Зміст

Передмова

Підготовка висококваліфікованих спеціалістів-математиків вимагає знань фундаментальних розділів математики. Одним з основних є курс "Крайові задачі для параболічних рівнянь другого порядку", ідеї та методи якого складають основу для параболічних диференціальних рівнянь у частинних похідних. Даний курс базується на нормативних курсах з диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики.

Основу посібника склали курси лекцій та семінарських занять, що читаються авторами у Чернівецькому національному університеті.

Автори намагалися викласти матеріал в доступній формі, базуючись на навчальних програмах дисциплін спеціалізації кафедри. Проте, даний посібник може бути корисним не тільки для студентів, але й для всіх, хто самостійно досліджує крайові задачі для рівнянь з частинними похідними, та задачі оптимального керування системами, що описуються крайовими задачами для рівнянь з частинними похідними.

Посібник поділений на розділи і параграфи. Перший розділ присвячений вивченню крайових задач та задачі Коші для параболічного рівняння другого порядку. За допомогою побудованого фундаментального розв'язку параболічного рівняння обгрунтовано рівняння стрибка потенціала простого шару. Це дало змогу звести дослідження крайових задач до інтегральних рівнянь. Зображення розв'язків крайових задач отримується з використанням функції Гріна.

Дослідження багатоточкових за часовою змінною крайових задач для параболічних рівнянь приведено у другому розділі. За допомогою фундаментального розв'язку та функцій Гріна крайових задач, встановлено інтегральне зображення розв'язків нелокальних за часовою змінною задач для параболічних рівнянь другого порядку. Одержані результати використано для дослідження задач оптимального керування системами, що описуються багатоточковими за часом крайовими задачами. Критерії якості задаються у вигляді суми поверхневих та об'ємних інтегралів. Розглянуто випадки внутрішнього та фінального обмеженого керування. Крім того, досліджено односторонню багатоточкову за часом крайову задачу для рівномірно параболічних рівнянь другого порядку.

Третій розділ присвячено дослідженню крайових задач для параболічних рівнянь другого порядку з інтегральною умовою за часовою змінною. За допомогою принципу максимуму, теорії потенціалів досліджено задачу Діріхле, задачу з косою похідною та односторонню крайову задачу з інтегральною умовою за часовою змінною для параболічного рівняння другого порядку. Одержаний результат використано для дослідження задачі оптимального керування системою, що описується крайовою задачею з внутрішнім стартовим та межовим керуванням і інтегро-диференціальною умовою за часовою змінною.

Крайовим задачам з імпульсною дією для параболічних рівнянь присвячено четвертий розділ. За допомогою принципа максимума, апріорних оцінок та теорії потенціалів встановлено єдиність, існування та оцінки похідних крайових задач з імпульсною дією за часовою змінною для параболічних рівнянь другого порядку.

У п'ятому розділі досліджено задачу керування температурним режимом при обмеженні на перепад температур.

Вступ

Нехай $Q = \{(x,t) : x \in R^n, t > 0\}$, а $C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap C(R^n \times [0,T])$ - клас функцій, двічі неперервно диференційовних за x та неперервно диференційовних за t в Q, неперервних і на гіперплощині $t = 0$.

Постановка задачі Коші. Знайти розв'язок $u(x,t)$ рівняння

$$u_t = a^2 \triangle u + f(x,t). \tag{1}$$

який належить $C^{2,1}_{x,t}(Q) \cap C(R^n \times [0,T])$, обмежений і задовольняє початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \;\; x \in R^n. \tag{2}$$

Принцип максимуму для розв'язків рівняння теплопровідності. Нехай $D \subset R^n (n \geq 1)$ – довільна обмежена область n-вимірного простору з межею ∂D. У циліндрі $Q_T = D \times (0,T)$ з нижньою основою $Q_0 = D \times \times \{t = 0\}$ та бічною поверхнею $\partial Q_T = \partial D \times [0,T]$ розглянемо розв'язок однорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 \Delta u.$$

Правильна теорема.

Теорема 1. *Довільна функція $u = u(t,x) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, що задовольняє в Q_T однорідне рівняння теплопровідності, свого максимального та мінімального значення в циліндрі Q_T досягає або на його нижній основі, або на бічній паверхні ∂Q_T.*

1. Єдиність розв'язку. Нехай u_1, u_2 два розв'язки задачі (1), (2). З умови обмеженості розв'зку випливає існування такого $M > 0$, що $|u_i(x,t)| < M$, $i \in \{1,2\}$ для $(x,t) \in Q$. Тоді $u = u_1 - u_2$ буде розв'язком задачі

$$u_t = a^2 \Delta u, \;\; (x,t) \in Q, \;\; u|_{t=0} = 0 \tag{3}$$

і $|u(x,t)| \leq 2M$, $(x,t) \in Q$.

Розглянемо область $Q_R = \{(x,t) : |x| < R, t \in [0,T]\}$, а в ній функцію

$$v(x,t) = \frac{4M}{R^2}(\frac{|x|^2}{2} + a^2nt).$$

Функція $v(x,t)$ задовольняє в області Q_R рівняння

$$v_t = a^2 \triangle v, \tag{4}$$

і, крім того, $v(x,0) = \frac{2M|x|^2}{R^2} > 0 = u(x,0)$.

$$v|_{|x|=R} = 2M + \frac{4M}{R^2}a^2nt > 2M \geq 0$$

Нехай $\Gamma_R = \{(x,t) : (|x| = R, t \in [0,T]) \cup (|x| \leq R, t = 0)\}$. Функція $v(x,t) - u(x,t)$ задовольняє рівняння (4) і $[v(x,t) - u(x,t)]|_{\Gamma_R} \geq 0$. Тоді за теоремою 1 $v(x,t) - u(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in Q_R$.

Функція $v(x,t) + u(x,t)$ теж задовольняє рівняння (4) і умову $[v(x,t) + u(x,t)]|_{\Gamma_R} \geq 0$. Згідно з теоремою 1 маємо $v(x,t) + u(x,t) \geq 0$, $(x,t) \in Q_R$. Отже, $-v(x,t) \leq u(x,t) \leq v(x,t)$, або

$$|u(x,t)| \leq v(x,t) = \frac{4M}{R^2}(\frac{|x|^2}{2} + a^2nt).$$

Переходячи до границі при $R \longrightarrow \infty$, одержимо, що $u(x,t) = 0$ для довільно вибраної точки $(x,t) \in Q$.

2. Існування розв'язку задачі Коші $(n = 1)$**.** Розв'язок задачі Коші можна знаходити іноді методом відокремлення змінних.

Розглянемо задачу: знайти обмежену функцію $u(x,t)$, визначену в області $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$, яка задовольняє рівняння

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \;\; t > 0 \tag{5}$$

і початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{6}$$

Шукаємо обмежений ненульовий розв'язок рівняння (5) у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{7}$$

Підставивши (7) у (5), одержимо

$$\frac{X^{''}(x)}{X(x)} = \frac{T^{'}(t)}{a^2T(t)} = -\lambda^2,$$

де λ^2 - параметр розділення. Звідси

$$T^{'}(t) = -a^2\lambda^2T(t), \tag{8}$$

$$X^{''}(x) + \lambda^2X(x) = 0. \tag{9}$$

Загальний розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$u_\lambda(x,t) = A(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t \pm i\lambda x}. \tag{10}$$

Оскільки λ - довільне число, $-\infty < \lambda < \infty$, то в (10) візьмемо знак "плюс"і утворимо функцію

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)e^{-a^2\lambda^2t+i\lambda x}d\lambda. \tag{11}$$

Функція (11) задовольняє рівняння (5) як суперпозиція частинних розв'зків цього рівняння. Задовольняючи початкову умову (6), маємо

$$\varphi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)e^{i\lambda x}dx. \tag{12}$$

Скориставшись формулою оберненого перетворення інтеграла Фур'є, одержимо

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi. \tag{13}$$

Підставляючи (13) в (11) і змінюючи порядок інтегрування, одержимо

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda) \varphi(\xi) d\xi. \qquad (14)$$

Внутрішній інтеграл в (14) рівний

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(a\lambda\sqrt{t} - \frac{i(x-\xi)}{2a\sqrt{t}})^2} d\lambda \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{a\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \qquad (15)$$

Підставляючи (15) у (14), маємо інтегральне зображення шуканого розв'язку

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;t) \varphi(\xi) d\xi, \qquad (16)$$

де

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \qquad (17)$$

Функцію $G(x,\xi;t)$, визначену формулою (17), часто називають фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності.

Нехай функція $\varphi(x)$ неперервна $x \in (-\infty, \infty)$ і обмежена, $|\varphi(x)| \leq M$, $M < \infty$. Покажемо, що формула (16) визначає класичний обмежений розв'язок задачі Коші (5), (6).

Нехай $t > 0$. В інтегралі (16) зробимо заміну змінної

$$z = \frac{x-\xi}{\sqrt{4a^2t}}, \;\; \xi = x + 2a\sqrt{t}z, \;\; d\xi = 2a\sqrt{t}dz. \qquad (18)$$

Тоді

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2a\sqrt{t}z)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz,$$

що дає змогу одержати оцінку

$$|u(x,t)| \leq M\pi^{-1/2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = M.$$

Отже, інтеграл у формулі (16) збігається та обмежений. Покажемо, що існує неперервна в області $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, T]$ похідна u_t. Для цього розглянемо інтеграл, який відповідає цій похідній:

$$u_t = -\frac{1}{2t\sqrt{\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi +$$

$$+\frac{1}{4a^2t^2\sqrt{\pi a^2 t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)(x-\xi)^2 e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi.$$

Проводячи в інтегралі заміну змінної (18), одержимо оцінку

$$|u_t| \leq \frac{M}{2t\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz + \frac{M}{t\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2}dz \leq \frac{C_1}{t}.$$

Отже, похідна u_t неперервна в області $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, T]$. Неперервність похідних u_x, u_{xx} у тій самій області встановлюється аналогічно.

Нехай тепер $t \in [0, T]$. У цьому випадку потрібно перевірити, що $u(x,t)$, визначена формулою (16), є обмеженою, неперервною в області $x \in (-\infty, \infty)$, $t \in [0, T]$ і задовольняє умову (6).

Оскільки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;t)d\xi = 1$ при $t > 0$, то

$$\lim_{t\longrightarrow 0} u(x,t) = \lim_{t\longrightarrow 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;t)[\varphi(\xi) - \varphi(x)]d\xi + \varphi(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{t\longrightarrow 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}[\varphi(x + 2a\sqrt{t}z) - \varphi(x)]dz + \varphi(x) = \varphi(x).$$

3. Задача Коші для рівняння теплопровідності $(n \geq 1)$.

Для однорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad (x,t) \in \Pi = \mathbb{R}^n \times (0,T), \quad n \geq 1 \tag{19}$$

задача Коші ставиться так: знайти функцію $u(x,t) \in C^2(t > 0) \cap C(t \geq 0)$, яка задовольняє рівняння (19) при $t > 0$ та початкову умову при $t = +0$:

$$u|_{t=+0} = \varphi(x), \quad \varphi(x) \in C(\mathbb{R}^n). \tag{20}$$

Розв'язок задачі Коші (19), (20) будемо шукати за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Для довільної функції $f(x) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ визначимо її перетворення Фур'є $F(y)$ за формулою

$$F(y) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i(x,y)} dx, \tag{21}$$

де $(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k y_k$.

Відомо [10], що оригінал $f(x)$ за своїм перетворенням Фур'є знаходиться за формулою

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F(y) e^{i(x,y)} dy. \tag{22}$$

Позначимо через $v(y,t)$ перетворення Фур'є шуканої невідомої функції $u(x,t)$:

$$v(y,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,t)e^{-i(x,y)}dx.$$

Застосуємо перетворення Фур'є до рівняння (19):

$$v_t(y,t) + a^2|y|^2v(y,t) = 0, \quad |y|^2 = \sum_{k=1}^{n} y_k^2. \tag{23}$$

Діючи перетворенням Фур'є на початкову умову (20) і позначаючи через $g(y)$ перетворення Фур'є функції $\varphi(x)$, отримуємо

$$v(y,0) = g(y). \tag{24}$$

Розв'язок задачі (23), (24) має вигляд

$$v(y,t) = g(y)e^{-a^2|y|^2t}. \tag{25}$$

Для знаходження розв'язку задачі (19), (20) застосуємо формулу оберненого перетворення Фур'є

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-a^2|y|^2t+i(x,y)}dy. \tag{26}$$

У формулі (26) замінимо $g(y)$ її явним виглядом за формулою типу (21). Маємо

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)dz\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|y|^2t+i(x-z,y)}dy. \tag{27}$$

Застосовуючи формулу Ейлера, маємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-a^2|y|^2t+i(x-z,y)}dy = \prod_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2y_k^2t}(\cos(x_k-z_k)y_k+$$

$$+i\sin(x_k - z_k)y_k)dy_k = \prod_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 y_k^2 t} \cos(x_k - z_k)y_k dy_k. \quad (28)$$

Позначимо

$$I(z) = \int_0^\infty e^{-\beta^2 x^2} \cos zx dx. \quad (29)$$

Знайшовши з (29) похідну $I'(z)$ і інтегруючи частинами, отримуємо рівняння

$$I'(z) + \frac{z}{2\beta^2} I(z) = 0,$$

розв'язок якого визначається формулою

$$I(z) = C \exp\Big(- \frac{z^2}{4\beta^2}\Big).$$

Сталу C знаходимо, поклавши $z = 0$:

$$C = I(0) = \int_0^\infty e^{-\beta^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta}.$$

Остаточно маємо

$$\int_0^\infty e^{-\beta^2 x^2} \cos zx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\beta} \exp\Big(- \frac{z^2}{4\beta^2}\Big). \quad (30)$$

Враховуючи (30) і (28), зводимо (27) до вигляду

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) \exp\Big(- \frac{|x-y|^2}{4a^2 t}\Big) dy. \quad (31)$$

Формулу (31) називають **формулою Пуассона**.

Якщо $\varphi(x)$ неперервна в $\mathbb{R}^n$ і обмежена, $|\varphi(x)| < M < \infty$, то формула (31) визначає класичний обмежений розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності.

Для цього потрібно перевірити, що:

1) інтеграл у формулі (31) є збіжним при $(x,t) \in R^n \times [0,T]$;

2) функція, визначена формулою (31), обмежена в $R^n \times [0,T]$ і належить до класу $C^{2,1}(R^n \times [0,T]) \cap C(R^n \times [0,T])$;

3) вона задовольняє рівняння (19);

4) функція (31) задовольняє початкову умову (20).

Розглянемо спочатку випадок $t > 0$. В інтегралі (31) зробимо заміну змінних $z_k = \frac{y_k - x_k}{2a\sqrt{t}}$, $k \in \{1, ..., n\}$. Звідси маємо $dy = (2a\sqrt{t})^n dz$. Тоді

$$u(x,t) = \pi^{-n/2} \int\limits_{R^n} \varphi(x + 2az\sqrt{t}) e^{-|z|^2} dz, \qquad (32)$$

що дає змогу одержати таку оцінку

$$|u(x,t)| \leq M\pi^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{-|z|^2} dz = M.$$

Отже, збіжність та обмеженість інтеграла з формули (31) при $(x,t) \in R^n \times [0,T]$ доведено. Покажемо, що існує неперервна в області $R^n \times [0,T]$ похідна u_t. Для цього розглянемо інтеграл, який відповідає цій похідній:

$$I = -\frac{n}{2t(2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R^n} \varphi(y) \exp - \frac{|x-y|^2}{4a^2 t} dy +$$

$$+ \frac{1}{4a^2 t^2 (2a\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R^n} \varphi(y) |x-y|^2 \exp - \frac{|x-y|^2}{4a^2 t} dy.$$

Проводячи в інтегралах заміну змінних $z_k = \frac{y_k - x_k}{2a\sqrt{t}}$, $k \in \{1, ..., n\}$, одержимо оцінку

$$|I| \leq \frac{Mn}{2t\pi^{n/2}} \int\limits_{R^n} e^{-|z|^2} dz + \frac{M}{t\pi^{n/2}} \int\limits_{R^n} |z|^2 e^{-|z|^2} dz \leq \frac{C_1}{t},$$

з відомою сталою $C_1 > 0$. Отже, інтеграл I рівномірно збіжний при $x \in R^n$, $t \in [t_0, T]$, для довільного t_0 такого, що $0 < t_0 < T$. З властивостей невласних інтегралів випливає, що u_t можна обчислювати, диференціюючи формулу (31) під знаком інтеграла. Неперервність похідних u_{x_i}, $u_{x_i x_i}$ встановлюється аналогічно. Безпосередньою підстановкою (31) в рівняння (19) переконуємось в тому, що $u(x,t)$ є розв'язком.

Нехай $t \in [0, T]$. Перевіримо, що $u(x,t)$, визначена формулою (31), задовольняє умову (20) і є обмеженою та неперервною в області $R^n \times [0, T]$. Всі ці умови будуть задовольнятись, якщо для довільної точки $x^0 \in R^n$ існує границя

$$\lim_{(x,t) \longrightarrow (x^0, +0)} u(x,t) = \varphi(x^{(0)}). \tag{33}$$

Співвідношення (33) виконується, якщо $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ таке, що при $|x - x^0| < \delta$, $0 < t < \delta$ виконується нерівність

$$|u(x,t) - \varphi(x^0)| < \varepsilon, \tag{34}$$

Зважаючи на неперервність функції $\varphi(x)$ і те, що

$$|u(x,t) - \varphi(x^0)| \leq |u(x,t) - \varphi(x)| + |\varphi(x) - \varphi(x^0)|,$$

замість (34) досить довести нерівність

$$|u(x,t) - \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{35}$$

Отже, задамо довільне $\varepsilon > 0$. За допомогою рівності

$$\pi^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{-|z|^2} dz = 1 \tag{36}$$

подамо функцію $\varphi(x)$ у вигляді

$$\varphi(x) = \pi^{-n/2} \int\limits_{R^n} \varphi(x) e^{-|z|^2} dz.$$

Узявши функцію $u(x,t)$ у вигляді (31), розглянемо різницю

$$\triangle = \left|\pi^{-n/2}\int\limits_{R^n}\varphi(x+2az\sqrt{t})e^{-|z|^2}dz - \pi^{-n/2}\int\limits_{R^n}\varphi(x)e^{-|z|^2}dz\right| \leq$$

$$\leq \pi^{-n/2}\int\limits_{|z|<R}|\varphi(x+2az\sqrt{t})-\varphi(x)|e^{-|z|^2}dz+$$

$$+\pi^{-n/2}\int\limits_{|z|>R}|\varphi(x+2az\sqrt{t})|e^{-|z|^2}dz+\pi^{-n/2}\int\limits_{|z|>R}|\varphi(x)|e^{-|z|^2}dz=$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Із збіжності інтеграла з формули (36) випливає існування деякого числа $R > 0$, такого, що

$$\pi^{-n/2}\int\limits_{|z|>R} e^{-|z|^2}dz < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{37}$$

Враховуючи (37), маємо

$$I_2 + I_3 \leq 2M\frac{\varepsilon}{3M} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Оскільки функція $\varphi(x)$– неперервна, то для заданого $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta_1 > 0$, що при $|x-y| < \delta_1$ матимемо $|\varphi(x)-\varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді за умови $2aR\sqrt{t} < \delta_1$, або $0 < t < \delta_2$, де δ_2 виражається через δ_1, підінтегральну функцію в I_1 оцінимо так: $|\varphi(x+2az\sqrt{t})-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Отже, при $0 < t < \delta_2$ отримаємо $\triangle < \varepsilon$. Це означає, що нерівність (35) справджується і перевірка властивостей функцій $u(x,t)$ завершена.

Формулі (31) можна надати іншого вигляду, якщо ввести позначення

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n}\exp(-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}).$$

Тоді формула (31) набуде вигляду

$$u(x,t) = \int\limits_{R^n} \Gamma(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi. \tag{38}$$

Функція $\Gamma(x,t,y,\tau)$ називається фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності.

Розглянемо задачу Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Pi. \tag{39}$$

У випадку однорідної початкової умови

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{40}$$

розв'язок задачі (39), (40) знаходимо за формулою

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \omega(x,t,\tau)d\tau, \tag{41}$$

де функція $\omega(x,t,\tau)$ – розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності:

$$\omega_t = a^2\Delta\omega, \quad \omega|_{t=\tau} = f(x,\tau). \tag{42}$$

Розв'язок задачі (42) знаходимо за формулою Пуассона (31):

$$\omega(x,t,\tau) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y,\tau) \exp\Big(-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\Big)dy.$$

Звідси і з (41) отримуємо розв'язок задачі (39), (40):

$$u(x,t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^n} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} f(y,\tau) \times$$

$$\times \exp\Big(- \frac{|x-y|^2}{4a^2(t-\tau)}\Big) dy. \tag{43}$$

З використанням позначення фундаментального розв'язку рівняння теплопровідності формула (43) набуває вигляду

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x,t,y,\tau) f(y,\tau) d\tau. \tag{44}$$

Зауваження 1. Розв'язок задачі Коші можна знаходити за формулою Пуассона, але іноді зручніше застосувати метод розділення змінних.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші

$$u_t = u_{xx} + e^{-t}\cos x, \quad u|_{t=0} = \cos x.$$

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді

$$u(t,x) = v(t)\cos x, \tag{45}$$

де $v(t)$ – невідома функція. Підставимо вираз для $u(t,x)$ у рівняння і початкову умову, в результаті чого одержимо задачу Коші для звичайного неоднорідного диференціального рівняння:

$$v'(t) + v(t) = e^{-t}, \quad v(0) = 1.$$

Розв'язок шукаємо у вигляді $v(t) = v_{\text{з.о}} + v_{\text{ч.н}}$, де $v_{\text{з.о}}$ задовольняє рівняння $v'(t) = -v(t)$, звідки $v(t) = Ce^{-t}$.

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $v_{\text{ч.н}} = C(t)e^{-t}$. Маємо

$$C'(t)e^{-t} = e^{-t} \Rightarrow C'(t) = 1 \Rightarrow C(t) = t + C_1.$$

Отже, $v(t) = C_1e^{-t} + te^{-t}$. Задовольняємо початкову умову: $v(0) = C_1 = 1$. Тоді $v(t) = (1+t)e^{-t}$. Підставимо $v(t)$ в (45) і остаточно одержимо розв'язок задачі Коші у вигляді

$$u(t,x) = (1+t)e^{-t}\cos x.$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші

$$u_t = \Delta u + \sin t \cdot \sin x \cdot \sin y; \quad u|_{t=0} = 1.$$

Розв'язання. Розв'язок задачі Коші шукаємо у вигляді

$$u(t, x, y) = v(t) \sin x \sin y + 1, \tag{46}$$

де $v(t)$ – невідома функція. Підставимо функцію (46) у рівняння і врахуємо, що $\Delta(\sin x \cdot \sin y) = -2 \sin x \sin y$. Одержимо задачу:

$$v'(t) + 2v(t) = \sin t, \tag{47}$$

$$v|_{t=0} = 0. \tag{48}$$

Як і в попередньому прикладі, розв'язок $v(t)$ шукатимемо у вигляді $v(t) = v_{\text{з.о}} + v_{\text{ч.н}}$, де $v_{\text{з.о}}$ – розв'язок однорідного рівняння $v'(t) + 2v(t) = 0 \Rightarrow v_{\text{з.о}}(t) = Ce^{-2t}$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $v_{\text{ч.н}} = a \sin t + b \cos t$.

Для визначення коефіцієнтів a і b підставимо $v_{\text{ч.н}}$ в рівняння (47):

$$a \cos t - b \sin t + 2a \sin t + 2b \cos t = \sin t,$$

звідки $a + 2b = 0$, $2a - b = 1$. Отже, $a = \dfrac{2}{5}$, $b = -\dfrac{1}{5}$, $v_{\text{ч.н}} = \dfrac{2}{5} \sin t - \dfrac{1}{5} \cos t$, а розв'язок $v(t)$ запишемо у вигляді

$$v(t) = Ce^{-2t} + \frac{1}{5}(2 \sin t - \cos t).$$

Задовольняємо початкову умову (48):

$$v(0) = C - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{5}.$$

Остаточно маємо

$$v(t) = \frac{1}{5}(e^{-2t} + 2 \sin t - \cos t),$$

тому розв'язок (46) набуде вигляду

$$u(t, x, y) = \frac{1}{5}(e^{-2t} + 2\sin t - \cos t)\sin x \sin y + 1.$$

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$4u_t = u_{xx}; \quad u|_{t=0} = e^{2x-x^2}. \tag{49}$$

Розв'язання. Позначимо через $v(y,t)$ перетворення Фур'є невідомої функції $u(x,t)$:

$$v(y,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ixy}dx.$$

Застосовуючи перетворення Фур'є, маємо рівняння $4v_t = -y^2v$, розв'язком якого є функція $v(y,t) = Ce^{-\frac{y^2t}{4}}$. Діючи перетворенням Фур'є на початкову умову, одержимо

$$v(0,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{2x-x^2-ixy}dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-[x^2-x(2-iy)+\frac{(2-iy)^2}{4}]+\frac{(2-iy)^2}{4}}dx =$$

$$= e^{\frac{(2-iy)^2}{4}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x-\frac{2-iy}{2}\right)^2} dx = \sqrt{\pi}e^{\frac{(2-iy)^2}{4}}.$$

Отже, задовольняючи початкову умову, маємо $v(y,0) = C = \sqrt{\pi}\exp\left(\dfrac{(2-iy)^2}{4}\right)$. Звідси $v(y,t) = \sqrt{\pi}e^{-\frac{y^2t-(2-iy)^2}{4}}$.

Застосуємо до функції $v(y,t)$ формулу оберненого перетворення Фур'є і одержимо розв'язок задачі (49) у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\pi}e^{-\frac{y^2}{4}(t+1)-iy+1+ixy}dy =$$

$$= \frac{e}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[-\left(\frac{y^2}{4}(t+1) - \frac{2iy(1+x)\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t+1}} - \frac{(1-x)^2}{t+1}\right) - \frac{(1-x)^2}{t+1}\right]}{\frac{\sqrt{t+1}}{2}} d\left(\frac{y\sqrt{t+1}}{2}\right) =$$

$$= \frac{e^{1-\frac{(1-x)^2}{t+1}}}{\sqrt{\pi}(t-1)}\sqrt{\pi} = \frac{e^{\frac{t+1-x^2+2x-1}{t+1}}}{\sqrt{t-1}} = (t-1)^{-1/2} e^{\frac{2x-x^2+t}{t+1}}.$$

Приклад 4. Знайти фундаментальний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Розв'язання. У образах Фур'є цьому рівнянню відповідає рівняння

$$\frac{dV}{dt} = -\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(\xi,\tau)\sigma_i\sigma_j V,$$

нормальним розв'язком якого є функція

$$Q(t,\sigma;\tau,\xi) = \exp\left\{-\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(\xi,\tau)\sigma_i\sigma_j t\right\}.$$

Фундаментальний розв'язок має вигляд

$$Z(x,t;\xi,\tau) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R_n} \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n} \sigma_k x_k - \right.$$

$$\left. - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(\xi,\tau)\sigma_i\sigma_j t \right\} d\sigma. \tag{20}$$

За допомогою лінійної заміни, яка приводить квадратичну форму $\sum\limits_{ij=1}^{n} a_{ij}(\xi,\tau)\sigma_i\sigma_j$ до канонічного вигляду, інтеграл Фур'є (20) виражається так

$$Z(x,t;\xi,\tau) = \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-n} \left[\det a^{ij}(\xi,\tau)\right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\sum\limits_{ij=1}^{n} a^{ij}(\xi,\tau)x_i x_j}{4t}\right\},$$

де (a^{ij}) – елементи матриці, оберненої до (a_{ij}).

Означимо простори, в яких будуть вивчатись крайові задачі. Позначимо через l, r, s – дійсні додатні числа, $l \geq 0$, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\} = l - [l]$; $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)}, x^{(1)})$, $R(t^{(1)}, x^{(2)})$ – довільні точки із Q.

Позначимо через $H^l(Q)$ – банаховий простір функцій $U(t,x)$, неперервних в $\overline{Q}$, які мають неперервні похідні в Q вигляду $\partial_t^s \partial_x^r u$, $2s + |r| \leq [l]$, для яких скінченна норма

$$\|U;Q\|_l = \sum_{2s+|r|\leq[l]} \|U;Q\|_{2s+|r|} + \langle U;Q\rangle_l,$$

де $\|U;Q\|_0 = \sup\limits_{P\in\overline{Q}} \|U(t,x)\|$,

$$\|U;Q\|_{2s+|r|} = \sup_{P\in\overline{Q}} |\partial_t^s \partial_x^r U(P)|,$$

$$\langle U;Q\rangle_l = \langle U;Q\rangle_{x,l} + \langle U;Q\rangle_{t,l},$$

$$\langle U;Q\rangle_{k,l} = \sum_{2s+|r|=[l]} \sup_{(P_1,R)\in\overline{Q}} |x^{(1)} - x^{(2)}|^{-\{l\}} \times$$

$$\times |\partial_t^s \partial_x^r U(P_1) - \partial_t^s \partial_x^r U(R)|,$$

$$\langle U;Q\rangle_{t,l} = \sum_{2s+|r|=[l]} \sup_{(P_1,P_2)\in\overline{Q}} |t^{(1)} - t^{(2)}|^{-\left\{\frac{l}{2}\right\}} \times$$

$$\times |\partial_t^s \partial_x^r U(P_1) - \partial_t^s \partial_x^r U(P_2)|,$$

$$|r| = r_1 + r_2 + \ldots + r_n,\ \partial_x^r = \partial_{x_1}^{r_1} \partial_{x_2}^{r_2} \ldots \partial_{x_n}^{r_n}.$$

$H^l(\Pi)$ – множина функцій, які належать $H^l(Q)$ для довільної замкнутої підобласті $\overline{Q} \subset \Pi$.

Розділ 1. Крайові задачі для параболічних рівнянь другого порядку

Крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними мають широке застосування під час моделювання різноманітних процесів у природі. Коефіцієнти диференціальних рівнянь та параметрів крайових умов пов'язані з певними характеристиками процесу, від яких залежить розв'язок задачі, зокрема його диференціальні властивості.

В цьому розділі вивчається задача Коші і основні крайові задачі для параболічних рівнянь другого порядку з гладкими коефіцієнтами.

§1.1. Фундаментальний розв'язок параболічного рівняння

Розглянемо рівняння

$$Lu \equiv \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\left(x,t\right)\partial_{x_i}\partial_{x_j}u + \sum_{i=1}^{n} b_i\left(x,t\right)\frac{\partial u}{\partial_{x_i}} +$$

$$+c\left(x,t\right)u - \frac{\partial u}{\partial_{x_t}} = 0, \qquad (1.1)$$

де коефіцієнти $a_{ij}\left(x,t\right)$, $b_i\left(x,t\right)$, $c\left(x,t\right)$ визначені в циліндрі

$$Q \equiv \bar{D} \times [T_0, T_1] \equiv \left\{\left(x,t\right),\, x \in \bar{D},\, T_0 \leq t \leq T_1\right\},$$

$\bar{D}$ – замикання обмеженої області $D \subset R^n$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Вважаємо виконаними такі обмеження:

А) для всіх $(t,x) \subset Q$ і $\forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$\lambda_0 \left|\xi\right|^2 \leq \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\left(x,t\right)\xi_i\xi_j \leq \lambda_1 \left|\xi\right|^2; \qquad (1.2)$$

λ_0, λ_1 – додатні сталі;

Б) коефіцієнти $a_{ij} \in H^a\left(Q\right)$, $b_i \in H^a\left(Q\right)$, $c \in H^a\left(Q\right)$, $a \in (0,1)$.

Позначимо через $Z(x,t;\xi,\tau)$ фундаментальний розв'язок параболічного рівняння

$$L_0 u\,(x,t) = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(\xi,\tau)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t} = 0 \qquad (1.3)$$

у вигляді

$$Z\,(x,t;\xi,\tau) =$$

$$= \left(2\sqrt{n}\right)^{-n}\left[\det\left(a^{ij}\,(\xi,\tau)\right)\right]^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\exp\left[\frac{\theta^{(\xi,\tau)}\,(x,\xi)}{4\,(t-\tau)}\right].$$

Позначимо

$$r(\xi,\tau) \equiv \left(2\sqrt{n}\right)^{-n}\left[\det\left(a^{ij}\,(\xi,\tau)\right)\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\theta^{(\xi,\tau)}\,(x,\xi) = \sum_{ij=1}^{n} a^{ij}(y,\tau)(x_i-\xi_i)(x_j-\xi_j) = \rho(x,\xi,\tau,y),$$

$(a^{ij}(x,t))$ – матриця обернена до матриці $(a_{ij}(x,t))$.

Фундаментальний розв'язок рівняння (1.1) будемо шукати у вигляді:

$$\Gamma\,(x,t;\xi,\tau) = Z\,(x,t;\xi,\tau) +$$

$$+\int_{\tau}^{t}\int_{D} Z(x,t;\eta,b)\Phi(\eta,b;\xi,\tau)d\eta db. \qquad (1.4)$$

Вважаємо, що $\Phi(\eta,b;\xi,\tau)$ – неперервна за змінними (η,b) в області Q і максимально неперервна по Гельдеру (з показником β) за $x\in D$ рівномірно по відношенню до змінної t. Тоді з умови $L\Gamma=0$ одержимо співвідношення:

$$\Phi\,(\eta,b;\xi,\tau) = LZ\,(x,t;\xi,\tau) +$$

$$+\int_{\tau}^{t}\int_{D} LZ(x,t;y,b)\Phi(y,b;\xi,\tau)dydb. \qquad (1.5)$$

Отже, для кожних фіксованих (ξ,τ) функція $\Phi(y,b;\xi,\tau)$ є розв'язком інтегрального рівняння Вольтера з ядром $LZ(x,t;y,b)$.

Із рівності

$$LZ\left(x,t;y,b\right)=\sum_{ij=1}^{n}\left[a_{ij}\left(x,t\right)-a_{ij}\left(y,b\right)\right]\partial_{x_i}\partial_{x_j}Z\left(x,t;y,b\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}b_i\left(x,t\right)\partial_{x_i}Z\left(x,t;y,b\right)\partial_{x_j}+c\left(x,t\right)Z\left(x,t;y,b\right)$$

маємо

$$\left|LZ\left(x,t;y,b\right)\right|\leq\frac{c}{\left(t-b\right)^{\mu}\left|x-y\right|^{n+2-2\mu-a}} \tag{1.6}$$

$$(1-\frac{a}{2}<\mu<1).$$

Розв'язок рівняння (1.5) шукаємо у вигляді

$$\Phi\left(x,t;\xi,\tau\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(LZ\right)_k\left(x,t;\xi,\tau\right), \tag{1.7}$$

де $\left(LZ\right)_1=LZ$ і $\left(LZ\right)_k=\int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D}LZ(x,t,y,b)\times$ $\times\left(LZ\right)_{(k-1)}(y,b,\xi,\tau)dydb.$

Для доведення збіжності ряду (1.7) використаємо таку лему.

Лема 1.1. *Якщо D – обмежена область із R^n і $0<a<n$, $0<\beta<n$, то для будь-яких $x\in D$ і $Z\in D$, $x\neq Z$ правильна нерівність*

$$\int\limits_{D}\frac{dy}{\left|x-y\right|^{a}\left|y-z\right|^{\beta}}\leq$$

$$\leq\begin{cases} c\left|x-z\right|^{n-a-\beta}, & \text{якщо } a+\beta>n,\\ c, & \text{якщо } a+\beta<n.\end{cases} \tag{1.8}$$

Доведення. Розіб'ємо область D на три частини $D_1 = \left\{y, |y-z| < \dfrac{|x-z|}{2}\right\}$, $D_2 = \left\{y, |y-x| < \dfrac{|x-z|}{2}\right\}$, $D_3 = D \backslash (D_1 \cup D_2)$, одержимо

$$\int\limits_D \frac{dy}{|x-y|^a |y-z|^\beta} = \iint\limits_{|y-z|<\frac{|x-z|}{2}} \frac{dy}{|x-y|^a |y-z|^\beta} +$$

$$+ \iint\limits_{|y-x|<\frac{|x-z|}{2}} \frac{dy}{|x-y|^a |y-z|^\beta} + \iint\limits_{D\backslash(D_1\cup D_2)} \frac{dy}{|x-y|^a |y-z|^\beta} \leq$$

$$\leq \frac{2^a}{|x-z|^a} \iint\limits_{|y-z|<\frac{|x-z|}{2}} \frac{dy}{|y-z|^\beta} + \frac{2^\beta}{|x-z|^\beta} \iint\limits_{|y-x|<\frac{|x-z|}{2}} \frac{dy}{|x-y|^a} +$$

$$+ \frac{2^{a+\beta}}{|x-z|^{a+\beta}} \iint\limits_{D_3} \frac{dy}{|x-y|^a |y-z|^\beta} dy \leq$$

$$\leq \begin{cases} c\,|x-z|^{n-a-\beta}, & \text{якщо } a+\beta > n, \\ \text{const}\,, & \text{якщо } a+\beta < n. \end{cases}$$

Використовуючи лему 1.1 і нерівність (1.6) маємо

$$\left|(LZ)_2\,(x,t;\xi,\tau)\right| \leq \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu+(\mu-1)}\,|x-\xi|^{n+2-2\mu-a+(2-2\mu-a)}},$$

якщо $2\mu < 1$ і $2\,(n+2-2\mu-a) < n$. Оскільки $\mu < 1$ і $2 < 2\mu + a$, то особливість $(LZ)_2$ слабша по відношеню до особливості в LZ.

