Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Дорош Андрій Богданович

УДК 517.929

ДИСЕРТАЦІЯ

Апроксимація розв'язків крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь зі змінним запізненням

01.01.02 Диференціальні рівняння
11 Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

А.Б. Дорош

Науковий керівник
Черевко Ігор Михайлович,
доктор фізико-математичних наук, професор

Чернівці – 2018

АНОТАЦІЯ

Дорош А.Б. Апроксимація розв'язків крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь зі змінним запізненням. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 диференціальні рівняння. – Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, 2018.

Дисертацію присвячено дослідженню достатніх умов існування та розробці методів наближеного знаходження розв'язків деяких класів крайових задач для диференціально-функціональних рівнянь зі змінним запізненням. Зокрема, розглядаються лінійні та нелінійні крайові задачі із запізненням та нейтрального типів, а також крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із аргументом, що відхиляється.

Розроблено методику знаходження достатніх умов існування розв'язків для диференціально-функціональних рівнянь:

- аналіз властивостей змінних запізнень;
- дослідження гладкості розв'язків;
- вибір функціонального простору існування розв'язків;
- перехід до еквівалентного інтегрального рівняння;
- застосування методу стислих відображень для одержання достатніх умов існування розв'язку.

Відзначено принципово різні впливи відхилень аргумента на можливі точки розриву другої похідної розв'язку крайових задач у доданках, що визначають запізнюючий та нейтральний тип.

Знайдено легкі для практичної перевірки достатні коефіцієнтні умови на вихідне рівняння, при виконанні яких існує єдиний розв'язок крайової задачі для лінійних диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням і нейтрального типів.

У зв'язку з відсутністю ефективних алгоритмів інтегрування диференціальних рівнянь зі змінним запізненням у явному вигляді важливого значення набувають наближені методи їх інтегрування.

У даній роботі досліджується схема знаходження наближеного розв'язку крайових задач для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу, що базується на апроксимації розв'язку кубічними сплайнами дефекту 2.

Наведено основні означення та відомості про кубічні інтерполяційні сплайни, одержано їхнє аналітичне зображення та наведено оцінки точності апроксимації. Запропоновано ітераційну схему наближення розв'язків крайових задач у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 для ряду класів диференціально-різницевих рівнянь.

Отримано достатні коефіцієнтні умови, що забезпечують збіжність ітераційного процесу.

Для практичного моделювання крайових задач для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу розроблено прикладне програмне забезпечення зі зручним користувацьким інтерфейсом. Аналіз здійснених числових експериментів для модельних тестових прикладів підтверджують наведені в роботі теоретичні результати.

Ключові слова: крайова задача, диференціально-різницеве рівняння, інтегро-диференціальне рівняння, запізнення, нейтральний тип, кубічний сплайн, метод сплайн-апроксимації, наближення розв'язку крайової задачі.

Список опублікованих праць за темою дисертації

1. *Cherevko I.* Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Differential Equations With Many Delays / A. Dorosh, I. Cherevko // Карпатські матем. публ. – 2018. – Т. 10, № 1. – С. 65–70.

2. *Cherevko I.* Solving boundary value problems for delay integro-differential equations using spline functions / I. Cherevko, A. Dorosh // The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the 50th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science, 19-23 Aug. 2014, Chisinau, Moldova: Proceedings IMCS-50. – Chisinau: Institute of Mathematics and Computer Science, Acad. of Sciences of Moldova, 2014. – Pp. 243-246.

3. *Дорош А.Б.* Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв'язків лінійних крайових задач із запізненням / А.Б. Дорош, І.М. Черевко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наукових праць. – Кам'янець-Подільський, 2014. – Вип. 10. – С. 80-88.

4. *Дорош А.Б.* Існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу / А.Б. Дорош, І.М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – 2016. – Т. 4, № 3-4. – С. 43-46.

5. *Dorosh A.* Existence and approximation of a solution of boundary value problems for delay integro-differential equations / A. Dorosh, I. Cherevko // J. Numer. Anal. Approx. Theory. – 2015. – V. 44, №2. – Pp. 154-165.

6. *Дорош А.Б.* Апроксимація розв'язків крайових задач для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями / А.Б. Дорош, І.М. Черевко // Буковинський математичний журнал. – 2017. – Т.

5, № 3-4. – С. 77-81.

7. *Cherevko I.* Solving boundary value problems for neutral delay integro-differential equations using spline functions / I. Cherevko, A. Dorosh // Actual problems of training specialists in ICT. Conference Proceedings. – 2013. – Part 2. – Pp. 226-234.

8. *Дорош А.Б.* Моделювання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням / А.Б. Дорош // Матеріали XIX Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (3-4 жовтня 2013 р.). – Львів, 2013. – С. 146-147.

9. *Черевко І.М.* Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв'язків лінійних крайових задач із запізненням / І.М. Черевко, А.Б. Дорош // Тези доповідей VI міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. – С. 181-182.

10. *Дорош А.Б.* Розв'язування крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу методом сплайн-функцій / А.Б. Дорош, І.М. Черевко // Матеріали I Міжнародної XX Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (7-9 квітня 2014 р.). – Львів, 2014. – С. 81-82.

11. *Дорош А.Б.* Розв'язування лінійних крайових задач із багатьма запізненнями методом сплайн-функцій / А.Б. Дорош // Тези доповідей IV міжнародної ганської конференції, присвяченої 135 річниці від дня народження Ганса Гана (30 червня – 5 липня 2014 р.). – Чернівці, 2014. – С. 53-54.

12. *Cherevko I.* Existence and approximation of a solution of the boundary value problems for delay integro-differential equations / I. Cherevko, A. Dorosh, L. Piddubna // The 23rd Conference On Applied And Industrial Mathematics, Suceava, Romania, September 17-20, 2015: Proceedings CAIM 2015. – Suceava: Stefan cel Mare University of Suceava, 2015. – P. 25.

13. *Dorosh A.* Approximation of boundary value problem solutions for integro-differential equations with delay / A. Dorosh // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (25-28 серпня 2015, Дрогобич, Україна). – Львів, 2015. – С. 35.

14. *Дорош А.Б.* Застосування сплайн-функцій до побудови наближених розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу / А.Б. Дорош, І.М. Черевко // Тези доповідей VII міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. – С. 64-65.

15. *Дорош А.Б.* Розв'язування крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням / А.Б. Дорош // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування. Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 80-річчю від дня народження професора В. І. Фодчука, (28-30 вересня 2016 р.) – Чернівці, 2016. – С. 43.

16. *Дорош А.Б.* Розв'язування крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу / А.Б. Дорош, І.М. Черевко // Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора Д.І. Мартинюка : матеріали конференції. – Кам'янець-Подільський

: Аксіома, 2017. – С. 37-38.

17. *Cherevko I.* Existence and approximation of a solution of the boundary value problems for neutral delay integro-differential equations / I. Cherevko, A. Dorosh, L. Piddubna // The 25th Conference On Applied And Industrial Mathematics, Iaşi, Romania, September 14-17, 2017: Proceedings CAIM 2017. – Iaşi: Alexandru Ioan Cuza University of Iaşi, 2017. – Pp. 14-15.

ABSTRACT

Dorosh A.B. Approximation of boundary value problem solutions for differential-difference equations with variable delay. – Qualification scientific work on the rights of a manuscript.

Thesis for the scientific degree of Candidate of Physical and Mathematical Science (Doctor of Philosophy) in the speciality 01.01.02 – Differential Equations. – Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2018.

The thesis is devoted to the study of sufficient conditions for existence and the development of methods for finding approximate solutions of certain classes of boundary value problems for differential-functional equations with variable delay. In particular, linear and nonlinear boundary-value problems with delay and of neutral type are considered, as well as boundary value problems for integro-differential equations with a deviating argument.

A method for finding sufficient conditions for differential-functional equation solution existence is developed:

- analysis of variable delays;
- study of the solution smoothness;
- choosing a functional space for the solution existence;
- transition to an equivalent integral equation;
- application of the contraction mapping principle for obtaining sufficient conditions for the solution existence.

Fundamentally different effects of the argument deviations on the possible break points of the second derivative of the boundary value problem solution are noted due to the terms which define the delay and the neutral type.

In the thesis easy for practical verification sufficient coefficient conditions for the initial equation are found, under which there exists a unique solution of the boundary value problem for linear differential-difference and integro-differential equations with delay and of neutral type.

Due to the lack of effective algorithms for integrating differential equations with variable delay in explicit form, approximate methods of their integration become important.

In this paper, a scheme of finding an approximate solution of boundary value problems for delay and neutral delay differential-difference and integro-differential equations is investigated, which is based on the approximation of the solution using cubic splines with the defect 2.

The main definitions and information about cubic interpolation splines are given, their analytical formula is obtained and estimates of approximation accuracy are given. An iterative scheme of boundary value problem solution approximation is proposed for a number of classes of differential-difference equations, in the form of a sequence of cubic splines with defect 2.

Sufficient coefficient conditions are obtained that ensure the convergence of the iterative process.

For practical modeling of boundary value problems for delay and neutral delay differential-difference and integro-differential equations, a software with a user-friendly interface has been developed. The analysis of the performed numerical experiments for model test cases confirm the theoretical results presented in the thesis.

Keywords: boundary value problem, differential-difference equation, integro-differential equation, delay, neutral type, cubic spline, spline approximation method, approximation of a boundary value problem solution.

ЗМІСТ

ВСТУП 13

РОЗДІЛ 1. Огляд літератури за темою дисертаційного дослідження та допоміжні матеріали 20

1.1. Відомості з теорії диференціально-різницевих рівнянь 20

1.2. Основні твердження стосовно крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь 22

РОЗДІЛ 2. Лінійні сплайни 28

2.1. Загальна теорія сплайнів 28

2.2. Кубічні сплайни дефекту 1 30

2.3. Кубічні сплайни дефекту 2 35

2.4. Висновки до розділу 2 40

РОЗДІЛ 3. Крайові задачі для диференціально-різницевих рівнянь 41

3.1. Лінійні крайові задачі з запізненням 41

3.1.1. Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку 41

3.1.2. Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу 47

3.2. Лінійні крайові задачі нейтрального типу 56

3.2.1. Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку 56

3.2.2. Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу 62

3.3. Нелінійні крайові задачі з запізненням та нейтрального типу 72

3.3.1. Існування розв'язку крайової задачі з запізненням 72

3.3.2. Існування розв'язку крайової задачі нейтрального типу 78

3.3.3. Обчислювальна схема для крайової задачі із запізненням. Збіжність ітераційного процесу 85

3.3.4. Обчислювальна схема для крайової задачі нейтрального типу. Збіжність ітераційного процесу . . . 86
3.4. Висновки до розділу 3 . . . 88
РОЗДІЛ 4. Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь 89
4.1. Лінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням . . . 89
4.1.1. Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку . . . 89
4.1.2. Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу . . . 95
4.2. Лінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу . . . 105
4.2.1. Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку . . . 105
4.2.2. Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу . . . 113
4.3. Нелінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням . . . 124
4.3.1. Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку . . . 124
4.3.2. Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу . . . 127
4.4. Нелінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу . . . 129
4.4.1. Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку . . . 129
4.4.2. Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу . . . 132
4.5. Висновки до розділу 4 . . . 134
РОЗДІЛ 5. Числові експерименти . . . 136
5.1. Опис розробленого програмного забезпечення . . . 136
5.2. Модельні приклади. Аналіз результатів . . . 138
5.2.1. Лінійні рівняння із запізненням та нейтрального типу . . . 138
5.2.2. Інтегро-диференціальні рівняння із запізненням . . . 139
5.2.3. Нелінійна крайова задача із запізненням . . . 140

5.3. Висновки до розділу 5 141

ВИСНОВКИ 143

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ 145

ДОДАТОК 155

ВСТУП

Актуальність теми. Математичні моделі, що описують процеси в галузі механіки, фізики, електромеханіки, теорії керування, часто призводять до дослідження розв'язків різних типів крайових задач. У задачах космічної навігації, оптимального керування системами з післядією, задачах екології та імунології виникають крайові задачі для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням, які є важливим розділом сучасної теорії диференціально-функціональних рівнянь.

Основи якісної теорії диференціально-функціональних і диференціально-різницевих рівнянь закладено в працях А. Д. Мишкіса, Л. Е. Ельсгольца, М. М. Красовського, Р. Белмана, Дж. Хейла та ін. Важливі результати в окремих напрямках теорії диференціально-функціональних рівнянь одержано Ю. О. Митропольським, А. М. Самойленком, М. В. Азбелевим, В. І. Фодчуком, Г. П. Пелюхом, В. Ю. Слюсарчуком, Є. Ф. Царковим, Д. Я. Хусаїновим та іншими.

Дослідження крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь другого порядку розпочалося з праць А. Д. Мишкіса, Г. А. Каменського, Л. Г. Грімма та К. Шмідта, К. Неверса, в яких запропоновано їх класифікацію та одержано перші достатні умови існування розв'язків за допомогою принципу нерухомої точки Шаудера-Тихонова.

Для знаходження розв'язків крайових задач використовують проекційно-ітераційні та колокаційні методи, методи послідовних наближень і ряд числових алгоритмів. Відзначимо чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка, який успішно застосували М. І. Ронто, Д. І. Мартинюк, С. І. Трохимчук, Ю. В. Теплінський, І. І. Король та інші до різних класів крайових задач.

Знаходження точних розв'язків крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь можливе тільки для найпростіших класів, тому актуальною і важливою є розробка наближених алгоритмів їх знаходження. На даний час у працях А. М. Самойленка та М. І. Ронто, Г. А. Каменського та Е. Д. Кононенка для розв'язування крайових задач із запізненням запропоновані методи колокацій. Проекційно-ітераційні методи наближеного розв'язування крайових задач для диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням розглядалися в працях А. Ю. Лучки та його учнів. Успішно застосований чисельно-аналітичний метод для різних класів крайових задач із запізненням у працях А. М. Самойленка, Д. І. Мартинюка, Л. В. Стельмащук, І. І. Короля.

Метод сплайн-колокацій для розв'язування крайових задач із запізненням запропоновано в працях Х. Е. Бенкса та Ф. Каппеля, А. Беллена та Ж. Мігули. Застосування кубічних сплайнів до різних класів таких крайових задач розглядалося в працях В. Л. Мірошниченка, Ф. Й. Бурковського, Т. С. Ніколової та Д. Д. Байнова, І. М. Черевка, І. В. Якімова, Н. П. Настасьєвої.

У даній роботі досліджено достатні умови існування розв'язків крайових задач для різних класів диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу. Запропоновано й обґрунтовано схеми сплайн-апроксимацій для наближення розв'язків цих крайових задач з урахуванням можливих розривів їхніх похідних. Розроблено прикладне програмне забезпечення для знаходження наближених розв'язків модельних крайових задач для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням і нейтрального типу.

Дослідження цих питань має важливе значення для подальшого розвитку теорії диференціально-різницевих рівнянь, і в силу цього тема дисертації є актуальною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження дисертаційної роботи були розпочаті в рамках держбюджетної наукової теми Кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича "Методи аналізу диференціально-функціональних і еволюційних рівнянь та математичне моделювання процесів з післядією та випадковостями" (номер державної реєстрації 0111U000181) і продовжені в рамках науково-дослідної роботи "Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних та еволюційних рівнянь і моделювання детермінованих та стохастичних прикладних процесів" (номер державної реєстрації 0116U004084), що виконується в Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича.

Мета і завдання дослідження – встановити умови існування розв'язків крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь і розробити алгоритми їх наближеного знаходження.

Об'єкт дослідження – крайові задачі для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу.

Предмет дослідження – умови існування розв'язків крайових задач для різних класів диференціально-різницевих рівнянь, алгоритми побудови ітераційних схем наближення цих розв'язків та їхня комп'ютерна реалізація.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи теорії диференціально-функціональних рівнянь, теорії сплайн-апроксимацій, методи послідовних наближень і принцип стислих відображень.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що виносяться на захист, такі:

– Одержано зображення інтерполяційного кубічного сплайну дефекту 2 та досліджено умови його існування.

– Установлено коефіцієнтні достатні умови існування розв'язку крайової задачі для лінійних диференціально-різницевих рівнянь із багатьма змінними відхиленнями аргументу запізнюючого та нейтрального типів, а також для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється.

– Побудовано й обґрунтовано ітераційні схеми знаходження розв'язку крайових задач для лінійних диференціально-різницевих рівнянь із багатьма змінними відхиленнями аргументу запізнюючого та нейтрального типів, а також для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється.

– Отримано достатні умови існування розв'язку крайової задачі для нелінійних диференціально-різницевих рівнянь та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням і нейтрального типу.

– Запропоновано й обґрунтовано ітераційні схеми знаходження розв'язку крайових задач для нелінійних диференціально-різницевих рівнянь та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням і нейтрального типу за допомогою кубічних сплайнів дефекту 2.

– Розроблено прикладне програмне забезпечення для модельних крайових задач для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням і нейтрального типу.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають в основному теоретичний характер. Вони є вагомим внеском у методику дослідження крайових задачі для лінійних і нелінійних диференціально-різницевих рівнянь та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням і нейтрального типу. Побудовані та обґрунтовані ітераційні схеми знаходження розв'язку крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням і нейтрального типу за допомогою кубічних сплайнів дефекту 2 можуть бути використані при вивченні прикладних задач оптимального керування, динамічних процесів екології, економіки тощо.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, включені в дисертацію, отримані автором особисто. У спільних публікаціях із науковим керівником [1—11] І.М. Черевку належить постановка задачі, визначення загальної схеми досліджень та обговорення одержаних результатів. У спільних роботах [12, 13] І.М. Черевку належить постановка задачі та визначення схеми досліджень, а Л.А. Піддубній – обговорення одержаних результатів і порівняння з відомими аналогами.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися на таких конференціях та семінарах:

- XIX всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", Львів, Україна, 3–4 жовтня 2013 р.
- VI міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації", Кам'янець-Подільський, Україна, 2014 р.
- I міжнародна XX всеукраїнська наукова конференція "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", Львів, Україна, 7–9 квітня 2014 р.
- IV міжнародна ганська конференція, присвячена 135-й річниці від дня народження Ганса Гана, Чернівці, Україна, 30 червня – 5 липня 2014 р.
- Міжнародна наукова конференція "The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the 50th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science", Кишинів, Молдова, 19–23 серпня 2014 р.

- Міжнародна наукова конференція "The 23rd Conference On Applied And Industrial Mathematics", Сучава, Румунія, 17–20 вересня 2015 р.

- Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька, Дрогобич, Україна, 25–28 серпня 2015 р.

- VII міжнародна наукова конференція "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації", Кам'янець-Подільський, Україна, 2016 р.

- Міжнародна наукова конференція "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування", присвячена 80-річчю від дня народження професора В.І. Фодчука, Чернівці, Україна, 28–30 вересня 2016 р.

- Міжнародна конференція "Диференціальні рівняння та їх застосування", присвячена 75-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора Д.І. Мартинюка, Кам'янець-Подільський, Україна, 2017 р.

- Міжнародна наукова конференція "The 25th Conference On Applied And Industrial Mathematics", Ясси, Румунія, 14–17 вересня 2017 р.

- Наукові семінари Кафедри математичного моделювання та Факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 17 працях, із них 2 – в закордонних виданнях [3, 9], 4 – у наукових журналах [1, 3—5], 2 – у збірниках наукових праць [2, 6] і 10 – у матеріалах всеукраїнських та міжнародних наукових конференцій [7, 8, 10—17]. Серед публікацій 6 праць у спеціалізованих наукових фахових виданнях [1—5, 9], 1 з яких входить до науково-метричної бази "Web of Science" [1].

Структура і обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 95 найменувань, та додатку. Повний обсяг роботи становить 166 сторінок.

Розділ 1

Огляд літератури за темою дисертаційного дослідження та допоміжні матеріали

1.1 Відомості з теорії диференціально-різницевих рівнянь

Диференціальні рівняння, в яких невідома функція та її похідні входять при різних значеннях аргументу, поєднують у собі властивості звичайних диференціальних та різницевих рівнянь. Вони відомі вже більше двох століть і є предметом активного дослідження протягом останніх 50 років. Часто такі рівняння називають диференціально-різницевими рівняннями (ДРР). За допомогою таких рівнянь вдалося виявити та описати нові ефекти і явища в теорії оптимального керування, динаміці хіміко-технологічних процесів, у напівпровідникових системах зі зворотнім зв'язком та інших прикладних задачах, еволюція яких залежить від передісторії.

Загальноприйнятою є така класифікація ДРР [18—21]: рівняння із запізненням, нейтрального типу і з випередженням аргументу. Найбільш досліджeними є диференціальні рівняння із запізненням

$$\dot{y}(x) = f(x, y(x), y(x-\tau)), \tag{1.1}$$

де $x \in \mathbb{R},\ y(x), y(x-\tau) \in \mathbb{R}^n,\ f$ – неперервна функція, $\tau > 0$.

Зафіксуємо початкову точку $x = x_0$ і визначимо початкову множину $E_{x_0} = [x_0 - \tau; x_0]$. На множині E_{x_0} визначимо неперервну початкову функцію $\varphi:\ E_{x_0} \to \mathbb{R}^n$.

Під неперервним розв'язком рівняння (1.1) із початковою функцією φ розуміють функцію $y(x)$ [20], яка задовольняє рівняння (1.1) і співпадає з початковою функцією на множині E_{x_0}:

$$y(x) = \varphi(x),\ x \in E_{x_0}. \tag{1.2}$$

У працях [18—22] встановлено теореми існування, єдиності та неперервної залежності розв'язків від початкових умов для різних класів ДРР із використанням принципу стислих відображень та методу послідовних наближень.

Узагальненням ДРР є диференціально-функціональні рівняння (ДФР) [21, 23—26]. В основі ДФР лежить трактування розв'язку, запропоноване М.М. Красовським [24], як лінії в розширеному нескінченновимірному просторі $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$. Найбільш широко вивчені лінійні ДФР із запізненням. Досліджено структуру простору розв'язків лінійних рівнянь, побудовано теорію стійкості, вивчено питання існування періодичних розв'язків тощо.

До інтегро-диференціальних рівнянь відносять такі функціональні рівняння, в яких невідома функція та її похідні можуть входити як під знак інтеграла, так і бути поза ним.

Математичні моделі, що описуються інтегро-диференціальними рівняннями, виникають при дослідженні екологічних, фізичних, економічних процесів [27—29]. У дослідженнях, що пов'язані з математичною фізикою, механікою, економікою, також з'являються інтегро-диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється. Ці рівняння відіграють важливу роль при моделюванні різноманітних задач в імунології, медицині. Зокрема інтегро-диференціальні рівняння Вольтерри із запізненням дозволяють описати багато реальних явищ в екології, вперше які досліджував В. Вольтерра в 1928 р. [30—33]

Однією з основних задач теорії інтегро-диференціальних рівнянь із аргументом, що відхиляється, є встановлення зручних умов, що гарантують існування розв'язків таких рівнянь [34—37].

Розв'язування інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням в аналітичній формі є складною задачею, тому велика увага приділяється розробці ефективних методів їх наближеного розв'язання. Методи скінченних різниць та колокаційні методи розвинені в роботах [38—41], застосування асимптотичних розвинень вивчається в працях [42, 43]. Розробку чисельних методів побудови наближеного оптимального розв'язку для систем інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням досліджено в [44].

1.2 Основні твердження стосовно крайових задач для диференціально-різницевих рівнянь

На даний час теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь представлена аналітичними, функціонально-аналітичними, чисельно-аналітичними та чисельними методами [45—52]. Вони орієнтовані як на вивчення якісних задач існування та єдиності розв'язку, так і на безпосередній пошук наближених розв'язків. Відзначимо, що чисельно-аналітичні методи володіють певною універсальністю як для дослідження існування, так і для практичної побудови розв'язків.

Крайові задачі для диференціально-різницевих рівнянь виникають при дослідженні варіаційних задач і задач оптимального керування системами із запізненням, а також у задачах космічної навігації, імунології, екології та інших прикладних процесах. Вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку з аргументом, що відхиляється, розпочалось із робіт [53—56].

Розглянемо диференціальне рівняння з аргументом, що відхиляється:

$$y''(x) = f\Big(x, y(x), y\big(\sigma_1(x)\big), y'(x), y'\big(\sigma_2(x)\big)\Big),\ x \in [a; b], \tag{1.3}$$

де $x, y \in \mathbb{R}$, f – задана функція, $\sigma_1(x), \sigma_2(x)$ – задані неперервні функції, визначені на $[a; b]$. Для диференціальних рівнянь із запізненням $\sigma_1(x) \leq x,\ \sigma_2(x) \leq x$, наприклад, $\sigma_1(x) = x - \tau_1,\ \sigma_2(x) = x - \tau_2$, де τ_1, τ_2 – додатні сталі.

Позначимо

$$\alpha = \min\left(\min_{x\in[a;b]} \sigma_1(x), \min_{x\in[a;b]} \sigma_2(x)\right),$$
$$\beta = \max\left(\max_{x\in[a;b]} \sigma_1(x), \max_{x\in[a;b]} \sigma_2(x)\right).$$

Якщо $\alpha < a$, $\beta < b$, то для рівняння (1.3) задають крайові умови

$$y^{(i)}(x) = \varphi^{(i)}(x),\ i = 0, 1,\ x \in [\alpha; a],\ y(b) = \gamma, \tag{1.4}$$

де $\varphi(x)$ – задана неперервно-диференційовна функція на $[\alpha; a]$, γ – стала.

Крайова задача (1.3)-(1.4) називається крайовою задачею зі скінченним дефектом [57, 58], на основі того що на одному з кінців інтервала, на якому шукається розв'язок, не вистачає задання елемента скінченновимірного простору (в нашому випадку числа).

Якщо $\alpha < a$, $\beta > b$, тоді для рівняння (1.3) додають крайові умови

$$y^{(i)}(x) = \varphi^{(i)}(x),\ x \in [\alpha; a],\ y^{(i)}(x) = \psi^{(i)}(x),\ x \in [b; \beta],\ i = 0, 1, \tag{1.5}$$

де $\varphi(x) \in C^1[\alpha; a],\ \psi(x) \in C^1[b; \beta]$.

Крайову задачу (1.3)-(1.5) називають крайовою задачею нескінченного дефекту [57, 58], оскільки для визначення розв'язку тепер на кожному із кінців відрізка $[a; b]$ потрібно задавати елементи нескінченновимірного простору.

Крайові задачі для диференціальних рівнянь нескінченного дефекту досліджувались у роботах [57—60]. У даній дисертаційній роботі розглядаються крайові задачі для диференціальних рівнянь із аргументом, що відхиляється, скінченного дефекту. Наведемо деякі результати для крайових задач (1.3)-(1.4) із праць [55, 61, 62].

Позначимо $J = [\alpha; a]$, $I = [a; b]$. Нехай $f(x, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ – неперервна функція в області $G = [a; b] \times G_1 \times G_1 \times G_2 \times G_2$, де $G_1 = \{\xi : \xi \in \mathbb{R}, |\xi| \le Q_1\}$, $G_2 = \{\eta : \eta \in \mathbb{R}, |\eta| \le Q_2\}$;

$$\sigma_1(x) = x - \tau_1(x),\ \sigma_2(x) = x - \tau_2(x),\ \tau_1(x), \tau_2(x) \ge 0,$$
$$Q = \left\{ \sup |f(x, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)| : \xi_1, \xi_2 \in G_1,\ \eta_1, \eta_2 \in G_2,\ x \in I \right\}.$$

У загальному випадку, під розв'язком крайової задачі (1.3)-(1.4) у [55, 59] розуміють функцію $y(x) \in C(J \cup I) \cap C^1(J) \cap C^1(I)$, яка має точково-неперервну другу похідну на $[a; b]$, задовольняє рівняння (1.3) і крайові умови (1.4). У точці $x = a$ розв'язок тільки неперервний, при цьому $y'(a)$ – права похідна.

Умови існування розв'язку крайової задачі (1.3)-(1.4) визначає така теорема:

Теорема 1.1. *Нехай виконуються умови [55]:*

1) $b - a \le \min \left\{ (\frac{8Q_1}{Q})^{1/2}, \frac{2Q_2}{Q} \right\}$,

2) $|\frac{\varphi(a) - \gamma}{b - a}| \le Q_2$.

Тоді крайова задача (1.3)-(1.4) *має розв'язок для довільної* $\varphi \in C^1[J]$: $|\varphi(x)| \le Q_1,\ |\varphi'(x)| \le Q_2,\ |\gamma| \le Q_1$.

Умови існування розв'язку крайових задач для ряду класів рівнянь нейтрального типу розглянуто в роботах [57, 58, 60—62]. При цьому для встановлення умов існування використовуються модифікації принципу нерухомої точки Шаудера-Тихонова, а також техніка двосторонніх наближень розв'язку та умови типу Нагумо.

Результати щодо єдиності розв'язку крайової задачі (1.3)-(1.4) пов'язані з умовами Ліпшиця стосовно функції $f(x, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ [52, 58, 62].

Нехай $\sigma_2(x) \in [a; b]$, функції $\varphi(x)$, $f(x, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ – неперервні. Розв'язком крайової задачі (1.3)-(1.4) в цьому випадку буде функція $y(x)$, яка належить простору $B[a; b]$ двічі неперервно-диференційовних на $[a; b]$ функцій, що задовольняють рівняння (1.3) та крайові умови (1.4) [58].

Нехай $\|y\| = \max\limits_{x \in [a;b]} |y(x)|$, $M = \|f(x, 0, 0, 0, 0)\|$. Визначимо в просторі $B[a; b]$ норму

$$\|y\|_B = \max\left\{\frac{8}{(b-a)^2}\|y\|,\ \frac{2}{b-a}\|y'\|\right\}.$$

Теорема 1.2. *Нехай виконуються умови [58]:*

1) $|f(x, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) - f(x, \xi_1', \xi_2', \eta_1', \eta_2')| \leq L_1|\xi_1 - \xi_1'| + L_2|\xi_2 - \xi_2'| + L_3|\eta_1 - \eta_1'| + L_4|\eta_2 - \eta_2'|$,

2) $\theta = \frac{(b-a)^2}{8}(L_1 + L_2) + \frac{b-a}{2}(L_3 + L_4) < 1$,

3) для деякого $\rho > 0$*:* $\theta < \rho(1 - M)$.

Тоді в кулі $\|y\| < \rho$ *існує єдиний розв'язок крайової задачі* (1.3)-(1.4).

У праці [58] розглядається ряд інших трактовок розв'язку крайової задачі (1.3)-(1.4), що стосуються послаблення гладкості розв'язку.

Знайти точний розв'язок диференціально-різницевих рівнянь вдається тільки в найпростіших випадках, тому методи побудови наближених розв'язків для таких рівнянь мають важливе значення. Однак у даний час для диференціально-різницевих рівнянь немає великої кількості алгоритмів і відсутні поширені пакети прикладних програм для таких рівнянь.

Більшість чисельних алгоритмів, побудованих для звичайних диференціальних рівнянь, можна пристосувати для рівнянь із запізненням [63—67]. Однак при цьому необхідно враховувати, що розв'язки рівнянь із аргументом, що відхиляється, мають розриви похідних, що ускладнює використання скінченно-різницевих методів. Відзначимо детальний аналіз застосування методів Рунге-Кутти до диференціальних рівнянь із запізненням у роботах [68—70].

Важливість дослідження крайових задач для систем із запізненням та додаткові складності, що при цьому виникають, відмічені в роботі [71]. На даний час достатньо добре розроблені для крайових задач із запізненням методи колокацій [49, 72, 73]. Застосування проекційно-ітераційних методів для наближеного розв'язання крайових задач для диференціальних та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням досліджено в [72, 74]. Відзначимо чисельно-аналітичний метод А. М. Самойленка [49, 75], який успішно перенесений для знаходження періодичних розв'язків та розв'язування крайових задач різних класів рівнянь із запізненням [76—78].

Достатньо ефективним виявилось застосування методу сплайн-функцій [79—81] для розрахування початкових і крайових задач рівнянь із запізненням та нейтрального типів. Наближеному розв'язанню початкових задач для диференціально-різницевих рівнянь методом сплайн-функцій присвячена велика кількість праць, відзначимо деякі з них [64, 82—84]. Для крайових задач із запізненням зручним виявилось використання кубічних сплайнів. Зокрема в працях [85, 86] розглянуто застосування кубічних сплайн-функцій для наближеного знаходження гладких розв'язків крайових задач із запізненням. У роботі [87] побудовано й обґрунтовано схему застосування базисних кубічних сплайнів для наближеного розв'язання лінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням.

Застосування таких сплайнів дозволяє побудувати найбільш прості для реалізації алгоритми.

Відзначимо, що застосування методу сплайн-функцій для розв'язання крайових задач запізнюючого та нейтрального типів із врахуванням розривів похідних досліджено в [88—90].

У працях [91, 92] запропоновано новий підхід наближеного розв'язання крайових задач із запізненням, що базується на апроксимації рівнянь із запізненням послідовністю звичайних диференціальних рівнянь.

Розділ 2

Лінійні сплайни

2.1 Загальна теорія сплайнів

Нехай на відрізку $[a; b]$ задане розбиття $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$. Для цілого $k \geq 0$ через $C^k = C^k[a; b]$ позначимо множину k разів неперервно-диференційовних на $[a; b]$ функцій, а через $C^{-1}[a; b]$ – множину кусково-неперервних функцій з точками розриву першого роду.

Означення 2.1. Функція $S_{n,\nu}(x)$ називається сплайном степеня n дефекту ν (ν – ціле число, $0 \leq \nu \leq n + 1$) з вузлами на сітці Δ, якщо:

a) на кожному відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ функція $S_{n,\nu}(x)$ є многочленом степеня n, тобто

$$S_{n,\nu}(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha^i \left(x - x_i\right)^\alpha, \; x \in [x_i; x_{i+1}], \; i = 0, \ldots, m-1, \tag{2.1}$$

b) $S_{n,\nu}(x) \in C^{n-\nu}[a; b]$.

Сплайн має зміст і на всій дійсній осі R, якщо покласти $a = -\infty, b = +\infty$. На кожному відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ для сплайна, окрім формули (2.1), можливе його зображення у вигляді

$$S_{n,v}(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} b_\alpha^i \left(x - x_{i+1}\right)^\alpha, \; i = 0, \ldots, m-1. \tag{2.2}$$

При цьому на півосі $(-\infty; x_1]$ береться тільки формула (2.2), а на півосі $[x_{m-1}; \infty)$ – тільки формула (2.1).

Отже, сплайн $S_{n,\nu}(x)$ має неперервні похідні до порядку $n-\nu$ включно. Похідні вище порядку $n-\nu$ можуть мати розриви першого роду в точках x_i, $i = 1, \ldots, m-1$. Для визначеності будемо вважати, що функція $S^{(r)}_{n,\nu}(x)$, $r > n-\nu$, неперервна справа, тобто

$$S^{(r)}_{n,\nu}(x_i) = S^{(r)}_{n,\nu}(x_i + 0),\ r = n-\nu+1, \ldots, n,\ i = 0, \ldots, m-1.$$

Множину сплайнів, що задовольняють означення, позначимо через $S_{n,\nu}(\Delta)$. Цій множині належать і сплайни степеня n дефекту $\nu_1 > \nu$ і сплайни степеня $n_1 < n$ дефекту $\nu_1 < \nu$, якщо $n_1 - \nu_1 \geq n - \nu$, в тому числі многочлени степеня не вище n. Оскільки звичайні операції додавання елементів з $S_{n,\nu}(\Delta)$ та їх множення на дійсні числа не виводять за межі множини, то вона є лінійним простором.

Також у теорії сплайнів розглядаються зрізані степеневі функції

$$(x - x_i)^{\alpha'}_+,$$

зв'язані з точками сітки Δ. При $n - \nu + 1 \leq \alpha' \leq n$ вони належать множині $S_{n,\nu}(\Delta)$.

Теорема 2.1. *Функції x^α, $\alpha = 0, \ldots, n$,*

$$(x - x_i)^{\alpha'}_+,\ \alpha' = n-\nu+1, \ldots, n,\ 1 \leq \nu \leq n+1,\ i = 0, \ldots, m-1, \qquad (2.3)$$

лінійно незалежні й утворюють базис у просторі $S_{n,\nu}(\Delta)$ розмірності $(n+1) + \nu(m-1)$ [80].

