_0 = \{s\}$, і

$$\tilde{z}(s) = z_s(s) \in W_s^{(s)},$$

адже $W_s$ є околом точки $z_s$.

Отже, $\tilde{z} \in W_s$ для кожного $s \in R_0$, тому

$$\tilde{z} \in \bigcap_{s \in R_0} W_s.$$

Нагадаємо, що $\tilde{y} \in \bigcap\limits_{s \in R_0} V_s$, тому

$$|f(x_s, \tilde{y}) - f(x_s, \tilde{z})| > \tfrac{1}{2n_0}$$

для кожного $s \in R_0$. Оскільки $\tilde{x}$ – точка накопичення сім'ї $(x_s : s \in R_0)$ і функція $f$ неперервна відносно змінної $x$, то

$$|f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{x}, \tilde{z})| \geq \tfrac{1}{2n_0}.$$

Але, з іншого боку,

$$\tilde{z} \in \tilde{V},$$

бо $\tilde{V}$ – окіл точки $\tilde{y}$ і

$$\tilde{y}|_{R(\tilde{V})} = \tilde{z}|_{R(\tilde{V})},$$

тому

$$|f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(\tilde{x}, \tilde{z})| < \tfrac{1}{4n_0},$$

що неможливо. Отже, наше припущення хибне і теорема доведена. $\square$

Тепер легко одержується наступний результат, який дає характеризацію залежності нарізно наперервних функцій на добутку двох зліченно компактних просторів

**Теорема 3.2.7.** *Нехай* $\aleph$ *– нескінченний кардинал,* $(X_s : s \in S)$ *і* $(Y_t : t \in T)$ *– дві сім'ї цілком регулярних просторів такі, що простори* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ *і* $Y = \prod\limits_{t\in T} Y_t$ *зліченно компактні,* $|T| > \aleph$ *і* $|Y_t| > 1$ *для кожного* $t \in T$*. Тоді наступні твердження рівносильні:*

$(i)$ *кожна нарізно неперервна функція* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *залежить від* $\aleph$ *координат відносно змінної* $y$*;*

$(ii)$ *кожна нарізно неперервна функція* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *залежить від* $\aleph$ *координат;*

$(iii)$ $p(X) \le \aleph$ *або* $p(Y) \le \aleph$*.*

*Доведення.* Імплікація $(i) \Rightarrow (iii)$ випливає з теореми 3.1.11.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Нехай $p(X) \le \aleph$. За твердженням 3.2.2 простір $Y$ псевдо-$\aleph_0$-компактний, тому, згідно з теоремою 3.2.3, виконується умова $(i)$. Якщо, крім того, $|S| > \aleph$, то, згідно з теоремою 3.2.6, функція $f$ залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $x$, отже, виконується $(ii)$. У випадку, коли $p(Y) \le \aleph$, міркуємо аналогічно.

Імплікація $(ii) \Rightarrow (i)$ є очевидною. $\square$

## 3.3

# Істотність деяких умов у теоремах про залежність нарізно неперервних функцій

У даному підрозділі ми наведемо приклади, які показують істотність деяких умов в теоремах про залежність від $\aleph$ координат нарізно неперервних функцій, які були отримані в попередніх двох підрозділах.

**3.3.1. Істотність умови беровості.** Розпочнемо з прикладу, який показує, що умову беровості в теоремі 3.1.18 зняти не можна.

Нам будуть потрібним наступні допоміжні твердження.

**Твердження 3.3.1.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $\mathcal{U}$ – нескінченна локально скінченна сім'я непорожніх відкритих множин в $X$. Тоді існує така сім'я $\mathcal{V}$ непорожніх попарно неперетинних відкритих в $X$ множин, що $|\mathcal{V}| = |\mathcal{U}|$.*

*Доведення.* Без обмежень загальності ми можемо вважати, що

$$\mathcal{U} = (U_\alpha : 0 \le \alpha < \beta),$$

де $\beta$ – перший ординал потужності $|\mathcal{U}|$. Індукцією відносно $\alpha$ побудуємо сім'ю

$$\mathcal{V} = (V_\alpha : 0 \le \alpha < \beta)$$

непорожніх попарно неперетинних відкритих в $X$ множин $V_\alpha$ таку, що множина

$$A_\alpha = \{\xi < \beta : V_\alpha \bigcap U_\xi \ne \emptyset\}$$

є скінченною для кожного $\alpha < \beta$.

Візьмемо довільну точку $x_0 \in U_0$ і виберемо такий відкритий окіл $V_0$ точки $x_0$, що множина

$$A_0 = \{\alpha < \beta : V_0 \cap U_\alpha \ne \emptyset\}$$

скінченна.

Нехай $0 < \alpha < \beta$. Припустимо, що попарно неперетинні множини $V_\xi$ при $\xi < \alpha$ вже побудовані, причому всі множини $A_\xi$ скінченні. Залишилося побудувати множину $V_\alpha$ так, що множина $A_\alpha$ скінченна.

Зауважимо, що

$$\left|\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\right| < |\beta|.$$

Справді, якщо $\alpha$ скінченний ординал, то

$$\left|\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\right| < \aleph_0 \le |\beta|.$$

Якщо ж $\alpha$ нескінченний ординал, то

$$\left|\bigcup_{\xi<\alpha} A_\xi\right| \le \aleph_0 \cdot |\alpha| = |\alpha| < |\beta|.$$

Тому існує таке $\gamma < \beta$, що $\gamma \notin \bigcup\limits_{\xi<\alpha} A_\xi$, тобто

$$U_\gamma \bigcap \left(\bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi\right) = \emptyset.$$

Візьмемо довільну точку $x_\gamma \in U_\gamma$ і виберемо відкритий окіл $V_\alpha$ точки $x_\gamma$ такий, що множина

$$A_\alpha = \{\xi < \beta : V_\alpha \bigcap U_\xi \ne \emptyset\}$$

скінченна.

Отже, сім'я $\mathcal{V} = (V_\alpha : \alpha < \beta)$ шукана. □

Зауважимо, що у випадку, коли простір $X$ регулярний, можна побудувати дискретну сім'ю $\mathcal{V}$ відповідної потужності.

**Твердження 3.3.2.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір з $p(X) \le \aleph$ і $Y$ – всюди щільна в $X$ множина. Тоді простір $Y$ з індукованою з $X$ топологією є псевдо-$\aleph^+$-компактним.*

*Доведення.* Нехай $\mathcal{U}$ – довільна локально скінченна сім'я непорожніх відкритих в $Y$ множин. Нам достатньо довести, що $|\mathcal{U}| \le \aleph$.

Згідно з твердженням 3.3.1, існує сім'я

$$\mathcal{V} = (V_i : i \in I)$$

потужності $|I| = |\mathcal{U}|$, яка складається з попарно неперетинних непорожніх відкритих в $Y$ множин $V_i$. Для кожного $i \in I$ виберемо непорожню відкриту множину $U_i$ в $X$ таку, що

$$U_i \cap Y = V_i.$$

Оскільки $\overline{Y} = X$, то сім'я $(U_i : i \in I)$ також складається з попарно неперетинних множин. Зокрема, сім'я $(U_i : i \in I)$ є точково скінченною. Тому

$$|I| \leq p(X) \leq \aleph,$$

отже, $|\mathcal{U}| \leq \aleph$. $\square$

Тепер перейдемо до розгляду прикладу, який є основним результатом даного пункту.

**Теорема 3.3.3.** *Нехай $S$ – довільна непорожня множина, $Y = [0,1]^S$, $X = C_p(Y)$ – простір неперервних функцій на $Y$ з топологією поточкової збіжності і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – функція обчислення, тобто $f(x,y) = x(y)$. Тоді*

*(i) $f$ є нарізно неперервною функцією;*

*(ii) $X$ псевдо-$\aleph_1$-компактний;*

*(iii) $\aleph^+$ є калібром топологічного простору $Y$ для довільного нескінченного кардиналу $\aleph$;*

*(iv) $S$ – найменша множина, на якій зосереджена функція $f$.*

*Доведення.* $(i)$. Неперервність функції $f$ відносно змінної $x$ випливає з того, що простір $X$ складається з неперервних функцій на просторі $Y$. А неперервність функції $f$ відносно змінної $y$ випливає з того, що топологія простору $X$ – це топологія поточкової збіжності.

$(ii)$. Оскільки для кожного $n \in \mathbb{N}$ простір $\mathbb{R}^n$ сепарабельний, то з тверджень 2.3.10 і 2.3.11 випливає, що $p(\mathbb{R}^n) \leq \aleph_0$. Тоді $p(\mathbb{R}^Y) \leq \aleph_0$, згідно з наслідком 2.3.7. Зауважимо, що простір $X$ є всюди щільним підпростором простору $\mathbb{R}^Y$. Тепер з твердження 3.3.2 випливає, що $X$ псевдо-$\aleph_1$-компактний.

$(iii)$. Нехай $\aleph$ – довільний нескінченний кардинал. Як і в попередніх міркуваннях, для кожного $n \in \mathbb{N}$ простір $[0,1]^n$ є сепарабельним. Тому $\aleph^+$ є калібром топологічного простору $[0,1]^n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Отже, $\aleph^+$ є калібром топологічного простору $Y = [0,1]^S$, згідно з наслідком 2.3.9.

$(iv)$. Зафіксуємо $s \in S$. Позначимо через $x_s$ функцію з $X$, яка визначається у такий спосіб: $x_s(y) = y(s)$ для кожного $y \in Y$. Виберемо довільні точки $y_s, z_s \in Y$ такі, що

$$y_s|_{S \setminus \{s\}} = z_s|_{S \setminus \{s\}} \qquad \text{і} \qquad y_s(s) \neq z_s(s).$$

Тоді

$$f(x_s, y_s) \neq f(x_s, z_s).$$

Тому, згідно з твердженням 3.1.8, $s \in S_0$, де $S_0$ найменша множина, на якій зосереджена функція $f$ відносно змінної $y$. Отже, $S_0 = S$. $\square$

**Зауваження 3.3.4.** Для довільного нескінченного кардиналу $\aleph$, взявши $S$ так, щоб $|S| > \aleph$, одержимо приклад нарізно неперервної функції на добутку просторів $X$ і $Y$, де $X$ псевдо-$\aleph_1$-компактний і $\aleph^+$ є калібром простору $Y$ (зокрема, $p(Y) \leq \aleph$), яка не залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. Отже, по-перше, необхідні умови залежності від певної кількості координат нарізно неперервних функцій, викладені в теоремі 3.1.11, не є достатніми; по-друге, в теоремі 3.1.17 умову беровості простору $X$ зняти не можна, навіть якщо умову псевдо-$\aleph^+$-компактності підсилити до псевдо-$\aleph_1$-компактності.

### 3.3.2. Простір $Q_\aleph$ та його властивості.

Для побудови наступних прикладів, які вказують на істотність тих чи інших умов в теоремах про залежність, в даному пункті ми розглянемо потрібний нам модельний приклад простору $Q_\aleph$ і дослідимо його властивості

Спочатку ми доведемо одну локальну властивість просторів з $p(X) \leq \aleph$.

**Твердження 3.3.5.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір з $p(X) \leq \aleph$ і $\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$ – сім'я відкритих непорожніх множин в $X$ потужності $|I| > \aleph$. Тоді існує точка $x_0 \in X$ така, що для довільного околу $U$ точки $x_0$ в $X$ множина*

$$\{i \in I : U_i \cap U \neq \emptyset\}$$

*має потужність, більшу ніж $\aleph$.*

*Доведення.* Нехай це не так, тобто для довільного $x \in X$ існує відкритий окіл $V_x$ точки $x$ такий, що потужність множини

$$\{i \in I : U_i \cap V_x \neq \emptyset\}$$

не перевищує $\aleph$.

Позначимо через $\beta$ перший ординал потужності $\aleph^+$. З допомогою трансфінітної індукції побудуємо сім'ю

$$(G_\alpha : 0 \leq \alpha < \beta)$$

відкритих непорожніх попарно неперетинних множин $G_\alpha$ таких, що всі множини

$$I_\alpha = \{i \in I : U_i \cap G_\alpha \neq \emptyset\}$$

мають потужність, яка не перевищує $\aleph$. А це суперечитиме умові $p(X) \leq \aleph$.

Візьмемо довільне $i_0 \in I$ і точку $x_0 \in U_{i_0}$. Позначимо

$$G_0 = V_{x_0} \cap U_{i_0}.$$

Зрозуміло, що множина

$$I_0 = \{i \in I : U_i \cap G_0 \neq \emptyset\}$$

має потужність, яка не перевищує $\aleph$.

Припустимо, що множини $G_\alpha$ при $0 \leq \alpha < \gamma < \beta$ вже побудовані, причому всі множини $I_\alpha$ мають потужність, що не перевищує $\aleph$. Побудуємо множину $G_\gamma$ з відповідними властивостями. Зауважимо, що $|\gamma| \leq \aleph$ і

$$|\bigcup_{\alpha<\gamma} I_\alpha| \leq |\gamma| \cdot \aleph \leq \aleph^2 = \aleph < |I|.$$

Тому існує таке $i_\gamma \in I$, що

$$U_{i_\gamma} \cap G_\alpha = \emptyset$$

для кожного $\alpha < \gamma$. Візьмемо довільну точку $x_\gamma \in U_{i_\gamma}$ і позначимо

$$G_\gamma = U_{i_\gamma} \cap V_{x_\gamma}.$$

Оскільки $G_\gamma \subseteq V_{x_\gamma}$, то потужність множини $I_\gamma$ не перевищує $\aleph$. □

Тепер перейдемо до розгляду модельного простору.

**Означення 3.3.6.** *Для довільного нескінченного кардиналу $\aleph$ позначимо через $D_\aleph$ дискретний простір потужності $\aleph^+$ і*

$$Q_\aleph = D_\aleph \cup \{\infty\},$$

*причому околом точки $\infty$ в просторі $Q_\aleph$ будуть всі множини виду*

$$A \cup \{\infty\},$$

*де $A \subseteq D_\aleph$ і $|D_\aleph \setminus A| \leq \aleph$.*

**Твердження 3.3.7.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал. Тоді*

*a) простір $Q_\aleph$ псевдо-$\aleph^+$-компактний;*

*b) кожна підсім'я потужності $\aleph$ сім'ї $(\{d\} : d \in D_\aleph)$ є дискретною, зокрема, локально скінченною в $Q_\aleph$;*

*c) простір $P_\aleph \times Q_\aleph$ псевдо-$\aleph^+$-компактний.*

*Доведення.* *a*). Нехай $\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$ – локально скінченна сім'я непорожніх відкритих в $Q_\aleph$ множин $U_i$. Покажемо, що $|I| \leq \aleph$.

Виберемо окіл $U$ точки $\infty$ такий, що множина

$$J = \{i \in I : U_i \cap U \neq \emptyset$$

скінченна. Зауважимо, що множина $B = D_\aleph \setminus U$ має потужність, яка не перевищує $\aleph$. Крім того, для кожного $b \in B$ множина

$$I_b = \{i \in I : b \in U_i\}$$

скінченна. Зрозуміло, що

$$I = J \bigcup (\bigcup_{b \in B} I_b).$$

Тому

$$|I| \leq \aleph_0 + \aleph \cdot \aleph_0 \leq \aleph.$$

$b$). Нехай $\mathcal{U}$ – довільна підсім'я потужності $\aleph$ сім'ї $(\{d\} : d \in D_\aleph)$. Тобто існує множина $A \subseteq D_\aleph$ потужності $\aleph$ така, що

$$\mathcal{U} = \{\{d\} : d \in A\}.$$

Зауважимо, що дискретність сім'ї $\mathcal{U}$ означає, що для довільної точки $x \in Q_\aleph$ існує окіл $U$ цієї точки такий, що множина $A \cap U$ містить не більше одного елемента. Справді, у випадку $x \in D_\aleph$ достатньо взяти $U = \{x\}$, а у випадку $x = \infty$ взяти

$$U = (D_\aleph \setminus A) \cup \{\infty\}$$

$c$). Розглянемо довільну локально скінченну сім'ю

$$\mathcal{W} = (W_i : i \in I)$$

непорожніх базисних відкритих множин $W_i = U_i \times V_i$ у просторі

$$R = P_\aleph \times Q_\aleph,$$

де, згідно з означенням 2.3.13, простір

$$P_\aleph = \{x \in [0,1]^{\aleph^+} : |\operatorname{supp} x| \leq \aleph\}$$

наділений топологією поточкової збіжності. Нам потрібно довести, що дана сім'я має потужність $|I| \leq \aleph$.

Зауважимо, що без обмеження загальності ми можемо вважати, що $V_i = \{d_i\}$, де $d_i \in D_\aleph$, адже $D_\aleph$ – дискретнй всюди щільний підпростір простору $Q_\aleph$. Для кожного $d \in D_\aleph$ позначимо

$$I_d = \{i \in I : V_i = \{d\}\}.$$

Зрозуміло, що всі множини $I_d$ попарно неперетинні. Крім того, оскільки сім'я $\mathcal{W}$ локально скінченна в просторі $R$, то для кожного $d \in D_\aleph$ сім'я $(U_i :$

$i \in I_d$) локально скінченна в просторі $P_\aleph$. До того ж, згідно з теоремою 2.3.14, $p(P_\aleph) = \aleph_0$, зокрема, простір $P_\aleph$ псевдо-$\aleph_1$-компактний. Тому

$$|I_d| \leq \aleph_0$$

для кожного $d \in D_\aleph$.

Покажемо тепер, що множина

$$B = \{d \in D_\aleph : I_d \neq \emptyset\}$$

має потужність, яка не перевищує $\aleph$. Припустимо, що $|B| > \aleph$. Для кожного $b \in B$ виберемо довільне $i_b \in I_b$ і позначимо

$$U_b = U_{i_b} \qquad \text{і} \qquad V_b = V_{i_b}.$$

Розглянемо сім'ю

$$(U_b : b \in B).$$

Оскільки $p(P_\aleph) = \aleph_0 \leq \aleph$, то згідно з твердженням 3.3.5 існує точка $x \in P_\aleph$ така, що для довільного околу $U$ точки $x$ множина

$$B_U = \{b \in B : U \cap U_b \neq \emptyset\}$$

має потужність більшу ніж $\aleph$. Тепер доведемо, що сім'я $\mathcal{W}$ не є локально скінченною в точці $(p, \infty)$.

Нехай $V$ – довільний окіл точки $\infty$ в $Q_\aleph$. Тоді

$$|B_U \setminus V| \leq |D_\aleph \setminus V| \leq \aleph,$$

тому множина $B_0 = B_U \cap V$ має потужність, більшу ніж $\aleph$. Для кожного $b \in B_0$ маємо

$$U_b \cap U \neq \emptyset \qquad \text{і} \qquad V_b = \{b\} \subseteq V.$$

Отже,

$$B_0 \subseteq \{b \in B : (U \times V) \cap (U_b \times V_b) \neq \emptyset\}$$

і

$$\{i_b : b \in B_0\} \subseteq \{i \in I : (U \times V) \cap W_i \neq \emptyset\} = J.$$

Оскільки всі індекси $i_b$ при $b \in B_0$ є різними, адже

$$V_{i_b} = V_b = \{b\},$$

то множина $J$ нескінченна. Отже, сім'я $\mathcal{W}$ не є локально скінченною в точці $(x, \infty)$, що неможливо.

Отже, $|B| \leq \aleph$. Тоді, врахувавши, що

$$I \subseteq \bigcup_{b \in B} I_b \qquad \text{і} \qquad |I_b| \leq \aleph_0,$$

одержимо

$$|I| \leq \aleph_0 \cdot |B| \leq \aleph_0 \cdot \aleph = \aleph.$$

Отже, $R$ псевдо-$\aleph^+$-компактний. $\square$

**3.3.3. Істотність кардинальних умов в теоремах про залежність.** Спочатку ми узагальнемо побудову нарізно неперервної функції, проведену у твердженні 3.1.10.

Сім'ї

$$\mathcal{U} = (U_i : i \in I) \qquad \text{і} \qquad \mathcal{V} = (V_i : i \in I)$$

підмножин $U_i$ і $V_i$ топологічних просторів $X$ і $Y$ відповідно називатимемо *узгодженими*, якщо для довільних $x \in X$ та $y \in Y$ сім'ї

$$\mathcal{V}_x = (V_i : i \in I^x) \qquad \text{і} \qquad \mathcal{U}_y = (U_i : i \in I_y),$$

де

$$I^x = \{i \in I : x \in U_i\} \qquad \text{і} \qquad I_y = \{i \in I : y \in V_i\},$$

є локально скінченними в $Y$ і $X$ відповідно. Зрозуміло, що точково скінченні сім'ї $\mathcal{U}$ та $\mathcal{V}$ є узгодженими.

**Твердження 3.3.8.** *Нехай $X$, $Y$ – топологічні простори, $(\varphi_i : i \in I)$, $(\psi_i : i \in I)$ – сім'ї неперервних функцій $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ та $\psi_i : Y \to \mathbb{R}$ такі, що сім'ї $\mathcal{U} = (\operatorname{supp}\varphi_i : i \in I)$ та $\mathcal{V} = (\operatorname{supp}\psi_i : i \in I)$ узгоджені, $(f_i : i \in I)$ – сім'я нарізно неперервних функцій $f_i : X \times Y \to \mathbb{R}$. Тоді функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$, яка визначається формулою*

$$f(x,y) = \sum_{i \in I} \varphi_i(x)\psi_i(y)f_i(x,y),$$

*є нарізно неперервною.*

*Доведення.* Зафіксуємо $x_0 \in X$ і позначимо

$$I_0 = \{i \in I : x_0 \in \operatorname{supp}\varphi_i\}.$$

Оскільки сім'ї $\mathcal{U}$ та $\mathcal{V}$ узгоджені, то сім'я

$$(\operatorname{supp}\psi_i : i \in I_0)$$

локально скінченна на $Y$. Тому, згідно з твердженням 2.4.5, сума

$$\sum_{i \in I_0} \varphi_i(x_0)\psi_i(y)f_i(x_0,y)$$

неперервних на $Y$ функцій

$$\varphi_i(x_0)\psi_i(y)f_i(x_0,y),$$

носії яких утворюють локально скінченну сім'ю, також є неперервною на $Y$ функцією. З іншого боку,

$$f(x_0,y) = \sum_{i \in I_0} \varphi_i(x_0)\psi_i(y)f_i(x_0,y).$$

Тому функція $f^{x_0}$, $f^{x_0}(y) = f(x_0, y)$, є неперервною на $Y$. Отже, функція $f$ неперервна відносно змінної $y$.

Аналогічно перевіряється неперервність функції $f$ відносно змінної $x$. □

Наступний результат дає можливість отримати потрібні нам приклади.

**Теорема 3.3.9.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $Z = [0,1]^S$, де $|S| = \aleph^+$, $X_1 = P_\aleph$, $Y_1 = Q_\aleph \times Z$ і $X_2 = Q_\aleph$, $Y_2 = P_\aleph \times Z$. Тоді існує функція*

$$f : P_\aleph \times Q_\aleph \times Z \to \mathbb{R},$$

*яка задовольняє наступні умови:*

*(i) функція $f$ нарізно неперервна на $X_1 \times Y_1$;*

*(ii) функція $f$ нарізно неперервна на $X_2 \times Y_2$;*

*(iii) $S$ – найменша множина, на якій зосереджена функція $f$ відносно змінної $z$.*

*Доведення.* Без обмеження загальності ми можемо розглядати простори $P_\aleph$ і $Q_\aleph$ у наступному вигляді

$$P_\aleph = \{x \in [0,1]^S : |\operatorname{supp} x| \le \aleph\} \qquad \text{і} \qquad Q_\aleph = S \cup \{\infty\},$$

де $S = D_\aleph$ – дискретний підпростір простору $Q_\aleph$.