Оцінюючи аналогічно $(LZ)_3$ і далі, одержимо таке значення $k = \nu_0$, для якого правильна нерівність

$$\left|(LZ)_{\nu_0}\,(x,t;\xi,\tau)\right| \leq \text{const}\,. \tag{1.9}$$

Використовуючи метод математичної індукції знаходимо

$$\left|(LZ)_{m+\nu_0}(x,t;\xi,\tau)\right| \leq K_0 \frac{\left[K(t-\tau)^{1-\mu}\right]^m}{\Gamma((1-\mu)m+1)}, \tag{1.10}$$

де K, K_0 – константи, $\Gamma(t)$ – гамма-функція.

Оцінимо $(LZ)_{m+\nu_0+1}(x,t;\xi,\tau)$. Маємо

$$\left|(LZ)_{m+\nu_0+1}(x,t;\xi,\tau)\right| \leq \text{const } K_0 \frac{K^m}{\Gamma((1-\mu)m+1)}\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t}(t-b)^{-\mu}(b-\tau)^{(1-\mu)m}db.$$

Зробивши заміну $\rho=\dfrac{b-\tau}{t-\tau}$ і скориставшись формулою

$$\int\limits_0^1 (1-\rho)^{a-1}\rho^{b-1}d\rho=\frac{\Gamma(\mathrm{a})\Gamma(\mathrm{b})}{\Gamma(a+b)},$$

одержимо

$$\left|(LZ)_{m+\nu_0+1}(x,t;\xi,\tau)\right| \leq K_0\frac{\left[K(t-\tau)^{1-\mu}\right]^{m+1}}{\Gamma((1-\mu)(m+1)+1)}. \quad (1.11)$$

Враховуючи оцінку (1.10), одержуємо абсолютну збіжність ряду (1.7). Отже, $\Phi\left(x,t;\xi,\tau\right)$ є розв'язком інтегрального рівняння (1.3) і правильна оцінка

$$\left|\Phi\left(x,t;\xi,\tau\right)\right| \leq \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}\left|x-\xi\right|^{n+2-2\mu-a}} \quad (1.12)$$

$$(1-\frac{a}{2}<\mu<1).$$

Для вивчення властивостей функції $\Phi\left(x,t;\xi,\tau\right)$ будемо використовувати лему.

Лема 1.2. *Якщо* $-\infty<a<\dfrac{n}{2}+1$, $-\infty<\beta<\dfrac{n}{2}+1$, *то*

$$I=\int\limits_b^t\int\limits_{R^n}(t-\tau)^{-a}\exp\left\{-\frac{h\left|x-\xi\right|^2}{4\left(t-\tau\right)}\right\}(\tau-b)^{-\beta}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{h\left|\xi-y\right|^2}{4\left(\tau-b\right)}\right\}d\xi d\tau=\left(\frac{4\pi}{h}\right)^{\frac{n}{2}}\times$$

$$\times B\left(\frac{n}{2}-a+1,\frac{n}{2}-\beta+1\right)\times$$

$$\times\left(t-b\right)^{-\frac{n}{2}+1-a-\beta}\exp\left\{-\frac{h\left|x-y\right|^2}{4\left(\tau-b\right)}\right\}. \qquad (1.13)$$

Доведення. Зробивши в інтегралі I заміну

$$z_e=\left(h\frac{t-b}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\xi_e-y_e}{2(\tau-b)^{\frac{1}{2}}}+\left(h\frac{\tau-b}{t-\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{y_e-x_e}{2(t-b)^{\frac{1}{2}}}$$

і врахувавши рівність $\dfrac{h(x_i-\xi_i)^2}{4(t-i)}+\dfrac{h(\xi_i-y_i)^2}{4(\tau-b)}=\dfrac{h(x_i-y_i)^2}{4(t-b)}+z_i^2$ одержимо, обчисливши інтеграл, рівність (1.13).

Оскільки

$$\exp\left\{-\frac{\theta^{y,\tau}}{4(t-\tau)}\right\}=\exp\left\{-\varepsilon\frac{\theta^{y,\tau}}{4(t-\tau)}\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-(1-\varepsilon)\frac{\theta^{y,\tau}}{4(t-\tau)}\right\},\quad \varepsilon>0,$$

і скориставшись нерівністю $b^{\frac{n}{2}-\mu}e^{-\varepsilon b}\leq \mathrm{const}$ для $0\leq b<\infty$, одержимо оцінку функції $Z\left(x,t;\xi,\tau\right)$:

$$\left|Z\left(x,t;\xi,\tau\right)\right|\leq\frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu}\left|x-\xi\right|^{n-2\mu}}\exp\left\{-\frac{\lambda_0^*\left|x-\xi\right|^2}{4\left(t-\tau\right)}\right\}, \qquad (1.14)$$

для $\lambda_0^*<\lambda_0$ і $0\leq\mu\leq\dfrac{n}{2}$.

Повторюючи вищенаведені міркування, знаходимо

$$\left|\partial_x Z\left(x,t;\xi,\tau\right)\right|\leq\frac{\mathrm{const}}{(t-\tau)^{\mu}\left|x-\xi\right|^{n+1-2\mu}}\exp\left\{-\frac{\lambda_0^*\left|x-\xi\right|^2}{4\left(t-\tau\right)}\right\},$$

$$0 \le \mu \le \frac{n+1}{2},$$

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial t}\right| + \sum_{ij=1}^{n} \left|\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j}\right| \le \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu} |x-\xi|^{n+2-2\mu}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\lambda_0^* |x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\}, \tag{1.15}$$

$$|LZ| \le \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu} |x-\xi|^{n-2\mu-a+2}} \exp\left\{-\frac{\lambda_0^* |x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\},$$

$$0 \le \mu \le \frac{n+2-a}{2},$$

для $\lambda_0^* < \lambda_0$.

За допомогою леми 1.2 при $\mu = \dfrac{n+2-a}{2}$ маємо

$$|(LZ)_2(x,t;\xi,\tau)| \le \frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\frac{n+2-2a}{2}}} \exp\left\{-\frac{\lambda_0^* |x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\}.$$

Скориставшись методом математичної індукції, маємо

$$|(LZ)_m(x,t;\xi,\tau)| \le \frac{H_0 H^m}{\Gamma(m\alpha)} (t-\tau)^{m\alpha - \frac{n}{2} - 1} \times$$

$$\times \exp\left\{-\frac{\lambda_0^* |x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\}, \tag{1.16}$$

де H_0, H – деякі додатні сталі. Скориставшись означенням функції, маємо

$$|\Phi|(x,t;\xi,\tau) \le |LZ| \le \frac{c}{(t-\tau)^{\frac{n+2-a}{2}}} \exp\left\{-\lambda_0^* \frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\},$$

$$(1.17)$$

$$|\Phi|(x,t;\xi,\tau) \le \frac{c}{(t-\tau)^{\mu} |x-\xi|^{n+2-2\mu-a}} \times$$

$$\times \exp\left\{-\lambda_1^* \frac{|x-\xi|^2}{4\,(t-\tau)}\right\}, \tag{1.18}$$

для $0 \le \mu \le \dfrac{n+2-a}{2}$, $\lambda_1^* < \lambda_0^*$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1.1. *Нехай функція $\Phi\,(x,t;\xi,\tau)$ неперервна по Гельдеру за змінними x. Тоді для будь-якого β, $0<\beta<a$, справджується нерівність*

$$|\Phi\,(x,t;\xi,\tau) - \Phi\,(y,t;\xi,\tau)| \le \frac{\mathrm{c}\,|x-y|^\beta}{(t-\tau)^{\frac{n+2-a}{2}}}\times$$

$$\times\left\{\exp\left[-\frac{-\lambda^*\,|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right] + \exp\left[-\frac{-\lambda^*\,|y-\xi|^2}{(t-\tau)}\right]\right\}, \tag{1.19}$$

де $\gamma = a-\beta$, $\lambda^* = \mathrm{const} > 0$.

Доведення. Спочатку встановимо нерівність

$$|LZ\,(x,t;\xi,\tau) - LZ(y,t;\xi,\tau)| \le$$

$$\le \frac{c\,|x-y|^\beta}{(t-\tau)^{\frac{n+2-a}{2}}}\left\{-\exp\left[-\frac{k\,|x-\xi|^2}{t-\tau}\right] + \exp\left[-\frac{k\,|y-\xi|^2}{t-\tau}\right]\right\},$$

де k – додатна стала. Розглянемо випадок $|x-y|^2 < t-\tau$ і візьмемо із $LZ\,(x,t;\xi,\tau)$ доданок

$$F\,(x,t;\xi,\tau) = [a_{ij}\,(x,t) - a_{ij}\,(y,t)]\,\frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} Z\,(x,t;\xi,\tau)\,. \tag{1.20}$$

Маємо

$$|F\,(x,t;\xi,\tau) - F\,(y,t;\xi,\tau)| = [a_{ij}\,(x,t) - a_{ij}\,(\xi,\tau)]\times$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} Z\,(x,t;\xi,\tau) + \left[\frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} Z\,(x,t;\xi,\tau) - \frac{\partial^2}{\partial_{y_i}\partial_{y_j}} Z\,(y,t;\xi,\tau)\right]\times$$

$$\times \left[a_{ij}(x,t) - a_{ij}(y,t)\right] = F_1 + F_2.$$

Враховуючи нерівності (1.15) і вибравши $\mu = \dfrac{n+2}{2}$, для F_1 правильна оцінка

$$|F_1| \le \frac{c\,|x-y|^a}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} \exp\left[-\frac{\lambda_0^*\,|x-\xi|^2}{4\,(t-\tau)}\right]. \tag{1.21}$$

Застосовуючи теорему про "середнє", одержимо

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} Z(x,t;\xi,\tau) - \frac{\partial^2}{\partial_{z_i}\partial_{y_j}} Z(y,t;\xi,\tau)\right] \le$$

$$\le \frac{c\,|x-y|}{(t-\tau)^{\frac{n+3}{2}}} \exp\left[-k_1 \frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}\right].$$

Отже, для виразу F_2 правильна нерівність

$$|F_2| \le \frac{c\,|x-y|}{(t-\tau)^{\frac{n+3-a}{2}}} \exp\left\{-k_2 \frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}\right\}, \tag{1.22}$$

де $k_1 > 0$, $k_2 > 0$.

Враховуючи нерівності (1.21) і (1.22), знаходимо

$$|F(x,t;\xi,\tau) - F(y,t;\xi,\tau)| \le$$

$$\le \frac{c\,|x-y|^\beta}{(t-\tau)^{\frac{n+2-a}{2}}} \exp\left[-k\xi \frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right]. \tag{1.23}$$

Аналогічно знаходиться оцінка інших доданків виразу LZ.

Якщо $|x-y|^2 > t-\tau$ то, враховуючи нерівності (1.15), при $\mu \le \dfrac{n+2-a}{2}$ маємо

$$|LZ(y,t;\xi,\tau)| \le \frac{c\,|t-\tau|^{\frac{\beta}{2}}}{(t-\tau)^{\frac{n+2-a}{2}}} \exp\left\{-\frac{\lambda_0^*\,|x-\xi|^2}{4\,(t-\tau)}\right\}.$$

Аналогічна нерівність має місце і для $LZ\left(y,t;\xi,\tau\right)$. Оскільки в цьому випадку $(t-\tau)^{\frac{\beta}{2}} \leq |x-y|^{\beta}$ то із нерівностей для LZ випливає (1.20).

Позначимо через

$$\psi\left(x,t;\xi,\tau\right) = \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D} LZ(x,t;y,z)\Phi(y,\sigma;\xi,\tau)dyd\sigma.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} &\left|\psi\left(x,t;\xi,\tau\right)-\psi\left(y,t;\xi,\tau\right)\right| \leq \\ &\leq c\left|x-y\right|^{\beta}\left[I\left(x,t;\xi,\tau\right)+I\left(y,t;\xi,\tau\right)\right], \end{aligned} \tag{1.24}$$

де

$$I\left(x,t;\xi,\tau\right) = \int\limits_{\tau}^{t}\int\limits_{D} \frac{1}{(t-\sigma)^{\frac{n+2-\gamma}{2}}}\exp\left\{-k\frac{|x-z|^2}{t-\sigma}\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{(\sigma-\tau)^{\frac{n+2-\gamma}{2}}}\exp\left\{-\frac{\lambda_0^*\left|z-\xi\right|^2}{4\left(\sigma-\tau\right)}\right\}dzd\sigma,$$

то, використовуючи лему 1.2, маємо

$$\left|I\left(x,t;\xi,\tau\right)\right| \leq \frac{e}{(t-\tau)^{\frac{n+2-\gamma-2}{2}}}\exp\left\{-k_4\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}, \tag{1.25}$$

$$\left|I\left(y,t;\xi,\tau\right)\right| \leq \frac{e}{(t-\tau)^{\frac{n+2-\gamma-2}{2}}}\exp\left\{-k_4\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}\right\}.$$

Об'єднуючи нерівності (1.23)–(1.25) одержимо нерівність (1.19).

Теорема 1.2. *Функція $\Gamma\left(x,t;\xi,\tau\right)$, яка визначена рівністю (1.4), є фундаментальним розв'язком рівняння $Lu = 0$ в області Q.*

Доведення. Покажемо, що $L\Gamma = 0$ при фіксованих ξ і τ. Запишемо $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ у вигляді

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z(x,t;\xi,\tau) + \int\limits_{\tau}^{t_0}\int\limits_{D} Z(x,t;\eta,\sigma)\,\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta d\sigma +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{D} Z(x,t;\eta,\sigma)\,\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta d\sigma, \qquad (1.26)$$

t_0 – фіксоване значення, $\tau \le t_0 < t$.

В інтегралі I_1

$$I_1 = \int\limits_{\tau}^{t_0}\int\limits_{D} Z(x,t;\eta,\sigma)\,\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta d\sigma$$

маємо $t-\sigma \ge t-t_0$. Тому похідні за змінною x до другого порядку можна обчислювати під знаком інтеграла.

В інтегралі I_2

$$I_2 = \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{D} Z(x,t;\eta,\sigma)\,\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta d\sigma$$

функція $\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)$ при фіксованих $(\xi\tau)$ задовольняє умову Гельдера відносно η з показником меншим a. Тому існують похідні від інтеграла I_2 за змінною x до другого порядку під знаком інтеграла.

Отже,

$$\frac{\partial^2\Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} + \int\limits_{\tau}^{t_0}\int\limits_{D} \frac{\partial^2 Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial x_i \partial x_j}\times$$

$$\times\Phi(\eta,\sigma;\xi,\tau)\,d\eta d\sigma + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{D} \frac{\partial^2 Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial x_i \partial x_j}\times$$

$$\times \Phi\left(\eta,\sigma;\xi,\tau\right)d\eta d\sigma. \tag{1.27}$$

Аналогічно знаходимо перші похідні функції $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ за змінними x_i.

Існування $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial t}$ встановлюється за допомогою рівності

$$\frac{\partial \Gamma(x,t;\xi,\tau)}{\partial t} = \frac{\partial Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial t} +$$

$$+\int_{\tau}^{t_0}\int_{D} \frac{\partial Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial t}\Phi\left(\eta,\sigma;\xi,\tau\right)d\eta d\sigma - \Phi\left(x,t;\xi,\tau\right) +$$

$$+\int_{t_0}^{t} d\sigma \int_{D} \frac{\partial Z(x,t;\eta,\sigma)}{\partial t}\Phi\left(\eta,\sigma;\xi,\tau\right)d\eta. \tag{1.28}$$

Використовуючи (1.27), (1.28) і значення $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial x_i}$, одержимо рівність

$$L\Gamma\left(x,t;\xi,\tau\right) = LZ\left(x,t;\xi,\tau\right) - \Phi\left(x,t;\xi,\tau\right) +$$

$$+\int_{\tau}^{t}\int_{D} LZ\left(x,t;\eta,\sigma\right)\Phi\left(\eta,\sigma;\xi,\tau\right)d\eta d\sigma$$

рівносильну співвідношенню $L\Gamma = 0$, оскільки функція Φ задовольняє інтегральне рівняння (1.5).

Покажемо, що для будь-якої неперервної функції $f\left(x\right)$ в $\bar{D}$

$$\lim_{t\to\tau}\int_{D}\Gamma\left(x,t;\xi,\tau\right)f\left(\xi\right)d\xi = f(x) \text{ для } x\in D. \tag{1.29}$$

Для цього досить довести, що

$$I \equiv \int_{D}\int_{\tau}^{t}\int_{D}\left|Z\left(x,t;\eta,\sigma\right)\Phi\left(\eta,\sigma;\xi,\tau\right)\right| d\eta d\sigma d\xi \to 0 \text{ при } t\to\tau.$$

Взявши $\mu = \dfrac{n}{2}$ і використавши лему 1.2, одержимо

$$I \leq c \int\limits_D (t-\tau)^{(a-\frac{n}{2})} \exp\left[-\frac{\lambda_0^* \left|x-\xi\right|^2}{4\left(t-\tau\right)} \right] d\xi.$$

За допомогою заміни $\rho = \dfrac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}$ одержимо нерівність

$$I \leq c\left(t-\tau\right)^{\frac{a}{2}},$$

із якої випливає $\lim\limits_{t\to\tau} I = 0$.

Розглянемо функцію вигляду

$$W\left(x,t\right) = \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_D \Gamma\left(x,t;\xi,\tau\right) f(\xi,\tau) d\xi d\tau. \qquad (1.30)$$

Правильна така теорема.

Теорема 1.3. *Якщо $f(x,t)$ – неперервна в Q функція, то $W\left(x,t\right)$ буде неперервною функцією в Q, а $\partial_{x_i} W$ – неперервна при $x \in D$, $T_0 < t \leq T_1$ функція. Якщо $f(t,x)$ – функція, локально неперервна по Гельдеру за змінною $x \in D$, рівномірно за t, $\partial_{x_i x_j} W$ і $\partial_t W$ будуть неперервними функціями при $x \in D$, $T_0 < t \leq T_1$ і*

$$LW(x,t) = -f(x,t).$$

Доведення. Оскільки

$$\Gamma\left(x,t;\xi,\tau\right) = Z\left(x,t;\xi,\tau\right) + \int\limits_{\tau}^{t} \int\limits_D Z\left(x,t;\eta,\sigma\right) \Phi\left(\eta,\sigma;\xi,\tau\right) d\eta d\sigma,$$

то $W\left(x,t\right)$ запишемо у вигляді $W\left(x,t\right) = V\left(x,t\right) + U\left(x,t\right)$, де

$$V\left(x,t\right) = \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_D Z\left(x,t;\xi,\tau\right) f(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

$$U(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} Z(x,t;\xi,\tau)\, \bar{f}(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

$$\bar{f}(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} \Phi(x,t;\xi,\tau)\, f(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Поклавши $\Phi(x,t;\xi,\tau) = 0$ при $t < \tau$ і скориставшись нерівністю (1.12) одержимо, що $\bar{f}(\xi,t)$ – рівномірно неперервна по Гельдеру відносно x з показником $\beta < a$. Скориставшись нерівністю (1.20) знаходимо

$$\left|\bar{f}(x,t) - \bar{f}(y,t)\right| \leq c\,|x-y|^{\beta}\,|A(x,t) - A(y,t)|\,,$$

де

$$A(x,t) = \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} (t-\tau)^{-\frac{n+2-\gamma}{2}} \exp\left\{-\frac{\lambda_0^*\,|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right\} d\xi d\tau.$$

Зробивши заміну $\rho = \dfrac{|x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}$, одержимо

$$A(x,t) \leq \mathrm{c} \int\limits_{T_0}^{t} (t-\tau)^{\frac{\gamma-2}{2}} d\tau \leq \mathrm{const}\,.$$

Аналогічно одержимо оцінку виразу $A(y,t)$. Отже, функція $\bar{f}(x,t)$ неперервна по Гельдеру з показником β. Тому

$$LW(x,t) = -f(x,t) - \bar{f}(x,t) + \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} LZ(x,t;\xi,\tau)\, f(\xi,\tau) d\xi d\tau +$$

$$+ \int\limits_{T_0}^{t} \int\limits_{D} LZ(x,t;\eta,\sigma)\, \bar{f}(\eta,\sigma)\, d\eta d\sigma = -f(x,t) +$$

$$+\int_{T_0}^{t}\int_{D} f(\xi,\tau)\Big\{-\Phi\left(x,t,\xi,\tau\right)+LZ\left(x,t;\xi,\tau\right)+$$

$$+\int_{T_0}^{t}\int_{D} LZ\left(x,t;\eta,\sigma\right)\Phi\left(\eta,\sigma;x,t\right)d\eta d\sigma\Big\}d\xi d\tau=-f\left(x,t\right).$$

Зауваження 1. Фундаментальний розв'язок рівняння (1.1) у випадку, коли D – необмежена область в R^n або $D=R^n$, будується за схемою, приведеною для випадку обмеженої області D.

§1.2. Потенціал простого шару

Нехай $\varphi(x,t)$ неперервна на $S\times[0,T]$, D_0 – обмежена область, $\bar{D}\subset D_0$, так, щоб умови а), б) виконувались в $Q_0=\bar{D}_0\times[0,T]$, S – межа області D.

Нехай $x^{(0)}\in S$ і Π – дотична площина до S в точці $x^{(0)}$. Розглянемо замкнуту кулю B_δ з центром $x^{(0)}$ і радіусом δ, $S\delta=S\cap B\delta$. Якщо δ досить мале, то ортогональна проекція $S\delta$ на Π визначає взаємно однозначне відображення між точками $\xi\in S\delta$ і $\bar{\xi}$ деякої множини $S_\delta^{'}$ ($\bar{\xi}$ – проекція ξ). Функції $\xi=\xi(\bar{\xi})$ і $\bar{\xi}=\bar{\xi}(\xi)$ неперервні по Гельдеру з показником λ, $x^0\in S_\delta^{'}$.

Нехай x – точка на внутрішній нормалі $n_x\to S$ в точці $x^{(0)}$, $\left|x-x^0\right|<\delta_0$. Оскільки $S\in C^{1+\lambda}$, то для довільної точки $\xi\in S\delta$ виконується нерівність

$$\left|\xi-\bar{\xi}\right|\le c\left|x^{(0)}-\xi\right|^{1+\lambda}. \tag{1.31}$$

Покажемо, що

$$0<c\le\frac{|x-\xi|}{\left|x-\bar{\xi}\right|}\le\mathrm{const}\,. \tag{1.32}$$

Якщо $\left|x^{(0)} - \xi\right| > 2\left|x - x^0\right|$, то із (1.31), маємо

$$\left|x - \bar{\xi}\right| \leq \left|x - x^0\right| + \left|x^{(0)} - \xi\right| + \left|\xi - \bar{\xi}\right| \leq c\left|x^{(0)} - \xi\right|.$$

Оскільки $|x - \xi| \geq \left|x^{(0)} - \xi\right| - \left|x - x^0\right| > \dfrac{\left|x^{(0)} - \xi\right|}{2}$, то

$$\frac{|x - \xi|}{\left|x - \bar{\xi}\right|} \leq \mathrm{const}\,. \tag{1.33}$$

Якщо $\left|x^{(0)} - \xi\right| \leq 2\left|x - x^0\right|$ то, використовуючи (1.31), одержимо

$$\left|x - \bar{\xi}\right| \leq |x - \xi| + \left|\xi - \bar{\xi}\right| \leq |x - \xi| + c\left|x^{(0)} - \xi\right|^{1+\lambda} \leq$$

$$\leq |x - \xi| + c\,|x - \xi|^{1+\lambda} \leq c\,|x - \xi|\,.$$

Доведення правої частини нерівності (1.32) анологічне.

Рівняння стрибка потенціала простого шару.

Нехай $\varphi(x,t)$ неперервна на $S \times [0,T]$, в області $D_0 \times (0,T)$ розглянемо функцію

$$U\left(x,t\right) = \int\limits_0^t \int\limits_S \Gamma(x,t;\xi,\tau)\varphi(\xi,\tau)d_\xi S d\tau. \tag{1.34}$$

Функція $U\left(x,t\right)$ неперервна в замкнутій області Q_0, якщо її продовжувати нулем на гіперплощині $t = 0$. За допомогою формули (1.4) можна записати

$$\Gamma\left(x,t;\xi,\tau\right) = Z\left(x,t;\xi,\tau\right) + Z_0\left(x,t;\xi,\tau\right),$$

де $Z_0\left(x,t;\xi,\tau\right) = \int\limits_\tau^t \int\limits_{D_0} Z\left(x,t;\eta,\sigma\right)\Phi\left(\eta,\sigma;\xi,\tau\right)d\eta d\sigma.$

Для $x \in D_0$, $\xi \in D_0$, $0 \le \tau < t \le T$ правильні нерівності

$$|D_x Z(x,t;\xi,\tau)| \le \frac{c}{(t-\tau)^{\mu}\,|x-\xi|^{n+1-2\mu}}, \quad \frac{1}{2} < \mu < 1;$$

$$|D_x Z_0(x,t;\xi,\tau)| \le \frac{c}{(t-\tau)^{\mu}\,|x-\xi|^{n+1-2\mu-a}}, \quad 1-\frac{1}{2} < \mu < 1.$$

Позначимо через

$$V\left(x,t\right) = \int\limits_0^t \int\limits_S Z\left(x,t;\xi,\tau\right)\varphi\left(\xi,\tau\right) d_\xi S d\tau,$$

$$W\left(x,t\right) = \int\limits_0^t \int\limits_S Z_0\left(x,t;\xi,\tau\right)\varphi\left(\xi,\tau\right) d_\xi S d\tau.$$

Якщо $x \in D_0 - S$, то

$$D_x W\left(x,t\right) = \int\limits_0^t \int\limits_S D_x Z_0\left(x,t;\xi,\tau\right)\varphi\left(\xi,\tau\right) d_\xi S d\tau. \qquad (1.35)$$

Зокрема, для довільного $x^{(0)} \in S$ маємо

$$\lim_{x \to x_0} D_x W\left(x,t\right) = \int\limits_0^t \int\limits_S D_x Z_0\left(x,t;\xi,\tau\right)\varphi\left(\xi,\tau\right) d_\xi S d\tau.$$

Якщо $x \in D$, то

$$D_x V\left(x,t\right) = \int\limits_0^t \int\limits_S D_x Z\left(x,t;\xi,\tau\right)\varphi\left(\xi,\tau\right) d_\xi S d\tau.$$

Нехай $x^{(0)} \in S$, позначимо через $\vec{\nu}(x^0,t^0)$ внутрішню нормаль в точці (x^0,t^0) з компонентами $\nu_i(x^0,t^0)$,

$$\nu_i\left(x^0,t^0\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x^{(0)},t^{(0)}\right) n_j\left(x_0\right), \;\; 1 \le i \le n,$$

$$\nu_{n+1}\left(x^0, t^0\right) = 0,$$

$\vec{n}_{x^{(0)}} = \left(n_1\left(x^{(0)}\right), \ldots, n_n\left(x^{(0)}\right)\right)$ вектор внутрішньої нормалі до S в точці $x^{(0)}$. Похідна від $U(x,t)$ в напрямку нормалі в точці $(x^{(0)}, t)$ виражається формулою

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial \vec{\nu}(x^{(0)}, t)} = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\left(x^{(0)}, t\right) \cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}}, x_j\right) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x_i}, \quad (1.36)$$

де $\cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}}, x_j\right)$ – косинус кута між $\vec{n}(x^{(0)})$ і додатним напрямом осі x_j. Через $K = K(x^{(0)})$ позначимо довільний замкнутий конус в R^n з вершиною $x^{(0)}$, $K \subset D + \left\{x^{(0)}\right\}$. Отже, кожен напрямок із $x^{(0)}$ в точку $x \in K$ буде лежати всередині області D.

Теорема 1.4. *Якщо виконані умови а), б), $S \in C^{1+\lambda}$, $0 < \lambda < 1$ і функція $\varphi(x,t)$ неперервна на $S \times [0,T]$, то для довільної точки $(x^{(0)}, t)$ при $x^{(0)} \in S$, $0 < t \leq T$ функція $U(x,t)$ задовольняє співвідношення*

$$\lim_{\substack{x \to x^{(0)} \\ x \in K}} \frac{\partial U(x,t)}{\partial \vec{\nu}\left(x^{(0)}, t\right)} = -\frac{1}{2}\varphi\left(x^{(0)}, t\right) +$$

$$+\int_0^t \int_D \frac{\partial \Gamma\left(x^{(0)}, t; \xi, \tau\right)}{\partial \vec{\nu}\left(x^{(0)}, t\right)} \varphi(\xi, \tau) d_\xi S d\tau. \quad (1.37)$$

Доведення. Знайдемо оцінку виразу $\dfrac{\partial Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial \vec{\nu}\left(x^{(0)}, t^{(0)}\right)}$

$$\frac{\partial Z(x,t;\xi,\tau)}{\partial \vec{\nu}\left(x^{(0)}, t^{(0)}\right)} = -\frac{1}{2}(2\sqrt{\pi})^{-n}[\det(a^{ij}(\xi,\tau))]^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{-1-\frac{n}{2}} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{Q^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right] \sum_{ijk=1}^{n} a_{ij}\left(x^{(0)}, t\right) a^{ik}(\xi,\tau)(x_k - \xi_k) \times$$

$$\times\cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}}, x_j\right) \equiv F_0\left(x, t; \xi, \tau\right) + F_1\left(x, t; \xi, \tau\right), \qquad (1.38)$$

де $F_0\left(x, t; \xi, \tau\right) \;=\; -\dfrac{1}{2}(2\sqrt{\pi})^{-n}(t-\tau)^{-1-\frac{n}{2}}[\det(a^{ij}(\xi,\tau))]^{\frac{1}{2}}\times$ $\times\exp\left[-\dfrac{Q^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]|x-\xi|\cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}}, \overrightarrow{x\xi}\right),$

$$F_1\left(x, t; \xi, \tau\right) = -\frac{1}{2}(2\sqrt{\pi})^{-n}[\det(a^{ij}(\xi,\tau))]^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{-1-\frac{n}{2}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{Q^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right]\sum_{ij;k=1}^{n}\left[a_{ij}\left(x^{(0)}, t\right) - a^{ik}(\xi,\tau)\right]a^{ik}(\xi,\tau)\times$$

$$\times(x_k-\xi_k)\cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}}, x_j\right),$$

$\overrightarrow{x\xi}$ – вектор, що з'єднує точки x і ξ. Оскільки $|\cos(n_{x^{cos}}, x_j)| \leq c\left|x^{(0)}-\xi\right|^{\lambda}$, то

$$F_0\left(x^{(0)}, t; \xi, \tau\right) \leq \frac{c}{(t-\tau)^{\mu}\left|x^{(0)}-\xi\right|^{n+1-2\mu-\lambda}}. \qquad (1.39)$$

Скориставшись обмеженням

$$\left|a_{ij}\left(x,t\right) - a_{ij}(x^{(0)}, t^{(0)})\right| \leq A\left(\left|x-x^{(0)}\right|^{a} + \left|t-t^{(0)}\right|^{\frac{a}{2}}\right),$$

маємо

$$F_1\left(x^{(0)}, t; \xi, \tau\right) \leq \frac{c}{(t-\tau)^{\mu_0}\left|x^{(0)}-\xi\right|^{n+1-2\mu_0-\lambda}} + \frac{c}{(t-\tau)^{\mu_0}}\times$$

$$\times\frac{1}{\left|x^{(0)}-\xi\right|^{n+1-2\mu}}, \quad 1-\frac{a}{2} < \mu_0 < 1,\ 1 < \mu_1 < 1+\frac{a}{2}. \quad (1.40)$$

Із (1.39) і (1.40) одержуємо оцінку

$$\left|\frac{\partial\Gamma\left(x^{(0)}, t; \xi, \tau\right)}{\partial\vec{\nu}\left(x^{(0)}, t\right)}\right| \leq \frac{c}{(t-\tau)}\cdot\frac{1}{\left|x^{(0)}-\xi\right|^{1+1-2\mu-\beta}},$$

$$\beta = \min(a, \lambda). \tag{1.41}$$

Доведемо рівність (1.37) у випадку, коли $x \to x^0$ і $x \in \vec{n}_{x^{(0)}}$. Оскільки $\left|x^{(0)} - \xi\right| \le c\,|x - \xi|$, то $\left|a_{ij}\left(x^{(0)}, t\right) - a_{ij}(\xi, \tau)\right| \le c\,|x - \xi|^a$. Тому правильна нерівність

$$|F_1(x, t; \xi, \tau)| \le \frac{c}{(t-\tau)^{\mu}\,|x-\xi|^{n+1-2\mu-a}}. \tag{1.42}$$

Отже, інтеграл

$$V_1(x, t) = \int\limits_0^t \int\limits_S F_1(x, t; \xi, \tau)\,\varphi(\xi, \tau) d_\xi S d\tau$$

задовольняє співвідношення

$$\lim_{x \to x^{(0)}} V_1(x, t) \to V_1\left(x^{(0)}, t\right).$$

Розглянемо інтеграли

$$V_0(x, t) = \int\limits_0^t \int\limits_S F_0(x, t; \xi, \tau)\,\varphi(\xi, \tau)\, d_\xi S d\tau =$$

$$= I_\delta(x, t) + I_\delta^{(1)}(x, t), \tag{1.43}$$

$$I_\delta(x, t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{S_\delta} \frac{\left[2\sqrt{\pi}\right]^n \left[\det\left(a^{ij}(\xi, \tau)\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{(t-\tau)^{1+\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{Q^{\xi,\tau}(x, \xi)}{4(t-\tau)}\right] \times$$

$$\times\,|x-\xi|\,\varphi(\xi, \tau) \cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}}, \overrightarrow{x\xi}\right) d_\xi S d\tau,$$

$$I_\delta^{(1)} = V_0(x, t) - I_\delta(x, t).$$

Порівняємо інтеграли I_δ з інтегралом $I_\delta^{(2)}(x,t)$

$$I_\delta^{(2)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{S_\delta}\frac{\left[2\sqrt{\pi}\right]^n\left[\det\left(a^{ij}\left(x^{(0)},\tau\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{(t-\tau)^{1+\frac{n}{2}}}\times$$

$$\times\exp\left[-\frac{Q^{x^{(0)},t}\left(x,\xi^{'}\right)}{4(t-\tau)}\right]\varphi(\xi^{'},\tau)\left|x-\xi^{'}\right|\times$$

$$\times\cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}},\vec{x\xi'}\right)d_\xi S_1 d\tau, \tag{1.44}$$

$d_\xi S_1$ – елемент поверхні на гіперплощині Π в точці $\xi^{'}$.

Покажемо, що справедлива рівність $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} I_\delta^{(2)}(x,t) = -\frac{1}{2}\varphi\left(x^{(0)},t\right)$.

