Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

Г.П. Івасюк, Т.М. Фратавчан,
Т.І. Готинчан, Д.В. Шкільнюк

Вища математика
Лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія

Навчальний посібник

Чернівці
Чернівецький національний університет
2023

УДК 512+514.12](075.8)

В 558

Друкується за ухвалою Вченої Ради факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, протокол №6 від 25.01.2023 р.

Рецензенти: *Н.П. Процах*, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри математики і фізики Національного Лісотехнічного університету України
І.П.Мединський, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри прикладної математики, Інституту прикладної математики та фундаментальних наук, Національного університету «Львівська політехніка»

В 558 **Вища математика**. Лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія. Навчальний посібник/ Укл.: Івасюк Г.П., Фратавчан Т.М., Готинчан Т.І., Шкільнюк Д.В. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2023. – 176 с.

Посібник містить теоретичний матеріал, приклади розв’язування типових задач, підбір завдань та тестів для практичних занять з вищої математики.

Для студентів економічних спеціальностей.

УДК 512+514.12](075.8)

Передмова

Навчальний посібник написано авторами на основі лекцій, які вони читали студентам різних економічних спеціальностей у Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича. Він складається з трьох розділів. У першому розділі розглядаються елементи лінійної алгебри, у другому – векторна алгебра, у третьому – аналітична геометрія.

У кожному розділі зроблено підбірку вправ та тестових завдань, що дає можливість використовувати цей посібник при проведенні практичних занять і організації самостійної роботи студента. Відповіді до вправ та тестових завдань містяться вкінці посібника.

Матеріал посібника розбито на розділи, номери яких одинарні. Кожний розділ містить підрозділи, їх номери подвійні, в яких перша цифра означає номер розділу. Підрозділ складається з пунктів, номери яких потрійні, перші дві цифри означають номер підрозділу.

В посібнику наведено різні приклади та задачі, що ілюструють теорію, а теоретичні питання не завжди розглядаються детально, але є посилання на книги, де можна знайти їх повне обґрунтування.

На завершення передмови автори вважають за потрібне відмітити декілька першоджерел, якими вони користувалися впродовж багаторічної педагогічної діяльності та які вплинули на зміст та стиль викладання даних матеріалів. Це підручники «В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах».

Автори щиро вдячні своїм вчителям, які формували їх знання та навички в області викладання вищої математики, формування математичної та педагогічної культури: Івасишену Степану Дмитровичу, Городецькому Василю Васильовичу, Лавренчуку Володимиру Петровичу, а також своїм колегам – співробітникам кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича за щирі поради при підготовці посібника.

Вступ

Процес прийняття рішень в економіці, що стосується керування діяльністю галузей або підприємств, розподілу ресурсів, вибору найкращого варіанта розвитку, вивчення ринкової кон'юнктури, прогнозування, планування тощо нині не здійснюється без попереднього моделювання конкретного процесу або його частин. Тому для майбутніх економістів вміння моделювати є стратегічним способом їхньої діяльності.

Мінливість економічних умов, конкуренція, що примушує шукати і освоювати нові сфери, вимагають від фахівців високої адаптивності, тому слід навчати сучасних методів розв'язування економічних проблем, заснованих на системному аналізі, математичному моделюванні і використанні комп'ютерної техніки.

Розвиток системи вищої економічної освіти спрямований на реалізацію системних знань, необхідних для вироблення цілісного, проблемного мислення фахівця. Такі знання можуть бути отримані лише на основі інтеграції базових фундаментальних та економічних наук і орієнтуватися на світовий рівень розвитку науки.

Математична освіта у підготовці фахівців економічного профілю відіграє надзвичайно важливу роль, оскільки саме вона є загальнонауковим фундаментом для оволодіння системою спеціальних знань. Таким чином, дослідження проблеми професійної підготовки майбутніх економістів відповідає нагальним потребам практики.

Процес засвоєння студентами математичних знань стає більш ефективним за умови створення методичного комплексу, який здатен перебувати у постійному розвитку, адекватно редагувати на зміни зовнішнього середовища і пристосовуватися до його потреб. Це вимагає переосмислення багатьох сформованих уявлень про традиційну модель професійної підготовки майбутніх економістів. Особливої уваги при цьому набуває той факт, що організація успішної бізнес-діяльності підприємства передбачає побудови системи управління, яка б сприяла підвищенню продуктивності, була гнучкою та своєчасно відповідала на нові виклики бізнес середовища.

На сучасному етапі розвитку освіти актуальним є питання професійно-математичної підготовки студентів, яку слід розглядати як важливу складову в системі фундаментальної підготовки сучасного економіста. Метою такої підготовки стає не лише здатність студента до неперервної самоосвіти і практичного застосування математичних знань в економічній сфері, а й формування високого рівня математичної культури.

Зміст

Розділ 1. Лінійна алгебра

1.1. Матриці

1.1.1. Поняття матриці. Різні типи матриць

Таблиця з чисел a_{ij}, $i \in \{1,...,m\}$, $j \in \{1,...,n\}$, вигляду

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається **матрицею** порядку (розміру) $m \times n$. При цьому числа a_{ij} називаються елементами матриці. Елементи з однаковими першими індексами утворюють рядки, а з однаковими другими індексами – стовпчики матриці.