Розглянемо сім'ї

$$(\varphi_s : s \in S), \qquad (\psi_s : s \in S) \qquad \text{і} \qquad (f_s : s \in S)$$

функцій $\varphi_s : P_\aleph \to \mathbb{R}$,

$$\varphi_s(p) = p(s),$$

$\psi_s : Q_\aleph \to \mathbb{R}$,

$$\psi_s(q) = \begin{cases} 0, & q \ne s; \\ 1, & q = s, \end{cases}$$

і $f_s : Z \to \mathbb{R}$,

$$f_s(z) = z(s).$$

Оскільки простори $P_\aleph$ і $Z$ наділені топологією поточкової збіжності, то всі функції $\varphi_s$ і $f_s$ неперервні. Крім того, оскільки кожна точка $s \in S$ ізольвана в просторі $Q_\aleph$, то всі функції $\psi_s$ також неперервні. Разом з тим, для кожного $s \in S$ позначимо

$$U_s = \operatorname{supp} \varphi_s \qquad \text{і} \qquad V_s = \operatorname{supp} \psi_s = \{s\}.$$

Покажемо, що функція $f : P_{\aleph} \times Q_{\aleph} \times Z \to \mathbb{R}$,

$$f(p,q,z) = \sum_{s\in S} \varphi_s(p)\psi_s(q)f_s(z)$$

є шуканою, тобто задовольняє умови $(i) - (iii)$.

$(i)$. Зауважимо, що для кожного $s \in S$ функція $\phi_s : Y_1 \to \mathbb{R}$,

$$\phi_s(q,z) = \psi_s(q),$$

де $q \in Q_{\aleph}$ і $z \in Z$, і функція $g_s : X_1 \times Y_1 \to \mathbb{R}$,

$$g_s(x,y) = f_s(z),$$

де $x \in X_1$ $y = (q,z) \in Y_1 = Q_{\aleph} \times Z$, є неперервними, причому

$$\operatorname{supp} \phi_s = V_s \times Z.$$

Оскільки функція $f : X_1 \times Y_1 \to \mathbb{R}$ для кожної точки $(x,y) \in X_1 \times Y_1$ означається формулою

$$f(x,y) = \sum_{s\in S} \varphi_s(x)\phi_s(y)g_s(x,y),$$

то, згідно з твердженням 3.3.8, достатньо показати, що сім'ї

$$(U_s : s \in S) \qquad \text{і} \qquad (V_s \times Z : s \in S)$$

узгоджені.

Зафіксуємо точку $x \in X_1 = P_{\aleph}$ і позначимо

$$S^x = \{s \in S : x \in U_s\}.$$

Беручи до уваги означення простору $P_{\aleph}$ і функцій $\varphi_s$, одержимо, що

$$S^x = \{s \in S : x(s) \neq 0\} = \operatorname{supp} x,$$

і тому, $|S^x| \leq \aleph$. З твердження 3.3.7 $c$) випливає, що сім'я

$$(V_s : s \in I^x)$$

локально скінченна в просторі $Q_{\aleph}$. А з твердження 2.4.4 випливає, що і сім'я

$$(V_s \times Z : s \in I^x)$$

локально скінченна в просторі $Y_1$.

Тепер зафіксуємо точку $y = (q, z) \in Y_1 = Q_{\aleph} \times Z$ і позначимо

$$S_y = \{s \in S : y \in V_s \times Z\}.$$

Зрозуміло, що

$$S_y = \{s \in S : q \in V_s\} = \{s \in S : q \in \{s\}\},$$

тобто $S_y = \emptyset$, якщо $q = \infty$, і $S_y = \{q\}$, якщо $q \in S$. Тому сім'я

$$(U_s : s \in S_y)$$

скінченна, зокрема, локально скінченна в $X_1$.

$(ii)$. Міркуючи аналогічно, як при доведенні $(i)$, легко показати, що достатньо встановити, що сім'ї

$$(V_s : s \in S) \qquad \text{і} \qquad (U_s \times Z : s \in S)$$

підмножин топологічних просторів $X_2$ і $Y_2$ узгоджені.

Далі для кожної точки $x \in X_2 = Q_{\aleph}$ маємо, що

$$S^x = \{s \in S : x \in V_s\} = \{s \in S : x \in \{s\}\},$$

тобто $S^x = \emptyset$, якщо $x = \infty$, і $S^x = \{x\}$, якщо $x \in S$. Тому сім'я

$$(U_s \times Z : s \in S^x)$$

скінченна, зокрема, локально скінченна в $Y_2$.

Тепер для кожної точки $y = (p, z) \in Y_2 = P_{\aleph} \times Z$ маємо, що

$$S_y = \{s \in S : y \in U_s \times Z\} = \{s \in S : p \in U_s\} = \{s \in S : p(s) \neq 0\} = \operatorname{supp} p.$$

Тому, $|S_y| \leq \aleph$ і з твердження 3.3.7 $c$) випливає, що сім'я

$$(V_s : s \in I^x)$$

локально скінченна в просторі $X_2$.

$(iii)$. Для кожного $s \in S$ позначимо через $p_s$ характеристичну функцію множини $\{s\}$ на $S$. Зауважимо, що $p_s \in P_{\aleph} \cap Z$. Крім того, нехай $z_0 \equiv 0$ на $S$. Тоді

$$f(p_s, s, p_s) = 1 \qquad \text{і} \qquad f(p_s, s, z_0) = 0,$$

причому

$$p_s|_{S \setminus \{s\}} = z_0|_{S \setminus \{s\}}.$$

Отже, згідно з твердженням 3.1.8, $S$ є найменшою множиною, на якій зосереджена функція $f$ відносно змінної $z$. $\square$

**Зауваження 3.3.10.** 1) Згідно з теоремою 2.3.14, простір $X_1$ $\aleph$-компактний з $p(X_1) \leq \aleph_0$. Крім того, простори $Y_1$ і $X_1 \times Y_1$ є псевдо-$\aleph^+$компактними. Тому даний приклад показує, що в теоремі 3.1.14 умову $(III_\aleph)$ на простір $X$ не можна послабити до найсильнішої з властивостей другого порядку $(II_{\aleph_0})$, додаючи навіть $\aleph$-компактність, зберігаючи всі необхідні умови залежності. Аналогічно в теоремі 3.2.3 псевдо-$\aleph_0$-компактність простору $Y$ не можна послабити до псевдо-$\aleph^+$-компактності.

2) З іншого боку, берівський простір $X_2$ псевдо-$\aleph^+$-компактний, а $Y_2$ є $\aleph$-компатним з $p(Y_2) \leq \aleph$. Тому зліченну компактність простору $X$ в теоремі 3.2.6 не можна послабити до псевдо-$\aleph^+$-компактності, навіть дещо підсилюючи умови на простір $Y$. Аналогічно в теоремі 3.2.6 умову $(III_\aleph)$ на $Y$ не можна послабити до $(\mathrm{II}_{\aleph_0})$.

## 3.4 Заключні зауваження до розділу 3

Перший результат про залежність нарізно неперервних функцій на добутку двох тихоновських кубів незліченної ваги у неявному вигляді на основі зліченного варіанта леми Шаніна був одержаний в роботі [52, теорема 9] при встановленні того, що така нарізно неперервна функція не може мати одноточкову множину точок розриву. Цей результат давав негативну відповідь на одне питання З. Пьотровського [36] і у загальнішій редакції одержаний в [53].

У роботі [50] з допомогою теореми Гьюітта – Марчевського – Пондіцері (див. [16, теорема 2.3.15]), яка дає оцінку на щільність топологічного добутку, доведено, що нарізно неперервна функція двох змінних, кожна з яких пробігає добуток компактних просторів щільності, не більшої ніж $\aleph$, залежить від $\aleph$ координат. З допомогою цього результату там було охарактеризовано множини точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку двох просторів, кожний з яких є добутком метризовних компактів.

Загальний підхід до вивчення залежності нарізно неперервних функцій двох змінних, який базувався на використанні властивостей $(I_\aleph) - (III_\aleph)$, викладений у роботі [56], основними результатами якої були теореми 3.1.11, 3.1.14, 3.2.3, 3.2.6 і теорема 3.2.7, яка характеризує залежність для зліченно компактних добутків. Подальший розвиток даних досліджень був проароблений у статті [54], де були одержані теореми 3.1.15, 3.1.17 і 3.1.18, які уточнюють достатні умови залежності, а також встановленні основні результати підрозділу 3.3, які вказують на істотність різних умов в теоремах про залежність.

Окреме місце серед згаданих на початку розділу публікацій з даної тематики займає робота [51], в якій вивчалася залежність від певної кількості координат нарізно неперервних функцій багатьох змінних. У ній виявлено, що у випадку, коли кожна змінна є добутком метризовних множників, кожна нарізно неперервна функція залежить від певної кількості координат в тому і тільки в тому випадку, коли такою ж є кожна неперервна функція. З допомогою цього результату там одержано опис множини точок розриву нарізно неперервних функцій на добутку $n$ просторів, кожний з яких є добутком сепарабельних метризовних множників. Крім того, було встановлено, що якщо число $\aleph$ є калібром топологічного добутку $X_1 \times \cdots \times X_n$, то кожна нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат.

## 3.5 Вправи до розділу 3

**Вправа 3.5.1.** *Нехай* $(X_s : s \in S)$ *– сім'я топологічних просторів,* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $T \subseteq S$, $Z$ *– топологічний простір і* $f : X \to Z$ *– відображення, зосереджене на множині* $T$. *Доведіть, що*

(a) *для довільних точок* $x, y \in X$ *з* $x|_T = y|_T$ *відображення* $f$ *неперервне в точці* $x$ *тоді і тільки тоді, коли відображення* $f$ *неперервне в точці* $y$;

(b) *якщо* $S \setminus T \neq \emptyset$ *і всі простори* $X_s$ *– нетривіальні, то множина точок розриву відображення* $f$ *не може бути одноточковою.*

Функція $f : X \to \mathbb{R}$ на топологічному просторі $X$ називається *функцією першого класу Бера*, якщо існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n : X \to \mathbb{R}$, яка поточково на $X$ збігається до функції $f$.

**Вправа 3.5.2.** *Доведіть, що кожна функція першого класу Бера* $f : [0,1]^S \to \mathbb{R}$, *де* $S$ *– незліченна множина, не може мати одноточкову множину точок розриву.*

*Вказівка.* Використайте теорему 1.3.6 і вправу 3.5.1.

**Вправа 3.5.3.** *Нехай* $S$ *– незліченна множина,* $X_s = [0,1]$ *для кожного* $s \in S$, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Y = \mathbb{R}$ *і* $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *– нарізно неперервне відображення. Використовуючи теорему 1.3.6 і вправу 3.5.1, доведіть, що множина точок розриву функції* $f$ *не може бути одноточковою.*

*Вказівка.* Використайте сепарабельність простору $Y$ і доведіть, що функція $f$ залежить від зліченної кількості координат.

**Вправа 3.5.4.** *Нехай* $(X_s : s \in S)$ *– сім'я топологічних просторів,* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $T \subseteq S$, $Z$ *– топологічний простір і* $f : X \to Z$ *– неперервне відображення, зосереджене на множині* $T$. *Доведіть, що відображення* $g : \prod\limits_{s\in T} X_s \to Z$, *яке для кожного* $x \in X$ *задовольняє рівність*

$$f(x) = g(x|_T),$$

*є неперервним.*

**Вправа 3.5.5.** *Нехай* $(X_s : s \in S)$ *і* $(Y_t : t \in T)$ *– сім'ї топологічних просторів,* $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$, $Y = \prod\limits_{t\in T} Y_t$, $S_0 \subseteq S$, $T_0 \subseteq T$, $X_0 = \prod\limits_{s\in S_0} X_s$, $Y_0 = \prod\limits_{t\in T_0} Y_t$, $Z$ *– топологічний простір і* $f : X \times Y \to Z$ *– нарізно неперервне відображення, зосереджене на множині* $S_0 \cup T_0$*. Доведіть, що відображення* $g : X_0 \times Y_0 \to Z$*, яке для довільних* $x \in X$ *і* $y \in Y$ *задовольняє рівність*

$$f(x, y) = g(x|_{S_0}, y|_{T_0}),$$

*є нарізно неперервним.*

**Вправа 3.5.6.** *Нехай* $\alpha$ *– довільний ординал і* $(A_\xi : 0 \le \xi < \alpha)$ *– строго зростаюча послідовність множин. Доведіть, що*

(*a*) *існує цілковитий порядок на множині* $A = \bigcup\limits_{0\le\xi<\alpha} A_\xi$ *такий, що якщо* $\xi < \eta < \alpha$, $x \in A_\xi$ *і* $y \in A_\eta$, *то* $x < y$;

(*b*) *якщо всі множини* $A_\xi$ *не більш ніж зліченні, то множина* $A$ *має потужність, яка не перевищує* $\aleph_1$.

*Вказівка.* (*a*). За допомогою теореми Цермело (теореми 2.2.1) цілком упорядкуйте кожну множину $B_\xi = A_\xi \setminus \bigcup\limits_{0\le\eta<\xi} A_\eta$ і розгляньте на множині $A$ лексикографічний порядок, тобто $x < y$ в множині $A$, якщо $x \in B_\eta$, $y \in B_\xi$ і $\eta < \xi$, або $x, y \in B_\xi$ і $x < y$ в множині $B_\xi$.

(*b*). Використайте рівність

$$\beta = \lim_{\xi<\alpha} \beta_\xi = \sup_{\xi<\alpha} \beta_\xi,$$

де $\beta$ і $\beta_\xi$ – це порядкові числа, які відповідають порядковим типам множин $A$ і $A_\xi$ відповідно у порядку з (*a*).

**Вправа 3.5.7.** *Нехай* $\mathfrak{X}$ *– клас топологічних просторів такий, що для довільної* $\aleph_1$*-сім'ї* $(X_s : s \in S)$ *просторів* $X_s \in \mathfrak{X}$ *кожна неперервна функція* $f : \prod\limits_{s\in S} X_s \to \mathbb{R}$ *залежить від зліченної кількості координат. Доведіть, що для довільної сім'ї* $(X_s : s \in S)$ *просторів* $X_s \in \mathfrak{X}$ *кожна неперервна функція* $f : \prod\limits_{s\in S} X_s \to \mathbb{R}$ *залежить від зліченної кількості координат.*

*Вказівка.* Міркуйте від супротивного. Візьміть найменший ординал $\alpha$ такий, що існують сім'я $(X_\xi : 0 \le \xi < \alpha)$ просторів $X_\xi \in \mathfrak{X}$ і неперервна функція $f : \prod\limits_{0\le\xi<\alpha} X_\xi \to \mathbb{R}$, яка не залежить від зліченної кількості координат. Нехай $a = (a_\xi)_{0\le\xi<\alpha} \in \prod\limits_{0\le\xi<\alpha} X_\xi$, і для кожного $\xi < \alpha$ множина $A_\xi$

є найменшою множиною, на якій зосереджена функція $f_\xi : \prod\limits_{0\le\eta<\xi} X_\eta \to \mathbb{R}$,

$$f_\xi(y) = f(y, (a_\eta)_{\xi\le\eta<\alpha})$$

Далі використайте вправи 3.5.4, 3.5.6($b$) і властивість класу $\mathfrak{X}$.

**Вправа 3.5.8.** *Нехай $\mathfrak{X}$ – клас топологічних просторів такий, що для довільних $\aleph_1$-сімей $(X_s : s \in S)$ і $(Y_t : t \in T)$ просторів $X_s, Y_t \in \mathfrak{X}$ кожна нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{s\in S} X_s \times \prod\limits_{t\in T} Y_t \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат. Доведіть, що для довільних сімей $(X_s : s \in S)$ і $(Y_t : t \in T)$ просторів $X_s, Y_t \in \mathfrak{X}$ кожна нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{s\in S} X_s \times \prod\limits_{t\in T} Y_t \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат.*

*Вказівка.* Міркуйте від супротивного. Візьміть найменший ординал $\alpha$ такий, що існують сім'ї $(X_\xi : 0 \le \xi < \alpha)$ і $(Y_\xi : 0 \le \xi < \alpha)$ просторів $X_\xi, Y_\xi \in \mathfrak{X}$ і нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{0\le\xi<\alpha} X_\xi \times \prod\limits_{0\le\xi<\alpha} Y_\xi \to \mathbb{R}$, яка не залежить від зліченної кількості координат. Далі міркуйте аналогічно, як при розв'язуванні вправи 3.5.7.

**Вправа 3.5.9.** *Використовуючи теорему Гьюїтта-Марчевського-Пондіцері ([16, теорема 2.3.15]) і теорему 3.1.5 доведіть, що сепарабельні простори входять в клас $\mathfrak{X}$ топологічних просторів таких, що для довільних $\aleph_1$-сімей $(X_s : s \in S)$ і $(Y_t : t \in T)$ просторів $X_s, Y_t \in \mathfrak{X}$ кожна нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{s\in S} X_s \times \prod\limits_{t\in T} Y_t \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат.*

**Вправа 3.5.10.** *Нехай $X$ і $Y$ – добутки сімей $(X_s : s \in S)$ і $(Y_t : t \in T)$ сепарабельних просторів $X_s$ і $Y_t$, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція і $E$ – множина точок розриву функції $f$. Доведіть, що існують не більш ніж зліченні множини $S_0 \subseteq T$ і $T_0 \subseteq T$ і нарізно неперервна функція $f_0 : X_0 \times Y_0 \to \mathbb{R}$ така, що*

$$E = p^{-1}(E_0),$$

*де $X_0 = \prod\limits_{s\in S_0} X_s$, $Y_0 = \prod\limits_{t\in T_0} Y_t$, $p : X \times Y \to X_0 \times Y_0$, $p(x, y) = (x|_{S_0}, y|_{T_0})$, і $E_0$ множина точок розриву функції $f_0$.*

*Вказівка.* Використайте вправи 3.5.9, 3.5.8, 3.5.5 і 3.5.1.

**Вправа 3.5.11.** *Нехай $X$, $Y$ і $Z$ – добутки сімей $(X_s : s \in S)$, $(Y_t : t \in T)$ і $(Z_r : r \in R)$ цілком регулярних просторів $X_s$, $Y_t$ і $Z_r$ такі, що множина $S \cup T \cup R$ незліченна і кожна нарізно неперервна функція*

*$f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат. Доведіть, що принаймні два множники з $X$, $Y$ і $Z$ мають зліченну точково скінченну клітковість.*

*Вказівка.* Від супротивного. Припустіть, наприклад, що $p(X) > \aleph_0$ і $p(Y) > \aleph_0$. Розгляньте простір $\tilde{Y} = Y \times Z$ і застосуйте теорему 3.1.11 до добутку просторів $X$ і $\tilde{Y}$.

**Вправа 3.5.12.** *Нехай $X$ – добуток сім'ї $(X_s : s \in S)$ топологічних просторів $X_s$, $Y$, $Z$ – топологічні простори і $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Доведіть, що множина $T$ усіх індексів $s \in S$ таких, що існують $x'_s, x''_s \in X$, $y_s \in Y$ і $z_s \in Z$, які задовольняють умову*

$$x'_s|_{S\setminus\{s\}} = x''_s|_{S\setminus\{s\}} \qquad \text{і} \qquad f(x'_s, y_s, z_s) \neq f(x''_s, y_s, z_s),$$

*є найменшою множиною, на якій зосереджене $f$ відносно першої змінної.*

*Вказівка.* Розгляньте асоційоване відображення і використайте твердження 3.1.8.

**Вправа 3.5.13.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, топологічний добуток $X = \prod\limits_{s \in S} X_s$ псевдо-$\aleph^+$-компактний, $Y$, $Z$ – топологічні простори, для яких $\aleph^+$ є калібром. Доведіть, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ кординат відносно першої змінної.*

*Вказівка.* Міркуйте від супротивного, подібно як при доведенні теореми 3.1.14. Розгляньте множину $T$ з вправи 3.5.12. Використовуючи неперервність відносно другої змінної, знайдіть можину $T_1 \subseteq T$ потужності $|T| > \aleph$ і елемент $y \in Y$ такі, що $y_s = y$ для кожного $s \in T_1$. Далі використайте неперервність відносно третьої змінної.

**Вправа 3.5.14.** *Нехай $X$ і $Y$ – добутки сімей $(X_s : s \in S)$ і $(Y_t : t \in T)$ сепарабельних компактних просторів і $Z$ – сепарабельний простір. Доведіть, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат відносно першої і другої змінної.*

*Вказівка.* Використайте сепарабельність простору $Z$ і теорему 3.2.7.

**Вправа 3.5.15.** *Нехай $S$ – нескінченна множина, і $X$ – добуток сім'ї $(X_s : s \in S)$ нетривіальних $T_1$-просторів. Доведіть, що довільний $\sigma$-добуток у просторі $X$ не є берівським простором.*

# Розділ 4

# ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ПЕВНОЇ КІЛЬКОСТІ КООРДИНАТ ФУНКЦІЙ НА ПІДПРОСТОРАХ ТИХОНОВСЬКИХ КУБІВ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Застосування результатів про залежність від зліченної кількості координат нарізно неперервних функцій на добутках, які були здійснені в роботах [52], [50] і [51] і, зокрема дали можливість одержати нові теореми про характеризацію множини точок розриву нарізно неперервних функцій, привели до природного бажання розширити використання залежності на випадок відображень на підпросторах тихоновських кубів. Зазначимо, що таке перенесення не могло постати як формальне переписування результатів про функції на добутках, оскільки підпростори тихоновських кубів можуть не містити $\sigma$-добутків, що, як наслідок, унеможливлює використання основних технічних інструментів, застосованих до дослідження залежності неперервних і нарізно неперервних відображень.

Даний розділ присвячений розгляду результатів робіт [33] і [59], де була розвинена техніка вивчення залежності від певної кількості координат для функцій на підпросторах тихоновських кубів і застосована до розв'язування деяких задач, пов'язаних із берівською класифікацією нарізно неперервних функцій і властивостями компактних підмножин у просторі неперервних функцій. У першому підрозділі ми викладемо власне результати про залежність для функцій із різних класів, а в наступних трьох – їх застосування разом із підготовчими фактами з відповідної тематики.

## 4.1 Залежність від певної кількості координат функцій на підпросторах тихоновських кубів

У даному підрозділі ми викладемо розроблений в статтях [33] і [59] метод дослідження залежності від певної кількості координат функцій на підпросторах тихоновських кубів. Оскільки застосування цього методу спирається на теорему Тихонова про універсальність тихоновських кубів, то ми спочатку викладемо цей результат. Потім ми подамо різні результати про залежність, які знайдуть своє застосування у наступних підрозділах.

**4.1.1. Універсальність тихоновських кубів.** Нагадаємо, що для довільної непорожньої множини $S$ топологічний простір $[0,1]^S$ називається *тихоновським кубом.* Іншими словами, тихоновський куб $[0,1]^S$ – це топологічний добуток сім'ї $(X_s)_{s\in S}$ топологічних просторів $X_s = [0,1]$.

У нашому подальшому викладі важливу роль відіграє одна добре відома властивість тихоновських кубів, яку ми розглянемо детальніше у даному пункті.

Спочатку нагадаємо кілька означень. Для топологічного простору $X$ кардинальне число

$$w(X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \ - \ \text{база простору } X\}$$

називається *вагою* простору $X$.

Відображення $f : X \to Y$ між топологічними просторами $X$ і $Y$ називається *гомеоморфним вкладенням*, якщо $f$ неперервне та ін'єктивне і обернене відображення $f^{-1} : f(X) \to X$ також неперервне.

Топологічний простір $X$ називається *універсальним* у деякому класі $\mathcal{K}$ топологічних просторів, якщо $X \in \mathcal{K}$ і для кожного простору $Y \in \mathcal{K}$ існує гомеоморфне вкладення $f : Y \to X$.

Наступна теорема є основним результатом даного пункту (див. [16, теорема 2.3.23]).

**Теорема 4.1.1.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал і $S$ – множина потужності $\aleph$. Тоді тихоновський куб $X = [0,1]^S$ є універсальним в класі усіх цілком регулярних просторів топологічної ваги, що не перевищує $\aleph$.*

*Доведення.* Зрозуміло, що простір $X$ цілком регулярний, як добуток цілком регулярних просторів $X_s = [0,1]$ (див. [16, теорема 2.3.11]).

Покажемо, що $w(X) \leq \aleph$. Нехай $\mathcal{B}$ – зліченна база відкритих множин на відрізку $[0,1]$ і $S_n$ – множина всіх $n$-елементних підмножин множини $S$. Для кожної множини

$$\tau = \{s_1, \ldots, s_n\} \in S_n$$

і довільного набору

$$\beta = (B_1, \ldots, B_n) \in \mathcal{B}^n$$

позначимо

$$U(\tau, \beta) = \prod_{k=1}^{n} B_k \times \prod_{s \in S \setminus \tau} X_s.$$

Система

$$\mathcal{U} = \{U(\tau, \beta) : n \in \mathbb{N},\, \tau \in S_n,\, \beta \in \mathcal{B}^n\}$$

утворює базу відкритих множин у просторі $X$ і її потужність

$$|\mathcal{U}| = \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} (S_n \times \mathcal{B}^n) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} (|S|^n \cdot |\mathcal{B}|^n) = \aleph \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph.$$

Отже, $w(X) \leq \aleph$.