Зробивши заміну $t-\tau=\dfrac{Q^{(x^{(0)},t)}\left(x,\xi^{'}\right)}{4\rho}$, знаходимо

$$I_\delta^{(2)}(x,t)=2^{n-1}\int\limits_{S_\delta^{(1)}}\frac{\left|x-\xi^{'}\right|\cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}},\overrightarrow{x\xi^{'}}\right)}{\left[Q^{\left(x^{(0)},t\right)}(x,\xi')\right]^{\frac{n}{2}}}\psi\left(x,\xi^{'},t\right)d_\xi S_1,$$

де

$$\psi\left(x,\xi^{'},t\right)=\int\limits_{\frac{Q^{x^{(0)},t}(x,\xi')}{4\rho}}^{\infty}\rho^{\frac{n}{2}-1}e^{-\rho c\left(x^{(0)},t-\frac{Q^{x^{(0)},t}\left(x,\xi^{'}\right)}{4\rho}\right)}\times$$

$$\times\varphi\left(x^{(0)},t-\frac{Q^{x^{(0)},t}(x,\xi^{'})}{4\rho}\right)d\rho, \tag{1.45}$$

$$\lim_{\substack{x\to x^0\\ \xi'\in x^0}}\psi\left(x,\xi^{'},t\right)=\psi\left(x^{(0)},x^{(0)},t\right)=$$

$$= \left(2\sqrt{\pi}\right)^{-n} \left[\det a^{ij}\left(x^0, t\right)\right]^{\frac{1}{2}} \varphi(x^0, t) \int\limits_0^\infty \rho^{\frac{n}{2}-1} e^{-\rho} d\rho.$$

Оскільки $\int\limits_0^\infty \rho^{\frac{n}{2}-1} e^{-\rho} d\rho = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\omega_n}$, де ω_n – площа поверхні одиничної гіперсфери в R^n, то

$$\psi\left(x^{(0)}, x^{(0)}, t\right) = \left(2\sqrt{\pi}\right)^{-n} \left[\det a^{ij}\left(x^0, t\right)\right]^{\frac{1}{2}} \varphi(x^0, t) \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\omega_n}. \tag{1.46}$$

Нехай K_1 – одинична гіперсфера в R^n з центром x. Позначимо через $\xi^{''}$ перетин K_1 з променем, який виходить з x в напрямку $\overrightarrow{x\xi^{'}}$. Для точки $\xi^{''}$ введемо координати $(\xi_1^{''}, \ldots, \xi_n^{''})$, які пропорційні $(\xi_1^{''} - x_1, \ldots, \xi_n^{''} - x_n)$ так, щоб $\sum\limits_{i=1}^n \left(\xi_i^{''}\right)^2 = 1$ і позначимо елемент поверхні K_1 в точці $\xi^{''}$ через $d\omega\left(\xi^{''}\right)$. Розіб'ємо $S_{\delta^{(1)}}$ на дві області $S_{\delta,1}$ – містить x^0 і $S_{\delta,2} = S_{\delta^{(1)}} - S_{\delta,1}$. Тоді $\xi^{'} \in S_{\delta,1}$, $\xi^{''} \in S_{\delta,2}$.

Оскільки $x \in \vec{n}_{x^{(0)}}$, то

$$I_\delta^{(2)}(x,t) = -2^{n-1} \psi\left(x^{(0)}, x^{(0)}, t\right) \int\limits_{\xi^{'} \in S_{\delta,1}} \frac{d\omega(\xi^{''})}{\left[\sum\limits_{ij} a^{ij}(x^0, t) \xi_i^{''} \xi_j^{''}\right]^{\frac{n}{2}}} -$$

$$-2^{n-1} \int\limits_{S_{\delta,1}} \frac{\left[\psi\left(x, \xi^{'}, t\right) - \psi\left(x^{(0)}, x^{(0)}, t\right)\right]}{\left[\sum\limits_{ij} a^{ij}\left(x^0, t\right) \xi_i^{''} \xi_j^{''}\right]^{\frac{n}{2}}} d\omega\left(\xi^{''}\right) +$$

$$+2^{n-1} \int\limits_{S_{\delta,2}} \frac{\left|x - \xi^{'}\right| \cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}}, \overrightarrow{x\xi^{'}}\right)}{\left[Q^{x_0,t}\left(x, \xi^{'}\right)\right]^{\frac{n}{2}}} \psi\left(x, \xi^{'}, t\right) d_\xi S =$$

$$I_1 + I_2 + I_3. \tag{1.47}$$

Оскільки функція $\psi\left(x, \xi', t\right)$ неперервна, то по заданому $\varepsilon > 0$ знаходимо $\eta = \eta(\xi)$ таке, що якщо діаметр $S_{\delta,1}$ менший η, то другий доданок у (1.47) буде за абсолютною величиною менший ε. Зафіксуємо тепер η. Оскільки $\cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}}, \overrightarrow{x\xi'}\right) \to 0$ якщо $x \to x^{(0)}$, то при $\left|x - x^{(0)}\right| < \eta_0$, третій доданок рівності (1.47) обмежений числом ε.

Враховуючи (1.46), маємо

$$I_1 = -\frac{2^n \pi^{\frac{n}{2}}}{\omega_n}\left[\det\left(a^{ij}\left(x^{(0)}, t\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \varphi(x^{(0)}, t) \times$$

$$\times \int\limits_{S_{\delta,1}} \frac{d\omega(\xi'')}{\left[\sum\limits_{ij} a^{ij}\left(x^0, t\right)\xi_i''\xi_j''\right]^{\frac{n}{2}}}. \tag{1.48}$$

Щоб оцінити I_1 при $x \to x^{(0)}$ розглянемо функцію

$$I\left(t\right) = \int\limits_{|\xi|<1} t^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\sum a^{ij}\xi_i\xi_j}{4t}\right] d\xi,$$

a^{ij} – const . Зробимо заміну $\xi_i = \rho\xi_i''$, а потім $\sigma = \rho^2 \dfrac{Q}{4t}$, де $Q = \sum a^{ij}\xi_i''\xi_j''$, одержимо

$$I\left(t\right) = 2^{n-1} \int\limits_{K_1} Q^{-\frac{n}{2}} \left[\int\limits_0^{\frac{Q}{4t}} \sigma^{\frac{n}{2}-1} e^{-\sigma} d\sigma\right] d\omega(\xi'')$$

і $\lim\limits_{t\to 0} I\left(t\right) = 2^{n-1}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right) \int\limits_{K_1} Q^{-\frac{n}{2}} d\omega(\xi'')$.

Оскільки $\lim\limits_{t\to 0} I\left(t\right)=\left[\det\left(a^{ij}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\left(2\sqrt{\pi}\right)^{n}$, то

$$I_3\equiv\int\limits_{K_1}\frac{d\omega^{''}(\xi^{''})}{\left[\sum a^{ij}\xi_i^{''}\xi_j^{''}\right]^{\frac{n}{2}}}=\left[\det\left(a^{ij}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\omega_n.$$

Приходячи до границі при $x\to x^{(0)}$ маємо

$$\lim_{x\to x_0}\int\limits_{S_{\delta,1}}\frac{d\omega(\xi^{''})}{\left[\sum a^{ij}(x^{(0)},t)\xi_i^{''}\xi_j^{''}\right]^{\frac{n}{2}}}=\left[\det\left(a^{ij}(x^{(0)},t)\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\frac{\omega_n}{2}.$$

Враховуючи одержану рівність, знаходимо

$$\lim_{x\to x_0} I_1=-\frac{1}{2}\varphi(x^{(0)},t).$$

Оскільки в інтегралі I_δ маємо $|x-\xi|\geq c>0$ для всіх x, досить близьких до $x^{(0)}$, тому

$$\lim_{x\to x_0} I_\delta^{(1)}\left(x,t\right)=I_\delta^{(1)}\left(x^{(0)},t\right). \tag{1.49}$$

Комбінуючи (1.49) з (1.44), (1.43) співвідношення

$$\lim_{x\to x_0} V_0\left(x,t\right)=-\frac{1}{2}\varphi\left(x^{(0)},t\right)+V_0\left(x^{(0)},t\right) \tag{1.50}$$

буде виконано, якщо

$$I_\delta\left(x,t\right)-I_\delta^{'}\left(x,t\right)I_\delta\left(x^{(0)},t\right). \tag{1.51}$$

Для доведення (1.51), візьмемо $\delta_1<\delta$ і запишемо

$$I_\delta\left(x,t\right)=I_{\delta_1}\left(x,t\right)+\bar{I}_{\delta_1}\left(x,t\right),$$

$$I_\delta\left(x^{(0)},t\right)=I_{\delta_1}\left(x^{(0)},t\right)+\bar{I}_{\delta_1}\left(x^{(0)},t\right),$$

$$I_\delta^{'}\left(x,t\right)=I_{\delta_1}^{'}\left(x,t\right)+\bar{I}_{\delta_1}\left(x,t\right), \tag{1.52}$$

де $\bar{I}_{\delta_1}\left(x^{(0)},t\right)$ – доповнення до $I_{\delta_1}\left(x^{(0)},t\right)$, частина інтеграла (тобто інтегрування за змінною ξ проводиться на множині $S_\delta - S_{\delta_1}$).

Покажемо, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$\left| I_{\delta_1}(x,t) - I'_{\delta_1}(x,t) \right| < \varepsilon,$$

як тільки δ_1 досить мале.

Використовуючи нерівності (1.31), (1.32), одержимо

$$\left| |x-\xi| \cos\left(\vec{n}_{x^{(0)}}, \overrightarrow{x\xi}\right) - \left|x-\xi'\right| \cos(\vec{n}_{x^{(0)}}, \overrightarrow{x\xi'}) \right| = \left|\xi - \xi'\right| \le$$

$$\le c\left|x^{(0)} - \xi\right|^{1+\lambda} \le c\,|x-\xi|^{1+\lambda},$$

$$\left| \exp\left[-\frac{Q^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{Q^{x^0,t}(x,\xi')}{4(t-\tau)}\right] \right| \le$$

$$\le \exp\left[-\frac{K\,|x-\xi|^2}{t-\tau}\right] \frac{\left|Q^{\xi,\tau}(x,\xi) - Q^{x^0,t}\left(x,\xi'\right)\right|}{4\,(t-\tau)},\ k - \mathrm{const}\,,$$

$$\left|Q^{\xi,\tau}(x,\xi) - Q^{x^0,t}\left(x,\xi'\right)\right| \le c\Bigg[\left(\left|x^{(0)}-\xi\right|^a + |t-\tau|^{\frac{a}{2}}\right)\times$$

$$\times |x-\xi|^2 + \left|\xi - \xi'\right| |x-\xi| \Bigg] \le c\left[\left(|x-\xi|^a + |t-\tau|^{\frac{a}{2}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times |x-\xi|^2 + |x-\xi|^{2+\lambda}\right].$$

За допомогою цих нерівностей знаходимо

$$\left| \frac{|x-\xi| \cos(\vec{n}_{x^{(0)}}, \overrightarrow{x\xi})}{2(t-\tau)^{1+\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{Q^{\xi,\tau}(x,\xi)}{4(t-\tau)}\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\left|x-\xi'\right| \cos(\vec{n}_{x^{(0)}}, \overrightarrow{x\xi'})}{2(t-\tau)^{1+\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{Q^{x^0,t}(x,\xi')}{4(t-\tau)}\right] \right| \le$$

$$\leq \frac{c}{(t-\tau)^{\mu}\,|x-\xi|^{n+1-2\mu-\beta}},\ \beta=\min(a,\,\lambda).$$

Отже,

$$\left|I_{\delta_1}(x,t)-I'_{\delta_1}(x,t)\right|\leq \mathrm{c}\int\limits_0^t\int\limits_{S_{\delta_1}}\frac{1}{(t-\tau)^{\mu}}\frac{d_{\xi}Sd\tau}{|x-\xi|^{n+1-2\mu-\beta}}+$$

$$+\sup\left|\frac{(2\sqrt{\pi})^{-n}\left[\det\left(a^{ij}\left(\xi,\tau\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\varphi(\xi,\tau)}{\cos\gamma(\xi)}-\right.$$

$$\left.-\left(2\sqrt{\pi}\right)^{-n}\left[\det\left(a^{ij}\left(x^0,\tau\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\varphi(x^0,\tau)\right|\times$$

$$\times\left|\int\limits_0^t\int\limits_{S_{\delta_1}}\frac{\left|x-\xi'\right|\cos(\vec{n}_{x(0)},\overrightarrow{x\xi'})}{2(t-\tau)^{1+\frac{n}{2}}}\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left[-\frac{Q^{x^0,t}(x,\xi')}{4(t-\tau)}\right]d_{\xi'}Sd\tau\right|,\tag{1.53}$$

де $\gamma(\xi)$ – кут між $\vec{n}_{x(0)}$ і $\vec{n}_{\xi}$.

Перший інтеграл в (1.53) абсолютно збіжний і досить малий, якщо δ_1 – мала величина.

Другий інтеграл в (1.53) обмежений сталою, не залежить від δ_1 і

$$\left(2\sqrt{\pi}\right)^{-n}\left[\det\left(a^{ij}\left(x^0,\tau\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\varphi(x^0\tau)\equiv 1.$$

Використовуючи нерівність (1.39), одержуємо

$$\left|I_{\delta_1}\left(x^0,t\right)\right|<\varepsilon.\tag{1.54}$$

Враховуючи, що $|x-\xi|$, $\left|x^0-\xi\right|$, $\left|x-\xi'\right|$ в інтегралах (1.52) більші деякої сталої, коли δ_1 фіксовано і $\cos(\vec{n}_{x(0)}x\vec{\xi}')\to 0$ при $x\to x^0$ маємо

$$\left|\bar{I}_{\delta_1}(x,t)-\bar{I}_{\delta_1}\left(x^0,t\right)\right|<\varepsilon,\quad \left|\bar{I}'_{\delta_1}\left(x^0,t\right)\right|<\varepsilon,\tag{1.55}$$

якщо x досить близьке до x^0.

Враховуючи (1.55), (1.48), одержимо (1.51). Отже, (1.37) доведено, якщо $x \to x^0$ вздовж нормалі $\vec{n}_{x^{(0)}}$.

Нехай $x \in K$, $\bar{x} \in S$. Оцінимо

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial \vec{\nu}(x^0,t)} - \frac{\partial U(x,t)}{\partial \vec{\nu}(\bar{x},t)} = \sum_{ij=1}^{n} \Big[a^{ij}\left(x^0,t\right) \cos\left(\vec{n}_{x_0}, x_j\right) -$$

$$- a^{ij}\left(\bar{x},t\right) \cos\left(\vec{n}_{\bar{x}}, x_j\right) \frac{\partial U(x,t)}{\partial x_i} \Big]. \qquad (1.56)$$

Враховуючи оцінку

$$\left| \frac{\partial U(x,t)}{\partial x_i} \right| \le \mathrm{c} \int\limits_S \frac{d_\xi S}{|x-\xi|^{n+1-2\mu}} \le$$

$$\le \frac{c}{|x-\bar{x}|^\gamma} \int\limits_S \frac{d_\xi S}{|x-\xi|^{n+1-2\mu-\gamma}} \le \frac{c}{|x-\bar{x}|^a}. \qquad (1.57)$$

Для довільного $\varepsilon > 0$, маємо

$$\left| \frac{\partial U(x,t)}{\partial \vec{\nu}(x^0,t)} - \frac{\partial U(x,t)}{\partial \vec{\nu}(\bar{x},t)} \right| \le c \frac{|x^0-\bar{x}|^\beta}{|x-\bar{x}|^\gamma} \to 0 \text{ при } x \to x^0.$$

Отже,

$$\left| \frac{\partial U(x,t)}{\partial \vec{\nu}(x^0,t)} + \frac{1}{2}\varphi(\bar{x},t) - \int\limits_0^t \int\limits_S \frac{\partial \Gamma(\bar{x},t;\xi,\tau)}{\partial \vec{\nu}(\bar{x},t)} \varphi(\xi,t)\, d_\xi S d\tau \right| < \varepsilon$$

при $|x-\bar{x}| < \delta$. Оскільки $\varphi(\bar{x},t) \to \varphi(x^0,t)$ при $\bar{x} \to x^0$ і $M(\bar{x},t) = \int\limits_0^t \int\limits_S \frac{\partial \Gamma(\bar{x},t;\xi,\tau)}{\partial \vec{\nu}(\bar{x},t)} \varphi(\xi,t)\, d_\xi S d\tau$ збігається до $M\left(x^0,t\right)$ при $\bar{x} \to x^0$, то (1.37) доведено.

§1.3. Побудова функції Гріна однорідної задачі Діріхле

У шарі $\Pi = (0, \mathrm{T}) \times R^n$ розглянемо параболічне рівняння

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} -$$

$$-a_0(t,x)u = f(t,x) \tag{1.58}$$

У області $Q = (0, \mathrm{T}) \times \Omega$, $\Omega \subset R^n$, $\partial\Omega$ – межа області Ω, будемо відшукувати класичний розв'язок рівняння (1.58), який задовольняє умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.59}$$

$$u|_{\Gamma} = g(t,z), \tag{1.60}$$

де $\Gamma = (0, \mathrm{T}) \times \partial\Omega$, $z \in \partial\Omega$.

1.3.1. Задача Діріхле у випадку гладкої крайової функції

Нехай $g(t,z) \in C^{2+\alpha}(\Gamma)$ і допускає довизначення по $z \in \partial\Omega$ в області Ω, так що $\tilde{g} \in C^{2+\alpha}(Q)$, то задача зводиться до однорідної.

Зробивши заміну $u = v + \tilde{g}$ в задачі (1.58)–(1.60) маємо

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial v}{\partial x_i} - \\ -a_0(t,x)v = f - L\tilde{g} \equiv f_1(t,x), \\ v|_{t=0} = \varphi(x) - \tilde{g}(0,x) \equiv \varphi_1(x), \\ v|_{\Gamma} = 0. \end{array} \right. \tag{1.61}$$

Функцію Гріна задачі Діріхле (1.61) будемо шукати у вигляді

$$G(t,\tau,x,\xi) = Z(t,\tau,x,\xi) - V(t,\tau,x,\xi), \tag{1.62}$$

де $LV = 0$ при $t > \tau$, $V|_{t\to\tau} \to 0$, $x \in \Omega$, $\xi \in \Omega$,

$$V(t,\tau,x,\xi)|_{x=z} = Z(t,\tau,z,\xi), \quad z \in S.$$

Для знаходження розв'язку задачі (1.62) скористаємось оригінальним прийомом В. Погожельського, замінивши задачу (1.62) зовнішньою задачею Неймана. А саме, вважатимемо, що

$$v(t,\tau,x,\xi) = Z(t,\tau,x,\xi) \text{ для } (\tau,\xi) \in Q_T,$$
$$x \in R^n \backslash \Omega, \quad 0 < \tau < t \leq T. \tag{1.63}$$

Ця функція $v(t,\tau,x,\xi)$ є розв'язком другої крайової задачі для зовнішньої області Q_T:

$$\begin{cases} Lv(t,\tau,x,\xi) = 0, \ t > \tau, x \in R^n \backslash \Omega, \xi \in \Omega, \\ \lim\limits_{t\to\tau} v(t,\tau,x,\xi) = 0, \\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\partial}{\partial \vec{v}_z} v(t,\tau,x,\xi) = \dfrac{\partial}{\partial \vec{v}_z} Z(t,\tau,x,\xi), \ \xi \in \Omega, \\ \lim\limits_{x\to\infty} v(t,\tau,x,\xi) = 0. \end{cases} \tag{1.64}$$

Розв'язок задачі (1.64) відшукаємо у вигляді потенціала простого шару

$$\tilde{v}(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\partial\Omega} Z(t,\beta,x,y)\Phi(\beta,\tau,y,\xi) d_y S. \tag{1.65}$$

Задовольнивши крайову умову в (1.64) на поверхні $\partial\Omega$, користуючись рівнянням стрибка (1.37), отримаємо для знаходження $\Phi(t,\tau,x,\xi)$ інтегральне рівняння

$$\Phi(t,\tau,z,\xi) = -2\frac{\partial}{\partial \vec{v}_z} Z(t,\tau,z,\xi) +$$

$$+ \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\partial\Omega} 2\frac{\partial}{\partial \vec{v}_z} Z(t,\beta,z,y)\Phi(\beta,\tau,y,\xi) d_y S. \tag{1.66}$$

Позначимо $K(t,\tau,z,\xi) = 2\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{v_z}} Z(t,\tau,z,\xi)$ і побудуємо резольвенту, яка відповідає ядру отриманого рівняння

$$\Phi(t,\tau,z,\xi) = -K(t,\tau,z,\xi)+$$

$$+\int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\partial\Omega} K(t,\beta,z,y)\Phi(\beta,\tau,y,\xi)d_yS. \qquad (1.67)$$

Для резольвенти інтегрального рівняння (1.67) маємо зображення

$$R(t,\tau,z,\xi) = K(t,\tau,z,\xi)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\partial\Omega} K(t,\beta,z,y)K_m(\beta,\tau,y,\xi)d_yS, \qquad (1.68)$$

де повторні ядра мають вигляд

$$K_m(t,\tau,z,\xi) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\partial\Omega} K(t,\beta,z,\xi)K_{m-1}(\beta,\tau,y,\xi)d_yS,$$

$m \in \{2,3,\ldots\}$, $K_1(t,\tau,z,\xi) \equiv K(t,\tau,z,\xi)$.

Оскільки коефіцієнти рівняння задовольняють умови теореми і поверхня $\partial\Omega$ належить класу $C^{1+\alpha}$, то для $K_1(t,\tau,y,\xi)$ правильна нерівність

$$|K(t,\tau,y,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{n+1-\alpha}{2}} \exp\left(-C_1\frac{|y-\xi|^2}{t-\tau}\right). \qquad (1.69)$$

Оцінимо повторні ядра. При $m=2$, маємо

$$|K_2(t,\tau,y,\xi)| \le \int_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} d\beta \int_{\partial\Omega} |K(t,\beta,z,\xi)|\, |K_1(\beta,\tau,y,\xi)|\, d_yS+$$

$$+\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} d\beta \int\limits_{\partial\Omega} |K(t,\beta,z,\xi)|\,|K_1(\beta,\tau,y,\xi)|\,d_yS \le C^2(t-\tau)^{-\frac{n+1-\alpha}{2}}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{\tau}^{\frac{t+\tau}{2}} \frac{d\beta}{(\beta-\tau)^{\frac{2-\alpha}{2}}} \int\limits_{\partial\Omega} \exp\left(-\varepsilon\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}\right)(\beta-\tau)^{-\frac{n-1}{2}}d_yS+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\frac{t+\tau}{2}}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-\alpha}{2}}} \int\limits_{\partial\Omega} \exp\left(-\varepsilon\frac{|z-y|^2}{t-\beta}\right)(t-\beta)^{-\frac{n-1}{2}}d_yS\right]\times$$

$$\times\exp\left(-(C_1-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) \le C^2(t-\tau)^{-\frac{n+1-2\alpha}{2}}\times$$

$$\times\exp\left(-(C_1-\varepsilon)\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right) B\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha}{2}\right).$$

Для оцінки повторних ядер використовуємо нерівність

$$\frac{|z-y|^2}{t-\beta}+\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau} \ge \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau},\ (y,\xi)\in\partial\Omega$$

та заміну $(t-\beta)=\eta(t-\tau)$.

Повторюючи вищенаведені міркування, отримаємо оцінки повторних ядер

$$|K_m(t,\tau,z,\xi)| \le$$

$$\le C_m(t-\tau)^{-\frac{n+1-m\alpha}{2}}\exp\left(-(C_1-m\varepsilon)\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}\right). \qquad (1.70)$$

При $m_0=\left[\dfrac{n+1}{\alpha}\right]+1$, ядро K_{m_0} не має особливості при $t=\tau$ і правильна оцінка

$$|K_{m_0}(t,\tau,z,\xi)| \le C_{m_0}\exp\left(-(C_1-m_0\varepsilon)\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}\right). \qquad (1.71)$$

Оцінимо наступні ядра $K_{m_0+k}(t,\tau,z,\xi)$, $k\in\{1,2,3,\ldots\}$. Для $k=1$ маємо

$$|K_{m_0+1}(t,\tau,z,\xi)| \leq C_{m_0} C \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-\alpha}{2}}} \int\limits_{\partial\Omega} \exp\left(-\varepsilon \frac{|z-y|^2}{t-\beta}\right) \times$$

$$\times (t-\beta)^{-\frac{n-1}{2}} d_y S \exp\left(-\left(C_1 - m_0\varepsilon\right) \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}\right) \leq$$

$$\leq A_1 B\left(\frac{\alpha}{2},1\right) \exp\left(-\left(C_1 - m_0\varepsilon\right) \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}\right),$$

де $A_1 = C_{m_0} C \int\limits_{\partial\Omega} \exp\left(-\varepsilon \frac{|z-y|^2}{t-\beta}\right) (t-\beta)^{-\frac{n-1}{2}} d_y S.$

Використовуючи метод математичної індукції встановлюємо нерівності

$$|K_{m_0+k}(t,\tau,z,\xi)| \leq A_1^k (t-\tau)^{\frac{k\alpha}{2}} \prod_{j=1}^{k-1} B\left(\frac{\alpha}{2}, 1+\frac{j\alpha}{2}\right) \times$$

$$\times \exp\left(-\left(C_1 - m_0\varepsilon\right) \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}\right).$$

Отже, функціональний ряд формули (1.68) мажорується збіжним рядом. Маємо

$$|R(t,\tau,z,\xi)| \leq \sum_{k=1}^{m_0} A_k (t-\tau)^{\frac{k\alpha-n-1}{2}} \exp\left(-\left(C_1 - k\varepsilon\right) \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}\right) +$$

$$+C \sum_{m=1}^{\infty} A_1^m (t-\tau)^{\frac{m\alpha}{2}} \frac{\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^m}{\Gamma\left(1+\frac{m\alpha}{2}\right)} \exp\left(-\left(C_1 - m_0\varepsilon\right) \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}\right) \leq$$

$$\leq C_2 (t-\tau)^{-\frac{-n+1-\alpha}{2}} \exp\left(-\left(C_1 - m_0\varepsilon\right) \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}\right). \qquad (1.72)$$

Враховуючи нерівність (1.72), розв'язок інтегрального рівняння (1.66) знаходимо за допомогою

$$\Phi(t,\tau,z,\xi) = -2\frac{\partial}{\partial \vec{v}_z} z(t,\tau,z,\xi) - 2\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\partial\Omega} R(t,\beta,z,y)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial \vec{v}_y} Z(\beta,\tau,y,\xi) d_y S. \qquad (1.73)$$

Підставимо (1.73) у (1.65), одержимо

$$\tilde{v}(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\partial\Omega} Z(t,\beta,z,y)\left[-2\frac{\partial}{\partial \vec{v}_y} Z(\beta,\tau,y,\xi) - \right.$$

$$\left. -2\int\limits_{\tau}^{\beta} d\eta \int\limits_{\partial\Omega} R(\beta,\eta,y,\beta)\frac{\partial}{\partial \vec{v}_\mu} Z(\eta,\tau,\mu,\xi) d_\mu S\right] d_y S \equiv$$

$$\equiv Z \circledast \left(2\frac{\partial}{\partial \vec{v}_y} z\right) + Z \circledast \left(R \circledast \frac{\partial}{\partial \vec{v}_\mu} z\right). \qquad (1.74)$$

Отже, функція Гріна однорідної задачі Діріхле визначається формулою

$$G(t,\tau,x,\xi) = Z(t,\tau,x,\xi) - \tilde{v}(t,\tau,x,\xi)$$

і для поверхневого інтеграла $\tilde{v}(t,\tau,x,\xi)$ правильні оцінки

$$|\tilde{v}(t,\tau,x,\xi)| \le C(t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2 + \rho^2(x,s)}{t-\tau}\right),$$

$$|D_x \tilde{v}(t,\tau,x,\xi)| \le C_1(t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}} \ln\frac{1}{\rho(x,s)}\times$$

$$\times\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2 + \rho^2(x,s)}{t-\tau}\right),$$

$$\left|D_x{}^2\tilde{v}(t,\tau,x,\xi)\right| \le C_2(t-\tau)^{-\frac{n+1}{2}}\rho^{-1+\alpha}(x,s)\times$$
$$\times\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2+\rho^2(x,s)}{t-\tau}\right),$$

де $\rho(x,s) = \dfrac{\inf}{z\in\partial\Omega}|x-z|$.

Справедлива така теорема

Теорема 1.5. *Нехай коефіцієнти* $a_{ij}(t,x)$ *за змінними* $(t,x)\in\Pi$ *задовольняють рівномірну умову Гельдера з показником* $\alpha\in(0,1)$, *коефіцієнти* $a_i(t,x)$, $a_0(t,x)$ *за змінною* x *задовольняють умову Гельдера з показником* α *і рівномірно неперервні за змінною* t *в шарі* Π. *Функція* $f(x,t)\in H^\alpha(\Pi)$, $\varphi(x)\in H^0(R^n)$, $g(x,t)\in H^{2+\alpha}(\Gamma)$, *поверхня* $\partial\Omega\in C^{(1+\alpha)}$.

Тоді існує функція Гріна $G(t,\tau,x,\xi)$ *однорідної задачі Діріхле, з допомогою якої розв'язок задачі* (1.58)–(1.60) *однозначно визначається формулою*

$$u(t,x) = \tilde{g}(t,x) + \int\limits_{\Omega} G(t,0,x,\xi)\varphi_1(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega} G(t,\tau,x,\xi)f_1(\tau,\xi)d\xi \tag{1.75}$$

і задовольняє нерівність

$$\|u;\Pi\|_0 \le C\left(\|\varphi;R^n\|_0 + \|f;\Pi\|_0 + \|\tilde{g};\Pi\|_{2+\alpha}\right).$$

Для функції Гріна правильна така теорема [1, ст. 469].

Теорема 1.6. *Нехай коефіцієнти оператора* L *належать класу* $\mathrm{C}^\alpha(\overline{Q}_T)$. *Тоді правильні нерівності:*

$$\left|D_t^i D_x^m\Gamma(t,\tau,x,\xi)\right| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+2i+m}{2}}\exp\left(-c\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right),$$

$$\left|D_t^i D_x^m\Gamma(t,\tau,x,\xi) - D_t^i D_x^m\Gamma(\beta,\tau,x,\xi)\right| \le$$

$$\leq c|t-\beta|^{\frac{\alpha}{2}+1-i-\frac{m}{2}}\exp\left(-c\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right), \qquad (1.76)$$

де $2i+m=1,2$, $\tau<\beta<t$ *і*

$$\left|D_t^iD_x^m\Gamma(t,\tau,x,\xi)-D_t^iD_x^m\Gamma(t,\tau,y,\xi)\right|\leq$$

$$\leq c|x-y|^{\alpha}(t-\tau)^{-\frac{n+2+\alpha}{2}}\exp\left(-c\frac{|z-\xi|^2}{(t-\tau)}\right),$$

де $2i+m=2$, z *– та із точок* x *і* y, *яка знаходиться ближче до* ξ.

Встановимо оцінку похідних розв'язку задачі (1.61). Правильна така теорема.

Теорема 1.7. *Нехай для задачі (1.61) виконані умови теореми 1.3,* $\varphi_1(x)|_{\partial D}=0$, $\varphi_1(x)\in H^{2+\alpha}(D)$. *Тоді для розв'язку задачі (1.61) справедлива оцінка*

$$\|u;Q_T\|_{2+\alpha}\leq c\left(\|f_1;Q_T\|_{\alpha}+\|\varphi_1;D\|_{2+\alpha}\right). \qquad (1.77)$$

Доведення. Використовуючи зображення розв'язку (1.75) і враховуючи властивості та оцінки функції Гріна $\Gamma(t,\tau,x,\xi)$ (1.76) одержимо, що розв'язок задачі (1.61) $u(t,x)\in C^{2+\alpha}(Q_T)$. Знайдемо його оцінку.

З означення норми та інтерполяційних нерівностей із [2, ст. 176], маємо

$$\|u;Q_T\|_{2+\alpha}\leq(1+\varepsilon^{\alpha})\langle u;Q_T\rangle_{2+\alpha}+C(\varepsilon)\|u;Q_T\|_0.$$

Тому досить оцінити півнорму $\langle u;Q_T\rangle_{2+\alpha}$. Із визначення півнорми $\langle u;Q_T\rangle_{2+\alpha}$ випливає існування в Q_T точок $P_1\left(t_1,x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t_2,x^{(2)}\right)$, $P_3\left(t_1,x^{(3)}\right)$, для яких справедлива одна з нерівностей:

$$\frac{1}{2}\langle u;Q_T\rangle_{2+\alpha}\leq E_K, \quad k\in\{1,2\} \qquad (1.78)$$

$$E_1=\sum_{2i+|m|=2}\left|x^{(1)}-x^{(2)}\right|^{-\alpha}\left|\partial_t^i\partial_x^m u\left(P_1\right)-\partial_t^i\partial_x^m u\left(P_3\right)\right|,$$

$$E_2 = \sum_{2i+|m|=2} |t_1 - t_2|^{-\frac{\alpha}{2}} \left|\partial_t^i \partial_x^m u\left(P_2\right) - \partial_t^i \partial_x^m u\left(P_3\right)\right|.$$

Нехай $|t_1 - t_2| \geq \dfrac{\varepsilon^2}{16}$, ε – довільна стала, $\varepsilon \in (0,1)$, тоді $E_2 \leq 2\varepsilon^{-\alpha}\left|u; Q_T\right|_2$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$\langle u; Q_T\rangle_{2+\alpha} \leq c\|u; Q_T\|_0. \tag{1.79}$$

Якщо $\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right| \geq \dfrac{\varepsilon}{4}$, то $E_1 \leq 2\varepsilon^{-\alpha}\left|u; Q_T\right|_2$.

Звідси, враховуючи інтерполяційні нерівності, маємо

$$\langle u; Q_T\rangle_{2+\alpha} \leq c\left|u; Q_T\right|_0. \tag{1.80}$$

Нехай $|t_1 - t_2| < \dfrac{\varepsilon^2}{16}$, або $\left|x^{(1)} - x^{(2)}\right| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ і $\left|x^{(1)} - \xi\right| > \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\xi \in \partial D$.

Запишемо задачу (1.61) у вигляді

$$\partial_t u - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}\left(P_1\right)\partial_{xi}\partial_{xj}u = \sum_{ij=1}^{n}\left(a_{ij}(t,x) - a_{ij}\left(P_1\right)\right)\partial_{xi}\partial_{xj}u -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{xi}u - a_0(t,x)u + f(t,x) \equiv F(t,x), \tag{1.81}$$

$$u|_{t=t_0} = \varphi(x), \tag{1.82}$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{1.83}$$

Позначимо через $K_r = \left\{(t,x) \in Q_T, \left|t - t^{(1)}\right| \leq \dfrac{\varepsilon^2 r^2}{16}, \left|x^{(1)} - x^{(2)}\right| \leq \dfrac{\varepsilon r}{4}\right\}$ і візьмемо тричі диференційовану функцію $\omega(t,x)$, яка задовольняє умови:

$$\omega(t,x) = \begin{cases} 1, & (t,x) \in K_{\frac{1}{4}}, 0 \leq \omega(t,x) \leq 1; \\ 0, & (t,x) \notin K_{\frac{3}{4}}, \left|\partial_t^i \partial_x^m \omega\right| \leq c_{m_i}. \end{cases}$$

Тоді функція $v(t,x)=u(t,x)\omega(t,x)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\partial_t v - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j} v = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\left[\partial_{x_i}\omega\partial_{x_j}u + \partial_{x_j}\omega\partial_{x_i}u\right] +$$

$$+u\left[\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega - \partial_t\omega\right] + F\omega \equiv F_1(t,x). \qquad (1.84)$$

$$v|_{t=t_0} = \varphi(x)\omega(t_0,x) \equiv \Phi(x), \qquad (1.85)$$

$$v|_{\Gamma} = 0. \qquad (1.86)$$

Використовуючи теорему 5.1 ([1, ст. 364]), для довільних точок $M_1 \in K_{\frac{1}{4}}$ і $M_2 \in K_{\frac{1}{4}}$ при $2i+|m|=2$, одержимо

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^i\partial_x^m u(M_1) - \partial_t^i\partial_x^m u(M_2)\right| \leq$$

$$\leq c\left(\left\|F_1; K_{\frac{1}{4}}\right\|_{\alpha} + \left\|\phi; K_{\frac{3}{4}} \cap (t=t_0)\right\|_{2+\alpha}\right). \qquad (1.87)$$

Враховуючи властивості функції $\omega(t,x)$, знайдемо оцінки норм виразів F_1, Φ. Для цього знайдемо оцінку кожного доданка виразу F_1. Наприклад

$$\left\|\sum_{ij=1}^{n} u a_{ij}(P_1)\,\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega; K_{\frac{3}{4}}\right\|_{\alpha} \leq$$

$$\leq \left[\sum_{ij=1}^{n} |a_{ij}(P_1)| \sup_{P\in K_{\frac{3}{4}}} \left|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega(P)\right| |u(P)|\right] +$$

$$+\sum_{ij=1}^{n} |a_{ij}(P_1)| \sup_{(M_1,M_2)\subset K_{\frac{3}{4}}} \left[\left|d^{-a}(M_1,M_2)\right| \times\right.$$

$$\times\left|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega(M_1) - \partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega(M_2)\right| |u(M_1)| +$$

$$+d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_{x_i}\partial_{x_j}\omega(M_2)\right||u(M_1)-u(M_2)|\Big]\le c\left\|u;K_{\frac{3}{4}}\right\|_1.$$

Аналогічно встановлюються оцінки інших доданків виразів F_1. Отже

$$\left\|F_1;K_{\frac{3}{4}}\right\|_\alpha\le c\left(\|F;K_{\frac{3}{4}}\|_\alpha+\|u;K_{\frac{3}{4}}\|_2+\|u;K_{\frac{3}{4}}\|_0\right).$$

$$\left\|\Phi;K_{\frac{3}{4}}\cap(t=t_0)\right\|_{2+\alpha}\le c\|\varphi;D\|_{2+\alpha}. \tag{1.88}$$

Підставляючи (1.88) в (1.87), дістанемо

$$E_K\le c\left(\left\|F;K_{\frac{3}{4}}\right\|_\alpha+\|\varphi;D\|_{2+\alpha}\right). \tag{1.89}$$

Знайдемо оцінку норми $\left\|F;K_{\frac{3}{4}}\right\|_\alpha$. Враховуючи інтерполяційні нерівності, досить оцінити півнорму кожного доданку виразу $F(t,x)$, Нехай $B_1\left(\tau^{(1)},\xi^{(1)}\right)$, $B_2\left(\tau^{(2)},\xi^{(2)}\right)$, $B_3\left(\tau^{(1)},\xi^{(2)}\right)$ – довільні точки області $K_{\frac{3}{4}}$.