Наслідок. *Розглянемо простір кубічних сплайнів дефекту 1 на сітці Δ з кількістю вузлів m. Тоді розмірність цього простору, згідно теореми 2.1, дорівнює $m+3$.*

2.2 Кубічні сплайни дефекту 1

Нехай на відрізку $[a;b]$ у вузлах сітки $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ задано значення деякої функції

$$y_i = y(x_i),\ i = 0, \ldots, m. \tag{2.4}$$

Означення 2.2. Кубічним сплайном дефекту 1 називається функція $S(x)$, що задовольняє умови:

1) $S(x) \in P_3(x),\ x \in [x_i; x_{i+1}],\ i = 0, 1, \ldots, m-1$, де $P_3(x)$ – множина многочленів 3-го степеня,

2) $S(x) \in C^2[a;b]$. (2.5)

Означення 2.3. Кубічний сплайн $S(x,y)$ називатимемо кубічним інтерполяційним сплайном для функції $y(x)$ на сітці Δ, якщо

$$S(x_i, y) = y(x_i),\ i = \overline{0,m}. \tag{2.6}$$

Сплайн $S(x,y)$ на кожному відрізку $[x_i; x_{i+1}]$, $i = \overline{0, m-1}$ визначається чотирма коефіцієнтами, тому для його побудови на $[a;b]$ потрібно $4m$ коефіцієнтів. Умова (2.5) забезпечує неперервність сплайна і його похідних $S^{(p)}(x,y)$, $p = 0,1,2$, в усіх внутрішніх вузлах x_i, $i = \overline{1, m-1}$ сітки Δ. Ця умова дає $3(m-1)$ рівності для знаходження коефіцієнтів сплайна. Разом із рівностями (2.6) маємо $4m - 2$ співвідношення для побудови сплайна. Дві умови, яких не вистачає, зручно задавати у вигляді обмежень на значення сплайна та його похідних на кінцях проміжку $[a;b]$. Найбільш уживаними є такі типи крайових умов:

1) $S'(a,y) = y'(a),\ S'(b,y) = y'(b)$ (2.7)

2) $S''(a,y) = y''(a),\ S''(b,y) = y''(b)$ (2.8)

3) $S^{(p)}(a,y) = S^{(p)}(b,y),\ r = 1,2$ (2.9)

4) $S'''(x_i+0,y) = S'''(x_i-0,y),\ i = \overline{1,m-1}$ (2.10)

Розглянемо питання існування кубічних інтерполяційних сплайнів на сітці Δ. Введемо в розгляд величини: $M_i = S''(x_i)$, $i = \overline{0,m}$. Із означення 2.2 випливає, що сплайн $S(x)$ є кубічним многочленом на кожному відрізку $[x_{i-1};x_i]$, $i = \overline{1,m}$ і $S(x) \in C^2[a;b]$.

Враховуючи умови інтерполяції, дістаємо зображення для кубічного сплайна [80]:

$$S(x) = \frac{M_i}{6h_i}(x-x_{i-1})^3 + \frac{M_{i-1}}{6h_i}(x_i-x)^3 + \tag{2.11}$$

$$\left(y_{i-1} - M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x_i-x}{h_i} + \left(y_i - M_i\frac{h_i^2}{6}\right)\frac{x-x_{i-1}}{h_i},$$

$$x \in [x_{i-1};x_i],\ h_i = x_i - x_{i-1},\ i = 1,\ldots,m.$$

Із означення сплайна маємо, що

$$S'(x_i+0) = S'(x_i-0),\ i = 1,\ldots,m-1. \tag{2.12}$$

Обчисливши похідні сплайна

$$S'(x_i+0) = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2M_i + M_{i+1}), \tag{2.13}$$

$$S'(x_i-0) = \frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6}(M_{i-1} + 2M_i),$$

дістанемо систему рівнянь для величин M_i:

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = \frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \tag{2.14}$$

$$i = 1,\ldots,m-1,$$

де $\mu_i = h_{i-1}(h_{i-1}+h_i)^{-1},\ \lambda_i = 1 - \mu_i$.

Ці рівняння разом із крайовими умовами утворюють систему $(m+1)$-го порядку відносно невідомих M_i. У випадку крайових умов типу 1) і 2) вона має вигляд

$$2M_0 + \lambda_0^* M_1 = d_0^*, \tag{2.15}$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i,\ i = 1, \ldots, m-1,$$

$$\mu_m^* M_{m-1} + 2M_m = d_m^*,$$

де $d_i = \frac{6}{h_{i-1}+h_i}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$.

Для випадку крайових умов типу 1) параметри системи (2.15) є такими:

$$\lambda_0^* = \mu_m^* = 1,$$

$$d_0^* = \frac{6}{h_0}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - y_0'\right), \tag{2.16}$$

$$d_m^* = \frac{6}{h_{m-1}}\left(y_m' - \frac{y_m - y_{m-1}}{h_{m-1}}\right).$$

Матриця системи (2.15) є тридіагональною. Не складно побачити, що вона має переважаючу діагональ, а значить є невиродженою. Після обчислення всіх M_i, $i = \overline{0, m}$ значення кубічного сплайна в довільній точці $x \in [a; b]$ може бути обчислене за формулою (2.11).

Для сплайна $S(x)$ дефекту 1, побудованого, як показано вище, справедлива така теорема:

Теорема 2.2. *Інтерполяційний кубічний сплайн $S(x)$, який задовольняє умови типу (2.6) та одну з крайових умов типу 1)-4), існує і єдиний [80].*

Введемо позначення:

$$\overline{h} = \max_i h_i,\ \underline{h} = \min_i h_i,\ \beta = \frac{\overline{h}}{\underline{h}},$$

$$\omega_i(f) = \max_{x', x'' \in [x_i; x_{i+1}]} \left| y(x'') - y(x') \right|,$$

$$\omega(f) = \max_{0 \le i \le m-1} w_i(f).$$

Для оцінки похибки інтерполяції справедлива така теорема:

Теорема 2.3. *Нехай* $y(x) \in C^2[a;b]$ *і* Δ *– сітка на* $[a;b]$, *а* $S(x,y)$ *– кубічний сплайн, що інтерполює* $y(x)$ *на сітці* Δ. *Тоді [80]:*

$$\|y^{(i)}(x) - S^{(i)}(x,y)\| \le k_i H^{2-i} \omega(y''(x), H), \tag{2.17}$$
$$k_0 = \frac{5}{2},\ k_1 = k_2 = 5,\ H = \max_i h_j.$$

Розглянемо випадок рівномірної сітки на відрізку $[a;b]$:

$$\Delta : x_i = a + ih,\ i = \overline{0,m},\ h = \frac{b-a}{m}.$$

Визначимо кубічний сплайн $S(x,y)$, який інтерполює на сітці Δ функцію $y(x)$, що задовольняє умови $y(a) = y(b) = c$. Його можна зобразити при $x \in [x_{j-1}; x_j],\ j = \overline{1,m}$ у вигляді

$$S(x,y) = M_{j-1}\frac{(x_j - x)^3}{6h} + M_j\frac{(x - x_{j-1})^3}{6h} + (y_{j-1} - \frac{h^2}{6}M_{j-1})\frac{x_j - x}{h} +$$
$$+ (y_j - \frac{h^2}{6}M_j)\frac{x - x_{j-1}}{h}. \tag{2.18}$$

У цьому випадку здійснюються співвідношення

$$y_{j+1} - 2y_i + y_{j-1} = \frac{h^2}{6}(M_{j+1} + 4M_j + M_{j-1}),\ j = \overline{1,m-1}, \tag{2.19}$$

які забезпечують неперервність перших похідних $S'(x,y)$ у внутрішніх вузлах сітки Δ. У матричному вигляді співвідношення (2.18) будуть мати вигляд

$$AY = \frac{h^2}{6}BM, \tag{2.20}$$

де $Y = (y_0, y_1, \ldots, y_m)^T,\ M = (M_0, M_1, \ldots, M_m)^T$, $A = (a_{ij})$ – матриця розмірності $(m-1) \times (m-1)$, $B = (b_{ij})$ – матриця розмірності $(m-1) \times (m+1)$, які задаються елементами a_{ij} та b_{ij} відповідно

$$a_{ij} = \begin{cases} -2, & i = j, \\ 1, & |i-j| = 1, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{2.21}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 4, & j-i=1, \\ 1, & j-i=0 \text{ або } j-i=2, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \tag{2.22}$$

Розглянемо деякі твердження відносно матриць $A=(a_{ij})$ та $B=(b_{ij})$.

Лема 2.1. *Правильні такі співвідношення:*

1) $det(A) = (-1)^{m-1}m$,

2) $\|A^{-1}\| \le \frac{m^2}{8}$,

3) $\max\limits_{1\le i\le m-2} \sum\limits_{j=1}^{m-1} \left|a^{-1}_{i+1,j} - a^{-1}_{ij}\right| \le \frac{m}{2}$, *де* a^{-1}_{ij} *– елементи матриці* A^{-1},

4) $\|B\| = 6$.

Доведення. Твердження 1) і 4) нескладно здобути методом математичної індукції та використавши означення норми матриці. Для елементів матриці A^{-1}, використовуючи твердження 1), одержуємо співвідношення:

$$a_{ij} = \begin{cases} -\frac{j(m-i)}{m}, & j \le i, \\ -\frac{i(m-j)}{m}, & i \le j, \end{cases} \quad i,j = \overline{1, m-1}. \tag{2.23}$$

Підрахуємо значення величин $S_i = \sum\limits_{j=1}^{m-1} \left|a^{-1}_{ij}\right|$ та $R_i = \sum\limits_{j=1}^{m-1} \left|a^{-1}_{i+1,j} - a^{-1}_{ij}\right|$, використовуючи вирази для елементів a^{-1}_{ij}:

$$S_i = \sum_{j=1}^{i} \left|-\frac{j(m-i)}{m}\right| + \sum_{j=i+1}^{m-1} \left|-\frac{i(m-j)}{m}\right| =$$
$$= \frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{i} j(m-i) + \sum_{j=i+1}^{m-1} i(m-j)\right) = \frac{im-i^2}{2}. \tag{2.24}$$

$$R_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{j(i+1-m)}{m} + \frac{j(m-i)}{m}\right| + \sum_{j=i+1}^{m-1} \left|\frac{(i+1)(j-m)}{m} + \frac{i(m-j)}{m}\right| +$$

$$+\left|\frac{i(i+1-m)}{m}+\frac{i(m-i)}{m}\right|=\frac{1}{m}\left(\sum_{j=1}^{i} j+\sum_{j=i+1}^{m-1}(m-j)+i\right)= \tag{2.25}$$

$$=\frac{1}{m}\left(2i^2-(m-1)(m-2i)\right).$$

Оцінюючи праві частини рівностей (2.24)-(2.25), одержуємо

$$\max_{1\le i\le m-1} S_i=\max_{1\le i\le m-1}\left(\frac{im-i^2}{2}\right)\le\frac{m^2}{2}, \tag{2.26}$$

$$\max_{1\le i\le m-2} R_i=\max_{1\le i\le m-2}\frac{1}{2}\left(2i^2-(m-i)(m-2i)\right)\le\frac{m}{2}. \tag{2.27}$$

Лему доведено. □

2.3 Кубічні сплайни дефекту 2

Нехай на $[a;b]$ задано сітку

$$\Delta : a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b. \tag{2.28}$$

Означення 2.4. Функцію $S(x)$, визначену на інтервалі $[a;b]$, назвемо кубічним сплайном дефекту два на сітці Δ, якщо виконуються умови:

1) $S(x)\in P_3(x),\ x\in[x_i;x_{i+1}],\ i=\overline{0,m-1}$, де $P_3(x)$ – множина многочленів 3-го степеня,

2) $S(x)\in C^1[a;b]$,

3) $S(x)\in C^2[x_i;x_{i+1}],\ i=\overline{0,m-1}.$ (2.29)

Означення 2.5. Сплайн $S(x)$, який задовольняє умови

1) $S(x_i)=y(x_i),\ i=\overline{0,m}$,

2) $S''(x_0+0)=y''(x_0+0),\ S''(x_m-0)=y''(x_m-0)$,

3) $S''(x_s-0)=y''(x_s-0),\ S''(x_s+0)=y''(x_s+0),\ s=\overline{1,m-1}$, (2.30)

називається сплайном дефекту два, який інтерполює функцію $y(x)$ у вузлах x_i $(i = 0, 1, \dots, m)$, і позначається $S(x, y)$.

Введемо позначення:

$$M_j^+ = S''(x_j + 0, y),\ j = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2.31}$$

$$M_j^- = S''(x_j - 0, y),\ j = 1, 2, \dots, m. \tag{2.32}$$

Покажемо, що означення 1 і 2 задають сплайн $S(x, y)$, що інтерполює функцію $y(x)$ і має вигляд:

$$\begin{gathered} S(x,y) = M_{j-1}^+ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j^- \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \\ + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}^+ h_j^2}{6}\right)\frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_j^- h_j^2}{6}\right)\frac{x - x_{j-1}}{h_j}, \\ x \in [x_{j-1}; x_j],\ j = 1, 2, \dots, m. \end{gathered} \tag{2.33}$$

Розглянемо інтервал $[x_{j-1}; x_j]$. Нехай $S''(x, y) = px + q$. Враховуючи (2.31) і (2.32), маємо на $[x_{j-1}; x_j]$:

$$\begin{cases} px_{j-1} + q = M_{j-1}^+, \\ px_j + q = M_j^-. \end{cases}$$

Звідси отримаємо

$$p = \frac{M_j^- - M_{j-1}^+}{h_j},\ q = M_{j-1}^+ - \frac{M_j^- M_{j-1}^+}{h_j} x_{j-1}.$$

Отже, інтегруючи двічі, дістаємо

$$S(x,y) = M_j^- \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + M_{j-1}^+ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + c_1 x + c_2. \tag{2.34}$$

Враховуючи (2.30), маємо:

$$\begin{cases} M_j^- \frac{(x_j - x_{j-1})^3}{6h_j} + c_1 x_j + c_2 = y_j, \\ M_{j-1}^+ \frac{(x_j - x_{j-1})^3}{6h_j} + c_1 x_{j-1} + c_2 = y_{j-1}. \end{cases}$$

Звідси одержимо:

$$c_1 = \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j} - \frac{h_j}{6}\left(M_j^- - M_{j-1}^+\right),$$
$$c_2 = y_{j-1}\frac{x_j}{h_j} - M_{j-1}^+\frac{x_j h_j}{6} - y_j\frac{x_{j-1}}{h_j} + M_j^-\frac{x_{j-1}h_j}{6}.$$

Підставляючи ці вирази в (2.34), одержимо вигляд сплайна дефекту 2 у формі (2.33).

Враховуючи властивості кубічного сплайна у внутрішніх вузлах сітки Δ, маємо рівності:

$$S_j'(x_j - 0, y) = S_{j+1}'(x_j + 0, y),\ j = \overline{1, m-1}. \tag{2.35}$$

Враховуючи вигляд сплайна, рівності (2.35) перепишемо у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку задовольняють величини M_{j-1}^+ і M_j^- ($j = 1, 2, \ldots, m$).

$$\left\{\begin{array}{c} h_{j+1}y_{j-1} - (h_j + h_{j+1})y_j + h_j y_{j+1} = \frac{h_j h_{j+1}}{6}\times \\ \times\left(h_j M_{j-1}^+ + 2h_j M_j^- + 2h_{j+1}M_j^+ + h_{j+1}M_{j+1}^-\right), \\ j = \overline{1, m-1}. \end{array}\right. \tag{2.36}$$

Похідна $S'(x, y)$ від функції $S(x, y)$ обчислюється за формулою

$$S'(x, y) = -M_{j-1}^+\frac{(x_j - x)^2}{2h_j} + M_j^-\frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} + M_{j-1}^+\frac{h_j}{6} - M_j^-\frac{h_j}{6} + \\ + \frac{y_j - y_{j-1}}{h_j},\ x \in [x_{j-1}; x_j],\ j = \overline{1, m}. \tag{2.37}$$

Запишемо систему (2.36) у матричній формі:

$$A_m y = BM + d, \tag{2.38}$$

де матриця

$$A_m = \begin{pmatrix} -(h_1+h_2) & h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_3 & -(h_2+h_3) & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(h_{m-2}+h_{m-1}) & h_{m-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_m & -(h_{m-1}+h_m) \end{pmatrix}$$

розмірності $(m-1)\times(m-1)$, вектор $d = (-h_2 y_0, 0, \dots, 0, -h_{m-1}y_m)^T$ розмірності $m-1$, B – матриця коефіцієнтів правої частини співвідношень (2.36) розмірності $(m-1)\times 2m$ та вектор

$$M = (M_0^+, M_1^-, M_1^+, M_2^-, M_2^+, \dots, M_{m-1}^-, M_{m-1}^+, M_m^-)^T$$

розмірності $2m$.

Лема 2.2. *Для матриці A_m мають місце такі співвідношення:*

1) $|A_m| = (-1)^{m-1} h_2 h_3 \dots h_{m-1}(b-a),$ (2.39)

2) $\left\|A_m^{-1}\right\| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m-1} |a_{ij}^{-1}| \le \dfrac{k^2}{8h^3}(b-a)^2,$ (2.40)

3) $\max\limits_{-1\le i\le m-2} \sum\limits_{j=1}^{m-1} |a_{i+1,j}^{-1} - a_{ij}^{-1}| \le \dfrac{k^2(b-a)}{2h^2},$ (2.41)

4) $\sum\limits_{j=1}^{m-1} |a_{ij}^{-1}| \le \dfrac{k^2(b-a)}{2h^2},\ i = \overline{1, m-1},$ (2.42)

де a_{ij}^{-1} – елементи оберненої матриці A_m^{-1}, $k = \frac{H}{h}$, $h = \min\limits_j h_j$ $(j = \overline{1,m})$, $H = \max\limits_j h_j$ $(j = \overline{1,m})$,

5) $\|B\| = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m-1} |b_{ij}| = H^3.$ (2.43)

Доведення. Встановимо властивість 1), використовуючи метод математичної індукції.

Покладемо $m = 2$. Тоді

$$|A_2| = -(h_1 + h_2) = -(b - a).$$

Для $m = 3$ маємо:

$$|A_3| = \begin{vmatrix} -(h_1 + h_2) & h_1 \\ h_3 & -(h_2 + h_3) \end{vmatrix} = h_2(h_1 + h_2 + h_3) = h_2(b - a).$$

Аналогічно, для $m = 4$ дістаємо:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} -(h_1 + h_2) & h_1 & 0 \\ h_3 & -(h_2 + h_3) & h_3 \\ 0 & h_4 & -(h_3 + h_4) \end{vmatrix} = -(h_3 + h_4)|A_3| -$$

$$-h_4 \begin{vmatrix} -(h_1 + h_2) & 0 \\ h_3 & h_2 \end{vmatrix} = -h_2h_3(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) = -h_2h_3(b - a).$$

Припустимо, що виконується нерівність

$$|A_m| = (-1)^{m-1}h_2h_3 \dots h_{m-1}(b - a).$$

Тоді для A_{m+1} дістаємо:

$$|A_{m+1}| =$$

$$= \begin{vmatrix} -(h_1 + h_2) & h_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h_3 & -(h_2 + h_3) & h_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -(h_{m-1} + h_m) & h_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h_{m+1} & -(h_m + h_{m+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= -(h_m + h_{m+1})|A_m| - h_{m+1}h_{m-1}|A_{m-1}| =$$

$$= (-1)^{m-1} h_2 \dots h_{m-1} (b-a)(h_m + h_{m+1}) -$$
$$-(-1)^{m-2} h_2 \dots h_{m-2} (b-a) h_{m-1} h_{m+1} =$$
$$= (-1)^m h_2 h_3 \dots h_{m-1} h_m (b-a).$$

Отже, рівність 1) доведено.

Властивості 2)-5) можна довести аналогічно, використовуючи метод математичної індукції. □

2.4 Висновки до розділу 2

У даному розділі розглядаються елементи теорії лінійних сплайнів.

У підрозділі 2.1 введено основні позначення та означення лінійних сплайнів, сформульовано твердження про розмірність простору сплайнів степеня n дефекту ν.

У підрозділі 2.2 розглянуто кубічні сплайни дефекту 1, наведено їх аналітичне зображення та сформульовано твердження про їх існування та єдиність.

У підрозділі 2.3 досліджуються кубічні сплайни дефекту 2: одержано аналітичне зображення, розглянуто їхні властивості та наведено оцінки точності апроксимації.

Розділ 3

Крайові задачі для диференціально-різницевих рівнянь

3.1 Лінійні крайові задачі з запізненням

3.1.1 Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(x)\, y(x - \tau_i(x)) + b_i(x)\, y'(x - \tau_i(x)) \Big) + f(x), \tag{3.1}$$

$$y^{(j)}(x) = \varphi^{(j)}(x),\ j = 0, 1,\ x \in [a^*; a],\ y(b) = \gamma, \tag{3.2}$$

де запізнення $\tau_0(x) = 0$, а $\tau_i(x),\ i = \overline{1, n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a, b]$, $\varphi(x)$ – задана неперервно-диференційовна функція на $[a^*; a]$, $\gamma \in R$,

$$a^* = \min_{0<i\le n} \left\{ \inf_{x \in [a;b]} (x - \tau_i(x)) \right\}.$$

Нехай функції $a_i(x)$, $b_i(x)$, $i = \overline{0, n},\ f(x)$ – неперервні на $[a; b]$.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)$:

$$E_i = \big\{ x_j \in [a, b] :\ x_j - \tau_i(x_j) = a,\ j = 1, 2, \ldots \big\},$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i.$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x)$, $i = \overline{1,n}$ – такі функції, що множини E_i, $i = \overline{1,n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$J = [a^*; a], \ I = [a, b],$$
$$I_1 = [a, x_1], \ I_2 = [x_1, x_2], \ \ldots, \ I_k = [x_{k-1}, x_k], \ I_{k+1} = [x_k, b],$$
$$B\big(J \cup I\big) = \Bigg\{ y(x) : y(x) \in \Bigg(C(J \cup I) \cap \Big(C^1(J) \cup C^1(I) \Big) \cap$$
$$\cap \Bigg(\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j) \Bigg) \Bigg), |y(x)| \le P_1, \ |y'(x)| \le P_2 \Bigg\},$$

де P_1, P_2 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (3.1)-(3.2) вважатимемо функцію $y = y(x)$, якщо вона задовольняє рівняння (3.1) на $[a; b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (3.2). Будемо шукати розв'язок задачі (3.1)-(3.2), який належить простору $B(J \cup I)$.

Із означення простору $B(J \cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (3.1)-(3.2) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x \in [a, b]$, де $y'(a)$ – права похідна.

Введемо норму в просторі $B(J \cup I)$:

$$\|y\|_B = \max \left\{ \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |y(x)|, \frac{2}{b-a} \max \left(\max_{x \in J} |y'(x)|, \max_{x \in I} |y'(x)| \right) \right\}.$$

Простір $B(J \cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (3.1)-(3.2) еквівалентна інтегральному рівнянню [55, 58]

$$y(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} a_i(s) \, y(s - \tau_i(s)) + \sum_{i=0}^{n} b_i(s) \, y'(s - \tau_i(s)) \right] \times \tag{3.3}$$
$$\times \overline{G}(x, s) \, ds + l(x), \ x \in J \cup I,$$

$$\overline{G}\,(x,s)=\begin{cases}G\,(x,s)\,, & x,s\in I,\\ \quad 0, & \text{в іншому випадку},\end{cases}$$

$$l\,(x)=\begin{cases}\varphi\,(x)\,, & x\in J,\\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\,(x-a)+\varphi\,(a)\,, & x\in I,\end{cases}$$

де $G\,(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''\,(x)=0,\ x\in I,\ y\,(a)=y\,(b)=0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B(J\cup I)$ наступним чином

$$(Ty)\,(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\left[\sum_{i=0}^{n}a_i\,(s)\,y\,(s-\tau_i\,(s))+\sum_{i=0}^{n}b_i\,(s)\,y'\,(s-\tau_i\,(s))\right]\times$$
$$\times\overline{G}\,(x,s)\,ds+l\,(x)\,,\ x\in J\cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'\,(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\left[\sum_{i=0}^{n}a_i\,(s)\,y\,(s-\tau_i\,(s))+\sum_{i=0}^{n}b_i\,(s)\,y'\,(s-\tau_i\,(s))\right]\times \tag{3.4}$$
$$\times\overline{G}'_x\,(x,s)\,ds+\frac{\gamma-\varphi\,(a)}{b-a},\ x\in J\cup I.$$

Нехай коефіцієнти у рівнянні (3.1) такі, що справджуються нерівності $|a_i(x)|\leq A_i$, $|b_i(x)|\leq B_i$, $i=\overline{0,n}$, $|f(x)|\leq F$ при $x\in[a;b]$. Позначимо $P=P_1\sum\limits_{i=0}^{n}A_i+P_2\sum\limits_{i=0}^{n}B_i+F$, де P_1,P_2 – додатні сталі, що входять в означення простору $B(J\cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi\,(x)|\,,\ \frac{(b-a)^2}{8}P+\max\Big\{|\varphi\,(a)|\,,\ |\gamma|\Big\}\right\}\leq P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'\,(x)|\,,\ \frac{b-a}{2}P+\left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\leq P_2,$

3) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2}\sum\limits_{i=0}^{n} B_i < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (3.1)-(3.2) *у просторі* $B\left(J \cup I\right)$.

Доведення. Із вигляду функції Гріна

$$G\left(x,s\right)=\begin{cases} \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a \le s \le x \le b, \\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a \le x \le s \le b, \end{cases}$$

одержуємо наступні оцінки [93]

$$\int\limits_a^b \Big|G\left(x,s\right)\Big| ds \le \frac{(b-a)^2}{8},\ \int\limits_a^b \Big|G'_x(x,s)\Big| ds \le \frac{b-a}{2}. \tag{3.5}$$

Якщо справджуються умови 1)-2) та нерівності (3.5), тоді оператор T відображає простір $B(J \cup I)$ у себе. Покажемо, що це дійсно так. Враховуючи (3.3), маємо:

$$\Big|(Ty)(x)\Big| \le \max\Bigg\{\Bigg|\int\limits_{a^*}^{a}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i\left(s\right)y\left(s-\tau_i\left(s\right)\right)+\sum_{i=0}^{n} b_i\left(s\right)y'\left(s-\tau_i\left(s\right)\right)\right]\times$$

$$\times\overline{G}(x,s)ds + l(x)\Bigg|,$$

$$\Bigg|\int\limits_a^b\left[\sum_{i=0}^{n} a_i\left(s\right)y\left(s-\tau_i\left(s\right)\right)+\sum_{i=0}^{n} b_i\left(s\right)y'\left(s-\tau_i\left(s\right)\right)\right]\overline{G}(x,s)ds + l(x)\Bigg|\Bigg\} \le$$

$$\le \max\left\{|\varphi(x)|,\ \left(P_1\sum_{i=0}^{n} A_i + P_2\sum_{i=0}^{n} B_i + F\right)\int\limits_a^b G(x,s)ds + |l(x)|\right\} \le$$

$$\le \max\left\{|\varphi(x)|,\ P\frac{(b-a)^2}{8} + |l(x)|\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\max_{x\in J}|\varphi(x)|,\ P\frac{(b-a)^2}{8} + \max\Big\{|\varphi(a)|,\ |\gamma|\Big\}\right\} \le P_1,$$

$$\Big|(Ty)'(x)\Big| \le \max\Bigg\{\Bigg|\int\limits_{a^*}^{a}\left[\sum_{i=0}^{n} a_i\left(s\right)y\left(s-\tau_i\left(s\right)\right)+\sum_{i=0}^{n} b_i\left(s\right)y'\left(s-\tau_i\left(s\right)\right)\right]\times$$

$$\times\overline{G}'_x(x,s)ds + l'(x)\Bigg|,$$

$$\left|\int\limits_a^b \left[\sum_{i=0}^{n} a_i\left(s\right)y\left(s-\tau_i\left(s\right)\right) + \sum_{i=0}^{n} b_i\left(s\right)y'\left(s-\tau_i\left(s\right)\right)\right]\overline{G}'_x(x,s)ds + l'(x)\right|\Bigg\} \leq$$

$$\leq \max\left\{|\varphi'(x)|,\ \left(P_1\sum_{i=0}^{n} A_i + P_2\sum_{i=0}^{n} B_i + F\right)\int\limits_a^b G'_x(x,s)ds + |l'(x)|\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{|\varphi'(x)|,\ P\frac{b-a}{2} + \left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{\max_{x\in J}|\varphi'(x)|,\ P\frac{b-a}{2} + \left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\} \leq P_2.$$

Згідно вибору множин $E_i,\ i=\overline{1,n},\ y\left(x\right) \in \left(C(J\cup I)\cap\left(C^1(J)\cup C^1(I)\right)\cap\right.$ $\left.\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k+1} C^2\left(I_j\right)\right)\right)$, отже, $(Ty)(x) \in B(J\cup I)$.

Нехай $y_1, y_2 \in B\left(J\cup I\right)$. Враховуючи оцінки (3.5), одержуємо:

$$\Big|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big| =$$

$$= \Bigg|\int\limits_{a^*}^{b}\Bigg[\sum_{i=0}^{n} a_i(s)\Big(y_1(s-\tau_i(s)) - y_2(s-\tau_i(s))\Big) +$$

$$+\sum_{i=0}^{n} b_i(s)\Big(y_1'(s-\tau_i(s)) - y_2'(s-\tau_i(s))\Big)\Bigg]\bar{G}(x,s)ds\Bigg| \leq$$

$$\leq \int\limits_{a^*}^{b}\Bigg[\sum_{i=0}^{n} A_i\Big|y_1(s-\tau_i(s)) - y_2(s-\tau_i(s))\Big| +$$

$$+\sum_{i=0}^{n} B_i\Big|y_1'(s-\tau_i(s)) - y_2'(s-\tau_i(s))\Big|\Bigg]\Big|\bar{G}(x,s)\Big|ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{a^*}^{b}\Bigg[\sum_{i=0}^{n} A_i\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1 - y_2\Big| +$$

$$+\sum_{i=0}^{n} B_i \max\left\{\max_{s\in I}\left|y_1'-y_2'\right|,\ \max_{s\in J}\left|y_1'-y_2'\right|\right\}\Bigg]\left|\bar{G}(x,s)\right|ds =$$

$$= \int\limits_{a^*}^{b}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\frac{8}{(b-a)^2}\max_{s\in J\cup I}\left|y_1-y_2\right|\sum_{i=0}^{n} A_i + \right.$$

$$\left.+\frac{b-a}{2}\frac{2}{b-a}\max\left\{\max_{s\in I}\left|y_1'-y_2'\right|,\ \max_{s\in J}\left|y_1'-y_2'\right|\right\}\sum_{i=0}^{n} B_i\right]\times$$

$$\times\left|\bar{G}(x,s)\right|ds \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} B_i\right]\|y_1-y_2\|_B,$$

Аналогічно,

$$\left|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\right| \leq$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} B_i\right]\|y_1-y_2\|_B.$$

З одержаних оцінок випливає, що

$$\max_{x\in J\cup I}\left|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\right| \leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} B_i\right]\|y_1-y_2\|_B,$$

$$\max\left\{\max_{x\in J}\left|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\right|,\ \max_{x\in I}\left|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\right|\right\} \leq$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} B_i\right]\|y_1-y_2\|_B.$$

Домножимо першу нерівність на $\frac{8}{(b-a)^2}$, а другу – на $\frac{2}{b-a}$:

$$\frac{8}{(b-a)^2}\ \max_{x\in J\cup I}\left|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\right| \leq$$

$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} B_i\right]\|y_1-y_2\|_B,$$

$$\frac{2}{b-a}\ \max\left\{\max_{x\in J}\left|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\right|,\ \max_{x\in I}\left|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\right|\right\} \leq$$

$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} B_i\right]\|y_1 - y_2\|_B.$$

Враховуючи одержані нерівності, дістаємо

$$\max\left\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big|,\right.$$

$$\left.\frac{2}{b-a}\ \max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\Big|\right\}\right\} \leq$$

$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} B_i\right]\|y_1 - y_2\|_B.$$

Із означення норми простору $B(J \cup I)$ маємо:

$$\Big\|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big\|_B \leq \tag{3.6}$$

$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n} B_i\right]\|y_1 - y_2\|_B.$$

Нерівність (3.6) та умова 3) забезпечують, що оператор T є стислим у просторі $B(J \cup I)$ і має єдину нерухому точку [93]. Тому крайова задача (3.1)-(3.2) має єдиний розв'язок $y(x) \in B(J \cup I)$.

Теорему 3.1 доведено. □

3.1.2 Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ на відрізку $[a; b]$, таку що $E \subset \Delta$. Позначимо через $S(x, y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y\,(x)$, який належить простору $B(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (3.1)-(3.2) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(y^{(0)}, x\right) = \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}\,(x-a) + \varphi\,(a)$, який задовольняє крайові умови (3.2) при $x = a$ та $x = b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (3.1) та сплайн $S\left(y^{(k)},x\right)$, знаходимо для $k=0,1,\ldots$:

$$M_j^{+(k+1)}=\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)+ \tag{3.7}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)\Big)+f(x_j),\ j=\overline{0,m-1},$$

$$M_j^{-(k+1)}=\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)+ \tag{3.8}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)\Big)+f(x_j),\ j=\overline{1,m}.$$

У співвідношеннях (3.7), (3.8) підставляємо $S^{(p)}\left(x,y^{(k)}\right)=\varphi^{(p)}(x)$, $p=0,1$ при $x<a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,m}$, розв'язуючи систему рівнянь (2.36).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x,y^{(k+1)}\right)$ у формі (2.33), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j=\overline{0,m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j=\overline{1,m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1=\sum_{i=0}^{n}\max_{x\in[a;b]}\big|a_i(x)\big|,\ \lambda_2=\sum_{i=0}^{n}\max_{x\in[a;b]}\big|b_i(x)\big|, \tag{3.9}$$

$$u=\frac{K^5}{8}(b-a)^2+\frac{H^2}{8},\ v=\frac{K^5}{2}(b-a)+\frac{2H}{3},$$

$$\mu=5\left(1+\frac{1}{2}\lambda_1H^2+\lambda_2H\right).$$

Теорема 3.2. *Нехай розв'язок крайової задачі* (3.1)-(3.2) *існує та належить простору* $B(J\cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta=u\lambda_1+v\lambda_2<1 \tag{3.10}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0<H<H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(y^{(k)},x\right)\right\}$, $k=0,1,\ldots$ *рівномірно збігається на* $[a;b]$.

Доведення. Покажемо, що ряди

$$S^{(p)}\left(y^{(0)},x\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[S^{(p)}\left(y^{(i)},x\right)-S^{(p)}\left(y^{(i-1)},x\right)\right],\ p=0,1$$

рівномірно збігаються на $[a;b]$, і тим самим одержимо рівномірну збіжність послідовностей $S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)$, $k=0,1,\ldots,\ p=0,1.$

Визначимо скалярні функції $y(x)$, $M(x)$ на $[a;b]$ і позначимо вектори

$$\overline{y}=\Big(y\left(x_1\right),\ldots,y\left(x_{m-1}\right)\Big)^T,$$

$$\overline{M}=\Big(M\left(x_0+0\right),M\left(x_1-0\right),M\left(x_1+0\right),\ \ldots,M\left(x_{m-1}-0\right),$$
$$M\left(x_{m-1}+0\right),M\left(x_m-0\right)\Big)^T.$$

Ітераційний алгоритм A)-D) представимо у матричній формі:

$$\overline{y}^{(k+1)}=A^{-1}B\overline{M}^{k+1}+A^{-1}d, \tag{3.11}$$

де компоненти вектора $\overline{M}$ визначені згідно (3.7)-(3.8), а сталий вектор d залежить лише від крайових умов (3.2). Згідно (2.39), матриця A – невироджена, отже побудова ітераційної послідовності кубічних сплайнів $S\left(y^{(k)},x\right)$, k=$0,1,\ldots$ можлива.