Залишилось для довільного фіксованого цілком регулярного простору $Y$ ваги $w(Y) \leq \aleph$ побудувати гомеоморфне вкладення $f : Y \to X$. Зауважимо, що існує сім'я $(\varphi_s : s \in S)$ неперервних функцій $\varphi_s : Y \to [0,1]$ така, що система

$$\mathcal{V} = \{V_s : s \in S\}$$

носіїв $V_s = \operatorname{supp} \varphi_s$ утворює базу в просторі $Y$. Розглянемо так зване діагональне відображення $f : Y \to X$,

$$f(y) = (\varphi_s(y))_{s \in S}.$$

Оскільки для кожної відкритої базисної множини $U = U(\tau, \beta) \in \mathcal{U}$, де

$$\tau = \{s_1, \ldots, s_n\} \in S_n \qquad \text{і} \qquad \beta = (B_1, \ldots, B_n) \in \mathcal{B}^n,$$

маємо

$$f^{-1}(U) = \bigcap_{k=1}^{n} \varphi_{s_k}^{-1}(B_k),$$

то відображення $f$ неперервне. Крім того, відображення $f$ бієктивне, адже для довільних різних $y_1, y_2 \in Y$ існує індекс $s \in S$ такий, що

$$\varphi_s(y_1) \neq \varphi_s(y_2).$$

Зафіксуємо довільну точку $y_0 \in Y$ і покажемо, що обернене відображення $g = f^{-1} : f(Y) \to Y$ неперервне у точці $x_0 = f(y_0)$. Візьмемо довільний окіл $V$ точки $y_0$ в просторі $Y$. Тоді існує індекс $s \in S$ такий, що

$$y_0 \in V_s \subseteq V.$$

Множина

$$U = (0,1] \times \prod_{t \in S \setminus \{s\}} X_t$$

є околом точки $x_0$ в просторі $X$ і

$$g(U \cap f(Y)) = \varphi_s^{-1}((0,1]) = \operatorname{supp} \varphi_s = V_s \subseteq V.$$

Отже, відображення $g$ неперервне в точці $x_0$ і відображення $f$ є гомеоморфним вкладенням. □

### 4.1.2. Залежність функцій на просторах з умовами типу лінделефовості.

Як випливає з одержаної в попередньому пункті теореми про універсальність тихоновських кубів, вивчаючи ті чи інші топологічні властивості цілком регулярного простору $X$, ми можемо вважати, що цей простір є підпростором топологічного добутку $\mathbb{R}^S$. Тоді природно виникають питання про залежність від певної кількості координат відображень на $X$ чи відображень двох змінних відносно змінної $x$.

Нехай $Z$, $S$ – довільні множини, $X \subseteq \mathbb{R}^S$ і $f : X \to Z$. Казатимемо, що $f$ *зосереджене на множині* $T$, де $T \subseteq S$, якщо для довільних $x', x'' \in X$ з рівності звужень $x'|_T = x''|_T$ випливає рівність $f(x') = f(x'')$. Якщо при цьому потужність $|T|$ множини $T$ не перевищує $\aleph$, то казатимемо, що $f$ *залежить від* $\aleph$ *координат*. Якщо $f$ залежить від $\aleph_0$ координат, то ми казатимемо, що $f$ *залежить від зліченної кількості координат*.

Нехай, крім того, $Y$ – довільна множина і $g : X \times Y \to Z$. Тоді $g$ *зосереджене на множині* $T \subseteq S$ *відносно першої змінної*, якщо $f(x', y) = f(x'', y)$ для довільних $y \in Y$ і $x', x'' \in X$ з $x'|_T = x''|_T$, і $g$ *залежить від* $\aleph$ *координат відносно першої змінної*, якщо $|T| \leq \aleph$ для деякої такої множини $T$. Аналогічно вводяться поняття залежності відносно другої змінної.

Як показує наступний простий приклад, основною відмінністю у дослідженні залежності у такому загальнішому випадку є відсутність найменшої множини, на якій зосереджене відображення $f$.

**Твердження 4.1.2.** *Нехай $S$ – довільна множина потужності $|S| \geq 2$, $x_0 \equiv 0$ на $S$, $x_1 \equiv 1$ на $S$ і $X = \{x_0, x_1\}$. Тоді неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x_i) = i$, зосереджена на кожній одноелементній множині $T = \{s\} \subseteq S$, але не зосереджена на порожній множині, зокрема, не існує найменшої множини, на якій зосереджена функція $f$.*

*Доведення.* Зрозуміло, що функція $f$ неперервна, адже простір $X$ складається з двох ізольованих точок. Оскільки $x_0(s) \neq x_1(s)$ для кожного $s \in S$, то $f$ зосереджена на кожній одноелементній множині $T = \{s\} \subseteq S$. Перетин всіх одноелементних підмножин множини $S$ є порожнім, адже $|S| \geq 2$. Тому лише порожня множина може бути найменшою множиною, на якій зосереджена функція $f$. Зауважимо, що лише сталі функції зосереджені на порожній множині, а функція $f$ не є сталою. Тому $f$ не зосереджена на порожній множині і не існує найменшої множини, на якій зосереджена функція $f$. □

У цьому пункті ми також розглянемо простіші результати про залежність відносно цілком регулярної змінної з властивістю типу лінделефовості.

Для довільного топологічного простору $X$ *числом Лінделефа* $l(X)$ називається найменше нескінченне кардинальне число $\aleph$ таке, що з довільного відкритого покриття простору $X$ можна виділити підпокриття потужності, яка не перевищує $\aleph$. Зокрема, топологічний простір $X$ називається *лінделефовим* якщо $l(X) = \aleph_0$.

Спочатку розглянемо випадок неперервної функції. Наступна теорема доводиться аналогічно, як теорема 1.3.3.

**Теорема 4.1.3.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X \subseteq \mathbb{R}^S$ – топологічний простір з $l(X) \leq \aleph$, $Z$ – метризовний простір і $f : X \to Z$ – неперервне відображення. Тоді $f$ залежить від $\aleph$ координат.*

*Доведення.* Нехай $d$ – метрика на $Z$, яка породжує топологію простору $Z$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і для кожного $x \in X$ виберемо базисний відкритий окіл $U(x)$ точки $x$ такий, що

$$d(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$$

для довільних $x', x'' \in U(x)$. З відкритого покриття $(U(x) : x \in X)$ простору $X$ з $l(X) \leq \aleph$ виберемо підпокриття потужності $\leq \aleph$, тобто знайдемо множину $A \subseteq X$ потужності $|A| \leq \aleph$ таку, що $X = \bigcup\limits_{x \in A} U(x)$. Розглянемо множину

$$S_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} R(U(x)).$$

Зрозуміло, що $|S_\varepsilon| \leq \aleph$. Міркуючи аналогічно, як при доведенні теореми 1.3.3, легко показати, що відображення $f$ зосереджене на множині

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}},$$

при чому

$$|T| \leq \aleph \cdot \aleph_0 = \aleph.$$

Отже, $f$ залежить від $\aleph$ координат. $\square$

Тепер розглянемо випадок нарізно неперервних функцій.

**Теорема 4.1.4.** *Нехай $\aleph$ – довільний нескінченний кардинал, $X$ – довільний топологічний простір з $d(X) \leq \aleph$ і $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ – топологічний простір з $l(X) \leq \aleph$. Тоді кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

*Доведення.* Для кожного $x \in X$ згідно з теоремою 4.1.3 неперервна функція $f^x : Y \to \mathbb{R}$, $f^x(y) = f(x, y)$, залежить від $\aleph$ координат. Тому для кожного $x \in X$ існує множина $T_x \subseteq T$ потужності $|T_x| \leq \aleph$ така, що $f(x, y') = f(x, y'')$ для довільних $y', y'' \in Y$ з $y'|_{T_x} = y''|_{T_x}$.

Нехай $A$ – всюди щільна в $X$ множина така, що $|A| \leq \aleph$. Позначимо

$$S = \bigcup_{a \in A} T_a.$$

Зрозуміло, що $|S| \leq \aleph$. Залишилось показати, що функція $f$ зосереджена на множині $S$ відносно другої змінної.

Зафіксуємо довільні точки $y', y'' \in Y$ з $y'|_S = y''|_S$ і доведемо, що $f(x, y') = f(x, y'')$ для кожного $x \in X$. Оскільки $T_a \subseteq S$, то $y'|_{T_a} = y''|_{T_a}$, і отже, $f(a, y') = f(a, y'')$ для кожного $a \in A$. З неперервності функції $f$ відносно першої змінної випливає, що множина

$$F = \{f(x, y') \neq f(x, y'')\}$$

замкнена. Беручи до уваги щільність множини $A$ і включення $A \subseteq F$, одержуємо

$$X = \overline{A} \subseteq \overline{F} = F.$$

Отже, $f$ зосереджена на множині $S$ відносно другої змінної. $\square$

**4.1.3. Залежність сукупно неперервних функцій відносно компактної змінної.** В даному пункті ми будемо вивчати залежність сукупно неперервних функцій двох змінних відносно однієї із цих змінних, яка задовольняє умову компактності.

Для компактного простору $X$ через $C_u(X)$ ми позначаємо нормований простір усіх неперервних функцій $f : X \to \mathbb{R}$ з нормою

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|.$$

Наступне твердження описує властивість функції $f$, для якої асоційоване відображення зі значеннями в $C_u(X)$ неперервне.

**Твердження 4.1.5.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $Y$ – компактний простір, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – неперервне відносно другої змінної відображення, $\varphi : X \to C_u(Y)$ – асоційоване з $f$ відображення і $x_0 \in X$. Тоді наступні умови рівносильні:*

(*i*) *відображення $\varphi$ неперервне в точці $x_0$;*

(*ii*) *функція $f$ сукупно неперервна в кожній точці множини $\{x_0\} \times Y$.*

*Доведення.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Зафіксуємо точку $y_0 \in Y$ і покажемо, що функція $f$ неперервна за сукупністю змінних у точці $(x_0, y_0)$.

Нехай $\varepsilon > 0$. Використовуючи неперервність відображення $\varphi$ в точці $x_0$ і неперервність функції $f$ відносно другої змінної, виберемо окіл $U$ точки $x_0$ і окіл $V$ точки $y_0$ такі, що

$$\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| < \tfrac{\varepsilon}{2} \qquad \text{і} \qquad |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

для довільних $x \in U$ і $y \in V$. Тепер маємо, що

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \le |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| <$$

$$< \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| + \tfrac{\varepsilon}{2} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для довільних $x \in U$ і $y \in V$. Отже, функція $f$ неперервна за сукупністю змінних в точці $(x_0, y_0)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Для кожної точки $y \in Y$, використовуючи неперервність функції $f$ в точці $(x_0, y)$, виберемо окіл $U_y$ точки $x_0$ і окіл $V_y$ точки $y$ так, що

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

для довільних $x', x'' \in U_y$ і $y', y'' \in V_y$. Оскільки простір $Y$ компактний, то існує скінченна множина $B \subseteq Y$ така, що

$$Y \subseteq \bigcup_{y \in B} V_y.$$

Позначимо

$$U = \bigcap_{y \in B} U_y.$$

Тепер для кожної точки $x$ з околу $U$ точки $x_0$ маємо, що

$$|f(x,y) - f(x_0,y)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

для кожного $y \in Y$, тому,

$$\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| \le \tfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Сім'ю множин $(A_i : i \in I)$ в топологічному просторі $X$ називатимемо *функціонально дискретною*, якщо для довільної точки $x \in X$ існує функціонально відкритий окіл $U$ точки $x$ в $X$ такий, що

$$|\{i \in I : A_i \cap U \neq \emptyset\}| \le 1.$$

Ми будемо використовувати наступні два допоміжні факти.

**Твердження 4.1.6.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір, в якому кожна диз'юнктна (функціонально дискретна) сім'я функціонально відкритих в $X$ множин має потужність, яка не перевищує $\aleph$, $Y$ – топологічний простір, $f : X \to Y$ – неперервне відображення і $Z = f(X)$. Тоді кожна диз'юнктна (функціонально дискретна) сім'я функціонально відкритих в $Z$ множин має потужність, яка не перевищує $\aleph$.*

*Доведення.* Нехай $(V_i : i \in I)$ – диз'юнктна (функціонально дискретна) сім'я функціонально відкритих в $Z$ множин $V_i$. Для кожного $i \in I$ позначимо $U_i = f^{-1}(V_i)$. Зрозуміло, що всі множини $U_i$ функціонально відкриті в $X$, а $(U_i : i \in I)$ – диз'юнктна (функціонально дискретна) сім'я в просторі $X$. Тому $|I| \le \aleph$. □

**Твердження 4.1.7.** *Для довільного метризовного простору $X$ і нескінченного кардинала $\aleph$ наступні умови рівносильні:*

(*i*) *$d(X) \le \aleph$;*

(*ii*) *кожна дискретна сім'я відкритих у просторі $X$ множин має потужність, яка не перевищує $\aleph$.*

*Доведення.* Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з твердження 2.3.10.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Згідно з теоремою 4.4.3 з [16], у просторі $X$ існує $\sigma$-дискретна база, тобто існує послідовність $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^{\infty}$ дискретних сімей $\mathcal{B}_n = (B_i : i \in I_n)$ таких, що система

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{B_i : i \in I_n\}$$

утворює базу в просторі $X$. Згідно з $(ii)$, $|I_n| \leq \aleph$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$|\mathcal{B}| \leq \left|\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right| \leq \aleph \cdot \aleph_0 = \aleph.$$

Залишилося зауважити, що $d(X) \leq |\mathcal{B}|$, адже вибравши в кожній множині $B \in \mathcal{B}$ точку $a_B \in B$, ми одержимо щільну в просторі $X$ множину

$$A = \{a_B : B \in \mathcal{B}\}.$$

□

Наступна теорема основний результат даного пункту.

**Теорема 4.1.8.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір, у якому кожна функціонально дискретна сім'я функціонально відкритих непорожніх множин має потужність, яка не перевищує $\aleph$, $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ – компактний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Тоді $f$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

*Доведення.* Розглянемо асоційоване відображення $\varphi : X \to C_u(Y)$, $\varphi(x)(y) = f(x, y)$, яке, згідно з твердженням 4.1.5, неперервне. Крім того, згідно з твердженням 4.1.6, в метризовному просторі $\varphi(X)$ кожна дискретна сім'я непорожніх відкритих множин має потужність, яка не перевищує $\aleph$. Тепер з твердження 4.1.7 випливає, що $d(\varphi(X)) \leq \aleph$.

Позначимо через $Z$ – простір $\varphi(X)$ з топологією поточкової збіжності на $Y$ і розглянемо нарізно неперервну функцію $g : Z \times Y \to \mathbb{R}$,

$$g(z, y) = z(y).$$

Оскільки топологія поточкової збіжності слабша, ніж топологія, породжена максимум-нормою, то $d(Z) \leq \aleph$. Тому, згідно з теоремою 4.1.4, функція $g$ залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. Врахувавши, що

$$f(x, y) = g(\varphi(x), y),$$

одержимо, що $f$ залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. □

### 4.1.4. Залежність нарізно неперервних функцій відносно компактної змінної.

Тепер розглянемо залежність відносно компактного множника нарізно неперервних функцій.

Розпочнемо з простого спостереження, яке доводиться аналогічно, як теорема 1.3.3 і теорема 4.1.3.

**Твердження 4.1.9.** *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^S$ – компактний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція і $\varepsilon > 0$. Тоді існує скінченна множина $T \subseteq S$ така, що $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ для довільних $x, y \in X$ з $x|_T = y|_T$.*

*Доведення.* Для кожного $x \in X$ виберемо базисний відкритий окіл $U(x)$ точки $x$ такий, що

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

для довільних $x', x'' \in U(x)$. З відкритого покриття $(U(x) : x \in X)$ компактного простору $X$ виберемо скінченне підпокриття, тобто знайдемо скінченну множину $A \subseteq X$ таку, що $X = \bigcup\limits_{x \in A} U(x)$. Залишилося позначити

$$T = \bigcup_{x \in A} R(U(x)).$$

□

Для доведення основного результату даного пункту нам будуть потрібні наступні два допоміжні твердження.

**Твердження 4.1.10.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X \subseteq \mathbb{R}^S$ – компактний простір і*

$$B = \{x \in X : |\operatorname{supp} x| \leq \aleph\}.$$

*Тоді $\overline{A} \subseteq B$ для довільної множини $A \subseteq B$ потужності $|A| \leq \aleph$.*

*Доведення.* Зафіксуємо множину $A \subseteq B$ потужності $|A| \leq \aleph$, позначимо

$$T = \bigcup_{x \in A} \operatorname{supp} x \qquad \text{і} \qquad Y = \{x \in X : \operatorname{supp} x \subseteq T\}.$$

Зрозуміло, що $Y$ – замкнений підпростір простору $X$ і $\overline{A} \subseteq Y$. Крім того, оскільки $A \subseteq B$ і $|A| \leq \aleph$, то $|T| \leq \aleph$. Тому $Y \subseteq B$. Отже,

$$\overline{A} \subseteq Y \subseteq B.$$

□

**Твердження 4.1.11.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал і $X$ – топологічний простір такий, що для кожної множини $A \subseteq X$ потужності $|A| \leq \aleph$ її замикання $\overline{A}$ є компактним. Тоді для довільних гаусдорфового простору $Y$ і неперервного відображення $f : X \to Y$ замикання $\overline{B}$ кожної множини $B \subseteq f(X)$ потужності $|B| \leq \aleph$ також є компактним.*

*Доведення.* Нехай $B \subseteq f(X)$ – довільна множина потужності $|B| \le \aleph$. Виберемо множину $A \subseteq X$ потужності $|A| \le \aleph$ таку, що $f(A) = B$. Тепер за неперервністю відображення $f$ маємо, що

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} = \overline{B} \subseteq \overline{f(\overline{A})}.$$

Зауважимо, що множина $f(\overline{A})$ компактна в $Y$, як неперервний образ компактної множини. Тому множина $f(\overline{A})$ замкнена в гаусдорфовому просторі $Y$ (див., наприклад, [16, теорема 3.1.8]). Отже, $\overline{B} = f(\overline{A})$ і множина $\overline{B}$ компактна. □

**Теорема 4.1.12.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір, у якому довільна точково скінченна сім'я непорожніх функціонально відкритих множин має потужність, яка не перевищує $\aleph$, і $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ – компакт, причому множина*

$$B = \{y \in Y : |\operatorname{supp} y| \le \aleph\}$$

*щільна в просторі $Y$. Тоді довільна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

*Доведення.* Доведемо спочатку, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує множина $S_\varepsilon \subseteq T$ така, що $|S_\varepsilon| \le \aleph$ і

$$|f(x, b') - f(x, b'')| \le \varepsilon$$

для довільних $x \in X$ і $b', b'' \in B$ з $b'|_{S_\varepsilon} = b''|_{S_\varepsilon}$.

Припустимо, що це не так. Тобто існує $\varepsilon > 0$ таке, що для довільної множини $S \subseteq T$ з $|S| \le \aleph$ існують $x \in X$ і $b', b'' \in B$ такі, що

$$b'|_S = b''|_S \qquad \text{і} \qquad |f(x, b') - f(x, b'')| > \varepsilon.$$

Позначимо через $\omega$ перший ординал потужності $\aleph$. З допомогою трансфінітної індукції побудуємо сім'ю

$$(S_\alpha : 1 \le \alpha < \omega)$$

множин $S_\alpha \subseteq T$, а також сім'ї

$$(b_\alpha : 1 \le \alpha < \omega), \quad (c_\alpha : 1 \le \alpha < \omega) \quad \text{і} \quad (x_\alpha : 1 \le \alpha < \omega)$$

точок $b_\alpha, c_\alpha \in B$ і $x_\alpha \in X$ такі, що виконуються наступні умови:

(*a*) $|S_\alpha| \le \aleph$ для кожного $1 \le \alpha < \omega$;

(*b*) $b_\alpha|_{S_\alpha} = c_\alpha|_{S_\alpha}$ для кожного $1 \le \alpha < \omega$;

(c) $S_\alpha \subseteq S_\beta$ для довільних $1 \le \alpha < \beta < \omega$;

(d) $\operatorname{supp} b_\alpha \subseteq S_{\alpha+1}$, $\operatorname{supp} c_\alpha \subseteq S_{\alpha+1}$ для кожного $1 \le \alpha < \omega$;

(e) $|f(x_\alpha, b_\alpha) - f(x_\alpha, c_\alpha)| > \varepsilon$ для кожного $1 \le \alpha < \omega$.

Розпочнемо з довільної множини $S_1 \subseteq T$ з $|S_1| \le \aleph$. Тоді, згідно з нашим припущенням, існують точки $x_1 \in X$ і $b_1, c_1 \in B$ такі, що

$$b_1|_{S_1} = c_1|_{S_1} \qquad \text{і} \qquad |f(x_1, b_1) - f(x_1, c_1)| > \varepsilon.$$

Позначимо
$$S_2 = S_1 \cup \operatorname{supp} b_1 \cup \operatorname{supp} c_1.$$
Зрозуміло, що $|S_2| \le \aleph$. Знову, використовуючи наше припущення, знайдемо точки $x_2 \in X$ і $b_2, c_2 \in B$ такі, що

$$b_2|_{S_2} = c_2|_{S_2} \qquad \text{і} \qquad |f(x_2, b_2) - f(x_2, c_2)| > \varepsilon.$$

Припустимо, що для деякого $3 \le \beta < \omega$ побудовані сім'ї

$$(S_\alpha : \alpha < \beta), \quad (b_\alpha : \alpha < \beta), \quad (c_\alpha : \alpha < \beta) \quad \text{і} \quad (x_\alpha : \alpha < \beta),$$

які задовольняють умови $(a) - (e)$. Покладемо

$$S_\beta = \bigcup_{\alpha < \beta} (S_\alpha \cup \operatorname{supp} b_\alpha \cup \operatorname{supp} c_\alpha).$$

Оскільки при $\alpha < \beta$ всі множини $S_\alpha$, $\operatorname{supp} b_\alpha$ і $\operatorname{supp} c_\alpha$ мають потужності, які не перевищують $\aleph$, то $|S_\beta| \le \aleph$. Тому, згідно з нашим припущенням, існують точки $x_\beta$ і $b_\beta, c_\beta \in B$ такі, що

$$b_\beta|_{S_\beta} = c_\beta|_{S_\beta} \qquad \text{і} \qquad |f(x_\beta, b_\beta) - f(x_\beta, c_\beta)| > \varepsilon.$$

Зрозуміло, що сім'ї

$$(S_\alpha : \alpha \le \beta), \quad (b_\alpha : \alpha \le \beta), \quad (c_\alpha : \alpha \le \beta) \quad \text{і} \quad (x_\alpha : \alpha \le \beta)$$

також задовольняють умови $(a) - (e)$. Отже, згідно з принципом трансфінітної індукції побудова сімей

$$(S_\alpha : \alpha < \omega), \quad (b_\alpha : 1 \le \alpha < \omega), \quad (c_\alpha : 1 \le \alpha < \omega) \quad \text{і} \quad (x_\alpha : 1 \le \alpha < \omega)$$

завершена.

Використовуючи неперервність функції $f$ відносно змінної $x$ і умову $(e)$ для кожного $\alpha < \omega$ знайдемо функціонально відкритий окіл $U_\alpha$ точки $x_\alpha$ в $X$ такий, що
$$|f(x, b_\alpha) - f(x, c_\alpha)| > \varepsilon$$

для кожного $x \in U_\alpha$. З умови теореми випливає, що сім'я $(U_\alpha : \alpha < \omega)$ не є точково скінченною. Отже, існує точка $x_0 \in X$ і строго зростаюча послідовність $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ ординалів $\alpha_n < \omega$ такі, що

$$|f(x_0, b_{\alpha_n}) - f(x_0, c_{\alpha_n})| > \varepsilon$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Позначимо

$$T_n = S_{\alpha_n}, \qquad v_n = b_{\alpha_n} \qquad \text{і} \qquad w_n = c_{\alpha_n}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. До неперервної функції $f^{x_0} : Y \to \mathbb{R}$, $f^{x_0}(y) = f(x_0, y)$, на компактному просторі $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ застосуємо твердження 4.1.9 і знайдемо скінченну множину $T_0 \subseteq T$ таку, що

$$|f(x_0, y') - f(x_0, y'')| < \varepsilon$$

як тільки $y', y'' \in Y$ з $y'|_{T_0} = y''|_{T_0}$.