Якщо $m = n$, то матрицю називають **квадратною** $n-$го порядку. Якщо ж $m \neq n$, то – **прямокутною**. У випадку, коли $n = 1$, матрицю А порядку $m \times 1$ називають **одностовпчиковою** або матрицею-стовпчиком, а при $m = 1$, тобто матрицю порядку $1 \times n$ називають **однорядковою** або матрицею-рядком.

Множина елементів $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ квадратної матриці $n-$го порядку утворює **головну діагональ**, а множина елементів $a_{1n}, a_{2\,n-1}, a_{3n-2}, ..., a_{n1}$ – **побічну діагональ**.

Якщо у квадратній матриці всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, то таку матрицю називають **діагональною**:

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

У випадку, коли $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$, діагональну матрицю називають **одиничною** і позначають її буквою Е або I:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, у якої всі елементи дорівнюють нулю, називають **нульовою** або **нуль-матрицею**.

Транспонованою щодо матриці A називають матрицю A^T, утворену з матриці A заміною рядків однаковими за номером стовпчиками.

Матрицю A називають **симетричною**, якщо $A = A^T$, тобто якщо $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх i, j.

Квадратну матрицю А називають **трикутною**, якщо всі її елементи $a_{ij,} \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}$, розміщені під головною діагоналлю ($i > j$), або над головною діагоналлю ($i < j$), дорівнюють нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1.1.2. Лінійні операції над матрицями та їх властивості

Матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

одного і того самого розміру $m\times n$ називають **рівними** і пишуть $A=B$, якщо $a_{ij}=b_{ij}$, $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Сумою (різницею) двох матриць A і B одного і того самого розміру $m\times n$ називають матрицю C, елементи якої дорівнюють сумам (різницям) відповідних елементів a_{ij} і b_{ij}, тобто $C=A+B$ $(C=A-B)$, де $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(c_{ij}=a_{ij}-b_{ij})$, $i\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Добутком матриці A **на число** λ називають матрицю λA, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці A на число λ, тобто

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операції додавання матриць та множення матриці на число мають такі властивості

Нехай $O-$ нульова матриця, $A,B,C,O-$матриці однакових розмірів, λ і μ $-$сталі, тоді правильними є наступні рівності

1) $A+B=B+A$;

2) $A+(B+C)=(A+B)+C$;

3) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

4) $A+O=A$.

1.1.3. Нелінійні операції над матрицями та їх властивості

Розглянемо дві матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix},$$

де кількість стовпчиків матриці A дорівнюють кількості рядків матриці B.

Добутком двох матриць A і B називають матрицю C, елементи c_{ij}, $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,k\}$, якої дорівнюють скалярному добутку i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B, тобто $C=AB$, якщо $c_{ij}=\sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot b_{lj}$, для всіх i та j.

Приклад. Знайти добуток матриць

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Маємо

$$AB=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&1\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot2\\3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4&5\\7&9\end{pmatrix}.$$

Зауваження. Добуток матриць ***не володіє властивістю комутативності***, тобто $AB\neq BA$. Крім того, ***добуток матриць може дорівнювати нулю навіть у тому випадку, коли жодна з них не є нульовою матрицею.***

Властивості операції множення матриць

Властивість 1. Нехай A та E – квадратні матриці однакового порядку , тоді $AE=EA=A$.

Властивість 2. Нехай A та B – матриці однакової розмірності, а матриця C має таку ж кількість рядків скільки у A стовпців, тоді $(A+B)C=AC+BC$.

Властивість 3. Нехай A та B – матриці однакової розмірності, а матриця C має таку ж кількість стовпців скільки у A рядків, тоді $C(A+B)=CA+CB$.

Властивість 4. Нехай матриця A має стільки ж стовпців скільки у B рядків, а матриця C має таку ж кількість рядків скільки у B стовпців, тоді $A(BC)=(AB)C$.

Операції ділення для матриць не має, але для квадратних матриць можна побудувати аналог ділення – множення на обернену матрицю.

Оберненою матрицею до квадратної матриці А порядку n називають матрицю A^{-1} таку, що

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = E,$$

Е – одинична матриця, такого ж порядку як матриця А.

Матрицю А, для якої існує обернена матриця, називають **оборотною**. З означення випливає, що матриці А та A^{-1} взаємообернені й переставні.

З’ясування умови оборотності матриці і знаходження оберненої матриці потребує вивчення таких важливих числових характеристик матриці, як визначник і ранг матриці (детальніше про це у п.1.2).

Елементарними перетвореннями матриці А називають:

1) переставляння стовпців (рядків) матриці;
2) множення стовпця (рядка) матриці на число, відмінне від нуля;
3) додавання до стовпця (рядка) матриці іншого її стовпця (рядка), помноженого на деяке число.

Матриці A та B називають **еквівалентними**, якщо одну з них одержано з іншої скінченною кількістю елементарних перетворень, і позначають $A \sim B$.