З (3.11) випливають наступні оцінки:

$$\begin{aligned}\left\|y^{(k+1)}-y^{(k)}\right\|&=\left\|A^{-1}BM^{k+1}-A^{-1}BM^{k}\right\|\leq\\&\leq\left\|A^{-1}\right\|\left\|B\right\|\left\|\overline{M}^{k+1}-\overline{M}^{k}\right\|.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Із (3.7)-(3.8) та вигляду правої частини рівняння (3.1) одержуємо нерівності

$$\begin{aligned}\left\|M_j^{+(k+1)}-M_j^{+(k)}\right\|&\leq\lambda_1\max_{x\in[a;b]}\left|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right|+\\&+\lambda_2\max_{x\in[a;b]}\left|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right|,\ j=\overline{0,m-1},\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\left\|M_j^{-(k+1)}-M_j^{-(k)}\right\|\leq\lambda_1\max_{x\in[a;b]}\left|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right|+$$

$$+\lambda_2 \max_{x\in[a;b]} \left| S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right) \right|,\ j=\overline{1,m}.$$

Звідси, враховуючи співвідношення (2.39)-(2.43), нерівність (3.12) можна записати наступним чином:

$$\left\| y^{(k+1)} - y^{(k)} \right\| \le \frac{K^5}{8}(b-a)^2 \left[\lambda_1 \left\| S\left(y^{(k)},x\right) - S\left(y^{(k-1)},x\right) \right\| + \right. \tag{3.14}$$
$$\left. +\lambda_2 \left\| S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right) \right\| \right].$$

Нехай $x \in [x_{j-1}; x_j]$. Враховуючи (2.33), маємо

$$\left| S\left(y^{(k+1)},x\right) - S\left(y^{(k)},x\right) \right| \le \left| \frac{x_j - x}{6h_j}\left((x_j-x)^2 - h_j^2 \right) + \right. \tag{3.15}$$
$$\left. +\frac{x-x_{j-1}}{6h_j}\left((x-x_{j-1})^2 - h_j^2 \right) \right| \left\| \overline{M}^{k+1} - \overline{M}^{k} \right\| +$$
$$+\left| y_{j-1}^{k+1} - y_j^k \right| \left| \frac{x_j - x}{h_j} \right| + \left| y_j^{k+1} - y_j^k \right| \left| \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right|.$$

Розглянемо функцію

$$\xi(x) = \frac{x_j - x}{6h_j}\left(h_j^2 - (x_j - x)^2 \right) + \frac{x - x_{j-1}}{6h_j}\left(h_j^2 - (x - x_{j-1})^2 \right)$$

на відрізку $[x_{j-1}; x_j]$. Знайдемо її похідну і прирівняємо до нуля:

$$\xi'(x) = \frac{(x_j - x)^2 - (x - x_{j-1})^2}{3h_j} = 0.$$

Звідси дістаємо $x^* = x_j - \frac{h}{2}$. Оскільки $\xi(x_{j-1}) = 0,\ \xi(x_j) = 0$, то в точці x^* функція $\xi(x)$ досягає свого найбільшого значення

$$\max_{[x_{j-1};x_j]} \xi(x) = \frac{H^2}{8}. \tag{3.16}$$

Використовуючи (3.13), (3.14), (3.16), з (3.15) маємо

$$\left\| S\left(y^{(k+1)},x\right) - S\left(y^{(k)},x\right) \right\| \le \tag{3.17}$$
$$\le \frac{H^2}{8} \left\| \overline{M}^{k+1} - \overline{M}^{k} \right\| + \left\| y^{(k+1)} - y^{(k)} \right\| \le$$

$$\leq \left(\frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8}\right)\left(\lambda_1 \left\|S\left(y^{(k)},x\right) - S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\| + \right.$$
$$\left. +\lambda_2 \left\|S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right).$$

Згідно вигляду сплайна (2.33), отримуємо

$$\left|S'\left(y^{(k+1)},x\right) - S'\left(y^{(k)},x\right)\right| \leq \tag{3.18}$$
$$\leq \left|\frac{h_j}{6} - \frac{(x_j-x)^2}{2h_j}\right| \left|M_{j-1}^{+(k+1)} - M_{j-1}^{+(k)}\right| +$$
$$+\left|\frac{(x-x_{j-1})^2}{2h_j} - \frac{h_j}{6}\right| \left|M_j^{-(k+1)} - M_j^{-(k)}\right| + \frac{1}{h_j}\left|y_j^{k+1} - y_{j-1}^{k+1} - \left(y_j^k - y_{j-1}^k\right)\right|.$$

Очевидно, справджуються нерівності

$$\max_{x\in[x_{j-1};x_j]} \left(\left|\frac{h_j}{6} - \frac{(x_j-x)^2}{2h_j}\right| + \left|\frac{(x-x_{j-1})^2}{2h_j} - \frac{h_j}{6}\right|\right) \leq \frac{2H}{3}, \tag{3.19}$$
$$\max_{1<j<n} \left|y_j^{k+1} - y_{j-1}^{k+1} - \left(y_j^k - y_{j-1}^k\right)\right| \leq \frac{K^4}{2}(b-a)\,H\left\|\overline{M}^{k+1} - \overline{M}^k\right\|. \tag{3.20}$$

Згідно (3.19)-(3.20), з нерівності (3.18) випливає

$$\left\|S'\left(y^{(k+1)},x\right) - S'\left(y^{(k)},x\right)\right\| \leq \tag{3.21}$$
$$\leq \left(\frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2}{3}H\right)\left(\lambda_1 \left\|S\left(y^{(k)},x\right) - S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\| + \right.$$
$$\left. +\lambda_2 \left\|S'\left(y^{(k)},x\right) - S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right).$$

Ітеруючи (3.17), (3.21) і враховуючи позначення (3.9) та умову (3.10), одержуємо

$$\left\|S\left(y^{(k+1)},x\right) - S\left(y^{(k)},x\right)\right\| \leq \tag{3.22}$$
$$\leq u\theta^{k-1}\left(\lambda_1 \left\|S\left(y^{(1)},x\right) - S\left(y^{(0)},x\right)\right\| + \lambda_2 \left\|S'\left(y^{(1)},x\right) - S'\left(y^{(0)},x\right)\right\|\right),$$
$$\left\|S'\left(y^{(k+1)},x\right) - S'\left(y^{(k)},x\right)\right\| \leq$$
$$\leq v\theta^{k-1}\left(\lambda_1 \left\|S\left(y^{(1)},x\right) - S\left(y^{(0)},x\right)\right\| + \lambda_2 \left\|S'\left(y^{(1)},x\right) - S'\left(y^{(0)},x\right)\right\|\right).$$

Співвідношення (3.22) при виконанні умови (3.10) забезпечують збіжність послідовностей сплайнів $\left\{S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)\right\}$, $k=0,1,\ldots$, $p=0,1$. Теорему 3.2 доведено. □

Позначимо

$$\lim_{k\to\infty} S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right) = S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right),\ p=0,1,$$
$$\widetilde{M}_j^{+} = S''\left(\tilde{y},x_j+0\right),\ j=\overline{0,m-1},$$
$$\widetilde{M}_j^{-} = S''\left(\tilde{y},x_j-0\right),\ j=\overline{1,m},$$
$$\widetilde{y}_j = S\left(\tilde{y},x_j\right),\ j=\overline{1,m}.$$

При цьому

$$\widetilde{M}_j^{+} = \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)+b_i(x_j)S'\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)\Big)+$$
$$+f(x_j),\ j=\overline{0,m-1},$$
$$\widetilde{M}_j^{-} = \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)+b_i(x_j)S'\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)\Big)+$$
$$+f(x_j),\ j=\overline{1,m}.$$

Параметри $\widetilde{M}_j^{+}$, $\widetilde{M}_j^{-}$ сплайна $S\left(\tilde{y},x\right)$ задовольняють систему (2.36) та рівняння (3.7)-(3.8).

Нехай $S\left(y,x\right)$ – кубічний сплайн дефекту 2, який інтерполює розв'язок $y\left(x\right)$ крайової задачі (3.1)-(3.2). Тоді

$$\left\|S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\| \le \left\|S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right)-S^{(p)}\left(y,x\right)\right\| + \left\|S^{(p)}\left(y,x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\|,$$
$$p=0,1. \qquad (3.23)$$

Для другого доданка у правій частині (3.23) справджуються нерівності [94]:

$$\left\|S^{(p)}\left(y,x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\| \le K_pH^{2-p}\omega\left(y''\left(x\right),H\right), \qquad (3.24)$$

$$p=0,1,\ K_0=\frac{5}{2},\ K_1=5,$$

де $\omega\left(y''\left(x\right),H\right)=\max\limits_{1\le r\le l+1}\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right)$, $\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right)$ – модуль неперервності функції $y''\left(x\right)$ на $I_r=[x_{r-1};x_r]$.

Для оцінки першого доданка у правій частині (3.23), згідно вигляду правої частини рівняння (3.1), знайдемо допоміжні нерівності:

$$\left|M_j^+-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+\right. \tag{3.25}$$

$$\left.+b_i(x_j)S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)-f(x_j)\right|\le\left|M_j^+-y''(x_j+0)\right|+$$

$$+\left|y''(x_j+0)-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+\right.$$

$$\left.+b_i(x_j)S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)-f(x_j)\right|=$$

$$=\left|S''(y,x_j+0)-y''(x_j+0)\right|+\left|\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)y(x_j+0-\tau_i(x_j+0))+\right.$$

$$+b_i(x_j)y'(x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)-$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+$$

$$\left.+b_i(x_j)S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)\right|\le$$

$$\le 5\omega(y''(x),H)+\left|\sum_{i=0}^{n}a_i(x_j)\Big(y(x_j+0-\tau_i(x_j+0))-\right.$$

$$-S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)+\sum_{i=0}^{n}b_i(x_j)\Big(y'(x_j+0-\tau_i(x_j+0))-$$

$$\left.-S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)\right|\le$$

$$\le 5\omega(y''(x),H)+\frac{5}{2}H^2\omega(y''(x),H)\sum_{i=0}^{n}\left|a_i(x_j)\right|+$$

$$+5H\omega(y''(x),H)\sum_{i=0}^{n}\Big|b_i(x_j)\Big| \le$$

$$\le 5\omega(y''(x),H)+\lambda_1\frac{5}{2}H^2\omega(y''(x),H)+\lambda_2 5H\omega(y''(x),H)=$$

$$=5\left(1+\frac{1}{2}\lambda_1 H^2+\lambda_2 H\right)\omega(y''(x),H)=\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{0,m-1}.$$

Аналогічно можна одержати

$$\Big|M_j^- - \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0))+ \tag{3.26}$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0))\Big)-f(x_j)\Big| \le \mu\omega(y'',H),\ j=\overline{1,m}.$$

Звідси

$$M_j^+ \le \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+ \tag{3.27}$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)+f(x_j)+\mu\omega(y''(x),H),$$

$$j=\overline{0,m-1},$$

$$M_j^- \le \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0))+ \tag{3.28}$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0))\Big)+f(x_j)+\mu\omega(y''(x),H),$$

$$j=\overline{1,m}.$$

Позначимо

$$\max_{x\in[a;b]}\Big|S^{(p)}(\tilde{y},x)-S^{(p)}(y,x)\Big|=\alpha_p,\ p=0,1,$$

$$\max_j\Big|\widetilde{M_j}-M_j\Big|=\max\left\{\max_{j=\overline{0,m-1}}\Big|\widetilde{M_j^+}-M_j^+\Big|,\ \max_{j=\overline{1,m}}\Big|\widetilde{M_j^-}-M_j^-\Big|\right\}.$$

Враховуючи оцінки (3.27), (3.28), дістаємо:

$$\Big|\widetilde{M_j^+}-M_j^+\Big| \le \Big|\widetilde{M_j^+}-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)-f(x_j)\Bigg|+\mu\omega(y''(x),H)=$$

$$=\Bigg|\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(\tilde{y},x_j+0-\tau_i(x_j+0))+$$

$$+b_i(x_j)S'(\tilde{y},x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)-$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))+$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)\Bigg|+\mu\omega(y''(x),H)\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{n}\Big|a_i(x_j)\Big|\alpha_0+\sum_{i=0}^{n}\Big|b_i(x_j)\Big|\alpha_1+\mu\omega(y''(x),H)\le$$

$$\le\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{0,m-1}. \tag{3.29}$$

Аналогічно,

$$\Big|\widetilde{M_j^-}-M_j^-\Big|\le\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{1,m}. \tag{3.30}$$

Нескладно показати, що має місце оцінка

$$|\tilde{y}_j-y_j|\le\frac{K^5}{8}(b-a)^2\max\left\{\max_{j=\overline{0,m-1}}|\widetilde{M_j^+}-M_j^+|,\ \max_{j=\overline{1,m}}|\widetilde{M_j^-}-M_j^-|\right\}. \tag{3.31}$$

Використовуючи формули для $S\left(\tilde{y},x\right)$, $S\left(y,x\right)$ та нерівності (3.29)-(3.31), отримуємо наступну систему нерівностей:

$$\begin{aligned}\alpha_0&\le u\Big(\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\mu\omega(y''(x),H)\Big),\\ \alpha_1&\le v\Big(\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\mu\omega(y''(x),H)\Big).\end{aligned} \tag{3.32}$$

Розв'язуючи систему (3.32), знаходимо оцінки для перших доданків у правій частині (3.23):

$$\alpha_0\le\frac{u\mu\omega(y''(x),H)}{1-\theta},$$
$$\alpha_1\le\frac{v\mu\omega(y''(x),H)}{1-\theta}.$$

Тепер, враховуючи (3.24), нерівності (3.23) можна записати у вигляді

$$\left\| S^{(p)}\left(\tilde{y}, x\right) - y^{(p)}\left(x\right) \right\| \le R_p \omega\left(y''\left(x\right), H\right), \; p = 0, 1, \tag{3.33}$$

де $R_0 = \sup\limits_{H \le H^*} \left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2} \right)$, $R_1 = \sup\limits_{H \le H^*} \left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H \right)$.

Можна підсумувати вищевказані твердження стосовно точності апроксимації розв'язку крайової задачі (3.1)-(3.2) послідовністю сплайнів у вигляді наступної теореми.

Теорема 3.3. *Нехай розв'язок крайової задачі* (3.1)-(3.2) *існує, єдиний і належить простору* $B(J \cup I)$. *Якщо виконується умова* (3.10), *тоді існує таке* $H^* > 0$, *що для будь-якого* $H < H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{ S\left(y^{(k)}, x\right) \right\}$ *апроксимує розв'язок крайової задачі* (3.1)-(3.2) *і виконуються співвідношення* (3.33).

3.2 Лінійні крайові задачі нейтрального типу

3.2.1 Постановка задачі. Існування та єдиність розв'язку

Розглянемо крайову задачу

$$y''\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i\left(x\right) y\left(x - \tau_i\left(x\right)\right) + b_i\left(x\right) y'\left(x - \tau_i\left(x\right)\right) + \tag{3.34}$$

$$+ c_i\left(x\right) y''\left(x - \tau_i\left(x\right)\right) \Big) + f\left(x\right),$$

$$y^{(p)}\left(x\right) = \varphi^{(p)}\left(x\right), \; p = 0, 1, 2, \; x \in \left[a^*; a\right], \; y\left(b\right) = \gamma, \tag{3.35}$$

де запізнення $\tau_0\left(x\right) = 0$, а $\tau_i\left(x\right), \; i = \overline{1, n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a, b]$, $\varphi\left(x\right)$ – задана двічі неперервно-диференційовна функція на $[a^*; a]$, $\gamma \in R$,

$$a^* = \min_{0 < i \le n} \left\{ \inf_{x \in [a; b]} \left(x - \tau_i\left(x\right)\right) \right\}.$$

Нехай функції $a_i(x)$, $b_i(x)$, $c_i(x)$, $i = \overline{0, n}$, $f(x)$ – неперервні на $[a; b]$.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x)$:

$$E_{i1} = \{x_j \in [a,b] : \, x_j - \tau_i(x_j) = a, \, j = 1, 2, \ldots\},$$
$$E_{i2} = \{x_j \in [a,b] : \, x_0 = a, \, x_{j+1} - \tau_i(x_{j+1}) = x_j, \, j = 0, 1, 2, \ldots\},$$
$$E_2 = \bigcup_{i=1}^{n} (E_{i1} \cup E_{i2}).$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x), \, i = \overline{1,n}$ – такі функції, що множини $E_{i1}, E_{i2}, \, i = \overline{1,n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E_2 в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$J = [a^*; a], \; I = [a, b],$$
$$I_1 = [a, x_1], \; I_2 = [x_1, x_2], \; \ldots, \; I_k = [x_{k-1}, x_k], \; I_{k+1} = [x_k, b],$$
$$B_2(J \cup I) = \Bigg\{ y(x) : y(x) \in \bigg(C(J \cup I) \cap \Big(C^1(J) \cup C^1(I) \Big) \cap$$
$$\cap \Big(\bigcup_{j=1}^{k+1} C^2(I_j) \Big) \bigg), \; |y(x)| \le P_1, \; |y'(x)| \le P_2, \; |y''(x)| \le P_3 \Bigg\},$$

де P_1, P_2, P_3 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (3.34)-(3.35) вважатимемо функцію $y = y(x)$, якщо вона задовольняє рівняння (3.34) на $[a; b]$ (за можливим винятком точок множини E_2) і крайові умови (3.35). Будемо шукати розв'язок задачі (3.34)-(3.35), який належить простору $B_2(J \cup I)$.

Із означення простору $B_2(J \cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (3.34)-(3.35) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x \in [a, b]$, де $y'(a)$ – права похідна, а в точках множини E_2 існують скінченні односторонні другі похідні розв'язку, які можуть не співпадати.

Введемо норму в просторі $B_2(J \cup I)$:

$$\|y\|_{B_2} = \max\Bigg\{ \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x \in J \cup I} |y(x)|, \; \frac{2}{b-a} \max\Big(\max_{x \in J} |y'(x)|, \; \max_{x \in I} |y'(x)| \Big),$$

$$\max\Bigl(\max_{x\in J}|y''(x)|,\ \max_{x\in I_1}|y''(x)|,\ \ldots,\ \max_{x\in I_{k+1}}|y''(x)|\Bigr)\Bigr\}.$$

Простір $B_2(J\cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (3.34)-(3.35) еквівалентна інтегральному рівнянню [55, 58]

$$y(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Biggl[\sum_{i=0}^{n}\Bigl(a_i(s)\,y(s-\tau_i(s))+b_i(s)\,y'(s-\tau_i(s))+ \tag{3.36}$$

$$+c_i(s)\,y''(s-\tau_i(s))\Bigr)\Biggr]\overline{G}(x,s)\,ds+l(x),\ x\in J\cup I,$$

$$\overline{G}(x,s)=\begin{cases}G(x,s), & x,s\in I,\\ 0, & \text{в іншому випадку},\end{cases}$$

$$l(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in J,\\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a)+\varphi(a), & x\in I,\end{cases}$$

де $G(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''(x)=0,\ x\in I,\ y(a)=y(b)=0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B_2(J\cup I)$ наступним чином

$$(Ty)(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Biggl[\sum_{i=0}^{n}\Bigl(a_i(s)\,y(s-\tau_i(s))+b_i(s)\,y'(s-\tau_i(s))+ \tag{3.37}$$

$$+c_i(s)\,y''(s-\tau_i(s))\Bigr)\Biggr]\overline{G}(x,s)\,ds+l(x),\ x\in J\cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Biggl[\sum_{i=0}^{n}\Bigl(a_i(s)\,y(s-\tau_i(s))+b_i(s)\,y'(s-\tau_i(s))+ \tag{3.38}$$

$$+c_i(s)\,y''(s-\tau_i(s))\Bigr)\Biggr]\overline{G}'_x(x,s)\,ds+\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a},\ x\in J\cup I.$$

$$(Ty)''(x)=\sum_{i=0}^{n}\Bigl(a_i(x)\,y(x-\tau_i(x))+b_i(x)\,y'(x-\tau_i(x))+ \tag{3.39}$$

$$+c_i\left(x\right)y''\left(x-\tau_i\left(x\right)\right)\Bigg),\ x\in J\cup I.$$

Нехай коефіцієнти у рівнянні (3.34) такі, що справджуються нерівності $|a_i(x)|\le A_i,\ |b_i(x)|\le B_i,\ |c_i(x)|\le C_i,\ i=\overline{0,n},\ |f(x)|\le F$ при $x\in[a;b]$. Позначимо $P=\sum\limits_{i=0}^{n}\Big(A_iP_1+B_iP_2+C_iP_3\Big)+F$, де P_1,P_2,P_3 – додатні сталі, що входять в означення простору $B_2(J\cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.4. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi(x)|,\ \frac{(b-a)^2}{8}P+\max\big(|\varphi(a)|,\ |\gamma|\big)\right\}\le P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'(x)|,\ \frac{b-a}{2}P+\left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\le P_2,$

3) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi''(x)|,\ P\right\}\le P_3,$

4) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum\limits_{i=0}^{n}B_i+\sum\limits_{i=0}^{n}C_i<1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (3.34)-(3.35) *у просторі* $B_2(J\cup I)$.

Доведення. Із вигляду функції Гріна

$$G\left(x,s\right)=\begin{cases}\frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a\le s\le x\le b,\\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a\le x\le s\le b,\end{cases}$$

одержуємо наступні оцінки [93]

$$\int\limits_a^b\Big|G\left(x,s\right)\Big|ds\le\frac{\left(b-a\right)^2}{8},\ \int\limits_a^b\Big|G'_x(x,s)\Big|ds\le\frac{b-a}{2}.\qquad(3.40)$$

Якщо справджуються умови 1)-3) та нерівності (3.40), тоді оператор T відображає простір $B_2(J\cup I)$ у себе.

Нехай $y_1,y_2\in B_2\left(J\cup I\right)$. Враховуючи оцінки (3.40), одержуємо:

$$\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big|=$$

$$
= \left| \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(s) \Big(y_1(s-\tau_i(s)) - y_2(s-\tau_i(s)) \Big) + \right.\right.
$$

$$
+ b_i(s) \Big(y_1'(s-\tau_i(s)) - y_2'(s-\tau_i(s)) \Big) \Big) +
$$

$$
\left.\left. + c_i(s) \Big(y_1''(s-\tau_i(s)) - y_2''(s-\tau_i(s)) \Big) \Big) \right] \bar{G}(x,s) ds \right| \le
$$

$$
\le \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} \Big(A_i \Big| y_1(s-\tau_i(s)) - y_2(s-\tau_i(s)) \Big| + \right.
$$

$$
+ B_i \Big| y_1'(s-\tau_i(s)) - y_2'(s-\tau_i(s)) \Big| +
$$

$$
\left. + C_i \Big| y_1''(s-\tau_i(s)) - y_2''(s-\tau_i(s)) \Big| \Big) \right] \Big| \bar{G}(x,s) \Big| ds \le
$$

$$
\le \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} \Big(A_i \max_{s \in J \cup I} \Big| y_1 - y_2 \Big| + B_i \max \Big\{ \max_{s \in I} \Big| y_1' - y_2' \Big|, \ \max_{s \in J} \Big| y_1' - y_2' \Big| \Big\} + \right.
$$

$$
\left. + C_i \max \Big\{ \max_{s \in J} \Big| y_1'' - y_2'' \Big|, \ \max_{s \in I_1} \Big| y_1'' - y_2'' \Big|, \ \ldots, \ \max_{s \in I_{k+1}} \Big| y_1'' - y_2'' \Big| \Big\} \Big) \right] \times
$$

$$
\times \Big| \bar{G}(x,s) \Big| ds = \int\limits_{a^*}^{b} \left[\frac{(b-a)^2}{8} \frac{8}{(b-a)^2} \max_{s \in J \cup I} \Big| y_1 - y_2 \Big| \sum_{i=0}^{n} A_i + \right.
$$

$$
+ \frac{b-a}{2} \frac{2}{b-a} \max \Big\{ \max_{s \in I} \Big| y_1' - y_2' \Big|, \ \max_{s \in J} \Big| y_1' - y_2' \Big| \Big\} \sum_{i=0}^{n} B_i +
$$

$$
\left. + \max \Big\{ \max_{s \in J} \Big| y_1'' - y_2'' \Big|, \ \max_{s \in I_1} \Big| y_1'' - y_2'' \Big|, \ \ldots, \ \max_{s \in I_{k+1}} \Big| y_1'' - y_2'' \Big| \Big\} \sum_{i=0}^{n} C_i \right] \times
$$

$$
\times \Big| \bar{G}(x,s) \Big| ds \le
$$

$$
\le \frac{(b-a)^2}{8} \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^{n} A_i + \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} B_i + \sum_{i=0}^{n} C_i \right] \|y_1 - y_2\|_{B_2},
$$

Аналогічно,

$$
\Big| (Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x) \Big| \le
$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}B_i+\sum_{i=0}^{n}C_i\right]\|y_1-y_2\|_{B_2},$$

$$\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|\leq$$
$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}B_i+\sum_{i=0}^{n}C_i\right]\|y_1-y_2\|_{B_2},$$

З одержаних оцінок випливає, що

$$\max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big|\leq$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{8}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}B_i+\sum_{i=0}^{n}C_i\right]\|y_1-y_2\|_{B_2},$$
$$\max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|\right\}\leq$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}B_i+\sum_{i=0}^{n}C_i\right]\|y_1-y_2\|_{B_2},$$
$$\max\left\{\max_{s\in J}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ \max_{s\in I_1}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ \ldots,\right.$$
$$\left.\max_{s\in I_{k+1}}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|\right\}\leq$$
$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}B_i+\sum_{i=0}^{n}C_i\right]\|y_1-y_2\|_{B_2},$$

Домножимо першу нерівність на $\frac{8}{(b-a)^2}$, а другу – на $\frac{2}{b-a}$:

$$\frac{8}{(b-a)^2}\ \max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big|\leq$$
$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}B_i+\sum_{i=0}^{n}C_i\right]\|y_1-y_2\|_{B_2},$$
$$\frac{2}{b-a}\ \max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|\right\}\leq$$
$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}B_i+\sum_{i=0}^{n}C_i\right]\|y_1-y_2\|_{B_2},$$

$$\max\Big\{\max_{s\in J}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ \max_{s\in I_1}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ \ldots,$$

$$\max_{s\in I_{k+1}}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|\Big\}\le$$

$$\le\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}B_i+\sum_{i=0}^{n}C_i\right]\|y_1-y_2\|_{B_2}.$$

Враховуючи одержані нерівності, дістаємо

$$\max\Bigg\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big|,$$

$$\frac{2}{b-a}\ \max\Big\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|\Big\},$$

$$\max\Big\{\max_{s\in J}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ \max_{s\in I_1}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ \ldots,$$

$$\max_{s\in I_{k+1}}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|\Big\}\Bigg\}\le$$

$$\le\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}B_i+\sum_{i=0}^{n}C_i\right]\|y_1-y_2\|_{B_2}.$$

Із означення норми простору $B(J\cup I)$ маємо:

$$\Big\|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big\|_{B_2}\le \tag{3.41}$$

$$\le\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}A_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}B_i+\sum_{i=0}^{n}C_i\right]\|y_1-y_2\|_{B_2}.$$

Нерівність (3.41) та умова 4) забезпечують, що оператор T є стислим у просторі $B_2(J\cup I)$ і має єдину нерухому точку [93]. Тому крайова задача (3.34)-(3.35) має єдиний розв'язок $y(x)\in B_2(J\cup I)$.

Теорему 3.4 доведено. □

3.2.2 Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b\}$ на відрізку $[a;b]$, таку що $E_2\subset\Delta$. Позначимо через $S(x,y)$ інтерполяційний кубі-

чний сплайн дефекту два на Δ для функції $y\,(x)$, який належить простору $B_2(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (3.34)-(3.35) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(y^{(0)}, x\right) = \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\,(x-a) + \varphi\,(a)$, який задовольняє крайові умови (3.35) при $x = a$ та $x = b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (3.34) та сплайн $S\left(y^{(k)}, x\right)$, знаходимо для $k = 0, 1, \ldots$:

$$M_j^{+(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(x_j) S\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big) + \tag{3.42}$$

$$+ b_i(x_j) S'\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big) +$$

$$+ c_i(x_j) S''\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) + 0\big)\Big) + f(x_j),\; j = \overline{0, m-1},$$

$$M_j^{-(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} \Big(a_i(x_j) S\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big) + \tag{3.43}$$

$$+ b_i(x_j) S'\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big) +$$

$$+ c_i(x_j) S''\big(y^{(k)}, x_j - \tau_i(x_j) - 0\big)\Big) + f(x_j),\; j = \overline{1, m}.$$

У співвідношеннях (3.42), (3.43) підставляємо $S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) = \varphi^{(p)}(x)$, $p = 0, 1, 2$ при $x < a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, розв'язуючи систему рівнянь (2.36).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(k+1)}\right)$ у формі (2.33), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j = \overline{0, m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j = \overline{1, m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} \big|a_i(x)\big|,\; \lambda_2 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} \big|b_i(x)\big|,\; \lambda_3 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} \big|c_i(x)\big|, \tag{3.44}$$

$$u=\frac{K^5}{8}(b-a)^2+\frac{H^2}{8},\ v=\frac{K^5}{2}(b-a)+\frac{2H}{3},$$
$$\mu=5\left(1+\frac{1}{2}\lambda_1H^2+\lambda_2H+\lambda_3\right).$$

Теорема 3.5. *Нехай розв'язок крайової задачі* (3.34)-(3.35) *існує та належить простору* $B_2(J\cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta=u\lambda_1+v\lambda_2+\lambda_3<1 \tag{3.45}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0<H<H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(y^{(k)},x\right)\right\}$, $k=0,1,\ldots$ *рівномірно збігається на* $[a;b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\left\|\lim_{k\to\infty}S^{(p)}(y^{(k)},x)-y^{(p)}\left(x\right)\right\|\le R_p\omega\left(y''\left(x\right),H\right),\ p=0,1,2, \tag{3.46}$$
$$R_0=\sup_{H\le H^*}\left(\frac{u\mu}{1-\theta}+\frac{5H^2}{2}\right),\ R_1=\sup_{H\le H^*}\left(\frac{v\mu}{1-\theta}+5H\right),$$
$$R_2=\sup_{H\le H^*}\left(\frac{\mu}{1-\theta}+5\right),\ \omega\left(y''\left(x\right),H\right)=\max_{1\le r\le l+1}\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right).$$

Доведення. Покажемо, що ряди

$$S^{(p)}\left(y^{(0)},x\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[S^{(p)}\left(y^{(i)},x\right)-S^{(p)}\left(y^{(i-1)},x\right)\right],\ p=0,1,2$$

рівномірно збігаються на $[a;b]$, і тим самим одержимо рівномірну збіжність послідовностей $S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)$, $k=0,1,\ldots,$ $p=0,1,2.$

Визначимо скалярні функції $y(x)$, $M(x)$ на $[a;b]$ і позначимо вектори

$$\overline{y}=\Big(y\left(x_1\right),\ldots,y\left(x_{m-1}\right)\Big)^T,$$
$$\overline{M}=\Big(M\left(x_0+0\right),M\left(x_1-0\right),M\left(x_1+0\right),\ \ldots,M\left(x_{m-1}-0\right),$$
$$M\left(x_{m-1}+0\right),M\left(x_m-0\right)\Big)^T.$$

Ітераційний алгоритм A)-D) представимо у матричній формі:

$$\overline{y}^{(k+1)}=A^{-1}B\overline{M}^{k+1}+A^{-1}d, \tag{3.47}$$

де компоненти вектора $\overline{M}$ визначені згідно (3.42)-(3.43), а сталий вектор d залежить лише від крайових умов (3.35). Згідно (2.39), матриця A – невироджена, отже побудова ітераційної послідовності кубічних сплайнів $S\left(y^{(k)},x\right)$, $k{=}0,1,\ldots$ можлива.

З (3.47) випливають наступні оцінки:

$$\left\|y^{(k+1)}-y^{(k)}\right\|=\left\|A^{-1}BM^{k+1}-A^{-1}BM^{k}\right\|\leq \\ \leq\left\|A^{-1}\right\|\left\|B\right\|\left\|\overline{M}^{k+1}-\overline{M}^{k}\right\|. \tag{3.48}$$

Із (3.42)-(3.43) та вигляду правої частини рівняння (3.34) одержуємо нерівності

$$\left\|M_j^{+(k+1)}-M_j^{+(k)}\right\|\leq\lambda_1\max_{x\in[a;b]}\left|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right|+ \\ +\lambda_2\max_{x\in[a;b]}\left|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right|+ \\ +\lambda_3\max_{x\in[a;b]}\left|S''\left(y^{(k)},x\right)-S''\left(y^{(k-1)},x\right)\right|,\ j=\overline{0,m-1}, \\ \left\|M_j^{-(k+1)}-M_j^{-(k)}\right\|\leq\lambda_1\max_{x\in[a;b]}\left|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right|+ \\ +\lambda_2\max_{x\in[a;b]}\left|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right|+ \\ +\lambda_3\max_{x\in[a;b]}\left|S''\left(y^{(k)},x\right)-S''\left(y^{(k-1)},x\right)\right|,\ j=\overline{1,m}. \tag{3.49}$$

Звідси, враховуючи співвідношення (2.39)-(2.43), нерівність (3.48) можна записати наступним чином:

$$\left\|y^{(k+1)}-y^{(k)}\right\|\leq\frac{K^5}{8}\left(b-a\right)^2\left[\lambda_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\right. \\ \left.+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\lambda_3\left\|S''\left(y^{(k)},x\right)-S''\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right]. \tag{3.50}$$

Нехай $x\in[x_{j-1};x_j]$. Використовуючи (2.33), (3.15), (3.16), (3.49), (3.50), маємо

$$\left\|S\left(y^{(k+1)},x\right)-S\left(y^{(k)},x\right)\right\|\leq \tag{3.51}$$

$$\leq \frac{H^2}{8}\left\|\overline{M}^{k+1}-\overline{M}^{k}\right\|+\left\|y^{(k+1)}-y^{(k)}\right\|\leq$$
$$\leq\left(\frac{K^5}{8}(b-a)^2+\frac{H^2}{8}\right)\left(\lambda_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\right.$$
$$\left.+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\lambda_3\left\|S''\left(y^{(k)},x\right)-S''\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right).$$

Далі з формул (2.33), (2.36), (3.18), (3.19), (3.20) та властивостей (2.39)-(2.43) отримуємо

$$\left\|S'\left(y^{(k+1)},x\right)-S'\left(y^{(k)},x\right)\right\|\leq \tag{3.52}$$
$$\leq\left(\frac{K^5}{2}(b-a)+\frac{2}{3}H\right)\left(\lambda_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\right.$$
$$\left.+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\lambda_3\left\|S''\left(y^{(k)},x\right)-S''\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right),$$
$$\left\|S''\left(y^{(k+1)},x\right)-S''\left(y^{(k)},x\right)\right\|\leq \tag{3.53}$$
$$\leq\lambda_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+$$
$$+\lambda_3\left\|S''\left(y^{(k)},x\right)-S''\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|.$$

Позначимо

$$d=\lambda_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+$$
$$+\lambda_3\left\|S''\left(y^{(k)},x\right)-S''\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|.$$

Ітеруючи (3.51), (3.52), (3.53) і враховуючи позначення (3.44) та умову (3.45), одержуємо

$$\begin{aligned}\left\|S\left(y^{(k+1)},x\right)-S\left(y^{(k)},x\right)\right\|&\leq u\theta^{k-1}d,\\ \left\|S'\left(y^{(k+1)},x\right)-S'\left(y^{(k)},x\right)\right\|&\leq v\theta^{k-1}d,\\ \left\|S''\left(y^{(k+1)},x\right)-S''\left(y^{(k)},x\right)\right\|&\leq \theta^{k-1}d.\end{aligned}\tag{3.54}$$

Співвідношення (3.54), при виконанні умови (3.45), забезпечують збіжність послідовностей сплайнів $\left\{S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)\right\}$, $k=0,1,\ldots,$ $p=0,1,2.$

Позначимо

$$\lim_{k\to\infty} S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right) = S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right),\ p=0,1,2,$$
$$\widetilde{M}_j^{+} = S''\left(\tilde{y},x_j+0\right),\ j=\overline{0,m-1},$$
$$\widetilde{M}_j^{-} = S''\left(\tilde{y},x_j-0\right),\ j=\overline{1,m},$$
$$\widetilde{y}_j = S\left(\tilde{y},x_j\right),\ j=\overline{1,m}.$$

При цьому

$$\widetilde{M}_j^{+} = \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)+b_i(x_j)S'\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)+$$
$$+c_i(x_j)S''\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)\Big)+f(x_j),\ j=\overline{0,m-1},$$
$$\widetilde{M}_j^{-} = \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)+b_i(x_j)S'\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)+$$
$$+c_i(x_j)S''\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)\Big)+f(x_j),\ j=\overline{1,m}.$$

Параметри $\widetilde{M}_j^{+}$, $\widetilde{M}_j^{-}$ сплайна $S\left(\tilde{y},x\right)$ задовольняють систему (2.36) та рівняння (3.42)-(3.43).

Нехай $S\left(y,x\right)$ – кубічний сплайн дефекту 2, який інтерполює розв'язок $y\left(x\right)$ крайової задачі (3.34)-(3.35). Тоді

$$\left\|S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\| \le \left\|S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right)-S^{(p)}\left(y,x\right)\right\| + \left\|S^{(p)}\left(y,x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\|,$$
$$p=0,1,2. \tag{3.55}$$

Для другого доданка у правій частині (3.55) справджуються нерівності [94]:

$$\left\|S^{(p)}\left(y,x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\| \le K_p H^{2-p}\omega\left(y''\left(x\right),H\right), \tag{3.56}$$
$$p=0,1,2,\ K_0=\frac{5}{2},\ K_1=K_2=5,$$

де $\omega\left(y''\left(x\right),H\right)=\max\limits_{1\le r\le k+1}\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right)$, $\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right)$ – модуль неперервності функції $y''\left(x\right)$ на $I_r=[x_{r-1};x_r]$.