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$ і покажемо, що існує точка

$$t_n \in T_0 \cap (T_{n+1} \setminus T_n).$$

Оскільки
$$|f(x_0, v_n) - f(x_0, w_n)| > \varepsilon,$$
то за вибором множини $T_0$ маємо, що $v_n|_{T_0} \neq w_n|_{T_0}$, тобто існує точка $t_n \in T_0$ така, що
$$v_n(t_n) \neq w_n(t_n).$$
Але, згідно умовою $(b)$, маємо, що

$$v_n|_{T_n} = w_n|_{T_n},$$

а з умов $(c)$ і $(d)$ випливає, що функції $v_n|_{T \setminus T_{n+1}}$ і $w_n|_{T \setminus T_{n+1}}$ є нульовими, зокрема,
$$v_n|_{T \setminus T_{n+1}} = w_n|_{T \setminus T_{n+1}}.$$
Тому $t_n \in T_{n+1} \setminus T_n$.

Розглянемо послідовність точок $(t_n)_{n=1}^\infty$. Оскільки $t_n \in T_{n+1} \setminus T_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то всі точки $t_n$ є різними. Але, з іншого боку, $t_n \in T_0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і множина $T_0$ скінченна. Це дає нам суперечність і завершує доведення існування множини $S_\varepsilon$.

Тепер розглянемо множину

$$S_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{\frac{1}{n}}.$$

Зрозуміло, що
$$f(x, b') = f(x, b'')$$
для довільних $x \in X$ і $b', b'' \in B$ з $b'|_{S_0} = b''|_{S_0}$. Крім того, оскільки всі множини $S_\varepsilon$ мають потужності, які не перевищують $\aleph$, то і потужність множини $S_0$ також не перевищує $\aleph$. Залишилося показати, що функція $f$ зосереджена на множині $S_0$ відносно змінної $y$.

Зафіксуємо довільні точки $x \in X$ і $y', y'' \in Y$ такі, що $y'|_{S_0} = y''|_{S_0}$, і покажемо, що
$$f(x, y') = f(x, y'').$$
Використовуючи неперервність функції $f^x : Y \to \mathbb{R}$, $f^x(y) = f(x, y)$, на компактному просторі $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ за допомогою твердження 4.1.9 (або теореми 4.1.3) знайдемо не більш ніж зліченну множину $T_0 \subseteq T$ таку, що
$$f(x, y_1) = f(x, y_2)$$
для довільних $y_1, y_2 \in Y$ з $y_1|_{T_0} = y_2|_{T_0}$.

Розглянемо неперервне відображення звуження $\varphi : Y \to \mathbb{R}^{T_0 \cup S_0}$,
$$\varphi(y) = y|_{T_0 \cup S_0}$$
і покажемо, що
$$\varphi(B) = \varphi(Y).$$

З тверджень 4.1.10 і 4.1.11 випливає, що замикання $\overline{A}^{\varphi(B)}$ довільної множини $A \subseteq \varphi(B)$ потужності $|A| \leq \aleph$ в просторі $\varphi(B)$ є компактною множиною, і тому, зокрема, це замикання замкнене в просторі $\varphi(Y)$ і збігається із замиканням $\overline{A}$ множини $A$ в просторі $\varphi(Y)$. Зауважимо також, що $|T_0 \cup S_0| \leq \aleph$. Тому в просторі $\varphi(Y) \subseteq \mathbb{R}^{T_0 \cup S_0}$ існує база $\mathcal{U}$ потужності $|\mathcal{U}| \leq \aleph$. Оскільки $Y = \overline{B}$, то $\varphi(Y) \subseteq \overline{\varphi(B)}$ і для кожного $U \in \mathcal{U}$ існує точка $y_U \in B$ така, що $\varphi(y_U) \in U$. Тоді множина
$$A = \{\varphi(y_U) : U \in \mathcal{U}\}$$
має потужність $|A| \leq \aleph$ і є щільною в просторі $\varphi(Y)$. Тепер маємо
$$\varphi(Y) \subseteq \overline{A} \subseteq \varphi(B)$$
і отже, $\varphi(B) = \varphi(Y)$.

Виберемо точки $b', b'' \in B$ такі, що
$$b'|_{T_0 \cup S_0} = y'|_{T_0 \cup S_0} \qquad \text{і} \qquad b''|_{T_0 \cup S_0} = y''|_{T_0 \cup S_0},$$
тобто $\varphi(b') = \varphi(y')$ і $\varphi(b'') = \varphi(y'')$. Тоді
$$f(x, y') = f(x, b') \qquad \text{і} \qquad f(x, b'') = f(x, y''),$$

адже $b'|_{T_0} = y'|_{T_0}$ і $b''|_{T_0} = y''|_{T_0}$, і

$$f(x, b') = f(x, b''),$$

адже $b'|_{S_0} = b''|_{S_0}$. Тому

$$f(x, y') = f(x, y'').$$

Отже, $f$ зосереджене на множині $S_0$, тому $f$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної. $\square$

### 4.1.5. Залежність від зліченної кількості координат відображень спеціального вигляду.

Нам буде потрібна наступна властивість сепарабельного метричного простору.

**Твердження 4.1.13.** *Нехай $(x_i : i \in I)$ – незліченна сім'я точок у сепарабельному метричному просторі $(X, d)$ і $\delta > 0$. Тоді існує індекс $i_0 \in I$ такий, що множина*

$$\{i \in I : d(x_i, x_{i_0}) < \delta\}$$

*незліченна.*

*Доведення.* Нехай $A$ – зліченна всюди щільна в просторі $X$ множина. Для кожного $x \in A$ позначимо через $U(x)$ відкриту кулю з центром в точці $x$ і радіусом $\frac{\delta}{2}$ і приймемо

$$I(x) = \{i \in I : x_i \in U(x)\}.$$

Оскільки множина $A$ щільна в $X$, то $X = \bigcup\limits_{x \in A} U(x)$, і отже,

$$I = \bigcup_{x \in A} I(x).$$

Множина $I$ незліченна, а множина $A$ зліченна. Тому існує точка $a \in A$ така, що множина $I(a)$ також незліченна. Виберемо довільний індекс $i_0 \in I(a)$. Залишилось зауважити, що для довільного індексу $i \in I(a)$ маємо, що

$$d(x_i, x_{i_0}) \le d(x_i, a) + d(a, x_{i_0}) < \tfrac{\delta}{2} + \tfrac{\delta}{2} = \delta.$$

$\square$

Наступна теорема основний результат даного пункту.

**Теорема 4.1.14.** *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^S$ – ліндельофовий простір, $Z$ – цілком регулярний простір, $Y = C_p(Z)$, $B \subseteq Y$ – щільна в $Y$ множина і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – функція, неперервна відносно змінної $y$ і неперервна за сукупністю змінних у кожній точці множини $X \times B$. Тоді $f$ залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $x$.*

*Доведення.* Припустимо, шо це не так, тобто для довільної зліченної множини $T \subseteq S$ існують $x', x'' \in X$ і $y \in Y$ такі, що

$$x'|_T = x''|_T \qquad \text{і} \quad f(x', y) \neq f(x'', y).$$

Зауважимо, що оскільки функція $f$ неперервна відносно змінної $y$ і множина $B$ щільна в $Y$, то без обмеження загальності ми можемо вважати, що $y \in B$.

Зафіксуємо $y \in B$ і $\varepsilon > 0$. Використовуючи неперервність функції $f$ за сукупністю змінних у кожній точці множини $X \times \{y\}$ і ліндселефовість простору $X$, знайдемо зліченне покриття

$$(U(y, \varepsilon, n) : n \in \mathbb{N})$$

простору $X$ відкритими базисними множинами $U(y, \varepsilon, n)$ і послідовність

$$(V(y, \varepsilon, n) : n \in \mathbb{N})$$

базисних околів точки $y$ в просторі $Y$ такі, що

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$$

для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $(x', y'), (x'', y'') \in U(y, \varepsilon, n) \times V(y, \varepsilon, n)$. Позначимо

$$T(y, \varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} R(U(y, \varepsilon, n)).$$

Зрозуміло, що множина $T(y, \varepsilon) \subseteq S$ зліченна і

$$x' \in U(y, \varepsilon, n) \;\; \Leftrightarrow \;\; x'' \in U(y, \varepsilon, n)$$

для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x', x'' \in X$ з $x'|_{T(y,\varepsilon)} = x''|_{T(y,\varepsilon)}$.

Тепер для кожного $y \in Y$ позначимо

$$T(y) = \bigcup_{m=1}^{\infty} T(y, \tfrac{1}{m}).$$

Зрозуміло, що множина $T(y)$ також зліченна і, зокрема, функція $f_y : X \to \mathbb{R}$, $f_y(x) = f(x, y)$, зосереджена на множині $T(y)$.

Нехай $\omega_1$ – перший незліченний ординал. Використовуючи метод трансфінітної індукції, побудуємо зростаючу послідовність

$$(T_\alpha : \alpha < \omega_1)$$

зліченних множин $T_\alpha \subseteq S$, послідовність

$$(\varepsilon_\alpha : \alpha < \omega_1)$$

додатних чисел $\varepsilon_\alpha$, послідовності

$$(x'_\alpha : \alpha < \omega_1), \qquad (x''_\alpha : \alpha < \omega_1) \qquad \text{і} \qquad (y_\alpha : \alpha < \omega_1)$$

точок $x'_\alpha, x''_\alpha \in X$ і $y_\alpha \in Y$ і послідовність

$$(V_\alpha : \alpha < \omega_1)$$

базисних околів $V_\alpha$ точок $y_\alpha$ в просторі $Y$ такі, що для кожного $\alpha < \omega_1$ виконуються умови:

($a$) $x'_\alpha|_{T_\alpha} = x''_\alpha|_{T_\alpha}$;

($b$) $T(y_\alpha) \subseteq T_{\alpha+1}$;

($c$) $|f(x'_\alpha, y) - f(x''_\alpha, y)| > \varepsilon_\alpha$ для кожного $y \in V_\alpha$.

Нехай $T_1$ – довільна зліченна множина. Використовуючи наше припущення, виберемо $x'_1, x''_1 \in X$ і $y_1 \in B$ такі, що $f(x'_1, y_1) \neq f(x''_1, y_1)$. Позначивши

$$\varepsilon_1 = \tfrac{1}{2}|f(x'_1, y_1) - f(x''_1, y_1)|$$

і використавши неперервність $f$ відносно змінної $y$, виберемо базисний окіл $V_1$ точки $y_1$ в $Y$ такий, що виконується умова ($c$) при $\alpha = 1$.

Припустимо, що для деякого ординала $2 \leq \beta < \omega_1$ побудовано послідовності

$$(T_\alpha : \alpha < \beta), \qquad (\varepsilon_\alpha : \alpha < \beta), \qquad (x'_\alpha : \alpha < \beta), \qquad (x''_\alpha : \alpha < \beta),$$

$$(y_\alpha : \alpha < \beta) \qquad \text{і} \qquad (V_\alpha : \alpha < \beta),$$

які задовольняють умови ($a$), ($b$) і ($c$). Якщо $\beta$ – граничний ординал, то позначимо

$$T_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} T_\alpha.$$

Якщо ж $\beta = \gamma + 1$ для деякого ординала $\gamma$, то позначимо

$$T_\beta = T_\gamma \cup T(y_\gamma).$$

Далі, використавши наше припущення аналогічно, як при $\alpha = 1$, знаходимо точки $x'_\beta, x''_\beta \in X$, $y_\beta \in B$, число $\varepsilon_\beta > 0$ і базисний окіл $V_\beta$ точки $y_\beta$ в просторі $Y$ такі, що

$$x'_\beta|_{T_\beta} = x''_\beta|_{T_\beta} \qquad \text{і} \qquad |f(x'_\beta, y) - f(x''_\beta, y)| > \varepsilon_\beta$$

для кожного $y \in V_\beta$, тобто виконуються умови ($a$) і ($c$) при $\alpha = \beta$.

Беручи до уваги вигляд базисних околів у просторі $Y = C_p(Z)$, для кожного $\alpha < \omega_1$ виберемо скінченну множину $C_\alpha \subseteq Z$ і число $\delta_\alpha > 0$ такі, що

$$V_\alpha = \{y \in Y : (\forall z \in C_\alpha)\ (|y(z) - y_\alpha(z)| < \delta_\alpha)\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$A_n = \{\alpha < \omega_1 : \varepsilon_\alpha \geq \tfrac{1}{n} \ \text{ і } \ \delta_\alpha \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Оскільки $\aleph_1 = |\omega_1|$ і $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \omega_1$, то існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що $|A_m| = \aleph_1$. Позначимо

$$\varepsilon_0 = \tfrac{1}{m} \qquad \text{і} \qquad \delta_0 = \tfrac{1}{m}.$$

До сім'ї $(C_\alpha : \alpha \in A_m)$ застосуємо твердження 2.2.7 і одержимо скінченну множину $C \subseteq Z$ і множину ординалів $\Gamma \subseteq A_m$ такі, що

$$|\Gamma| = \aleph_1, \qquad \text{і} \qquad C_{\gamma'} \cap C_{\gamma''} = C$$

для довільних різних $\gamma', \gamma'' \in \Gamma$.

Розглянемо неперервне відображення $\varphi : \{y_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \to \mathbb{R}^C$,

$$\varphi(y_\gamma) = (y_\gamma(z))_{z \in C}.$$

Оскільки $\mathbb{R}^C$ – сепарабельний метричний простір, то, згідно з твердженням 4.1.13, існує індекс $\gamma_0 \in \Gamma$ такий, що множина

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma : (\forall z \in C)\ (|y_\gamma(z) - y_{\gamma_0}(z)| < \delta_0)\}$$

незліченна, тобто $|\Gamma_0| = \aleph_1$.

Покажемо, що для довільного околу $V$ точки $y_0 = y_{\gamma_0}$ множина

$$\Gamma(V) = \{\gamma \in \Gamma_0 : V \cap V_\gamma = \emptyset\}$$

скінченна. Нехай $C' \subseteq Z$ – скінченна множина, $\delta' > 0$,

$$V = \{y \in Y : (\forall\, z \in C')\ (|y(z) - y_0(z)| < \delta')\}$$

і $\gamma \in \Gamma(V)$. Оскільки $Z$ цілком регулярний простір, то з умови $V \cap V_\gamma = \emptyset$ випливає, що існує точка $z_\gamma \in C' \cap C_\gamma$ така, що

$$|y_\gamma(z) - y_0(z)| \geq \delta_\gamma + \delta' > \delta_0.$$

З означення множини $\Gamma_0$ випливає, що $z_\gamma \notin C$. Врахувавши, що

$$C_{\gamma'} \cap C_{\gamma''} = C$$

для довільних різних $\gamma', \gamma'' \in \Gamma_0$, одержимо, що $z_{\gamma'} \neq z_{\gamma''}$ для довільних різних $\gamma', \gamma'' \in \Gamma(V)$. Отже,

$$|\Gamma(V)| \leq |C' \setminus C| < \aleph_0,$$

тобто множина $\Gamma(V)$ скінченна.

Виберемо $m_0 \in \mathbb{N}$ так, що $\frac{1}{m_0} < \varepsilon_0$. Оскільки множина

$$\Gamma' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma(V(y_0, \tfrac{1}{m_0}, n))$$

не більш ніж зліченна, то $|\Gamma_0 \setminus \Gamma'| = \aleph_1$. Тому існує $\beta \in \Gamma_0$ таке, що

$$\beta > \gamma_0 \qquad \text{i} \qquad V(y_0, \tfrac{1}{m_0}, n) \cap V_\beta \neq \emptyset$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Нагадаємо, що сім'я $(U(y_0, \frac{1}{m_0}, n) \ : \ n \in \mathbb{N})$ є покриттям простору $X$. Візьмемо $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $x'_\beta \in U(y_0, \frac{1}{m_0}, n_0))$. Покажемо, що $x''_\beta \in U(y_0, \frac{1}{m_0}, n_0)$. Використавши означення множини $T(y_0)$ і умову $(b)$, одержимо, що

$$R = R(U(y_0, \tfrac{1}{m_0}, n_0)) \subseteq T(y_0, \tfrac{1}{m_0}) \subseteq T(y_0) = T(y_{\gamma_0}) \subseteq T_\beta.$$

Крім того, $x'_\beta|_{T_\beta} = x''_\beta|_{T_\beta}$ згідно з $(a)$. Тому

$$x'_\beta|_R = x''_\beta|_R,$$

і отже, $x''_\beta \in U(y_0, \frac{1}{m_0}, n_0)$.

Візьмемо довільний елемент $y \in V_\beta \cap V(y_0, \frac{1}{m_0}, n_0)$. Тепер, з одного боку, згідно з умовою $(c)$, маємо, що

$$|f(x'_\beta, y) - f(x''_\beta, y)| > \varepsilon_\beta \geq \varepsilon_0.$$

А з іншого, згідно з вибором множин $U(y_0, \frac{1}{m_0}, n_0)$ і $V(y_0, \frac{1}{m_0}, n_0)$, отримуємо, що

$$|f(x'_\beta, y) - f(x''_\beta, y)| < \tfrac{1}{m_0} < \varepsilon_0.$$

Отже, ми прийшли до суперечності і теорема доведена. □

## 4.2

### Характеризація моранових просторів

У даному підрозділі ми покажемо застосування результатів про залежність від зліченної кількості координат до дослідження питань берівської класифікації нарізно неперервних функцій на добутку двох просторів, один з яких компактний.

**4.2.1. Вимірні за Бером функції і (слабко) моранові простори.** Спочатку індуктивно дамо означення відображень $\alpha$-го класу Бера, де $\alpha$ – не більш ніж зліченний ординал.

Нехай $X, Y$ – топологічні простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *відображенням першого класу Бера*, якщо існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних відображень $f_n : X \to Y$, яка поточково на $X$ збігається до відображення $f$.

Нехай $2 \le \alpha < \omega_1$. Відображення $f : X \to Y$ називається *відображенням $\alpha$-го класу Бера*, якщо існує поточково збіжна до $f$ послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень $f_n : X \to Y$, кожне з яких є класу Бера, меншого ніж $\alpha$. Зауважимо, що відображеннями нульового класу Бера природно вважати, в точності, всі неперервні відображення.

Відображення $f : X \to Y$ називається *вимірним за Бером*, якщо $f$ є відображенням $\alpha$-го класу Бера для деякого не більш ніж зліченного ординала $\alpha$.

Дослідження берівської класифікації нарізно неперервних відображень, було розпочате Р. Бером [4], А. Лебеґом [23] і Г. Ганом [20], який, показав, що кожна нарізно неперервна функція $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$, визначена на добутку $n$ метризовних просторів, $n-1$ з яких сепарабельні, є функцією $(n-1)$-го класу Бера.

Подальший розвиток цих досліджень пов'язаний із роботою В. Рудіна [39], де з допомогою теореми Стоуна про паракомпактність метризовного простору був доведений результат, з якого випливає наступна теорема.

**Теорема 4.2.1** (Рудін). *Нехай $X$ – топологічний простір, $Y$ – метризовний простір і $Z$ – локально опуклий простір. Тоді кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to Z$ є відображенням першого класу Бера.*

Цей результат став відправною точкою в інтенсифікації досліджень питань берівської класифікації нарізно неперервних відображень в Чернівецькому університеті, які проводились і продовжують проводитись як в напрямку послаблення умови метризовності простору $X$, так і в напрямку послаблення умови локальної опуклості простору $Z$ (див., наприклад, [25]).

Тут ми трохи детальніше обговоримо дещо інший аспект, пов'язаний із берівською класифікацією нарізно неперервних функцій.

Нагадаємо, що топологічний простір $X$ має *властивість зліченності ланцюжків (C.C.C.)*, якщо довільна система попарно неперетинних відкритих в $X$ непорожніх множин є не більш ніж зліченною. Система $\mathcal{A}$ підмножин $A$ топологічного простору $X$ називається *дискретною*, якщо для кожної точки $x \in X$ існує окіл $U$ цієї точки в $X$ такий, що

$$|\{A \in \mathcal{A} : U \cap A \neq \emptyset\}| \leq 1.$$

Топологічний простір $X$ має *властивість зліченності дискретних ланцюжків (D.C.C.C.)*, якщо довільна дискретна система відкритих в $X$ непорожніх множин є не більш ніж зліченною.

Вивчаючи нарізно неперервні функції на добутках компактних просторів, В. Моран [30] і Г. Розенталь [37] довели наступний результат.

**Теорема 4.2.2** (Моран, Розенталь)**.** *Нехай $X$ – компактний гаусдорфовий простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

*(i) кожний компактний простір $Y$ в $C_p(X)$ метризовний;*

*(ii) кожний слабко компактний простір $Y$ в $C_p(X)$ слабко метризовний;*

*(iii) для довільного компактного простору $Y$ кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера;*

*(iv) для довільного компактного простору $Y$ кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ вимірна за Бером;*

*(v) $X$ має C.C.C.*

Топологічний простір $X$ називається *морановим (слабко морановим)*, якщо для довільного компактного простору $Y$ кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера (вимірною за Бером). Ці поняття ввів Г. Вера в [46], який, розвиваючи результат В. Морана і Г. Розенталя, вивчав берівську класифікацію нарізно неперервних функцій на добутку двох просторів, один з яких задовольняє умову типу компактності.

**Теорема 4.2.3** (Вера)**.** *Нехай $X$ цілком регулярний простір. Тоді наступні умови еквівалентні:*

*(i) кожний компактний простір $Y$ в $C_p(X)$ метризовний;*

*(ii) $X$ моранoвий (слабко моранoвий) з умовою C.C.C.;*

*(iii) $X$ моранoвий (слабко моранoвий) з умовою D.C.C.C.*

В даному підрозділі ми покажемо, як, використовуючи техніку залежності нарізно неперервних відображень від зліченної кількості координат, можна отримати загальний варіант цієї теореми для топологічного простору $X$. Цей результат був одержаний в [57].

### 4.2.2. Канонічне вкладення та деякі його властивості.

У цьому пункті ми доведемо деякі допоміжні твердження, пов'язані з канонічним вкладенням топологічного простору у свій другий спряжений простір.

Для довільного топологічного простору $X$ відображення $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$, яке для довільних $x \in X$ і $y \in C_p(X)$ означається формулою

$$\varphi(x)(y) = y(x),$$

називатимемо *канонічним вкладенням.*

**Твердження 4.2.4.** *Для довільного топологічного простору $X$ його канонічне вкладення $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$ є неперервним і відкритим відображенням.*

*Доведення.* Зафіксуємо точку $x_0 \in X$ і розглянемо базисний окіл $V$ точки $z_0 = \varphi(x_0)$ в просторі $C_p(C_p(X))$. Отже, існують скінченна множина $B \subseteq Y = C_p(X)$ і число $\varepsilon > 0$ такі, що

$$V = \bigcap_{y \in B} \{z \in Z : |z(y) - z_0(y)| < \varepsilon\}.$$

Оскільки $z(y) = y(x)$ для довільних $z = \varphi(x) \in \varphi(X)$ і $y \in Y$, то множина

$$U = \varphi^{-1}(V) = \bigcap_{y \in B} \{x \in X : |y(x) - y(x_0)| < \varepsilon\}$$

є околом точки $x_0$ у просторі $X$. Тому відображення $\varphi$ неперервне в точці $x_0$. Отже, $\varphi$ є неперервним.

Оскільки $\varphi(U) = V$, то відображення $\varphi$ відкрите. □

**Зауваження 4.2.5.** У випадку, коли простір $X$ цілком регулярний, тобто множина всіх неперервних функцій $C(X)$ відокремлює точки в $X$, канонічне вкладення $\varphi$ є гомеоморфним вкладенням.

Наступне просте спостереження показує, що і в загальному випадку, неперервні функції на топологічному просторі $X$ і неперервні функції на просторі $\varphi(X)$, де $\varphi$ – канонічне вкладення, перебувають у взаємно однозначній відповідності.