Наприклад, для $\langle a_i\partial_{x_i}u;K_{\frac{3}{4}}\rangle_\alpha\le T_1$ маємо

$$T_1\le\sup_{(B_1,B_2,B_3)\subset K_{\frac{3}{4}}}\left[|\partial_{x_i}u|\left\{\left|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2}}|a_i(B_2)-a_i(B_3)|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}\right|^{-\alpha}|a_i(B_1)-a_i(B_3)|\right\}\right]+$$

$$+\sup_{(B_1,B_2,B_3)\subset K_{\frac{3}{4}}}\left[|a_i|\left\{\left|\tau^{(1)}-\tau^{(2)}\right|^{-\frac{\alpha}{2}}\left|\partial_{x_i}u(B_2)-\partial_{x_j}u(B_3)\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\xi^{(1)}-\xi^{(2)}\right|^{-\alpha}\partial_{x_i}u(B_1)-\partial_{x_j}u(B_3)\right\}\right]\le$$

$$\le c\left(\left\|u;K_{\frac{3}{4}}\right\|_2+\left\|u;K_{\frac{3}{4}}\right\|_0\right).$$

Для оцінки півнорми $\left\langle a_0 u; K_{\frac{3}{4}} \right\rangle_\alpha$ одержуємо

$$\left\langle a_0 u; K_{\frac{3}{4}} \right\rangle_\alpha \leq \sup_{(B_1,B_2,B_3)\subset K_{\frac{3}{4}}} \left[|u| \left\{ \left| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \right|^{-\frac{\alpha}{2}} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left| a_0\left(B_2\right) - a_0\left(B_3\right)\right| + \left| \xi^{(1)} - \xi^{(2)} \right|^{-\alpha} \left| a_0\left(B_1\right) - a_0\left(B_3\right)\right| \right\} \right] +$$

$$+ \sup_{(B_1,B_2,B_3)\subset K_{\frac{3}{4}}} \left[|a_0| \left\{ \left| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \right|^{-\frac{\alpha}{2}} u\left(B_2\right) - u\left(B_3\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left| \xi^{(1)} - \xi^{(2)} \right|^{-\alpha} |u(B_1) - u(B_3)| \right\} \right] \leq$$

$$\leq c \left(\left\| u; K_{\frac{3}{4}} \right\|_1 + \left\| u; K_{\frac{3}{4}} \right\|_0 \right).$$

Оцінимо півнорму $\left\langle \left(a_{ij}(t,x) - a_{ij}\left(P_1\right)\right) \partial_{x_i}\partial_{x_j} u; K_{\frac{3}{4}} \right\rangle_\alpha \equiv T_2.$

$$T_2 \leq \sup_{(B_1,B_2,B_3)\subset K_{\frac{3}{4}}} \left| \partial_{x_i}\partial_{x_j} u\left(B_1\right)\right| \left\{ \left| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \right|^{-\frac{\alpha}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left| a_{ij}\left(B_2\right) - a_{ij}\left(B_3\right)\right| + \left| \xi^{(1)} - \xi^{(2)} \right|^{-\alpha} \left| a_{ij}\left(B_1\right) - a_{ij}\left(B_3\right)\right| \right\} +$$

$$+ \sup_{(B_1,B_2,B_3)\subset K_{\frac{3}{4}}} \left| a_{ij}\left(P_1\right) - a_{ij}\left(P_3\right)\right| \times$$

$$\times \left\{ \left| \tau^{(1)} - \tau^{(2)} \right|^{-\frac{\alpha}{2}} \left| \partial_{x_i}\partial_{x_j} u\left(B_2\right) - \partial_{x_i}\partial_{x_j} u\left(B_3\right)\right| + \right.$$

$$\left. + \left| \xi^{(1)} - \xi^{(2)} \right|^{-\alpha} \partial_{x_i}\partial_{x_j} u\left(B_1\right) - \partial_{x_i}\partial_{x_j} u\left(B_3\right) \right\} \leq$$

$$\leq c\varepsilon^\alpha \left\langle u; K_{\frac{3}{4}} \right\rangle_{2+\alpha} + c_1 \left\langle u; K_{\frac{3}{4}} \right\rangle_\alpha .$$

Отже, для $\left|F; K_{\frac{3}{4}}\right|_\alpha$ дістанемо оцінку

$$\left\|F; K_{\frac{3}{4}}\right\|_\alpha \leq c_1 \left(\left\|f; K_{\frac{3}{4}}\right\|_\alpha + \|u; K_{\frac{3}{4}}\|_0\right) +$$

$$+ \left(n^2\varepsilon^\alpha + cn\varepsilon\right) \left\|u; K_{\frac{3}{4}}\right\|_{2+\alpha}. \qquad (1.90)$$

Підставляючи (1.90) в (1.89) знаходимо

$$E_k < c \left(\left\|f; K_{\frac{3}{4}}\right\|_\alpha + \left\|u; K_{\frac{3}{4}}\right\|_0 + \left\|\varphi; K_{\frac{3}{4}} \cap (t = t_0)\right\|_{2+\alpha}\right) +$$

$$+ \left(n^2\varepsilon^\alpha + cn\varepsilon\right) \left\|u; K_{\frac{3}{4}}\right\|_{2+\alpha}. \qquad (1.91)$$

Нехай $\left|x^{(1)} - \xi\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\xi \in \partial D$. Розглянемо кулю $K(r, P)$ радіуса r, $r > 4\varepsilon$, з центром в точці $P \in \Gamma$, яка містить точки P_1, P_2, P_3. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можна розпрямити $\partial D \cap K(r, P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$. Для цього введемо нові координати $y_i = y_i(x)$, $s \in \{1, \ldots, n\}$, так, щоб межа $\partial D \cap K(r, P)$ перейшла в частину площини $y_n = 0$, а область $\Pi_2 = Q_T \cap K(r, P)$ лежала в півпросторі $y_n > 0$, $t \geq 0$ і переходила в область Π_1. Перехід здійснюється за формулами $y_j = x_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $y_n = x_n - \lambda(x_1, \ldots, x_{n-1})$, де $x_n = \lambda(x_1, \ldots, x_{n-1})$ – рівняння межі ∂D в локальних координатах з центром в точці P. Вважаємо, що P_1, P_2, P_3, E_k, $u(t, x)$ переходять при цьому перетворенні відповідно в M_1, M_2, M_3, $E_k^{(1)}$, $v(t, y)$. Позначимо коефіцієнти в області Π_1 через A_{ij}, A_i, A_0. Тоді $v(t, y)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t v - \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(M_1)\, \partial_{y_i}\partial_{y_j} v = \sum_{i,j=1}^{n} \left[A_{ij}(t, y) - A_{ij}(M_1)\right] \partial_{y_i}\partial_{y_j} v -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} A_i(t, y)\partial_{y_i} v - A_0(t, y)v + f(t, \psi(y)) \equiv F_2(t, y), \qquad (1.92)$$

$$v\left(t_0, y\right)=\varphi(\psi(y)), \quad \left.v\right|_{y_n=0}=0. \tag{1.93}$$

Позначимо через $K_r^{(1)} = \left\{(t, y) \in \Pi_1, \left|t-t^{(1)}\right| \leq \frac{\varepsilon^2 r^2}{16},\right.$ $\left.\left|y^{(1)}-y^{(2)}\right| \leq \frac{\varepsilon r}{4}\right\}$ і візьмемо тричі диференційовану функцію $\eta(t, y)$, яка задовольняє умову

$$\eta(t, y)=\left\{\begin{array}{l} 1,\ (t, y) \epsilon K_{\frac{1}{4}}^{(1)},\ 0 \leq \eta(t, y) \leq 1, \\ 0,\ (t, y) \notin K_{\frac{1}{4}}^{(1)},\ \left|\partial_t^i \partial_y^m \eta\right| \leq c_{m i}. \end{array}\right.$$

Тоді функція $\omega(t, y)=v(t, y) \eta(t, y)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\partial_t \omega-\sum_{i, j=1}^n A_{i j}\left(M_1\right) \partial_{y_i} \partial_{y_j} \omega=$$

$$=\sum_{i, j=1}^n A_{i j}\left(M_1\right)\left(\partial_{y_i} \eta \partial_{y_j} v+\partial_{y_i} v \partial_{y_j} \eta\right)+$$

$$+v\left[\sum_{i, j=1}^n A_{i j}\left(M_1\right) \partial_{y_i} \partial_{y_j} \eta-\partial_t \eta\right]+F_2 \eta \equiv F_3(t, y). \tag{1.94}$$

$$\left.\omega\right|_{t=t_0} \equiv \varphi(\psi(y)) \eta\left(t_0, y\right)=0,\ \left.\omega\right|_{y_n=0}=0. \tag{1.95}$$

Використовуючи теорему 6.1 [1, ст. 368], для довільних точок $R_1 \in K_{\frac{1}{4}}^{(1)}$, $R_2 \in K_{\frac{1}{4}}^{(1)}$ при $2i+|m|=2$ одержимо нерівність

$$d^{-\alpha}\left(R_1, R_2\right)\left|\partial_t^i \partial_y^m \omega\left(R_1\right)-\partial_t^i \partial_y^m \omega\left(R_2\right)\right| \leq$$

$$\leq c\left(\left\|F_3 ; K_{\frac{3}{4}}^{(1)}\right\|_\alpha+\left\|\varphi ; K_{\frac{3}{4}}^{(1)} \cap\left(t=t_0\right)\right\|_{2+\alpha}\right). \tag{1.96}$$

Враховуючи властивості функції $\eta(t, y)$ знайдемо оцінки доданків виразу $F_3(t, y)$. Наприклад,

$$\left\|\sum_{i, j=1}^n A_{i j}\left(M_1\right) \partial_{y_i} \eta \partial_{y_j} v ; K_{\frac{3}{4}}^{(1)}\right\|_\alpha \leq$$

$$\leq \sup_{M\in K^{(1)}_{\frac{3}{4}}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} |A_{ij}\left(M_1\right)||\partial_{y_i}\eta||\partial_{y_j}\omega|\right] +$$

$$+ \sup_{(R_1,R_2)\in K^{(1)}_{\frac{3}{4}}} \left[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\left(M_1\right)\Big(|\partial_{y_i}\eta| d^{-\alpha}(R_1,R_2)|\partial_{y_j}v(R_1)-\right.$$

$$\left.-\partial_{y_j}v(R_2)| + |\partial_{y_j}v(R_2)|\Big)\, d^{-\alpha}(R_1,R_2)|\partial_{y_j}\eta(R_1)-\partial_{y_j}\eta(R_2)|\right] \leq$$

$$\leq c_3 \left\|v; K^{(1)}_{\frac{3}{4}}\right\|_2 + c_4 \left\|v; K^{(1)}_{\frac{3}{4}}\right\|_1 .$$

Аналогічно одержуються оцінки інших доданків функції $F_3(t,y)$. Отже, враховуючи інтерполяційні нерівності, одержимо

$$\|F_3; K^{(1)}_{\frac{3}{4}}\|_\alpha \leq c_5\left(|f;\Pi_1|_\alpha + |v;\Pi_1|_0\right) +$$

$$+\left(n^2\varepsilon^\alpha + 2n\varepsilon\right)|v;\Pi_1|_{2+\alpha}. \qquad (1.97)$$

$$\left\|\varphi\eta; K^{(1)}_{\frac{3}{4}} \cap (t=t_0)\right\|_{2+\alpha} \leq c\,|\varphi;\Pi_1\cap(t=t_0)|_{2+\alpha}.$$

Підставляючи (1.97) в (1.96) і повертаючись до змінних (t,x), знаходимо

$$E_k \leq c\left(\|f;\Pi_2\|_\alpha + \|u;\Pi_2\|_0 + \|\varphi;\Pi_2\cap(t=t_0)\|_{2+\alpha}\right) +$$

$$+(n^2\varepsilon^\alpha + 2n\varepsilon)\|u;\Pi_2\|_{2+\alpha}. \qquad (1.98)$$

Скориставшись нерівностями (1.77)–(1.79), (1.91), (1.98) і вибравши ε досить малим, одержимо нерівність

$$\|u,Q_T\|_{2+\alpha} \leq c\left(\|f;Q_T\|_\alpha + \|\varphi;D\|_{2+\alpha} + \|u;Q_T\|_0\right), \qquad (1.99)$$

то з нерівності (1.99) і формули (1.76) одержимо оцінку (1.77). Теорема доведена.

1.3.2. Задача Діріхле у випадку неперервної крайової функції

Розв'язок задачі (1.58)–(1.60) відшукуємо у вигляді суми

$$u(t,x) = v(t,x) + \omega(t,x),$$

де $\omega(t,x)$ – розв'язок неоднорідної задачі

$$\begin{cases} L\omega = 0, \\ \omega|_{t=0} = 0, \\ \omega|_{\Gamma=0} = g(t,z) - v(t,z) = g_1(t,z), \end{cases} \tag{1.100}$$

$v(t,x)$ – розв'язок задачі Коші

$$Lv = f(t,x), \quad v|_{t=0} = \varphi(x).$$

Припустимо, додатково, що коефіцієнти рівняння $a_{ij}(t,x) \in C_{(x,t)}^{\left(1+\alpha,\frac{\alpha}{2}\right)}(\Pi)$. Ця умова гарантує існування потенціала подвійного шару

$$\omega(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_\xi} Z(t,\tau,x,\xi)\mu(\tau,\xi) d_\xi S. \tag{1.101}$$

Враховуючи властивості фундаментального розв'язку, маємо

$$L\omega = 0, \quad \omega|_{t=0} = 0.$$

Щоб задовольнити в задачі (1.101) крайову умову, скористаємось рівнянням стрибка. Тоді для $\mu(\tau,\xi)$ отримаємо інтегральне рівняння

$$\mu(t,z) = -2g_1(t,z) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial\Omega} 2\frac{\partial}{\partial \vec{v}_\xi} Z(t,\tau,z,\xi)\mu(\tau,\xi) d_\xi S. \tag{1.102}$$

Його розв'язок, як і для рівняння (1.66), виражається з допомогою резольвенти

$$\mu(t,z) = -2g_1(t,z) - 2\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial\Omega} R(t,\tau,z,\xi) g_1(\tau,\xi) d_\xi S. \quad (1.103)$$

Тепер отримаємо зображення розв'язку задачі (1.58)–(1.60). Маємо

$$u(t,x) = \int\limits_\Omega Z(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega Z(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_\xi} Z(t,\tau,x,\xi) \left[-2g_1(\tau,\xi) - 2\int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_{\partial\Omega} R(\tau,\beta,\xi,y) \times \right.$$

$$\left. \times g_1(\beta,y) d_y S \right] d_\xi S = Z * \varphi + Z ** f - 2\frac{\partial}{\partial \vec{v}_\xi} Z \circledast [g - Z * \varphi - Z ** f +$$

$$+ R \circledast (g - Z * \varphi - Z ** f)] = \left[Z + 2\frac{\partial Z}{\partial \vec{v}_\xi} * (Z + R \circledast Z) \right] * \varphi +$$

$$+ \left[Z + 2\frac{\partial Z}{\partial \vec{v}_\xi} (Z + R \circledast Z) \right] ** f + 2\left[\frac{\partial Z}{\partial \vec{v}_\xi} + \frac{\partial Z}{\partial \vec{v}_\xi} \circledast R \right] \circledast g.$$

Отже, остаточно

$$u(t,x) = \int\limits_\Omega G_1(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_1(t,\tau,x,\xi) \times$$

$$\times f(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial\Omega} G_2(t,\tau,x,\xi) g(\tau,\xi) d_\xi S, \quad (1.104)$$

де

$$G_1(t,\tau,x,\xi) = Z(t,\tau,x,\xi) + 2\int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{v}_y} Z(t,\beta,x,y) \times$$

$$\times \left[Z(\beta,\tau,y,\xi) + (R \circledast Z)(\beta,\tau,y,\xi)\right] d_yS, \quad (x,\xi \in \Omega),$$

$$G_2(t,\tau,x,\xi) = \frac{\partial Z}{\partial \vec{v}_\xi}(t,\tau,x,\xi) + \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}_\xi} Z(t,\beta,x,y) + \right.$$

$$\left. + R(\beta,\tau,y,\xi)\right] d_yS, \quad (x \in \Omega, \xi \in \partial\Omega),$$

$$(R \circledast Z)(t,z,\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\partial\Omega} R(t,\beta,z,y) Z(\beta,\tau,y,\xi) d_yS.$$

Якщо провести оцінку $\mu(\tau,x)$ з використанням нерівності (1.104) для резольвенти, то маємо, що

$$|\mu(t,x)| \leq C(\|\varphi;\Omega\|_0 + \|f;Q\|_0 + \|g;\Gamma\|_0) + C\int\limits_{0}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{2-\alpha}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right)}{(t-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} |\tilde{g}| d_\xi S \leq C(\|\varphi;\Omega\|_0 + \|f;Q\|_0 + \|g;\Gamma\|_0).$$

Цій нерівності задовольняє $\omega(t,x)$ із (1.101). Тому розв'язок задачі Діріхле неперервно залежить від функцій (f,φ,g) :

$$\|u;Q\|_0 \leq C(\|\varphi;\Omega\|_0 + \|f;Q\|_0 + \|g;\Gamma\|_0). \qquad (1.105)$$

Теорема 1.8. *Нехай рівняння (1.58) рівномірно параболічне в шарі* $\Pi = (0,T) \times R^n$, *коефіцієнти* a_{ij} *належать класу* $C^{(1+\alpha)}_{t,x}(\Pi)$ *і* $a_i \in C^{(\alpha)}_x(\Pi)$, $a_0 \in H^{(\alpha)}_x(\Pi)$, $f \in H^{(\alpha)}_x(Q)$,

$\varphi \in H^0(\Omega)$, $g \in H^0(\Gamma)$, поверхня $\partial\Omega \in C^{1+\alpha}$. Тоді існує розв'язок задачі Діріхле (1.58)–(1.60), який зображається за допомогою функції Гріна (G_1, G_2) формулою (1.104) і для нього справджується нерівність (1.105).

§1.4. Крайова задача Неймана

У циліндрі $Q = (0,T) \times \Omega$ розглянемо рівняння

$$Lu = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_1 x_j} u + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_l} u +$$

$$+a_0(t,x)u - \frac{\partial u}{\partial t} = f(t,x). \tag{1.106}$$

Будемо шукати класичний розв'язок, який задовольняє умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{1.107}$$

$$Bu|_\Gamma \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial \vec{v}_z} + b_0 u\right)_\Gamma = g(t,z), \tag{1.108}$$

де $\bar{v}_z$ внутрішня нормаль в точці (z,t) з компонентами $v_i(z,t)$, $\Gamma = (0,T) \times S$, S – межа області Ω, $z \in S$.

Нехай $u = v + \omega$, де v – розв'язок задачі Коші (1.106), (1.107), а ω – крайові умови задачі

$$L\omega = 0, \quad \omega|_{t=0} = 0, \quad B\omega|_\Gamma = g_1 \equiv g - Bv|_\Gamma. \tag{1.109}$$

Розв'язок v визначається за допомогою фундаментального розв'язку $Z(t,\tau,x,\xi)$ за формулою

$$v(t,x) = \int_\Omega \Gamma(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_\Omega \Gamma(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi, \tag{1.110}$$

якщо $\varphi \in H^{(0)}(E_n)$, $f \in H^{(\alpha)}(\Pi)$. Розв'язок задачі Неймана відшукуємо у вигляді потенціала простого шару

$$\omega(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S \Gamma(t,\tau,x,\xi)\mu(\tau,\xi)dS_\xi, \tag{1.111}$$

де $\mu(t,z)$ – невідома функція.

$\omega(t,x)$ є розв'язком однорідного рівняння в точках $x \in \Omega$ і справджується початкова умова $\omega|_{t=0} = 0$.

Задовольнимо крайову умову в (1.108), користуючись рівнянням стрибка (1.37). Будемо мати інтегральне рівняння для $\mu(t,z)$:

$$\frac{1}{2}\mu(t,z) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S B(t,z,D)Z(t,\tau,x,\xi)\mu(\tau,\xi)dS_\xi = q_1(t,z).$$

Позначимо $K(t,\tau,x,\xi) = -2B(t,z,D)Z(t,\tau,x,\xi)$ і побудуємо резольвенту, яка відповідає ядру отриманого рівняння

$$\mu(t,z) = 2q_1(t,z) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S Z(t,\tau,x,\xi)\mu(\tau,\xi)dS_\xi. \tag{1.112}$$

Маємо, що

$$R(t,\tau,x,\xi) = K(t,\tau,x,\xi) +$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_S K(t,\beta,z,y)K_m(\beta,\tau,y,\xi)dS_y, \tag{1.113}$$

де

$$K_m(t,\tau,x,\xi) = \int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_S K(t,\beta,z,\xi)K_{m-1}(\beta,\tau,y,\xi)dS_y, \tag{1.113$_m$}$$

$$(m = 2, 3, \ldots), \;\; K_1 \equiv K.$$

Якщо коефіцієнти рівняння (1.106) задовольняють умови теореми 1.2, і поверхня S належить $C^{(1+\alpha)}$, то на основі (1.108) для $K(t, \tau, x, \xi)$ знаходимо нерівність

$$|K_1(t, \tau, x, \xi)| \leq C_1 (t - \tau)^{-\frac{n+1-a}{2}} e^{-c_1 \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}. \tag{1.113$_1$}$$

Оцінимо повторні ядра з допоміжного (1.113$_1$):

$$|K_2(t, \tau, x, \xi)| \leq C_1^2 \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-a}{2}} (\beta - \tau)^{\frac{2-a}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_{S} \frac{e^{-\frac{|z-y|^2}{t-\beta}}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \frac{e^{-c_1 \frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}}}{(\beta-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} dS_y.$$

Для поверхневого інтеграла правильна нерівність

$$H(t, \tau, x, \xi) \equiv \int\limits_{S} \frac{e^{-\frac{|z-y|^2}{t-\beta}}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \frac{e^{-c_1 \frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}}}{(\beta-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} d\beta \leq$$

$$\leq C^* (t-\tau)^{-\frac{n-1}{2}} e^{-c_2 \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}, \tag{1.114}$$

де $\tau < \beta < t$, $0 < c_2 = c_1 - \varepsilon$, $C^* > 0$, $0 < \varepsilon < c_1$.

Скористаємось також нерівністю

$$f(y) = \frac{|z-y|^2}{t-\beta} + \frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau} \geq \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}, \; (z, \xi) \in S. \tag{1.115}$$

Якщо в $H(t, \tau, z)$ під знаком інтеграла $\beta \in (\tau, t_1)$, $t_1 = \dfrac{t+\tau}{2}$, то $t - \beta \geq \dfrac{t+\tau}{2}$. Тому маємо, що

$$H \leq \frac{2^{n-1}}{(t-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} e^{-c_2 \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} \int\limits_{S} \frac{e^{-c_1 \frac{|y-\xi|^2}{\beta-t}}}{(\beta-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} dS_y \leq$$

$$\leq C^*(t-\tau)^{-\frac{n-1}{2}} e^{-c_2\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Останній інтеграл обмежений для $\beta < \tau$ і $\xi \in S$.

Якщо $\beta \in (t_1, t)$, то $\beta - \tau \geq \dfrac{t-\tau}{2}$ і знову отримаємо оцінку (1.114). Для K_2 з допомогою (1.115) і заміни $t-\beta = \eta(t-\tau)$ дістанемо

$$|K_2(t,\tau,x,\xi)| \leq$$

$$\leq C_1^2 C^*(t-\tau)^{-\frac{n+1-2a}{2}} B\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) e^{-c_2\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}. \qquad (1.113_2)$$

Повторюючи міркування для $K_3, \ldots, K_m$, отримуємо нерівність

$$|K_2(t,\tau,x,\xi)| \leq C^m C^{*m-1} B\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), \ldots, B\left(\frac{a}{2}, \frac{(m-1)a}{2}\right) \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\frac{n+1-ma}{2}} \exp\left\{-c_m|z-\xi|^2(t-\tau)^{-1}\right\}, \qquad (1.113_m)$$

де $c_m = c_1 - m\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \dfrac{c_1}{m^2}$.

Візьмемо $m_0 = \left[\dfrac{n+1}{a}\right] + 1$, тоді ядро K_{m_0} вже не має особливості при $t = \tau$ і правильна оцінка

$$|K_{m_0}(t,\tau,x,\xi)| \leq$$

$$\leq A_{m_0} \exp\left\{-c_{m_0}|z-\xi|^2(t-\tau)^{-1}\right\}, \qquad (1.113_{m_0})$$

де A_{m_0} відповідна стала в (1.113_{m_0}).

Оцінимо наступні ядра K_{m_0+k} $(k = 1, 2, \ldots)$. За допомогою нерівностей (1.113_1), (1.115) і (1.113_{m_0}) знаходимо

$$|K_{m_0+1}(t,\tau,x,\xi)| \leq C_1 A_{m_0} \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-a}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_{S} e^{-c_{m_0} f(y)} \frac{e^{-(c_1 - c_{m_0})\frac{|y-z|^2}{\tau-\beta}}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2}}} dS_y \leq C_1 A_{m_0} \bar{C}_{m_0} B\left(\frac{a}{2}, 1\right) \times$$

$$\times(t-\tau)^{\frac{a}{2}}\exp\left\{-c_{m_0}|z-\xi|^2(t-\tau)^{(-1)}\right\}, \qquad (1.113_{m_0+1})$$

де

$$\bar{C}_{m_0}=\sup_{z\in S}\int\limits_S e^{-c_{m_0}f(y)}\frac{e^{-m_0\varepsilon|z-\xi|^2(t-\beta)^{-1}}}{(t-\beta)^{-\frac{n-1}{2}}}dS_y\le\mathrm{const}\,.$$

За індукцією встановлюється нерівність

$$|K_{m_0+k}(t,\tau,x,\xi)|\le C_1\left(A_{m_0}\bar{C}_{m_0}\right)^k(t-\tau)^{\frac{ka}{2}}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{k-1}B\left(\frac{a}{2},1+\frac{ja}{2}\right)e^{-c_{m_0}\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}$$

і ряд (1.113) мажорується збіжним рядом

$$|R(t,\tau,x,\xi)|\le\sum_{m=1}^{m_0}A_m(t-\tau)^{\frac{ma-n-1}{2}}e^{-c_m|z-\xi|^2\left(t-\tau^{-1}\right)}+$$

$$+C_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left[A_{m_0}C_{m_0}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)(t-\tau)^{\frac{a}{2}}\right]^k}{\Gamma\left(1+\frac{ka}{2}\right)}e^{-c_{m_0}\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Сума останнього ряду є функцією Міттаг-Лефлера, тому маємо остаточну нерівність

$$|R(t,\tau,x,\xi)|\le C(t-\tau)^{-n+1-a}\left(A_0C_0\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)(t-\tau)^{\frac{a}{2}}\right)\times$$

$$\times e^{-c_{m_0}\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}. \qquad (1.116)$$

На інтервалі $(t,\tau)\in(0,T)$ резольвента задовольняє такій нерівності, як ядро K, тільки з іншими сталими C_1, $C>0$:

$$|R(t,\tau,x,\xi)|\le C(t-\tau)^{\frac{-n+1-a}{2}}e^{-c|z-\xi|^2\left(t-\tau^{-1}\right)}. \qquad (1.117)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (1.112) знаходимо за формулою

$$\mu(t,z) = 2g_1(t,z) + 2\int\limits_0^t d\tau \int\limits_S R(t,\tau,x,\xi) g_1(\tau,\xi) dS_\xi. \quad (1.118)$$

Тепер підставимо $\mu(t,z)$ в інтеграл (1.111) і виділимо ядро оберненого оператора задачі Неймана (1.106)–(1.108)

$$u(t,x) = \int\limits_\Omega G_1(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega G_1(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S G_2(t,\tau,x,\xi) g(\tau,\xi) dS_\xi, \quad (1.119)$$

де компоненти функції Гріна задачі Неймана

$$\left.\begin{array}{c} G_1(t,\tau,x,\xi) = Z(t,\tau,x,\xi) - 2\int\limits_\tau^t d\beta \int\limits_S Z(t,\beta,x,y)\times \\ \times\left[B\left(\beta, D_y\right) Z(\beta,\tau,y,\xi) + R\otimes BZ\right] dS_y, \\ (x\in\Omega, \xi\in\Omega), \\ |G_2(t,\tau,x,\xi)| = 2Z(t,\tau,x,\xi) - 2\int\limits_\tau^t d\beta\times \\ \times\int\limits_S Z(t,\beta,x,y)R(\beta,\tau,y,\xi)dS_y, \quad (x\in\Omega, \xi\in S). \end{array}\right\} \quad (1.120)$$

Оцінюючи функцію v нерівністю

$$|v| \leq C\left(|\varphi|_C + |f|\right)$$

та використовуючи формули (1.108), (1.118) для ω, знаходимо

$$|u(t,k)| \leq C\left(|\varphi|_C + |f|_C + |g|_C\right). \quad (1.121)$$

Теорема 1.9. *Нехай коефіцієнти рівномірно параболічного рівняння (1.105) визначені в циліндрі* $Q = (0,T) \times \Omega$ *і* $a_{ij} \in H^{(\alpha)}(Q)$, $a_i \in H^{(\alpha)}(Q)$. *Функції належать класу:* $f \in H^{\alpha}_x(Q)$, $\varphi \in H^{(0)}(\Omega)$, b_0, $g \in C(\Gamma)$, *а поверхня* S *– межа області* Ω *– класу* C^{1+a}. *Тоді існує функція Гріна* (G_1, G_2) *задачі Неймана (1.105)–(1.107), розв'язок якої визначається формулою (1.118) і для розв'язку правильних нерівностей*

$$|D^k_x u(t,x)| \le C\left(\|\varphi;\Omega\|_0 + \|f;\Pi\|_0 + \|g;\Gamma\|_0\right) \times$$

$$\times \left[t^{-\frac{|k|}{2}} g_k(t, p(x,S))\right], \tag{1.122}$$

де

$$\rho(x,S) = \inf_{y\in S, x\in\Omega} \rho(x,y), \quad g_0(t,\rho) = 1,$$

$$g_1(t,\rho) = t^{-\frac{1}{2}} \ln\frac{1}{\rho}, \quad g_2(t,\rho) = t^{-\frac{1}{2}}\rho^{-1}.$$

Нерівність (1.122) узагальнює оцінку розв'язку (1.121) для похідних біля межі області.

Розглянемо задачу із косою похідною для рівномірно параболічного рівняння.

Нехай Ω – обмежена область. Розглянемо в циліндричній області $Q = [0,T) \times \Omega$ з боковою межею $\Gamma = [0,T) \times \partial\Omega$ задачу з косою похідною

$$Lu = f(t,x), \quad u|_{t=0} = \varphi(x),$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\partial_{x_i} u + b_0(t,x)u\right]\Bigg|_{\Gamma} = g(t,x). \tag{1.123}$$

Будемо вважати, що функції $b_i(t,x)$ всюди на Γ задовольняють умову

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) n_i(x)\right| \ge \delta > 0.$$

Справедлива така теорема ([1], ст. 364)

Теорема 1.10. *Нехай $S \in C^{2+\alpha}$, коефіцієнти оператора L належать простору $H^{\alpha}(Q)$, $b_i \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $b_0 \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$. Тоді для будь-яких $f \in H^{\alpha}(Q)$, $\varphi \in H^{2+\alpha}(\Omega)$, $g \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, які задовольняють умову $\mathcal{B}\varphi|_{\Gamma} = g(0,x)$, задача (1.122) має єдиний розв'язок із простору $H^{2+\alpha}(Q)$ і для нього правильна оцінка*

$$\|u;Q\|_{2+\alpha} \leq C\left(\|f;Q\|_{\alpha} + \|\varphi;\Omega\|_{2+\alpha} + \|g;\Gamma\|_{1+\alpha}\right). \qquad (1.124)$$

§1.5. Задача Коші для параболічного рівняння

Розглянемо в області П задачу Коші

$$Lu = f(t,x), \qquad (1.125)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \qquad (1.126)$$

Справедлива така теорема.

Теорема 1.11. *Нехай для задачі (1.125), (1.126) виконані умови А), Б) §1.1, $f(t,x) \in H^{\alpha}(\Pi)$, $\varphi(x) \in H^{2+\alpha}(R^n)$. Тоді існує єдиний розв'язок задачі Коші (1.125), (1.126) у класі $H^{2+\alpha}(\Pi)$ і для нього правильна оцінка*

$$\|u;\Pi\|_{2+\alpha} \leq c\left(\|f;\Pi\|_{\alpha} + \|\varphi;R^n\|_{2+\alpha}\right) \qquad (1.127)$$

і справедлива формула

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} \Gamma(x,t;\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi +$$

$$+ \int\limits_{R^n} \Gamma(x,t;\xi,0)\varphi(\xi) d\xi. \qquad (1.128)$$

Доведення. Запишемо фундаментальний розв'язок рівняння (1.125) у вигляді

$$\Gamma(x,t;\xi,\tau) = Z(x,t;\xi,\tau) + Z_1(x,t;\xi,\tau),$$

де

$$Z_1(x,t;\xi,\tau)=\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{D}Z(x,t;y,\beta)\Phi(y,\beta;\xi,\tau)dy.$$

Для $\Gamma(x,t;\xi,\tau)$ правильна оцінка

$$|D_t^r D_x^s\Gamma(x,t;\xi,\tau)|\leq c(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s}{2}}\exp\left(-c\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right).$$

Для того, щоб перевірити, чи функція (1.128) є розв'язком задачі (1.122), (1.126) необхідно розглянути окремо функції

$$v_1(x,t)=\int\limits_{0}^{\tau}d\tau\int\limits_{E_n}\Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\tau,$$

$$v_2(x,t)=\int\limits_{E_n}\Gamma(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi.$$

Вони є розв'язками наступних задач:

$$\begin{array}{ll}\mathcal{L}v_1=f, & v_1|_{t=0}=0\\ \mathcal{L}v_2=0, & v_2|_{t=0}=\varphi.\end{array}\tag{1.129}$$

Покажемо виконання рівності $v_2|_{t=0}=\varphi$. Оскільки з нерівності $|D_t^r D_x^s Z_1|\leq c(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s-\alpha}{2}}\exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right)$ при $r=s=0$ маємо

$$\lim_{t\to 0}\int\limits_{E_n}Z_1(x,\xi,t,0)\varphi(\xi)d\xi=0,$$

то використавши співвідношення

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{E_n}Z\left(t,x-\xi,\xi,t-h\right)\varphi(y)dy=\varphi(x),$$

одержимо

$$\lim_{t\to 0} v_2(x,t) = \lim_{t\to 0} \int_{E_n} \Gamma\left(x-\xi,t,\xi,0\right)\varphi(\xi)d\xi = \varphi(x),$$

що і потрібно було показати.