Для оцінки першого доданка у правій частині (3.55), згідно вигляду правої частини рівняння (3.34), знайдемо допоміжні нерівності:

$$\Big|M_j^+ - \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) + \tag{3.57}$$

$$+b_i(x_j)S'(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) + c_i(x_j)S''(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big) -$$

$$-f(x_j)\Big| \leq \Big|M_j^+ - y''(x_j + 0)\Big| +$$

$$+\Big|y''(x_j + 0) - \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) +$$

$$+b_i(x_j)S'(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big) - f(x_j)\Big| =$$

$$= \Big|S''(y, x_j + 0) - y''(x_j + 0)\Big| + \Big|\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)y(x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) +$$

$$+b_i(x_j)y'(x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) + c_i(x_j)y''(x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big) -$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) +$$

$$+b_i(x_j)S'(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) + c_i(x_j)S''(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big)\Big| \leq$$

$$\leq 5\omega(y''(x), H) + \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i(x_j)\Big(y(x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) -$$

$$-S(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big) + \sum_{i=0}^{n} b_i(x_j)\Big(y'(x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) -$$

$$-S'(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big) + \sum_{i=0}^{n} c_i(x_j)\Big(y''(x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)) -$$

$$-S''(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0))\Big)\Big| \leq$$

$$\leq 5\omega(y''(x), H) + \frac{5}{2}H^2\omega(y''(x), H)\sum_{i=0}^{n}\Big|a_i(x_j)\Big| +$$

$$+5H\omega(y''(x),H)\sum_{i=0}^{n}\Big|b_i(x_j)\Big| + 5\omega(y''(x),H)\sum_{i=0}^{n}\Big|c_i(x_j)\Big| \leq$$

$$\leq 5\omega(y''(x),H) + \lambda_1\frac{5}{2}H^2\omega(y''(x),H) + \lambda_2 5H\omega(y''(x),H) +$$

$$+\lambda_3 5\omega(y''(x),H) = 5\left(1+\frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H + \lambda_3\right)\omega(y''(x),H) =$$

$$= \mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{0,m-1}.$$

Аналогічно можна одержати

$$\Bigg|M_j^- - \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0)) + \tag{3.58}$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0)) + c_i(x_j)S''(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0))\Big) -$$

$$-f(x_j)\Bigg| \leq \mu\omega(y'',H),\ j=\overline{1,m}.$$

Звідси

$$M_j^+ \leq \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0)) + \tag{3.59}$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0)) + c_i(x_j)S''(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big) +$$

$$+f(x_j) + \mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{0,m-1},$$

$$M_j^- \leq \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0)) + \tag{3.60}$$

$$+b_i(x_j)S'(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0)) + c_i(x_j)S''(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0))\Big) +$$

$$+f(x_j) + \mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{1,m}.$$

Позначимо

$$\max_{x\in[a;b]}\Big|S^{(p)}(\tilde{y},x) - S^{(p)}(y,x)\Big| = \alpha_p,\ p=0,1,2,$$

$$\max_j\Big|\widetilde{M}_j - M_j\Big| = \max\left\{\max_{j=\overline{0,m-1}}\Big|\widetilde{M_j^+} - M_j^+\Big|,\ \max_{j=\overline{1,m}}\Big|\widetilde{M_j^-} - M_j^-\Big|\right\}.$$

Враховуючи оцінки (3.59), (3.60), дістаємо:

$$\left|\widetilde{M_j^+} - M_j^+\right| \le \left|\widetilde{M_j^+} - \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j+0)) +\right.$$

$$+b_i(x_j)S'(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j+0)) + c_i(x_j)S''(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j+0))\Big) -$$

$$\left.-f(x_j)\right| + \mu\omega(y''(x), H) = \left|\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(\tilde{y}, x_j + 0 - \tau_i(x_j+0)) +\right.$$

$$+b_i(x_j)S'(\tilde{y}, x_j + 0 - \tau_i(x_j+0)) + c_i(x_j)S''(\tilde{y}, x_j + 0 - \tau_i(x_j+0))\Big) -$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j+0)) +$$

$$+b_i(x_j)S'(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j+0)) +$$

$$\left.+c_i(x_j)S''(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j+0))\Big)\right| + \mu\omega(y''(x), H) \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{n}\Big|a_i(x_j)\Big|\alpha_0 + \sum_{i=0}^{n}\Big|b_i(x_j)\Big|\alpha_1 + \sum_{i=0}^{n}\Big|c_i(x_j)\Big|\alpha_2 + \mu\omega(y''(x), H) \le$$

$$\le \lambda_1\alpha_0 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_3\alpha_2 + \mu\omega(y''(x), H),\ j = \overline{0, m-1}. \tag{3.61}$$

Аналогічно,

$$\left|\widetilde{M_j^-} - M_j^-\right| \le \lambda_1\alpha_0 + \lambda_2\alpha_1 + \lambda_3\alpha_2 + \mu\omega(y''(x), H),\ j = \overline{1, m}. \tag{3.62}$$

Нескладно показати, що має місце оцінка

$$|\tilde{y}_j - y_j| \le \frac{K^5}{8}(b-a)^2 \max\left\{\max_{j=\overline{0,m-1}}|\widetilde{M_j^+} - M_j^+|,\ \max_{j=\overline{1,m}}|\widetilde{M_j^-} - M_j^-|\right\}. \tag{3.63}$$

Використовуючи формули для $S\left(\tilde{y}, x\right)$, $S\left(y, x\right)$ та нерівності (3.61)-(3.63), отримуємо наступну систему нерівностей:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &\le u\Big(\alpha_0\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_3 + \mu\omega\left(y''(x), H\right)\Big), \\ \alpha_1 &\le v\Big(\alpha_0\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_3 + \mu\omega\left(y''(x), H\right)\Big), \\ \alpha_2 &\le \alpha_0\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_3 + \mu\omega\left(y''(x), H\right). \end{aligned} \tag{3.64}$$

Розв'язуючи систему (3.64), знаходимо оцінки для перших доданків у правій частині (3.55):

$$\alpha_0 \le \frac{u\mu\omega(y''(x), H)}{1-\theta},$$
$$\alpha_1 \le \frac{v\mu\omega(y''(x), H)}{1-\theta},$$
$$\alpha_2 \le \frac{\mu\omega(y''(x), H)}{1-\theta}.$$

Тепер, враховуючи (3.56), нерівності (3.55) можна записати у вигляді (3.46).

Теорему 3.5 доведено. $\square$

Зауваження. При використанні описаного алгоритму розв'язування крайових задач (3.34)-(3.35) за наближений розв'язок вибирається $S(y^{(k)}, x)$ при деякому $k > 0$. Оцінимо похибку, яка буде при цьому допущена. Із нерівностей (3.54) маємо:

$$\|S^{(p)}(y^{(k+j)}, x) - S^{(p)}(y^{(k)}, x)\| \le \theta^{k-1} \max(u, v, 1)\, d\, \frac{1-\theta^i}{1-\theta},\ p = 0, 1, 2.$$

Нехай $H < H^*$. Тоді з попередньої нерівності одержуємо:

$$\|S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y^{(k)}, x)\| \le \frac{\theta^{k-1}}{1-\theta} \max(u, v, 1)\, d.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує кількість ітерацій k_0, така що при $k > k_0$

$$\|S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y^{(k)}, x)\| \le \varepsilon,\ p = 0, 1, 2.$$

Тоді при $k > k_0$ і виконанні умов теореми 3.5 одержуємо оцінку похибки

$$\|S^{(p)}(y^{(k)}, x) - y^{(p)}(x)\| \le \varepsilon + K_p\omega(y''(x), H),\ p = 0, 1, 2. \tag{3.65}$$

3.3 Нелінійні крайові задачі з запізненням та нейтрального типу

3.3.1 Існування розв'язку крайової задачі з запізненням

Введемо позначення

$$[y(x)] = \Big(y\big(x-\tau_0(x)\big),\ldots,y\big(x-\tau_n(x)\big)\Big), \tag{3.66}$$
$$[y(x)]_1 = \Big(y'\big(x-\tau_0(x)\big),\ldots,y'\big(x-\tau_n(x)\big)\Big).$$

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big),\ x\in[a;b], \tag{3.67}$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x),\ p=0,1,\ x\in[a^*;a],\ y(b)=\gamma, \tag{3.68}$$

де запізнення $\tau_0(x)=0$, а $\tau_i(x),\ i=\overline{1,n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – задана неперервно-диференційовна функція на $[a^*;a]$, $\gamma\in R$,

$$a^* = \min_{0<i\le n}\Big\{\inf_{x\in[a;b]}(x-\tau_i(x))\Big\}.$$

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x),\ldots,\tau_n(x)$:

$$E_i = \big\{x_j\in[a,b]:\ x_j-\tau_i(x_j)=a,\ j=1,2,\ldots\big\},$$
$$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i.$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x),\ i=\overline{1,n}$ – такі функції, що множини $E_i,\ i=\overline{1,n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$P=\sup\Big\{\Big|f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)\Big| : \Big|y\big(x-\tau_i(x)\big)\Big|\le P_1,$$

$$\left|y'\big(x-\tau_i(x)\big)\right| \le P_2,\ i=\overline{0,n},\ x\in[a;b]\Big\},$$

$$J=[a^*;a]\,,\ I=[a,b]\,,$$

$$I_1=[a,x_1]\,,\ I_2=[x_1,x_2]\,,\ \ldots,\ I_k=[x_{k-1},x_k]\,,\ I_{k+1}=[x_k,b]\,,$$

$$B\left(J\cup I\right)=\Bigg\{y\,(x):y\,(x)\in\Bigg(C(J\cup I)\cap\Big(C^1(J)\cup C^1(I)\Big)\cap$$

$$\cap\left(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2\left(I_j\right)\right)\Bigg),\left|y\,(x)\right|\le P_1,\ \left|y'(x)\right|\le P_2\Bigg\},$$

де P_1, P_2 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (3.67)-(3.68) вважатимемо функцію $y=y\,(x)$, якщо вона задовольняє рівняння (3.67) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (3.68). Будемо шукати розв'язок задачі (3.67)-(3.68), який належить простору $B(J\cup I)$.

Із означення простору $B(J\cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (3.67)-(3.68) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x\in[a,b]$, де $y'\,(a)$ – права похідна.

Введемо норму в просторі $B(J\cup I)$:

$$\|y\|_B=\max\left\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}\left|y\,(x)\right|,\frac{2}{b-a}\max\left(\max_{x\in J}\left|y'\,(x)\right|,\max_{x\in I}\left|y'\,(x)\right|\right)\right\}.$$

Простір $B(J\cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (3.67)-(3.68) еквівалентна інтегральному рівнянню [55, 58]

$$y\,(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1\big)\Big]\,\overline{G}\,(x,s)\,ds+l\,(x)\,,\ x\in J\cup I, \tag{3.69}$$

$$\overline{G}\,(x,s)=\begin{cases}G\,(x,s)\,, & x,s\in I,\\ 0, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

$$l\,(x)=\begin{cases}\varphi\,(x)\,, & x\in J,\\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\,(x-a)+\varphi\,(a)\,, & x\in I,\end{cases}$$

де $G(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''(x)=0,\ x\in I,\ y(a)=y(b)=0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B(J\cup I)$ наступним чином

$$(Ty)(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1\big)\Big]\overline{G}(x,s)\,ds+l(x),\ x\in J\cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1\big)\Big]\overline{G}_x'(x,s)\,ds+\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}, \tag{3.70}$$

$$x\in J\cup I.$$

Нехай функція $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)$ – неперервна у $G=[a,b]\times G_1^{n+1}\times G_2^{n+1}$, де $G_1=\big\{u\ \in R:\ |u|<P_1\big\}$, $G_2=\big\{v\ \in R:\ |v|\le P_2\big\}$, P_1,P_2 – додатні сталі, що входять в означення простору $B(J\cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi(x)|,\ \frac{(b-a)^2}{8}P+\max\Big\{|\varphi(a)|,\ |\gamma|\Big\}\right\}\le P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'(x)|,\ \frac{b-a}{2}P+\left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\le P_2,$

3) функція $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)$ *задовольняє умову Ліпшиця за змінними* $[y(x)],[y(x)]_1$ *зі сталими* L_i, $i=\overline{0,2n+1}$ *у* G,

4) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n}L_i+\frac{b-a}{2}\sum\limits_{i=n+1}^{2n+1}L_i<1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (3.67)-(3.68) *у просторі* $B(J\cup I)$.

Доведення. Із вигляду функції Гріна

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a\le s\le x\le b,\\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a\le x\le s\le b,\end{cases}$$

одержуємо наступні оцінки [93]

$$\int_a^b \Big|G\,(x,s)\Big|ds \le \frac{(b-a)^2}{8},\ \int_a^b \Big|G'_x(x,s)\Big|ds \le \frac{b-a}{2}. \tag{3.71}$$

Якщо справджуються умови 1)-2) та нерівності (3.71), тоді оператор T відображає простір $B(J\cup I)$ у себе. Покажемо, що це дійсно так. Враховуючи (3.69), маємо:

$$\big|(Ty)(x)\big| \le \max\Bigg\{\Bigg|\int_{a^*}^{a}\Big[f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)\Big]\overline{G}(x,s)ds + l(x)\Bigg|,$$

$$\Bigg|\int_a^b \Big[f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)\Big]\overline{G}(x,s)ds + l(x)\Bigg|\Bigg\} \le$$

$$\le \max\Bigg\{|\varphi(x)|,\ P\int_a^b G(x,s)ds + |l(x)|\Bigg\} \le$$

$$\le \max\Bigg\{|\varphi(x)|,\ P\frac{(b-a)^2}{8} + |l(x)|\Bigg\} \le$$

$$\le \max\Bigg\{\max_{x\in J}|\varphi(x)|,\ P\frac{(b-a)^2}{8} + \max\Big\{|\varphi(a)|,\ |\gamma|\Big\}\Bigg\} \le P_1,$$

$$\big|(Ty)'(x)\big| \le \max\Bigg\{\Bigg|\int_{a^*}^{a}\Big[f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)\Big]\overline{G}'_x(x,s)ds + l'(x)\Bigg|,$$

$$\Bigg|\int_a^b \Big[f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)\Big]\overline{G}'_x(x,s)ds + l'(x)\Bigg|\Bigg\} \le$$

$$\le \max\Bigg\{|\varphi'(x)|,\ P\int_a^b G'_x(x,s)ds + |l'(x)|\Bigg\} \le$$

$$\le \max\Bigg\{|\varphi'(x)|,\ P\frac{b-a}{2} + \Bigg|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\Bigg|\Bigg\} \le$$

$$\le \max\Bigg\{\max_{x\in J}|\varphi'(x)|,\ P\frac{b-a}{2} + \Bigg|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\Bigg|\Bigg\} \le P_2.$$

Згідно вибору множин E_i, $i=\overline{1,n}$, $y\,(x)\in\Bigg(C(J\cup I)\cap\Big(C^1(J)\cup C^1(I)\Big)\cap$ $\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k+1}C^2\,(I_j)\right)\Bigg)$, отже, $(Ty)(x)\in B(J\cup I)$.

Нехай $y_1,y_2\in B\,(J\cup I)$. Враховуючи оцінки (3.71), одержуємо:

$$\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big|=$$

$$=\left|\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y_1(s)],[y_1(s)]_1\big)-f\big(s,[y_2(s)],[y_2(s)]_1\big)\Big]\bar{G}(x,s)ds\right|\leq$$

$$\leq\int\limits_{a^*}^{b}\left[\sum_{i=0}^{n}L_i\Big|y_1(s-\tau_i(s))-y_2(s-\tau_i(s))\Big|+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=n+1}^{2n+1}L_i\Big|y_1'(s-\tau_i(s))-y_2'(s-\tau_i(s))\Big|\right]\Big|\bar{G}(x,s)\Big|ds\leq$$

$$\leq\int\limits_{a^*}^{b}\left[\sum_{i=0}^{n}L_i\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1-y_2\Big|+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=n+1}^{2n+1}L_i\max\left\{\max_{s\in I}\Big|y_1'-y_2'\Big|,\ \max_{s\in J}\Big|y_1'-y_2'\Big|\right\}\right]\Big|\bar{G}(x,s)\Big|ds=$$

$$=\int\limits_{a^*}^{b}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\frac{8}{(b-a)^2}\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1-y_2\Big|\sum_{i=0}^{n}L_i+\right.$$

$$\left.+\frac{b-a}{2}\frac{2}{b-a}\max\left\{\max_{s\in I}\Big|y_1'-y_2'\Big|,\ \max_{s\in J}\Big|y_1'-y_2'\Big|\right\}\sum_{i=n+1}^{2n+1}L_i\right]\times$$

$$\times\Big|\bar{G}(x,s)\Big|ds\leq$$

$$\leq\frac{(b-a)^2}{8}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}L_i+\frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1}L_i\right]\|y_1-y_2\|_B,$$

Аналогічно,

$$\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|\leq$$

$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_B.$$

З одержаних оцінок випливає, що

$$\max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big| \leq$$
$$\leq \frac{(b-a)^2}{8}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_B,$$

$$\max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\Big|\right\} \leq$$
$$\leq \frac{b-a}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_B.$$

Домножимо першу нерівність на $\frac{8}{(b-a)^2}$, а другу – на $\frac{2}{b-a}$:

$$\frac{8}{(b-a)^2}\ \max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big| \leq$$
$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_B,$$

$$\frac{2}{b-a}\ \max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\Big|\right\} \leq$$
$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_B.$$

Враховуючи одержані нерівності, дістаємо

$$\max\left\{\frac{8}{(b-a)^2}\ \max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big|,\right.$$
$$\left.\frac{2}{b-a}\ \max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\Big|\right\}\right\} \leq$$
$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_B.$$

Із означення норми простору $B(J\cup I)$ маємо:

$$\Big\|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big\|_B \leq \tag{3.72}$$

$$\leq \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_B.$$

Нерівність (3.72) та умова 3) забезпечують, що оператор T є стислим у просторі $B(J \cup I)$ і має єдину нерухому точку [93]. Тому крайова задача (3.67)-(3.68) має єдиний розв'язок $y(x) \in B(J \cup I)$.

Теорему 3.6 доведено. □

3.3.2 Існування розв'язку крайової задачі нейтрального типу

Введемо позначення

$$\begin{aligned} [y(x)] &= \Big(y\big(x-\tau_0(x)\big),\ldots,y\big(x-\tau_n(x)\big)\Big),\\ [y(x)]_1 &= \Big(y'\big(x-\tau_0(x)\big),\ldots,y'\big(x-\tau_n(x)\big)\Big),\\ [y(x)]_2 &= \Big(y''\big(x-\tau_0(x)\big),\ldots,y''\big(x-\tau_n(x)\big)\Big). \end{aligned} \tag{3.73}$$

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1, [y(x)]_2\big), \tag{3.74}$$

$$y^{(j)}(x) = \varphi^{(j)}(x)\,,\ j = 0,1,2,\ x \in [a^*; a]\,,\ y(b) = \gamma, \tag{3.75}$$

де запізнення $\tau_0(x) = 0$, а $\tau_i(x)\,,\ i = \overline{1,n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – задана неперервно-диференційовна функція на $[a^*;a]$, $\gamma \in R$,

$$a^* = \min_{0<i\leq n}\left\{\inf_{x\in[a;b]}\left(x - \tau_i(x)\right)\right\}.$$

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x),\ldots,\tau_n(x)$:

$$E_{i1} = \big\{x_j \in [a,b] :\ x_j - \tau_i(x_j) = a,\ j = 1,2,\ldots\big\},$$

$$E_{i2} = \big\{x_j \in [a,b] :\ x_0 = a,\ x_{j+1} - \tau_i(x_{j+1}) = x_j,\ j = 0,1,2,\ldots\big\},$$

$$E_2 = \bigcup_{i=1}^{n}\big(E_{i1} \cup E_{i2}\big).$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ – такі функції, що множини E_{i1}, E_{i2}, $i=\overline{1,n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E_2 в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$P=\sup\Big\{\Big|f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)\Big| : \Big|y\big(x-\tau_i(x)\big)\Big|\leq P_1,$$

$$\Big|y'\big(x-\tau_i(x)\big)\Big|\leq P_2,\ \Big|y''\big(x-\tau_i(x)\big)\Big|\leq P_3,\ i=\overline{0,n},\ x\in[a;b]\Big\},$$

$$J=[a^*;a]\,,\ I=[a,b]\,,$$

$$I_1=[a,x_1]\,,\ I_2=[x_1,x_2]\,,\ \ldots,\ I_k=[x_{k-1},x_k]\,,\ I_{k+1}=[x_k,b]\,,$$

$$B_2\left(J\cup I\right)=\Bigg\{y\left(x\right):y\left(x\right)\in\Bigg(C(J\cup I)\cap\Big(C^1(J)\cup C^1(I)\Big)\cap$$

$$\cap\Big(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2\left(I_j\right)\Big)\Bigg),\ |y(x)|\leq P_1,\ |y'(x)|\leq P_2,\ |y''(x)|\leq P_3\Bigg\},$$

де P_1, P_2, P_3 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (3.74)-(3.75) вважатимемо функцію $y=y\left(x\right)$, якщо вона задовольняє рівняння (3.74) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E_2) і крайові умови (3.75). Будемо шукати розв'язок задачі (3.74)-(3.75), який належить простору $B_2(J\cup I)$.

Із означення простору $B_2(J\cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (3.74)-(3.75) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x\in[a,b]$, де $y'\left(a\right)$ – права похідна, а в точках множини E_2 існують скінченні односторонні другі похідні розв'язку, які можуть не співпадати.

Введемо норму в просторі $B_2(J\cup I)$:

$$\|y\|_{B_2}=\max\Big\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}|y(x)|,\ \frac{2}{b-a}\max\Big(\max_{x\in J}|y'(x)|,\ \max_{x\in I}|y'(x)|\Big),$$

$$\max\Big(\max_{x\in J}|y''(x)|,\ \max_{x\in I_1}|y''(x)|,\ \ldots,\ \max_{x\in I_{k+1}}|y''(x)|\Big)\Big\}.$$

Простір $B_2(J\cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (3.74)-(3.75) еквівалентна інтегральному рівнянню [55, 58]

$$y\,(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)\Big]\,\overline{G}\,(x,s)\,ds+l\,(x)\,,\ x\in J\cup I, \quad (3.76)$$

$$\overline{G}\,(x,s)=\begin{cases}G\,(x,s)\,, & x,s\in I,\\ 0, & \text{в іншому випадку},\end{cases}$$

$$l\,(x)=\begin{cases}\varphi\,(x)\,, & x\in J,\\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\,(x-a)+\varphi\,(a)\,, & x\in I,\end{cases}$$

де $G\,(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''\,(x)=0,\ x\in I,\ y\,(a)=y\,(b)=0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B_2(J\cup I)$ наступним чином

$$(Ty)\,(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)\Big]\,\overline{G}\,(x,s)\,ds+l\,(x)\,,\ x\in J\cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'\,(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)\Big]\,\overline{G}_x'\,(x,s)\,ds+\frac{\gamma-\varphi\,(a)}{b-a}, \quad (3.77)$$

$$x\in J\cup I.$$

$$(Ty)''\,(x)=f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big),\ x\in J\cup I. \quad (3.78)$$

Нехай функція $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)$ – неперервна у $G=[a,b]\times G_1^{n+1}\times G_2^{n+1}\times G_3^{n+1}$, де $G_1=\big\{u\ \in R:\ |u|<P_1\big\}$, $G_2=\big\{v\ \in R:\ |v|\le P_2\big\}$, $G_3=\big\{w\ \in R:\ |w|\le P_3\big\}$, P_1,P_2,P_3 – додатні сталі, що входять в означення простору $B_2(J\cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi(x)|,\ \frac{(b-a)^2}{8}P+\max\Big\{|\varphi(a)|,\ |\gamma|\Big\}\right\}\le P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'(x)|,\ \frac{b-a}{2}P+\left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\le P_2,$

3) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi''(x)|,\ P\right\}\le P_3,$

4) функція $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)$ *задовольняє умову Ліпшиця за змінними* $[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2$ *зі сталими* L_i, $i=\overline{0,3n+2}$ *у* G,

5) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n}L_i+\frac{b-a}{2}\sum\limits_{i=n+1}^{2n+1}L_i+\sum\limits_{i=2n+2}^{3n+2}L_i<1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (3.74)-(3.75) *у просторі* $B_2(J\cup I)$.

Доведення. Із вигляду функції Гріна

$$G(x,s)=\begin{cases}\frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a\le s\le x\le b,\\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a\le x\le s\le b,\end{cases}$$

одержуємо наступні оцінки [93]

$$\int\limits_a^b\Big|G(x,s)\Big|ds\le\frac{(b-a)^2}{8},\ \int\limits_a^b\Big|G'_x(x,s)\Big|ds\le\frac{b-a}{2}. \tag{3.79}$$

Якщо справджуються умови 1)-2) та нерівності (3.79), тоді оператор T відображає простір $B_2(J\cup I)$ у себе. Покажемо, що це дійсно так. Враховуючи (3.76), маємо:

$$\Big|(Ty)(x)\Big|\le\max\Bigg\{\left|\int\limits_{a^*}^{a}\Big[f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)\Big]\overline{G}(x,s)ds+l(x)\right|,$$

$$\left|\int\limits_a^b\Big[f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)\Big]\overline{G}(x,s)ds+l(x)\right|\Bigg\}\le$$

$$\le\max\left\{|\varphi(x)|,\ P\int\limits_a^b G(x,s)ds+|l(x)|\right\}\le\max\left\{|\varphi(x)|,\ P\frac{(b-a)^2}{8}+|l(x)|\right\}\le$$

$$\leq \max\left\{\max_{x\in J}|\varphi(x)|,\ P\frac{(b-a)^2}{8}+\max\left\{|\varphi(a)|,\ |\gamma|\right\}\right\}\leq P_1,$$

$$\left|(Ty)'(x)\right|\leq \max\left\{\left|\int\limits_{a^*}^{a}\left[f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)\right]\overline{G}'_x(x,s)ds+l'(x)\right|,\right.$$

$$\left.\left|\int\limits_{a}^{b}\left[f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)\right]\overline{G}'_x(x,s)ds+l'(x)\right|\right\}\leq$$

$$\leq \max\left\{|\varphi'(x)|,\ P\int\limits_a^b G'_x(x,s)ds+|l'(x)|\right\}\leq$$

$$\leq \max\left\{|\varphi'(x)|,\ P\frac{b-a}{2}+\left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\leq$$

$$\leq \max\left\{\max_{x\in J}|\varphi'(x)|,\ P\frac{b-a}{2}+\left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\leq P_2,$$

$$\left|(Ty)''(x)\right|\leq\left|f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)\right|\leq P_3.$$

Згідно вибраних множин $E_{i1}, E_{i2}, i = \overline{1,n}$, $y(x) \in \Bigg(C(J\cup I)\cap \Big(C^1(J)\cup C^1(I)\Big)\cap\left(\bigcup\limits_{j=1}^{k+1}C^2(I_j)\right)\Bigg)$, отже, $(Ty)(x)\in B_2(J\cup I)$.

Нехай $y_1, y_2 \in B_2(J\cup I)$. Враховуючи оцінки (3.79), одержуємо:

$$\left|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{a^*}^{b}\left[f\big(x,[y_1(x)],[y_1(x)]_1,[y_1(x)]_2-\right.\right.$$

$$\left.\left.-f\big(x,[y_2(x)],[y_2(x)]_1,[y_2(x)]_2\right]\bar{G}(x,s)ds\right|\leq$$

$$\leq\int\limits_{a^*}^{b}\left[\sum_{i=0}^{n}L_i\Big|y_1(s-\tau_i(s))-y_2(s-\tau_i(s))\Big|+\right.$$

$$+\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i \Big| y_1'(s-\tau_i(s)) - y_2'(s-\tau_i(s)) \Big| +$$

$$+\sum_{i=2n+2}^{3n+2} L_i \Big| y_1''(s-\tau_i(s)) - y_2''(s-\tau_i(s)) \Big| \Bigg] \Big| \bar{G}(x,s) \Big| ds \le$$

$$\le \int_{a^*}^{b} \Bigg[\sum_{i=0}^{n} L_i \max_{s\in J\cup I} \Big| y_1 - y_2 \Big| +$$

$$+\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i \max\Big\{ \max_{s\in J} \Big| y_1' - y_2' \Big|,\ \max_{s\in I} \Big| y_1' - y_2' \Big| \Big\} +$$

$$+\sum_{i=2n+2}^{3n+2} L_i \max\Big\{ \max_{s\in J} \Big| y_1'' - y_2'' \Big|,\ \max_{s\in I_1} \Big| y_1'' - y_2'' \Big|,\ \ldots,$$

$$\max_{s\in I_{l+1}} \Big| y_1'' - y_2'' \Big| \Big\} \Bigg] \Big| \bar{G}(x,s) \Big| ds \le$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{8} \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i + \sum_{i=2n+2}^{3n+1} L_i \right] \|y_1 - y_2\|_{B_2}.$$

Аналогічно,

$$\Big| (Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x) \Big| \le$$

$$\le \frac{b-a}{2} \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i + \sum_{i=2n+2}^{3n+1} L_i \right] \|y_1 - y_2\|_{B_2},$$

$$\Big| (Ty_1)''(x) - (Ty_2)''(x) \Big| \le$$

$$\le \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i + \sum_{i=2n+2}^{3n+1} L_i \right] \|y_1 - y_2\|_{B_2}.$$

З одержаних оцінок випливає, що

$$\max_{x\in J\cup I} \Big| (Ty_1)(x) - (Ty_2)(x) \Big| \le$$

$$\le \frac{(b-a)^2}{8} \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2} \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i + \sum_{i=2n+2}^{3n+1} L_i \right] \|y_1 - y_2\|_{B_2},$$

$$\max\Big\{ \max_{x\in J} \Big| (Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x) \Big|,\ \max_{x\in I} \Big| (Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x) \Big| \Big\} \le$$

$$\le \frac{b-a}{2}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i + \sum_{i=2n+2}^{3n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_{B_2},$$

$$\max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)''(x) - (Ty_2)''(x)\Big|,\ \max_{x\in I_1}\Big|(Ty_1)''(x) - (Ty_2)''(x)\Big|,\ \ldots,\right.$$

$$\left.\max_{x\in I_{l+1}}\Big|(Ty_1)''(x) - (Ty_2)''(x)\Big|\right\} \le$$

$$\le \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i + \sum_{i=2n+2}^{3n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_{B_2}.$$

Домножуючи першу нерівність на $\frac{8}{(b-a)^2}$, а другу – на $\frac{2}{b-a}$, дістаємо:

$$\max\left\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big|,\right.$$

$$\frac{2}{b-a}\max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x)\Big|\right\},$$

$$\max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)''(x) - (Ty_2)''(x)\Big|,\ \max_{x\in I_1}\Big|(Ty_1)''(x) - (Ty_2)''(x)\Big|,\ \ldots,\right.$$

$$\left.\left.\max_{x\in I_{l+1}}\Big|(Ty_1)''(x) - (Ty_2)''(x)\Big|\right\}\right\} \le$$

$$\le \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i + \sum_{i=2n+2}^{3n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_{B_2}.$$

Із означення норми простору $B_2(J \cup I)$ маємо:

$$\Big\|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big\|_B \le \tag{3.80}$$

$$\le \left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n} L_i + \frac{b-a}{2}\sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i + \sum_{i=2n+2}^{3n+1} L_i\right]\|y_1 - y_2\|_{B_2}.$$

Нерівність (3.80) та умова 5) забезпечують, що оператор T є стислим у просторі $B_2(J \cup I)$ і має єдину нерухому точку [93]. Тому крайова задача (3.74)-(3.75) має єдиний розв'язок $y(x) \in B_2(J \cup I)$.

Теорему 3.7 доведено. $\square$

3.3.3 Обчислювальна схема для крайової задачі із запізненням. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ на відрізку $[a; b]$, таку що $E \subset \Delta$. Позначимо через $S(x, y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y\,(x)$, який належить простору $B(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (3.67)-(3.68) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(0)}\right) = \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}\,(x-a) + \varphi\,(a)$, який задовольняє крайові умови (3.68) при $x = a$ та $x = b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (3.67) та сплайн $S\left(x, y^{(k)}\right)$, знаходимо для $k = 0, 1, \ldots$:

$$M_j^{+(k+1)} = f(x_j, [S(x_j + 0, y^{(k)})], [S(x_j + 0, y^{(k)})]_1), \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{3.81}$$

$$M_j^{-(k+1)} = f(x_j, [S(x_j - 0, y^{(k)})], [S(x_j - 0, y^{(k)})]_1), \quad j = \overline{1, m}. \tag{3.82}$$

У співвідношеннях (3.81), (3.82) підставляємо $S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) = \varphi^{(p)}(x)$, $p = 0, 1$ при $x < a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, розв'язуючи систему рівнянь (2.36).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(k+1)}\right)$ у формі (2.33), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j = \overline{0, m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j = \overline{1, m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{n} L_i, \ \lambda_2 = \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i, \tag{3.83}$$

$$u = \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8},\ v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3},$$
$$\mu = 5\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H + \lambda_3\right).$$

Теорема 3.8. *Нехай розв'язок крайової задачі* (3.67)-(3.68) *існує та належить простору* $B(J \cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 < 1 \tag{3.84}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0 < H < H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(x, y^{(k)}\right)\right\}$, $k = 0, 1, \ldots$ *рівномірно збігається на* $[a; b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\left\|\lim_{k\to\infty} S^{(p)}(x, y^{(k)}) - y^{(p)}(x)\right\| \le R_p \omega\left(y''(x), H\right),\ p = 0, 1, \tag{3.85}$$
$$R_0 = \sup_{H \le H^*}\left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2}\right),\ R_1 = \sup_{H\le H^*}\left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H\right),$$
$$\omega\left(y''(x), H\right) = \max_{1\le r\le l+1} \omega_r\left(y''(x), H\right),$$

де $\omega_r(f, H)$ – *це модуль неперервності функції* f *на відрізку* δ_r.

Доведення проводиться аналогічно до теореми 3.2.

3.3.4 Обчислювальна схема для крайової задачі нейтрального типу. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ на відрізку $[a; b]$, таку що $E_2 \subset \Delta$. Позначимо через $S(x, y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y(x)$, який належить простору $B_2(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (3.74)-(3.75) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(0)}\right) = \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$, який задовольняє крайові умови (3.75) при $x = a$ та $x = b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (3.74) та сплайн $S\left(x, y^{(k)}\right)$, знаходимо для $k = 0, 1, \ldots$:

$$M_j^{+(k+1)} = f(x_j, [S(x_j + 0, y^{(k)})], [S(x_j + 0, y^{(k)})]_1, [S(x_j + 0, y^{(k)})]_2),$$
$$j = \overline{0, m-1}, \tag{3.86}$$
$$M_j^{-(k+1)} = f(x_j, [S(x_j - 0, y^{(k)})], [S(x_j - 0, y^{(k)})]_1, [S(x_j - 0, y^{(k)})]_2),$$
$$j = \overline{1, m}. \tag{3.87}$$

У співвідношеннях (3.86), (3.87) підставляємо $S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) = \varphi^{(p)}(x)$, $p = 0, 1, 2$ при $x < a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, розв'язуючи систему рівнянь (2.36).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(k+1)}\right)$ у формі (2.33), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j = \overline{0, m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j = \overline{1, m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{n} L_i,\ \lambda_2 = \sum_{i=n+1}^{2n+1} L_i,\ \lambda_3 = \sum_{i=2n+2}^{3n+2} L_i, \tag{3.88}$$
$$u = \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8},\ v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3},$$
$$\mu = 5\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H + \lambda_3\right).$$

Теорема 3.9. *Нехай розв'язок крайової задачі* (3.74)-(3.75) *існує та належить простору* $B_2(J \cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 + \lambda_3 < 1 \tag{3.89}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0 < H < H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(x, y^{(k)}\right)\right\}$, $k = 0, 1, \ldots$ *рівномірно збігається на* $[a; b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\left\|\lim_{k\to\infty} S^{(p)}(x, y^{(k)}) - y^{(p)}(x)\right\| \le R_p \omega\left(y''(x), H\right),\ p = 0, 1, 2, \tag{3.90}$$

$$R_0 = \sup_{H \le H^*} \left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2} \right), \; R_1 = \sup_{H \le H^*} \left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H \right),$$

$$R_2 = \sup_{H \le H^*} \left(\frac{\mu}{1-\theta} + 5 \right),$$

$$\omega \left(y'' \left(x \right), H \right) = \max_{1 \le r \le l+1} \omega_r \left(y'' \left(x \right), H \right),$$

де $\omega_r(f, H)$ *– це модуль неперервності функції* f *на відрізку* δ_r.

Доведення проводиться аналогічно до теореми 3.5.

3.4 Висновки до розділу 3

Досліджуються лінійні та нелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу. Визначено функціональний простір, якому належать розв'язки розглянутих крайових задач, досліджено властивості гладкості розв'язків у залежності від структури відхилень аргументу. Встановлено достатні умови існування розв'язку таких задач, побудовано та обґрунтовано ітераційні схеми знаходження розв'язку цих задач за допомогою апроксимації кубічними сплайнами дефекту два, досліджено збіжність ітераційного процесу.

Зокрема, у підрозділі 3.1 розглянуто лінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь із запізненням, у підрозділі 3.2 – лінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу.

Підрозділ 3.3 охоплює нелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу.