**Твердження 4.2.6.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$ – канонічне вкладення і $Z = \varphi(X)$. Тоді для довільної неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ існує неперервна функція $g : Z \to \mathbb{R}$ така, що*
$$f(x) = g(\varphi(x))$$
*для кожного $x \in X$. І навпаки, якщо функція $g$ неперервна, то відповідна їй функція $f$ також неперервна.*

*Доведення.* Нехай $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, тобто $f \in Y = C_p(X)$. Розглянемо функцію $h : C_p(Y) \to \mathbb{R}$, яка для кожного $z \in C_p(Y)$ означається формулою
$$h(z) = z(f).$$
Зрозуміло, що функція $h$ неперервна. Крім того, для кожного $z = \varphi(x) \in \varphi(X)$ маємо, що
$$h(z) = z(f) = \varphi(x)(f) = f(z).$$
Тепер, позначивши $g = h|_Z$, завершимо доведення першої частини.

Друга частина випливає з того, що композиція неперервних відображень є неперервною. □

Наступне твердження уточнює зв'язок між неперервними функціями на $X$ і $\varphi(X)$.

**Твердження 4.2.7.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$ – канонічне вкладення і $Z = \varphi(X)$. Тоді простори $C_p(X)$ і $C_p(Z)$ гомеоморфні.*

*Доведення.* Розглянемо відображення $\psi : C_p(Z) \to C_p(X)$,
$$\psi(u)(x) = u(\varphi(x)),$$
яке, очевидно, лінійне та ін'єктивне. З твердження 4.2.6 випливає, що відображення $\psi$ бієктивне.

Нехай
$$u_0 \in C_p(Z), \quad v_0 = \psi(u_0), \quad x_1, \dots, x_n \in X,$$
$$z_1 = \varphi(x_1), \dots, z_n = \varphi(x_n), \qquad \varepsilon > 0,$$
$$U = \{u \in C_p(Z) : |u(z_i) - u_0(z_i)| < \varepsilon, 1 \le i \le n\}$$
і
$$V = \{v \in C_p(X) : |v(x_i) - v_0(x_i)| < \varepsilon, 1 \le i \le n\}.$$
Тоді $\psi(U) = V$, тому $\psi$ і $\psi^{-1}$ неперервні. Отже, $\psi$ – гомеоморфізм. Більше того, $\psi$ є ізоморфізмом топологічного векторного простору $C_p(Z)$ на топологічний векторний простір $C_p(X)$. □

Як показує наступне твердження, канонічні вкладення можна застосовувати і до нарізно неперервних функцій.

**Твердження 4.2.8.** *Нехай $X$, $T$ – топологічні простори, $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$ – канонічне вкладення, $Z = \varphi(X)$ і $f : X \times T \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Тоді існує нарізно неперервна функція $g : Z \times T \to \mathbb{R}$ така, що*

$$g(\varphi(x), t) = f(x, t)$$

*для довільних $x \in X$ і $t \in T$.*

*Доведення.* З твердження 4.2.6 випливає, що формула

$$g(\varphi(x), t) = f(x, t)$$

коректно означає функцію $g : Z \times T \to \mathbb{R}$, яка неперервна відносно першої змінної. Тепер з неперервності функції $f$ відносно другої змінної випливає неперервність функції $g$ відносно другої змінної. □

Для розгляду вимірних за Бером функцій ми потребуватимемо наступне допоміжне твердження.

**Твердження 4.2.9.** *Нехай $X$, $Y$, $Z$ – топологічні простори, $\varphi : X \to Y$ – неперервне відображення, $\alpha$ – не більш ніж зліченний ординал і $g : Y \to Z$ – відображення берівського класу $\alpha$. Тоді відображення $f : X \to Z$,*

$$f(x) = g(\varphi(x)),$$

*також є відображенням берівського класу $\alpha$.*

*Доведення.* Доведення проведемо індукцією відносно $\alpha$.

Нехай $\alpha = 0$, тобто відображення $g$ неперервне. Тоді $f$ неперервне, як композиція неперервних відображень.

Припустимо, що відповідне твердження справджується для відображень берівського класу, меншого, ніж $\alpha$, де $\alpha > 0$. Для відображення $g$ берівського класу $\alpha$ виберемо послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ відображень $g_n : Y \to Z$ берівського класу $\alpha_n < \alpha$, яка поточково на просторі $Y$ збігається до відображення $g$. Тоді, згідно з нашим припущенням, для кожного $n \in \mathbb{N}$ відображення $f_n : X \to Z$,

$$f_n(x) = g_n(\varphi(x)),$$

є відображенням берівського класу $\alpha_n$, причому для кожного $x \in X$ послідовність точок $f_n(x) = g_n(\varphi(x))$ збігається до точки $g(\varphi(x)) = f(x)$ в просторі $Z$. Отже, $f$ берівського класу $\alpha$. □

Тепер перейдемо до розгляду вимірних за Бером функцій двох змінних.

**Твердження 4.2.10.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$ – канонічне вкладення, $Z = \varphi(X)$, $T$ – компактний простір і $\alpha$ – не більш ніж зліченний ординал. Тоді функція $f : X \times T \to \mathbb{R}$ належить до берівського класу $\alpha$ тоді і тільки тоді, коли існує функція $g : Z \times T \to \mathbb{R}$ берівського класу $\alpha$ така, що*

$$f(x,t) = g(\varphi(x),t)$$

*для довільних $x \in X$ і $t \in T$.*

*Доведення.* Необхідність доведемо індукцією відносно $\alpha$.

Розпочнемо з випадку $\alpha = 0$. Нехай $f$ – неперервна функція. Згідно з твердженям 4.2.8, існує нарізно неперервна функція $g : Z \times T \to \mathbb{R}$ така, що

$$f(x,t) = g(\varphi(x),t)$$

для довільних $x \in X$ і $t \in T$. Залишається показати, що функція $g$ неперервна.

Розглянемо асоційоване з $f$ відображення $\psi : X \to C_u(T)$,

$$\psi(x)(t) = f(x,t),$$

яке, згідно з твердженням 4.1.5, неперервне. Нехай $z_0 \in \varphi(X)$, $t_0 \in T$ і $\varepsilon > 0$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in \varphi^{-1}(z_0)$ і розглянемо неперервну на $X$ функцію $y_0 : X \to \mathbb{R}$,

$$y_0(x) = \|\psi(x) - \psi(x_0)\|,$$

де $\|\cdot\|$ – норма в просторі $C_u(T)$. Зауважимо, що

$$z_0(y_0) = \varphi(x_0)(y_0) = y_0(x_0) = 0.$$

Позначимо

$$W = \{z \in \varphi(X) : |z(y_0)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\} \quad \text{і} \quad V = \{t \in T : |f(x_0,t) - f(x_0,t_0)| < \tfrac{\varepsilon}{2}\}.$$

Тоді для довільних $z \in W$, $t \in T$ і $x \in \varphi^{-1}(z)$ маємо, що

$$|g(z,t) - g(z_0,t_0)| \leq |g(z,t) - g(z_0,t)| + |g(z_0,t) - g(z_0,t_0)| =$$

$$= |f(x,t) - f(x_0,t)| + |f(x_0,t) - f(x_0,t_0)| \leq \|\psi(x) - \psi(x_0)\| + \tfrac{\varepsilon}{2} =$$
$$= y_0(x) + \tfrac{\varepsilon}{2} = z(y_0) + \tfrac{\varepsilon}{2} < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, функція $g$ неперервна в точці $(z_0,t_0)$ і необхідність при $\alpha = 0$ доведено.

Припустимо, що відповідне твердження справджується для всіх функцій берівського класу, меншого, ніж $\alpha$, де $\alpha > 0$, і $f$ – функція берівського класу $\alpha$. Тоді існує послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $f_n : X \times T \to \mathbb{R}$ берівського класу $\alpha_n < \alpha$ така, що

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x,t) = f(x,t)$$

для довільних $x \in X$ і $t \in T$. Згідно з припущенням, існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ функцій $g_n : \varphi(X) \times T \to \mathbb{R}$ берівського класу $\alpha_n$ така, що

$$f_n(x,t) = g_n(\varphi(x),t)$$

для довільних $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$ і $t \in T$. Тоді для довільних $x_1, x_2 \in X$ таких, що $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ маємо $f(x_1,t) = f(x_2,t)$, тобто існує функція $g : \varphi(X) \times T \to \mathbb{R}$ така, що

$$f(x,t) = g(\varphi(x),t)$$

для довільних $x \in X$ і $t \in T$. Зрозуміло, що $f$ берівського класу $\alpha$, адже

$$g(\varphi(x),t) = f(x,t) = \lim_{n\to\infty} f_n(x,t) = \lim_{n\to\infty} g_n(\varphi(x),t).$$

Достатність випливає безпосередньо з твердження 4.2.9 і неперервності відображення $\varphi$. $\square$

**Наслідок 4.2.11.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $\varphi : X \to C_p(C_p(X))$ – канонічне вкладення і $Z = \varphi(X)$. Тоді наступні твердження рівносильні:*

(*i*) *простір $X$ морановий (слабко морановий);*

(*ii*) *простір $Z$ морановий (слабко морановий).*

*Доведення.* (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Нехай $T$ – довільний компактний простір і $g : Z \times T \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Розглянемо функцію $f : X \times T \to \mathbb{R}$,

$$f(x,t) = g(\varphi(x),t).$$

З неперервності відображення $\varphi$ випливає, що функція $f$ також є нарізно неперервною функцією, яка, згідно з (*i*), є першого класу Бера (вимірною за Бером). Тоді з твердження 4.2.10 випливає, що функція $g$ також першого класу Бера (вимірною за Бером).

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*). Нехай $T$ – довільний компактний простір і $f : X \times T \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Згідно з твердженням 4.2.8, існує нарізно неперервна функція $g : Z \times T \to \mathbb{R}$ така, що

$$g(\varphi(x),t) = f(x,t)$$

для довільних $x \in X$ і $t \in T$. З умови $(ii)$ випливає, що функція $g$ є першого класу Бера (вимірною за Бером). Тоді згідно з твердженням 4.2.10 функція $f$ також є першого класу Бера (вимірною за Бером). $\square$

**4.2.3. Берівська класифікація і залежність від зліченної кількості координат.** У даному пункті ми розглянемо зв'язок між залежністю від зліченної кількості координат і берівською класифікацією функцій двох змінних.

Для одержання залежності вимірних за Бером функцій нам буде корисним наступний простий факт.

**Твердження 4.2.12.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$ – топологічний простір, $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ і $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – поточково збіжна до деякої функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ послідовність функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, кожна з яких залежать від $\aleph$ координат відносно змінної $y$. Тоді функція $f$ також залежить від $\aleph$ координат відносно змінної $y$.*

*Доведення.* Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо множину $T_n \subseteq T$ таку, що $|T_n| \leq \aleph$ і $f_n$ зосереджена на множині $T_n$ відносно змінної $y$. Тоді $f$ зосереджена на множині $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n$ відносно змінної $y$, причому $|S| \leq \aleph$. $\square$

З теореми 4.1.8 і твердження 4.2.12 негайно випливає наступний результат.

**Теорема 4.2.13.** *Нехай $X$ – топологічний простір, в якому кожна функціонально дискретна сім'я функціонально відкритих непорожніх множин має потужність, що не перевищує $\aleph$, $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ – компактний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – вимірна за Бером функція. Тоді $f$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної.*

Тепер перейдемо до вивчення зворотнього зв'язку між залежністю від зліченної кількості координат і берівською класифікацією. Наступне твердження займає центральне місце у цьому пункті і є певним аналогом твердження 4.2.6.

**Твердження 4.2.14.** *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^S$ – псевдо-$\aleph_0$-компактний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, яка зосереджена на не більш, ніж зліченній множині $T \subseteq S$, і $\varphi : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^T$, $\varphi(x) = x|_T$. Тоді формулою*

$$g(\varphi(x)) = f(x) \tag{4.1}$$

*означається неперервна функція $g : \varphi(X) \to \mathbb{R}$.*

*Доведення.* Оскільки множина $T$ не більш ніж зліченна, то простір $\mathbb{R}^T$ метризовний і сепарабельний, як зліченний добуток метризовних і сепарабельних просторів (див. [16, теорема 4.2.2 і теорема 2.3.15]). Тому і підпростір $Z = \varphi(X)$ простору $\mathbb{R}^T$ метризовний і сепарабельний.

Зосередженість функції $f$ на множині $T$ означає, що $f(x') = f(x'')$ для довільних $x', x'' \in X$ з $\varphi(x') = \varphi(x'')$. Тому формула (4.1) коректно означає функцію $g$. Залишається перевірити, що $g$ неперервна.

Припустимо, що функція $g$ не є неперервною в деякій точці $z_0 \in Z$. Тоді існують $\varepsilon > 0$ і послідовність $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $z_n \in Z$ такі, що

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \qquad \text{і} \qquad |g(z_n) - g(z_0)| > \varepsilon$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо деяку точку $x_n \in X$, так, що $\varphi(x_n) = z_n$. Зафіксуємо деяку метрику $\varrho$ на просторі $Z$, яка породжує його топологічну структуру, і для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$W_n = \{z \in Z : \varrho(z, z_0) < \tfrac{1}{n}\}.$$

Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $z_n \in W_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки функція $f$ неперервна, то для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує відкритий окіл $U_n$ точки $x_n$ в $X$ такий, що

$$|f(x) - f(x_n)| < \tfrac{\varepsilon}{2}$$

для всіх $x \in U_n$. Зауважимо, що тоді для довільних $n \in \mathbb{N}$ і $x \in U_n$ виконується нерівність

$$|f(x) - g(z_0)| \geq |g(z_n) - g(z_0)| - |f(x) - g(z_n)| =$$

$$= |g(z_n) - g(z_0)| - |f(x) - f(x_n)| > \varepsilon - \tfrac{\varepsilon}{2} = \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Отже,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \{x \in X : |f(x) - g(z_0)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\} = F.$$

Позначимо $V_n = U_n \cap \varphi^{-1}(W_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зрозуміло, що всі множини $V_n$ відкриті і непорожні, адже $x_n \in V_n$. Оскільки простір $X$ псевдо-$\aleph_0$-компактний, то послідовність $(V_n : n \in \mathbb{N})$ не є локально скінченною в просторі $X$, тобто існує точка $x_0 \in X$ така, що довільний її окіл $U$ в просторі $X$ перетинається з нескінченною кількістю множин $V_n$. Тоді

$$x_0 \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n} \subseteq \overline{F} = F,$$

адже функція $f$ неперервна і множина $F$ замкнена. Отже,

$$|f(x_0) - g(z_0)| \geq \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

З іншого боку, оскільки відображення $\varphi$ неперервне, то довільний окіл $W$ точки $\varphi(x_0)$ в просторі $Z$ перетинається з нескінченною кількістю множин $\varphi(V_n)$. Крім того, $V_n \subseteq \varphi^{-1}(W_n)$, а отже, $\varphi(V_n) \subseteq W_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що згідно з вибором множин $W_n$ точка $z_0$ – єдина точка простору $Z$ така, що довільний її окіл перетинається з нескінченною кількістю множин $W_n$. Тому $z_0 = \varphi(x_0)$ і

$$g(z_0) = g(\varphi(x_0)) = f(x_0).$$

Отже, ми прийшли до суперечності і тому функція $g$ неперервна. $\square$

Тепер доведемо основний результат даного пункту.

**Теорема 4.2.15.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ – псевдокомпактний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція, яка залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $y$. Тоді $f$ функція першого класу Бера.*

*Доведення.* Оскільки функція $f$ залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $y$, то існує не більш ніж зліченна множина $S \subseteq T$ така, що $f(x, y') = f(x, y'')$ для довільних $x \in X$ і $y', y'' \in Y$ з $y'_{|_S} = y''_{|_S}$. Визначимо неперервне відображення $\varphi : Y \to \mathbb{R}^S$, прийнявши $\varphi(y) = y_{|_S}$. Згідно з твердженням 4.2.14, формула

$$g(x, \varphi(y)) = f(x, y)$$

коректно означає функцію $g : X \times \varphi(Y) \to \mathbb{R}$, неперервну відносно другої змінної. Крім того, з неперервності функції $f$ відносно першої змінної випливає неперервність функції $g$ відносно першої змінної. Отже, функція $g$ нарізно неперервна.

Зауважимо, що, як і в доведенні попереднього твердження, простір $\varphi(Y)$ метризовний і, згідно з теоремою 4.2.1, функція $g$ є функцією першого класу Бера. Тому існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $g_n : X \times \varphi(Y) \to \mathbb{R}$, яка поточково збігається до функції $g$. Тоді послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x, y) = g_n(x, \varphi(y))$$

поточково збігається до функції $f$, отже, $f$ функція першого класу Бера.
$\square$

### 4.2.4. Узагальнення теореми Вери.

Ми будемо використовувати наступне допоміжне твердження (див. [16, теорема 3.1.22]).

**Твердження 4.2.16.** *Якщо компактний простір $Y$ є неперервним образом компактного простору $X$, то $w(Y) \leq w(X)$.*

*Доведення.* Нехай $f : X \to Y$ – неперервне відображення, $Y = f(X)$ і $\mathcal{U}$ – база в просторі $X$ потужності $|\mathcal{U}| \leq w(X)$. Достатньо показати, що система

$$\mathcal{V} = \{Y \setminus \bigcup_{k=1}^{n} f(U_k) : n \in \mathbb{N}, U_1, \dots U_n \in \mathcal{U}\}$$

є базою в просторі $Y$.

Зафіксуємо точку $y_0 \in Y$ і відкритий окіл $V$ точки $y_0$ в просторі $Y$. Позначимо

$$K = f^{-1}(y_0) \qquad \text{і} \qquad F = X \setminus f^{-1}(V).$$

Множини $K$ і $F$ компактні і $K \cap F = \emptyset$. Тому існують базисні множини $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ такі, що

$$F \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} U_k \subseteq X \setminus K.$$

Тоді

$$y_0 \in Y \setminus \bigcup_{k=1}^{n} f(U_k) \subseteq V.$$

□

Наступна теорема є певним розвитком результату [46, теорема 2].

**Теорема 4.2.17.** *Нехай $X$ – топологічний простір, в якому кожна функціонально дискретна сім'я функціонально відкритих непорожніх множин є не більш ніж зліченною, $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ – компакт, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція і $\varphi : Y \to C_p(X)$, $\varphi(y)(x) = f(x, y)$, – асоційоване відораження. Тоді наступні умови рівносильні:*

(i) *$f$ – першого класу Бера;*

(ii) *$f$ – вимірна за Бером;*

(iii) *функція $f$ залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $y$;*

(iv) *простір $Z = \varphi(Y)$ метризовний.*

*Доведення.* Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ очевидна. Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає з теореми 4.2.13 при $\aleph = \aleph_0$, а імплікація $(iii) \Rightarrow (i)$ – з теореми 4.2.15. Отже, перші три умови рівносильні.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Розглянемо нарізно неперервну функцію $g : X \times Z \to \mathbb{R}$,

$$g(x, z) = z(x).$$

Оскільки простір $Z$ метризовний, то знову ж, згідно з теоремою 4.2.1, функція $g$ є функцією першого класу Бера. Тому існує послідовність $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $g_n : X \times Z \to \mathbb{R}$, яка поточково збігається до функції $g$. Тоді послідовність $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x, y) = g_n(x, \varphi(y))$$

поточково збігається до функції $f$, отже, $f$ функція першого класу Бера.

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Спочатку міркуватимемо подібно, як при доведенні теореми 4.2.15. Візьмемо не більш ніж зліченну множину $S \subseteq T$, на якій зосереджена функція $f$ відносно другої змінної і розглянемо неперервне відображення звуження $\psi : Y \to \mathbb{R}^S$, $\psi(y) = y_{|S}$. Згідно з твердженням 4.2.14, формула

$$g(x, \psi(y)) = f(x, y)$$

коректно означає нарізно неперервну функцію $g : X \times \tilde{Y} \to \mathbb{R}$, де $\tilde{Y} = \psi(Y)$ – сепарабельний метризовний компакт.

Тепер розглянемо неперервне асоційоване з $g$ відображення $\tilde{\varphi} : \tilde{Y} \to C_p(X)$,

$$\tilde{\varphi}(v)(x) = g(x, v).$$

Зауважимо, що для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ маємо, що

$$\varphi(y)(x) = f(x, y) = g(x, \psi(y)) = \tilde{\varphi}(\psi(y))(x),$$

тобто $\varphi(y) = \tilde{\varphi}(\psi(y))$. Тому

$$Z = \varphi(Y) = \tilde{\varphi}(\psi(Y)) = \tilde{\varphi}(\tilde{Y})$$

і $w(Z) \leq \aleph_0$, згідно з твердженням 4.2.16. Тому простір $Z$ метризовний, як цілком регулярний простір з другою аксіомою зліченності (див., наприклад, [16, теорема 4.2.9]). □

Наступне твердження вказує на необхідність умови зліченності ланцюжків для (слабко) моранових просторів.

**Твердження 4.2.18.** *Нехай $X$ – топологічний простір такий, що довільний компактний простір $Y$ в $C_p(X)$ метризовний. Тоді кожна система попарно неперетинних функціонально відкритих множин в просторі $X$ не більш ніж зліченна.*

*Доведення.* Міркуватимемо від супротивного. Нехай $\mathcal{G}$ – незліченна система непорожніх попарно неперетинних функціонально відкритих множин у просторі $X$. Позначимо через $f$ нульову функцію на $X$. Для кожного $G \in \mathcal{G}$ візьмемо неперервну функцію $f_G : X \to \mathbb{R}$ таку, що

$$G = \operatorname{supp} f_G$$

і позначимо

$$Y = \{f\} \cup \{f_G : G \in \mathcal{G}\}.$$

Легко бачити, що всі точки $f_G$ є ізольованими в просторі $Y \subseteq C_p(X)$, а довільний окіл точки $f$ містить всі, крім скінченної кількості, точки $f_G$. Тому простір $Y$ компактний і не є метризовним, адже система $\mathcal{G}$ незліченна. $\square$

Наступний результат узагальнює теорему 4.2.3, яка дає опис (слабко) моранових цілком регулярних просторів.

**Теорема 4.2.19.** *Нехай $X$ – довільний топологічний простір. Тоді наступні твердження рівносильні:*

$(i)$ *довільний компактний простір $Y$ в $C_p(X)$ метризовний;*

$(ii)$ *$X$ мораковий (слабко морановий) простір, у якому кожна система попарно неперетинних функціонально відкритих множин не більш ніж зліченна;*

$(iii)$ *$X$ морановий (слабко морановий) простір, у якому кожна функціонально дискретна система функціонально відкритих множин не більш ніж зліченна.*

*Доведення.* Імплікація $(i) \Rightarrow (ii)$ випливає з твердження 4.2.18 і теореми 4.2.17. Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ очевидна. Імплікація $(iii) \Rightarrow (i)$ випливає з теореми 4.2.17. $\square$

# 4.3

## Властивості компактних множин у просторі неперервних функцій

Викладений у попередньому підрозділі підхід до вивчення берівської класифікації нарізно неперервних функцій вказує на важливість просторів $X$, для яких кожна компактна підмножина в $C_p(X)$ метризовна. У зв'язку з цим природно виникає питання про встановлення необхідних і достатніх умов на топологічний простір $X$, які забезпечують метризовність в $C_p(X)$ довільної компактної множини чи довільного компактного простору з певного класу (компактів Еберлейна, компактів Корсона, компактів Валдівіа).

Ці питання досліджувалися в [43, 3, 35], де вивчалися зв'язки між кардинальними властивостями цілком регулярного простору $X$ і простору $C_p(X)$. Важливе місце в даних роботах займає поняття точково скінченної клітковості $p(X)$ топологічного простору $X$. Зокрема, в [35, питання 5.4] поставлено наступне питання.

**Питання 4.3.1.** *Чи обов'язково компакт Корсона $X$ метризовний, якщо $p(C_p(X)) = \aleph_0$?*

У даному підрозділі ми викладемо результати роботи [33] покажемо, як, використовуючи результати про залежність функцій від певної кількості координат, можна досліджувати умови метризовності компактних підпросторів простору $C_p(X)$, чи схожі питання метризовності компактного простору $Y$ при наявності деяких кардинальних характеристик простору $C_p(Y)$.