Доведемо тепер, що при $f \in H^{\alpha}(\Pi)$ і $\varphi \in H^{2+\alpha}(R_n)$ правильні оцінки

$$\|v_1;\Pi\|_{2+\alpha} \leq c\|f;\Pi\|_{\alpha}, \tag{1.130}$$

$$\|v_2;\Pi\|_{2+\alpha} \leq c\|\varphi;R^n\|_{2+\alpha} \tag{1.131}$$

і

$$\|v;\Pi\|_{2+\alpha} \leq c(\|f;\Pi\|_{\alpha} + \|\varphi;R^n\|_{2+\alpha}). \tag{1.132}$$

Для доведення нерівності (1.130) необхідно, щоб правильними були нерівності

$$\langle v_1;\Pi\rangle_{x,2+\alpha} \leq c\|f;\Pi\|_{\alpha}, \tag{1.133}$$

$$\langle \partial_x^r v_1;\Pi\rangle_{t,\frac{2-s+\alpha}{2}} \leq c\|f;\Pi\|_{\alpha} \quad (r=1,2), \tag{1.134}$$

$$\langle \partial_t v_1;\Pi\rangle_{t,\frac{\alpha}{2}} \leq c\|f;\Pi\|_{\alpha}, \tag{1.135}$$

а також

$$\|v_1;\Pi\|_{r} \leq c\|f;\Pi\|_{\alpha} \quad (r=1,2). \tag{1.136}$$

Скористаємося рівністю

$$D_x^s v_1(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} D_x^s \Gamma(x,t,y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]dy+$$

$$+\int_0^t f(x,\tau)d\tau \int_{E_n} D_x^s \Gamma(x,t,y,\tau)dy. \tag{1.137}$$

Оскільки

$$\left|\int\limits_{E_n} D_x^s\Gamma(x,t,y,\tau)dy\right| \leq c(t-\tau)^{\frac{s-\alpha}{2}} \quad (s=1,2), \tag{1.138}$$

$$\left|\int\limits_{E_n}\Gamma dy\right| \leq c,$$

то з (1.70) випливає, що

$$|D_x^s v_1| \leq ct^{\frac{2-s+a}{2}}\|f;\Pi\|_\alpha \quad (s=1,2), \tag{1.139}$$

$$|v_1| \leq ct\|f;\Pi\|_\alpha.$$

Використовуємо для оцінки $D_t v_1$ рівняння $\mathcal{L}v_1 = f$ і отримаємо

$$|D_t v_1| \leq ct^{\frac{a}{2}}|f|.$$

Останні три нерівності доводять оцінку (1.127), яка при $s = 0,1$ очевидна.

Перейдемо до доведення оцінок (1.133)–(1.136). Почнемо з оцінки (1.134). Для її доведення потрібно оцінити різницю

$$D_x^s v_1(x,t) - D_x^s v_1(x,t') \quad (s=1,2).$$

Нехай для визначеності $t' < t \leq T$. Якщо $t > 2t'$, оскільки $t - t' > t'$, то в силу (1.139)

$$|D_x^s v_1(x,t) - D_x^s v_1(x,t')| \leq c\left(t^{\frac{2-s+a}{2}} + t'^{\frac{2-s+a}{2}}\right)\|f;\Pi\|_\alpha \leq$$

$$\leq c(t-t')^{\frac{2-s+a}{2}}\|f;\Pi\|_\alpha. \tag{1.140}$$

Ця ж нерівність виконується при $t - t' \leq t'$. З допомогою (1.137) маємо, що

$$D_x^s v_1(x,t) - D_x^s v_1(x,t') =$$

$$= \int\limits_{2t'-t}^{t} d\tau \int\limits_{E_n} D_x^s \Gamma(x,t,y,\tau)[f(y,\tau) - f(x,\tau)]dy -$$

$$- \int\limits_{2t'-t}^{t'} d\tau \int\limits_{E_n} D_x^s \Gamma(x,t',y,\tau)[f(y,\tau) - f(x,\tau)]dy +$$

$$+ \int\limits_{0}^{2t'-t} d\tau \int\limits_{E_n} \left[D_x^s \Gamma(x,t,y,\tau) - D_x^s \Gamma(x,t',y,\tau)\right] \times$$

$$\times [f(y,\tau) - f(x,\tau)]dy + \int\limits_{2t'-t}^{t} f(x,\tau)d\tau \int\limits_{E_n} D_x^s \Gamma(x,t,y,\tau)dy -$$

$$- \int\limits_{2t'-t}^{t'} f(x,\tau)d\tau \int\limits_{E_n} D_x^s \Gamma(x,t',y,\tau)dy +$$

$$+ \int\limits_{0}^{2t'-t} [f(x,\tau) - f(x,t)]d\tau \int\limits_{E_n} [D_x^s \Gamma(x,t,y,\tau) -$$

$$-D_x^s \Gamma(x,t',y,\tau)\big]\, dy + f(x,t) \int\limits_{0}^{2t'-t} d\tau \int\limits_{E_n} [D_x^s \Gamma(x,t,y,\tau) -$$

$$-D_x^s \Gamma(x,t',y,\tau)\big]\, dy = \sum_{j=1}^{7} J_j. \qquad (1.141)$$

Перші шість членів правої частини оцінюємо за допомогою нерівностей

$$|D_t^r D_x^s \Gamma(x,t,\xi,\tau)| \le c(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right),$$

$$|D_t^r D_x^s \Gamma(x,t,\xi,\tau) - D_t^r D_x^s \Gamma(x,t',\xi,\tau)| \le$$

$$\leq \left[c\left(t-t'\right)\left(t'-\tau\right)^{-\frac{n+2r+s+2}{2}} + \left(t-t'\right)^{-\frac{2-2r-s+\alpha}{2}}\left(t'-\tau\right)^{-\frac{n+2}{2}}\right] \times$$

$$\times \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right),$$

$$|D_t^r D_x^s Z_1| \leq c(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s-\alpha}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right),$$

$$\left|\int\limits_{E_n} D_t^r D_x^s Z(x-\xi,t,\xi,\tau)d\xi\right| \leq$$

$$\leq c(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s}{2}} \int\limits_{E_n} |x-\xi|^\alpha \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right)d\xi =$$

$$= c(t-\tau)^{-\frac{2r+s-\alpha}{2}},$$

$$\sum_{j=1}^{6} |J_j| \leq c\left(t-t'\right)^{\frac{2-s+\alpha}{2}} \|f;\Pi\|_\alpha. \tag{1.142}$$

Інтеграл у виразі J_7 перетворимо наступним чином

$$\int\limits_0^{2t'-t} d\tau \int\limits_{E_n} \left[D_x^s\Gamma(x,t,y,\tau) - D_x^s\Gamma(x,t',y,\tau)\right] dy =$$

$$= \int\limits_0^{2t'-t} d\tau \int\limits_{E_n} \left[D_x^s Z(x-y,t,y,\tau) - D_x^s Z(x-y,t',y,\tau)\right] dy-$$

$$- \int\limits_{2t'-t}^{t} d\tau \int\limits_{E_n} D_x^s Z_1(x,t,y,\tau)dy + \int\limits_{2t'-t}^{t'} d\tau \int\limits_{E_n} D_x^s Z_1(x,t',y,\tau)dy+$$

$$+ \left[\int\limits_0^{t} d\tau \int\limits_{E_n} D_x^s Z_1(x,t,y,\tau)dy - \int\limits_0^{t'} d\tau \int\limits_{E_n} D_x^s Z_1(x,t',y,\tau)dy\right].$$

Перші три інтеграли правої частини не перевищують $c(t - t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}}$. Четвертий член може бути записаний у вигляді

$$\int_0^t d\tau \int_{E_n} D_x^s Z_1(x,t,y,\tau)dy - \int_0^{t'} d\tau \int_{E_n} D_x^s Z_1(x,t',y,\tau)dy =$$

$$= D_x^s \left[\int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(x-y,t,y,\tau)q(y,\tau)dy - \right.$$

$$\left. - \int_0^{t'} d\tau \int_{E_n} Z(x-y,t',y,\tau)q(y,\tau)dy \right], \tag{1.143}$$

де

$$q(y,\tau) = \int_0^\tau d\lambda \int_{E_n} \Phi(y,\xi,\tau,\lambda)d\xi$$

– функція, яка належить до класу $H^\alpha(\Pi)$.

Якщо б з самого початку розглядали замість v_1 об'ємний потенціал

$$v_1^0 = \int_0^t d\tau \int_{E_n} Z(x-y,t,y,\tau)f(y,\tau)dy,$$

то для цього потенціалу була б справедливою рівність (1.141), де всюди ядро Γ замінено на Z. Для правої частини (1.141) справедлива оцінка (1.142). Оскільки

$$\left| \int_{E_n} \left[D_x^s Z(x-y,t,y,\lambda) - D_x^s Z(x-y,t',y,\lambda) \right] dy \right| \leq$$

$$\leq c \int_{t'}^t (t'' - \lambda)^{-\frac{2+s-\alpha}{2}} dt'',$$

то правильна оцінка

$$|J_7| \leq c(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}} \|f;\Pi\|_0. \qquad (1.144)$$

З цього випливає, що для потенціалу v_1^0 має місце нерівність (1.134) і права частина (1.142) оцінюється через $c(t-t')^{\frac{2-s+\alpha}{2}}$. Це означає, що вираз J_7 з (1.140) також оцінюється за нерівністю (1.144) і оцінка (1.144) таким чином доведена.

Нерівність (1.143) отримується таким же шляхом. Використовуємо рівність

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 v_1(x',t)}{\partial x'_i \partial x'_j} = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\sigma_1} \frac{\partial^2 \Gamma(x,t,y,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} \times$$

$$\times \left\{[f(y,\tau)-f(x,\tau)] + [f(x,\tau)-f(x',t)]\right\} dy -$$

$$- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\sigma_1} \frac{\partial^2 \Gamma(x',t,y,\tau)}{\partial x'_i \partial x'_j} \left\{[f(y,\tau)-f(x',t)]dy + \right.$$

$$\left. + [f(x',\tau)-f(x',t)]\right\} dy + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n \setminus \sigma_1} \left[\frac{\partial^2 \Gamma(x,t,y,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^2 \Gamma(x',t,y,\tau)}{\partial x'_i \partial x'_j}\right] [f(y,\tau)-f(x',t)]dy +$$

$$+ f(x',t) \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \left[\frac{\partial^2 \Gamma(x,t,y,\tau)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \Gamma(x',t,y,\tau)}{\partial x'_i \partial x'_j}\right] dy,$$

де σ_1 – куля з центром x і радіусом $2|x-x'|$. При оцінці правої частини слід скористатися нерівностями

$$|D_t^r D_x^s \Gamma(x,t,\xi,\tau)| \leq c(t-\tau)^{-\frac{n+2r+s}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right),$$

$$|D_t^r D_x^s \Gamma(x,t,\xi,\tau) - D_t^r D_{x'}^s \Gamma(x',t,\xi,\tau)| \leq$$
$$\leq c\left[|x-x'|^{\gamma}(t-\tau)^{-\frac{n+2r+\gamma}{2}} + |x-x'|^{\beta}(t-\tau)^{-\frac{n+2+\alpha-\beta}{2}}\right]\times$$
$$\times \exp\left(-C\frac{|x''-\xi|^2}{(t-\tau)}\right),$$
$$\left|\int\limits_{\sigma_1} \frac{\partial^2 Z(x-y,t,y,\lambda)}{\partial x_i \partial x_j} dy\right| \leq c\left[|t-\lambda|^{-\frac{2-\alpha}{2}} + \right.$$
$$\left. + |x-x'|^n (t-\lambda)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-x'|^2}{t-\lambda}\right)\right].$$

Нерівність (1.135) є наслідком нерівності (1.134) і рівняння $\mathcal{L}v_1 = f$.

Отже, доведено нерівність (1.128).

Доведемо нерівність (1.129). Запишемо функцію v_2 через об'ємний потенціал. Оскільки ця функція є розв'язком задачі (1.127), то функція

$$v_3(x,t) = v_2(x,t) - \varphi(x)$$

є розв'язком задачі

$$\mathcal{L}v_3 = -\mathcal{L}\varphi(x), \quad v_3|_{t=0} = 0.$$

Отже,

$$v_3 = -\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \Gamma(x,t,y,\tau)\mathcal{L}\varphi(y)dy$$

і

$$v_2(x,t) = \varphi(x) - \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{E_n} \Gamma(x,t,y,\tau)\mathcal{L}\varphi(y)dy.$$

Застосовуючи тепер до правої частини рівняння $\mathcal{L}v_3 = -\mathcal{L}\varphi(x)$ нерівність (1.130), отримуємо (1.131).

Оцінка (1.132) доведена.

Розділ 2. Нелокальні крайові задачі для параболічних рівнянь другого порядку

Нелокальні крайові задачі виникають при розв'язанні задач, що описують процес дифузії частинок в турболентній плазмі, а також в процесі поширення тепла в тонкому нагрітому стержні, коли задається закон зміни загальної кількості тепла в стержні.

У цьому розділі вивчається перша крайова задача, задача з косою похідною, одностороння крайова задача з нелокальними умовами за часовою змінною для параболічного рівняння другого порядку. Встановлюється коректна розв'язність нелокальної задачі Коші для параболічних рівнянь. Одержані результати застосовуються до задач оптимального керування системами, що описуються першою крайовою задачею з нелокальною умовою за часовою змінною у випадку внутрішнього керування. Критерій якості задається об'ємним інтегралом. Крім того, досліджується задача оптимального керування системою, що описується параболічною нелокальною задачею з косою похідною у випадку обмеженого фінального керування. Критерій якості задається сумою об'ємного і поверхневого інтегралів.

§2.1. Постановка задачі і основні обмеження

Нехай D – обмежена область в R^n з межею ∂D. Розглянемо в області $Q = [0,T) \times D$ задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) = \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - \right.$$

$$\left. -a_0(t,x)\right] u(t,x) = f(t,x), \qquad (2.1)$$

нелокальну умову за часовою змінною

$$u(0,x)+\sum_{j=1}^{N} d_j(x)u(t_j,x)=\varphi(x), \qquad (2.2)$$

а на бічній межі $\Gamma=(0,T)\times\partial D$ одну з крайових умов:

$$u\big|_{\Gamma}=g(t,x); \qquad (2.3)$$

$$(Bu)(t,x)\big|_{\Gamma}\equiv\left\{\left[\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x)\partial_{x_k}+b_0(t,x)\right]u(t,x)\right\}\Big|_{\Gamma}=$$

$$=\psi(t,x); \qquad (2.4)$$

$$u\big|_{\Gamma}\geq 0,\ (Bu)(t,x)\big|_{\Gamma}\geq\psi(t,x),$$

$$\{((Bu)(t,x)-\psi(t,x))\,u\}\big|_{\Gamma}=0, \qquad (2.5)$$

де $0<t_1<t_2<\ldots<t_N\leq T$.

Припускатимемо, що для задач (2.1)–(2.5) виконуються наступні умови:

1°. Коефіцієнти $a_i\in H^\alpha(Q)$, $i\in\{0,1,\ldots,n\}$, $a_0\leq k<+\infty$, k – const, $a_{ij}\in H^\alpha(Q)$ і для довільного вектора $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ виконується нерівність

$$\Pi_1|\xi|^2\leq\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j\leq\Pi_2|\xi|^2, \qquad (2.6)$$

Π_1, Π_2 – фіксовані додатні сталі, $(t,x)\in Q$.

2°. Коефіцієнти $d_j\in H^{2+\alpha}(D)$, $j\in\{1,2,\ldots,N\}$, $\sup\limits_{\overline{D}}\sum\limits_{j=1}^{N}|d_j(x)|e^{-\lambda t_j}\leq\lambda_0<1$, де λ – довільне число, яке задовольняє нерівність $\lambda<\inf\limits_{\overline{Q}}(-a_0(t,x))$.

3°. Функції $f\in H^\alpha(Q)$, $\varphi\in H^{2+\alpha}(D)$, межа ∂D належить до класу $C^{2+\alpha}$.

4°. Вектор $\bar b = \{b_1, \dots, b_n\}$ утворює з напрямком внутрішньої нормалі $\vec n$ до Γ в точці $(t,x) \in \Gamma$ кут, менший за $\dfrac{\pi}{2}$, $b_0 \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $b_0 < 0$, $b_k \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\psi \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $(Bu)(t,x)\big|_{\partial D} = \left(\psi(0,x) + \sum\limits_{j=1}^{N} d_j(x)\psi(t_j,x)\right)\Bigg|_{\partial D}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k(t_j,x)\partial_{x_k} d_j(x)\Bigg|_{\partial D} = 0.$

5°. Функції $g \in H^{2+\alpha}(\Gamma)$, $\left(g(0,x) + \sum\limits_{j=1}^{N} d_j(x) g(t_j,x)\right)\Bigg|_{\partial D} = \varphi(x)\Bigg|_{\partial D}$, $\partial_t g(0,x) + \sum\limits_{j=1}^{n}\Bigg\{ d_j(x)\left[\partial_t g(t_j,x) - f(t_j,x)\right] + \left(\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(0,x)\partial_{x_i} + \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(0,x)\right)\left(g(t_j,x)\partial_{x_i} d_j(x)\right)\Bigg\} = \left(\sum\limits_{i,k=1}^{n} a_{ik}(0,x)\partial_{x_i}\partial_{x_k} + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(0,x)\partial_{x_i} + a_0(0,x)\right)\varphi(x) + f(0,x)$ при $x \in \partial D$.

§2.2. Коректна розв'язність першої нелокальної крайової задачі

Позначимо через $\tilde g(t,x)$ розв'язок задачі Діріхле в області $Q = (0,T) \times D$:

$$\partial_t u = \Delta u,\ u(0,x),\ u\Big|_{\Gamma} = g(t,x).$$

В задачі (2.1)–(2.2) зробимо заміну

$$u(t,x) = v(t,x)e^{-\lambda t} + \tilde g(t,x), \tag{2.7}$$

де λ задовольняє умову 2°. Одержимо

$$(L_1 v)(t,x) \equiv \Bigg[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} -$$

$$-a_0(t,x)-\lambda\Bigg]v(t,x)=f(t,x)e^{\lambda t}-(L\tilde{g})(t,x)\equiv F(t,x), \quad (2.8)$$

$$v(0,x)+\sum_{j=1}^{N}d_j(x)e^{-\lambda t_j}v(t_j,x)=\varphi(x)-\tilde{g}(0,x)-$$

$$-\sum_{j=1}^{N}d_j(x)\tilde{g}(t_j,x)\equiv\Phi(x), \quad (2.9)$$

$$v\Big|_{\Gamma}=0. \quad (2.10)$$

2.2.1. Принцип максимуму для розв'язків першої нелокальної крайової задачі

Знайдемо оцінку розв'язків крайової задачі (2.8)–(2.10). Правильна така теорема.

Теорема 2.1. *Нехай v – класичний розв'язок задачі* (2.8)–(2.10) *в області Q і виконані умови* 1°–3°, 5°*. Тоді для $v(t,x)$ правильна нерівність*

$$|v|\le\max\left(\left\|\Phi\cdot\left(1-\sum_{j=1}^{N}|d_j(x)|e^{-\lambda t_j}\right)^{-1};D\right\|_0,\right.$$

$$\left.\|F(-a_0-\lambda)^{-1};\Pi\|_0\right). \quad (2.11)$$

Доведення. Можливі три випадки: v недодатний в Q, або найбільше додатне значення v досягається на $\Gamma_T\equiv\Gamma U\left\{(t,x)\middle|x\in\overline{D},t=0\right\}$, або це найбільше значення досягається в точці $P_1\left(t^{(1)},x^{(1)}\right)\in Q$.

У першому випадку $\max\limits_{\overline{Q}}v(t,x)\le 0$, в другому $0<\max\limits_{\overline{Q}}v(t,x)=\max\limits_{\overline{D}}v(t,x)\equiv v(0,x^{(2)})$. Тоді з нелокальної умови

(2.9) маємо

$$\Phi(x^{(2)}) \geq v(0, x^{(2)}) \left[1 - \sum_{j=1}^{N} |d_j(x)| e^{-\lambda t_j} \right].$$

Тому

$$v\left(0, x^{(2)}\right) \leq \max_{\overline{D}} \left[\Phi(x) \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^{N} |d_j(x)| e^{-\lambda t_j} \right)^{-1} \right]. \quad (2.12)$$

У третьому випадку $\max\limits_{\overline{Q}} v(t,x) = v(P_1)$, причому в точці P_1 виконуються співвідношення

$$\partial_t v(P_1) \geq 0,\ \partial_{x_i} v(P_1) = 0,\ -\sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(P_1) \partial_{x_i} \partial_{x_j} v(P_1) \geq 0, \quad (2.13)$$

і задовольняється рівняння (2.8).

Нерівність (2.13) правильна, оскільки в точці максимума другі похідні $\partial_{x_i} \partial_{x_j} v(P_1)$ за будь-яким напрямком

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \left(x_i - x_i^{(1)} \right) \quad (\det \|\beta_{ij}\| \neq 0)$$

недодатні, а вираз

$$\sum_{ik=1}^{n} a_{ik}(P_1) \partial_{x_i} \partial_{x_k} v(P_1) = \sum_{lj=1}^{n} \left(\sum_{ik=1}^{n} a_{ik}(P_1) \beta_{kl} \beta_{ji} \right) \partial_{y_j} \partial_{y_l} v(P_1) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \partial_{y_l} \partial_{y_l} v_m < 0.$$

Оскільки $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристичні числа квадратичної форми, то вони додатні згідно з обмеженням (2.6). З урахуванням (2.13) і рівняння (2.8) в точці P_1 правильна нерівність

$$v(P_1) \leq F(P_1)(-a_0(P_1) - \lambda)^{-1}. \quad (2.14)$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого від'ємного значення функції $v(t,x)$, маємо

$$v(t,x) \geq \tag{2.15}$$

$$\geq \min\left\{ \min_{\overline{D}} \left[\Phi \left(1 - \sum_{j=1}^{N} |d_j(x)| \right)^{-1} \right], \min_{\overline{Q}} \left[F(-a_0 - \lambda)^{-1} \right] \right\}.$$

Отже, для розв'язку задачі (2.8)–(2.10) справедлива оцінка (2.15).

Розглянемо однорідну задачу Діріхле

$$\left(L_1 v^{(1)} \right)(t,x) = 0,\ v^{(1)}(0,x) = \psi_1(x),\ v^{(1)}\big|_{\Gamma} = 0. \tag{2.16}$$

Нехай $E(t,x,\tau,\xi)$ – функція Гріна задачі (2.16).

Зауваження 2.1. Для функції $E(t,x,\tau,\xi)$ спроваджуються нерівності

$$E(t,x,\tau,\xi) \geq 0,\ 0 \leq \int_D E(t,x,0,\xi)d\xi \leq 1. \tag{2.17}$$

Оскільки розв'язок задачі (2.16) задається формулою

$$v^{(1)}(t,x) = \int_D E(t,x,0,\xi)\psi_1(\xi)d\xi,$$

то, враховуючи оцінки (2.12), (2.14), (2.15) для розв'язку $v^{(1)}(t,x)$ при $\psi_1(x) \equiv 1$, маємо

$$0 \leq \int_D E(t,x,0,\xi)d\xi \leq 1.$$

Візьмемо за $\psi_1(x)$ функцію $\eta(x,\delta)$:

$$\eta(x,\delta) = \begin{cases} c_1^{-1} \exp\left\{ -\dfrac{\delta^2}{\delta^2 - |x-y|^2} \right\}, & \text{при } |x-y| < \delta; \\ 0, & \text{при } |x-y| \geq \delta; \end{cases}$$

δ – довільне число, $(y_1, \ldots, y_n)$ – довільна точка області D, $c_1 = \int\limits_D \exp\left\{-\frac{\delta^2}{\delta^2 - |x-y|^2}\right\} dx$.

Застосовучи нерівності (2.12), (2.14), (2.15) і теорему про "середнє" значення для інтеграла

$$\int\limits_D E(t,x,0,\xi)\eta(\xi,\delta)d\xi \geq 0,$$

одержимо $E(t,x,0,\xi) \geq 0$ для $(t,x) \in Q$, $\xi \in D$.

2.2.2. Існування розв'язку нелокальної задачі Діріхле

Встановимо існування розв'язку задачі (2.8)–(2.10). Правильна така теорема.

Теорема 2.2. *Якщо виконані умови* 1°–3°, 5°, *то існує єдиний розв'язок задачі* (2.8)–(2.10), *для якого правильна оцінка* (2.11).

Доведення. Розв'язок задачі (2.8)–(2.10) шукаємо у вигляді

$$v(t,x) = \int\limits_D E(t,x,0,\xi)v(0,\xi)d\xi + \int\limits_D E(t,x,0,\xi)\Phi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D E(t,x,\tau,\xi)F(\tau,\xi)d\xi. \qquad (2.18)$$

Оскільки

$$w(t,x) = \int\limits_D E(t,x,0,\xi)\Phi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D E(t,x,\tau,\xi)F(\tau,\xi)d\xi,$$

розв'язок крайової задачі

$$(L_1\omega)(t,x) = F(t,x),\ \omega(0,x) = \Phi(x),\ \omega\big|_\Gamma = 0,$$

то згідно з теоремою 2.1 правильна оцінка

$$|\omega| \leq \max\left[\|\Phi; D\|_0, \|F(-a_0-\lambda)^{-1}; \Pi_1\|_0\right]. \qquad (2.19)$$

Задовольнивши нелокальну умову (2.9), маємо

$$v(0,x) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-\lambda t_j} \int_D E(t_j, x, 0, \xi) v(0,\xi) d\xi =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-\lambda t_j} \omega(t_j, x) \equiv F_1(x). \qquad (2.20)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (2.20) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$v_{(k)}(0,x) = F_1(x) + \int_D \sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-\lambda t_j} E(t_j, x, 0, \xi) v_{(k-1)}(0,\xi) d\xi,$$

$$v_{(0)}(0,\xi) = F_1(x),$$

$$k \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Оскільки $E(t, x, 0, \xi) \geq 0$, $0 \leq \int_D E(t_j, x, 0, \xi) d\xi \leq 1$, то

$$\left| \sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-\lambda t_j} \int_D E(t_j, x, 0, \xi) d\xi \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} |d_j(x)| e^{-\lambda t_j} \int_D E(t_j, x, 0, \xi) d\xi < \lambda_0.$$

Тому, оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, одержуємо

$$|v_{(k)}(0,x) - v_{(k-1)}(0,x)| \leq \lambda_0^k \|F_1; Q\|_0.$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння (2.20) зображається рівномірно збіжним функціональним рядом

$$v(0,x) = F_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(v_{(k)}(0,x) - v_{(k-1)}(0,x))$$

і для нього справедлива оцінка

$$|v(0,x)| \leq \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\|F_1;Q\|_0.$$

Враховуючи обмеження $\lambda_0 < 1$, запишемо розв'язок інтегрального рівняння (2.20) у вигляді

$$v(0,x) = F_1(x) + \int_D G(x,y)F_1(y)dy, \tag{2.21}$$

де $G(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$G(x,y) = \sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}E(t_j,x,0,\xi) +$$

$$+ \int_D \sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}E(t_j,x,0,y)G(y,\xi)dy,$$

звідки отримуємо оцінку

$$\left|\int_D G(x,\xi)d\xi\right| \leq \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}.$$

Поклавши в рівності (2.21) замість $F_1(x)$ значення

$$F_1(x) = \sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j} \times$$

$$\times \left[\int_D E(t_j, x, 0, \xi)\Phi(\xi)d\xi + \int_0^{t_j} d\tau \int_D E(t_j, x, 0, \xi)F(\tau, \xi)d\xi \right]$$

і, змінивши порядок інтегрування, отримуємо

$$v(0, x) = \int_0^{t_j} d\tau \int_D E_{(0)}(t_j, x, \tau, \xi)F(\tau, \xi)d\xi +$$

$$+ \int_D E_{(0)}(t_j, x, 0, \xi)\Phi(\xi)d\xi, \tag{2.22}$$

де

$$E_{(0)}(t_j, x, \tau, \xi) = -\sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j} E(t_j, x, \tau, \xi) -$$

$$- \int_D G(x, y) \sum_{j=1}^{N} d_j(y)e^{-\lambda t_j} E(t_j, y, \tau, \xi)dy.$$

Підставляючи (2.22) у поверхневий інтеграл рівності (2.18) і змінюючи порядок інтегрування, одержимо зображення

$$v(t, x) = \int_0^{t} d\tau \int_D E(t, x, \tau, \xi)F(\tau, \xi)d\xi + \int_D E(t, x, 0, \xi)\Phi(\xi)d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \Big[\int_0^{t_j} d\tau \int_D \Gamma_j(t, x, \tau, \xi)F(\tau, \xi)d\xi +$$

$$+ \int_D \Gamma_j(t, x, 0, \xi)\Phi(\xi)d\xi \Big], \tag{2.23}$$

де

$$\Gamma_j(t, x, \tau, \xi) = \int_D E(t, x, 0, y)E_{(0)}(t_j, y, \tau, \xi)dy,$$

$$j \in \{1, 2, \ldots, N\}.$$

2.2.3. Оцінка розв'язку нелокальної задачі Діріхле

Знайдемо оцінки похідних розв'язку задачі (2.8)–(2.10). Правильна така теорема.

Теорема 2.3. *Нехай для задачі* (2.8)–(2.10) *виконані умови* $1^\circ - 3^\circ, 5^\circ$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2.8)–(2.10) *в просторі* $H^{2+\alpha}(Q)$ *і для нього правильна оцінка*

$$\|v;Q\|_{2+\alpha} \leq C\left(\|F;Q\|_{\alpha} + \|\Phi;D\|_{2+\alpha}\right). \tag{2.24}$$

Доведення. Враховуючи оцінки функції Гріна

$$|\partial_t^j \partial_x^k E(t,x,\tau,\xi)| \leq C_{jk}(t-\tau)^{-\frac{n+k}{2}-j} \exp\left\{-c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\}$$

і формулу (2.18), знаходимо

$$\|v(t_j,x);Q\|_{2+\alpha} \leq C\left(\|F_1;Q\|_{\alpha} + \|\Phi;D\|_{2+\alpha}\right). \tag{2.25}$$

Запишемо задачу (2.8)–(2.10) у вигляді

$$(L_1 v)(t,x) = F(t,x),\ \ v(0,x) = \Phi(x) - \sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-\lambda t_j} v(t_j,x),$$

$$v\big|_{\Gamma} = 0. \tag{2.26}$$

Тоді, використовуючи функцію Гріна $E(t,x,\tau,\xi)$ однорідної задачі Діріхле, маємо зображення розв'язку задачі (2.26)

$$v(t,x) = \int_0^t d\tau \int_D E(t,x,\tau,\xi)F(\tau,\xi)d\xi + \int_D E(t,x,0,\xi)\times$$

$$\times\left[\Phi(\xi) - \sum_{j=1}^{N} q_j(\xi) e^{-\lambda t_j} v(t_j,\xi)\right] d\xi.$$

Враховуючи властивості функції Гріна, умови, накладені на функції $F(t,x) \in H^{\alpha}(Q)$, $\Phi(x) - \sum\limits_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}u(t_j,x) \in H^{2+\alpha}(D)$, і оцінку

$$\|\Phi - \sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}u(t_j,x); D\|_{2+\alpha} \leq c\left(\|F;Q\|_{\alpha} + \|\Phi;D\|_{2+\alpha}\right),$$

одержуємо нерівність (2.24).

Оскільки

$$\|F;Q\|_{\alpha} \leq c\left(\|f;Q\|_{\alpha} + \|g;\Gamma\|_{2+\alpha}\right),$$

$$\|\Phi;D\|_{2+\alpha} \leq c_1\left(\|\varphi,D\|_{2+\alpha} + \|g;\Gamma\|_{2+\alpha}\right),$$

то, враховуючи формулу (2.23), оцінку (2.24) і заміну (2.7) для задачі (2.1)–(2.3), правильна така теорема.

Теорема 2.4. *Нехай для задачі* (2.1)–(2.3) *виконані умови* $1^{\circ} - 3^{\circ}, 5^{\circ}$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2.1)–(2.3), *який зображається формулою*

$$u(t,x) = e^{-\lambda t}\Bigg[\int_0^t d\tau \int_D E(t,x,\tau,\xi)F(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int_D E(t,x,0,\xi)\Phi(\xi)d\xi\Bigg] + \sum_{j=1}^{N}\Bigg[\int_0^{t_j} d\tau \int_D \Gamma_j(t,x,\tau,\xi)F(\tau,\xi)d\xi +$$

$$+ \int_D \Gamma_j(t,x,0,\xi)\Phi(\xi)d\xi\Bigg] + \tilde{g}(t,x)$$

і в просторі $H^{2+\alpha}(Q)$ *для нього правильна оцінка*

$$\|u;Q\|_{2+\alpha} \leq c\left(\|f;Q\|_{\alpha} + \|\varphi;D\|_{2+\alpha} + \|g;\Gamma\|_{2+\alpha}\right).$$

2.2.4. Випадок неперервної крайової функції нелокальної задачі Діріхле

Розглянемо в області $Q = (0, T) \times D$ крайову задачу

$$(LW)(t, x) = f(t, x), \tag{2.1}$$

$$W(0, x) = \varphi(x), \tag{2.27}$$

$$W\big|_{\Gamma} = g(t, x). \tag{2.3}$$

Для розв'язку задач (2.1), (2.27), (2.3) правильна теорема.

Теорема 2.5. *Нехай рівняння* (2.1) *рівномірно параболічне в шарі* $\Pi = (0, T) \times R^n$, *коефіцієнти належать класу* $a_{ij} \in H^{(1+\alpha)}(\Pi)$, $a_i \in H^{(\alpha)}(\Pi)$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $f \in H^{(\alpha)}(Q)$, $\varphi \in H^{(0)}(D)$, $\psi \in H^{(0)}(\Gamma)$, *поверхня* $\partial D \in C^{(1+\alpha)}$. *Тоді існує розв'язок задачі Діріхле* (2.1), (2.27), (2.3), *який зображається за допомогою функції Гріна* (Γ_1, Γ_2) *формулою*

$$W(t, x) = \int\limits_D \Gamma_1(t, 0, x, \xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \Gamma_1(t, \tau, x, \xi) \times$$

$$\times f(\tau, \xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial\Omega} \Gamma_2(t, \tau, x, \xi)g(\tau, \xi)d_\xi S \tag{2.28}$$

і для нього справджується нерівність

$$|W| \leq c\left(\|\varphi; D\|_0 + \|f; Q\|_0 + \|g; \Gamma\|_0\right). \tag{2.29}$$

Встановимо існування розв'язку задачі (2.1)–(2.3). Правильна така теорема.

Теорема 2.6. *Нехай виконані умови теореми 2.5,* $d_j(x) \in C(D)$, $\sum\limits_{j=1}^{N} |d_j(x)|e^{-\lambda t_j} \leq \lambda_0 < 1$. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2.1)–(2.3) *і для нього правильна оцінка* (2.29).