Розділ 4

Крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь

4.1 Лінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням

4.1.1 Постановка задачі. Існування розв'язку

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = \sum_{i=0}^{n} \Bigg(a_i(x)\, y(x - \tau_i(x)) + b_i(x)\, y'(x - \tau_i(x)) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{1} \int_a^b K_{ip}(x,s)\, y^{(p)}(s - \tau_i(s))\, ds \Bigg) + f(x), \tag{4.1}$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x),\ p = 0,1,\ x \in [a^*; a],\ y(b) = \gamma, \tag{4.2}$$

де запізнення $\tau_0(x) = 0$, а $\tau_i(x),\ i = \overline{1,n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – задана неперервно-диференційовна функція на $[a^*; a]$, $\gamma \in R$,

$$a^* = \min_{0<i\le n} \left\{ \inf_{x\in[a;b]} (x - \tau_i(x)) \right\}.$$

Нехай функції $a_i(x)$, $b_i(x)$, $i = \overline{0,n}$, $f(x)$ – неперервні на $[a;b]$, а функції

$K_{ip}(x,s)$, $i=\overline{0,n}$, $p=\overline{0,1}$ – неперервні за обома аргументами у квадраті $[a,b]\times[a,b]$.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x),\ldots,\tau_n(x)$:

$$E_i=\left\{x_j\in[a,b]:\ x_j-\tau_i(x_j)=a,\ j=1,2,\ldots\right\},$$
$$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i.$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ – такі функції, що множини E_i, $i=\overline{1,n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$J=[a^*;a]\,,\ I=[a,b]\,,$$
$$I_1=[a,x_1]\,,\ I_2=[x_1,x_2]\,,\ \ldots,\ I_k=[x_{k-1},x_k]\,,\ I_{k+1}=[x_k,b]\,,$$
$$B\left(J\cup I\right)=\Bigg\{y(x):y(x)\in\Bigg(C(J\cup I)\cap\Big(C^1(J)\cup C^1(I)\Big)\cap$$
$$\cap\Bigg(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2(I_j)\Bigg)\Bigg),|y(x)|\le P_1,\ |y'(x)|\le P_2\Bigg\},$$

де P_1,P_2 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (4.1)-(4.2) вважатимемо функцію $y=y(x)$, якщо вона задовольняє рівняння (4.1) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (4.2). Будемо шукати розв'язок задачі (4.1)-(4.2), який належить простору $B(J\cup I)$.

Із означення простору $B(J\cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (4.1)-(4.2) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x\in[a,b]$, де $y'(a)$ – права похідна.

Введемо норму в просторі $B(J\cup I)$:

$$\|y\|_B=\max\left\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}|y(x)|\,,\frac{2}{b-a}\max\left(\max_{x\in J}|y'(x)|\,,\max_{x\in I}|y'(x)|\right)\right\}.$$

Простір $B(J \cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (4.1)-(4.2) еквівалентна інтегральному рівнянню [55, 58]

$$y(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} \left(a_i(s)\, y(s - \tau_i(s)) + b_i(s)\, y'(s - \tau_i(s)) + \right.\right. \tag{4.3}$$

$$\left.\left. + \sum_{p=0}^{1} \int\limits_{a}^{b} K_{ip}(s, \xi)\, y^{(p)}(\xi - \tau_i(\xi))\, d\xi \right) \right] \overline{G}(x, s)\, ds + l(x), \ x \in J \cup I,$$

$$\overline{G}(x, s) = \begin{cases} G(x, s), & x, s \in I, \\ 0, & \text{в іншому випадку}, \end{cases}$$

$$l(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in J, \\ \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}(x - a) + \varphi(a), & x \in I, \end{cases}$$

де $G(x, s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''(x) = 0, \ x \in I, \ y(a) = y(b) = 0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B(J \cup I)$ наступним чином

$$(Ty)(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} \left(a_i(s)\, y(s - \tau_i(s)) + b_i(s)\, y'(s - \tau_i(s)) + \right.\right. \tag{4.4}$$

$$\left.\left. + \sum_{p=0}^{1} \int\limits_{a}^{b} K_{ip}(s, \xi)\, y^{(p)}(\xi - \tau_i(\xi))\, d\xi \right) \right] \overline{G}(x, s)\, ds + l(x), \ x \in J \cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'(x) = \int\limits_{a^*}^{b} \left[\sum_{i=0}^{n} \left(a_i(s)\, y(s - \tau_i(s)) + b_i(s)\, y'(s - \tau_i(s)) + \right.\right. \tag{4.5}$$

$$\left.\left. + \sum_{p=0}^{1} \int\limits_{a}^{b} K_{ip}(s, \xi)\, y^{(p)}(\xi - \tau_i(\xi))\, d\xi \right) \right] \overline{G}'_x(x, s)\, ds + \frac{\gamma - \varphi(a)}{b - a}, \ x \in J \cup I.$$

Нехай коефіцієнти у рівнянні (4.1) такі, що справджуються нерівності $|a_i(x)| \le A_i$, $|b_i(x)| \le B_i$, $|K_{ip}(x, s)| \le \overline{K}_{ip}$, $i = \overline{0, n}$, $p = \overline{0, 1}$, $|f(x)| \le F$

при $x \in [a;b]$. Позначимо $P = \sum\limits_{i=0}^{n} \Big(A_i P_1 + B_i P_2 + (b-a) \sum\limits_{j=0}^{1} \overline{K}_{ip} P_{j+1} \Big) + F$, де P_1, P_2 – додатні сталі, що входять в означення простору $B(J \cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max \left\{ \max\limits_{x \in J} |\varphi(x)|,\ \frac{(b-a)^2}{8} P + \max\big(|\varphi(a)|,\ |\gamma| \big) \right\} \le P_1,$

2) $\max \left\{ \max\limits_{x \in J} |\varphi'(x)|,\ \frac{b-a}{2} P + \left| \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a} \right| \right\} \le P_2,$

3) $\frac{(b-a)^2}{8} \sum\limits_{i=0}^{n} \Big(A_i + (b-a) \overline{K}_{i0} \Big) + \frac{b-a}{2} \sum\limits_{i=0}^{n} \Big(B_i + (b-a) \overline{K}_{i1} \Big) < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.1)-(4.2) *у просторі* $B(J \cup I)$.

Доведення. Із вигляду функції Гріна

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a \le s \le x \le b, \\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a \le x \le s \le b, \end{cases}$$

одержуємо наступні оцінки [93]

$$\int\limits_a^b \Big| G(x,s) \Big| ds \le \frac{(b-a)^2}{8},\ \int\limits_a^b \Big| G'_x(x,s) \Big| ds \le \frac{b-a}{2}. \tag{4.6}$$

Якщо справджуються умови 1)-2) та нерівності (4.6), тоді оператор T відображає простір $B(J \cup I)$ у себе.

Нехай $y_1, y_2 \in B(J \cup I)$. Враховуючи оцінки (4.6), одержуємо:

$$\Big| (Ty_1)(x) - (Ty_2)(x) \Big| =$$

$$= \Bigg| \int\limits_{a^*}^{b} \Bigg[\sum_{i=0}^{n} \Bigg(a_i(s) \Big(y_1(s - \tau_i(s)) - y_2(s - \tau_i(s)) \Big) +$$

$$+ b_i(s) \Big(y_1'(s - \tau_i(s)) - y_2'(s - \tau_i(s)) \Big) +$$

$$+\sum_{p=0}^{1}\int_{a}^{b}K_{ip}\left(s,\xi\right)\left(y_1^{(p)}(\xi-\tau_i(\xi))-y_2^{(p)}(\xi-\tau_i(\xi))\right)d\xi\Bigg)\Bigg]\bar{G}(x,s)ds\Bigg|\leq$$

$$\leq\int_{a^*}^{b}\Bigg[\sum_{i=0}^{n}\Bigg(A_i\Big|y_1(s-\tau_i(s))-y_2(s-\tau_i(s))\Big|+$$

$$+B_i\Big|y_1'(s-\tau_i(s))-y_2'(s-\tau_i(s))\Big|+$$

$$+\sum_{p=0}^{1}\int_{a}^{b}\Big|K_{ip}\left(s,\xi\right)\Big|\Big|y_1^{(p)}(\xi-\tau_i(\xi))-y_2^{(p)}(\xi-\tau_i(\xi))\Big|d\xi\Bigg)\Bigg]\Big|\bar{G}(x,s)\Big|ds\leq$$

$$\leq\int_{a^*}^{b}\Bigg[\sum_{i=0}^{n}\Bigg(A_i\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1-y_2\Big|+$$

$$+B_i\max\Big\{\max_{s\in I}\Big|y_1'-y_2'\Big|,\ \max_{s\in J}\Big|y_1'-y_2'\Big|\Big\}+$$

$$+\int_{a}^{b}\overline{K}_{i0}\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1-y_2\Big|d\xi+$$

$$+\int_{a}^{b}\overline{K}_{i1}\ \max\Big\{\max_{s\in I}\Big|y_1'-y_2'\Big|,\ \max_{s\in J}\Big|y_1'-y_2'\Big|\Big\}d\xi\Bigg)\Bigg]\times$$

$$\times\Big|\bar{G}(x,s)\Big|ds=$$

$$=\int_{a^*}^{b}\Bigg[\frac{(b-a)^2}{8}\frac{8}{(b-a)^2}\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1-y_2\Big|\sum_{i=0}^{n}A_i+$$

$$+\frac{b-a}{2}\frac{2}{b-a}\max\Big\{\max_{s\in I}\Big|y_1'-y_2'\Big|,\ \max_{s\in J}\Big|y_1'-y_2'\Big|\Big\}\sum_{i=0}^{n}B_i+$$

$$+\frac{(b-a)^2}{8}\frac{8}{(b-a)^2}\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1-y_2\Big|(b-a)\sum_{i=0}^{n}\overline{K}_{i0}+$$

$$+\frac{b-a}{2}\frac{2}{b-a}\max\Big\{\max_{s\in I}\Big|y_1'-y_2'\Big|,\ \max_{s\in J}\Big|y_1'-y_2'\Big|\Big\}(b-a)\sum_{i=0}^{n}\overline{K}_{i1}\Bigg]\times$$

$$\times\Big|\bar{G}(x,s)\Big|ds\leq$$

$$\leq \frac{(b-a)^2}{8}\left[\frac{(b-a)^2}{8}\frac{8}{(b-a)^2}\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1-y_2\Big|\left(\sum_{i=0}^{n}A_i+(b-a)\sum_{i=0}^{n}\overline{K}_{i0}\right)+\right.$$

$$+\frac{b-a}{2}\frac{2}{b-a}\max\left\{\max_{s\in I}\Big|y_1'-y_2'\Big|,\ \max_{s\in J}\Big|y_1'-y_2'\Big|\right\}\times$$

$$\left.\times\left(\sum_{i=0}^{n}B_i+(b-a)\sum_{i=0}^{n}\overline{K}_{i1}\right)\right]\leq \|y_1-y_2\|_B\ \frac{(b-a)^2}{8}\times$$

$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)\right].$$

Аналогічно,

$$\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|\leq \|y_1-y_2\|_B\ \frac{b-a}{2}\times$$

$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)\right].$$

З одержаних оцінок випливає, що

$$\max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big|\leq \|y_1-y_2\|_B\ \frac{(b-a)^2}{8}\times$$

$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)\right],$$

$$\max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|\right\}\leq$$

$$\leq \|y_1-y_2\|_B\ \frac{b-a}{2}\times$$

$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)\right].$$

Домножимо першу нерівність на $\frac{8}{(b-a)^2}$, а другу – на $\frac{2}{b-a}$:

$$\frac{8}{(b-a)^2}\ \max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big|\leq \|y_1-y_2\|_B\times$$

$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)\right],$$

$$\frac{2}{b-a}\ \max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|\right\}\leq$$

$$\leq \|y_1 - y_2\|_B \times$$
$$\times \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^{n} \Big(A_i + (b-a)\overline{K}_{i0} \Big) + \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} \Big(B_i + (b-a)\overline{K}_{i1} \Big) \right].$$

Враховуючи одержані нерівності, дістаємо

$$\max\Bigg\{ \frac{8}{(b-a)^2} \max_{x\in J\cup I} \Big| (Ty_1)(x) - (Ty_2)(x) \Big|,$$
$$\frac{2}{b-a} \max\Big\{ \max_{x\in J} \Big| (Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x) \Big|, \max_{x\in I} \Big| (Ty_1)'(x) - (Ty_2)'(x) \Big| \Big\} \Bigg\} \leq$$
$$\leq \|y_1 - y_2\|_B \times$$
$$\times \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^{n} \Big(A_i + (b-a)\overline{K}_{i0} \Big) + \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} \Big(B_i + (b-a)\overline{K}_{i1} \Big) \right].$$

Із означення норми простору $B(J \cup I)$ маємо:

$$\Big\| (Ty_1)(x) - (Ty_2)(x) \Big\|_B \leq \|y_1 - y_2\|_B \times \tag{4.7}$$
$$\times \left[\frac{(b-a)^2}{8} \sum_{i=0}^{n} \Big(A_i + (b-a)\overline{K}_{i0} \Big) + \frac{b-a}{2} \sum_{i=0}^{n} \Big(B_i + (b-a)\overline{K}_{i1} \Big) \right].$$

Нерівність (4.7) та умова 3) забезпечують, що оператор T є стислим у просторі $B(J \cup I)$ і має єдину нерухому точку [93]. Тому крайова задача (4.1)-(4.2) має єдиний розв'язок $y(x) \in B(J \cup I)$.

Теорему 4.1 доведено. □

4.1.2 Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ на відрізку $[a; b]$, таку що $E \subset \Delta$. Позначимо через $S(x, y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y\,(x)$, який належить простору $B(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (4.1)-(4.2) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(y^{(0)},x\right)=\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\left(x-a\right)+\varphi\left(a\right)$, який задовольняє крайові умови (4.2) при $x=a$ та $x=b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (4.1) та сплайн $S\left(y^{(k)},x\right)$, знаходимо для $k=0,1,\ldots$:

$$M_j^{+(k+1)}=\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)+ \tag{4.8}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{1}\int\limits_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(y^{(k)},s-\tau_i(s)\big)ds\Bigg)+f(x_j),\ j=\overline{0,m-1},$$

$$M_j^{-(k+1)}=\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)+ \tag{4.9}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(y^{(k)},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{1}\int\limits_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(y^{(k)},s-\tau_i(s)\big)ds\Bigg)+f(x_j),\ j=\overline{1,m}.$$

У співвідношеннях (4.8), (4.9) підставляємо $S^{(p)}\left(x,y^{(k)}\right)=\varphi^{(p)}(x)$, $p=0,1$ при $x<a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,m}$, розв'язуючи систему рівнянь (2.36).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x,y^{(k+1)}\right)$ у формі (2.33), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j=\overline{0,m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j=\overline{1,m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1=\sum_{i=0}^{n}\max_{x\in[a;b]}\left|a_i(x)\right|+(b-a)\sum_{i=0}^{n}\max_{x\in[a;b]}\int\limits_a^b\left|K_{i0}(x,s)\right|ds, \tag{4.10}$$

$$\lambda_2=\sum_{i=0}^{n}\max_{x\in[a;b]}\left|b_i(x)\right|+(b-a)\sum_{i=0}^{n}\max_{x\in[a;b]}\int\limits_a^b\left|K_{i1}(x,s)\right|ds,$$

$$u = \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8},\ v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3},$$
$$\mu = 5\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H\right).$$

Теорема 4.2. *Нехай розв'язок крайової задачі* (4.1)-(4.2) *існує та належить простору* $B(J \cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 < 1 \tag{4.11}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0 < H < H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(y^{(k)}, x\right)\right\}$, $k = 0, 1, \ldots$ *рівномірно збігається на* $[a; b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\left\|\lim_{k\to\infty} S^{(p)}(y^{(k)}, x) - y^{(p)}(x)\right\| \leq R_p \omega\left(y''(x), H\right),\ p = 0, 1, \tag{4.12}$$
$$R_0 = \sup_{H \leq H^*}\left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2}\right),\ R_1 = \sup_{H \leq H^*}\left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H\right),$$
$$\omega\left(y''(x), H\right) = \max_{1 \leq r \leq k+1} \omega_r\left(y''(x), H\right).$$

Доведення. Покажемо, що ряди

$$S^{(p)}\left(y^{(0)}, x\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\left[S^{(p)}\left(y^{(i)}, x\right) - S^{(p)}\left(y^{(i-1)}, x\right)\right],\ p = 0, 1$$

рівномірно збігаються на $[a; b]$, і тим самим одержимо рівномірну збіжність послідовностей $S^{(p)}\left(y^{(k)}, x\right),\ k = 0, 1, \ldots,\ p = 0, 1.$

Визначимо скалярні функції $y(x)$, $M(x)$ на $[a; b]$ і позначимо вектори

$$\overline{y} = \left(y(x_1), \ldots, y(x_{m-1})\right)^T,$$
$$\overline{M} = \Big(M(x_0+0), M(x_1-0), M(x_1+0),\ \ldots, M(x_{m-1}-0),$$
$$M(x_{m-1}+0), M(x_m-0)\Big)^T.$$

Ітераційний алгоритм A)-D) представимо у матричній формі:

$$\overline{y}^{(k+1)} = A^{-1}B\overline{M}^{k+1} + A^{-1}d, \tag{4.13}$$

де компоненти вектора $\overline{M}$ визначені згідно (4.8)-(4.9), а сталий вектор d залежить лише від крайових умов (4.2). Згідно (2.39), матриця A – невироджена, отже побудова ітераційної послідовності кубічних сплайнів $S\left(y^{(k)}, x\right)$, $k{=}0, 1, \ldots$ можлива.

З (4.13) випливають наступні оцінки:

$$\left\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\right\| = \left\|A^{-1}BM^{k+1} - A^{-1}BM^{k}\right\| \leq \tag{4.14}$$
$$\leq \left\|A^{-1}\right\| \|B\| \left\|\overline{M}^{k+1} - \overline{M}^{k}\right\|.$$

Із (4.8)-(4.9) та вигляду правої частини рівняння (4.1) одержуємо нерівності

$$\left\|M_j^{+(k+1)} - M_j^{+(k)}\right\| \leq \lambda_1 \max_{x\in[a;b]} \left|S\left(y^{(k)}, x\right) - S\left(y^{(k-1)}, x\right)\right| + \tag{4.15}$$
$$+\lambda_2 \max_{x\in[a;b]} \left|S'\left(y^{(k)}, x\right) - S'\left(y^{(k-1)}, x\right)\right|,\ j = \overline{0, m-1},$$
$$\left\|M_j^{-(k+1)} - M_j^{-(k)}\right\| \leq \lambda_1 \max_{x\in[a;b]} \left|S\left(y^{(k)}, x\right) - S\left(y^{(k-1)}, x\right)\right| +$$
$$+\lambda_2 \max_{x\in[a;b]} \left|S'\left(y^{(k)}, x\right) - S'\left(y^{(k-1)}, x\right)\right|,\ j = \overline{1, m}.$$

Звідси, враховуючи співвідношення (2.39)-(2.43), нерівність (4.14) можна записати наступним чином:

$$\left\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\right\| \leq \frac{K^5}{8}(b-a)^2 \left[\lambda_1 \left\|S\left(y^{(k)}, x\right) - S\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\| + \right. \tag{4.16}$$
$$\left. +\lambda_2 \left\|S'\left(y^{(k)}, x\right) - S'\left(y^{(k-1)}, x\right)\right\|\right].$$

Нехай $x \in [x_{j-1}; x_j]$. Враховуючи (2.33), маємо

$$\left|S\left(y^{(k+1)}, x\right) - S\left(y^{(k)}, x\right)\right| \leq \left|\frac{x_j - x}{6h_j}\right| \left((x_j - x)^2 - h_j^2\right) + \tag{4.17}$$
$$+\frac{x - x_{j-1}}{6h_j}\left((x - x_{j-1})^2 - h_j^2\right) \left\|\overline{M}^{k+1} - \overline{M}^{k}\right\| +$$
$$+\left|y_{j-1}^{k+1} - y_j^k\right| \left|\frac{x_j - x}{h_j}\right| + \left|y_j^{k+1} - y_j^k\right| \left|\frac{x - x_{j-1}}{h_j}\right|.$$

Аналогічно до (3.16) можна показати, що

$$\max_{x\in[x_{j-1};x_j]}\left|\frac{x_j-x}{6h_j}\left(h_j^2-(x_j-x)^2\right)+\frac{x-x_{j-1}}{6h_j}\left(h_j^2-(x-x_{j-1})^2\right)\right|\le\frac{H^2}{8}. \tag{4.18}$$

Використовуючи (4.15), (4.16), (4.18), з (4.17) маємо

$$\left\|S\left(y^{(k+1)},x\right)-S\left(y^{(k)},x\right)\right\|\le \tag{4.19}$$
$$\le\frac{H^2}{8}\left\|\overline{M}^{k+1}-\overline{M}^{k}\right\|+\left\|y^{(k+1)}-y^{(k)}\right\|\le$$
$$\le\left(\frac{K^5}{8}(b-a)^2+\frac{H^2}{8}\right)\left(\lambda_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\right.$$
$$\left.+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right).$$

Згідно вигляду сплайна (2.33), отримуємо

$$\left|S'\left(y^{(k+1)},x\right)-S'\left(y^{(k)},x\right)\right|\le \tag{4.20}$$
$$\le\left|\frac{h_j}{6}-\frac{(x_j-x)^2}{2h_j}\right|\left|M_{j-1}^{+(k+1)}-M_{j-1}^{+(k)}\right|+$$
$$+\left|\frac{(x-x_{j-1})^2}{2h_j}-\frac{h_j}{6}\right|\left|M_j^{-(k+1)}-M_j^{-(k)}\right|+\frac{1}{h_j}\left|y_j^{k+1}-y_{j-1}^{k+1}-\left(y_j^k-y_{j-1}^k\right)\right|.$$

Очевидно, справджуються нерівності

$$\max_{x\in[x_{j-1};x_j]}\left(\left|\frac{h_j}{6}-\frac{(x_j-x)^2}{2h_j}\right|+\left|\frac{(x-x_{j-1})^2}{2h_j}-\frac{h_j}{6}\right|\right)\le\frac{2H}{3}, \tag{4.21}$$

$$\max_{1<j<n}\left|y_j^{k+1}-y_{j-1}^{k+1}-\left(y_j^k-y_{j-1}^k\right)\right|\le\frac{K^4}{2}(b-a)H\left\|\overline{M}^{k+1}-\overline{M}^{k}\right\|. \tag{4.22}$$

Згідно (4.21)-(4.22), з нерівності (4.20) випливає

$$\left\|S'\left(y^{(k+1)},x\right)-S'\left(y^{(k)},x\right)\right\|\le \tag{4.23}$$
$$\le\left(\frac{K^5}{2}(b-a)+\frac{2}{3}H\right)\left(\lambda_1\left\|S\left(y^{(k)},x\right)-S\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|+\right.$$
$$\left.+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(k)},x\right)-S'\left(y^{(k-1)},x\right)\right\|\right).$$

Ітеруючи (4.19), (4.23) і враховуючи позначення (4.10) та умову (4.11), одержуємо

$$\left\|S\left(y^{(k+1)},x\right)-S\left(y^{(k)},x\right)\right\|\leq \tag{4.24}$$
$$\leq u\theta^{k-1}\left(\lambda_1\left\|S\left(y^{(1)},x\right)-S\left(y^{(0)},x\right)\right\|+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(1)},x\right)-S'\left(y^{(0)},x\right)\right\|\right),$$
$$\left\|S'\left(y^{(k+1)},x\right)-S'\left(y^{(k)},x\right)\right\|\leq$$
$$\leq v\theta^{k-1}\left(\lambda_1\left\|S\left(y^{(1)},x\right)-S\left(y^{(0)},x\right)\right\|+\lambda_2\left\|S'\left(y^{(1)},x\right)-S'\left(y^{(0)},x\right)\right\|\right).$$

Співвідношення (4.24) при виконанні умови (4.11) забезпечують збіжність послідовностей сплайнів $\left\{S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)\right\}$, $k=0,1,\ldots$, $p=0,1$. Теорему 4.2 доведено. □

Позначимо

$$\lim_{k\to\infty}S^{(p)}\left(y^{(k)},x\right)=S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right),\ p=0,1,$$
$$\widetilde{M}_j^{+}=S''\left(\tilde{y},x_j+0\right),\ j=\overline{0,m-1},$$
$$\widetilde{M}_j^{-}=S''\left(\tilde{y},x_j-0\right),\ j=\overline{1,m},$$
$$\widetilde{y}_j=S\left(\tilde{y},x_j\right),\ j=\overline{1,m}.$$

При цьому

$$\widetilde{M}_j^{+}=\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)+b_i(x_j)S'\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)+0\big)+$$
$$+\sum_{p=0}^{1}\int_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(\tilde{y},s-\tau_i(s)\big)ds\Bigg)+f(x_j),\ j=\overline{0,m-1},$$
$$\widetilde{M}_j^{-}=\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)+b_i(x_j)S'\big(\tilde{y},x_j-\tau_i(x_j)-0\big)+$$
$$+\sum_{p=0}^{1}\int_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(\tilde{y},s-\tau_i(s)\big)ds\Bigg)+f(x_j),\ j=\overline{1,m}.$$

Параметри $\widetilde{M}_j^+$, $\widetilde{M}_j^-$ сплайна $S\left(\tilde{y},x\right)$ задовольняють систему (2.36) та рівняння (4.8)-(4.9).

Нехай $S\left(y,x\right)$ – кубічний сплайн дефекту 2, який інтерполює розв'язок $y\left(x\right)$ крайової задачі (4.1)-(4.2). Тоді

$$\left\|S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\| \le \left\|S^{(p)}\left(\tilde{y},x\right)-S^{(p)}\left(y,x\right)\right\| + \left\|S^{(p)}\left(y,x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\|,$$
$$p=0,1. \tag{4.25}$$

Для другого доданка у правій частині (4.25) справджуються нерівності [94]:

$$\left\|S^{(p)}\left(y,x\right)-y^{(p)}\left(x\right)\right\| \le K_p H^{2-p}\omega\left(y''\left(x\right),H\right), \tag{4.26}$$
$$p=0,1,\ K_0=\frac{5}{2},\ K_1=5,$$

де $\omega\left(y''\left(x\right),H\right)=\max\limits_{1\le r\le k+1}\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right)$, $\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right)$ – модуль неперервності функції $y''\left(x\right)$ на $I_r=[x_{r-1};x_r]$.

Для оцінки першого доданка у правій частині (4.25), згідно вигляду правої частини рівняння (4.1), знайдемо допоміжні нерівності:

$$\left|M_j^+ - \sum_{i=0}^{n}\left(a_i(x_j)S\big(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+\right.\right. \tag{4.27}$$
$$\left.+b_i(x_j)S'\big(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+\sum_{p=0}^{1}\int\limits_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(y,s-\tau_i(s)\big)ds\right)-$$
$$\left.-f(x_j)\right| \le \left|M_j^+ - y''(x_j+0)\right|+$$
$$+\left|y''(x_j+0)-\sum_{i=0}^{n}\left(a_i(x_j)S\big(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+\right.\right.$$
$$+b_i(x_j)S'\big(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+$$
$$\left.\left.+\sum_{p=0}^{1}\int\limits_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(y,s-\tau_i(s)\big)ds\right)-f(x_j)\right|=$$

$$= \left|S''(y,x_j+0) - y''(x_j+0)\right| + \left|\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)y\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+\right.$$

$$+b_i(x_j)y'\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big) + \sum_{p=0}^{1}\int_a^b K_{ip}(x_j,s)y^{(p)}\big(s-\tau_i(s)\big)ds\Big)-$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big) + b_i(x_j)S'\big(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+$$

$$\left.+\sum_{p=0}^{1}\int_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(y,s-\tau_i(s)\big)ds\Big)\right| \le$$

$$\le 5\omega(y''(x),H) + \left|\sum_{i=0}^{n} a_i(x_j)\Big(y(x_j+0-\tau_i(x_j+0))-\right.$$

$$-S(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big) + \sum_{i=0}^{n} b_i(x_j)\Big(y'(x_j+0-\tau_i(x_j+0))-$$

$$\left.-S'(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0))\Big)\right| \le$$

$$\le 5\omega(y''(x),H) + \frac{5}{2}H^2\omega(y''(x),H)\sum_{i=0}^{n}\left|a_i(x_j)\right|+$$

$$+5H\omega(y''(x),H)\sum_{i=0}^{n}\left|b_i(x_j)\right| \le$$

$$\le 5\omega(y''(x),H) + \lambda_1\frac{5}{2}H^2\omega(y''(x),H) + \lambda_2 5H\omega(y''(x),H) =$$

$$= 5\left(1+\frac{1}{2}\lambda_1H^2+\lambda_2H\right)\omega(y''(x),H) =$$

$$= \mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{0,m-1}.$$

Аналогічно можна одержати

$$\left|M_j^- - \sum_{i=0}^{n}\Big(a_i(x_j)S\big(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0)\big)+\right. \tag{4.28}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(y,x_j-0-\tau_i(x_j-0)\big) + \sum_{p=0}^{1}\int_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(y,s-\tau_i(s)\big)ds\Big)-$$

$$-f(x_j)\Big| \le \mu\omega(y'', H),\ j = \overline{1, m}.$$

Звідси

$$M_j^+ \le \sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)\big) + \tag{4.29}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)\big) + \sum_{p=0}^{1}\int_a^b K_{ip}(x_j, s)S^{(p)}\big(y, s - \tau_i(s)\big)ds\Bigg) +$$

$$+f(x_j) + \mu\omega(y''(x), H),\ j = \overline{0, m-1},$$

$$M_j^- \le \sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(y, x_j - 0 - \tau_i(x_j - 0)\big) + \tag{4.30}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(y, x_j - 0 - \tau_i(x_j - 0)\big) + \sum_{p=0}^{1}\int_a^b K_{ip}(x_j, s)S^{(p)}\big(y, s - \tau_i(s)\big)ds\Bigg) +$$

$$+f(x_j) + \mu\omega(y''(x), H),\ j = \overline{1, m}.$$

Позначимо

$$\max_{x\in[a;b]}\Big|S^{(p)}(\tilde{y}, x) - S^{(p)}(y, x)\Big| = \alpha_p,\ p = 0, 1,$$

$$\max_j\Big|\widetilde{M_j} - M_j\Big| = \max\left\{\max_{j=\overline{0,m-1}}\Big|\widetilde{M_j^+} - M_j^+\Big|,\ \max_{j=\overline{1,m}}\Big|\widetilde{M_j^-} - M_j^-\Big|\right\}.$$

Враховуючи оцінки (4.29), (4.30), дістаємо:

$$\Big|\widetilde{M_j^+} - M_j^+\Big| \le \Bigg|\widetilde{M_j^+} - \sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)\big) +$$

$$+b_i(x_j)S'\big(y, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)\big) + \sum_{p=0}^{1}\int_a^b K_{ip}(x_j, s)S^{(p)}\big(y, s - \tau_i(s)\big)ds\Bigg) -$$

$$-f(x_j)\Bigg| + \mu\omega(y''(x), H) = \Bigg|\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(\tilde{y}, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)\big) +$$

$$+b_i(x_j)S'\big(\tilde{y}, x_j + 0 - \tau_i(x_j + 0)\big) + \sum_{p=0}^{1}\int_a^b K_{ip}(x_j, s)S^{(p)}\big(\tilde{y}, s - \tau_i(s)\big)ds\Bigg) -$$

$$
\begin{gathered}
-\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+\\
+b_i(x_j)S'\big(y,x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+\\
+\sum_{p=0}^{1}\int\limits_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(y,s-\tau_i(s)\big)ds\Bigg)\Bigg|+\mu\omega(y''(x),H)\le\\
\le\sum_{i=0}^{n}\Big|a_i(x_j)\Big|\alpha_0+\sum_{i=0}^{n}\Big|b_i(x_j)\Big|\alpha_1+\mu\omega(y''(x),H)\le\\
\le\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{0,m-1}. \qquad (4.31)
\end{gathered}
$$

Аналогічно,

$$
\left|\widetilde{M_j^-}-M_j^-\right|\le\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{1,m}. \qquad (4.32)
$$

Нескладно показати, що має місце оцінка

$$
|\tilde{y}_j-y_j|\le\frac{K^5}{8}(b-a)^2\max\left\{\max_{j=\overline{0,m-1}}|\widetilde{M_j^+}-M_j^+|,\ \max_{j=\overline{1,m}}|\widetilde{M_j^-}-M_j^-|\right\}. \qquad (4.33)
$$

Використовуючи формули для $S\left(\tilde{y},x\right)$, $S\left(y,x\right)$ та нерівності (4.31)-(4.33), отримуємо наступну систему нерівностей:

$$
\begin{aligned}
\alpha_0&\le u\Big(\alpha_0\lambda_1+\alpha_1\lambda_2+\mu\omega\left(y''(x),H\right)\Big),\\
\alpha_1&\le v\Big(\alpha_0\lambda_1+\alpha_1\lambda_2+\mu\omega\left(y''(x),H\right)\Big).
\end{aligned} \qquad (4.34)
$$

Розв'язуючи систему (4.34), знаходимо оцінки для перших доданків у правій частині (4.25):

$$
\begin{aligned}
\alpha_0&\le\frac{u\mu\omega(y''(x),H)}{1-\theta},\\
\alpha_1&\le\frac{v\mu\omega(y''(x),H)}{1-\theta}.
\end{aligned}
$$

Тепер, враховуючи (4.26), нерівності (4.25) можна записати у вигляді (4.12).

Теорему 4.2 доведено.

4.2 Лінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу

4.2.1 Постановка задачі. Існування розв'язку

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = \sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x)\,y(x-\tau_i(x)) + b_i(x)\,y'(x-\tau_i(x)) + \tag{4.35}$$

$$+c_i(x)\,y''(x-\tau_i(x)) + \sum_{p=0}^{2}\int_a^b K_{ip}(x,s)\,y^{(p)}(s-\tau_i(s))\,ds\Bigg) + f(x),$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x),\ p=0,1,2,\ x\in[a^*;a],\ y(b)=\gamma, \tag{4.36}$$

де запізнення $\tau_0(x) = 0$, а $\tau_i(x),\ i=\overline{1,n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – задана двічі неперервно-диференційовна функція на $[a^*;a]$, $\gamma\in R$,

$$a^* = \min_{0<i\le n}\left\{\inf_{x\in[a;b]}(x-\tau_i(x))\right\}.$$

Нехай функції $a_i(x)$, $b_i(x)$, $c_i(x)$, $i=\overline{0,n}$, $f(x)$ – неперервні на $[a;b]$, а функції $K_{ip}(x,s)$, $i=\overline{0,n}$, $p=\overline{0,1}$ – неперервні за обома аргументами у квадраті $[a,b]\times[a,b]$.

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x),\ldots,\tau_n(x)$:

$$E_{i1} = \left\{x_j\in[a,b]:\ x_j-\tau_i(x_j)=a,\ j=1,2,\ldots\right\},$$

$$E_{i2} = \left\{x_j\in[a,b]:\ x_0=a,\ x_{j+1}-\tau_i(x_{j+1})=x_j,\ j=0,1,2,\ldots\right\},$$

$$E_2 = \bigcup_{i=1}^{n}\left(E_{i1}\cup E_{i2}\right).$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x)$, $i=\overline{1,n}$ – такі функції, що множини E_{i1}, E_{i2}, $i=\overline{1,n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E_2 в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$J=[a^*;a]\,,\; I=[a,b]\,,$$

$$I_1=[a,x_1]\,,\; I_2=[x_1,x_2]\,,\;\ldots,\; I_k=[x_{k-1},x_k]\,,\; I_{k+1}=[x_k,b]\,,$$

$$B_2\left(J\cup I\right)=\Bigg\{y\,(x):y\,(x)\in\Bigg(C(J\cup I)\cap\Big(C^1(J)\cup C^1(I)\Big)\cap$$

$$\cap\Bigg(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2\left(I_j\right)\Bigg)\Bigg),\; |y(x)|\le P_1,\; |y'(x)|\le P_2,\; |y''(x)|\le P_3\Bigg\},$$

де P_1,P_2,P_3 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (4.35)-(4.36) вважатимемо функцію $y=y\,(x)$, якщо вона задовольняє рівняння (4.35) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E_2) і крайові умови (4.36). Будемо шукати розв'язок задачі (4.35)-(4.36), який належить простору $B_2(J\cup I)$.

Із означення простору $B_2(J\cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (3.34)-(3.35) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x\in[a,b]$, де $y'\,(a)$ – права похідна, а в точках множини E_2 існують скінченні односторонні другі похідні розв'язку, які можуть не співпадати.