### 4.3.1. Деякі поняття і допоміжні твердження.

Спочатку дамо означення різних видів компактів, які ми будемо використовувати.

Компактний простір $X$, гомеоморфний слабко компактній підмножині деякого банахового простору, називається *компактом Еберлейна.*

Компактний простір $X$ називається *компактом Корсона*, якщо він гомеоморфний деякому компакту $Z \subseteq \mathbb{R}^T$ такому, що $|\operatorname{supp} z| \leq \aleph_0$ для кожного $z \in Z$, і *компактом Валдівіа*, якщо він гомеоморфний деякому компакту $Z \subseteq \mathbb{R}^T$ такому, що множина $\{z \in Z : |\operatorname{supp} z| \leq \aleph_0\}$ щільна в $Z$.

Зрозуміло, що кожний компакт Корсона є компактом Валдівіа. Крім того, з наступної теореми Аміра-Лінденштрауса [2] випливає, що кожний компакт Еберлейна є компактом Корсона.

**Теорема 4.3.2.** *Топологічний простір $X$ є компактом Еберлейна тоді і тільки тоді, коли простір $X$ гомеоморфний компактній підмножині простору $c_0(T)$ з топологією поточкової збіжності, де $c_0(T)$ – це множина всіх функцій $x : T \to \mathbb{R}$ таких, що для кожного $\varepsilon > 0$ множина $\{t \in T : |x(t)| \geq \varepsilon\}$ скінченна.*

Для довільного дискретного простору $X$ існує одноточкова компактифікація $\alpha X = X \sqcup \{\infty\}$ простору $X$, яка називається *компактифікацією Александрова* простору $X$ (див. [16, теорема 3.5.11]). При цьому всі точки $x \in X$ ізольовані в просторі $\alpha X$, а околами точки $\infty$ в просторі $\alpha X$ є всі множини $U \subseteq \alpha X$ такі, що

$$\infty \in U \qquad \text{і} \qquad |X \setminus U| < \aleph_0.$$

Ми будемо використовувати наступний факт.

**Твердження 4.3.3.** *Компактифікація Александрова дискретного простору є компактом Еберлейна.*

*Доведення.* Нехай $X$ – дискретний простір і $\alpha X = X \sqcup \{\infty\}$ – компактифікація Александрова простору $X$. Для кожного $x \in X$ розглянемо функцію $y_x : X \to \mathbb{R}$,

$$y_x(t) = \begin{cases} 1, & t = x; \\ 0, & t \in X \setminus \{x\}, \end{cases}$$

і позначимо через $y_\infty$ нульову функцію на множині $X$. Позначимо

$$Y = \{y_x : x \in \alpha X\}$$

і розглянемо на $Y$ топологію поточкової збіжності на множині $X$. Зрозуміло, що $Y \subseteq c_0(X)$, для кожного $x \in X$ точка $y_x \in Y$ ізольована в просторі $Y$, а околами точки $y_\infty$ в просторі $Y$ є всі множини $V \subseteq Y$ такі, що

$$y_\infty \in V \qquad \text{і} \qquad |Y \setminus V| < \aleph_0.$$

Тому відображення $\varphi : \alpha X \to Y$,

$$\varphi(x) = y_x,$$

гомеоморфізм. $\square$

Ми будемо також використовувати наступну властивість топологічної ваги, яка має цілком стандартні доведення.

**Твердження 4.3.4.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $S$ – множина потужності $\aleph$ і $X \subseteq \mathbb{R}^S$. Тоді $w(X) \leq \aleph$.*

*Доведення.* Для кожного $s \in S$ покладемо $X_s = \mathbb{R}$. Нехай $\mathcal{B}$ – зліченна база в $\mathbb{R}$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $T_n$ множину всіх скінченних наборів
$$\tau = (s_1, \dots, s_n) \in S^n,$$
які складаються з різних елементів $s_k$. Для довільних $\tau \in T_n$ і $\beta = (B_1, \dots B_n) \in \mathcal{B}^n$ позначимо
$$U(\tau, \beta) = B_1 \times \dots \times B_n \times \prod_{s \in S \setminus \{s_1, \dots, s_n\}} X_s.$$
Легко бачити, що система
$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{U(\tau, \beta) \cap X : \tau \in T_n,\ \beta \in \mathcal{B}^n\}$$
утворює базу в просторі $X$, причому $|\mathcal{U}| \leq \aleph$. □

Наступне твердження певний аналог твердження 4.2.14.

**Твердження 4.3.5.** *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^S$ – компактний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, зосереджена на множині $T \subseteq S$, і $\varphi : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^T$, $\varphi(x) = x|_T$. Тоді формулою*
$$g(\varphi(x)) = f(x)$$
*означаєтьcя неперервна функція $g : \varphi(X) \to \mathbb{R}$.*

*Доведення.* Зосередженість функції $f$ на множині $T$ рівносильна тому, що функція $g$ означена коректно. Залишається перевірити, що $g$ неперервна.

Нехай $Z = \varphi(X)$ і припустимо, що функція $g$ не є неперервною в деякій точці $z_0 \in Z$. Розглянемо систему $\mathcal{V}$ усіх околів точки $z_0$ в просторі $Z$ як напрямлену множину з природним порядком за включенням
$$V_1 \leq V_2 \quad \Leftrightarrow \quad V_2 \subseteq V_1.$$
Згідно з припущенням, існує $\varepsilon > 0$ таке, що для кожного $V \in \mathcal{V}$ існує $z_V \in V$ таке, що
$$|g(z_V) - g(z_0)| \geq \varepsilon.$$
Для кожного $V \in \mathcal{V}$ виберемо $x_V \in X$ таке, що $z_V = \varphi(x_V)$. Оскільки простір $X$ компактний, то сітка $(x_V)_{V \in \mathcal{V}}$ має граничну точку $x_0 \in X$. За неперервністю відображення $\varphi$ точка $\varphi(x_0)$ є граничною точкою сітки $(z_V)_{V \in \mathcal{V}}$. Але $z_V \to z_0$ згідно з вибором напрямленої множини $\mathcal{V}$ і точок $z_V$. Тому $z_0 = \varphi(x_0)$.

Використовуючи неперервність відображення $\varphi$ в точці $x_0$ виберемо $V \in \mathcal{V}$ так, що $|f(x_V) - f(x_0)| < \varepsilon$. Тепер маємо, що
$$|g(z_V) - g(z_0)| = |f(x_V) - f(x_0)| < \varepsilon,$$
що призводить до суперечності. □

### 4.3.2. Топологічна вага компактних підмножин простору неперервних функцій.

Спочатку ми доведемо твердження про зв'язок між точково скінченними сім'ями і системами непорожніх множин.

**Твердження 4.3.6.** *Нехай $\mathcal{A} = (A_i : i \in I)$ – нескінченна точково скінченна сім'я непорожніх множин. Тоді відповідна система*

$$\mathcal{B} = \{A_i : i \in I\}$$

*також точково скінченна і $|\mathcal{B}| = |I|$.*

*Доведення.* Для кожного $B \in \mathcal{B}$ виберемо $i_B \in I$ так, що $B = A_{i_B}$. Для довільної точки $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ позначимо

$$I(x) = \{i \in I : x \in A_i\} \qquad \text{i} \qquad \mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}.$$

Оскільки

$$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : i_B \in I(x)\}$$

і кожна множина $I(x)$ скінченна, то система $\mathcal{B}$ також точково скінченна.

Зрозуміло, що $|\mathcal{B}| \leq |I|$. Тому залишилось показати, що $|\mathcal{B}| \geq |I|$. Для кожної множини $B \in \mathcal{B}$ позначимо

$$I(B) = \{i \in I : A_i = B\}.$$

Оскільки всі множини $B$ непорожні, а сім'я $\mathcal{A}$ точково скінченна, то всі множини $I(B)$ скінченні. Крім того,

$$I = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} I(B).$$

Тому з нескінченності множини $I$ випливає нескінченність системи $\mathcal{B}$ і

$$|I| \leq |\mathcal{B}| \cdot \aleph_0 = |\mathcal{B}|.$$

□

Наступний результат є основним у даному пункті і дає оцінку на топологічну вагу компактних підпросторів простору неперервних функцій.

**Теорема 4.3.7.** *Нехай $X$ – топологічний простір і $\aleph$ – нескінченний кардинал. Тоді наступні умови рівносильні:*

$(i)$ *довільна точково скінченна сім'я непорожніх функціонально відкритих в $X$ множин має потужність, яка не перевищує $\aleph$;*

(*ii*) $w(Y) \le \aleph$ *для довільного компакту Валдівіа* $Y \subseteq C_p(X)$*;*

(*iii*) $w(Y) \le \aleph$ *для довільного компакту Еберлейна* $Y \subseteq C_p(X)$*.*

*Доведення.* (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*). Нехай $Y \subseteq C_p(X)$ – компакт Валдівіа. Згідно з означенням компакт Валдівіа $Y$ гомеоморфний деякому компакту $Z \subseteq \mathbb{R}^T$ такому, що множина

$$B_0 = \{z \in Z : |\operatorname{supp} z| \le \aleph_0\}$$

щільна в $Z$. Нехай $\varphi : Z \to Y$ – гомеоморфізм. Для довільних $x \in X$ і $z \in Z$ позначимо

$$f(x,z) = \varphi(z)(x).$$

Оскільки функція обчислення $g : X \times C_p(X) \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = y(x),$$

нарізно неперервна і

$$f(x,z) = g(x,\varphi(z)),$$

то $f$ є нарізно неперервною функцією на $X \times Z$. Зауважимо, крім того, що множина

$$B = \{z \in Z : |\operatorname{supp} z| \le \aleph\}$$

є щільною в просторі $Z$, адже $B_0 \subseteq B$. Тому згідно з теоремою 4.1.12 функція $f$ залежить від $\aleph$ координат відносно другої змінної, тобто існує множина $S \subseteq T$ така, що

$$|S| \le \aleph \qquad \text{і} \qquad f(x,z') = f(x,z'')$$

для довільних $x \in X$, $z', z'' \in Z$ з $z'|_S = z''|_S$.

Позначимо

$$\psi : Z \to \mathbb{R}^S, \qquad \psi(z) = z|_S \qquad \text{і} \qquad \tilde{Z} = \psi(Z).$$

Згідно з твердженням 4.3.4, маємо, що $w(\tilde{Z}) \le \aleph$. Крім того, відображення $g : X \times \tilde{Z} \to \mathbb{R}$,

$$g(x,\psi(z)) = f(x,z),$$

є нарізно неперервним (неперервність $g$ відносно першої змінної випливає з відповідної властивості функції $f$, а неперервність $g$ відносно другої змінної – з твердження 4.3.5). Тому асоційоване відображення $\tilde{\varphi} : \tilde{Z} \to C_p(X)$,

$$\tilde{\varphi}(\tilde{z})(x) = g(x,\tilde{z}),$$

неперервне. Тоді, згідно з твердженням 4.2.16, маємо, що

$$w(\tilde{\varphi}(\tilde{Z})) \le w(\tilde{Z}) \le \aleph.$$

Але
$$\tilde{\varphi}(\tilde{z})(x) = g(x, \tilde{z}) = f(x, z) = \varphi(z)(x),$$
де $\tilde{z} = \psi(z)$. Отже,
$$Y = \varphi(Z) = \tilde{\varphi}(\tilde{Z}) \qquad \text{i} \qquad w(Y) \le \aleph.$$

Імплікація $(ii) \Rightarrow (iii)$ випливає з того, що кожний компакт Еберлейна є компактом Валдівіа.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Міркуватимемо від супротивного. Нехай $\mathcal{U} = (U_i : i \in I)$ – точково скінченна сім'я непорожніх функціонально відкритих в $X$ множин потужності $|I| > \aleph$. Згідно з твердженням 4.3.6 відповідна система
$$\mathcal{G} = \{U_i : i \in I\}$$
також точково скінченна і $|\mathcal{G}| = |I| > \aleph$.

Далі міркуємо подібно, як при доведенні твердження 4.2.18. Позначимо через $f_0$ нульову функцію на $X$. Для кожного $G \in \mathcal{G}$ візьмемо неперервну невід'ємну функцію $f_G : X \to \mathbb{R}$ таку, що
$$G = \operatorname{supp} f_G$$
і позначимо
$$Y = \{f\} \cup \{f_G : G \in \mathcal{G}\}.$$

Покажемо, що всі точки $f_G$ є ізольованими в просторі $Y \subseteq C_p(X)$. Зауважимо спочатку, що для різних множин $G$ функції $f_G$ також різні, адже множина $G$ є носієм функції $f_G$. Зафіксуємо $G \in \mathcal{G}$ і $x \in G$. Розглянемо базисний окіл
$$V = \{f \in C_p(X) : f(x) > 0\}$$
точки $f_G$ в просторі $C_p(X)$. Оскільки
$$\{G \in \mathcal{G} : f_G \in V\} = \{G \in \mathcal{G} : x \in G\} = \mathcal{G}(x)$$
і множина $\mathcal{G}(x)$ скінченна, то точка $f_G$ ізольована в просторі $Y$.

Тепер доведемо, що довільний окіл точки $f_0$ в просторі $Y$ містить всі, крім скінченної кількості, точки $f_G$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$, точки $x_1, \dots x_n \in X$ і розглянемо базисний окіл
$$V_0 = \{f \in C_p(X) : |f(x_k)| < \varepsilon,\, 1 \le k \le n\}$$
точки $f_0$ в просторі $C_p(X)$. Оскільки
$$\mathcal{G}_0 = \{G \in \mathcal{G} : f_G \notin V_0\} \subseteq \{G \in \mathcal{G} : \{x_1, \dots, x_n\} \cap G \ne \emptyset\} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{G}(x_k),$$

то система $\mathcal{G}_0$ скінченна, і окіл $V_0 \cap Y$ точки $f_0$ в просторі $Y$ містить точки $f_G$, крім елементів скінченної множини $\{f_G : G \in \mathcal{G}_0\}$.

Отже, простір $Y$ є компактифікацією Александрова дискретного простору

$$Z = \{f_G : G \in \mathcal{G}\}$$

і згідно з твердженням 4.3.3 $Y$ є компактом Еберлейна.

Залишилося зауважити, що $|Z| = |\mathcal{G}| > \aleph$ і $Z$ – дискретний підпростір простору $Y$. Тому

$$w(Y) \geq |Z| > \aleph,$$

що дає нам суперечність. $\square$

Оскільки для цілком регулярних просторів $X$ умова $(i)$ зі щойно доведеної теореми рівносильна тому, що $p(X) \leq \aleph$, а метризовність компакту Валдівіа означає зліченність його ваги, то ми одержуємо наступний наслідок.

**Наслідок 4.3.8.** *Нехай $X$ – цілком регулярний простір. Тоді наступні умови рівносильні:*

$(i)$ $p(X) = \aleph_0$*;*

$(ii)$ *довільний компакт Валдівіа $Y \subseteq C_p(X)$ метризовний.*

## 4.3.3. Точково скінченна кліткoвість простору неперервних функцій на компакті Валдівіа.

У цьому пункті ми вивчимо властивості компактів Валдівіа $Y$ з допомогою точково скінченної клітковості простору $C_p(Y)$.

**Теорема 4.3.9.** *Нехай $Y$ – компакт Валдівіа і $\aleph$ – нескінченний кардинал. Тоді наступні умови рівносильні:*

$(i)$ $w(Y) \leq \aleph$*;*

$(ii)$ $p(C_p(Y)) \leq \aleph$*;*

$(iii)$ *існує простір $X \subseteq C_p(Y)$ з $p(X) \leq \aleph$, який відокремлює точки в $Y$.*

*Доведення.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Нехай $w(Y) \leq \aleph$. Якщо простір $Y$ скінченний, то $C_p(Y) = \mathbb{R}^Y$ і

$$d(C_p(Y)) = d(\mathbb{R}^Y) = \aleph_0 \leq \aleph.$$

Тепер розглянемо випадок нескінченного простору $Y$. Візьмемо нескінченну базу $\mathcal{B}$ в просторі $Y$ потужності $|\mathcal{B}| \leq \aleph$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо через $\mathcal{A}_n$ множину всіх наборів

$$\alpha = (a_1, \ldots, a_n),$$

які складаються з раціональних чисел $a_k \in \mathbb{Q}$, а через $\mathcal{B}_n$ множину всіх наборів

$$\beta = (B_1, \ldots, B_n),$$

котрі складаються з непорожніх множин $B_k \in \mathcal{B}$, замикання яких попарно не перетинаються. Зрозуміло, що

$$|\mathcal{A}_n| = |\mathbb{Q}|^n = \aleph_0$$

і

$$|\mathcal{B}_n| \leq |\mathcal{B}^n| = |\mathcal{B}|^n \leq \aleph.$$

Згідно з означенням компакта Валдівіа, простір $Y$ гаусдорфовий компактний простір, зокрема нормальний (див. [16, теорема 3.1.9]). Тому з класичної леми Урисона [16, теорема 1.5.11] випливає, що для довільних $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}_n$ і $\beta = (B_1, \ldots, B_n) \in \mathcal{B}_n$ існує неперервна функція $f_{\alpha,\beta} : Y \to \mathbb{R}$ така, що

$$f_{\alpha,\beta}(x) = a_k$$

для довільних $1 \leq k \leq n$ і $x \in \overline{B}_k$.

Розглянемо множину

$$C = \{f_{\alpha,\beta} : n \in \mathbb{N}, \, \alpha \in \mathcal{A}_n, \, \beta \in \mathcal{B}_n\}.$$

Оскільки множина $\mathbb{Q}$ щільна в $\mathbb{R}$, система $\mathcal{B}$ – база простору $Y$, то множина $C$ щільна в просторі $R^Y$, зокрема множина $C$ щільна в просторі $C_p(Y)$. Тому

$$d(C_p(Y)) \leq |C| \leq \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n \times \mathcal{B}_n \right| \leq \aleph_0 \times \aleph \times \aleph_0 = \aleph.$$

Отже, так чи інакше, $d(C_p(Y)) \leq \aleph$. Тому $p(C_p(Y)) \leq \aleph$ згідно з твердженнями 2.3.10 і 2.3.11.

Для доведення імплікації $(ii) \Rightarrow (iii)$ достатньо взяти $X = C_p(Y)$, адже простір $Y$ цілком регулярний.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Нехай $X \subseteq C_p(Y)$, причому $X$ відокремлює точки в $Y$ і $p(X) \leq \aleph$. Зауважимо, що функція обчислення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x(y),$$

нарізно неперервна. Тоді асоційоване з $f$ відображення $\varphi : Y \to C_p(X)$,

$$\varphi(y)(x) = x(y)$$

неперервне. Оскільки $X$ відокремлює точки в $Y$, то неперервне відображення $\varphi : Y \to \varphi(Y)$ між компактними просторами $Y$ і $\varphi(Y)$ бієктивне, а тому, згідно з [16, теорема 3.1.13], $\varphi$ є гомеоморфізмом. Отже, $\varphi(Y)$ також компакт Валдівіа і, згідно з теоремою 4.3.7, маємо, що $w(Y) \leq \aleph$. □

**Зауваження 4.3.10.** Зауважимо, що в теоремі 4.3.9 замінити компакт Валдівіа на довільний компакт не можна. Справді, для компактного $Y = \beta\mathbb{N}$, де $\beta\mathbb{N}$ – компактифікація Стоуна-Чеха простору $\mathbb{N}$ з дискретною топологією (див. [16, п. 3.6]), $p(C_p(Y)) = \aleph_0$ [3, доведення теореми 2.11] і $w(Y) = 2^{\aleph_0}$.

Наступний наслідок характеризує метризовні компакти Валдівіа $Y$ в термінах точково скінченної кліткової простору $C_p(Y)$ і, зокрема, дає позитивну відповідь на питання 4.3.1 з [35], сформульоване для компактів Корсона (відповідний результат для компактів Корсона був також доведений в [22]).

**Наслідок 4.3.11.** *Довільний компакт Валдівіа $Y$ метризовний тоді і тільки тоді, коли $p(C_p(Y)) = \aleph_0$.*

### 4.3.4. Число Сусліна і одна супертопологічна властивість компактів Еберлейна.

Для довільного топологічного простору $X$ найменше кардинальне число $\aleph \geq \aleph_0$, для якого кожна система відкритих в просторі $X$ попарно неперетинних множин має потужність, яка не перевищує $\aleph$, називається *числом Сусліна* простору $X$ і позначається $c(X)$. Число $c(X)$ називається також *кліткою вістю* простору $X$.

Зауважимо, що умова зліченності ланцюжків простору $X$ означає рівність $c(X) = \aleph_0$. Крім того, оскільки кожна система попарно неперетинних множин точково скінченна, то з твердження 4.3.6 випливає, що $c(X) \leq p(X)$ для довільного топологічного простору $X$.

З допомогою наступного допоміжного твердження ми покажемо, що у класі берівських просторів ці кардинальні характеристики збігаються.

**Лема 4.3.12.** *Нехай $\mathcal{G}$ – точково скінченна система непорожніх відкритих підмножин берівського простору $X$ і $U \subseteq X$ – відкрита непорожня множина. Тоді існують $n \in \mathbb{N}$, різні множини $G_1, \ldots G_n \in \mathcal{G}$ і відкрита непорожня множина $V \subseteq U$ такі, що*

$$V \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} G_k \qquad \text{і} \qquad V \cap G = \emptyset$$

*для кожної множини $G \in \mathcal{G} \setminus \{G_1, \ldots, G_n\}$.*

*Доведення.* Для кожного $x \in X$ позначимо

$$n(x) = |\{G \in \mathcal{G} : x \in G|\}$$

і для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$F_n = \{x \in X : n(x) \leq n\}.$$

Оскільки всі множини $G \in \mathcal{G}$ відкриті, то всі множини $F_n$ замкнені. Крім того, точково скінченність системи $\mathcal{G}$ означає, що

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Тому з беровості простору $X$ випливає, що існують номер $m \in \mathbb{N}$ і відкрита непорожня множина $W \subseteq U$ такі, що

$$W \subseteq U \cap F_m.$$

Залишилося позначити $n = \sup\{n(x) : x \in W\}$ і вибрати різні множини $G_1, \ldots G_n \in \mathcal{G}$ так, що

$$V = W \cap G_1 \cap \cdots \cap G_n \neq \emptyset.$$

□

Тепер перейдемо до встановлення вищезгаданої рівності.

**Твердження 4.3.13.** *Для довільного берівського простору $X$ виконується рівність $c(X) = p(X)$.*

*Доведення.* Нехай $\mathcal{U}$ – точково скінченна система непорожніх відкритих множин. Використовуючи лему 4.3.12, для кожної множини $U \in \mathcal{U}$ знайдемо $n_U \in \mathbb{N}$, різні множини

$$G(1, U) \ldots G(n_U, U) \in \mathcal{U}$$

і відкриту непорожню множину $V_U \subseteq U$ такі, що

$$V_U \subseteq \bigcap_{k=1}^{n_U} G(k, U) \qquad \text{і} \qquad V_U \cap G = \emptyset$$

для кожної множини $G \in \mathcal{U} \setminus \{G(1, U), \ldots, G(n_U, U)\}$.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$\mathcal{U}_n = \{U \in \mathcal{U} : n_u = n\}.$$

Зрозуміло, що

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n.$$

Крім того, для кожного $n \in \mathbb{N}$ сім'я

$$\mathcal{V}_n = (V_U : U \in \mathcal{U}_n)$$

точково скінченна, а відповідна їй система

$$\mathcal{W}_n = \{V_U : U \in \mathcal{U}_n\}$$

складається з попарно неперетинних множин. Тому з допомогою твердження 4.3.6 отримуємо, що

$$|\mathcal{U}_n| = |\mathcal{V}_n| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{W}_n|\} \leq c(X).$$

Отже,

$$|\mathcal{U}| = \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{U}_n \right| \leq c(X) \cdot \aleph_0 = c(X).$$

$\square$

Наступне твердження показує, що умова беровості простору $X$ у щойно доведеному твердженні є істотною.

**Твердження 4.3.14.** *Існує топологічний простір $X$ такий, що $c(X) < p(X)$.*

*Доведення.* Нехай $a \in Y = [0,1]^{[0,1]}$ і $X = \sigma(a)$. Оскільки простір $Y$ сепарабельний (див. [16, теорема 2.3.15]), а, згідно з твердженням 2.1.3, простір $X$ є щільним підпростором простору $Y$, то

$$c(X) = c(Y) = \aleph_0.$$

З іншого боку, сім'я $(U_t : t \in [0,1])$ множин

$$U_t = \{x \in X : x(t) > 0\}$$

точково скнченна в просторі $X$, і тому

$$p(X) \geq |[0,1]| > \aleph_0.$$

$\square$

Для доведення основного результату цього пункту нам потрібна наступна властивість компактів Еберлейна [47, теорема III.5.8].