Щоб знайти обернену матрицю до матриці А, можна виконати такі дії:

- до даної матриці А праворуч дописати одиничну матрицю Е такої ж розмірності ;
- елементарними перетвореннями над рядками матриці (А| E) матрицю А звести до одиничної матриці.

В результаті на місці даної матриці А буде сформовано одиничну матрицю, а на місці дописаної праворуч одиничної матриці Е буде знаходитись обернена матриця A^{-1} , тобто замість матриці (А | Е) дістанемо матрицю (Е | A^{-1}).

Контрольні питання

1. Дайте означення матриці.
2. Яку матрицю називають квадратною (прямокутною)?
3. Яку матрицю називають діагональною (одиничною)?
4. Яку матрицю називають симетричною (трикутною)?
5. Яку матрицю називають нульовою (транспонованою)?
6. Які матриці називають еквівалентними?
7. Які операції (дії) над матрицями можна виконувати?
8. Які ви знаєте елементарні перетворення матриць?
9. Яку матрицю називають оборотною?
10. Як зайти обернену матрицю?

Тести для самоконтролю

1. Таблицю вигляду $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називають ...

а) визначником 2-го порядку;
б) таблицею 2-го порядку;
в) матрицею 2-го порядку;
г) інша відповідь.

2. Сума $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ дорівнює:

а) $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 3 & 25 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$; г) інша відповідь.

3. Добуток $2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}$ дорівнює:

а) 180; б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 18 & 10 \end{vmatrix}$; в) $2 \cdot (10 - 9) = 2$; г) інша відповідь.

4. Нуль-матрицею називають таку матрицю, в якої нулю дорівнюють ...
а) всі елементи головної діагоналі; б) всі її елементи;
в) всі елементи побічної діагоналі; г) інша відповідь.

5. Добуток $\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ дорівнює:

а) (14); б) $\begin{pmatrix} 2 & 12 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$; г) інша відповідь.

6. Різниця $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ дорівнює:

а) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; г) інша відповідь.

7. Обернена матриця A^{-1} до матриці A існує, якщо...
а) $|A|>0$; б) $|A|<0$; в) $|A|=0$; г) інша відповідь.

8. Обернена матриця A^{-1} до матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ має вигляд:

а) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

в) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) інша відповідь.

9. Добуток матриць $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ дорівнює:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$; в) 10; г) інша відповідь.

10. Операція множення матриць, взагалі кажучи, не є ...
а) комутативною; б) асоціативною;
в) дистрибутивною; г) асоціативною і дистрибутивною.

11. Дві матриці називають рівними, якщо…
а) кількість рядочків першої матриці дорівнює кількості стовпчиків другої;
б) кількість стовпчиків першої матриці дорівнює кількості рядочків другої;
в) у них однакова розмірність та рівні відповідні елементи;
г) інша відповідь.

12. Матрицю A можна множити на матрицю B, якщо…

а) кількість рядків матриці А дорівнює кількості стовпчиків матриці B;

б) кількість стовпчиків матриці А дорівнює кількості рядків матриці B;

в) у них однакова розмірність та рівні відповідні елементи;

г) інша відповідь.

13. Знайдіть правильне твердження:

а) Визначник одиничної матриці дорівнює нулю;

б) Визначник нульової матриці дорівнює нулю;

в) Визначник матриці не може бути дробовим числом;

г) Визначник матриці не може бути від'ємним числом.

14. Яке з тверджень не правильне:

а) матриця $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ є виродженою;

б) матриця $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ має обернену;

в) матриця $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ має визначник, що дорівнює 0;

г) матриця $A=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ є квадратною.

15. Матриця називається виродженою, якщо …

а) вона складається лише з одного стовпчика;

б) вона складається лише з одного рядка;

в) її визначник дорівнює нулю;

г) всі її елементи дорівнюють нулю.

16. Нехай A і B – довільні матриці однакової розмірності. Які із наведених нижче рівностей є правильними:

а) $A+B=B+A$; б) $A\cdot B=B\cdot A$;

в) $A-B=B-A$; г) $A+B=B-A$.

17. Якщо матриця A має обернену матрицю A^{-1}, то…

а) $A+A^{-1}=I$; б) $A\cdot A^{-1}=I$;

в) $A\cdot A^{-1}=A^{-1}A=I$; г) $A+A^{-1}=A^{-1}+A=I$.

Тут I – одинична матриця відповідного розміру.

18. Яке з тверджень правильне:

а) матриця $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ є не виродженою;

б) матриця $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ не має обернену матрицю;

в) матриця $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ має визначник, що дорівнює 0;

г) матриця $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ є трикутною.

Практичні завдання для самостійного розв’язування

1. Знайти матрицю $A=2B-C^T$, якщо

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Обчислити добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,

д) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$,

е) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

є) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, ж) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти добуток матриць AB і BA, якщо
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Обчислити $A^2 - A - E$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Обчислити $A^2 - 5A + 3E$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Знайти добутки матриць AB, BA, CA, і значення виразу 3AB – BA+2CA, якщо :

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7. Знайти матрицю X з рівняння:

а) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.