Введемо норму в просторі $B_2(J\cup I)$:

$$\|y\|_{B_2}=\max\Bigg\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}|y(x)|,\;\frac{2}{b-a}\max\Big(\max_{x\in J}|y'(x)|,\;\max_{x\in I}|y'(x)|\Big),$$

$$\max\Big(\max_{x\in J}|y''(x)|,\;\max_{x\in I_1}|y''(x)|,\;\ldots,\;\max_{x\in I_{k+1}}|y''(x)|\Big)\Bigg\}.$$

Простір $B_2(J\cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (4.35)-(4.36) еквівалентна інтегральному рівнянню [55, 58]

$$y(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Bigg[\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i\,(s)\,y\,(s-\tau_i\,(s))+b_i\,(s)\,y'\,(s-\tau_i\,(s))+ \tag{4.37}$$

$$+c_i\,(s)\,y''\,(s-\tau_i\,(s))+\sum_{p=0}^{2}\int\limits_{a}^{b}K_{ip}\,(s,\xi)\,y^{(p)}\,(\xi-\tau_i\,(\xi))\,d\xi\Bigg)\Bigg]\times$$

$$\times\overline{G}\,(x,s)\,ds+l\,(x)\,,\ x\in J\cup I,$$

$$\overline{G}\,(x,s)=\begin{cases}G\,(x,s)\,, & x,s\in I,\\ 0, & \text{в іншому випадку},\end{cases}$$

$$l\,(x)=\begin{cases}\varphi\,(x)\,, & x\in J,\\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\,(x-a)+\varphi\,(a)\,, & x\in I,\end{cases}$$

де $G\,(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''\,(x)=0,\ x\in I,\ y\,(a)=y\,(b)=0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B_2(J\cup I)$ наступним чином

$$(Ty)\,(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\left[\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i\,(s)\,y\,(s-\tau_i\,(s))+b_i\,(s)\,y'\,(s-\tau_i\,(s))+\right. \tag{4.38}$$

$$\left.+c_i\,(s)\,y''\,(s-\tau_i\,(s))+\sum_{p=0}^{2}\int\limits_{a}^{b}K_{ip}\,(s,\xi)\,y^{(p)}\,(\xi-\tau_i\,(\xi))\,d\xi\Bigg)\right]\times$$

$$\times\overline{G}\,(x,s)\,ds+l\,(x)\,,\ x\in J\cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'\,(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\left[\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i\,(s)\,y\,(s-\tau_i\,(s))+b_i\,(s)\,y'\,(s-\tau_i\,(s))+\right. \tag{4.39}$$

$$\left.+c_i\,(s)\,y''\,(s-\tau_i\,(s))+\sum_{p=0}^{2}\int\limits_{a}^{b}K_{ip}\,(s,\xi)\,y^{(p)}\,(\xi-\tau_i\,(\xi))\,d\xi\Bigg)\right]\times$$

$$\times\overline{G}'_x\,(x,s)\,ds+\frac{\gamma-\varphi\,(a)}{b-a},\ x\in J\cup I.$$

$$(Ty)''\,(x)=\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i\,(x)\,y\,(x-\tau_i\,(x))+b_i\,(x)\,y'\,(x-\tau_i\,(x))+ \tag{4.40}$$

$$+c_i\,(x)\,y''\,(x-\tau_i\,(x))+\sum_{p=0}^{2}\int\limits_{a}^{b}K_{ip}\,(x,s)\,y^{(p)}\,(s-\tau_i\,(s))\,ds\Bigg),\ x\in J\cup I.$$

Нехай коефіцієнти у рівнянні (4.35) такі, що справджуються нерівності $|a_i(x)| \leq A_i$, $|b_i(x)| \leq B_i$, $|c_i(x)| \leq C_i$, $|K_{ip}(x,s)| \leq \overline{K}_{ip}$, $i = \overline{0,n}$, $p = \overline{0,2}$, $|f(x)| \leq F$ при $x \in [a;b]$. Позначимо $P = \sum\limits_{i=0}^{n}\Big(A_iP_1 + B_iP_2 + C_iP_3 + (b-a)\sum\limits_{p=0}^{2}\overline{K}_{ip}P_{p+1}\Big) + F$, де P_1, P_2, P_3 – додатні сталі, що входять в означення простору $B_2(J \cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi(x)|,\ \frac{(b-a)^2}{8}P + \max\big(|\varphi(a)|,\ |\gamma|\big)\right\} \leq P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'(x)|,\ \frac{b-a}{2}P + \left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\} \leq P_2,$

3) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi''(x)|,\ P\right\} \leq P_3,$

4) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum\limits_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+\sum\limits_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big) < 1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.35)-(4.36) *у просторі* $B_2(J \cup I)$.

Доведення. Із вигляду функції Гріна

$$G(x,s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(x-b)}{b-a}, & a \leq s \leq x \leq b, \\ \frac{(x-a)(s-b)}{b-a}, & a \leq x \leq s \leq b, \end{cases}$$

одержуємо наступні оцінки [93]

$$\int\limits_a^b \Big|G(x,s)\Big| ds \leq \frac{(b-a)^2}{8},\ \int\limits_a^b \Big|G'_x(x,s)\Big| ds \leq \frac{b-a}{2}. \tag{4.41}$$

Якщо справджуються умови 1)-3) та нерівності (4.41), тоді оператор T відображає простір $B_2(J \cup I)$ у себе.

Нехай $y_1, y_2 \in B_2(J \cup I)$. Враховуючи оцінки (4.41), одержуємо:

$$\Big|(Ty_1)(x) - (Ty_2)(x)\Big| =$$

$$= \Bigg|\int\limits_{a^*}^{b} \Bigg[\sum_{i=0}^{n} \Bigg(a_i(s)\Big(y_1(s-\tau_i(s)) - y_2(s-\tau_i(s))\Big) +$$

$$+ b_i(s)\Big(y_1'(s-\tau_i(s)) - y_2'(s-\tau_i(s))\Big) +$$

$$+ c_i(s)\Big(y_1''(s-\tau_i(s)) - y_2''(s-\tau_i(s))\Big) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{2} \int\limits_{a}^{b} K_{ip}(s,\xi)\left(y_1^{(p)}(\xi-\tau_i(\xi)) - y_2^{(p)}(\xi-\tau_i(\xi))\right) d\xi \Bigg)\Bigg] \bar{G}(x,s) ds \Bigg| \leq$$

$$\leq \int\limits_{a^*}^{b} \Bigg[\sum_{i=0}^{n} \Bigg(A_i \Big| y_1(s-\tau_i(s)) - y_2(s-\tau_i(s))\Big| +$$

$$+ B_i \Big| y_1'(s-\tau_i(s)) - y_2'(s-\tau_i(s))\Big| + C_i \Big| y_1''(s-\tau_i(s)) - y_2''(s-\tau_i(s))\Big| +$$

$$+ \sum_{p=0}^{2} \int\limits_{a}^{b} \Big|K_{ip}(s,\xi)\Big| \Big| y_1^{(p)}(\xi-\tau_i(\xi)) - y_2^{(p)}(\xi-\tau_i(\xi))\Big| d\xi \Bigg)\Bigg] \Big|\bar{G}(x,s)\Big| ds \leq$$

$$\leq \int\limits_{a^*}^{b} \Bigg[\sum_{i=0}^{n} \Bigg(A_i \max_{s \in J \cup I} \Big| y_1 - y_2 \Big| +$$

$$+ B_i \max\Big\{ \max_{s \in J} \Big| y_1' - y_2' \Big|,\ \max_{s \in I} \Big| y_1' - y_2' \Big| \Big\} +$$

$$+ C_i \max\Big\{ \max_{s \in J} \Big| y_1'' - y_2'' \Big|,\ \max_{s \in I_1} \Big| y_1'' - y_2'' \Big|, \ldots, \max_{s \in I_{k+1}} \Big| y_1'' - y_2'' \Big| \Big\} +$$

$$+ \int\limits_{a}^{b} \overline{K}_{i0} \max_{s \in J \cup I} \Big| y_1 - y_2 \Big| d\xi +$$

$$+ \int\limits_{a}^{b} \overline{K}_{i1} \max\Big\{ \max_{s \in J} \Big| y_1' - y_2' \Big|,\ \max_{s \in I} \Big| y_1' - y_2' \Big| \Big\} d\xi +$$

$$+ \int\limits_{a}^{b} \overline{K}_{i2} \max\Big\{ \max_{s \in J} \Big| y_1'' - y_2'' \Big|,\ \max_{s \in I_1} \Big| y_1'' - y_2'' \Big|, \ldots, \max_{s \in I_{k+1}} \Big| y_1'' - y_2'' \Big| \Big\} d\xi \Bigg)\Bigg] \times$$

$$\times\Big|\bar{G}(x,s)\Big|ds=$$

$$=\int\limits_{a^*}^{b}\Bigg[\frac{(b-a)^2}{8}\frac{8}{(b-a)^2}\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1-y_2\Big|\sum_{i=0}^{n}A_i+$$

$$+\frac{b-a}{2}\frac{2}{b-a}\max\Big\{\max_{s\in J}\Big|y_1'-y_2'\Big|,\ \max_{s\in I}\Big|y_1'-y_2'\Big|\Big\}\sum_{i=0}^{n}B_i+$$

$$+\max\Big\{\max_{s\in J}\Big|y_1''-y_2''\Big|,\ \max_{s\in I_1}\Big|y_1''-y_2''\Big|,\dots,\max_{s\in I_{k+1}}\Big|y_1''-y_2''\Big|\Big\}\sum_{i=0}^{n}C_i+$$

$$+\frac{(b-a)^2}{8}\frac{8}{(b-a)^2}\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1-y_2\Big|(b-a)\sum_{i=0}^{n}\overline{K}_{i0}+$$

$$+\frac{b-a}{2}\frac{2}{b-a}\max\Big\{\max_{s\in J}\Big|y_1'-y_2'\Big|,\ \max_{s\in I}\Big|y_1'-y_2'\Big|\Big\}(b-a)\sum_{i=0}^{n}\overline{K}_{i1}+$$

$$+\max\Big\{\max_{s\in J}\Big|y_1''-y_2''\Big|,\ \max_{s\in I_1}\Big|y_1''-y_2''\Big|,\dots,\max_{s\in I_{k+1}}\Big|y_1''-y_2''\Big|\Big\}(b-a)\sum_{i=0}^{n}\overline{K}_{i2}\Bigg]\times$$

$$\times\Big|\bar{G}(x,s)\Big|ds\le$$

$$\le\frac{(b-a)^2}{8}\Bigg[\frac{(b-a)^2}{8}\frac{8}{(b-a)^2}\max_{s\in J\cup I}\Big|y_1-y_2\Big|\Bigg(\sum_{i=0}^{n}A_i+(b-a)\sum_{i=0}^{n}\overline{K}_{i0}\Bigg)+$$

$$+\frac{b-a}{2}\frac{2}{b-a}\max\Big\{\max_{s\in J}\Big|y_1'-y_2'\Big|,\ \max_{s\in I}\Big|y_1'-y_2'\Big|\Big\}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{i=0}^{n}B_i+(b-a)\sum_{i=0}^{n}\overline{K}_{i1}\Bigg)+$$

$$+\max\Big\{\max_{s\in J}\Big|y_1''-y_2''\Big|,\ \max_{s\in I_1}\Big|y_1''-y_2''\Big|,\dots,\max_{s\in I_{k+1}}\Big|y_1''-y_2''\Big|\Big\}\times$$

$$\times\Bigg(\sum_{i=0}^{n}C_i+(b-a)\sum_{i=0}^{n}\overline{K}_{i2}\Bigg)\Bigg]\le\|y_1-y_2\|_{B_2}\ \frac{(b-a)^2}{8}\times$$

$$\times\Bigg[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\Bigg].$$

Аналогічно,

$$\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big| \le \|y_1-y_2\|_{B_2}\,\frac{b-a}{2}\times$$
$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\right],$$

$$\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big| \le \|y_1-y_2\|_{B_2}\times$$
$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\right].$$

З одержаних оцінок випливає, що

$$\max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big| \le \|y_1-y_2\|_{B_2}\,\frac{(b-a)^2}{8}\times$$
$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\right],$$

$$\max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|\right\} \le$$
$$\le \|y_1-y_2\|_{B_2}\,\frac{b-a}{2}\times$$
$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\right],$$

$$\max\left\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ \max_{x\in I_1}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\dots,\right.$$
$$\left.\max_{x\in I_{k+1}}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|\right\} \le \|y_1-y_2\|_{B_2}\times$$

$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\right].$$

Домножимо першу нерівність на $\frac{8}{(b-a)^2}$, а другу – на $\frac{2}{b-a}$:

$$\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big|\le\|y_1-y_2\|_{B_2}\times$$
$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\right],$$
$$\frac{2}{b-a}\ \max\Big\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|\Big\}\le$$
$$\le\|y_1-y_2\|_{B_2}\times$$
$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\right],$$
$$\max\Big\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ \max_{x\in I_1}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ldots,$$
$$\max_{x\in I_{k+1}}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|\Big\}\le\|y_1-y_2\|_{B_2}\times$$
$$\times\left[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\right].$$

Враховуючи одержані нерівності, дістаємо

$$\max\Big\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}\Big|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big|,$$

$$\frac{2}{b-a}\ \max\Big\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|,\ \max_{x\in I}\Big|(Ty_1)'(x)-(Ty_2)'(x)\Big|\Big\},$$

$$\max\Big\{\max_{x\in J}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ \max_{x\in I_1}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|,\ldots,$$

$$\max_{x\in I_{k+1}}\Big|(Ty_1)''(x)-(Ty_2)''(x)\Big|\Big\}\Big\}\le\|y_1-y_2\|_{B_2}\times$$

$$\times\Bigg[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\Bigg].$$

Із означення норми простору $B_2(J\cup I)$ маємо:

$$\Big\|(Ty_1)(x)-(Ty_2)(x)\Big\|_{B_2}\le\|y_1-y_2\|_{B_2}\times \tag{4.42}$$

$$\times\Bigg[\frac{(b-a)^2}{8}\sum_{i=0}^{n}\Big(A_i+(b-a)\overline{K}_{i0}\Big)+\frac{b-a}{2}\sum_{i=0}^{n}\Big(B_i+(b-a)\overline{K}_{i1}\Big)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\Big(C_i+(b-a)\overline{K}_{i2}\Big)\Bigg].$$

Нерівність (4.42) та умова 4) забезпечують, що оператор T є стислим у просторі $B_2(J\cup I)$ і має єдину нерухому точку [93]. Тому крайова задача (4.35)-(4.36) має єдиний розв'язок $y(x)\in B_2(J\cup I)$.

Теорему 4.3 доведено. □

4.2.2 Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b\}$ на відрізку $[a;b]$, таку що $E_2\subset\Delta$. Позначимо через $S(x,y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y\,(x)$, який належить простору $B_2(J\cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (4.35)-(4.36) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(0)}\right) = \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$, який задовольняє крайові умови (4.36) при $x = a$ та $x = b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (4.35) та сплайн $S\left(x, y^{(k)}\right)$, знаходимо для $k = 0, 1, \ldots$:

$$M_j^{+(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} \Bigg(a_i(x_j) S\big(x_j - \tau_i(x_j) + 0, y^{(k)}\big) + \tag{4.43}$$

$$+ b_i(x_j) S'\big(x_j - \tau_i(x_j) + 0, y^{(k)}\big) + c_i(x_j) S''\big(x_j - \tau_i(x_j) + 0, y^{(k)}\big) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{2} \int_a^b K_{ip}(x_j, s) S^{(p)}\big(s - \tau_i(s) + 0, y^{(k)}\big) ds \Bigg) + f(x_j),\ j = \overline{0, m-1},$$

$$M_j^{-(k+1)} = \sum_{i=0}^{n} \Bigg(a_i(x_j) S\big(x_j - \tau_i(x_j) - 0, y^{(k)}\big) + \tag{4.44}$$

$$+ b_i(x_j) S'\big(x_j - \tau_i(x_j) - 0, y^{(k)}\big) + c_i(x_j) S''\big(x_j - \tau_i(x_j) - 0, y^{(k)}\big) +$$

$$+ \sum_{p=0}^{2} \int_a^b K_{ip}(x_j, s) S^{(p)}\big(s - \tau_i(s) - 0, y^{(k)}\big) ds \Bigg) + f(x_j),\ j = \overline{1, m}.$$

У співвідношеннях (4.43), (4.44) підставляємо $S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) = \varphi^{(p)}(x)$, $p = 0, 1, 2$ при $x < a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, розв'язуючи систему рівнянь (2.36).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(k+1)}\right)$ у формі (2.33), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j = \overline{0, m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j = \overline{1, m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} \big| a_i(x) \big| + (b-a) \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} \int_a^b \big| K_{i0}(x, s) \big| ds, \tag{4.45}$$

$$\lambda_2 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} \big| b_i(x) \big| + (b-a) \sum_{i=0}^{n} \max_{x \in [a;b]} \int_a^b \big| K_{i1}(x, s) \big| ds,$$

$$\lambda_3 = \sum_{i=0}^{n} \max_{x\in[a;b]} \left|c_i(x)\right| + (b-a) \sum_{i=0}^{n} \max_{x\in[a;b]} \int\limits_a^b \left|K_{i2}(x,s)\right| ds,$$

$$u = \frac{K^5}{8}(b-a)^2 + \frac{H^2}{8},\ v = \frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2H}{3},$$

$$\mu = 5\left(1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H^2 + \lambda_2 H + \lambda_3\right).$$

Теорема 4.4. *Нехай розв'язок крайової задачі* (4.35)-(4.36) *існує та належить простору* $B_2(J \cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta = u\lambda_1 + v\lambda_2 + \lambda_3 < 1 \tag{4.46}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0 < H < H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(x, y^{(k)}\right)\right\}$, $k = 0, 1, \ldots$ *рівномірно збігається на* $[a; b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\left\|\lim_{k\to\infty} S^{(p)}(x, y^{(k)}) - y^{(p)}(x)\right\| \leq R_p \omega\left(y''(x), H\right),\ p = 0, 1, 2, \tag{4.47}$$

$$R_0 = \sup_{H\leq H^*}\left(\frac{u\mu}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2}\right),\ R_1 = \sup_{H\leq H^*}\left(\frac{v\mu}{1-\theta} + 5H\right),$$

$$R_2 = \sup_{H\leq H^*}\left(\frac{\mu}{1-\theta} + 5\right),$$

$$\omega\left(y''(x), H\right) = \max_{1\leq r\leq k+1} \omega_r\left(y''(x), H\right).$$

Доведення. Покажемо, що ряди

$$S^{(p)}\left(x, y^{(0)}\right) + \sum_{i=1}^{\infty}\left[S^{(p)}\left(x, y^{(i)}\right) - S^{(p)}\left(x, y^{(i-1)}\right)\right],\ p = 0, 1, 2$$

рівномірно збігаються на $[a; b]$, і тим самим одержимо рівномірну збіжність послідовностей $S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right)$, $k = 0, 1, \ldots$, $p = 0, 1, 2$.

Визначимо скалярні функції $y(x)$, $M(x)$ на $[a; b]$ і позначимо вектори

$$\overline{y} = \left(y\left(x_1\right), \ldots, y\left(x_{m-1}\right)\right)^T,$$

$$\overline{M} = \Big(M\left(x_0+0\right), M\left(x_1-0\right), M\left(x_1+0\right),\ \ldots, M\left(x_{m-1}-0\right),$$
$$M\left(x_{m-1}+0\right), M\left(x_m-0\right)\Big)^T.$$

Ітераційний алгоритм A)-D) представимо у матричній формі:

$$\overline{y}^{(k+1)} = A^{-1}B\overline{M}^{k+1} + A^{-1}d, \tag{4.48}$$

де компоненти вектора $\overline{M}$ визначені згідно (4.43)-(4.44), а сталий вектор d залежить лише від крайових умов (4.36). Згідно (2.39), матриця A – невироджена, отже побудова ітераційної послідовності кубічних сплайнів $S\left(x, y^{(k)}\right)$, k=$0, 1, \ldots$ можлива.

З (4.48) випливають наступні оцінки:

$$\begin{gathered}\left\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\right\| = \left\|A^{-1}BM^{k+1} - A^{-1}BM^{k}\right\| \leq \\ \leq \left\|A^{-1}\right\| \left\|B\right\| \left\|\overline{M}^{k+1} - \overline{M}^{k}\right\|.\end{gathered} \tag{4.49}$$

Із (4.43)-(4.44) та вигляду правої частини рівняння (4.35) одержуємо нерівності

$$\begin{gathered}\left\|M_j^{+(k+1)} - M_j^{+(k)}\right\| \leq \lambda_1 \max_{x\in[a;b]}\left|S\left(x, y^{(k)}\right) - S\left(x, y^{(k-1)}\right)\right| + \\ +\lambda_2 \max_{x\in[a;b]}\left|S'\left(x, y^{(k)}\right) - S'\left(x, y^{(k-1)}\right)\right| + \\ +\lambda_3 \max_{x\in[a;b]}\left|S''\left(x, y^{(k)}\right) - S''\left(x, y^{(k-1)}\right)\right|, \ j = \overline{0, m-1}, \\ \left\|M_j^{-(k+1)} - M_j^{-(k)}\right\| \leq \lambda_1 \max_{x\in[a;b]}\left|S\left(x, y^{(k)}\right) - S\left(x, y^{(k-1)}\right)\right| + \\ +\lambda_2 \max_{x\in[a;b]}\left|S'\left(x, y^{(k)}\right) - S'\left(x, y^{(k-1)}\right)\right| + \\ +\lambda_3 \max_{x\in[a;b]}\left|S''\left(x, y^{(k)}\right) - S''\left(x, y^{(k-1)}\right)\right|, \ j = \overline{1, m}.\end{gathered} \tag{4.50}$$

Звідси, враховуючи співвідношення (2.39)-(2.43), нерівність (4.49) можна записати наступним чином:

$$\begin{gathered}\left\|y^{(k+1)} - y^{(k)}\right\| \leq \frac{K^5}{8}(b-a)^2\left[\lambda_1\left\|S\left(x, y^{(k)}\right) - S\left(x, y^{(k-1)}\right)\right\| + \right. \\ \left. +\lambda_2\left\|S'\left(x, y^{(k)}\right) - S'\left(x, y^{(k-1)}\right)\right\| + \lambda_3\left\|S''\left(x, y^{(k)}\right) - S''\left(x, y^{(k-1)}\right)\right\|\right].\end{gathered} \tag{4.51}$$

Нехай $x \in [x_{j-1}; x_j]$. Враховуючи (2.33), маємо

$$\left| S\left(x, y^{(k+1)}\right) - S\left(x, y^{(k)}\right) \right| \leq \left| \frac{x_j - x}{6h_j} \right| \left((x_j - x)^2 - h_j^2 \right) + \tag{4.52}$$

$$+ \frac{x - x_{j-1}}{6h_j} \left((x - x_{j-1})^2 - h_j^2 \right) \left\| \overline{M}^{k+1} - \overline{M}^k \right\| +$$

$$+ \left| y_{j-1}^{k+1} - y_j^k \right| \left| \frac{x_j - x}{h_j} \right| + \left| y_j^{k+1} - y_j^k \right| \left| \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \right|.$$

Аналогічно до (3.16) можна показати, що

$$\max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} \left| \frac{x_j - x}{6h_j} \left(h_j^2 - (x_j - x)^2 \right) + \frac{x - x_{j-1}}{6h_j} \left(h_j^2 - (x - x_{j-1})^2 \right) \right| \leq \frac{H^2}{8}. \tag{4.53}$$

Використовуючи (4.50), (4.51), (4.53), з (4.52) маємо

$$\left\| S\left(x, y^{(k+1)}\right) - S\left(x, y^{(k)}\right) \right\| \leq \tag{4.54}$$

$$\leq \frac{H^2}{8} \left\| \overline{M}^{k+1} - \overline{M}^k \right\| + \left\| y^{(k+1)} - y^{(k)} \right\| \leq$$

$$\leq \left(\frac{K^5}{8} (b-a)^2 + \frac{H^2}{8} \right) \left(\lambda_1 \left\| S\left(x, y^{(k)}\right) - S\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\| + \right.$$

$$\left. + \lambda_2 \left\| S'\left(x, y^{(k)}\right) - S'\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\| + \lambda_3 \left\| S''\left(x, y^{(k)}\right) - S''\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\| \right).$$

Згідно вигляду сплайна (2.33), отримуємо

$$\left| S'\left(x, y^{(k+1)}\right) - S'\left(x, y^{(k)}\right) \right| \leq \tag{4.55}$$

$$\leq \left| \frac{h_j}{6} - \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} \right| \left| M_{j-1}^{+(k+1)} - M_{j-1}^{+(k)} \right| +$$

$$+ \left| \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} - \frac{h_j}{6} \right| \left| M_j^{-(k+1)} - M_j^{-(k)} \right| + \frac{1}{h_j} \left| y_j^{k+1} - y_{j-1}^{k+1} - \left(y_j^k - y_{j-1}^k \right) \right|.$$

Очевидно, справджуються нерівності

$$\max_{x \in [x_{j-1}; x_j]} \left(\left| \frac{h_j}{6} - \frac{(x_j - x)^2}{2h_j} \right| + \left| \frac{(x - x_{j-1})^2}{2h_j} - \frac{h_j}{6} \right| \right) \leq \frac{2H}{3}, \tag{4.56}$$

$$\max_{1 < j < n} \left| y_j^{k+1} - y_{j-1}^{k+1} - \left(y_j^k - y_{j-1}^k \right) \right| \leq \frac{K^4}{2} (b-a) H \left\| \overline{M}^{k+1} - \overline{M}^k \right\|. \tag{4.57}$$

Згідно (4.56)-(4.57), з нерівності (4.55) випливає

$$\left\| S'\left(x, y^{(k+1)}\right) - S'\left(x, y^{(k)}\right) \right\| \leq \tag{4.58}$$

$$\leq \left(\frac{K^5}{2}(b-a) + \frac{2}{3}H\right)\left(\lambda_1 \left\| S\left(x, y^{(k)}\right) - S\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\| + \right.$$

$$\left. + \lambda_2 \left\| S'\left(x, y^{(k)}\right) - S'\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\| + \lambda_3 \left\| S''\left(x, y^{(k)}\right) - S''\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\| \right),$$

$$\left\| S''\left(x, y^{(k+1)}\right) - S''\left(x, y^{(k)}\right) \right\| \leq \tag{4.59}$$

$$\leq \lambda_1 \left\| S\left(x, y^{(k)}\right) - S\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\| + \lambda_2 \left\| S'\left(x, y^{(k)}\right) - S'\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\| +$$

$$+ \lambda_3 \left\| S''\left(x, y^{(k)}\right) - S''\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\|.$$

Позначимо

$$d = \lambda_1 \left\| S\left(x, y^{(k)}\right) - S\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\| + \lambda_2 \left\| S'\left(x, y^{(k)}\right) - S'\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\| +$$

$$+ \lambda_3 \left\| S''\left(x, y^{(k)}\right) - S''\left(x, y^{(k-1)}\right) \right\|.$$

Ітеруючи (4.54), (4.58), (4.59) і враховуючи позначення (4.45) та умову (4.46), одержуємо

$$\begin{gathered}
\left\| S\left(x, y^{(k+1)}\right) - S\left(x, y^{(k)}\right) \right\| \leq u\theta^{k-1} d, \\
\left\| S'\left(x, y^{(k+1)}\right) - S'\left(x, y^{(k)}\right) \right\| \leq v\theta^{k-1} d, \\
\left\| S''\left(x, y^{(k+1)}\right) - S''\left(x, y^{(k)}\right) \right\| \leq \theta^{k-1} d.
\end{gathered} \tag{4.60}$$

Співвідношення (4.60) при виконанні умови (4.46) забезпечують збіжність послідовностей сплайнів $\left\{ S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) \right\}$, $k = 0, 1, \ldots$, $p = 0, 1, 2$.

Позначимо

$$\begin{gathered}
\lim_{k \to \infty} S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) = S^{(p)}\left(x, \tilde{y}\right), \ p = 0, 1, \\
\widetilde{M}_j^{+} = S''\left(x_j + 0, \tilde{y}\right), \ j = \overline{0, m-1}, \\
\widetilde{M}_j^{-} = S''\left(x_j - 0, \tilde{y}\right), \ j = \overline{1, m},
\end{gathered}$$

$$\widetilde{y}_j = S\left(x_j, \tilde{y}\right), \ j = \overline{1, m}.$$

При цьому

$$\widetilde{M}_j^+ = \sum_{i=0}^{n} \Bigg(a_i(x_j) S\big(x_j - \tau_i(x_j) + 0, \tilde{y}\big) + b_i(x_j) S'\big(x_j - \tau_i(x_j) + 0, \tilde{y}\big) +$$

$$+ c_i(x_j) S''\big(x_j - \tau_i(x_j) + 0, \tilde{y}\big) + \sum_{p=0}^{2} \int_a^b K_{ip}(x_j, s) S^{(p)}\big(s - \tau_i(s) + 0, \tilde{y}\big) ds \Bigg) +$$

$$+ f(x_j), \ j = \overline{0, m-1},$$

$$\widetilde{M}_j^- = \sum_{i=0}^{n} \Bigg(a_i(x_j) S\big(x_j - \tau_i(x_j) - 0, \tilde{y}\big) + b_i(x_j) S'\big(x_j - \tau_i(x_j) - 0, \tilde{y}\big) +$$

$$+ c_i(x_j) S''\big(x_j - \tau_i(x_j) - 0, \tilde{y}\big) + \sum_{p=0}^{2} \int_a^b K_{ip}(x_j, s) S^{(p)}\big(s - \tau_i(s) - 0, \tilde{y}\big) ds \Bigg) +$$

$$+ f(x_j), \ j = \overline{1, m}.$$

Параметри $\widetilde{M}_j^+$, $\widetilde{M}_j^-$ сплайна $S\left(x, \tilde{y}\right)$ задовольняють систему (2.36) та рівняння (4.43)-(4.44).

Нехай $S\left(x, y\right)$ – кубічний сплайн дефекту 2, який інтерполює розв'язок $y\left(x\right)$ крайової задачі (4.35)-(4.36). Тоді

$$\left\| S^{(p)}\left(x, \tilde{y}\right) - y^{(p)}\left(x\right) \right\| \le \left\| S^{(p)}\left(x, \tilde{y}\right) - S^{(p)}\left(x, y\right) \right\| + \left\| S^{(p)}\left(x, y\right) - y^{(p)}\left(x\right) \right\|,$$

$$p = 0, 1, 2. \tag{4.61}$$

Для другого доданка у правій частині (4.61) справджуються нерівності [94]:

$$\left\| S^{(p)}\left(y, x\right) - y^{(p)}\left(x\right) \right\| \le K_p H^{2-p} \omega\left(y''\left(x\right), H\right), \tag{4.62}$$

$$p = 0, 1, 2, \ K_0 = \frac{5}{2}, \ K_1 = K_2 = 5,$$

де $\omega\left(y''\left(x\right), H\right) = \max\limits_{1 \le r \le k+1} \omega_r\left(y''\left(x\right), H\right)$, $\omega_r\left(y''\left(x\right), H\right)$ – модуль неперервності функції $y''\left(x\right)$ на $I_r = [x_{r-1}; x_r]$.

Для оцінки першого доданка у правій частині (4.61), згідно вигляду правої частини рівняння (4.35), знайдемо допоміжні нерівності:

$$\Bigg|M_j^+ - \sum_{i=0}^{n}\bigg(a_i(x_j)S\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+ \tag{4.63}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+c_i(x_j)S''\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\int\limits_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(s-\tau_i(s),y\big)ds\bigg)-f(x_j)\Bigg| \le \Big|M_j^+ - y''(x_j+0)\Big|+$$

$$+\Bigg|y''(x_j+0)-\sum_{i=0}^{n}\bigg(a_i(x_j)S\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+$$

$$+b_i(x_j)S'\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+c_i(x_j)S''\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\int\limits_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(s-\tau_i(s),y\big)ds\bigg)-f(x_j)\Bigg| =$$

$$=\Big|S''(x_j+0,y)-y''(x_j+0)\Big|+\Bigg|\sum_{i=0}^{n}\bigg(a_i(x_j)y\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+$$

$$+b_i(x_j)y'\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+c_i(x_j)y''\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0)\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\int\limits_a^b K_{ip}(x_j,s)y^{(p)}\big(s-\tau_i(s)\big)ds\bigg)-$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\bigg(a_i(x_j)S\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+b_i(x_j)S'\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+$$

$$+c_i(x_j)S''\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+\sum_{p=0}^{2}\int\limits_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(s-\tau_i(s),y\big)ds\bigg)\Bigg| \le$$

$$\le 5\omega(y''(x),H)+\Bigg|\sum_{i=0}^{n}a_i(x_j)\Big(y(x_j+0-\tau_i(x_j+0))-$$

$$-S(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y)\Big)+\sum_{i=0}^{n}b_i(x_j)\Big(y'(x_j+0-\tau_i(x_j+0))-$$

$$-S'(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y)\Big)+\sum_{i=0}^{n}c_i(x_j)\Big(y''(x_j+0-\tau_i(x_j+0))-$$

$$-S''(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y)\Big)\Bigg|\leq$$

$$\leq 5\omega(y''(x),H)+\frac{5}{2}H^2\omega(y''(x),H)\sum_{i=0}^{n}\Big|a_i(x_j)\Big|+$$

$$+5H\omega(y''(x),H)\sum_{i=0}^{n}\Big|b_i(x_j)\Big|+5\omega(y''(x),H)\sum_{i=0}^{n}\Big|c_i(x_j)\Big|\leq$$

$$\leq 5\omega(y''(x),H)+\lambda_1\frac{5}{2}H^2\omega(y''(x),H)+\lambda_2 5H\omega(y''(x),H)+$$

$$+\lambda_3 5\omega(y''(x),H)=5\left(1+\frac{1}{2}\lambda_1H^2+\lambda_2H+\lambda_3\right)\omega(y''(x),H)=$$

$$=\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{0,m-1}.$$

Аналогічно можна одержати

$$\Bigg|M_j^- -\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(x_j-0-\tau_i(x_j-0),y\big)+ \tag{4.64}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(x_j-0-\tau_i(x_j-0),y\big)+c_i(x_j)S''\big(x_j-0-\tau_i(x_j-0),y\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\int_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(s-\tau_i(s),y\big)ds\Bigg)-f(x_j)\Bigg|\leq$$

$$\leq\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{1,m}.$$

Звідси

$$M_j^+\leq\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+ \tag{4.65}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+c_i(x_j)S''\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\int_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(s-\tau_i(s),y\big)ds\Bigg)+$$

$$+f(x_j)+\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{0,m-1},$$

$$M_j^- \le \sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(x_j-0-\tau_i(x_j-0),y\big)+ \tag{4.66}$$

$$+b_i(x_j)S'\big(x_j-0-\tau_i(x_j-0),y\big)+c_i(x_j)S''\big(x_j-0-\tau_i(x_j-0),y\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\int_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(s-\tau_i(s),y\big)ds\Bigg)+$$

$$+f(x_j)+\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{1,m}.$$

Позначимо

$$\alpha_p=\max_{x\in[a;b]}\left|S^{(p)}(x,\tilde{y})-S^{(p)}(x,y)\right|,\ p=0,1,2,$$

$$\max_j\left|\widetilde{M_j}-M_j\right|=\max\left\{\max_{j=\overline{0,m-1}}\left|\widetilde{M_j^+}-M_j^+\right|,\ \max_{j=\overline{1,m}}\left|\widetilde{M_j^-}-M_j^-\right|\right\}.$$

Враховуючи оцінки (4.65), (4.66), дістаємо:

$$\left|\widetilde{M_j^+}-M_j^+\right|\le\Bigg|\widetilde{M_j^+}-\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+$$

$$+b_i(x_j)S'\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+c_i(x_j)S''\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\int_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(s-\tau_i(s),y\big)ds\Bigg)-f(x_j)\Bigg|+$$

$$+\mu\omega(y''(x),H)=\Bigg|\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),\tilde{y}\big)+$$

$$+b_i(x_j)S'\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),\tilde{y}\big)+c_i(x_j)S''\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),\tilde{y}\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\int_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(s-\tau_i(s),\tilde{y}\big)ds\Bigg)-$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\Bigg(a_i(x_j)S\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+$$

$$+b_i(x_j)S'\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+c_i(x_j)S''\big(x_j+0-\tau_i(x_j+0),y\big)+$$

$$+\sum_{p=0}^{2}\int\limits_a^b K_{ip}(x_j,s)S^{(p)}\big(s-\tau_i(s),y\big)ds\Bigg)\Bigg|+\mu\omega(y''(x),H)\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{n}\Big|a_i(x_j)\Big|\alpha_0+\sum_{i=0}^{n}\Big|b_i(x_j)\Big|\alpha_1+\sum_{i=0}^{n}\Big|c_i(x_j)\Big|\alpha_2+\mu\omega(y''(x),H)\le$$

$$\le\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\lambda_3\alpha_2+\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{0,m-1}. \tag{4.67}$$

Аналогічно,

$$\Big|\widetilde{M_j^-}-M_j^-\Big|\le\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\lambda_3\alpha_2+\mu\omega(y''(x),H),\ j=\overline{1,m}. \tag{4.68}$$

Нескладно показати, що має місце оцінка

$$|\tilde{y}_j-y_j|\le\frac{K^5}{8}(b-a)^2\max\Bigg\{\max_{j=\overline{0,m-1}}|\widetilde{M_j^+}-M_j^+|,\ \max_{j=\overline{1,m}}|\widetilde{M_j^-}-M_j^-|\Bigg\}. \tag{4.69}$$

Використовуючи формули для $S\left(x,\tilde{y}\right)$, $S\left(x,y\right)$ та нерівності (4.67)-(4.69), отримуємо наступну систему нерівностей:

$$\begin{aligned}\alpha_0&\le u\Big(\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\lambda_3\alpha_2+\mu\omega\left(y''(x),H\right)\Big),\\ \alpha_1&\le v\Big(\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\lambda_3\alpha_2+\mu\omega\left(y''(x),H\right)\Big),\\ \alpha_2&\le\lambda_1\alpha_0+\lambda_2\alpha_1+\lambda_3\alpha_2+\mu\omega\left(y''(x),H\right).\end{aligned} \tag{4.70}$$

Розв'язуючи систему (4.2.2), знаходимо оцінки для перших доданків у правій частині (4.61):

$$\alpha_0\le\frac{u\mu\omega(y''(x),H)}{1-\theta},$$
$$\alpha_1\le\frac{v\mu\omega(y''(x),H)}{1-\theta},$$
$$\alpha_2\le\frac{\mu\omega(y''(x),H)}{1-\theta}.$$

Тепер, враховуючи (4.62), нерівності (4.61) можна записати у вигляді (4.47).