**Теорема 4.3.15.** *Для довільного компакту Еберлейна $X$ виконується рівність $c(X) = w(X)$.*

Наступний результат є основним результатом даного пункту і дає супертопологічну властивість компактів Еберлейна.

**Теорема 4.3.16.** *Для довільного компакту Еберлейна $X$ виконується рівність $p(X) = p(C_p(X))$.*

*Доведення.* Оскільки довільний компактний простір є берівським, а компакт Еберлейна є компактом Валдівіа, то, згідно з твердженням 4.3.13, теоремою 4.3.15 і теоремою 4.3.9, маємо, що

$$p(X) = c(X) = w(X) = p(C_p(X)).$$

□

# 4.4 Простори Рудіна

У зв'язку з теоремою Рудіна (теорема 4.2.1) природно виникає наступне поняття, введене Т.Банахом у роботі [5].

Казатимемо , що топологічний простір $X$ є *простором Рудіна*, якщо для довільного топологічного простору $Y$ кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ є функцією першого класу Бера.

У даному підрозділі ми викладемо основні властивості просторів Рудіна і з допомогою результатів про залежність встановимо властивості лінделефових просторів Рудіна.

### 4.4.1. Простори Рудіна і відображення обчислення.

Для топологічного простору $X$ відображення $c_X : X \times C_p(X) \to \mathbb{R}$,

$$c_X(x, y) = y(x),$$

називатимемо *відображенням обчислення.*

**Твердження 4.4.1.** *Для довільного топологічного простору $X$ відображення обчислення $c_X$ нарізно неперервне.*

*Доведення.* Зауважимо, що для асоційованого $c_X$ відображення $\psi : C_p(X) \to C_p(X)$ маємо, що

$$\psi(y)(x) = c_X(x, y) = y(x)$$

для довільних $x \in X$ і $y \in C_p(X)$, тобто відображення $\psi$ тотожне. Залишилося використати твердження 3.1.6. $\square$

Множина $E$ у топологічному просторі $X$ має *функціональний тип $G_\delta$*, якщо $E = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$, де $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність функціонально відкритих в $X$ множин. Множина $X \setminus E$ називається *функціонального типу $F_\sigma$.*

З неперервності композиції неперервних відображень випливає, що прообраз при неперервному відображенні функціонально відкритої чи функціонально замкненої множини зберігає свій тип. Тому аналогічну властивість мають множини функціонального типу $G_\delta$ чи $F_\sigma$. Крім того, зрозуміло, що об'єднання послідовності множин функціонального типу $G_\delta$ є множиною функціонального типу $G_\delta$, а перетин послідовності множин функціонального типу $F_\sigma$ є множиною функціонального типу $F_\sigma$.

Ми будемо використовувати наступну властивість функцій першого класу Бера (див. [49, теорема 3.8]).

**Теорема 4.4.2.** *Нехай $X$ – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – така функція, що для довільного непорожнього інтервала $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ множина $f^{-1}((a, b))$ має функціональний тип $F_\sigma$. Тоді функція $f$ першого класу Бера.*

Наступні характеризації просторів Рудіна одержані в [5] і [59].

**Твердження 4.4.3.** *Для довільного топологічного простору $X$ наступні умови рівносильні:*

- $(i)$ *$X$ простір Рудіна;*
- $(ii)$ *$c_X$ функцією першого класу Бера;*
- $(iii)$ *множина $E = \{(x, y) : y(x) = 0\}$ має функціональний тип $G_\delta$ в просторі $X \times C_p(X)$.*

*Доведення.* $(i) \Rightarrow (ii)$. Згідно з твердженням 4.4.1, функція $c_X$ нарізно неперервна. Тепер оскільки $X$ простір Рудіна, то $c_X$ функція першого класу Бера.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Нехай $Y$ − топологічний простір і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ − нарізно неперервна функція. Покажемо, що $f$ є функцією першого класу Бера. Зауважимо, що асоційоване з $f$ відображення $\psi : Y \to C_p(X)$,

$$\psi(y)(x) = f(x, y),$$

неперервне. Згідно з $(ii)$, існує послідовність $(g_n)_{n=1}^\infty$ неперервних функцій $g_n : X \times C_p(X)$, яка поточково на $X \times C_p(X)$ збігається до функції $c_X$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо функцію $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x, y) = g_n(x, \psi(y)),$$

яка є неперервною, як композиція неперервних відображень. Крім того, для довільних $x \in X$ і $y \in Y$ маємо, що

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) = \lim_{n\to\infty} g_n(x, \psi(y)) = c_X(x, \psi(y)) = \psi(y)(x) = f(x, y).$$

Отже, функція $f$ першого класу Бера.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Згідно з $(ii)$, існує послідовність $(f_n)_{n=1}^\infty$ неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, де $Y = C_p(X)$, яка поточково на $X \times Y$ збігається до нарізно неперервної функції обчислення $f = c_X$. Для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$G_{mn} = f_n^{-1}((-\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{m})) \quad \text{і} \quad E_{mn} = \bigcup_{k\geq n} G_{mk}.$$

Оскільки всі множини $E_{mn}$ функціонально відкриті, то для встановлення умови $(iii)$ достатньо перевірити рівність

$$E = \bigcap_{m,n\in\mathbb{N}} E_{mn}.$$

Справді, якщо $x \in E$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0,$$

то для довільних $m, n \in \mathbb{N}$ існує $k \geq n$ таке, що

$$f_k(x) \in (-\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{m}).$$

Отже, $x \in E_{mn}$ для довільних $m, n \in \mathbb{N}$, отже, $x \in \bigcap\limits_{m,n\in\mathbb{N}} E_{mn}$.

Тепер нехай $x \in \bigcap\limits_{m,n\in\mathbb{N}} E_{mn}$. Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$ маємо, що

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \in \left[-\tfrac{1}{m}, \tfrac{1}{m}\right],$$

звідки $f(x) = 0$, тобто $x \in E$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Нехай $f = c_X$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ і $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – така неперервна функція, що

$$g^{-1}(0) = (-\infty, a] \cup [b, +\infty).$$

Зрозуміло, що відображення $\varphi : C_p(X) \to C_p(X)$,

$$\varphi(y)(x) = g(y(x)),$$

і $h : X \times C_p(X) \to X \times C_p(X)$,

$$h(x, y) = (x, \varphi(y)),$$

неперервні. Оскільки

$$f^{-1}((-\infty, a] \cup [b, +\infty)) = f^{-1}(g^{-1}(0)) = \{(x, y) : y(x) \in g^{-1}(0)\} =$$

$$= \{(x, y) : g(y(x)) = 0\} = \{(x, y) : \varphi(y)(x) = 0\} =$$

$$= \{(x, y) : (x, \varphi(y)) \in E\} = \{(x, y) : h(x, y) \in E\} = h^{-1}(E),$$

то

$$f^{-1}((a, b)) = (X \times C_p(X)) \setminus h^{-1}(E)$$

і множина $f^{-1}((a, b))$ має функціональний тип $F_\sigma$. Тому, згідно з теоремою 4.4.2, функція $f$ першого класу Бера. □

**4.4.2. Умова зліченності ланцюжків простору неперервних функцій і одноточкові множини в просторах Рудіна.** Спочатку з допомогою леми Шаніна ми доведемо добре відому властивість просторів $C_p(X)$.

**Твердження 4.4.4.** *Для довільного топологічного простору $X$ простір $C_p(X)$ має властивість зліченності ланцюжків.*

*Доведення.* Розпочнемо з випадку цілком регулярного простору $X$. Візьмемо довільну зліченну базу $\mathcal{B}$ непорожніх відкритих множин на числовій прямій $\mathbb{R}$. Ми будемо розглядати базисні відкриті множини в просторі $C_p(X)$ такого вигляду

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} \{f \in C_p(X) : f(x_k) \in B(U, x_k)\},$$

де

$$A(U) = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$$

– множина різних точок $x_k$ і

$$(B(U, x_1), \ldots, B(U, x_n)) \in \mathcal{B}^n.$$

Зауважимо, що дві базисні відкриті множини $U$ і $V$ в просторі $C_p(X)$ мають непорожній перетин тоді і тільки тоді, коли

$$B(U, x) \cap B(V, x) \neq \emptyset$$

для кожного $x \in A(U) \cap A(V)$. Зокрема, базисні відкриті множини $U$ і $V$ мають непорожній перетин, якщо $A(U) \cap A(V) = \emptyset$.

Припустимо, що простір $C_p(X)$ не має властивості зліченності ланцюжків, тобто існує незліченна сім'я $(U_i : i \in I)$, яка складається з непорожніх базисних відкритих попарно неперетинних множин $U_i$. Для кожного $i \in I$ позначимо $A_i = A(U_i)$ і, застосувавши до сім'ї $(A_i : i \in I)$ твердження 2.2.7, знайдемо незліченну множину $J \subseteq I$ і скінченну множину $A \subseteq X$ такі, що $A_i \cap A_j = A$ для довільних різних індексів $i, j \in J$. Оскільки множини $U_i$ попарно неперетинні, то множина $A$ непорожня, тобто $n = |A| \in \mathbb{N}$.

Нехай $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Для кожного набору

$$\beta = (B_1, \ldots, B_n) \in \mathcal{B}^n$$

позначимо

$$J(\beta) = \bigcap_{k=1}^{n} \{i \in J : B(U_i, x_k) = B_k\}.$$

Зрозуміло, що

$$J = \bigcap_{\beta \in \mathcal{B}^n} J(\beta).$$

Оскільки множина $J$ незліченна, а множина $\mathcal{B}^n$ зліченна, то існує набір $\beta_0 \in \mathcal{B}^n$ такий, що множина $J(\beta_0)$ незліченна. Зокрема, $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ для довільних різних індексів $i, j \in J(\beta_0)$, що дає нам суперечність.

Тепер розглянемо випадок довільного топологічного простору $X$. Нехай $(f_i : i \in I)$ – сім'я всіх неперервних функцій $f_i : X \to \mathbb{R}$. Розглянемо неперервне відображення $\varphi : X \to \mathbb{R}^I$,

$$\varphi(x) = (f_i(x))_{i \in I},$$

і позначимо $Y = \varphi(X)$. Зрозуміло, що простір $Y$ цілком регулярний. Легко бачити, що відображення $\psi : C_p(Y) \to C_p(X)$,

$$\psi(g)(x) = g(\varphi(x)),$$

гомеоморфізм. Залишилося використати це твердження для цілком регулярного простору $Y$. $\square$

Ми будемо використовувати наступну властивість неперервних функцій.

**Твердження 4.4.5.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $Y$ – топологічний простір з умовою зліченності ланцюжків, $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – неперервна функція, $x_0 \in X$ і $\varepsilon > 0$. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існують послідовності $(U_{nm})_{m=1}^{\infty}$ відкритих околів точки $x_0 \in X$ і $(V_{nm})_{m=1}^{\infty}$ відкритих множин у просторі $Y$ такі, що множина $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} V_{nm}$ щільна в просторі $Y$ і*

$$|f_n(x', y') - f_n(x'', y'')| < \tfrac{1}{n}$$

*для довільних $m \in \mathbb{N}$, $x', x'' \in U_{nm}$ і $y', y'' \in V_{nm}$.*

*Доведення.* Розглянемо систему $\mathcal{W}$ всіх множин $W = U \times V$ таких, що $U$ є відкритим околом точки $x_0$ в просторі $X$, $V$ є відкритою непорожньою множиною в просторі $Y$ і

$$|f_n(x', y') - f_n(x'', y'')| < \tfrac{1}{n}$$

для довільних $x', x'' \in U$ і $y', y'' \in V$. Виберемо максимальну сім'ю $(W_i : i \in I)$, яка складається з попарно неперетинних множин

$$W_i = U_i \times V_i \in \mathcal{W}.$$

Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $I \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Оскільки всі множини $U_i$ є околами точки $x_0$, то сім'я $(V_i : i \in I)$ складається з попарно неперетинних множин. Тому множина $I$ не більш ніж зліченна. Покажемо, що

$$Y = \overline{\bigcup_{i \in I} V_i}.$$

Припустимо, що відкрита множина $G = Y \setminus \overline{\bigcup_{i \in I} V_i}$ непорожня. Тоді візьмемо довільну точку $y \in G$ і, використовуючи неперервність функції $f$ в точці $(x_0, y)$, знайдемо відкритий окіл $U$ точки $x_0$ і відкритий окіл $V \subseteq G$ точки $y$ такі, що $U \times V \in \mathcal{W}$. Тепер маємо, що $W \cap W_i = \emptyset$ для кожного $i \in I$, що супуречить максимальності сім'ї $(W_i : i \in I)$. Отже, множина $\bigcup_{i \in I} V_i$ щільна в просторі $Y$.

Залишилося використовуючи не більш ніж зліченність множини $I$ вибрати послідовність $(W_n)_{n=1}^{\infty}$ множин $W_n = U_n \times V_n$ так, що

$$\{W_n : n \in \mathbb{N}\} = \{W_i : i \in I\}.$$

$\square$

Наступне твердження уточнює внутрішню структуру просторів Рудіна.

**Твердження 4.4.6.** *Нехай $X$ – довільний цілком регулярний простір Рудіна. Тоді кожна одноточкова множина є $G_\delta$-множиною в $X$.*

*Доведення.* Нехай $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність неперервних функцій $f_n : X \times Y \to \mathbb{R}$, де $Y = C_p(X)$, яка поточково на $X \times Y$ збігається до нарізно неперервної функції обчислення $f = c_X$ і $x_0 \in X$ – фіксована точка. З допомогою твердження 4.4.5 для кожного $n \in \mathbb{N}$ побудуємо послідовності $(U_{nm})_{m=1}^{\infty}$ відкритих околів точки $x_0 \in X$ і $(V_{nm})_{m=1}^{\infty}$ відкритих множин у просторі $Y$ такі, що множина $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} V_{nm}$ щільна в просторі $Y$ і

$$|f_n(x', y') - f_n(x'', y'')| < \tfrac{1}{n}$$

для довільних $m \in \mathbb{N}$, $x', x'' \in U_{nm}$ і $y', y'' \in V_{nm}$. Тоді за неперервністю функції $f$ маємо, що

$$|f_n(x, y) - f_n(x_0, y)| \leq \tfrac{1}{n}$$

для довільних $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} U_{nm}$ і $y \in Y$. Отже,

$$f(x, y) = f(x_0, y)$$

для довільних $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} U_{nm}$ і $y \in Y$. Оскільки $X$ цілком регулярний, то

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} U_{nm}.$$

□

### 4.4.3. Компактні і лінделефові простори Рудіна.

Спочатку встановимо властивості компактних підмножин просторів Рудіна.

**Теорема 4.4.7.** *Довільний компактний підпростір $X$ цілком регулярного простору Рудіна $Z$ метризовний.*

*Доведення.* Позначимо $Y = C_p(Z)$. Відображення обчислення $c_Z$ є нарізно неперервною функцією першого класу Бера. Тому функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = c_Z(x, y),$$

також нарізно неперервна функція першого класу Бера. Зауважимо, що кожна функціонально дискретна сім'я функціонально відкритих непорожніх множин у просторі $Y$ є не більш ніж зліченною, адже простір $Y$ має властивість зліченності ланцюжків. Нехай $\psi : X \to C_p(Y)$ – асоційоване з $f$ відображення, тобто

$$\psi(x)(y) = f(x, y) = c_Z(x, y) = y(x).$$

Зокрема, відображення $\psi$ є звуженням канонічного вкладення $\varphi : Z \to C_p(C_p(Z))$,

$$\varphi(z)(y) = y(z),$$

яке, згідно із зауваженням 4.2.5, гомеоморфне вкладення. Оскільки, згідно з теоремою 4.2.17, простір $K = \psi(X)$ метризовний, то простір $X$ також метризовний. □

Наступний простий приклад показує, що теорему 4.4.7 не можна узагальнити на випадок лінделефового простору Рудіна.

**Твердження 4.4.8.** *Існує неметризовний лінделефовий простір Рудіна.*

*Доведення.* Достатньо розглянути довільний зліченний неметризовний простір $X$, який, зрозуміло, лінделефовий. Крім того, $X$ простір Рудіна. Справді, простір $C_p(X)$ метризовний, як підпростір метризовного простору $\mathbb{R}^X$, і, згідно з теоремою Рудіна (теорема 4.2.1), нарізно неперервна функція обчислення $c_X : X \times C_p(X) \to \mathbb{R}$ належить до першого класу Бера. Залишилося використати твердження 4.4.3. □

З іншого боку, теорема 4.4.7 твердить, що кожний компактний підпростір цілком регулярного простору Рудіна є *субметризовним*, тобто неперервно бієктивно відображається на деякий метризовний простір. Тому природно виникає наступне питання.

**Питання 4.4.9.** *Нехай $Z$ – цілком регулярний простір Рудіна і $X \subseteq Z$ – лінделефовий підпростір простору $Z$. Чи можна простір $X$ з допомогою неперервної бієкції відобразити на сепарабельний метризовний простір?*

Спочатку дослідимо умову сепарабельності лінделефових просторів Рудіна і доведемо наступний результат про лінделефові простори Рудіна, одержаний у [5, теорема 6.2].

**Теорема 4.4.10.** *Довільний цілком регулярний лінделефовий простір Рудіна $X$ є сепарабельним.*

*Доведення.* Згідно з твердженням 4.4.3, множина

$$E = \{(x, y) : y(x) = 0\}$$

має функціональний тип $G_\delta$ в просторі $X \times C_p(X)$. Отже, існує послідовність $(G_n)_{n=1}^\infty$ відкритих множин у просторі $X \times C_p(X)$ така, що

$$E = \bigcap_{n=1}^\infty G_n.$$

Позначимо через $y_0$ нульову функцію на просторі $X$. Зрозуміло, що

$$X \times \{y_0\} \subseteq E.$$

Тому для кожного $n \in \mathbb{N}$ і довільної точки $x \in X$ існують відкритий окіл $U_n(x)$ точки $x$ в просторі $X$ і базисний відкритий окіл $V_n(x)$ точки $y_0$ в просторі $C_p(X)$ такі, що

$$U_n(x) \times V_n(x) \subseteq G_n.$$

Зауважимо також, що при цьому для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $x \in X$ існує скінченна множина $A_n(x)$ така, що $y \in V_n(x)$ як тільки $y \in C_p(X)$ таке, що $y(x) = 0$ для кожного $x \in A_n(x)$.

Оскільки простір $X$ лінделефовий, то існує послідовність $(X_n)_{n=1}^\infty$ не більш ніж зліченних множин $X_n \subseteq X$ така, що

$$X = \bigcup_{x \in X_n} U_n(x)$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{x \in X_n} A_n(x).$$

Зрозуміло, що множина $A$ не більш ніж зліченна. Залишилося показати, що $A$ щільна в просторі $X$.

Припустимо, що множина $A$ не є щільною в цілком регулярному просторі $X$. Тоді існує ненульова неперервна функція $z \in C_p(X)$ така, що $z(x) = 0$ для кожного $x \in A$. Покажемо, що $(x, z) \in G_n$ для довільних $x \in X$ і $n \in \mathbb{N}$. Зафіксуємо $x \in X$ і $n \in \mathbb{N}$. Знайдемо $u \in X_n$ таке, що $x \in U_n(u)$. Тоді $z|_{A_n(u)} = 0$, адже $A_n(u) \subseteq A$, а тому $z \in V_n(u)$. Отже,

$$(x, z) \in U_n(u) \times V_n(u) \subseteq G_n.$$

Таким чином ми одержали, що

$$X \times \{z\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = E = \{(x, y) : y(x) = 0\},$$

а це суперечить тому, що функція $z$ ненульова. $\square$

Наступний результат, який доводиться з допомогою теореми 4.1.14, є основним результатом даного підрозділу і дає позитивну відповідь на питання 4.4.9.

**Теорема 4.4.11.** *Нехай $Z$ – цілком регулярний простір Рудіна і $X \subseteq Z$ – ліндельофова підмножина простору $Z$. Тоді існують сепарабельний метризовний простір $H$ і неперервне бієктивне відображення $\varphi : X \to H$.*

*Доведення.* Без обмежень загальності ми можемо вважати, що $Z \subseteq \mathbb{R}^S$. Як і у випадку компактного простору $X$, позначимо $Y = C_p(Z)$ і розглянемо нарізно неперервну функцію $g : Z \times Y \to \mathbb{R}$, $g(z, y) = y(z)$. Оскільки $Z$ простір Рудіна, то існує послідовність неперервних функцій $g_n : Z \times Y \to \mathbb{R}$ така, що

$$g(z, y) = \lim_{n \to \infty} g_n(z, y)$$

для довільних $(z, y) \in Z \times Y$.

Позначимо

$$f_n = g_n|_{X \times Y}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Згідно з теоремою 4.1.14, кожна функція $f_n$, будучи неперервною, залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $x$. Тому, згідно з твердженням 4.2.12, функція $f$ також залежить від зліченної кількості координат відносно змінної $x$, тобто існує не більш ніж зліченна множина $T \subseteq S$ така, що

$$f(x'y) = f(x'', y)$$

для довільних $x', x'' \in X$ з $x'|_T = x''|_T$ і $y \in Y$.

Розглянемо неперервне відображення $\varphi : X \to \mathbb{R}^T$,

$$\varphi(x) = X|_T.$$

Простір $H = \varphi(X)$ є сепарабельним метризовним простором, як підпростір сепарабельного метризовного простору $\mathbb{R}^T$. Крім того, відображення $\varphi$ бієктивне. Справді, якщо $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, то

$$y(x_1) = f(x_1, y) = f(x_2, y) = y(x_2)$$

для кожної неперервної на просторі $Z$ функції $y \in C_p(Z)$. Тому $x_1 = x_2$, адже простір $Z$ цілком регулярний. $\square$

## 4.5 Заключні зауваження до розділу 4

Теорема 4.1.1 вперше сформульована А. Тихоновим у 1930 році в роботі [44] і тут ми подали її доведення, викладене в [16].

Основні результати підрозділу 4.1 теореми 4.1.12 і 4.1.14 отримані в роботах [33] і [59] відповідно.

Теорема 4.2.19 на основі теореми Вери (теорема 4.2.3) доведена в статті [57], а метод доведення, який викладений у підрозділі 4.2 і базується на теоремі 4.1.8, був реалізований в [55].

Як зазначалося на початку підрозділу 4.3, всі основні результати даного підрозділу одержані в роботі [33] і ми в цілому зберегли без змін їх доведення у нашому викладі.

Теорема 4.4.10 викладеним тут методом доведена Т.Банахом в роботі [5], а теорема 4.4.11 на основі теореми 4.1.14 одержана в статті [59].

Зауважимо також, що у роботах [58], [31], [32] вивчалися питання, схожі до залежності від певної кількості координат неперервних і нарізно неперервних функцій, і була розвинена модифікована техніка у термінах локальної залежності з точністю до $\varepsilon$. Ці праці разом із статтями [33] і [59] використовують загальний спосіб міркувань, який дістав назву *координатного методу* і з єдиних позицій викладений в [55].

## 4.6 Вправи до розділу 4

**Вправа 4.6.1** (теорема про діагональне відображення)**.** *Нехай $X$ – топологічний простір, $(Y_s)_{s\in S}$ – сім'я топологічних просторів $Y_s$ і $(f_s)_{s\in S}$ – сім'я неперервних відображень $f_s : X \to Y_s$. Доведіть, що відображення $f : X \to \prod\limits_{s\in S} Y_s$, $f(x) = (f_s(x))_{s\in S}$, неперервне.*

**Вправа 4.6.2** (теорема Александрова [1])**.** *Нехай $X = \{0, 1\}$ – зв'язна двоточка, тобто система $\{X, \emptyset, \{0\}\}$ є топологією простору $X$, $\aleph$ – нескінченний кардинал і $S$ – множина потужності $\aleph$. Доведіть, що простір $X^S$ є універсальним в класі усіх $T_0$-просторів топологічної ваги, яка не перевищує $\aleph$.*

*Вказівка.* Застосуйте міркування, аналогічні, як при доведенні теореми 3.1.11. Зокрема, розгляньте відображення $\varphi_s : Y \to X$, які означаються формулою

$$\varphi_s(y) = \begin{cases} 0, & y \in U_s; \\ 1, & y \in X \setminus U_s. \end{cases}$$

**Вправа 4.6.3.** *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^S$ – компактний простір, $Z$ – топологічний простір з $G_\delta$-діагоналлю і $f : X \to Z$ – неперервне відображення. Доведіть, що $f$ залежить від зліченної кількості координат.*

**Вправа 4.6.4.** *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^S$ – сепарабельний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервна функція. Доведіть, що існує всюди щільна $G_\delta$-множина $A \subseteq X$ така, що звуження функції $f$ на множину $A$ залежить від зліченної кількості координат.*

*Вказівка.* Застосуйте міркування, аналогічні, як при доведенні теореми 4.1.3.