Доведення. Розв'язок задачі (2.1)–(2.3) шукаємо у вигляді

$$u(t,x)=\int\limits_D E(t,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi+W(t,x). \tag{2.30}$$

Задовольнивши нелокальну умову (2.2), маємо

$$u(0,x)+\sum_{j=1}^{N}d_j(x)e^{-\lambda t_j}\int\limits_D E(t_j,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi=$$

$$=-\sum_{j=1}^{N}d_j(x)e^{-\lambda t_j}W(t_j,x)\equiv\Gamma_2(x). \tag{2.31}$$

Розв'язок інтегрального рівняння шукаємо методом послідовних наближень, одержимо

$$u(0,x)=F_2(x)+\int\limits_D G(x,y)F_2(y)dy. \tag{2.32}$$

Поклавши в рівність (2.32) замість $F_2(x)$ значення

$$F_2(x)=-\sum_{j=1}^{N}d_j(x)e^{-\lambda t_j}\Bigg[\int\limits_D\Gamma^{(1)}(t_j,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{t_j}d\tau\int\limits_D\Gamma^{(1)}(t_j,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{t_j}d\tau\int\limits_{\partial D}\Gamma^{(2)}(t_j,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d_\xi S\Bigg]$$

і змінивши порядок інтегрування, отримаємо

$$u(0,x)=\sum_{j=1}^{N}\Bigg[\int\limits_D E^{(1)}(t_j,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int_0^{t_j} d\tau \int_D E^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+\int_0^{t_j} d\tau \int_{\partial D} E^{(2)}(t_j,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi) d_\xi S \Big], \qquad (2.33)$$

де

$$E^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi) = -d_j(x) e^{-\lambda t_j} \Gamma^{(1)}(t_j,\tau,x,\xi) -$$

$$-\int_D G(x,y) d_j(y) e^{-\lambda t_j} \Gamma^{(1)}(t_j,y,\tau,\xi) dy,$$

$$E^{(2)}(t_j,x,\tau,\xi) = -d_j(x) e^{-\lambda t_j} \Gamma^{(2)}(t_j,\tau,x,\xi) -$$

$$-\int_D G(x,y) d_j(y) e^{-\lambda t_j} \Gamma^{(2)}(t_j,y,\tau,\xi) dy.$$

Підставляючи (2.33) у (2.30) і змінюючи порядок інтегрування, одержимо зображення

$$u(t,x) = \int_D \Gamma_1(t,0,x,\xi)\varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_D \Gamma_1(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{\partial D} \Gamma_2(t,\tau,x,\xi) g(\tau,\xi) d_\xi S +$$

$$+\sum_{j=1}^N \Big[\int_D Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi(\xi) d\xi + \int_0^{t_j} d\tau \int_D Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+\int_0^{t_j} d\tau \int_{\partial D} Z_j^{(2)}(t,x,\tau,\xi) g(\tau,\xi) d_\xi S \Big],$$

де

$$Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi) = \int\limits_D E(t,x,0,y)E^{(1)}(t_j,y,\tau,\xi)dy,$$

$$Z_j^{(2)}(t,x,\tau,\xi) = \int\limits_D E(t,x,0,y)E^{(2)}(t_j,y,\tau,\xi)dy,$$

$$j \in \{1,2,\ldots,N\}.$$

§2.3. Задача оптимального керування розв'язками нелокальної задачі Діріхле (випадок внутрішнього керування)

В області $Q = (0,T) \times D$ розглянемо задачу знаходження пари функцій (u,p), на яких функціонал

$$J(p) = \int\limits_0^\tau dt \int\limits_D F(t,x,u,p)dx \tag{2.34}$$

досягає мінімуму в класі функцій

$$p \in V = \{p \in C^\alpha(Q) \big| \psi_1 \le p \le \psi_2\},$$

із яких u є розв'язком крайової задачі

$$(Lu)(t,x) = f(t,x;p),\ u(0,x) + \sum_{j=1}^N d_j(x)u(t_j,x) = \varphi(x),$$

$$u\big|_\Gamma = g(t,x). \tag{2.35}$$

Будемо вважати, що виконуються такі умови:

6°. Функції $\psi_1 \in H^\alpha(Q)$, $\psi_2 \in H^\alpha(Q)$, $\sum\limits_{j=1}^N |d_j(x)| \le \lambda_0 < 1$, $a_0 < 0$, $f(t,x,p)$, $F(t,x,u,p)$ визначені відповідно в областях $Q^{(1)} = Q \times [\psi_1,\psi_2]$, $Q^{(2)} = Q \times R^1 \times [\psi_1,\psi_2]$, мають гельдерові похідні другого порядку за змінними u і p, які належать як функції (t,x) простору $H^{\alpha}(Q)$.

При обмеженнях 1°–3°, 5°, 6°, для будь-якого $p \in V$ існує єдиний розв'язок задачі (2.35) із простору $H^{2+\alpha}(Q)$ і для нього правильна, враховуючи (2.24) і (2.7), оцінка

$$\|u;Q\|_{2+\alpha} \le c\left(\|f;Q\|_{\alpha} + \|\varphi;D\|_{2+\alpha} + \|g;\Gamma\|_{2+\alpha}\right). \qquad (2.36)$$

Нехай $E(t,x,\tau,\xi)$, $\Gamma_j(t,x,\tau,\xi)$, $j \in \{1,2,\ldots,N\}$, – компоненти функції Гріна однорідної нелокальної задачі Діріхле із формули (2.23). Тоді, за теоремою 2.1 правильні нерівності

$$0 \le \int\limits_D E(t,x,\tau,\xi)d\xi \le \|a_0^{-1};\overline{Q}\|_0,$$

$$0 \le \sum_{j=1}^{N} \int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_D \Gamma_j(t,x,\tau,\xi)d\xi \le \frac{1}{1-\lambda_0}.$$

Позначимо

$$u(t,x) = \int\limits_t^T d\tau \int\limits_D E(\tau,\xi,t,x)\partial_u F(\tau,\xi,u,p)d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^{N} \int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_D \Gamma_j(\tau,\xi,t,x)\partial_u F(\tau,\xi,u,p)d\xi,$$

$$H(u,\mu,p) \equiv F(t,x,u,p) + \mu(t,x)f(t,x,p).$$

Правильна така теорема.

Теорема 2.7. *Якщо функція $H(u,\mu,p)$ за аргументом p є монотонно зростаючою для $p \in V$, то оптимальним є керування $p^{(0)}(t,x) = \psi_1(t,x)$, а оптимальним розв'язком задачі (2.35) є $u^{(0)}(t,x,p^{(0)}) \equiv u^{(0)}(t,x,\psi_1(t,x))$.*

Якщо функція $H(u, \mu, p)$ *за аргументом* p *є монотонно спадною для* $p \in V$, *то оптимальним є керування* $p^{(0)}(t,x) = \psi_2(t,x)$, *а оптимальним розв'язком задачі* (2.35) *є* $u^{(0)}(t,x,p^{(0)}) = u^{(0)}(t,x,\psi_2(t,x))$.

Доведення. Нехай Δp – деякий допустимий приріст керування $p^{(0)}(t,x)$. Позначимо через Δu приріст функції $u(t,x,p^{(0)})$. Тоді Δu в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L\Delta u)(t,x) = f(t,x,p^{(0)}(t,x) + \Delta p) - f(t,x,p^{(0)}(t,x)) \equiv$$

$$\equiv \Delta f(t,x,p),$$

$$\Delta u(0,x,p) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x)\Delta u(t_j,x,p) = 0, \ \Delta u\big|_{\Gamma} = 0. \qquad (2.37)$$

За допомогою формули Тейлора знаходимо приріст функціонала $J(p)$

$$\Delta J = \int_0^T dt \int_D \Big[\partial_u F(t,x,u,p)\Delta u + \partial_p F(t,x,u,p)\Delta p +$$

$$+ O(|\Delta u|^2) + O(|\Delta p|^2)\Big] dx. \qquad (2.38)$$

Оскільки Δu розв'язок задачі (2.37), то, використовуючи формулу (2.23), дістанемо

$$\Delta u = \int_0^t d\tau \int_D E(t,x,\tau,\xi)\Delta f(\tau,\xi,p)d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_0^{t_j} d\tau \int_D \Gamma_j(t,x,\tau,\xi)\Delta f(\tau,\xi,p)d\xi. \qquad (2.39)$$

Підставляючи (2.39) в (2.38) і змінюючи порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta J = \int_0^T dt \int_D \left[\partial_p H(u,\mu,p)\Delta p + O(|\Delta u|^2) + O(|\Delta p|^2) \right] dx. \tag{2.40}$$

Якщо $p = p^{(0)}(t,x)$ і $H(u,\mu,p)$ задовольняють умови теореми 2.7, то при досить малих Δp маємо, що $\Delta J > 0$.

Нехай $p^{(0)}(t,x)$ – оптимальне значення, тобто $\Delta J > 0$. Перевіримо виконання умов теореми 2.6. Якщо $H(u,\mu,p)$ не є монотонною за аргументом p, то $\partial_p H(u,\mu,p)$ – знакозмінна величина, тобто $\partial_p H(u,\mu,p) > 0$ в $Q^+ \subset Q$ і $\partial_p H(u,\mu,p) < 0$ в $Q^- = Q \setminus Q^+$.

Використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta J = \iint_{Q^+} \partial_p H(u,\mu,p)\Delta p dt dx - \iint_{Q^-} |\partial_p H(u,\mu,p)|\Delta p dt dx +$$

$$+ \iint_Q (O(|\Delta u|^2) + O(|\Delta p|^2)) dx dt = \partial_p H(u^+,\mu^+,p^+) \times$$

$$\times \iint_{Q^+} \Delta p dx dt - |\partial_p H(u^-,\mu^-,p^-)| \iint_{Q^-} \Delta p dx dt +$$

$$+ \iint_Q (O(|\Delta u|^2) + O(|\Delta p|^2)) dx dt.$$

При досить малому Δp знак ΔJ визначається першими двома доданками суми. Різниця перших двох доданків змінює знак в залежності від величин $mesQ^+$, $mesQ^-$, Δp. При досить малих $mesQ^+$ і $\Delta p > 0$ маємо $\Delta J < 0$ і навпаки $\Delta J > 0$, якщо мала $mesQ^-$ і $\Delta p > 0$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Теорема 2.8. *Нехай $H(u,\mu,p)$ не є монотонною функцією за аргументом p. Для того, щоб керування $p^{(0)}(t,x)$ і відповідний розв'язок $u(t,x,p^{(0)})$ крайової задачі (2.35) були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувались умови:*

а) функція $H(u,\mu,p)$ за аргументом p має в точці $p^{(0)}$ мінімальне значення;

б) для довільного вектора $(e_1,e_2)\neq 0$ і $(t,x)\in\overline{Q}$ виконується нерівність

$$K(e_1,e_2)\equiv\partial_u^2F(t,x,u,p^{(0)})e_1^2+2\partial_{up}^2F(t,x,u,p^{(0)})e_1e_2-$$

$$-\mu(t,x)\partial_p^2f(t,x,p^{(0)})e_2^2>0.$$

Доведення. Достатність. Нехай $p^{(0)}(t,x)$ задовольняє умови теореми 2.8, покажемо його оптимальність. Надамо керуванню $p^{(0)}(t,x)$ деякого приросту Δp і позначимо через Δu відповідний приріст функції $u(t,x,p^{(0)})$. Тоді Δu в області Q буде розв'язком задачі (2.37).

За допомогою формули Тейлора знаходимо приріст функціонала $J(p)$:

$$\Delta J=\int\limits_0^T dt\int\limits_D\Big[\partial_uF(t,x,u,p^{(0)})\Delta u+\partial_pF(t,x,u,p^{(0)})\Delta p+$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\partial_u^2F(t,x,u,p^{(0)})(\Delta u)^2+2\partial_{up}^2F(t,x,u,p^{(0)})\Delta u\Delta p+$$

$$+\partial_p^2F(t,x,u,p^{(0)})(\Delta p)^2\Big]+O(|\Delta u|^{2+\alpha})+O(|\Delta p|^{2+\alpha})\Big]dx. \tag{2.41}$$

Підставляючи (2.39) в (2.41) і змінюючи порядок інтегрування, одержимо

$$\Delta J=\int\limits_0^T dt\int\limits_D\Big[\partial_pH(u,\mu,p^{(0)})\Delta p+\frac{1}{2}K(\Delta u,\Delta p)+$$

$$+O(|\Delta u|^{2+\alpha}) + O(|\Delta p|^{2+\alpha})\Big] dx.$$

Оцінимо ΔJ знизу, враховуючи, що $\partial_p H(u, \mu, p^{(0)}) = 0$ за умовою теореми 2.8. Позначимо $\delta_1 = \inf\limits_{|\xi|=1} K(\xi_1, \xi_2)$. За умовою б) маємо $\delta_1 > 0$ для всіх $(t, x) \in \overline{Q}$. Тоді

$$K_1(\Delta u, \Delta p) \geq \delta_1(|\Delta u|^2 + |\Delta p|^2).$$

Отже,

$$\Delta J \geq \delta_1 \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[|\Delta u|^2 \left(1 - O(|\Delta u|^\alpha)\right) + \right.$$

$$\left. +|\Delta p|^2 \left(1 - O(|\Delta p|^\alpha)\right)\right] dx.$$

Враховуючи співвідношення (2.39), маємо, що $\Delta u \to 0$ при $\Delta p \to 0$. Тому, при досить малих Δp таких, що $1-O(|\Delta u|^\alpha) \geq \dfrac{1}{2}$, $1 - O(|\Delta p|^\alpha) \geq \dfrac{1}{2}$, одержуємо оцінку

$$\Delta J \geq \frac{\delta_1}{2} \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left(|\Delta u|^2 + |\Delta p|^2\right) dx > 0.$$

Необхідність. Нехай $p^{(0)}(t, x)$ – оптимальне, тобто $\Delta J(p^{(0)}) > 0$. Перевіримо виконання умов а), б) теореми 2.8. Нехай $\partial_p H(u, \mu, p^{(0)}) \neq 0$. Тоді, вибираючи досить малі різні за знаком на області Q прирости Δp із формули (2.40), одержимо, що ΔJ змінює знак в залежності від знаку Δp. Це суперечить наявності мінімуму функціонала $J(p)$ у точці $p^{(0)}(t, x)$. Отже, $\partial_p H(u^{(0)}, \mu, p^{(0)}) = 0$.

Визначимо знак функції $\partial_p H(u, \mu, p)$ в околі $p^{(0)}(t, x)$. Запишемо приріст ΔJ у вигляді

$$\Delta J = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \Big[\partial_p H(u, \mu, p^{(0)} + \theta \Delta p)\Delta p + O(|\Delta u|^2) +$$

$$+O(|\Delta p|^2)\big]\,dx.$$

При досить малих Δp із умови $\Delta J > 0$ випливає, що $\partial_p H(u,\mu,p^{(0)}+\theta\Delta p)\Delta p > 0$, тобто $\partial_p H < 0$ при $p < p^{(0)}$ і $\partial_p H > 0$ при $p > p^{(0)}$. Тому, в точці $p^{(0)}$ функція $H(u,\mu,p)$ досягає мінімуму.

Якщо $K(\Delta u, \Delta p) \le 0$ в області Q, то з урахуванням умови а) одержимо $\Delta J \le 0$, що неможливо.

Нехай $K(\Delta u, \Delta p) > 0$ в області Q^+ і $K(\Delta u, \Delta p) < 0$ в області $Q^- = Q \backslash Q^+$, Використовуючи теорему про середнє для приросту ΔJ маємо

$$\Delta J = \frac{1}{2} K(\Delta u^+, \Delta p^+) mes Q^+ - \frac{1}{2} |K(\Delta u^-, \Delta p^-)| mes Q^- +$$

$$+\int_0^T dt \int_D \big[O(|\Delta u|^{2+\alpha}) + O(|\Delta p|^{2+\alpha})\big]\,dx.$$

При досить малих Δp знак ΔJ визначається першими двома доданками суми. Різниця цих доданків змінює знак залежно від величини значення $mesQ^{\pm}$. Отже, при знакозмінній формі $K(e_1, e_2)$ функціонал $J(p)$ не досягає мінімуму.

Існування $(u^{(0)}, p^{(0)})$ встановлюється наступним чином. Нехай $p^{(0)}(t,x)$ оптимальне керування. Тоді $\partial_p H(u^{(0)},\mu,p^{(0)}) = 0$ і $\partial_p^2 H(u^{(0)},\mu,p^{(0)}) > 0$. Застосовуючи теорему про неявну функцію із [10] до рівняння $\partial_p H = 0$, одержимо

$$p^{(0)}(t,x) = \Phi_1(u^{(0)}, \mu).$$

Скористаємось методом подібності для задачі (2.35). Введемо в задачу (2.35) параметр A, поклавши $t = A^2\tau$, $x_i = Ay_i$, $i \in \{1,\ldots,n\}$. Тоді область Q перейде в Q_1. Позначимо при цьому перетворенні коефіцієнти диференціального виразу L через k_{ij}, k_i, k_0. Покладемо $u^{(0)}(t,x,p^{(0)}) \equiv v(\tau,y,r)$, $p^{(0)}(t,x) \equiv z(\tau,y)$, $\mu(t,x) = \mu_1(\tau,y)$, $f(t,x,p^{(0)}) = f_1(\tau,y,z)$,

$F(t,x,u^{(0)},p^{(0)}) = F_1(\tau,y,v,r)$, $g(t,x) = g_1(\tau,y)$, $d_j(x) = d_j^{(1)}(y)$, $\varphi(x)=\varphi_1(y)$. Одержимо

$$(L_2v)(\tau,y) = \Bigg[\partial_r - \sum_{ij=1}^{n} k_{ij}(\tau,y)\partial_{y_i}\partial_{y_j} - A\sum_{i=1}^{n} k_i(\tau,y)\partial_{y_i} -$$

$$-A^2k_0(t,y)\Bigg]v(\tau,y) = A^2 f_1(\tau,y,r),$$

$$v(0,y,r) + \sum_{j=1}^{N} d_j^{(1)}(y)v(\tau_j,y,r) = \varphi_1(y),$$

$$v\big|_{\Gamma_1} = g_1(\tau,y), \tag{2.42}$$

$$J(r) = A^{n+2}\int_0^{T_1} d\tau \int_{D_1} F_1(\tau,y,v,r)dy,$$

де $T_1 = A^{-2}T$, $\Gamma_1 = [0,T_1)\times\partial D_1$, $\tau_j = A^{-2}t_j$.

Позначимо через $(G(\tau,y,\beta,\xi)$, $G_1(\tau,y,\beta,\xi)$, $\ldots$, $G_N(\tau,y,\beta,\xi))$ функцію Гріна однорідної нелокальної задачі (2.42) ($q_1\equiv 0$). Покладемо

$$\mu_0(\tau,y) = A^2\left(\int_\tau^{T_1} d\beta \int_{D_1} G(\beta,\xi,\tau,y)\partial_v F_1(\beta,\xi,0,0)d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N}\int_0^{\tau_j} d\beta \int_{D_1} G_j(\beta,\xi,\tau,y)\partial_v F_1(\beta,\xi,0,0)d\xi. \right.$$

Нехай $\omega(\tau,y)$ – розв'язок нелокальної задачі Діріхле

$$(L_2\omega)(\tau,y) = A^2 f_1(\tau,y,0),\ \omega(0,y) + \sum_{j=1}^{N} d_j^{(1)}(y)\omega(\tau_j,y) = \varphi_1(y),$$

$$\omega\big|_{\Gamma_1} = g_1(\tau, y).$$

Тоді, використовуючи формулу (2.23), у відповідність задачі (2.42) поставимо систему інтегральних рівнянь

$$r(\tau, y) = \Phi_1(v, \mu_1),$$

$$v = \omega(\tau, y) + A^2 \int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_{D_1} G(\tau, y, \beta, \xi)[f_1(\beta, \xi, r) - f_1(\beta, \xi, 0)]d\xi +$$

$$+ A^2 \sum_{j=1}^N \int\limits_0^{\tau_j} d\beta \int\limits_{D_1} G_j(\tau, y, \beta, \xi)[f_1(\beta, \xi, r) - f_1(\beta, \xi, 0)]d\xi,$$

$$\mu_1(\tau, y) = A^2 \int\limits_\tau^{T_1} d\beta \int\limits_{D_1} G(\beta, \xi, \tau, y)\left[\partial_v F_1(\beta, \xi, v, r) - \right.$$

$$\left. - \partial_v F_1(\beta, \xi, 0, 0)\right] d\xi + A^2 \sum_{j=1}^N \int\limits_0^{\tau_j} d\beta \int\limits_{D_1} G_j(\beta, \xi, \tau, y) \times$$

$$\times \left[\partial_v F_1(\beta, \xi, v, r) - \partial_v F_1(\beta, \xi, 0, 0)\right] d\xi + \mu_0(\tau, y).$$

Розв'язок системи шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$v^{(0)} = \omega,$$

$$\mu_1^{(0)} = \mu_0,$$

$$r^{(k)} = \Phi_1(v^{(k)}, \mu_1^{(k)}),$$

$$v^{(k)} = \omega + A^2 \int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_{D_1} G(\tau, y, \beta, \xi)[f_1(\beta, \xi, r^{(k-1)}) - f_1(\beta, \xi, 0)]d\xi +$$

$$+A^2\sum_{j=1}^{N}\int\limits_0^{\tau_j} d\beta\int\limits_{D_1} G_j(\tau,y,\beta,\xi)[f_1(\beta,\xi,r^{(k-1)})-f_1(\beta,\xi,0)]d\xi,$$

$$\mu_1^{(k)}=\mu_0+A^2\int\limits_{\tau}^{T_1} d\beta\int\limits_{D_1} G(\beta,\xi,\tau,y)\Big[\partial_v F_1(\beta,\xi,v^{(k-1)},r^{(k-1)})-$$

$$-\partial_v F_1(\beta,\xi,0,0)]\,d\xi+A^2\int\limits_0^{\tau_j} d\beta\int\limits_{D_1} G_j(\beta,\xi,\tau,y)\times$$

$$\times\Big[\partial_v F_1(\beta,\xi,v^{(k-1)},r^{(k-1)})-\partial_v F_1(\beta,\xi,0,0)\Big]\,d\xi.$$

Користуючись обмеженнями на функції $f_1(t,x,p)$, $F(t,x,u,p)$, маємо

$$|r|\le c(|v|+|\mu_1|),$$

$$|f_1(\beta,\xi,r)-f_1(\beta,\xi,0)|\le\|\partial_p f_1;Q^{(1)}\|_0(\|v;Q\|_0+\|\mu_1;Q\|_0);$$

$$|\partial_v F_1(\beta,\xi,v,r)-\partial_v F_1(\beta,\xi,0,0)|\le c(\|\partial_v^2 F_1;Q^{(2)}\|_0+$$

$$+\|\partial_{v_r}^2 F;Q^{(2)}\|_0)(\|v;Q\|_0+\|\mu_1;Q\|_0).$$

Використовуючи теореми 2.1, 2.2 знаходимо

$$|\omega|\le c(\|f;Q^{(1)}\|_0+\|\varphi;D\|_0+\|g;\Gamma\|_0),$$

$$|\mu_1^{(0)}|\le c_1\|\partial_v F_1(t,x,0,\xi);Q\|_0.$$

Для різниці послідовних наближень маємо

$$|v^{(1)}-v^{(0)}|\le cA^2\|\partial_p f;Q\|_0 B(f,\varphi,g,\partial_u F),$$

$$|\mu_1^{(1)}-\mu_1^{(0)}|\le c_1A^2\left(\|\partial_u^2 F;Q^{(2)}\|_0+\|\partial_{up}^2 F;Q^{(2)}\|_0\right)B(f,\varphi,g,\partial_u F),$$

де $B(f,\varphi,g,\partial_u F)\equiv\|f(t,x,0);Q\|_0+\|\varphi;D\|_0+\|g;\Gamma\|_0+\|\partial_u F(t,x,0,0);Q\|_0$.

Параметр A вибираємо так, щоб справджувалась нерівність

$$C(A) \equiv \max\left(cA^2\|\partial_p f; Q\|_0, c_1 A^2\left(\|\partial_v^2 F; Q^{(2)}\|_0 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \|\partial_{up}^2 F; Q^{(2)}\|_0\right)\right) < 1.$$

Методом індукції доводиться, що для $k \in \{2, 3, \dots\}$

$$|v^{(k)} - v^{(k-1)}| \le C^K(A) B(f, \varphi, g, \partial_u F),$$

$$|\mu_1^{(k)} - \mu_1^{(k-1)}| \le C^K(A) B(f, \varphi, g, \partial_u F).$$

Отже, послідовності $\{v^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, $\{\mu_1^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ рівномірно збігаються до функцій

$$v(\tau, y) = v^{(0)}(\tau, y) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(v^{(k)}(\tau, y) - v^{(k-1)}(\tau, y)\right),$$

$$\mu_1(\tau, y) = \mu_1^{(0)}(\tau, y) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu_1^{(k)}(\tau, y) - \mu_1^{(k-1)}(\tau, y)\right).$$

Ці функції задовольняють нерівності

$$|v(\tau, y)| \le cB(f, \varphi, g, \partial_u F),$$

$$|\mu_1(\tau, y)| \le C_1 B(f, \varphi, g, \partial_u F).$$

Повертаючись до змінних (t, x), маємо

$$|U(t, x, p^{(0)})| \le cB(f, \varphi, g, \partial_u F),$$

$$|\mu(t, x)| \le c_1 B(f, \varphi, g, \partial_u F),$$

$$|p^{(0)}| \le c_2 B(f, \varphi, g, \partial_u F).$$

§2.4. Нелокальна задача з косою похідною для параболічного рівняння другого порядку

У задачі (2.1), (2.2), (2.4) зробимо заміну

$$u(t,x) = e^{-\lambda t} v(t,x),$$

де λ задовольняє умову 2°. Одержимо

$$(L_1 v)(t,x) = f(t,x)e^{\lambda t}, \tag{2.43}$$

$$v(0,x) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-\lambda t_j} v(t_j, x) = \varphi(x), \tag{2.44}$$

$$(Bv)(t,x) \equiv \left[\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x)\partial_{x_k} v + b_0(t,x)v\right]\Bigg|_{\Gamma} = \psi(t,x)e^{\lambda t}. \tag{2.45}$$

2.4.1. Оцінка розв'язку задачі з косою похідною

Встановимо оцінку розв'язку задачі (2.43)–(2.45) в тому вигляді, який будемо використовувати пізніше.

Теорема 2.9. *Нехай $v(t,x)$ – класичний розв'язок задачі (2.43)–(2.45) в області Q і виконані умови 1°–4°. Тоді для $v(t,x)$ правильна оцінка*

$$|v| \le \max\left(\left\| b_0^{-1}\psi e^{\lambda t}; \Gamma \right\|_0, \left\| \varphi \left(1 - \sum_{j=1}^{N} |d_j| e^{-\lambda t_j}\right)^{-1}; D \right\|_0, \right.$$

$$\left. \left\| f e^{\lambda t}(-a_0 - \lambda)^{-1}; D \right\|_0 \right). \tag{2.46}$$

Доведення. Нерівність (2.46) доводиться так само, як і нерівність (2.11). Відмінність в одержуваних оцінках лише тоді, коли

$$0 < \max_{\overline{Q}} v(t,x) = \max_{\Gamma} v(t,x) \equiv v(P_1).$$

Запишемо крайову умову (2.45) у вигляді

$$\left[|\vec{b}|\frac{dv}{d\vec{b}} + b_0(t,x)v\right]\Big|_{\Gamma} = e^{\lambda t}\psi(t,x),$$

де $|\vec{b}| = \left[\sum_{k=1}^{n} b_k^2(t,x)\right]^{\frac{1}{2}}$.

Нехай $f(t,x) \le 0$, $\varphi(x) \le 0$, тоді

$$\max_{\overline{Q}} v(t,x) = v(P_1) > 0, \ P_1 \in \Gamma.$$

Розглянувши конус $K(P_1) \subset Q$ з вершиною в точці P_1 такий, що в ньому $v(P) < v(P_1)$, $P \ne P_1$ і покажемо, що для довільного напрямку $\vec{b}$, що утворює гострий кут з внутрішньою нормаллю $\vec{n}$ в точці P_1, $\dfrac{dv(P_1)}{d\vec{b}} \le 0$. Для цього в $K(P_1)$ розглянемо функцію

$$W(t,x) = v(P) - v(P_1) + \varepsilon|x - x^{(1)}|^2, \ \varepsilon > 0.$$

Застосовуючи до функції $W(t,x)$ диференціальний вираз L_1, одержимо

$$(L_1W)(t,x) = f(P)e^{\lambda t} + (a_0(t,x)+\lambda)v(P_1) - \varepsilon\left[2\sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t,x) + \right.$$

$$\left. +2\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)(x_i - x_i^{(1)}) + (a_0(t,x)+\lambda)|x - x^{(1)}|^2\right].$$

Враховуючи, що $a_0(t,x) + \lambda < 0$, $f(P) \le 0$ і вибираючи досить мале ε, маємо $(L_1W)(t,x) \le 0$ в $K(P_1)$ і $W\big|_{\partial K(P_1)} \le 0$. Отже, $W(P) \le 0$ в $K(P_1)$. Оскільки

$$v(P) - v(P_1) \le -\varepsilon|x - x^{(1)}|^2,$$

то $\dfrac{dv(P_1)}{d\vec{b}} \le 0$.

Враховуючи крайову умову (2.45) в точці P_1 дістанемо

$$v(P_1) \leq \left[b_0^{-1}(P)\psi(P)e^{\lambda t}\right]\Big|_{P_1}.$$

Отже,

$$v \leq \max\left\{0, \max_{\overline{D}}\left(\left(1 - \sum_{j=1}^{N}|d_j(x)|e^{-\lambda t_j}\right)^{-1} \cdot \varphi(x)\right),\right.$$

$$\max_{\overline{Q}}\left([-a_0(t,x) - \lambda]^{-1} f(t,x)e^{\lambda t}\right),$$

$$\left.\max_{\Gamma}[b_0^{-1}(t,x)\psi(t,x)e^{\lambda t}]\right\}. \qquad (2.47)$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого недодатного значення функцій $v(t,x)$, одержимо оцінку

$$v \geq \min\left\{0, \min_{\overline{D}}\left(\left(1 - \sum_{j=1}^{N}|d_j(x)|e^{-\lambda t_j}\right)^{-1} \cdot \varphi(x)\right),\right.$$

$$\min_{\overline{Q}}\left([-a_0(t,x) - \lambda]^{-1} f(t,x)e^{\lambda t}\right),$$

$$\left.\min_{\Gamma}[b_0^{-1}(t,x)\psi(t,x)e^{\lambda t}]\right\}. \qquad (2.48)$$

Враховуючи нерівності (2.47), (2.48) для розв'язку задачі (2.43)–(2.45), одержимо оцінку (2.46).

Розглянемо однорідну задачу з косою похідною

$$(L_1 v)(t,x) = 0, \ v(0,x) = \psi(x), \ (Bv)(t,x)\big|_{\Gamma} = 0. \qquad (2.49)$$

Нехай $E_2^{(1)}(t,x,\tau,\xi)$ – функція Гріна задачі (2.49).

Зауваження 2.2. $E_2^{(1)}(t,x,\tau,\xi) \geq 0$ і правильна нерівність

$$0 < \int\limits_D E_2^{(1)}(t,x,0,\xi) \leq 1. \tag{2.50}$$

Нерівність (2.50) випливає з оцінки (2.47), як оцінка розв'язку задачі (2.49) при $\psi(x) \equiv 1$. Виберемо за функцію $\psi(x)$ функцію $\psi(x,\delta)$:

$$\psi(x,\delta) =$$

$$= \begin{cases} \exp\left\{-\frac{\delta^2}{\delta^2-|x-y|^2}\right\} \left[\int\limits_D \exp\left\{-\frac{\delta^2}{\delta^2-|x-y|^2}\right\} dy\right]^{-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } |x-y| < \delta, \\ 0, \quad \text{при } |x-y| \geq \delta. \end{cases}$$

Застосовуючи оцінку (2.47) і теорему про середнє значення до інтеграла

$$\int\limits_D E_2^{(1)}(t,x,0,\xi)\psi(\xi,\delta)d\xi \geq 0,$$

одержуємо, що $E_2^{(1)}(t,x,0,\xi) \geq 0$ для $(t,x) \in Q$, $\xi \in D$.

2.4.2. Існування розв'язку нелокальної задачі з косою похідною

Встановимо існування розв'язку задачі (2.43)–(2.45). Правильна теорема.

Теорема 2.10. *Нехай виконані умови теореми 2.9. Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2.43)–(2.45) *із простору* $H^{2+\alpha}(Q)$ *і для нього правильна оцінка*

$$\|v;Q\|_{2+\alpha} \leq c\left(\|fe^{\lambda t};Q\|_\alpha + \|\varphi;D\|_{2+\alpha} + \|\psi e^{\lambda t};\Gamma\|_{1+\alpha}\right).$$

Доведення. Розв'язок задачі (2.43)–(2.45) шукаємо у вигляді

$$v(t,x) = \int\limits_D E_2^{(1)}(t,x,0,\xi)v(0,\xi)d\xi + \omega^{(1)}(t,x), \qquad (2.51)$$

де $\omega^{(1)}(t,x)$ розв'язок задачі з косою похідною

$$(L_1\omega^{(1)})(t,x) = f(t,x)e^{\lambda t}, \ \ \omega^{(1)}(0,x) = \psi(x),$$

$$(B\omega^{(1)})(t,x)\big|_\Gamma = \psi(t,x)e^{\lambda t}. \qquad (2.52)$$

При виконанні умов 1°–4° розв'язок задачі (2.52) існує і для нього правильна оцінка

$$|\omega^{(1)}| \leq \max\left\{\max_{\overline{D}}|\varphi(x)|, \max_{\overline{Q}}\left|\left[f(t,x)e^{\lambda t}(-a_0(t,x)-\lambda)^{-1}\right]\right|,\right.$$

$$\left.\max_\Gamma\left(|b_0^{-1}||\psi(t,x)e^{\lambda t}|\right)\right\}. \qquad (2.53)$$

Задовольнивши нелокальну умову (2.44), одержимо

$$v(0,x) + \sum_{j=1}^N d_j(x)e^{-\lambda t_j}\int\limits_D E_2^{(1)}(t_j,x,0,\xi)v(0,\xi)d\xi =$$

$$= -\sum_{j=1}^N d_j(x)e^{-\lambda t_j}\omega^{(1)}(t_j,x). \qquad (2.54)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (2.54) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$v^{(0)}(0,x) = -\sum_{j=1}^N d_j(x)e^{-\lambda t_j}\omega^{(1)}(t_j,x) \equiv F_u(x),$$

$$v^{(k)}(0,x) = F_u(x) + \int\limits_D \sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-\lambda t_j} E_2^{(1)}(t_j, x, 0, \xi) \times$$

$$\times v^{(k-1)}(0,\xi) d\xi, \quad k \in \{1, 2, \ldots\}.$$

Оскільки $E_2^{(1)}(t,x,0,\xi) \geq 0$, $0 \leq \int\limits_D E_2^{(1)}(t_j, x, 0, \xi) d\xi \leq 1$, то

$$\left| \sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-\lambda t_j} \int\limits_D E_2^{(1)}(t_j, x, 0, \xi) d\xi \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{N} |d_j(x)| e^{-\lambda t_j} \int\limits_D E_2^{(1)}(t_j, x, 0, \xi) d\xi < \lambda_0.$$

Тому, оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, одержимо

$$\left| v^{(k)}(0,x) - v^{(k-1)}(0,x) \right| \leq \lambda_0^k \|F_u(x); D\|_0.$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння (2.54) зображається рівномірно збіжним функціональним рядом

$$v(0,x) = F_u(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(v^{(k)}(0,x) - v^{(k-1)}(0,x) \right)$$

і для нього справедлива оцінка

$$|v(0,x)| \leq \frac{1}{1-\lambda_0} \|F_u; D\|_0. \qquad (2.55)$$

Встановимо формулу зображення розв'язку задачі (2.43)–(2.45). Враховуючи обмеження $\lambda_0 < 1$, визначаємо розв'язок інтегрального рівняння (2.54) у вигляді

$$v(0,x) = F_u(x) + \int\limits_D \Phi_1(x,y) F_u(y) dy, \qquad (2.56)$$

де $\Phi_1(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$\Phi_1(x,\xi)+\sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}E_2^{(1)}(t_j,x,0,\xi)=-\int\limits_D \sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}\times$$

$$\times E_2^{(1)}(t_j,x,0,\xi)\Phi(y,\xi)d\xi.$$

Звідси отримуємо оцінку

$$\int\limits_D \Phi_1(x,\xi)d\xi\le\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}.$$

Поклавши в рівності (2.56) замість $F_u(x)$ значення

$$F_u(x)=-\sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}\left[\int\limits_0^{t_j} d\tau\int\limits_D G^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi)e^{\lambda\tau}d\xi+\right.$$

$$+\int\limits_D G^{(1)}(t_j,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$\left.+\int\limits_0^{t_j} d\tau\int\limits_{\partial D} G^{(2)}(t_j,x,\tau,\xi)\psi(\tau,\xi)e^{\lambda\tau}d_\xi S\right],$$

де $(G^{(1)},G^{(2)})$ – функція Гріна задачі (2.52), і змінивши порядок інтегрування, отримаємо

$$v(0,x)=\sum_{j=1}^{N}\left[\int\limits_0^{t_j} d\tau\int\limits_D \Gamma_j^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi)e^{\lambda\tau}d\xi+\right.$$

$$+\int\limits_D \Gamma_j^{(1)}(t_j,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_{\partial D} \Gamma_j^{(2)}(t_j,x,\tau,\xi)\psi(\tau,\xi)e^{\lambda\tau}d_\xi S\Bigg],$$

де

$$\Gamma_j^{(\nu)}(t_j,x,\tau,\xi) = -d_j(x)e^{-\lambda t_j}G^{(\nu)}(t_j,x,\tau,\xi)-$$

$$-\int\limits_D \Phi_1(x,y)d_j(y)e^{-\lambda t_j}G^{(\nu)}(t_j,y,\tau,\xi)dy, \quad \nu\in\{1,2\}.$$

Підставивши значення $v(0,x)$ у поверхневий інтеграл (2.51) і змінивши порядок інтегрування, одержимо зображення

$$v(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G^{(1)}(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi)e^{\lambda\tau}d\xi+$$

$$+\int\limits_D G^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D} G^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\psi(\tau,\xi)e^{\lambda\tau}d_\xi S+$$

$$+\sum_{j=1}^N \Bigg[\int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_D Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi)e^{\lambda\tau}d\xi+\int\limits_D Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi)\times$$

$$\times\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^{t_j} d\tau\int\limits_{\partial D} Z_j^{(2)}(t,x,\tau,\xi)\psi(\tau,\xi)e^{\lambda\tau}d_\xi S\Bigg], \qquad (2.57)$$

де

$$Z_j^{(\nu)}(t,x,\tau,\xi) = \int\limits_D E_2^{(1)}(t,x,0,y)\Gamma_j^{(\nu)}(t_j,x,\tau,\xi)dy,$$

$$j\in\{1,2,\dots,N\}.$$

Враховуючи оцінку похідних функції Гріна $E_2^{(1)}(t,x,0,\xi)$

$$\left|D_t^k D_x^r E_2^{(1)}(t,x,0,\xi)\right| \le C_{kr}t^{-\frac{n+|r|}{2}-k}\exp\left(-c\frac{|x-\xi|^2}{t}\right),$$

оцінку (2.55) і інтегральне рівняння (2.54), одержимо, що $v(0,x) \in C^{2+\alpha}(D)$ і правильна оцінка

$$\|v(0,x);Q\|_{2+\alpha} \le C\left(\|fe^{\lambda t};Q\|_\alpha + \|\varphi;D\|_{2+\alpha} + \|\psi e^{\lambda t};\Gamma_{1+\alpha}\|_{1+\alpha}\right).$$

Оскільки із формули (2.51) маємо

$$v(t_j,x) = \int\limits_D E_2^{(1)}(t_j,x,0,\xi)v(0,\xi)d\xi + \omega^{(1)}(t_j,x),$$

то, враховуючи оцінку (2.55), одержимо, що $v(t_j,x) \in H^{2+\alpha}(D)$ і правильна оцінка

$$\|v(t_j,x);D\|_{2+\alpha} \le$$

$$\le C\left(\|fe^{\lambda t};Q\|_\alpha + \|\varphi;D\|_{2+\alpha} + \|\psi e^{\lambda t};\Gamma\|_{1+\alpha}\right). \qquad (2.58)$$

Запишемо задачу (2.43)–(2.45) у вигляді

$$(L_1 v)(t,x) = fe^{\lambda t},$$

$$v(0,x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^N d_j(x)e^{-\lambda t_j}v(t_j,x) \equiv \Phi_5(x),$$

$$[(Bv)(t,x)]\big|_\Gamma = \psi(t,x)e^{\lambda t}.$$

Оскільки $\Phi_5(x) \in H^{2+\alpha}(D)$ і виконані умови теореми 2.9, то $v(t,x) \in H^{2+\alpha}(Q)$ і правильна оцінка

$$\|v;Q\|_{2+\alpha} \le$$

$$\le C\left(\|fe^{\lambda t};Q\|_\alpha + \|\varphi;D\|_{2+\alpha} + \|\psi e^{\lambda t};\Gamma\|_{1+\alpha}\right). \qquad (2.59)$$

Введемо в задачу (2.1), (2.2), (2.4) параметр A, поклавши $u(t,x) = v(t,x)\exp\{-At\}$, де A – довільна додатна стала і розглянемо нелокальну однорідну задачу з косою похідною

$$(Lv - Av)(t,x) = 0, \ (Bv)(t,x)\big|_\Gamma = 0,$$

$$v(0,x)+\sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-At_j}v(t_j,x)=\varphi(x).$$

Використовуючи зображення (2.57), маємо

$$v(t,x)=\int\limits_D Z(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

де $Z(t,0,x,\xi)\equiv G^{(1)}(t,0,x,\xi)+\sum\limits_{j=1}^{N} Z_j^{(1)}(t,0,x,\xi).$

Використовуючи нерівності (2.47), (2.48) і методику доведення зауваження 2.2, отримуємо справедливість такого зауваження.