Теорему 4.4 доведено. □

4.3 Нелінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням

4.3.1 Постановка задачі. Існування розв'язку

Введемо позначення

$$[y(x)] = \Big(y\big(x-\tau_0(x)\big), \dots, y\big(x-\tau_n(x)\big)\Big), \tag{4.71}$$
$$[y(x)]_1 = \Big(y'\big(x-\tau_0(x)\big), \dots, y'\big(x-\tau_n(x)\big)\Big).$$

Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1\big) + \int\limits_a^b g\big(x, s, [y(s)], [y(s)]_1\big)ds,\ x \in [a; b], \tag{4.72}$$

$$y^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(x),\ p = 0, 1,\ x \in [a^*; a],\ y(b) = \gamma, \tag{4.73}$$

де запізнення $\tau_0(x) = 0$, а $\tau_i(x),\ i = \overline{1, n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a, b]$, $\varphi(x)$ – задана неперервно-диференційовна функція на $[a^*; a]$, $\gamma \in R$,

$$a^* = \min_{0 < i \le n}\Big\{\inf_{x \in [a;b]}(x - \tau_i(x))\Big\}.$$

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x), \dots, \tau_n(x)$:

$$E_i = \big\{x_j \in [a, b] :\ x_j - \tau_i(x_j) = a,\ j = 1, 2, \dots\big\},$$
$$E = \bigcup_{i=1}^n E_i.$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x),\ i = \overline{1, n}$ – такі функції, що множини E_i, $i = \overline{1, n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$P = \sup\Bigg\{\Big|f\big(x, [y(x)], [y(x)]_1\big)\Big| + \Bigg|\int\limits_a^b g\big(x, s, [y(s)], [y(s)]_1\big)ds\Bigg| :$$

$$\left|y\big(x-\tau_i(x)\big)\right| \le P_1,\ \left|y'\big(x-\tau_i(x)\big)\right| \le P_2,\ i=\overline{0,n},\ x,s\in[a;b]\Big\},$$

$$J=[a^*;a]\,,\ I=[a,b]\,,$$

$$I_1=[a,x_1]\,,\ I_2=[x_1,x_2]\,,\ \ldots,\ I_k=[x_{k-1},x_k]\,,\ I_{k+1}=[x_k,b]\,,$$

$$B\left(J\cup I\right)=\Bigg\{y\left(x\right):y\left(x\right)\in\Bigg(C(J\cup I)\cap\Big(C^1(J)\cup C^1(I)\Big)\cap$$

$$\cap\Bigg(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2\left(I_j\right)\Bigg)\Bigg),\left|y\left(x\right)\right|\le P_1,\ \left|y'(x)\right|\le P_2\Bigg\},$$

де P_1, P_2 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (4.72)-(4.73) вважатимемо функцію $y=y\left(x\right)$, якщо вона задовольняє рівняння (4.72) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E) і крайові умови (4.73). Будемо шукати розв'язок задачі (4.72)-(4.73), який належить простору $B(J\cup I)$.

Із означення простору $B(J\cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (4.72)-(4.73) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x\in[a;b]$, де $y'\left(a\right)$ – права похідна.

Введемо норму в просторі $B(J\cup I)$:

$$\left\|y\right\|_B=\max\left\{\frac{8}{\left(b-a\right)^2}\max_{x\in J\cup I}\left|y\left(x\right)\right|,\frac{2}{b-a}\max\left(\max_{x\in J}\left|y'\left(x\right)\right|,\max_{x\in I}\left|y'\left(x\right)\right|\right)\right\}.$$

Простір $B(J\cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (4.72)-(4.73) еквівалентна інтегральному рівнянню [55, 58]

$$y\left(x\right)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1\big)+\int\limits_{a}^{b}g\big(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1\big)d\xi\Big]\times$$

$$\times\overline{G}\left(x,s\right)ds+l\left(x\right),\ x\in J\cup I,\tag{4.74}$$

$$\overline{G}\left(x,s\right)=\begin{cases}G\left(x,s\right), & x,s\in I,\\ 0, & \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

$$l(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\in J,\\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a)+\varphi(a), & x\in I,\end{cases}$$

де $G(x,s)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''(x)=0,\ x\in I,\ y(a)=y(b)=0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B_2(J\cup I)$ наступним чином

$$(Ty)(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1\big)+$$

$$+\int\limits_{a}^{b}g\big(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1\big)d\xi\Big]\,\overline{G}(x,s)\,ds+l(x),\ x\in J\cup I.$$

Звідси

$$(Ty)'(x)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1\big)+ \tag{4.75}$$

$$+\int\limits_{a}^{b}g\big(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1\big)d\xi\Big]\,\overline{G}'_x(x,s)\,ds+\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a},\ x\in J\cup I.$$

Нехай функція $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)$ – неперервна у $G=[a;b]\times G_1^{n+1}\times G_2^{n+1}$, а $g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1\big)$ – неперервна у $Q=[a;b]\times G$, де $G_1=\big\{u\ \in R:\ |u|<P_1\big\}$, $G_2=\big\{v\ \in R:\ |v|\le P_2\big\}$, P_1,P_2 – додатні сталі, що входять в означення простору $B(J\cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.5. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi(x)|,\ \frac{(b-a)^2}{8}P+\max\Big\{|\varphi(a)|,\ |\gamma|\Big\}\right\}\le P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'(x)|,\ \frac{b-a}{2}P+\left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\le P_2,$

3) функції $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1\big)$ і $g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1\big)$ задовольняють умову Ліпшиця у G за змінними $[y(x)],[y(x)]_1$ зі сталими L_i^1 та L_i^2, $i=\overline{0,2n+1}$, відповідно,

4) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n}\Big(L_i^1+(b-a)L_i^2\Big)+\frac{b-a}{2}\sum\limits_{i=n+1}^{2n+1}\Big(L_i^1+(b-a)L_i^2\Big)<1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.72)-(4.73) *у просторі* $B(J\cup I)$.

Доведення проводиться аналогічно до теореми 4.1.

4.3.2 Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b\}$ на відрізку $[a;b]$, таку що $E\subset\Delta$. Позначимо через $S(x,y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y\,(x)$, який належить простору $B(J\cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (4.72)-(4.73) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(x,y^{(0)}\right)=\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\,(x-a)+\varphi\,(a)$, який задовольняє крайові умови (4.73) при $x=a$ та $x=b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (4.72) та сплайн $S\left(x,y^{(k)}\right)$, знаходимо для $k=0,1,\ldots$:

$$M_j^{+(k+1)}=f\big(x_j,[S(x_j+0,y^{(k)})],[S(x_j+0,y^{(k)})]_1\big)+$$
$$+\int\limits_a^b g\big(x_j,s,[S(s,y^{(k)})],[S(s+0,y^{(k)})]_1\big)ds,$$
$$j=\overline{0,m-1}, \tag{4.76}$$
$$M_j^{-(k+1)}=f\big(x_j,[S(x_j-0,y^{(k)})],[S(x_j-0,y^{(k)})]_1\big),$$
$$+\int\limits_a^b g\big(x_j,s,[S(s,y^{(k)})],[S(s-0,y^{(k)})]_1\big)ds,$$

$$j=\overline{1,m}. \tag{4.77}$$

У співвідношеннях (4.76), (4.77) підставляємо $S^{(p)}\left(x,y^{(k)}\right)=\varphi^{(p)}(x)$, $p=0,1$ при $x<a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,m}$, розв'язуючи систему рівнянь (2.36).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x,y^{(k+1)}\right)$ у формі (2.33), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j=\overline{0,m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j=\overline{0,m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j=\overline{1,m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\begin{gathered}\lambda_1=\sum_{i=0}^{n}\big(L_i^1+(b-a)L_i^2\big),\ \lambda_2=\sum_{i=n+1}^{2n+1}\big(L_i^1+(b-a)L_i^2\big),\\ u=\frac{K^5}{8}(b-a)^2+\frac{H^2}{8},\ v=\frac{K^5}{2}(b-a)+\frac{2H}{3},\\ \mu=5\left(1+\frac{1}{2}\lambda_1H^2+\lambda_2H\right).\end{gathered} \tag{4.78}$$

Теорема 4.6. *Нехай розв'язок крайової задачі* (4.72)-(4.73) *існує та належить простору* $B(J\cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta=u\lambda_1+v\lambda_2<1 \tag{4.79}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0<H<H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(x,y^{(k)}\right)\right\}$, $k=0,1,\ldots$ *рівномірно збігається на* $[a;b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\begin{gathered}\left\|\lim_{k\to\infty}S^{(p)}(x,y^{(k)})-y^{(p)}\left(x\right)\right\|\le R_p\omega\left(y''\left(x\right),H\right),\ p=0,1, \\ R_0=\sup_{H\le H^*}\left(\frac{u\mu}{1-\theta}+\frac{5H^2}{2}\right),\ R_1=\sup_{H\le H^*}\left(\frac{v\mu}{1-\theta}+5H\right),\\ \omega\left(y''\left(x\right),H\right)=\max_{1\le r\le l+1}\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right),\end{gathered} \tag{4.80}$$

де $\omega_r(f,H)$ *– це модуль неперервності функції* f *на відрізку* δ_r.

Доведення проводиться аналогічно до теореми 4.2.

4.4 Нелінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу

4.4.1 Постановка задачі. Існування розв'язку

Введемо позначення

$$
\begin{aligned}
[y(x)] &= \Big(y\big(x-\tau_0(x)\big),\dots,y\big(x-\tau_n(x)\big)\Big),\\
[y(x)]_1 &= \Big(y'\big(x-\tau_0(x)\big),\dots,y'\big(x-\tau_n(x)\big)\Big),\\
[y(x)]_2 &= \Big(y''\big(x-\tau_0(x)\big),\dots,y''\big(x-\tau_n(x)\big)\Big).
\end{aligned}
\tag{4.81}
$$

Розглянемо крайову задачу

$$
y''(x) = f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)+ \tag{4.82}
$$

$$
+\int\limits_a^b g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)ds,\ x\in[a;b],
$$

$$
y^{(p)}(x)=\varphi^{(p)}(x)\,,\ p=0,1,2,\ x\in[a^*;a]\,,\ y(b)=\gamma, \tag{4.83}
$$

де запізнення $\tau_0(x)=0$, а $\tau_i(x)\,,\ i=\overline{1,n}$ – неперервні невід'ємні функції, визначені на $[a,b]$, $\varphi(x)$ – задана двічі неперервно-диференційовна функція на $[a^*;a]$, $\gamma\in R$,

$$
a^*=\min_{0<i\le n}\left\{\inf_{x\in[a;b]}\left(x-\tau_i(x)\right)\right\}.
$$

Введемо множини точок, що визначаються запізненнями $\tau_1(x)\,,\dots,\tau_n(x)$:

$$
E_{i1}=\big\{x_j\in[a,b]:\ x_j-\tau_i(x_j)=a,\ j=1,2,\dots\big\},
$$

$$
E_{i2}=\big\{x_j\in[a,b]:\ x_0=a,\ x_{j+1}-\tau_i(x_{j+1})=x_j,\ j=0,1,2,\dots\big\},
$$

$$
E_2=\bigcup_{i=1}^n\big(E_{i1}\cup E_{i2}\big).
$$

Припустимо, що запізнення $\tau_i(x)\,,\ i=\overline{1,n}$ – такі функції, що множини E_{i1},E_{i2}, $i=\overline{1,n}$ є скінченними. Занумеруємо точки множини E_2 в порядку зростання.

Введемо позначення:

$$P=\sup\Bigg\{\Big|f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)\Big|+\Bigg|\int\limits_a^b g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)ds\Bigg|:$$

$$\Big|y\big(x-\tau_i(x)\big)\Big|\le P_1,\ \Big|y'\big(x-\tau_i(x)\big)\Big|\le P_2,$$

$$\Big|y''\big(x-\tau_i(x)\big)\Big|\le P_3,\ i=\overline{0,n},\ x,s\in[a;b]\Bigg\},$$

$$J=[a^*;a]\,,\ I=[a,b]\,,$$

$$I_1=[a,x_1]\,,\ I_2=[x_1,x_2]\,,\ \ldots,\ I_k=[x_{k-1},x_k]\,,\ I_{k+1}=[x_k,b]\,,$$

$$B_2\left(J\cup I\right)=\Bigg\{y\left(x\right):y\left(x\right)\in\Bigg(C(J\cup I)\cap\Big(C^1(J)\cup C^1(I)\Big)\cap$$

$$\cap\Bigg(\bigcup_{j=1}^{k+1}C^2\left(I_j\right)\Bigg)\Bigg),\ |y(x)|\le P_1,\ |y'(x)|\le P_2,\ |y''(x)|\le P_3\Bigg\},$$

де P_1,P_2,P_3 – додатні сталі.

Розв'язком крайової задачі (4.82)-(4.83) вважатимемо функцію $y=y\left(x\right)$, якщо вона задовольняє рівняння (4.82) на $[a;b]$ (за можливим винятком точок множини E_2) і крайові умови (4.83). Будемо шукати розв'язок задачі (4.82)-(4.83), який належить простору $B_2(J\cup I)$.

Із означення простору $B_2(J\cup I)$ випливає, що розв'язок задачі (4.82)-(4.83) буде неперевно-диференційовним для будь-якого $x\in[a,b]$, де $y'\left(a\right)$ – права похідна, а в точках множини E_2 існують скінченні односторонні другі похідні розв'язку, які можуть не співпадати.

Введемо норму в просторі $B_2(J\cup I)$:

$$\|y\|_{B_2}=\max\Bigg\{\frac{8}{(b-a)^2}\max_{x\in J\cup I}|y(x)|,\ \frac{2}{b-a}\max\Big(\max_{x\in J}|y'(x)|,\ \max_{x\in I}|y'(x)|\Big),$$

$$\max\Big(\max_{x\in J}|y''(x)|,\ \max_{x\in I_1}|y''(x)|,\ \ldots,\ \max_{x\in I_{k+1}}|y''(x)|\Big)\Bigg\}.$$

Простір $B_2(J\cup I)$ із цією нормою є банаховим простором.

Крайова задача (4.82)-(4.83) еквівалентна інтегральному рівнянню [55, 58]

$$y\left(x\right)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)+\int\limits_{a}^{b}g\big(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1,[y(\xi)]_2\big)d\xi\Big]\times$$

$$\times\overline{G}\left(x,s\right)ds+l\left(x\right),\ x\in J\cup I, \tag{4.84}$$

$$\overline{G}\left(x,s\right)=\begin{cases}G\left(x,s\right), & x,s\in I,\\ 0, & \text{в іншому випадку},\end{cases}$$

$$l\left(x\right)=\begin{cases}\varphi\left(x\right), & x\in J,\\ \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\left(x-a\right)+\varphi\left(a\right), & x\in I,\end{cases}$$

де $G\left(x,s\right)$ – функція Гріна крайової задачі

$$y''\left(x\right)=0,\ x\in I,\ y\left(a\right)=y\left(b\right)=0.$$

Визначимо оператор T у просторі $B_2(J\cup I)$ наступним чином

$$\left(Ty\right)\left(x\right)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)+$$

$$+\int\limits_{a}^{b}g\big(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1,[y(\xi)]_2\big)d\xi\Big]\,\overline{G}\left(x,s\right)ds+l\left(x\right),\ x\in J\cup I.$$

Звідси

$$\left(Ty\right)'\left(x\right)=\int\limits_{a^*}^{b}\Big[f\big(s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)+ \tag{4.85}$$

$$+\int\limits_{a}^{b}g\big(s,\xi,[y(\xi)],[y(\xi)]_1,[y(\xi)]_2\big)d\xi\Big]\,\overline{G}'_x\left(x,s\right)ds+\frac{\gamma-\varphi\left(a\right)}{b-a},$$

$$x\in J\cup I.$$

$$\left(Ty\right)''\left(x\right)=f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)+ \tag{4.86}$$

$$+\int\limits_a^b g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)ds,\ x\in J\cup I.$$

Нехай функція $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)$ – неперервна у $G=[a;b]\times G_1^{n+1}\times G_2^{n+1}\times G_3^{n+1}$, а $g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)$ – неперервна у $Q=[a;b]\times G$, де $G_1=\big\{u\ \in R:\ |u|<P_1\big\}$, $G_2=\big\{v\ \in R:\ |v|\leq P_2\big\}$, $G_3=\big\{w\ \in R:\ |w|\leq P_3\big\}$, P_1,P_2,P_3 – додатні сталі, що входять в означення простору $B_2(J\cup I)$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови:*

1) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi(x)|,\ \frac{(b-a)^2}{8}P+\max\Big\{|\varphi(a)|,\ |\gamma|\Big\}\right\}\leq P_1,$

2) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi'(x)|,\ \frac{b-a}{2}P+\left|\frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}\right|\right\}\leq P_2,$

3) $\max\left\{\max\limits_{x\in J}|\varphi''(x)|,\ P\right\}\leq P_3,$

4) функції $f\big(x,[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2\big)$ *і* $g\big(x,s,[y(s)],[y(s)]_1,[y(s)]_2\big)$ *задовольняють умову Ліпшиця у* G *за змінними* $[y(x)],[y(x)]_1,[y(x)]_2$ *зі сталими* L_i^1 *та* L_i^2, $i=\overline{0,3n+2}$, *відповідно,*

5) $\frac{(b-a)^2}{8}\sum\limits_{i=0}^{n}\Big(L_i^1+(b-a)L_i^2\Big)+\frac{b-a}{2}\sum\limits_{i=n+1}^{2n+1}\Big(L_i^1+(b-a)L_i^2\Big)+\sum\limits_{i=2n+2}^{3n+2}\Big(L_i^1+(b-a)L_i^2\Big)<1.$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.82)-(4.83) *у просторі* $B_2(J\cup I)$.

Доведення проводиться аналогічно до теореми 3.7.

4.4.2 Обчислювальна схема. Збіжність ітераційного процесу

Виберемо нерівномірну сітку $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b\}$ на відрізку $[a;b]$, таку що $E_2\subset\Delta$. Позначимо через $S(x,y)$ інтерполяційний кубічний сплайн дефекту два на Δ для функції $y\,(x)$, який належить простору

$B_2(J \cup I)$. Будемо шукати розв'язок крайової задачі (4.82)-(4.83) у вигляді послідовності кубічних сплайнів дефекту 2 за наступною схемою:

A) Виберемо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(0)}\right) = \frac{\gamma-\varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$, який задовольняє крайові умови (4.83) при $x = a$ та $x = b$.

B) Використовуючи вихідне рівняння (4.82) та сплайн $S\left(x, y^{(k)}\right)$, знаходимо для $k = 0, 1, \ldots$:

$$M_j^{+(k+1)} = f\big(x_j, [S(x_j+0, y^{(k)})], [S(x_j+0, y^{(k)})]_1, [S(x_j+0, y^{(k)})]_2\big) + \\ + \int_a^b g\big(x_j, s, [S(s, y^{(k)})], [S(s+0, y^{(k)})]_1, [S(s+0, y^{(k)})]_2\big) ds, \\ j = \overline{0, m-1}, \tag{4.87}$$

$$M_j^{-(k+1)} = f\big(x_j, [S(x_j-0, y^{(k)})], [S(x_j-0, y^{(k)})]_1, [S(x_j-0, y^{(k)})]_2\big), \\ + \int_a^b g\big(x_j, s, [S(s, y^{(k)})], [S(s-0, y^{(k)})]_1, [S(s-0, y^{(k)})]_2\big) ds, \\ j = \overline{1, m}. \tag{4.88}$$

У співвідношеннях (4.87), (4.88) підставляємо $S^{(p)}\left(x, y^{(k)}\right) = \varphi^{(p)}(x)$, $p = 0, 1, 2$ при $x < a$.

C) Обчислюємо $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, розв'язуючи систему рівнянь (2.36).

D) Одержуємо кубічний сплайн $S\left(x, y^{(k+1)}\right)$ у формі (2.33), використовуючи знайдені значення $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, m}$, $M_j^{+(k+1)}$, $j = \overline{0, m-1}$, $M_j^{-(k+1)}$, $j = \overline{1, m}$. Цей сплайн виступає в якості наступного наближення.

Введемо позначення:

$$\lambda_1 = \sum_{i=0}^{n} \big(L_i^1 + (b-a) L_i^2\big), \tag{4.89}$$

$$\lambda_2=\sum_{i=n+1}^{2n+1}\left(L_i^1+(b-a)L_i^2\right),\ \lambda_3=\sum_{i=2n+2}^{3n+2}\left(L_i^1+(b-a)L_i^2\right),$$
$$u=\frac{K^5}{8}(b-a)^2+\frac{H^2}{8},\ v=\frac{K^5}{2}(b-a)+\frac{2H}{3},$$
$$\mu=5\left(1+\frac{1}{2}\lambda_1H^2+\lambda_2H+\lambda_3\right).$$

Теорема 4.8. *Нехай розв'язок крайової задачі* (4.82)-(4.83) *існує та належить простору* $B_2(J\cup I)$. *Тоді при виконанні нерівності*

$$\theta=u\lambda_1+v\lambda_2+\lambda_3<1 \tag{4.90}$$

існує таке H^*, *що при всіх* $0<H<H^*$ *послідовність сплайнів* $\left\{S\left(x,y^{(k)}\right)\right\}$, $k=0,1,\dots$ *рівномірно збігається на* $[a;b]$ *і справджуються співвідношення*

$$\left\|\lim_{k\to\infty}S^{(p)}(x,y^{(k)})-y^{(p)}\left(x\right)\right\|\le R_p\omega\left(y''\left(x\right),H\right),\ p=0,1,2, \tag{4.91}$$
$$R_0=\sup_{H\le H^*}\left(\frac{u\mu}{1-\theta}+\frac{5H^2}{2}\right),\ R_1=\sup_{H\le H^*}\left(\frac{v\mu}{1-\theta}+5H\right),$$
$$R_2=\sup_{H\le H^*}\left(\frac{\mu}{1-\theta}+5\right),$$
$$\omega\left(y''\left(x\right),H\right)=\max_{1\le r\le l+1}\omega_r\left(y''\left(x\right),H\right),$$

де $\omega_r(f,H)$ *– це модуль неперервності функції* f *на відрізку* δ_r.

Доведення проводиться аналогічно до теореми 4.4.

4.5 Висновки до розділу 4

У даному розділі досліджуються лінійні та нелінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із аргументом, що відхиляється. Як і в попередньому розділі, методом стислих відображень встановлено достатні умови існування розв'язку таких задач, побудовано та обґрунтовано ітераційні схеми знаходження розв'язку цих задач за допомогою апроксимації кубічними сплайнами дефекту два. Для практичної реалізації наведених ітераційних схем інтегральні доданки обчислюються за допомогою квадратурних формул. Встановлено коефіцієнтні умови, що забезпечують збіжність ітераційного процесу.

Зокрема, у підрозділі 4.1 розглянуто лінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням, у підрозділі 4.2 – лінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу.

Підрозділ 4.3 охоплює нелінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням, а підрозділ 4.4 – нелінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу.

Розділ 5

Числові експерименти

5.1 Опис розробленого програмного забезпечення

Для моделювання крайових задач для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типів було розроблено кросплатформенне програмне забезпечення засобами мови JavaScript із використанням технології NodeJS та фреймворку NW.js, який дає змогу надати програмі зручний користувацький інтерфейс для введення параметрів різного типу.

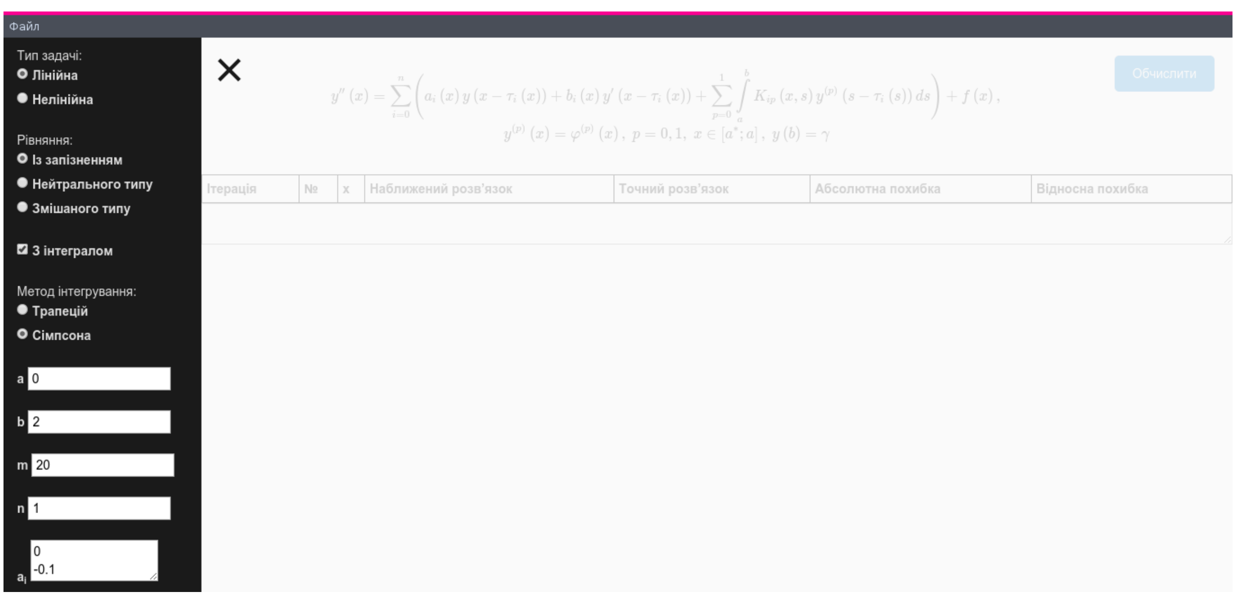
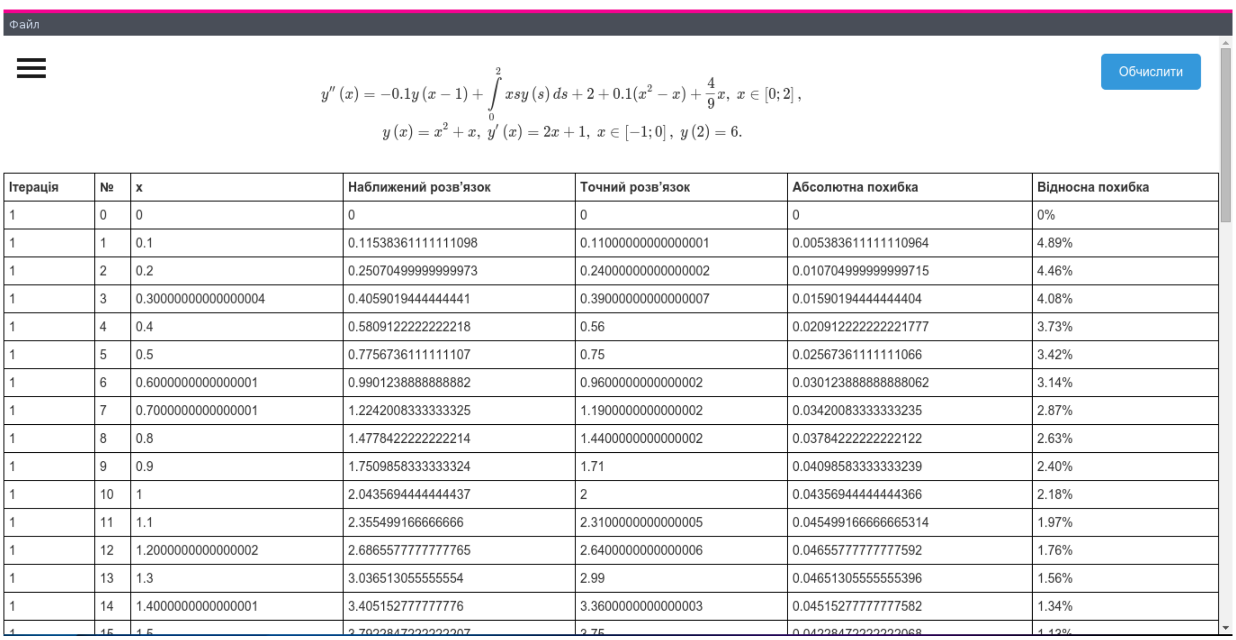


Рис. 5.1: Вигляд вікна програми

У боковій частині вікна програми задаються параметри крайової задачі, а саме початок a та кінець відрізка b, кількість точок розбиття m, коефіцієнти рівняння a_i, b_i, c_i, запізнення τ_i $(i = \overline{0, n})$, точність обчислення ε. Крім цього, якщо точок розбиття багато, можна вивести лише деякі з них, а не всі, наприклад, кожну другу чи десяту. Якщо точний розв'язок рівняння невідомий, можна вимкнути прапорець "Показувати точний розв'язок". За наявності інтегрального доданка у рівнянні користувач може обрати метод його обчислення – трапецій або Сімпсона. Математичний вигляд крайової задачі відображається у верхній частині вікна.

Увівши всі параметри, користувач натискає кнопку "Обчислити", щоб побачити результат.



$$y''(x) = -0.1y(x-1) + \int_0^2 xsy(s)\,ds + 2 + 0.1(x^2 - x) + \frac{4}{9}x,\ x \in [0;2],$$
$$y(x) = x^2 + x,\ y'(x) = 2x+1,\ x \in [-1;0],\ y(2) = 6.$$

Ітерація	№	x	Наближений розв'язок	Точний розв'язок	Абсолютна похибка	Відносна похибка
1	0	0	0	0	0	0%
1	1	0.1	0.11538361111111098	0.11000000000000001	0.005383611111110964	4.89%
1	2	0.2	0.25070499999999973	0.24000000000000002	0.010704999999999715	4.46%
1	3	0.30000000000000004	0.4059019444444441	0.39000000000000007	0.01590194444444404	4.08%
1	4	0.4	0.5809122222222218	0.56	0.020912222222221777	3.73%
1	5	0.5	0.7756736111111107	0.75	0.02567361111111066	3.42%
1	6	0.6000000000000001	0.9901238888888882	0.9600000000000002	0.030123888888888062	3.14%
1	7	0.7000000000000001	1.2242008333333325	1.1900000000000002	0.03420083333333235	2.87%
1	8	0.8	1.4778422222222214	1.4400000000000002	0.03784222222222122	2.63%
1	9	0.9	1.7509858333333324	1.71	0.04098583333333239	2.40%
1	10	1	2.0435694444444437	2	0.04356944444444366	2.18%
1	11	1.1	2.355499166666666	2.3100000000000005	0.045499166666665314	1.97%
1	12	1.2000000000000002	2.6865577777777765	2.6400000000000006	0.04655777777777592	1.76%
1	13	1.3	3.036513055555554	2.99	0.04651305555555396	1.56%
1	14	1.4000000000000001	3.405152777777776	3.3600000000000003	0.04515277777777582	1.34%
1	15	1.5	3.7922847222222207	3.75	0.04228472222222068	1.13%

Рис. 5.2: Вивід результатів програми

Програма виводить на екран усі ітерації обчислювальної схеми. Досягнувши потрібної точності, вона зупиниться. У таблиці з'явиться наступна інформація: номер ітерації, номер кожної точки відрізка, значення x та наближений розв'язок. Якщо задано точний розв'язок, то він теж з'явиться разом з абсолютною та відносною похибкою між точним і наближеним розв'язками.

3	0	0	0	0	0	0%
3	1	0.1	0.11072926379416059	0.11000000000000001	0.0007292637941605784	0.66%
3	2	0.2	0.24139630536609896	0.24000000000000002	0.0013963053660989433	0.58%
3	3	0.30000000000000004	0.3919389024935929	0.39000000000000007	0.0019389024935928534	0.50%
3	4	0.4	0.5622948329544203	0.56	0.002294832954420234	0.41%
3	5	0.5	0.7524018745263586	0.75	0.0024018745263586494	0.32%
3	6	0.6000000000000001	0.9621978049871859	0.9600000000000002	0.002197804987185692	0.23%
3	7	0.7000000000000001	1.1916204021146797	1.1900000000000002	0.001620402114679509	0.14%
3	8	0.8	1.440607443686618	1.4400000000000002	0.0006074436866179145	0.04%
3	9	0.9	1.7090967074807788	1.71	0.000903292519221166	0.05%
3	10	1	1.997441746484939	2	0.002558253515061004	0.13%
3	11	1.1	2.3060553532530794	2.3100000000000005	0.003944646746921077	0.17%
3	12	1.2000000000000002	2.634963626095624	2.6400000000000006	0.00503637390437639	0.19%
3	13	1.3	2.984192568679908	2.99	0.005807431320092427	0.19%
3	14	1.4000000000000001	3.3537683092092485	3.3600000000000003	0.006231690790751809	0.19%
3	15	1.5	3.7437171626656687	3.75	0.006282837334331326	0.17%
3	16	1.6	4.154065693054614	4.16	0.005934306945386325	0.14%
3	17	1.7000000000000002	4.584840775651658	4.590000000000001	0.005159224348342484	0.11%
3	18	1.8	5.036069659251209	5.04	0.003930340748791394	0.08%
3	19	1.9000000000000001	5.507780028417188	5.510000000000001	0.0022199715828126187	0.04%
3	20	2	6	6	0	0.00%

Рис. 5.3: Вивід останньої ітерації

Якщо потрібно працювати з кількома різними прикладами, їх можна зберігати в XML-файлах за допомогою пункту меню “Файл”, “Зберегти”, а потім відкрити заново, використовуючи пункт меню “Файл”, “Відкрити”.

5.2 Модельні приклади. Аналіз результатів

5.2.1 Лінійні рівняння із запізненням та нейтрального типу

Приклад 5.1. Розглянемо крайову задачу:

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) + xy(x - \frac{x}{2}) - x^2 + 8 = 0,\ x \in [1; 2],$$

$$y(x) = 2x,\ x \in [0,5; 1],$$

$$y(2) = 5e^2 - 2.$$

Точний розв’язок $y(x)$ було знайдено методом кроків:

$$y(x) = e^{2x-2}(3 + x) - 2.$$

Для неї виконуються умови теореми про існування та єдиність розв’язку, а також про збіжність ітераційної схеми. Наближений розв’язок $y_S^{40}(x)$ одержано на 9-й ітерації при 40 точках розбиття відрізка.

x	$y(x)$	$y_S^{40}(x)$	Δ_S^{40}
1.25	5.007065	5.011534	0.004469
1.5	10.232268	10.241768	0.00951
1.75	19.288023	19.296065	0.008042

Табл. 5.1

Приклад 5.2. Розглянемо крайову задачу для рівняння нейтрального типу:

$$y''(x) = \frac{1}{4}y''(x-1) + 1,\ x \in [0;2],$$
$$y(x) = x,\ y'(x) = 1,\ y''(x) = 0,\ x \in [-1;0],$$
$$y(2) = \frac{5}{2}.$$

Точний розв'язок $y(x)$ було знайдено методом кроків. Наближений розв'язок $y_S^{20}(x)$ та $y_S^{40}(x)$ одержано на 2-й ітерації при 20 та 40 точках розбиття відрізка відповідно.

x	$y(x)$	$y_S^{20}(x)$	Δ_S^{20}	$y_S^{40}(x)$	Δ_S^{40}
0.5	0.21875	0.21552	0.00323	0.21716	0.00159
1	0.6875	0.68146	0.00604	0.68443	0.00307
1.5	1.4375	1.43448	0.00302	1.43596	0.00154

Табл. 5.2

5.2.2 Інтегро-диференціальні рівняння із запізненням

Приклад 5.3. Розглянемо крайову задачу:

$$y''(x) + 0.1y(x-1) + \frac{1}{15}\int\limits_0^2 xsy(s)ds = 2 + 0.1(x^2 - x) + \frac{4}{9}x,\ x \in [0;2],$$
$$y(x) = x^2 + x,\ x \in [-1;0],\ y(2) = 6.$$

Точний розв'язок $y(x)$ було знайдено методом кроків:

$$y(x) = x^2 + x.$$

Наближений розв'язок $y_S^{80}(x)$ одержано на 3-й ітерації при 80 точках розбиття відрізка.

x	$y(x)$	$y_S^{80}(x)$	Δ_S^{80}
0.5	0.75	0.75345	0.00345
1	2	2.00553	0.00553
1.5	3.75	3.75487	0.00487

Табл. 5.3

Приклад 5.4. Розглянемо крайову задачу:

$$y''(x) = -\alpha y'\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) dt + \cos x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right],$$

$$y(x) = \sin x + 1,\ y'(x) = \cos x,\ x \leq 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.25.$$

При $\alpha = 0.25$ виконується умова теореми, оскільки $\theta \approx 0.695 < 1$. Точний розв'язок даної крайової задачі $y(x)$ було знайдено методом кроків:

$$y(x) = 0.25 \sin x - \cos x + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{4}\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)x + 2.$$

Наближений розв'язок $y_S^{20}(x)$ одержано на 2-й ітерації при 20 точках розбиття відрізка.