**Вправа 4.6.5.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X \subseteq \mathbb{R}^S$ – топологічний простір з $d(X) \le \aleph$, $Z$ – топологічний простір з $G_\delta$-діагоналлю і $f : X \to Z$ – неперервне відображення. Доведіть, що існує всюди щільна $G_\delta$-множина $A \subseteq X$ така, що звуження відображення $f$ на множину $A$ залежить від $\aleph$ координат.*

**Вправа 4.6.6.** *Нехай $X \subseteq \mathbb{R}^S$ і $Y \subseteq \mathbb{R}^T$ – сепарабельні простори і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Доведіть, що існують всюди щільна в просторі $X$ множина $A$ типу $G_\delta$ і всюди щільна в просторі $Y$ множина $B$ типу $G_\delta$ такі, що звуження функції $f$ на добуток $A \times B$ залежить від зліченної кількості координат.*

*Вказівка.* Спочатку з допомогою вправи 4.6.4 знайдіть всюди щільну в просторі $X$ множину $A$ типу $G_\delta$ таку, що звуження функції $f$ на добуток $A \times Y$ залежить від зліченної кількості координат відносно першої змінної. Потім аналогічно знайдіть множину $B$.

**Вправа 4.6.7.** *Наведіть приклад простору $X \subseteq \mathbb{R}^S$ і неперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ такі, що функція $f$ зосереджена на деякій множині $T \subseteq S$, але функція $g : Y \to \mathbb{R}$,*

$$g(x|_T) = f(x),$$

*не є неперервною.*

*Вказівка.* Розгляньте, наприклад, простір $X = \{x_s : s \in (0,1]\} \subseteq [0,1]^{[0,1]}$, який складається з точок

$$x_s(t) = \begin{cases} s, & t \in \{0, s\}; \\ 0, & t \in (0,1] \setminus \{s\}. \end{cases}$$

Покажіть, що простір $X$ дискретний і, як наслідок, кожна функція на $X$ є неперервною. З іншого боку, кожна функція на $X$ зосереджена на множині $T = \{0\}$.

**Вправа 4.6.8.** *Нехай простір $X = \{x_s : s \in [-1,1]\} \subseteq [-1,1]^{\{0,1,2\}}$ складається з точок*

$$x_s(t) = \begin{cases} s, & t = 0; \\ \cos(\pi s), & t = 1; \\ \sin(\pi s), & t = 2, \end{cases}$$

*і $Y = \{x_s : s \in [-1,1)\}$. Доведіть, що*

(a) *відображення $f : X \to [-1,1]$, $f(x_s) = s$, гомеоморфізм, зокрема, $X$ є компактом і $Y$ є всюди щільною множиною в $X$;*

(b) *звуження $g$ функції $f$ на множину $Y$ зосереджене на множині $\{1,2\}$, але функція $f$ не зосереджена на множині $\{1,2\}$.*

**Вправа 4.6.9.** *Доведіть, що неперервний образ (слабко) моранового простору також (слабко) мороновий.*

**Вправа 4.6.10.** *Нехай $S$ – незліченна множина і $X$ – підпростір простору $\{0,1\}^S$, який складається з усіх функцій $x : S \to \{0,1\}$ умовою*

$$|\operatorname{supp} x| \leq 1.$$

(a) *Доведіть, що простір $X$ компактний.*

(*b*) *Побудуйте нарізно неперервну функцію $f : X \times X \to \mathbb{R}$, яка не є вимірною за Бером.*

*Вказівка.* (*b*). Нехай для кожного $s \in S$ елемент $x_s \in X$ такий, що $\operatorname{supp} x = \{s\}$. Розгляньте функцію $f : X^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y = x_s; \\ 0, & x = y \equiv 0; \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

**Вправа 4.6.11.** *Нехай $X$ – добуток сім'ї $(X_s : s \in S)$ сепарабельних просторів $X_s$, $Y = [0, 1]^T$ і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Доведіть, що $f$ першого класу Бера.*

*Вказівка.* Застосуйте теорему 3.1.14 і вправу 3.5.5 і зведіть до випадку метризовного компакту $Y$. Далі застосуйте теорему 4.2.1 або теорему 4.2.17.

**Вправа 4.6.12.** *Наведіть приклад моранового простору без умови зліченності ланцюжків.*

*Вказівка.* Розгляньте дискретний простір.

Сім'я множин $\mathcal{A}$ називається *σ-точково скінченною*, якщо її можна подати у вигляді об'єднання послідовності точково скінченних сімей $\mathcal{A}_n$.

**Вправа 4.6.13.** *Нехай $X$ – цілком регулярний простір з σ-точково скінченною базою $(B_i : i \in I)$, яка складається з функціонально відкритих множин. Доведіть, що простір $X$ можна гомеоморфно вкласти в простір $c_0(I)$.*

*Вказівка.* Нехай $I = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ і всі сім'ї $(B_i : i \in I_n)$ точково скінченні. Для кожного $i \in I_n$ виберіть неперервну функцію $\varphi_i : X \to [0, \frac{1}{n}]$ $B_i = \operatorname{supp} \varphi_i$ і розгляньте відображення $\varphi : X \to \mathbb{R}^I$,

$$\varphi(x) = (\varphi_i(x))_{i \in I}.$$

**Вправа 4.6.14.** *Доведіть, що довільний метризовний компакт є компактом Еберлейна.*

*Вказівка.* Використайте [16, теорему 4.4.3], вправу 4.6.13 і теорему 4.3.2.

**Вправа 4.6.15.** *Доведіть, що сепарабельний компакт Корсона метризовний.*

**Вправа 4.6.16.** *Наведіть приклад сепарабельного компакту Валдівіа, який не є метризовним.*

*Вказівка.* Розгляньте тихоновський куб відповідної ваги і застосуйте теорему Гьюітта-Марчевського-Пондіцері [16, теорема 2.3.15].

**Вправа 4.6.17.** *Доведіть, що добуток послідовності компактів Еберлейна (Корсона, Валдівіа) також є компактом Еберлейна (Корсона, Валдівіа).*

*Вказівка.* Кожний компакт Еберлейна $X_n$ вкладіть гомеоморфно в простір $c_0(I_n) \cap [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]^{I_n}$.

**Вправа 4.6.18.** *Нехай $S = [0,1]$ – незліченна множина і $a \in [0,1]^S$. Доведіть, що простір $X = \sigma(a)$ є простором з умовою зліченності ланцюжків, але не є слабко морановим простором.*

*Вказівка.* Використайте твердження 4.3.14, теорему 4.3.9 і теорему 4.2.19.

**Вправа 4.6.19.** *Наведіть приклад компакту Еберлейна $X$, для якого $c(C_p(X)) < p(C_p(X))$.*

*Вказівка.* Розгляньте дискретний незліченний простір $S$ і простір $X = \alpha S$. Далі використайте твердження 4.4.4 і теорему 4.3.16.

**Вправа 4.6.20.** *Доведіть, що неперервний образ простору Рудіна також є простором Рудіна.*

**Вправа 4.6.21** ([5]). *Доведіть, що для довільного топологічного простору $X$ якщо простір $C_p(X)$ є простором Рудіна, то простір $X$ також є простором Рудіна.*

*Вказівка.* Використайте твердження 4.4.3.

**Вправа 4.6.22.** *Доведіть, що топологічний простір $X$ є простором Рудіна тоді і тільки тоді, коли множина*

$$F = \{(x, y) : y(x) = 1\}$$

*є множиною функціонального типу $G_\delta$ в просторі $X \times C_p(X)$.*

*Вказівка.* Застосуйте гомеоморфізм $\varphi : C_p(X) \to C_p(X)$,

$$\varphi(f)(x) = f(x) = 1,$$

і використайте твердження 4.4.3.

**Вправа 4.6.23.** *Нехай топологічний простір $X$ – простір Рудіна. Доведіть, що для довільних $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, множина*

$$F = \{(x, y) : a \leq y(x) \leq b\}$$

*є множиною функціонального типу $G_\delta$ в просторі $X \times C_p(X)$. Чи має місце обернена імплікація?*

*Вказівка.* Нехай $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \begin{cases} t - b, & t > b; \\ 0, & a \leq t \leq b; \\ t - a, & t < a. \end{cases}$$

Розгляньте неперервне відображення $\varphi : X \times C_p(X) \to X \times C_p(X)$,

$$\varphi(x, y) = (x, \psi \circ y),$$

і використайте твердження 4.4.3.

**Вправа 4.6.24.** *Нехай $X = D_{\aleph_0}$ (див. означення 3.3.6). Доведіть, що*

(*a*) *простір $X$ ліндельофовий;*

(*b*) *простір $X$ не є простором Рудіна.*

*Вказівка.* (*b*). Використайте твердження 4.4.6 або теорему 4.4.10.

**Вправа 4.6.25.** *Нехай добуток $X$ сім'ї $(X_s)_{s \in S}$ цілком регулярних просторів $X_s$ є простором Рудіна. Доведіть, що існує не більш ніж зліченна множина $T \subseteq S$ така, що простір $X_s$ є тривіальним (одноточковим) для кожного $s \in S \setminus T$.*

*Вказівка.* Використайте твердження 4.4.6 або теорему 4.4.7.

**Вправа 4.6.26.** *Нехай $X$ – добуток сім'ї $(X_s)_{s \in S}$ метризовних просторів $X_s$. Доведіть, що простір $X$ є простором Рудіна тоді і тільки тоді, коли існує не більш ніж зліченна множина $T \subseteq S$ така, що простір $X_s$ тривіальний (одноточковий) для кожного $s \in S \setminus T$.*

*Вказівка.* Використайте вправу 4.6.25, [16, наслідок 4.2.4] і теорему 4.2.1.

**Вправа 4.6.27.** *Нехай $X$ – сепарабельний гаусдлорфовий простір Рудіна. Доведіть, що існує неперервне відображення $f : X \to Y$ на сепарабельний метризовний простір $Y$ таке, що прообраз $f^{-1}(y)$ кожної точки $y \in Y$ є ніде не щільною множиною в просторі $X$.*

*Вказівка.* Використайте твердження 4.4.6 і побудуйте послідовність неперервних функцій на $X$, яка відокремлює кожну точку зліченної всюди щільної множини від решти точок. Далі застосуйте теорему про діагональне відображення (вправа 4.6.1).

# ВІДКРИТІ ПИТАННЯ

На завершення нашої праці ми сформулюємо деякі відкриті питання, пов'язані з викладеними результатами і які виглядають цілком природними.

Оскільки добуток двох зліченно компактних просторів не обов'язково зліченно компактний (див. [16, приклад 3.10.19]), то з огляду на теорему 3.2.7 виникає наступне питання.

**Питання 1.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X = \prod\limits_{s\in S} X_s$ і $Y = \prod\limits_{t\in T} Y_t$, де $(X_s : s \in S)$ і $(Y_t : t \in T)$ – сім'ї цілком регулярних зліченно компактних просторів, і $p(X) \leq \aleph$ або $p(Y) \leq \aleph$. Чи кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат?*

Залежність від певної кількості координат нарізно неперервних функцій трьох і більше змінних досліджувалася тільки в роботі [51], де отримані необхідні і достатні умови лише у випадку метризовності всіх множників (див. п.3.4 і вправи 3.5.11 і 3.5.13). Знову беручи до уваги теорему 3.2.7, природно поставити наступні питання, які ми окремо сформулюємо для функцій трьох змінних, оскільки для багатьох задач теорії нарізно неперервних відображень перехід від двох змінних до трьох змінних створює найбільші труднощі.

**Питання 2.** *Нехай $X$, $Y$ і $Z$ – добутки сімей $(X_s : s \in S)$, $(Y_t : t \in T)$ і $(Z_r : r \in R)$ гаусдорфових компактних просторів $X_s$, $Y_t$ і $Z_r$ такі, що множина $S \cup T \cup R$ незліченна. Які необхідні і достатні умови того, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ залежить від зліченної кількості координат?*

**Питання 3.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X$, $Y$ і $Z$ – добутки сімей $(X_s : s \in S)$, $(Y_t : t \in T)$ і $(Z_r : r \in R)$ гаусдорфових компактних просторів $X_s$, $Y_t$ і $Z_r$ такі, що множина $|S \cup T \cup R| > \aleph$. Які необхідні і достатні умови того, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \times Z \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат?*

**Питання 4.** *Нехай $\aleph$ – нескінченний кардинал, $X_1, \dots, X_n$ – добутки сімей $(X_s^{(1)} : s \in S_1)$, ... , $(X_s^{(n)} : s \in S_n)$ гаусдорфових компактних просторів $X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(n)}$ такі, що множина $|S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n| > \aleph$. Які необхідні і достатні умови того, що кожна нарізно неперервна функція $f : X_1, \dots, X_n \to \mathbb{R}$ залежить від $\aleph$ координат?*

У дослідженнях берівської класифікації нарізно неперервних функцій наступне питання залишається відкритим.

**Питання 5.** *Чи існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ на добутку двох топологічних просторів $X$ і $Y$, яка вимірна за Бером, але* *не є функцією першого класу Бера?*

У зв'язку з цим природно постають наступні питання щодо просторів Морана і просторів Рудіна.

**Питання 6.** *Чи існує слабко морановий простір, який не є морановим простором?*

**Питання 7.** *Чи існує топологічний простір $X$, який не є простором Рудіна, і такий, що для довільного топологічного простору $Y$ кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ вимірна за Бером?*

# Перелік умовних позначень і термінів

$\bigcup \mathcal{A}$, $\bigcap \mathcal{A}$ – п.1.1.1;
$\aleph^+$ – п.2.2.2;
$C(X)$ – п.1.1.2;
$c(X)$ – п.4.3.4;
$\operatorname{cof}(\aleph)$ – п.2.2.2;
$C_p(X)$ – п.3.1.1;
$C_u(X)$ – п.4.1.3;
$c_X$ – п.4.4.1;
$c_0(T)$ – п.4.3.1;
$d(X)$ – п.2.3.4;
$D_\aleph$ – п.3.3.2;
$(I_\aleph)$, $(II_\aleph)$, $(III_\aleph)$ – п.2.3.4;
$\operatorname{int}(A)$ – п.2.4.1;
$l(X)$ – п.4.1.2;
$p_s$ – п.1.1.3;
$p(X)$ – п.2.3.3;
$P_\aleph$ – п.2.3.4;
$P(\phi, \aleph)$ – п.2.3.2;
$P(\phi, \aleph, \mathcal{B})$ – п.2.3.2;
$Q_\aleph$ – п.3.3.2;
$\mathcal{R}(A)$ – п.1.3.2;
$R(U)$ – п.1.1.3, п.2.1.3;
$\mathbb{R}^X$ – п.1.1.2;
$\operatorname{supp} f$ – п.2.3.4;
$U|_B$ – п.2.1.3, п.2.3.4;
$w(X)$ – п.4.1.1;
$Y^S$ – п.1.1.3;
$\alpha X$ – п.4.3.1;
$\prod\limits_{s\in S} X_s$ – п.1.1.3;
$\sigma(a)$ – п.1.2.1;
$2^X$ – п.1.1.2;
$(C.C.C)$-властивість – п.4.2.1;
$(D.C.C.C)$-властивість – п.4.2.1;
$G_\delta$-множина – п.1.5;
$s$-та проекція – п.1.1.3;
$\sigma$-добуток – п.1.2.1;
$\sigma$-компактний простір – п.1.5;

# Література


[1] Alexandroff P. *Zur Theorie der topologischen Räume*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **11** (1936) 55-58.

[2] Amir D., Lindenstraus J. *The structure of weakly compact set of Banach spaces*, Ann. of Math. |bf 88 (1986) 35-46.

[3] Arhangel'skii A.V., Tkachuk V.V. *Calibers and point-finite cellularity of the space $C_p(X)$ and some questions of S.Gul'ko and M.Husek* Topology Appl. **23** (1) (1986) 65-73.

[4] Baire R. *Sur les fonctions de variables reélles*, Ann. Mat. Pura Appl. ser. 3. (3) (1899) 1-123.

[5] Banakh T.O. *(Metrically) quarter-stratifiable spaces and their applications in the theory of separately continuous functions*, Mat. Studii. **18** (1) (2002) 10-28.

[6] Bishop E. *A minimal boundary for function algebras* , Pacif. J. Math. **9** (1959) 629-642.

[7] Bockstein M. *Un théorème de séparabilité pour les produits topologiques*, Fund. Math. **35** (1948) 242-246.

[8] Bouziad A. *Notes sur la propriété de Namioka*, Trans. Amer. Math. Soc. **344** (2) (1994) 873-883.

[9] Corson H. *Normality in subsets of product spaces*, American Journal of Mathematics **81** (3) (1959) 785-796.

[10] Corson H., Isbell I. *Some properties of strong uniformities*, Quart. J. Math. Oxford. **11** (1960) 17-33.

[11] Chavalley C., Frink Jr. O. *Bicompactness on cartesian products*, Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941) 612-614.

[12] Davies R. O. *An intersection theorem of Erdös and Rado*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967), 995-996.

[13] Gelfand I., Shilov G. *Üeber verschiedene Methoden der Einfuehrung der Topologie in die Menge der maximalen Ideale eines normierten Ringes*, Rec. Math. N.S. **9** (51) (1941) 25-39.

[14] Hewitt E. *Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem*, Duke Math. J. **14** (1947) 419-427.

[15] Efimov B., Engelking R., Pełczyński A. *Remarks on diadic spaces II*, Colloquium Mathematicum. **13** (2) (1964) 181-197.

[16] Engelking R. *General Topology*, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin (1989).

[17] Engelking R. *On functions defined on Cartesian products*, Fund. Math. **59** (1966) 221-231.

[18] Engelking R., Pełczyński A. *Remarks on diadic spaces*, Colloquium Mathematicum. **11** (1963) 55-63.

[19] Erdös P., Rado R. *Intersection theorems of systems of sets*, Journal London Math. Soc. **35** (1960) 85-90.

[20] Hahn H. *Theorie der reellen Funktionen*, 1. Band, Berlin: Verlag von Julius Springer, 1921. VIII, 600 s.

[21] Isbell I. *Uniform spaces* Providence, (1964) 190 p.

[22] Kalamidas N.D., Spiliopoulos G.D. *Compact sets in $C_p(X)$ and calibers*, Can. Math. Bull. **35** (4) (1992) 497-502.

[23] H. Lebesque H. *Sur l'approximation des fonctions* Bull. Sci. Math., **22** (1898) 278-287.

[24] Marczewski E. *Séparabilite et multiplicatiocn cartésiennde des espaces topologiques*, Fund. Math. **34** (1947) 127-143.

[25] Maslyuchenko O.V., Maslyuchenko V.K., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V. *Paracompactness and separately continuous mappings*, General Topology in Banach Spaces., Nova Sci. Publ., Nantintong-New-York. (2001) 147-169.

[26] Mazur S. *On continuous mappings on Cartesian products*, Fund. Math. **39** (1952) 229-238.

[27] Michael E. *A note on intersections*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1963) 281-283.

[28] Mibu Y. *On Baire functions on infinite product spaces*, Proc. Imp. Acad. Tokyo. **20** (1944) 661-663.

[29] Miščenko A. *Some theorems on the topological product of spaces* Fund. Math. **58** (1966) 259-284.

[30] Moran W. *Separate continuity and support of measures*, J. London. Math. Soc. **44** (1969) 320-324.

[31] Mykhaylyuk V.V. *Namioka spaces and topological games*, Bull. Austral. Math. Soc. **73** (2006) 263-272.

[32] Mykhaylyuk V.V. *The Namioka property of $KC$-functions and Kempisty spaces*, Topology Appl. **153** (2006) 2455-2461.

[33] Mykhaylyuk V.V. *Metrizable compacta in the space of continuous functions with the topology of pointwise convergence*, Acta Math. Hungarica. **117** (4) (2007) 315-323.

[34] Noble N., Ulmer M. *Factoring functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc. **163** (1972) 329–339.

[35] Okunev O.G., Tkachuk V.V. *Lindelof $\Sigma$-property in $C_p(X)$ and $p(C_p(X)) = \omega$ do not imply countable network weight in $X$*, Acta Math. Hungar. **90** (1-2) (2001) 119-132.

[36] Piotrowski Z. *Separate and joint continuity*, Real Anal. Exch. **11** (2) (1985-86) 293-322.

[37] Rosental H.P. *On injective Banach spaces and the $L^{\infty}(\mu)$ for finite measure $\mu$*, Acta Math. **124** (1970) 205-247.

[38] Ross K., Stone A. *Product of separable spaces*, Amer. Math. Monthly **71** (1964) 398-403.

[39] Rudin M. E. *A new proof that metric spaces are paracompact*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969) 603.

[40] Šanin N. *A theorem from the general theory of sets*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS **53** (1946), 399-400.

[41] Stone M. *Applications of the theory of Boolean rings to general topology*, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937) 375-481.

[42] Stone M. *The generalized Weierstrass approximation theorem*, Math. Mag. **21** (1947-48) 167-183 and 237-254.

[43] Tkachuk V.V. *Cardinal invariants of the Suslin number type*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **270** (4) (1983) 795-798.

[44] Tychonoff A. *Über die topologische Erweiterung von Räumen*, Math. Ann. **102** (1930) 544-561.

[45] Tychonoff A. *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. **111** (1935) 767-776.

[46] Vera G. *Baire measurability of separately continuous functions*, Quart. J. Math. Oxford. **39** (153) (1988) 109-116.

[47] Архангельский А.В. *Топологические пространства функций*, М.: Изд-во Московского ун-та, (1989) 222 с.

[48] Шанин Н.А. *О произведениях топологических пространств*, Тр. матем. ин-та АН СССР. **24** (1948) 1-112.

[49] Карлова О.О. *Перший функціональний лебегівський клас і берівська класифікація нарізно неперервних відображень*, Наук. вісник. Чернівецького ун-ту: зб. наук. праць. Вип. 191-192. Математика. Чернівці: Рута (2004) 52-60.

[50] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. *Нарізно неперервні функції на добутках компактів та їх залежність від* **n** *змінних*, Укр. мат. журн. **47** (3) (1995) 344-350.

[51] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В. *Нарізно непрервні функції багатьох змінних на добутку просторів, які є добутками метризовних множників*, Мат. вісник НТШ **1** (2004) 77-84.

[52] Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В. *Обернені задачі теорії нарізно неперервних відображень*, Укр. мат. журн. **44** (9) (1992) 1209-1220.

[53] Михайлюк В.В. *До питання про множину точок розриву нарізно неперервного відображення*, Мат. студії. **3** (1994) 91-94.

[54] Михайлюк В.В. *Нарізно неперервні функції на добутках і їх залежність від* $\aleph$ *координат*, Укр. мат. журн. **56** (10) (2004) 1357-1368.

[55] Михайлюк В.В. *Координатний метод і теорія нарізно неперервних відображень*, дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.01. Чернівці (2008) 333 с.

[56] Михайлюк В.В. *Залежність від* **n** *координат нарізно неперервних функцій на добутку компактів*, Укр. мат. журн. **50** (6) (1998) 822-829.

[57] Михайлюк В.В. *Узагальнення одного результату Вери*, Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 228. Математика. Чернівці: Рута (2004) 86-88.

[58] Михайлюк В.В. *Простори Наміоки і сильно берівські простори*, Мат. студії. **26** (1) (2006) 55-64.

[59] Михайлюк В.В. *Берівська класифікація нарізно неперервних функцій і властивість Наміоки*, Укр.мат. вісник. **5** (2) (2008) 203-218.

ЧНУ РУТА
ISBN 978-966-423-775-5