Зауваження 2.3. $Z(t,0,x,\xi)\geq 0$ і

$$0\leq\int\limits_D Z(t,0,x,\xi)d\xi\leq\max_{\overline{D}}\left[1-\sum_{j=1}^{N}|q_j(x)|e^{-At_j}\right]^{-1}.$$

§2.5. Задача оптимального керування розв'язками нелокальної задачі з косою похідною (випадок фінального керування)

В області $Q=(0,T)\times D$ розглянемо задачу знаходження функцій (u,p), на яких функціонал

$$K(p)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D F_1(t,x;u)dx+\int\limits_D F_2(x;\vec{\omega})dx+$$

$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_{\partial D} F_3(t,x;u)d_xS \qquad (2.60)$$

досягає мінімуму в класі функцій $p \in V^{(1)} = \{p \in C^{2+\alpha}(D) | \psi_1 \le p \le \psi_2\}$, із яких $u(t,x,p)$ є розв'язком крайової задачі

$$(Lu)(t,x) = f(t,x), \; u(0,x,p) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x) u(t_j,x,p) = \varphi(x,p),$$

$$(Bv)(t,x)\big|_{\Gamma} = \psi(t,x), \tag{2.61}$$

де $\vec{\omega} \equiv (\omega_1, \ldots, \omega_{N+1}) = (u(t_1,x,p), \ldots, u(t_N,x,p), p)$.

Будемо вважати, що виконуються умови:

7°. Функції $\varphi(x,p^{(x)})$, $F_1(t,x;u)$, $F_2(x;\vec{\omega})$, $F_3(t,x;u)$ як функції (t,x) належать до простору $H^{\alpha}(Q)$, $H^{2+\alpha}(D)$, $H^0(\Gamma)$ відповідно і мають гельдерові похідні другого порядку за u, p і $u(t_j,x,p)$ неперервні як функції (t,x), $\psi_1 \in H^{2+\alpha}(D)$, $\psi_2 \in H^{2+\alpha}(D)$, $\sum_{j=1}^{N} |d_j(x)| \le \lambda_0 < 1$, $a_0 < 0$.

При обмеженнях 1°–4°, 7° для будь-яких $p \in V^{(1)}$ існує єдиний розв'язок задачі (2.61) із простору $H^{2+\alpha}(Q)$, і для нього правильна оцінка (2.59).

Нехай $\left\{G^{(1)}, G^{(2)}, Z_1^{(1)}, \ldots, Z_N^{(1)}, Z_1^{(2)}, Z_N^{(2)}\right\}$ – компоненти функції Гріна нелокальної задачі з косою похідною із формули (2.56).

Позначимо

$$G^{(1)}(t,x,0,\xi) + \sum_{j=1}^{N} Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi) \equiv E^{(3)}(t,x,0,\xi),$$

$$\lambda^{(1)}(x) \equiv \int_0^T dt \int_D E^{(3)}(\tau,\xi,0,x) \partial_u F_1(\tau,\xi;u) d\xi +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \int_D E^{(3)}(t_j,\xi,0,x) \partial_{\omega_j} F_2(\xi;\vec{\omega}) d\xi +$$

$$+\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\partial D} E^{(3)}(\tau,\xi,0,x)\partial_u F_3(\tau,\xi;u)d_\xi S,$$

$$H^{(1)}(\vec{\omega},\lambda^{(1)},p) \equiv F_2(x;\vec{\omega}) + \lambda^{(1)}(x)\varphi(x,p).$$

Правильна така теорема.

Теорема 2.11. *Якщо $H^{(1)}(\vec{\omega},\lambda^{(1)},p)$ за аргументом p є монотонно зростаючою для $p \in V^{(1)}$, то оптимальним керуванням є $p^{(0)}(x) = \psi_1(x)$, а оптимальним розв'язком задачі* (2.61) *є $u^{(0)}(t,x,p^{(0)}) = u(t,x;\psi_1)$.*

Якщо функція $H^{(1)}(\vec{\omega},\lambda^{(1)},p)$ за аргументом p є монотонно спадною для $p \in V^{(1)}$, то оптимальним керуванням є $p^{(0)}(x) = \psi_2(x)$, а оптимальним розв'язком задачі (2.61) *є $u^{(0)}(t,x,p^{(0)}) = u(t,x;\psi_2)$.*

Доведення. Нехай Δp – допустимий приріст керування $p^{(0)}(x)$. Тоді відповідний приріст Δu розв'язку $u(t,x,p^{(0)})$ в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L\Delta u)(t,x) = 0,\ \Delta u(0,x,p) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x)\Delta u(t_j,x,p) =$$

$$= \varphi(x,p^{(0)}+\Delta p) - \varphi(x,p^{(0)}) \equiv \Delta\varphi(x,p), \qquad (2.62)$$

$$(B\Delta u)(t,x)\big|_\Gamma = 0.$$

За допомогою формули Тейлора запишемо приріст функціонала $J(p)$:

$$\Delta J(p) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[\partial_u F_1(t,x,u^{(0)})\Delta u + O\left(|\Delta u|\right)^2\right] dx +$$

$$+\int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial D} \left[\partial_u F_3(t,x,u^{(0)})\Delta u + O\left(|\Delta u|\right)^2\right] d_x S +$$

$$+\int\limits_D \left[\sum_{j=1}^{N} \partial_{\omega_j} F_2(x,\vec{\omega}^{(0)})\Delta u(t_j,x,p^{(0)}) + \partial_p(x,\vec{\omega}^{(0)})\Delta p + \right.$$

$$\left. +O\left(|\Delta u|^2 + O\left(|\Delta p|^2\right)\right)\right] dx. \tag{2.63}$$

Оскільки Δu – розв'язок задачі (2.62), то використовуючи формулу (2.56), маємо

$$\Delta u = \int\limits_D E^{(3)}(t,x,0,\xi)\Delta\varphi(\xi,p)d\xi. \tag{2.64}$$

Підставляючи (2.64) в (2.63) і змінюючи порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta J(p) = \int\limits_D \left[\int\limits_0^T d\tau \int\limits_D E^{(3)}(t,\xi,0,x)\partial_u F_1(\tau,\xi;u^{(0)})d\xi + \right.$$

$$+\int\limits_0^T d\tau \int\limits_{\partial D} E^{(3)}(\tau,\xi,0,x)\partial_u F_3(\tau,\xi;u^{(0)})d_\xi S +$$

$$\left. +\sum_{j=1}^{N}\int\limits_D E^{(3)}(t_j,\xi,0,x)\partial_{\omega_j}F_2(\xi,\vec{\omega}^{(0)})d\xi\right]\Delta\varphi(x,p)dx +$$

$$+\int\limits_D \left[\partial_p F_2(x,\vec{\omega}^{(0)})\Delta p + O\left(|\Delta u|^2 + O\left(|\Delta p|^2\right)\right)\right] dx.$$

Якщо $p = p^{(0)}(x)$ і $H^{(1)}(\vec{\omega},\lambda^{(1)},p)$ задовольняє умови теореми 2.11, то при досить малих Δp маємо $\Delta J(p) > 0$.

Теорема 2.12. *Нехай $H^{(1)}(\vec{\omega},\lambda^{(1)},p)$ немонотонна функція за аргументом p. Для того, щоб керування $p^{(0)}(x)$ і відповідний розв'язок $u(t,x;p^{(0)})$ крайової задачі* (2.61) *були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

а) функція $H^{(1)}(\vec{\omega}, \lambda^{(1)}, p)$ за аргументом p має в точці $p^{(0)}$ мінімальне значення;

б) для довільного вектора $(e_1, \ldots, e_{N+1}) \neq 0$ і $x \in \overline{D}$ виконується нерівність

$$K_1(x,e) = \sum_{ij=1}^{N+1} \partial^2_{\omega_i\omega_j} F_2(x, \vec{\omega}^{(0)}) e_i e_j -$$

$$-\lambda^{(1)}(x) \partial^2_{\omega_{N+1}} \varphi(x, \omega^{(0)}_{N+1}) e_{N+1} > 0;$$

в) для $(t,x) \in \overline{Q}$, $\partial^2_u F_1(t,x,\omega^{(0)}) > 0$ і для $(t,x) \in \Gamma$ $\partial^2_u F_2(t,x,u^{(0)}) > 0$.

Доведення. Достатність. Нехай $p^{(0)}(x)$ задовольняє умови а) – в). Покажемо його оптимальність. Позначимо через Δp деякий допустимий приріст керування, Δu – відповідний приріст функції $u(t,x,p^{(0)})$. Використовуючи формулу (2.64), знаходимо приріст функціонала $J(p)$:

$$\Delta J = \int\limits_D \Big[\partial_p H^{(1)}(\vec{\omega}, \lambda^{(1)}, p)\Delta p +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{ij=1}^{N+1} \partial^2_{\omega_i\omega_j} F_2(x, \vec{\omega}^{(0)}) \Delta\omega_i \Delta\omega_j + O(|\Delta\omega|^{2+\alpha})\right)\Bigg] dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T dt \int\limits_D \Big[\partial^2_u F_1(t,x,u^{(0)})\Delta u^2 + O(|\Delta u|^{2+\alpha})\Big] dx$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial D} \Big[\partial^2_u F_3(t,x,u^{(0)})\Delta u^2 + O(|\Delta u|^{2+\alpha})\Big] d_x S. \quad (2.65)$$

Оцінимо ΔJ знизу, враховуючи, що $\partial_p H^{(1)} = 0$ за умовою а) теореми 2.12. Позначимо $\delta = \inf\limits_{|\xi|=1} K_1(x,\xi)$. За умовою б)

$\delta > 0$ для всіх $x \in D$, тому, враховуючи умову в) і умову гельдеровості других похідних функцій F_1, F_2, F_3, φ, маємо $\Delta J > 0$.

Необхідність. Нехай $p^{(0)}$ – оптимальне, тобто $\Delta J(p^{(0)}) > 0$. Перевіримо виконання умов а) – в) теореми 2.12. Нехай $\partial_p H^{(1)}(u, \lambda^{(1)}, p^{(0)}) \neq 0$. Тоді, вибираючи досить малі різні за знаком на області D прирости Δp, із формули

$$\Delta J = \int\limits_D \left[\partial_p H^{(1)}(\vec{\omega}, \lambda^{(1)}, p)\Delta p + O(|\Delta u|^2 + O(|\Delta p|^2))\right] dx$$

одержимо, що ΔJ змінює знак залежно від знаку Δp. Це суперечить наявності мінімуму функціонала $J(p)$ в точці $p^{(0)}$. Отже, $\partial_p H^{(1)}(\vec{\omega}, \lambda^{(1)}, p^{(0)}) = 0$.

Визначимо знак функції $\partial_p H^{(1)}(\vec{\omega}, \lambda^{(1)}, p)$ в околі $p^{(0)}$. Запишемо приріст ΔJ у вигляді

$$\Delta J = \int\limits_D \left[\partial_p H^{(1)}(\vec{\omega}, \lambda^{(1)}, p^{(0)} + \theta_{\Delta p})\Delta p dx + \int\limits_0^T dt \int\limits_D O(|\Delta u|^2)\right] dx.$$

При досить малих Δp із умови $\Delta J > 0$ випливає, що $\partial_p H^{(1)}(\vec{\omega}, \lambda^{(1)}, p^{(0)} + \theta_{\Delta p})\Delta p > 0$, тобто $\partial_p H^{(1)} < 0$ при $p < p^{(0)}$ і $\partial_p H^{(1)} > 0$ при $p > p^{(0)}$. Тому в точці $p^{(0)}$ функція $H^{(1)}(\vec{\omega}, \lambda^{(1)}, p)$ досягає мінімуму.

Якщо умови б) і в) не виконуються, то з рівності (2.65) одержуємо, що $\Delta J \leq 0$, що неможливо.

Нехай $K_1(x, \Delta\omega) > 0$ в області D^+ і $K_1(x, \Delta\omega) < 0$ в області $D^- = D \setminus D^+$, $\partial_u^2 F_1 > 0$ в Q^+ і $\partial_u^2 F_1 < 0$ в $Q^- = Q \setminus Q^+$, $\partial_u^2 F_3 > 0$ в Γ^+ і $\partial_u^2 F_3 < 0$ в $\Gamma^- = \Gamma \setminus \Gamma^+$.

Використовуючи теорему про середнє для приросту ΔJ маємо

$$\Delta J = \frac{1}{2}K_1(x^+, \Delta\omega^+) mesD^+ - \frac{1}{2}|K_1(x^-, \Delta\omega^-)| mesD^- +$$

$$+\frac{1}{2}\partial_u^2 F_1(t^+, x^+, u^+) mesQ^+ - \frac{1}{2}|\partial_u^2 F_1(t^-, x^-, u^-)| mesQ^- +$$

$$+\frac{1}{2}\partial_u^2 F_3(t^+,x^+,u^+)|mes\Gamma^+ - \frac{1}{2}|\partial_u^2 F_3(t^-,x^-,u^-)|mes\Gamma^- +$$

$$+\int\limits_0^t dt \int\limits_D O(|\Delta u|^{2+\alpha})dx.$$

При досить малих Δp знак ΔJ визначається першими шістьма членами суми. Різниця цих членів змінює знак залежно від величини значень $mesD^+$, $mesQ^+$, $mes\Gamma^+$. Отже, при знакозмінних величинах $K_1(x,\Delta\omega)$, $\partial_u^2 F_1$, $\partial_u^2 F_3$, функціонал $J(p)$ не досягає мінімуму.

Існування $(u^{(0)},p^{(0)})$ встановлюється наступним чином. Нехай $p^{(0)}$ – оптимальне, тоді $\partial_p H^{(1)}(\vec{\omega}^{(0)},\lambda^{(1)},p^{(0)}) = 0$, $\partial_p^2 H(\vec{\omega}^{(0)},\lambda^{(1)},p^{(0)}) > 0$. Застосовуючи теорему про неявну функцію до рівняння $\partial_p H^{(1)}(\vec{\omega}^{(0)},\lambda^{(1)},p^{(0)}) = 0$, одержуємо

$$p^{(0)}(x) = \Phi_1\left(u^{(0)}(t_1,x),u^{(0)}(t_2,x),\ldots,u^{(0)}(t_N,x),\lambda^{(1)}(x)\right).$$

Введемо в задачу (2.60), (2.61) параметр A, поклавши $u^{(0)}(t,x,p) = v(t,x,p)e^{-At}$, де A – довільна додатна стала, яку визначимо пізніше. Тоді, використовуючи зауваження 2.3 поставимо у відповідність задачі (2.61) систему інтегральних рівнянь

$$p^{(0)}(x) = \Phi_1\left(e^{-At_1}v(t_1,x),\ldots,e^{-At_N}v(t_N,x),\lambda^{(1)}(x)\right),$$

$$\lambda^{(1)}(x) = \int\limits_0^T e^{-At}dt\int\limits_D Z(t,0,\xi,x)\left[\partial_u F_1(t,\xi,ve^{-At})-\right.$$

$$\left.-\partial_u F_1(t,\xi,0)\right]d\xi + \sum_{j=0}^N e^{-At_j}\int\limits_D \Big[Z(t_j,0,\xi,x)\times$$

$$\times\partial_{\omega_j}F_2(\xi,v(t_1,x)e^{-At_1},\ldots,v(t_N,x)e^{-At_N},\omega_{N+1}^{(0)})-$$

$$
-\partial_{\omega_j} F_2(\xi, 0, \ldots, 0)\Big] d\xi + \int\limits_0^T e^{-At} dt \int\limits_{\partial D} Z(t, 0, \xi, x) \times
$$

$$
\times \left[\partial_u F_3(t, \xi, v e^{-At}) - \partial_u F_3(t, \xi, 0)\right] d_\xi S + \lambda_3(x), \qquad (2.66)
$$

$$
v = \omega^{(1)}(t, x) + \int\limits_D Z(t, 0, \xi, x)[\varphi(\xi, p^{(0)}) - \varphi(\xi, 0)] d\xi,
$$

де

$$
\lambda_s(x) = \int\limits_0^T e^{-At} dt \int\limits_D Z(t, 0, \xi, x) \partial_u F_1(t, \xi, 0) d\xi +
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{n} e^{-At_j} \int\limits_D Z(t_j, 0, \xi, x) \partial_{\omega_j} F_2(\xi, 0, \ldots, 0) d\xi +
$$

$$
+ \int\limits_0^T e^{-At} dt \int\limits_{\partial D} Z(t, 0, \xi, x) \partial_u F_3(t, \xi, 0) d_\xi S,
$$

$\omega^{(1)}(t, x)$ – розв'язок нелокальної задачі з косою похідною

$$
(L\omega^{(1)} - A\omega^{(1)})(t, x) = e^{At} f(t, x), \ (B\omega^{(1)})(t, x)|_\Gamma = \psi(t, x) e^{At},
$$

$$
\omega^{(1)}(0, x) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-At} \omega^{(1)}(t_j, x) = \varphi(x, 0).
$$

Розв'язок системи (2.66) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$
v^{(0)} = \omega^{(1)}(t, x),
$$

$$
\lambda_0^{(1)}(x) = \lambda_3(x),
$$

$$
\omega_{N+1}^{(k)} = \Phi_1 \left(e^{-At_1} v^{(k-1)}(t_1, x), \ldots, e^{-At_N} v^{(k-1)}(t_N, x), \lambda_k^{(1)}(x) \right),
$$

$$v^{(k)} = \omega^{(1)}(t,x) + \int\limits_D Z(t,0,x,\xi)[\varphi(\xi,\omega_{N+1}^{(k)}) - \varphi(\xi,0)]d\xi,$$

$$\lambda_k^{(1)} = \lambda_3(x) + \int\limits_0^T dt \int\limits_D Z(t,0,\xi,x)\left[\partial_u F_1(t,\xi,v^{(k-1)}e^{-At}) -\right.$$

$$\left. -\partial_u F_1(t,\xi,0)\right] d\xi + \sum_{j=1}^N e^{-At_j} \int\limits_D Z(t_j,0,\xi,x) \times$$

$$\times \left[\partial_{\omega_j} F_2(\xi, v^{(k-1)}(t_1,x)e^{-At_1},\ldots,v^{(k-1)}(t_N,x)e^{-At_N},\omega_{N+1}^{(k-1)}) -\right.$$

$$\left. -\partial_{\omega_j} F_2(\xi,0,\ldots,0)\right] d\xi + \int\limits_0^T e^{-At}dt \int\limits_{\partial D} Z(t,0,\xi,x) \times$$

$$\times \left[\partial_u F_3(t,\xi,v^{(k-1)}e^{-At}) - \partial_u F_3(t,\xi,0)\right] d_\xi S,$$

Користуючись обмеженнями на функції $F_1(t,x,u)$, $F_2(x,\vec{\omega})$, $\varphi(x,p)$, $F_3(t,x,u)$ маємо

$$|\varphi(\xi,p^{(0)}) - \varphi(\xi,0)| \le \|\partial_p\varphi; D\|_0 \left(\sum_{j=1}^N e^{-At_j}|v(t_j,x)| + |\lambda^{(1)}(x)|\right),$$

$$|\partial_u F_1(t,\xi,e^{-At}v) - \partial_u F_1(t,\xi,0)| \le \|\partial_u^2 F_1; Q\|_0 e^{-At}|v(t,x)|,$$

$$|\partial_{\omega_i} F_2(\xi,\vec{\omega}) - \partial_{\omega_i} F_2(\xi,0)| \le \sum_{j=1}^N \|\partial_{\omega_i}\partial_{\omega_j} F_2; Q\|_0 e^{-At_i}|v(t_i,x)|,$$

$$|\partial_u F_3(t,x,ve^{-At}) - \partial_u F_2(t,x,0)| \le \|\partial_u^2 F_3; \Gamma\|_0 e^{-At}|v(t,x)|.$$

Використовуючи теорему 2.10 і зауваження 2.2, знаходимо

$$|\omega^{(1)}| \le c\left(\|e^{At}f; Q\|_0 + \|\varphi(x,0); D\|_0 + \|\varphi e^{At}; \Gamma\|_0\right) \equiv$$

$$\equiv cB_2(f,\varphi,\psi),$$

$$|\lambda_3(x)| \le c_1 \left(\|\partial_u F_1(t,x,0); Q\|_0 + \sum_{j=1}^{N} \|\partial_{\omega_j} F_2(x,0,\dots,0); D\|_0 + \right.$$

$$\left. + \|\partial_u F_3(t,x,0); \Gamma\|_0 \right) \equiv c_1 B_3(F_1, F_2, F_3).$$

Для різниць послідовних наближень маємо

$$|\lambda_1^{(1)}(t,x) - \lambda_0^{(1)}| \le c_3 B_4(f,\varphi,\psi,F_1,F_2,F_3) \left[\frac{1}{2A}(1-e^{-2At}) \times \right.$$

$$\times \|\partial_u^2 F_1; Q\|_0 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} e^{-A(t_i+t_j)} \|\partial_{\omega_i}\partial_{\omega_j} F_3; D\|_0 +$$

$$\left. + \frac{1}{2A}(1-e^{-2At}) \|\partial_u^2 F_3; \Gamma\|_0 \right],$$

$$|v^{(1)} - v^{(0)}| \le c_4 \sum_{j=1}^{N} e^{-At_j} B_2(f,\varphi,\psi) \|\partial_p \varphi; D\|_0 +$$

$$+ c_1 \|\partial_p \varphi; D\|_0 \left[\frac{1}{2A}(1-e^{-2At}) \|\partial_u^2 F_1; Q\|_0 + \sum_{ij=1}^{N} e^{-A(t_i+t_j)} \times \right.$$

$$\left. \times \|\partial^2_{\omega_i\omega_j} F_2; D\|_0 + \frac{1}{2A}(1-e^{-2At}) \|\partial_u^2 F_3; \Gamma\|_0 \right] \times$$

$$\times c_3 B_4(f,\varphi,\psi,F_1,F_2,F_3),$$

$$B_4(f,\varphi,\psi,F_1,F_2,F_3) = B_2(f,\varphi,\psi) + B_3(F_1,F_2,F_3).$$

Параметр A вибираємо так, щоб справджувалась нерівність

$$C(A) = \max \left\{ c_4 \sum_{j=1}^{N} e^{-At_j} \|\partial_p \varphi; D\|_0 + c_3 c_1 \|\partial_p \varphi; D\|_0 \times \right.$$

$$\times\frac{1}{2A}(1-e^{-2AT})\|\partial_u^2 F_1;Q\|_0+\sum_{ij=1}^{N}e^{-A(t_i+t_j)}\|\partial^2_{\omega_i\omega_j}F_2;D\|_0+$$

$$+\frac{1}{2A}(1-e^{-2AT})\|\partial_u^2 F_3;\Gamma\|_0,\ c_3\left[\frac{1}{2A}(1-e^{-2AT})\|\partial_u^2 F_1;Q\|_0+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{ij=1}^{N}e^{-A(t_i+t_j)}\|\partial^2_{\omega_i\omega_j}F_2;D\|_0+\frac{1}{2A}(1-e^{-2AT})\|\partial_u^2 F_3;\Gamma\|_0\right]\right\}<1.$$

Методом індукції доводиться, що для $k\in\{2,3,\ldots\}$

$$|\lambda_k^{(1)}(x)-\lambda_{k-1}^{(1)}(x)|\le C^k(A)B_4(f,\varphi,\psi,F_1,F_2,F_3),$$

$$|v^{(k)}(t,x)-v^{(k-1)}(t,x)|\le C^k(A)B_4(f,\varphi,\psi,F_1,F_2,F_3).$$

Отже, послідовності $\left\{\lambda_k^{(1)}(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{v^{(k)}(t,x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ рівномірно збігаються до функцій

$$v(t,x)=\omega^{(1)}(t,x)+\sum_{k=1}^{\infty}(v^{(k)}(t,x)-v^{(k-1)}(t,x)),$$

$$\lambda^{(1)}(x)=\lambda_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^{(1)}(x)-\lambda_{k-1}^{(1)}(x)).$$

Ці функції задовольняють нерівності

$$|v(t,x)|\le cB_4(f,\varphi,\psi,F_1,F_2,F_3),$$

$$|\lambda^{(1)}(x)|\le cB_4(f,\varphi,\psi,F_1,F_2,F_3).$$

§2.6. Задача оптимального керування розв’язками нелокальної задачі з косою похідною (випадок внутрішнього та фінального керування)

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай D – обмежена випукла область з $\mathbb{R}^n$, з межею ∂D. В області

$Q = [0,T) \times D$ розглянемо задачу знаходження функцій $u(t,x,p(x),q(x))$, $p(x)$ і $q(x)$, які реалізують мінімум функціоналу

$$I(p,q) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D F_1(t,x,u,u_x,p)dx+$$

$$+\int\limits_D F_2(x,u(t_1,x,p,q),\ldots,u(t_N,x,p,q),q)dx \tag{2.67}$$

на класі функцій (u,p,q), із яких $(p,q) \in V \equiv \{p \in C^{(\alpha)}(D), p_1 \le p \le p_2, q \in C^{(2+\alpha)}(D), q_1 \le q \le q_2\}$, а $u(t,x,p,q)$ є розв'язком рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a_0(t,x)u = f(t)\psi(p(x)), \tag{2.68}$$

що задовольняє початкову умову

$$u(0,x) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x)u(t_j,x) = \varphi(x,q), \tag{2.69}$$

а на бічній межі $\Gamma = [0,T) \times \partial D$ крайову умову

$$(Bu)(t,x)|_\Gamma \equiv \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_k} + b_0(t,x)u\Big)\Big|_\Gamma = g(t,x). \tag{2.70}$$

Нехай для задачі (2.67)–(2.70) виконуються умови:

Функції $f(t) \in C^{(\frac{\alpha}{2})}([0,T)$, $g(t,x) \in C^{(1+\alpha)}(\Gamma)$, $q_k \in C^{(2+\alpha)}(D)$, $p_k \in C^{(\alpha)}(D)$, $k = 1,2$.

Функції $\psi(p(x)) \in C^{(\alpha)}(D)$, $\varphi(x,q) \in C^{(2+\alpha)}(D)$, $F_1(t,x,u,u_x,p) \in C^{(\alpha)}(Q)$, $F_2(x,u(t_1,x,p,q)$, ..., $u(t_N,x,p,q),q) \in C^{(2+\alpha)}(D)$ і мають гельдерові похідні другого порядку за аргументами u_x, p, q і $u(t_k, x, p, q)$ неперервні як функції від (t, x).

Нехай $f(t)\psi(p(x)) \equiv f_1(t, x)$, де $f_1(t, x) \in C^{\alpha}(Q)$. При обмеженнях $1°$–$4°$, $7°$ для будь-яких $(p, q) \in V$ існує єдиний розв'язок задачі (2.68)–(2.70) із простору $C^{2+\alpha}(Q)$ і для нього правильна формула (2.57) при $\lambda = 0$, а саме

$$u(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_1(t,x,\tau,\xi) f_1(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_D G^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G^{(2)}(t,x,\tau,\xi) g(\tau,\xi) d_\xi S +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N} \Big[\int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_D Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi) f_1(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_D Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi + \int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_{\partial D} Z_j^{(2)}(t,x,\tau,\xi) g(\tau,\xi) d_\xi S \Big].$$

Позначимо через

$$\overrightarrow{u} = (u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = (u, u_{x_1}, u_{x_2}, \ldots, u_{x_n}, p),$$

$$\overrightarrow{\omega} = (u(t_1, x, p, q), u(t_2, x, p, q), \ldots, u(t_N, x, p, q), q) =$$

$$= (\omega_1, \ldots, \omega_{N+1}),$$

$$\tilde{G}(t,x,0,\xi) \equiv G^{(1)}(t,x,0,\xi) + \sum_{j=1}^{N} Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi),$$

$$\lambda(\xi) = \int\limits_0^T f(\tau) d\tau \int\limits_\tau^T dt \int\limits_D \frac{\partial F_1}{\partial u_0}(t,x,\overrightarrow{u}) G^{(1)}(t,x,\tau,\xi) dx +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{0}^{t_j} f(\tau)d\tau\int_{\tau}^{T} dt\int_{D} \frac{\partial F_1}{\partial u_0}(t,x,\overrightarrow{u})Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi)dx+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}\int_{0}^{T} f(\tau)d\tau\int_{\tau}^{T} dt\int_{D} \frac{\partial F_1}{\partial u_i}(t,x,\overrightarrow{u})\frac{\partial G^{(1)}}{\partial x_i}(t,x,\tau,\xi)dx+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{0}^{t_j} f(\tau)d\tau\int_{\tau}^{T} dt\int_{D} \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial u_i}(t,x,\overrightarrow{u})\frac{\partial Z_j^{(1)}}{\partial x_i}(t,x,\tau,\xi)dx+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{0}^{t_j} f(\tau)d\tau\int_{D}\frac{\partial F_2}{\partial \omega_j}(x,\overrightarrow{\omega},q)G^{(1)}(t_j,x,\tau,\xi)dx+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_{0}^{t_k} f(\tau)d\tau\int_{D}\frac{\partial F_2}{\partial \omega_j}(x,\overrightarrow{\omega},q)Z_k^{(1)}(t_k,t_j,x,\tau,\xi)dx,$$

$$\mu(\xi)\equiv\int_{0}^{T} dt\Big[\int_{D}\frac{\partial F_1}{\partial u_0}(t,x,\overrightarrow{u})\tilde{G}(t,x,0,\xi)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial u_i}(t,x,\overrightarrow{u})\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_i}(t,x,0,\xi)\Big]dx+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_{D}\frac{\partial F_2}{\partial \omega_j}(x,\overrightarrow{\omega},q)\tilde{G}(t_j,x,0,\xi)dx,$$

$$H_\lambda(\xi,u_{n+1})\equiv\lambda(\xi)\psi(u_{N+1})+\int_{0}^{T} F_1(t,\xi,\overrightarrow{u})dt,$$

$$H_\mu(\xi,\omega_{N+1})\equiv\mu(\xi)\varphi(\xi,\omega_{N+1})+F_2(\xi,\overrightarrow{\omega},q).$$

Правильні такі теореми.