5.2.3 Нелінійна крайова задача із запізненням

Приклад 5.5. Розглянемо крайову задачу:

$$y''(x) = -\frac{1}{16}\sin y(x) - (x+1)y(x-1) + x,\ x \in [0; 2],$$

$$y(x) = x - \frac{1}{2},\ x \in [-1; 0],\ y(2) = -\frac{1}{2}.$$

x	$y(x)$	$y_S^{20}(x)$	Δ_S^{20}
$\frac{\pi}{8}$	1.03976	1.03971	0.00005
$\frac{\pi}{4}$	1.29362	1.29354	0.00008
$\frac{3\pi}{8}$	1.71625	1.71618	0.00007

Табл. 5.4

Наближений розв'язок $y_t(x)$ було знайдено методом стрільби з кроком $h = 2^{-11}$ у праці [61]. Наближений розв'язок $y_E^{500}(x)$ знайдений за допомогою апроксимації рівняння із запізненням системою звичайних диференціальних рівнянь розмірності 500 у праці [95]. Наближені розв'язки $y_S^{12}(x)$ та $y_S^{8}(x)$ одержано на 5-й ітерації методу сплайн-колокацій при 12 ($h = \frac{1}{6}$) та 8 ($h = \frac{1}{4}$) точках розбиття відрізка відповідно.

Отримані результати наведено в таблиці 5.5.

x	$y_t(x)$	$y_E^{500}(x)$	Δ_E	$y_S^{12}(x)$	Δ_S^{12}	$y_S^{8}(x)$	Δ_S^{8}
0.5	-1.543053	-1.54588	0.00283	-1.546113	0.00306	-1.542899	0.00015
1	-2.081821	-2.08728	0.00546	-2.085491	0.00367	-2.081140	0.00068
1.5	-1.962343	-1.96551	0.00317	-1.964773	0.00243	-1.960895	0.00145

Табл. 5.5

Однакові за точністю результати одержано методом сплайн-колокацій при значно менших обчислювальних затратах.

5.3 Висновки до розділу 5

У даному розділі описано прикладне програмне забезпечення, розроблене для моделювання крайових задач для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типів. Кросплатформенне програмне забезпечення створено засобами мови JavaScript із використанням технології NodeJS та фреймворку NW.js, який дає змогу надати програмі зручний користувацький інтерфейс для введення параметрів різного типу. Здійснено візуалізацію отриманих результатів та порівняння із точними розв'язками крайових задач. Числові експерименти для тестових модельних прикладів підтверджують наведені в дисертаційній роботі теоретичні результати.

У підрозділі 5.1 розглянуто програмний інтерфейс користувача та параметри, які можна задавати.

У підрозділі 5.2 описано результати числових експериментів, проведених на тестових модельних прикладах для різних класів крайових задач.

ВИСНОВКИ

Дисертацію присвячено дослідженню достатніх умов існування та наближеному знаходженню розв'язків крайових задач для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типу за допомогою послідовності кубічних сплайнів дефекту 2.

Одержано зображення інтерполяційного кубічного сплайну дефекту 2 та досліджено умови, які забезпечують можливість його побудови.

У роботі досліджуються як лінійні, так і нелінійні крайові задачі для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із аргументом, що відхиляється.

Визначено функціональний простір, якому належать розв'язки розглянутих крайових задач, досліджено властивості гладкості розв'язків залежно від структури відхилень аргументу. Методом стислих відображень встановлено легкі для практичної перевірки коефіцієнтні достатні умови існування розв'язку таких задач, побудовано та обґрунтовано ітераційні схеми знаходження їх розв'язку за допомогою апроксимації кубічними сплайнами дефекту 2. Встановлено коефіцієнтні умови, що забезпечують збіжність ітераційного процесу.

Для практичної реалізації побудованих ітераційних схем інтегральні доданки обчислюються за допомогою квадратурних формул.

Розроблено прикладне програмне забезпечення для моделювання крайових задач для диференціально-різницевих та інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням та нейтрального типів. Кросплатформенне програмне забезпечення створено засобами мови JavaScript із використанням технології NodeJS та фреймворку NW.js, який дає змогу надати програмі зручний користувацький інтерфейс для введення параметрів різного типу. Здійснено візуалізацію отриманих результатів та порівняння з точними розв'язками крайових задач. Числові експерименти для тестових модельних прикладів підтверджують наведені в дисертаційній роботі теоретичні результати.

Список використаних джерел

1. *Dorosh A.* Boundary Value Problem Solution Existence For Linear Integro-Differential Equations With Many Delays / A. Dorosh, I. Cherevko // Карпатські матем. публ. — 2018. — Т. 10, № 1. — С. 65—70.
2. *Дорош А. Б.* Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв'язків лінійних крайових задач із запізненням / А. Б. Дорош, І. М. Черевко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: Зб. наукових праць. Вип. 10. — Кам'янець-Подільський, 2014. — С. 80—88.
3. *Cherevko I.* Existence and Approximation of a Solution of Boundary Value Problems for Delay Integro-Differential Equations / I. Cherevko, A. Dorosh // J. Numer. Anal. Approx. Theory. — 2016. — Vol. 44, no. 2. — Pp. 154–165.
4. *Дорош А. Б.* Існування розв'язку крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу / А. Б. Дорош, І. М. Черевко // Буковинський математичний журнал. — 2016. — Т. 4, 3–4. — С. 43—46.
5. *Дорош А. Б.* Апроксимація розв'язків крайових задач для лінійних інтегро-диференціальних рівнянь із багатьма запізненнями / А. Б. Дорош, І. М. Черевко // Буковинський математичний журнал. — 2017. — Т. 5, 3–4. — С. 77—81.
6. *Cherevko I.* Solving boundary value problems for neutral delay integro-differential equations using spline functions / I. Cherevko, A. Dorosh // Actual problems of training specialists in ICT. Conference Proceedings. Part 2. — 2013. — Pp. 226–234.
7. *Черевко І. М.* Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв'язків лінійних крайових задач із запізненням / І. М. Черевко, А. Б. Дорош // Тези доповідей VI міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". — Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2014. — С. 181—182.

8. *Дорош А. Б.* Розв'язування крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу методом сплайн-функцій / А. Б. Дорош, І. М. Черевко // Матеріали I Міжнародної XX Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (7–9 квітня 2014 р.) — Львів, 2014. — С. 81—82.

9. *Cherevko I.* Solving boundary value problems for delay integro-differential equations using spline functions / I. Cherevko, A. Dorosh // The Third Conference of Mathematical Society of the Republic of Moldova: dedicated to the 50th anniversary of the foundation of the Institute of Mathematics and Computer Science. — Institute of Mathematics, Computer Science, Acad. of Sciences of Moldova. Chisinau, Moldova, 2014. — Pp. 243–246.

10. *Дорош А. Б.* Застосування сплайн-функцій до побудови наближених розв'язків крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу / А. Б. Дорош, І. М. Черевко // Тези доповідей VII міжнародної наукової конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації". — Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський, 2016. — С. 64—65.

11. *Дорош А. Б.* Розв'язування крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу / А. Б. Дорош, І. М. Черевко // Диференціальні рівняння та їх застосування. Міжнародна конференція, присвячена 75-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора Д.І. Мартинюка : матеріали конференції. — Кам'янець-Подільський : Аксіома, 2017. — С. 37—38.

12. *Cherevko I.* Existence and approximation of a solution of the boundary value problems for delay integro-differential equations / I. Cherevko, A. Dorosh, L. Piddubna // The 23rd Conference On Applied And Industrial Mathematics, Suceava, Romania, September 17–20, 2015: Proceedings CAIM 2015. — Stefan cel Mare University of Suceava. Suceava, 2015. — P. 25.

13. *Cherevko I.* Existence and approximation of a solution of the boundary value problems for neutral delay integro-differential equations / I. Cherevko, A. Dorosh, L. Piddubna // The 25th Conference On Applied And Industrial Mathematics, Iaşi, Romania, September 14-17, 2017: Proceedings CAIM 2017. — Alexandru Ioan Cuza University of Iaşi. Iaşi, 2017. — Pp. 14–15.

14. *Дорош А. Б.* Моделювання крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням / А. Б. Дорош // Матеріали XIX Всеукраїнської наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (3–4 жовтня 2013 р.) — Львів, 2013. — С. 146—147.

15. *Дорош А. Б.* Розв'язування лінійних крайових задач із багатьма запізненнями методом сплайн-функцій / А. Б. Дорош // Тези доповідей IV міжнародної ганської конференції, присвяченої 135 річниці від дня народження Ганса Гана (30 червня – 5 липня 2014 р.) — Чернівці, 2014. — С. 53—54.

16. *Dorosh A.* Approximation of boundary value problem solutions for integro-differential equations with delay / A. Dorosh // Міжнародна математична конференція ім. В. Я. Скоробогатька (25-28 серпня 2015, Дрогобич, Україна). — Львів, 2015. — С. 35.

17. *Дорош А. Б.* Розв'язування крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь із запізненням / А. Б. Дорош // Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування. Матеріали міжнародної наукової конференції, присвяченої 80-річчю від дня народження професора В. І. Фодчука (28-30 вересня 2016 р.) — Чернівці, 2016. — С. 43.

18. *Беллман Р. Е.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Е. Беллман, К. Л. Кук. — М. : Мир, 1967. — 548 с.

19. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом / А. Д. Мышкис. — М. : Наука, 1972. — 352 с.

20. *Эльсгольц Л. Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л. Э. Эльсгольц, С. Б. Норкин. — М. : Наука, 1971. — 296 с.

21. *Хейл Д.* Теория функционально-дифференциальных уравнений / Д. Хейл. — М. : Мир, 1984. — 421 с.

22. *Колмановский В. Б.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — М. : Наука, 1981. — 448 с.

23. *Азбелев Н. В.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина. — М. : Наука, 1991. — 277 с.

24. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения / Н. Н. Красовский. — М. : Гостехиздат, 1959. — 211 с.

25. *Kolmanovskii V.* Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations / V. Kolmanovskii, A. Myshkis. — Dordrecht–Boston–London : Kluwer Academic Publishers, 1999. — 648 pp.

26. *Бекларян Л. А.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход / Л. А. Бекларян. — М. : Факториал Пресс, 2007. — 288 с.

27. *Быков Я. В.* О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений / Я. В. Быков. — Фрунзе : Изд-во Кирг. гос. ун-та, 1957. — 327 с.

28. *Lakshmikantham V.* Theory of Integro-Differential Equations / V. Lakshmikantham, M. R. M. Rao. — London : Gordon, Breach, 1995. — 384 pp.

29. *Андреева Е. А.* Вариационное исчисление и методы оптимизации / Е. А. Андреева, В. М. Цирулева. — М. : Высшая школа, 2006. — 583 с.

30. *Volterra V.* Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires / V. Volterra // J. Math. Pures Appl. — 1928. — Vol. 7. — Pp. 249–298.

31. *Cushing J. M.* Integrodifferential equations and delay models in population dynamics / J. M. Cushing // Lecture Notes in Biomathematics. Vol. 20. — Berlin–Heidelberg–New York : Springer Verlag, 1977.

32. *Burton T. A.* Volterra integral and differential equations. Second edition / T. A. Burton // Mathematics in Science and Engineering. Vol. 202. — Amsterdam : Elsevier Science, 2005.

33. *Андреева Е. А.* Оптимальное управление системами, описываемыми интегральными и интегро-дифференциальными уравнениями / Е. А. Андреева, М. Дждеед. — Тверь : ТвГУ, 2003. — 100 с.

34. *Miller R. K.* Asymptotic stability properties of linear Volterra integrodifferential equations / R. K. Miller // J. Differential Equations. — 1971. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 485–506.

35. *Tunc C.* Properties of Solutions to Volterra Integro-Differential Equations with Delay / C. Tunc // Appl. Math. Inf. Sci. — 2016. — Vol. 10, no. 5. — Pp. 1775–1780.

36. *Fu X.* Existence of solutions for neutral integro-differential equations with state-dependent delay / X. Fu, R. Huang // Appl. Math. Comp. — 2013. — Vol. 224. — Pp. 743–759.

37. *Ardjouni A.* Fixed points and stability in nonlinear neutral Volterra integro-differential equations with variable delays / A. Ardjouni, A. Djoudi // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. — 2013. — No. 28. — Pp. 1–13.

38. *Brunner H.* Optimal superconvergence results for delay integro-differential equations of pantograph type / H. Brunner, Q. Hu // SIAM J. Numer. Anal. — 2007. — Vol. 45, no. 3. — Pp. 986–1004.

39. *Brunner H.* Geometric meshes in collocation methods for Volterra integral equations with proportional delays / H. Brunner, Q. Hu, Q. Lin // IMA J. Numer. Anal. — 2001. — Vol. 21, no. 4. — Pp. 783–798.

40. *Brunner H.* Stability of solutions of delay functional integro-differential equations and their discretizations / H. Brunner, R. Vermiglio // Computing. — 2003. — Vol. 71, no. 3. — Pp. 229–245.

41. *Brunner H.* Recent advances in the numerical analysis of Volterra functional differential equations with variable delays / H. Brunner // J. Comput. Appl. Math. — 2009. — Vol. 228, no. 2. — Pp. 524–537.

42. *Arikoglu A.* Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method / A. Arikoglu, I. Ozkol // Appl. Math. Comput. — 2005. — Vol. 168, no. 2. — Pp. 1145–1158.

43. *Moghimi M. B.* Solving a Class of Nonlinear Delay Integro–differential Equations by Using Differential Transformation Method / M. B. Moghimi, A. Borhanifar // Applied and Computational Mathematics. — 2016. — Vol. 5, no. 3. — Pp. 142–149.

44. *Андреева Е. А.* Оптимальное управление в модели хищник-жертва с учетом сосредоточенного и распределенного запаздывания / Е. А. Андреева, И. С. Мазурова // Фундаментальные исследования. — 2014. — Т. 9, № 6. — С. 1220—1224.

45. *Беллман Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р. Беллман, Р. Калаба. — М. : Мир, 1968. — 186 с.

46. *Васильев Н. И.* Основы теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. И. Васильев, Ю. А. Клоков. — Рига : Зинатне, 1978. — 189 с.

47. *Гудков В. В.* Двухточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений / В. В. Гудков, Ю. А. Клоков, А. Я. Лепин, В. Д. Пономарев. — Рига : Зинатне, 1973. — 135 с.

48. *Keller H. B.* Numerical methods for two-point boundary-value problems / H. B. Keller. — Waltham : Blaisdell, 1968. — 184 pp.

49. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы исследования решения краевых задач / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — К. : Наукова думка, 1985. — 224 с.

50. *Бойчук А. А.* Конструктивные методы анализа краевых задач / А. А. Бойчук. — К. : Наукова думка, 1990. — 96 с.

51. *Маринець В. В.* Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь: Навч. Посіб. / В. В. Маринець, В. Л. Рего, К. В. Маринець. — Ужгород : Вид-тво УжНУ "Говерла", 2013. — 196 с.

52. *Graef J. R.* Ordinary Differential Equations and Boundary Value Problems. Vol. 1. Advanced Ordinary Differential Equations / J. R. Graef, J. Henderson, L. Kong, X. S. Liu. — 2018. — 176 pp.

53. *Каменский Г. А.* Краевая задача для нелинейных уравнений с отклоняющимся аргументом / Г. А. Каменский // Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. науки. — 1958. — № 2. — С. 60—66.

54. *Каменский Г. А.* О единственности решения краевой задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка нейтрального типа с отклоняющимся аргументом / Г. А. Каменский // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Т. 4. — М. : Университет дружбы народов, 1967. — С. 275—277.

55. *Grim L. J.* Boundary value problems for delay-differential equations / L. J. Grim, K. Schmitt // Bull. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 74, no. 5. — Pp. 997–1000.

56. *Прасолов А. В.* Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии / А. В. Прасолов. — СПб. : Изд-во "Лань", 2010. — 192 с.

57. *Каменский Г. А.* Краевые задачи с бесконечным дефектом для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Г. А. Каменский, А. Д. Мышкис // Дифференц. уравнения. — 1971. — Т. 7, № 12. — С. 2143—2150.

58. *Каменский Г. А.* Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа / Г. А. Каменский, А. Д. Мышкис // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 12. — С. 2171—2179.

59. *Grim L. J.* Boundary value problems for differential equations with deviating arguments / L. J. Grim, K. Schmitt // Aequationes Math. — 1970. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 176–190.

60. *Гершман Ю. А.* К постановке краевых задач с бесконечным дефектом для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Ю. А. Гершман, А. Д. Мышкис // Дифференц. уравнения. — 1971. — Т. 7, № 11. — С. 1992—1997.

61. *Nevers K.* An application of the shooting method to boundary value problems for second order delay equations / K. Nevers, K. Schmitt // J. Math. Anal. Appl. — 1971. — Vol. 36, no. 3. — Pp. 588–597.

62. *Eloe P. W.* Existence, uniqueness and constructive results for delay differential equations / P. W. Eloe, Y. N. Raffoul, C. C. Tisdell // Electronic Journal of Differential Equations. — 2005. — Vol. 2005, no. 121. — Pp. 1–11.

63. *Холл Д.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Д. Холл, Д. Уатт. — М. : Мир, 1979. — 312 с.

64. *Bellen A.* One-step collocation for delay differential equations / A. Bellen // J. Comp. Appl. Math. — 1984. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 275–283.

65. *Houwen P. J. van der* Stability in linear multistep methods for pure delay equations / P. J. van der Houwen, B. P. Sommeijer // J. Comp. Appl. Math. — 1984. — Vol. 10, no. 1. — Pp. 55–63.

66. *Jackiewicz Z.* One step methods for neutral delay differentual equations with state depend delays / Z. Jackiewicz // Zastos. Math. — 1990. — Vol. 20, no. 1. — Pp. 445–463.

67. *Jackiewicz Z.* The numerical solution of functional differential equations: A survey / Z. Jackiewicz, M. Kwapisz // Mat. Stos. — 1991. — Vol. 33, no. 1. — Pp. 57–78.

68. *Bellen A.* Numerical methods for delay differential equations / A. Bellen, M. Zennaro. — New York : Clarendon Press, 2003. — 416 pp.

69. *Cryer C. W.* Numerical methods for functional differential equations / C. W. Cryer // Delay and Functional Differential Equations and their Applications. — New York : Academic Press, 1972. — Pp. 17–101.

70. *Kuang J.* Stability of Numerical Methods for Delay Differential Equations / J. Kuang, Y. Cong. — Elsevier Science, 2007. — 295 pp.

71. *Мышкис А. Д.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / А. Д. Мышкис // УМН. — 1977. — Т. 32, № 2. — С. 173—202.

72. *Каменский Г. А.* О методе коллокаций для нелинейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Г. А. Каменский, Э. Д. Кононенко // Тр. Моск. авиац. ин-та. — 1975. — № 379. — С. 65—70.

73. *Каменский Г. А.* О применении метода коллокации к краевой задаче для линейного уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа / Г. А. Каменский, Э. Д. Кононенко // Укр. мат. журн. — 1977. — Т. 29, № 3. — С. 306—312.

74. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы / А. Ю. Лучка. — К. : Наук. думка, 1993. — 288 с.

75. *Самойленко А. М.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений / А. М. Самойленко, Н. И. Ронто. — К. : Вища школа, 1976. — 180 с.

76. *Самойленко А. М.* Періодичні розв'язки автономних диференціальних рівнянь із запізненням / А. М. Самойленко, Л. В. Стельмащук // Нелінійні коливання. — 2000. — Т. 3, № 4. — С. 526—534.

77. *Король І. І.* Періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь із запізненням / І. І. Король // Науковий вісник Чернівецького університету: зб. наук. праць. — 2008. — Т. 421, Математика. — С. 50—56.

78. *Korol I. I.* Numerical-analytic method for investigating boundary value problems for impulsive differential equations / I. I. Korol // Miskolc Mathematical Notes. — 2008. — Vol. 9, no. 2. — Pp. 99–110.

79. *Алберг Д.* Теория сплайнов и её приложения / Д. Алберг, Э. Нильсон, Д. Уолш. — М. : Мир, 1972. — 316 с.

80. *Завъялов Ю. С.* Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. — М. : Наука, 1980. — 350 с.

81. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам / К. Де Бор. — М. : Радио и связь, 1985. — 304 с.

82. *Banks H. T.* Spline approximations for functional differential equations / H. T. Banks, F. Kappel // J. Diff. Eqs. — 1979. — Vol. 34, no. 3. — Pp. 496–522.

83. *Bellen A.* Spline approximations for neutral delay differential equations / A. Bellen, G. Micula // Revue d'analyse numérique et de théorie de l'approximation. — 1994. — Vol. 23, no. 2. — Pp. 117–125.

84. *Micula G.* Numerical solutions of differential equation with deviating argument using spline functions / G. Micula, H. Akca // Studia Univ. Babes-Bolyai. Mathematica. — 1988. — Vol. 33, no. 2. — Pp. 45–57.

85. *Мирошниченко В. Л.* Решение краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом / В. Л. Мирошниченко // Изв. АН Каз. ССР. Сер. физ.-мат. — 1972. — № 5. — С. 46—50.

86. *Burkowski F. J.* The Numerical Derivation of a Periodic Solution of a Second Order Differential Difference Equation / F. J. Burkowski, D. D. Cowan // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 489–495.

87. *Черевко И. М.* Численный метод решения краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / И. М. Черевко, И. В. Якимов // Укр. мат. журн. — 1989. — Т. 41, № 6. — С. 854—860.

88. *Nikolova T. S.* Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary value problems for a class of functional-differential equations / T. S. Nikolova, D. D. Bainov // Yokohama Math. J. — 1981. — Vol. 29, no. 1. — Pp. 108–122.

89. *Настасьева Н. П.* Наближений метод розв'язання крайової задачі для інтегро-диференціальних рівнянь нейтрального типу / Н. П. Настасьєва, І. М. Черевко // Математичні студії. — 1998. — Т. 10, № 2. — С. 147—152.

90. *Настасьева Н. П.* Кубічні сплайни дефекту 2 та їх застосування до крайових задач / Н. П. Настасьєва, І. М. Черевко // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 1999. — № 1. — С. 69—73.

91. *Матвій О. В.* Апроксимація крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненням / О. В. Матвій, І. М. Черевко // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. — 2001. — Т. 111. — С. 85—89.

92. *Матвій О. В.* Апроксимація крайових задач із запізненням системами звичайних диференціальних рівнянь / О. В. Матвій, І. М. Черевко // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. — 2003. — № 3. — С. 129—137.

93. *Hartman P.* Ordinary Differential Equations / P. Hartman. — Philadelphia : Society for Industrial, Applied Mathematics, 2002. — 612 pp.

94. *Alberg J.* The theory of splines and their applications / J. Alberg, E. Nilson, J. Walsh. — New York : Academic, 1967. — 296 pp.

95. *Матвій О. В.* Дослідження схем апроксимації диференціально-функціональних рівнянь: дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Матвій О. В. – Чернівці : Чернівецький нац. університет ім. Ю. Федьковича, 2009. – 138 с.

ДОДАТОК

Витяг із коду розробленої програми

index.js

```
var app = angular.module('MainApp', []);
app.controller('MainController', ['$scope', function($scope) {
  angular.element(document).ready(function(){
    $scope.renderEquation();
  });
  var M_plus;
  var M_minus;
  var h;
  var y;

  $scope.tridiagonalSolve = function(a, b, c, d)
  {
    var n = d.length;
    var x = new Array(n);
    c[0] /= b[0];
    d[0] /= b[0];
    for(var i = 1; i < n; i++)
    {
      var id = 1 / (b[i] - c[i - 1] * a[i]);
      c[i] *= id;
      d[i] = (d[i] - d[i - 1] * a[i]) * id;
    }
    x[n - 1] = d[n - 1];
    for(var i = n - 2; i >= 0; i--)
      x[i] = d[i] - c[i] * x[i + 1];
    return x;
  }

  function section_number(x)
  {
```

```
    try {
        if((x < $scope.a) || (x > $scope.b)) throw "x is not in [" + $scope.a + ";"
            + $scope.b + "] !";
    } catch(err) {
        console.log(err);
    }
    var j = parseInt((x - $scope.a) / h);
    if (x == $scope.b) return parseInt(($scope.b - $scope.a) / h);
    if ((x - $scope.a) % h > 0.000000000001) j++;
    return j;
}

$scope.spline = function(x)
{
    if(x == $scope.a) return $scope.fi(x);
    var j = section_number(x);
    var xj = $scope.a + j * h;
    var xj_1 = xj - h;
    return M_plus[j - 1] * Math.pow(xj - x, 3) / (6 * h) + M_minus[j] * Math.pow(x
        - xj_1, 3) / (6 * h) + (y[j - 1] - M_plus[j - 1] * h * h / 6) * (xj - x) /
        h + (y[j] - M_minus[j] * h * h / 6) * (x - xj_1) / h;
}

$scope.spline1 = function(x)
{
    if(x == $scope.a) return $scope.fi(x);
    var j = section_number(x);
    var xj = $scope.a + j * h;
    var xj_1 = xj - h;
    return -M_plus[j - 1] * (xj - x) * (xj - x) / (2 * h) + M_minus[j] * (x - xj_1)
        * (x - xj_1) / (2 * h) + (y[j] - y[j - 1]) / h + (M_plus[j - 1] -
        M_minus[j]) * h / 6;
}

$scope.spline2 = function(x)
{
```

```
    if(x == $scope.a) return $scope.fi2(x);
    var j = section_number(x);
    var xj = $scope.a + j * h;
    var xj_1 = xj - h;
    return M_plus[j - 1] * (xj - x) / h + M_minus[j] * (x - xj_1) / h;
}

$scope.findSolution = function()
{
    $scope.a = parseFloat($scope.a);
    $scope.b = parseFloat($scope.b);
    $scope.gamma = parseFloat($scope.gamma);
    $scope.eps = parseFloat($scope.eps);
    $scope.m = parseInt($scope.m);
    h = ($scope.b - $scope.a) / $scope.m;
    $scope.status = "h = " + h;
    $scope.skipPoints = parseInt($scope.skipPoints);
    var M_plus_new = new Array($scope.m+1);
    var M_minus_new = new Array($scope.m+1);
    M_plus = new Array($scope.m+1);
    M_minus = new Array($scope.m+1);
    var aa = new Array($scope.m-1);
    var bb = new Array($scope.m-1);
    var cc = new Array($scope.m-1);
    var dd = new Array($scope.m-1);
    y = new Array($scope.m+1);
    var yy = new Array($scope.m-1);
    var yy_prev = new Array($scope.m-1);
    var j;
    var k = 1;
    y[0] = $scope.fi($scope.a);
    y[$scope.m] = $scope.gamma;
    $scope.values = new Array();
    $scope.sideinfo = "";

    do
```

```
{
   for(j = 0; j <= $scope.m - 1; j++)
   {
      var x = $scope.a + j * h;
      if(k == 1)
      {
         M_plus[j] = $scope.rightSide(x, $scope.S0, $scope.S01, $scope.S02);
      }
      else
      {
         M_plus_new[j] = $scope.rightSide(x, $scope.spline, $scope.spline1,
             $scope.spline2);
      }
   }

   for(j = 1; j <= $scope.m; j++)
   {
      var x = $scope.a + j * h;
      if(k == 1)
      {
         M_minus[j] = $scope.rightSide(x, $scope.S0, $scope.S01, $scope.S02);
      }
      else
      {
         M_minus_new[j] = $scope.rightSide(x, $scope.spline, $scope.spline1,
             $scope.spline2);
         if(x - $scope.tau >= $scope.a)
         {
            M_plus[j - 1] = M_plus_new[j - 1];
            M_minus[j] = M_minus_new[j];
         }
      }
   }
   for(j = 0; j <= $scope.m - 2; j++)
   {
      if(k > 1) yy_prev[j] = yy[j];
```

```
    if(j == 0) aa[j] = 0;
    else aa[j] = 1;
    bb[j] = -2;
    if(j == $scope.m - 2) cc[j] = 0;
    else cc[j] = 1;
    dd[j] = h * h / 6.0 * (M_plus[j] + 2 * M_minus[j + 1] + 2 * M_plus[j + 1]
        + M_minus[j + 2]);
    if(j == 0) dd[j] -= y[0];
    if(j == $scope.m - 2) dd[j] -= y[$scope.m];
}
yy = $scope.tridiagonalSolve(aa, bb, cc, dd);
for(j = 1; j <= $scope.m - 1; j++)
{
    y[j] = yy[j - 1];
}
for(j = 0; j <= $scope.m; j++)
{
    if((j % $scope.skipPoints != 0) && (j != $scope.m)) continue;
    var x = $scope.a + j * h;
    if($scope.showPrecise)
    {
        var precise = $scope.preciseSolution(x);
        var absolute_error = Math.abs(y[j] - precise);
        var relative_error = ((precise == 0) || (y[j] == 0)) ? 0 :
            (Math.abs(absolute_error / precise) * 100).toFixed(2);
        $scope.values.push({
            iteration: k,
            pointNumber: j,
            point: x.toString(),
            approximateValue: y[j].toString(),
            preciseValue: precise.toString(),
            absoluteError: absolute_error.toString(),
            relativeError: relative_error.toString() + '%',
        });
    }
    else
```

```
        {
          $scope.values.push({
            iteration: k,
            pointNumber: j,
            point: x.toString(),
            approximateValue: y[j].toString(),
          });
        }
      }
      if(k > 1)
      {
        var max = 0;
        for(j = 0; j <= $scope.m - 2; j++)
        {
          if(Math.abs(yy[j] - yy_prev[j]) > max)
          {
            max = Math.abs(yy[j] - yy_prev[j]);
          }
        }
        if(max <= $scope.eps) break;
      }
      k++;
    } while(k<=100);
}

$scope.rightSide = function(x,y,y1,y2)
{
  var y_or_fi, y_or_fi1, y_or_fi2;
  var result = $scope.f(x);
  for(var i=0; i<=$scope.n; i++)
  {
    if(x - $scope.tau_i[i] < $scope.a)
    {
      y_or_fi = $scope.fi;
      y_or_fi1 = $scope.fi1;
      y_or_fi2 = $scope.fi2;
```

```
    }
    else
    {
      y_or_fi = y;
      y_or_fi1 = y1;
      y_or_fi2 = y2;
    }
    result += eval($scope.ai[i]) * y_or_fi(x - $scope.tau_i[i]) +
        eval($scope.bi[i]) * y_or_fi1(x - $scope.tau_i[i]);
    if($scope.equationType == "neutral")
    {
      result += eval($scope.ci[i]) * y_or_fi2(x - $scope.tau_i[i]);
    }
    if($scope.integro == true)
    {
      result += -1/15 * $scope.integral(x,y,y1,y2,$scope.integrand);
    }
  }
  return result;
}

$scope.S0 = function(x)
{
  return ($scope.gamma - $scope.fi($scope.a)) / ($scope.b - $scope.a) * (x -
      $scope.a) + $scope.fi($scope.a);
}

$scope.S01 = function(x)
{
  return ($scope.gamma - $scope.fi($scope.a)) / ($scope.b - $scope.a);
}

$scope.S02 = function(x)
{
  return 0;
}
```

```
$scope.f = function(x)
{
  return eval($scope.functions.f);
}

$scope.fi = function(x)
{
  return eval($scope.functions.fi);
}

$scope.fi1 = function(x)
{
  return eval($scope.functions.fi1);
}

$scope.fi2 = function(x)
{
  return eval($scope.functions.fi2);
}

$scope.integral = function(x,y,y1,y2,fun)
{
  switch($scope.integrationMethod)
  {
    case "trapezoidal":
      return $scope.trapezoidal(x,y,y1,y2,fun);
      break;
    case "simpson":
      return $scope.simpson(x,y,y1,y2,fun);
      break;
  }
}

$scope.trapezoidal = function(x,y,y1,y2,fun)
{
```

```
    var sum = (fun($scope.a,x,y,y1,y2) + fun($scope.b,x,y,y1,y2)) / 2;
    var step = ($scope.b - $scope.a) / $scope.m;

    for(var i=0,s=$scope.a+step; i<=$scope.m-1; i++,s+=step)
    {
        sum += fun(s,x,y,y1,y2);
    }
    sum *= step;
    return sum;
}

$scope.simpson = function(x,y,y1,y2,fun)
{
    var sum = fun($scope.a,x,y,y1,y2) - fun($scope.b,x,y,y1,y2);
    var step = ($scope.b - $scope.a) / (2 * $scope.m);
    var e = 1;

    for(var i=1; i<=2*$scope.m-1; i++)
    {
        sum += (3+e) * fun($scope.a + i * step,x,y,y1,y2);
        e = -e;
    }
    sum *= step/3;
    return sum;
}

$scope.integrand = function(s,x,y,y1,y2)
{
    var y_or_fi, y_or_fi1, y_or_fi2;
    var result = 0;
    for(var i=0; i<=$scope.n; i++)
    {
        if(s - $scope.tau_i[i] < $scope.a)
        {
            y_or_fi = $scope.fi;
            y_or_fi1 = $scope.fi1;
```

```
        y_or_fi2 = $scope.fi2;
      }
      else
      {
        y_or_fi = y;
        y_or_fi1 = y1;
        y_or_fi2 = y2;
      }
      result += eval($scope.Ki0[i]) * y_or_fi(s - $scope.tau_i[i]) +
          eval($scope.Ki1[i]) * y_or_fi1(s - $scope.tau_i[i]);
      if($scope.equationType == "neutral")
      {
        result += eval($scope.Ki2[i]) * y_or_fi2(s - $scope.tau_i[i]);
      }
    }
    return result;
}

$scope.preciseSolution = function(x)
{
    return eval($scope.functions.preciseSolution);
}

$scope.openFile = function() {
    var chooser = $('#openFileDialog');
    chooser.unbind('change');
    chooser.change(function(evt) {
      var fs = require('fs');
      var inFile = fs.createReadStream($(this).val());
      $scope.parseXmlParams(inFile);
    });
    chooser.trigger('click');
}

$scope.saveFile = function() {
    var chooser = $('#saveFileDialog');
```

```
    chooser.unbind('change');
    chooser.change(function(evt) {
        var fs = require('fs');
        fs.writeFile(
            $(this).val(),
            $scope.generateXmlParams(),
            function(err) {
                if(err) {
                    console.log(err);
                }
            }
        );
    });
    chooser.trigger('click');
}

$scope.generateXmlParams = function() {
    var jstoxml = require('jstoxml');
    return jstoxml.toXML({
        params: [
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'linearity', value: $scope.linearity}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'equationType', value:
                $scope.equationType}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'integro', value: $scope.integro}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'a', value: $scope.a}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'b', value: $scope.b}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'm', value: $scope.m}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'n', value: $scope.n}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'ai', value: $scope.ai}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'bi', value: $scope.bi}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'ci', value: $scope.ci}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'Ki0', value: $scope.Ki0}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'Ki1', value: $scope.Ki1}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'Ki2', value: $scope.Ki2}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'gamma', value: $scope.gamma}},
            {_name: 'param', _attrs: {name: 'eps', value: $scope.eps}},
```

```
        {_name: 'param', _attrs: {name: 'tau_i', value: $scope.tau_i}},
        {_name: 'param', _attrs: {name: 'sigma_i', value: $scope.sigma_i}},
        {_name: 'param', _attrs: {name: 'skipPoints', value: $scope.skipPoints}},
        {_name: 'param', _attrs: {name: 'showPrecise', value:
            $scope.showPrecise}},
        {_name: 'param', _attrs: {name: 'integrationMethod', value:
            $scope.integrationMethod}},
        {_name: 'function', _attrs: {name: 'f', value: $scope.functions.f}},
        {_name: 'function', _attrs: {name: 'fi', value: $scope.functions.fi}},
        {_name: 'function', _attrs: {name: 'fi1', value: $scope.functions.fi1}},
        {_name: 'function', _attrs: {name: 'fi2', value: $scope.functions.fi2}},
        {_name: 'function', _attrs: {name: 'preciseSolution', value:
            $scope.functions.preciseSolution}},
      ]
   }, {indent: ' '});
}

$scope.parseXmlParams = function(stream) {
   var flow = require('xml-flow');
   var xmlStream = flow(stream);
   xmlStream.on('tag:param', function(param) {
      $scope[param.name] = param.value;
   });
   xmlStream.on('tag:function', function(param) {
      $scope.functions[param.name] = param.value;
   });
   xmlStream.on('end', function() {
      $scope.$apply();
   });
}
```