Теорема 2.13. *Нехай виконуються умови* 1^0 *–* 4^0*,* 8^0*. Тоді*

а) якщо функції H_λ *і* H_μ *є монотонно зростаючими за аргументами* u_{n+1} *та* ω_{N+1} *відповідно, то оптимальними керуваннями будуть* $p_1(x)$ *і* $q_1(x)$*, а оптимальний розв'язок задачі (2.67)–(2.70) має вигляд*

$$u(t, x, p, q) \equiv u(t, x, p_1, q_1);$$

б) якщо функція H_λ *монотонно зростаюча за аргументом* u_{n+1}*, а* H_μ *є монотонно спадна за аргументом* ω_{N+1}*, то оптимальними керуваннями будуть* $p_1(x)$ *і* $q_2(x)$*, а оптимальний розв'язок задачі (2.67)–(2.70) має вигляд*

$$u(t, x, p, q) \equiv u(t, x, p_1, q_2);$$

в) якщо функція H_λ *монотонно спадна за аргументом* u_{n+1}*, а* H_μ *є монотонно зростаюча за аргументом* ω_{N+1}*, то оптимальними керуваннями будуть* $p_2(x)$ *і* $q_1(x)$*, а оптимальний розв'язок задачі (2.67)–(2.70) має вигляд*

$$u(t, x, p, q) \equiv u(t, x, p_2, q_1);$$

г) якщо функції H_λ *і* H_μ *є монотонно спадними за аргументами* u_{n+1} *та* ω_{N+1} *відповідно, то оптимальними керуваннями будуть* $p_2(x)$ *і* $q_2(x)$*, а оптимальний розв'язок задачі (2.67)–(2.70) має вигляд*

$$u(t, x, p, q) \equiv u(t, x, p_2, q_2).$$

Доведення. Розглянемо випадок а). Нехай Δp – допустимий приріст керування $u_{n+1}(x)$, а Δq – допустимий приріст керування $\omega_{N+1}(x)$. Через Δu позначимо приріст функції $u(t, x, p, q)$. Тоді Δu в області Q буде розв'язком крайової задачі

$$(L\Delta u)(t, x) = f(t)\Delta\psi(u_{n+1}),$$

$$\Delta u(0,x)+\sum_{j=1}^{N} d_j(x)\Delta u(t_j,x,p,q)=\Delta\varphi(x,\omega_{N+1}), \qquad (2.71)$$

$$(B\Delta u)(t,x)|_\Gamma = 0.$$

Розглянемо приріст функціоналу:

$$\Delta I(p,q)=I(p+\Delta p,q)-I(p,q)+I(p+\Delta p,q+\Delta q)-$$

$$-I(p+\Delta p,q)\equiv \Delta_p I(p,q)+\Delta_q I(p,q).$$

Скористаємося формулою Тейлора, тоді

$$\Delta_p I(p,q)=\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D \Big[\frac{\partial F_1}{\partial u}\Delta_p u+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial u_i}\Delta_p u_i+$$

$$+o(|\Delta_p u|^2)+o(|\Delta_p u_i|^2)+o(|\Delta p|^2)\Big]dx+$$

$$+\int\limits_D\Big(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_2}{\partial \omega_j}\Delta_p\omega_j+o(|\Delta_p\omega_j|^2)\Big)dx, \qquad (2.72)$$

а

$$\Delta_q I(p,q)=\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D \Big[\frac{\partial F_1}{\partial u}\Delta_q u+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F_1}{\partial u_i}\Delta_q u_i+o(|\Delta_q u|^2)+$$

$$+o(|\Delta_q u_i|^2)\Big]dx+\int\limits_D\Big[\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_2}{\partial \omega_j}\Delta_q\omega_j+\frac{\partial F_2}{\partial q}\Delta q+$$

$$+o(|\Delta_q\omega_j|^2)+o(|\Delta q|^2)\Big]dx. \qquad (2.73)$$

Повний приріст функції $\Delta u(t,x,p,q)$ можна записати через частинні прирости наступним чином: $\Delta u(p,q) \equiv$

$\Delta_p u(p,q)+\Delta_q u(p,q)$, де $\Delta_p u(p,q)$ – розв'язок однорідної крайової задачі

$$(L\Delta_p u)(t,x,p,q) = f(t)\Delta_p\psi(u_{n+1}),$$

$$\Delta_p u(0,x) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x)\Delta_p u(t_j,x,p,q) = 0, \tag{2.74}$$

$$(B\Delta_p u)(t,x,p,q)|_\Gamma = 0,$$

і $\Delta_q u(p,q)$ – розв'язок однорідної крайової задачі

$$(L\Delta_q u)(t,x,p,q) = 0,$$

$$\Delta_q u(0,x) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x)\Delta_q u(t_j,x,p,q) = \Delta_q\varphi(x,\omega_{N+1}), \tag{2.75}$$

$$(B\Delta_q u)(t,x,p,q)|_\Gamma = 0.$$

За теоремою 2.13 існує функція Гріна задач (2.74), (2.75) і приріст $\Delta u(t,x,p,q)$ зображається формулою

$$\Delta u(t,x,p,q) = \int_0^t d\tau \int_D G_1(t,x,\tau,\xi)f(\tau)\Delta_p\psi(p(\xi))d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_0^{t_j} Z_j^{(1)}(t,x,\tau,\xi)f(\tau)\Delta_p\psi(p(\xi))d\xi +$$

$$+\int_D G_1(t,x,0,\xi)\Delta_q\varphi(\xi,q)d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\int_D Z_j^{(1)}(t,x,0,\xi)\Delta_q\varphi(\xi,q)d\xi. \tag{2.76}$$

Знайдемо значення $\Delta u_i(t,x,p,q)$ і $\Delta\omega_j$:

$$\Delta u_i(t,x,p,q) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \frac{\partial G_1}{\partial x_i}(t,x,\tau,\xi) f(\tau)\Delta_p \psi(p(\xi))d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^N \int\limits_0^{t_j} \frac{\partial Z_j^{(1)}}{\partial x_i}(t,x,\tau,\xi) f(\tau)\Delta_p \psi(p(\xi))d\xi +$$

$$+\int\limits_D \frac{\partial G_1}{\partial x_i}(t,x,0,\xi)\Delta_q \varphi(\xi,q)d\xi +$$

$$+\sum_{j=1}^N \int\limits_D \frac{\partial Z_j^{(1)}}{\partial x_i}(t,x,0,\xi)\Delta_q \varphi(\xi,q)d\xi, \qquad (2.77)$$

$i \in \{1,\dots,n\}$, і

$$\Delta\omega_j \equiv \int\limits_0^{t_j} d\tau \int\limits_D G_1(t_j,x,\tau,\xi) f(\tau)\Delta_p \psi(p(\xi))d\xi +$$

$$+\sum_{k=1}^N \int\limits_0^{t_k} d\tau \int\limits_D Z_k^{(1)}(t_k,t_j,x,\tau,\xi) f(\tau)\Delta_p \psi(p(\xi))d\xi +$$

$$+\int\limits_D G_1(t_j,x,0,\xi)\Delta_q \varphi(\xi,q)d\xi +$$

$$+\sum_{k=1}^N \int\limits_D Z_k^{(1)}(t_k,t_j,x,0,\xi)\Delta_q \varphi(\xi,q)d\xi. \qquad (2.78)$$

Підставивши формули (2.76)–(2.78) у (2.72), (2.73) і змінюючи порядок інтегрування, знаходимо

$$\Delta I(p,q) = \int\limits_D \Delta_p H_\lambda(\xi,p)\Delta p d\xi + \int\limits_D \Delta_q H_\mu(\xi,q)\Delta q d\xi. \qquad (2.79)$$

Якщо $p = p_1(x)$, $q = q_1(x)$, H_λ і H_μ задовольняють умови теореми 2.13, то при досить малих Δp і Δq маємо, що $\Delta I(p_1, q_1) > 0$.

Нехай $p_1(x)$ і $q_1(x)$ – оптимальні керування, тобто $\Delta I > 0$. Перевіримо виконання умов теореми 2.13 а). Якщо функції H_λ та H_μ не є монотонно зростаючими за аргументами u_{n+1} і ω_{N+1} відповідно, то $D_p H_\lambda$ і $D_q H_\mu$ – знакозмінні величини, тобто $D_p H_\lambda > 0$ в $D^+ \subset D$ і $D_q H_\mu > 0$ в $D_1^+ \subset D$, а $D_p H_\lambda < 0$ і $D_q H_\mu < 0$ в $D^- \subset D \setminus D^+$ і $D_1^- \subset D \setminus D_1^+$ відповідно.

Використавши теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I(p,q) = D_p H_\lambda(x^+, p) \int\limits_{D^+} \Delta p d\xi - |D_p H_\lambda(x^-, p)| \int\limits_{D^-} \Delta p d\xi +$$

$$+ D_q H_\mu(x^+, q) \int\limits_{D_1^+} \Delta q d\xi - |D_q H_\mu(x^-, p)| \int\limits_{D_1^-} \Delta q d\xi.$$

При досить малих Δp і Δq знак ΔI визначається чотирма доданками суми. Різниця перших двох і наступних двох змінює знак в залежності від величин $\operatorname{mes} D^+$, $\operatorname{mes} D_1^-$, Δp і Δq. При досить малій $\operatorname{mes} D^+$ і $\Delta p > 0$, $\Delta q > 0$ маємо, що $\Delta I < 0$ і навпаки, $\Delta I > 0$, якщо мала $\operatorname{mes} D_1^-$ і $\Delta p > 0$, $\Delta q > 0$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Випадки б) – в) доводяться аналогічно.

Теорема 2.14. *Нехай виконуються умови* 1^0 – 6^0 *і функції* $H_\lambda(x,p)$ *і* $H_\mu(x,q)$ *не є монотонними за аргументами* p *і* q *відповідно. Для того, щоб керування* $(p^{(0)}, q^{(0)}) \in V$ *і відповідний розв'язок* $u(t, x, p^{(0)}, q^{(0)})$ *крайової задачі (2.68)–(2.70) були оптимальними, необхідно та достатньо, щоб виконувалися умови:*

а) функція $H_\lambda(x,p)$ *за аргументом* p *має в точці* $p^{(0)}$ *мінімальне значення;*

б) функція $H_\mu(x,q)$ *за аргументом* q *має в точці* $q^{(0)}$ *мінімальне значення;*

в) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ *і* $(t,x) \in \overline{Q}$ *виконується нерівність*

$$K_1(t,x,\overrightarrow{u}) = \sum_{ij=0}^{n+1} \frac{\partial^2 F_1(t,x,\overrightarrow{u})}{\partial u_i \partial u_j} y_i y_j > 0;$$

г) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N+1})$ *і* $(t,x) \in \overline{Q}$ *виконується нерівність*

$$K_2(x,\overrightarrow{\xi}) = \sum_{kl=1}^{N+1} \frac{\partial^2 F_2(x,\overrightarrow{\omega})}{\partial \omega_k \partial \omega_l} \xi_k \xi_l > 0.$$

Доведення. Достатність. Нехай виконуються умови 1° – 4°. Запишемо приріст функціоналу за допомогою формули Тейлора

$$\Delta I(p^{(0)}, q^{(0)}) = \int\limits_D \Big(D_p H_\lambda(x, p^{(0)}) \Delta p +$$

$$+ \frac{1}{2} K_1(t,x,\Delta_p u) + \frac{1}{2} K_1^*(t,x,\Delta_p u) \Big) dx +$$

$$+ \int\limits_D \left[D_q H_\mu(x, q^{(0)}) \Delta q + \frac{1}{2} K_2(x, \Delta_q \omega) + \frac{1}{2} K_2^*(x, \Delta_q \omega) \right] dx,$$

де

$$K_1(t,x,\Delta_p u) = \sum_{ij=0}^{n+1} \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_i \partial u_j}(t,x,\overrightarrow{u}^{(0)}) \Delta_p u_i \Delta_p u_j +$$

$$+ \lambda(t,x) D_{pp}^2 f(t,x,p^{(0)}) (\Delta p)^2,$$

$$K_1^*(t,x,\Delta_p u) = \sum_{ij=0}^{n+1} (D_{u_i u_j}^2 F_1(t,x,\tilde{\overrightarrow{u}}^{(0)}) -$$

$$- D_{u_i u_j}^2 F_1(t,x,\overrightarrow{u}^{(0)})) \Delta_p u_i \Delta_q u_j,$$

$$K_2(x,\Delta_q\omega)=\sum_{kl=1}^{N+1}\frac{\partial^2 F_2}{\partial\omega_l\partial\omega_k}\Delta_q\omega_k\Delta_q\omega_l+$$

$$+\mu(x)D^2_{qq}\varphi(x,q)\Delta q^2,$$

$$K_2^*(x,\Delta_q\omega)=\sum_{kl=1}^{N+1}(D^2_{\omega_k\omega_l}F_2(x,\tilde{\overrightarrow{\omega}}^{(0)})-$$

$$-D^2_{\omega_k\omega_l}F_2(x,\overrightarrow{\omega}^{(0)}))\Delta_q\omega_l\Delta_q\omega_k.$$

Позначимо через $\delta_1\equiv\inf\limits_{|y|=1}K_1(t,x,\overrightarrow{y})$ і $\delta_2\equiv\inf\limits_{|\xi|=1}K_2(x,\overrightarrow{\xi})$. За умовами в) і г) теореми маємо, що $\delta_1(t,x)>0$, $\delta_2(x)>0$ для всіх $x\in D$, $(t,x)\in\overline{Q}$. Тоді

$$K_1(t,x,\Delta_p u)\geq\delta_1(t,x)|\Delta_p u|^2;$$

$$K_1^*(t,x,\Delta_p u)\leq c|\Delta_p u|^{2+\alpha}; \qquad (2.80)$$

$$K_2(x,\Delta_q\omega)\geq\delta_2(x)|\Delta_q\omega|^2;$$

$$K_2^*(x,\Delta_q\omega)\leq c|\Delta_q\omega|^{2+\alpha}. \qquad (2.81)$$

При досить малих Δp і Δq таких, що $|\Delta_p u|\leq\left(\frac{1}{2c}\delta_1(t,x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ і $|\Delta_q\omega|\leq\left(\frac{1}{2c}\delta_2(x)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, одержуємо оцінку функціоналу

$$\Delta I(p^{(0)},q^{(0)})\geq\frac{1}{4}\int\limits_D\delta_1(t,x)|\Delta_p u|^2dx+\frac{1}{4}\int\limits_D\delta_2(x)|\Delta_q\omega|^2dx.$$

Отже, $p^{(0)}$, $q^{(0)}$ – оптимальні керування, а $u(t,x,p^{(0)},q^{(0)})$ – оптимальний розв'язок.

Необхідність. Нехай $p^{(0)}$, $q^{(0)}$ – оптимальні керування, тобто $\Delta I(p^{(0)},q^{(0)})>0$. Якщо припустити, що $D_pH_\lambda\neq0$ і $D_qH_\mu\neq0$, то $\Delta I(p^{(0)},q^{(0)})$ змінюватиме знак в залежності від знаку Δp і Δq, що суперечить наявності мінімуму функціоналу $I(p,q)$ в точці $(p^{(0)},q^{(0)})$. Визначимо поведінку величин

D_pH_λ і D_qH_μ у околі точок $(p^{(0)}, q^{(0)})$. Для цього запишемо приріст функціоналу у вигляді

$$\Delta I = \int\limits_D [D_pH_\lambda(x, p^{(0)+\theta\Delta p})\Delta p + o(|\Delta_p u|^2)]dx+$$

$$+\int\limits_D [D_qH_\mu(x, q^{(0)} + \theta\Delta q)\Delta q + o(|\Delta_q \omega_j|^2)]dx.$$

Для того, щоб виконувалася нерівність $\Delta I > 0$, необхідно, щоб виконувалися такі нерівності: $D_pH_\lambda > 0$ при $p > p^{(0)}$; $D_qH_\mu > 0$ при $q > q^{(0)}$ і $D_pH_\lambda < 0$ при $p < p^{(0)}$; $D_qH_\mu < 0$ при $q < q^{(0)}$. Тому в точці $p^{(0)}$ функція $H_\lambda(x, p)$ досягає мінімального значення, а в точці $q^{(0)}$ функція $H_\mu(x, q)$ досягає мінімального значення.

Якщо $K_1(t, x, \Delta_p u) \leq 0$ і $K_2(x, \Delta_q \omega) \leq 0$ і в області Q, то за умовою 1) одержимо, що $\Delta I \leq 0$, що неможливо.

Нехай $K_1(t, x, \Delta_p u) > 0$ в області $Q^+ \subset Q$ і $K_2(x, \Delta_q \omega) > 0$ в $Q^+ \subset Q$ та $K_1(t, x, \Delta_p u) = -|K_1(t, x, \Delta_p u)| < 0$ і $K_2(x, \Delta_q \omega) = -|K_2(x, \Delta_q \omega)| < 0$ в області $Q^- \subset Q \setminus Q^+$ і $D^- \subset D \setminus D^+$ відповідно. Використовуючи теорему про середнє для приросту ΔI, одержимо

$$\Delta I(p^{(0)}, q^{(0)}) = \iint\limits_{Q^+} K_1(t, x, \Delta_p u)dtdx-$$

$$-\iint\limits_{Q^-} |K_1(t, x, \Delta_p u)|dtdx + \iint\limits_{Q} K_1^*(t, x, \Delta_p u)dtdx+$$

$$+\iint\limits_{D^+} K_2(x, \Delta_q \omega)dx - \iint\limits_{D^-} |K_2(x, \Delta_q \omega)|dx+$$

$$+\iint\limits_{D} K_2^*(x, \Delta_q \omega)dx = K_1(t^+, x^+, \Delta_p u^+)\operatorname{mes} Q^+-$$

$$-|K_1(t^-, x^-, \Delta_p u^-)|\mathrm{mes}\, Q^- +$$

$$+\iint\limits_{Q^+} K_1^*(t, x, \Delta_p u)dtdx + K_2(x^+, \Delta_q \omega^+)\mathrm{mes}\, D^+ -$$

$$-|K_2(x^-, \Delta_q \omega^-)|\mathrm{mes}\, D^- + \iint\limits_{D} K_2^*(x, \Delta_q \omega)dx.$$

Різниці цих доданків змінюють знак ΔI в залежності від величини значень $\mathrm{mes}\, Q^+$, $\mathrm{mes}\, Q^-$, $\mathrm{mes}\, D^+$ і $\mathrm{mes}\, D^-$: при досить малій $\mathrm{mes}\, Q^-$ і $\mathrm{mes}\, D^-$ приріст функціоналу $\Delta I(p^{(0)}, q^{(0)}) > 0$. Отже, при знакозмінних формах $K_1(t, x, \Delta_p u)$ і $K_2(x, \Delta_q \omega)$ функціонал не досягає мінімального значення.

Теорема 2.15. *Нехай виконуються умови* 1^0 – 6^0. *Тоді*

1) якщо функція $H_\lambda(x, p)$ *– монотонно спадна (зростаюча), а* $H_\mu(x, q)$ *задовольняє умови:*

а) функція $H_\mu(x, q)$ *за аргументом* q *має в точці* $q^{(0)}$ *мінімальне значення;*

б) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{N+1})$ *і* $(t, x) \in \overline{Q}$ *виконується нерівність*

$$K_2(x, \overrightarrow{\xi}) > 0,$$

то оптимальними керуваннями будуть p_2 (p_1) *і* $q^{(0)}$, *а оптимальний розв'язок задачі (2.67)–(2.70) має вигляд*

$$u(t, x, p, q) \equiv u(t, x, p_2, q^{(0)})$$

$$\Big(u(t, x, p, q) \equiv u(t, x, p_1, q^{(0)})\Big);$$

2) якщо функція $H_\mu(x, q)$ *– монотонно зростаюча (спадна), а* $H_\lambda(x, p)$ *задовольняє умови:*

а) функція $H_\lambda(x, p)$ *за аргументом* p *має в точці* $p^{(0)}$ *мінімальне значення;*

б) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ *і* $(t,x) \in \overline{Q}$ *виконується нерівність*

$$K_1(t,x,\overrightarrow{y}) = \sum_{ij=0}^{n+1} \frac{\partial^2 F_1(t,x,\overrightarrow{u})}{\partial u_i \partial u_j} y_i y_j > 0,$$

то оптимальними керуваннями будуть $p^{(0)}$ *і* q_1 *(*q_2*), а оптимальний розв'язок задачі (2.67)–(2.70) має вигляд*

$$u(t,x,p,q) \equiv u(t,x,p^{(0)},q_1)$$

$$\Big(u(t,x,p,q) \equiv u(t,x,p^{(0)},q_2)\Big).$$

Доведення теореми 2.15 випливає із теорем 2.13 і 2.14.

§2.7. Одностороння нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь другого порядку

В задачі (2.1), (2.2), (2.5) зробимо заміну

$$u(t,x) = e^{-\lambda t} v(t,x),$$

де λ задовольняє умову 2°. Одержимо

$$(L_1 v)(t,x) = f(t,x)e^{\lambda t}, \tag{2.43}$$

$$v(0,x) = \sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-\lambda t_j} v(t_j,x) = \varphi(x), \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} &(Bv)(t,x)|_\Gamma \geq \psi(t,x)e^{\lambda t}, \quad v\|_\Gamma \geq 0, \\ &\big((Bv)(t,x) - \psi(t,x)e^{\lambda t}\big)\, v|_\Gamma = 0. \end{aligned} \tag{2.82}$$

Знайдемо оцінку розв'язку задачі (2.43), (2.44), (2.82). Справедлива така теорема.

Теорема 2.16. *Якщо* $v(t,x)$ *– класичний розв'язок задачі (2.43), (2.44), (2.82) в області* Q *і виконані умови* 1°*–*4°*, то для* $v(t,x)$ *справедлива оцінка*

$$v(t,x) \le \max \left\{ \|b_0^{-1}\psi e^{\lambda t}; \Gamma\|_0, \left\| \varphi \left(1 - \sum_{j=1}^{N} |d_j| e^{-\lambda t_j} \right)^{-1}; D \right\|_0, \right.$$

$$\left. \|f e^{\lambda t}(-a_0 - \lambda)^{-1}; Q\|_0 \right\}. \tag{2.83}$$

Доведення. Можливі три випадки: $v \le 0$ при $(t,x) \in \bar{Q}$, або найбільше додатне значення v досягається на $\Gamma_T = \Gamma \cup D$, або це найбільше значення досягається в точці $P_1 \in Q$.

В першому випадку $\max\limits_{\bar{Q}} v(t,x) \le 0$.

В другому випадку $0 < \max\limits_{\bar{Q}} v(t,x) = \max\limits_{\Gamma_T} v(t,x)$. Якщо $\max\limits_{\Gamma_T} v(t,x) = \max\limits_{\bar{D}} v(t,x) \equiv x\left(0, x^{(2)}\right)$, то з умови (2.44) маємо

$$v\left(0, x^{(2)}\right) \le \left\| \varphi \left(1 - \sum_{j=1}^{N} |d_j| e^{-\lambda t_j} \right)^{-1} \right\|_{C(D)}.$$

Якщо $\max\limits_{\Gamma_T} v(t,x) = \max\limits_{\Gamma} v(t,x) = v(P_4) > 0$, то, враховуючи умову (2.82), дістанемо

$$\left[(Bv)(t,x)| - \psi(t,x) e^{\lambda t} \right] \Big|_{P_4} = 0. \tag{2.84}$$

Оскільки вектор $\vec{b}$ задовольняє умову 4°, то з рівності (2.84) знаходимо

$$v(P_4) \le \|b_0^{-1}\psi e^{\lambda t}; \Gamma\|_0.$$

Повторюючи міркування доведення теореми 2.10, одержимо нерівність (2.83).

Встановимо існування розв'язку задачі (2.43), (2.44), (2.82). Правильна така теорема.

Теорема 2.17. *Якщо виконані умови теореми 2.10, то існує єдиний розв'язок задачі (2.43), (2.44), (2.82) і для нього правильна оцінка.*

$$\|v;Q\|_{2+\alpha} \le C\left(\|f;Q\|_{\alpha} + \|\varphi;D\|_{2+\alpha} + \|\psi;\Gamma\|_{1+\alpha}\right). \qquad (2.85)$$

Доведення. В задачі (2.43), (2.44), (2.82) зробимо заміну, де додатна стала, яку виберемо пізніше, і розв'язок задачі будемо шукати методом штрафа [7].

Для цього розглянемо крайову задачу

$$(L_1+R)\omega_\varepsilon = f(t,x)e^{(\lambda-R)t},$$

$$\omega_\varepsilon(0,x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^{N} d_j e^{-(\lambda-R)t_j}\omega_\varepsilon(t_j,x), \qquad (2.86)$$

$$B\omega_\varepsilon|_\Gamma = \psi(t,x)e^{(\lambda-R)t} + \frac{1}{\varepsilon^\rho}\sup(-\omega_\varepsilon,0),\ 0<\rho<\frac{1}{2}.$$

Для компонент функції Гріна $(G^{(3)},G^{(4)})$ крайової задачі

$$(L_1+R)\omega = f(t,x)e^{(\lambda-R)t},\ \ \omega(0,x)=\varphi(x),$$

$$\left[(B\omega)(t,x)\right]|_\Gamma = \psi(t,x)e^{(\lambda-R)t} \qquad (2.87)$$

справедлива оцінка

$$|G^{(k)}| \le C(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-R(t-\tau)+c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right\},\ k\in\{3,4\}.$$

Використовуючи функції Гріна $(G^{(3)},G^{(4)})$, поставимо у відповідність задачі (2.86) інтегральне рівняння

$$\omega_\varepsilon(t,x) = \omega_0(t,x) -$$

$$-\sum_{j=1}^{N}\int_D d_j(y)e^{-(\lambda-R)t_j}G^{(3)}(t_j,x,0,\xi)\omega_\varepsilon(t_j,y)dy+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^\rho}\int_0^t d\tau \int_{\partial D} G^{(4)}(t,x,\tau,y)\sup(-\omega_\varepsilon(\tau,y),0)d_yS, \qquad (2.88)$$

де $\omega_0(t,x)$ – розв'язок крайової задачі (2.87).

Згідно з теоремою 2.10 для розв'язку задачі (2.87) $\omega_0(t,x)$ справедлива оцінка

$$|\omega_0(t,x)| \leq c\left(\|f;Q\|_0 + \|\varphi;D\|_0 + \|\psi;\Gamma\|_0\right). \qquad (2.89)$$

Розв'язок рівняння (2.88) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$\omega_\varepsilon^{(k)}(t,x) = \omega_0(t,x) - \sum_{j=1}^N d_j(y)e^{-(\lambda-R)t_j}G^{(3)}(t_j,x,0,\xi)\times$$

$$\times\omega_\varepsilon^{(k-1)}(t_j,y)dy + \frac{1}{\varepsilon^\rho}\int_0^t d\tau\int_{\partial D} G^{(4)}(t,x,\tau,y)\times$$

$$\times\sup(-\omega_\varepsilon^{(k-1)}(\tau,y),0)d_yS, \quad k\in\{1,2,\ldots\},$$

$$\omega_\varepsilon^{(0)}(t,x) = \omega_0(t,x).$$

Оцінимо різниці між послідовними наближеннями. При $k=1$ маємо

$$|\omega_\varepsilon^{(1)}(t,x) - \omega_\varepsilon^{(0)}(t,x)| \leq \lambda_0\|\omega_0;Q\|_0 + \frac{1}{\varepsilon^\rho}c_1\times$$

$$\times\left[\int_0^{t-\varepsilon} e^{-R(t-\tau)}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau + \int_{t-\varepsilon}^t e^{-R(t-\tau)}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau\right]\times$$

$$\times\|\omega_0;Q\|_0 \leq \|\omega_0;Q\|_0\left(\lambda_0 + \frac{c_1}{\varepsilon^\rho}\left(e^{-R\varepsilon}T^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)\right).$$

Числа R і ε вибираємо так, щоб

$$C(R,\lambda_0,\varepsilon) \equiv \lambda_0 + \frac{c_1}{\varepsilon^\rho}\left(e^{-R\varepsilon}T^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) < 1.$$

Оцінюючи різницю між послідовними наближеннями, знаходимо

$$|\omega_\varepsilon^{(k)}(t,x) - \omega_\varepsilon^{(k-1)}(t,x)| \leq C^k(R,\lambda_0,\varepsilon)\|\omega_0; Q\|_0.$$

Отже, розв'язок задачі (2.86) зображається функціональним рядом

$$\omega_\varepsilon(t,x) = \omega_0(t,x) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\omega_\varepsilon^{(k)}(t,x) - \omega_\varepsilon^{(k-1)}(t,x)\right]$$

і проводячи міркування, аналогічні доведенню теореми 2.16, для нього справедлива оцінка (2.89), де стала c не залежить від ε.

Оскільки $\omega(t,x) = v(t,x)e^{-Rt}$, то, враховуючи оцінку (2.89), одержимо нерівність (2.85).

§2.8. Нелокальна задача Коші для параболічного рівняння

Розглянемо в області $\Pi = (0,T] \times R^n$ задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє рівняння (2.1) і нелокальну умову за часовою змінною (2.2).

В задачі (2.1), (2.2) зробимо заміну

$$u(t,x) = e^{-\lambda t}v(t,x),$$

де λ задовольняє умову 2°, одержимо

$$(L_1 v)(t,x) = f(t,x)e^{\lambda t}, \tag{2.90}$$

$$v(0,x) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}v(t_j,x) = \varphi(x). \tag{2.91}$$

Для розв'язків задачі (2.90), (2.91) правильна теорема.

Теорема 2.18. *Якщо $v(t,x)$ – класичний розв'язок задачі (2.90), (2.91) в області* Π, *виконуються умови* 1° – 2° *в області* Π *і* $f(t,x) \in H^0(\Pi)$, $\varphi(x) \in H^0(R^n)$, *то для* $v(t,x)$ *правильна оцінка*

$$|v| \leq \left\| \varphi \left(1 - \sum_{j=1}^{N} |d_j| e^{-\lambda t_j} \right)^{-1} ; R^n \right\|_0 +$$

$$+ \left\| f e^{\lambda t} (-\lambda - a_0(t,x))^{-1} ; \Pi \right\|_0 . \qquad (2.92)$$

Доведення. Нехай функція $v(t,x)$ неперервна в області $\Pi_1 = \{(t,x) \in \Pi \Big| |x| < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ і її модуль не перевищує деякого числа M_0.

Розглянемо функцію

$$w(t,x) = v(t,x) - M_1 - \frac{M_0}{R_0^2} \left(|x|^2 + c_3 t \right),$$

де $M_1 = \left\| \varphi \left(1 - \sum_{j=1}^{N} |d_j| e^{-\lambda t_j} \right)^{-1} \right\|_{C(R^n)} + \left\| f e^{\lambda t} (-\lambda - a_0(t,x))^{-1} \right\|_{C(\Pi)}$.

Знайдемо значення

$$(L_1 w)(t,x) = f(t,x) e^{\lambda t} + (a_0(t,x) + \lambda) M_1 - \frac{M_0}{R_0^2} \Bigg(c_3 -$$

$$-2 \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t,x) - 2 \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) x_i - (a_0 + \lambda)(|x|^2 + c_3 t) \Bigg).$$

Виберемо число c_3 таким, щоб вираз, який стоїть біля $\frac{M_0}{R_0^2}$ був невід'ємним. Тоді $(L, w)(t,x) \leq 0$. Крім того, на бічній поверхні і нижній основі циліндра $Q = \{(t,x) \in \Pi \Big| |x| \leq R_0, 0 \leq$

$t \leq T\}$ функція $w(t,x) \leq 0$. Тому, повторюючи міркування доведення теореми 2.1, знаходимо

$$w(t,x) \leq 0, \quad (t,x) \in Q.$$

Візьмемо довільну точку $(t^{(1)}, x^{(1)})$ з області $0 \leq t \leq T$, $x \in R^n$. Тоді $w(t^{(1)}, x^{(1)}) \leq 0$ при $|x^{(1)}| \leq R_0$. Переходячи до границі при $R_0 \to \infty$, одержимо оцінку

$$v(t^{(1)}, x^{(1)}) \leq M_1.$$

Для оцінки $v(t,x)$ знизу потрібно взяти функцію

$$w_1(t,x) = v(t,x) + M_1 + \frac{M_0}{R_0^2}(|x|^2 + c_3 t).$$

Для неї $(L_1 w_1)(t,x) \geq 0$ і на нижній основі й на бічній межі Q $w_1(t,x) \geq 0$. Тому для довільної точки $(t^{(2)}, x^{(2)})$ при $|x^{(2)}| \leq R_0$ маємо $w_1(t^{(2)}, x^{(2)}) \geq 0$. Спрямовуючи R_0 до ∞, одержимо $v(t,x) \geq -M_1$.

Отже, $|v(t,x)| \leq M_1$.

Теорема 2.19. *За умов теореми 2.19 задача Коші (2.90), (2.91) має не більше одного класичного розв'язку в класі обмежених функцій.*

Доведення. Нехай $v_1(t,x)$ і $v_2(t,x)$ – розв'язки задачі (2.90), (2.91). Тоді $\omega(t,x) = v_1(t,x) - v_2(t,x)$ буде розв'язком однорідної нелокальної задачі Коші

$$(L_1\omega)(t,x) = 0, \quad \omega(0,x) + \sum_{j=1}^{N} d_j(x) e^{-\lambda t_j} \omega(t_j, x) = 0.$$

Згідно з теоремою 2.19 $\omega(t,x) \equiv 0$. Отже, $v_1(t,x) = v_2(t,x)$.

Зауваження. Розв'язок задачі Коші

$$L_1 v = 0, \quad v(0,x) = 1$$

задовольняє нерівність

$$0 \leq \int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)d\xi \leq 1.$$

Встановимо існування розв'язку задачі (2.90), (2.91).

Правильна така теорема.

Теорема 2.20. *Якщо виконані умови* 1°, 2° *в області* Π, $f(t,x) \in H^\alpha(\Pi)$, $\varphi(x) \in H^{2+\alpha}(R^n)$, *то існує єдиний розв'язок задачі (2.90), (2.91) і для нього справедлива оцінка*

$$\|v\|_{C^{2+\alpha}(\Pi)} \leq c\left(\|\varphi; R^n\|_{2+\alpha} + \|f;\Pi\|_\alpha\right) \tag{2.93}$$

Доведення. Розв'язок задачі (2.90), (2.91) шукаємо у вигляді

$$v(t,x) = \int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)v(0,\xi)d\xi + \int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} Z(t,x,\tau,\xi)f(t,\xi)e^{\lambda\tau}d\xi. \tag{2.94}$$

Оскільки

$$\omega(t,x) = \int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} Z(t,x,\tau,\xi)f(t,\xi)e^{\lambda\tau}d\xi$$

розв'язок задачі Коші

$$L_1\omega = f(t,x)e^{\lambda t}, \;\; \omega(0,x) = \varphi(x), \tag{2.95}$$

то, згідно з теоремою, правильна оцінка

$$\|\omega\|_{C^{2+\alpha}(\Pi)} \leq c\left(\|f;\Pi\|_\alpha + \|\varphi; R^n\|_{2+\alpha}\right).$$

Задовольнивши нелокальну умову (2.91), маємо

$$v(0,x)+\sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}\int\limits_{R^n} Z(t_j,x,0,\xi)v(0,\xi)d\xi =$$

$$= -\sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}\omega(t_j,x) \equiv F_2(x). \qquad (2.96)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (2.96) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$v_{(k)}(0,x) = -\sum_{j=1}^{N} d_j(x)e^{-\lambda t_j}\int\limits_{R^n} Z(t_j,x,0,\xi)v_{(k-1)}(0,\xi)d\xi + F_2(x),$$

$$v_{(0)}(0,x) \equiv F_2(x), \quad k \in \{1,2,\ldots\}.$$

Оскільки $Z(t,x,\tau,\xi) \geq 0$ і $\int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi) \leq 1$, то

$$\sum_{j=1}^{N} |d_j(x)|e^{-\lambda t_j}\int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)d\xi \leq \lambda_0 < 1.$$

Оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, одержимо

$$|v_{(k)}(0,x) - v_{(k-1)}(0,x)| \leq \lambda_0^{(k)}\|F_2;\Pi\|_0.$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння зображається функціональним рядом

$$v(0,x) = F_2(x) + \sum_{k=1}^{\infty}(v_{(k)}(0,x) - v_{(k-1)}(0,x)) \qquad (2.97)$$

і для нього справедлива оцінка

$$|v| \leq \frac{1}{1-\lambda_0}\|F_2\|_{C(\Pi)}. \qquad (2.98)$$

Підставляючи (2.97) в (2.94), одержимо розв'язок задачі (2.90), (2.91) і для нього правильна оцінка

$$|v(0,x)| \leq c\left(\|\varphi; R^n\|_0 + \|f; \Pi\|_0\right).$$

Враховуючи оцінки фундаментального розв'язку і формулу (2.94), знаходимо

$$\|v; \Pi\|_{2+\alpha} \leq c\left(\|f; \Pi\|_\alpha + \|\varphi; R^n\|_{2+\alpha}\right). \tag{2.99}$$

Запишемо задачу (2.90), (2.91) у вигляді

$$L_1 v = f(t,x)e^{\lambda t},$$

$$v(0,x) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^{n} d_j(x)e^{-\lambda t_j} v(t_j, x) \equiv \varphi_1(x). \tag{2.100}$$

Тоді, використовуючи фундаментальний розв'язок, маємо зображення розв'язку задачі (2.100)

$$v(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{R^n} Z(t,x,\tau,\xi) f(t,\xi) e^{\lambda\tau} d\xi + \int\limits_{R^n} Z(t,x,0,\xi)\varphi_1(\xi) d\xi.$$

Оскільки $f(\tau,\xi) \in H^\alpha(\Pi)$, $\varphi_1(\xi) \in H^{2+\alpha}(R^n)$, то для $v(t,x)$ правильна оцінка

$$\|v; \Pi\|_{2+\alpha} \leq c\left(\|f; \Pi\|_\alpha + \|\varphi_1; R^n\|_{2+\alpha}\right),$$

де $\|\varphi_1; R^n\|_{2+\alpha} \leq c\left(\|\varphi; R^n\|_{2+\alpha} + \sum\limits_{j=1}^{N} \|v; \Pi\|_{2+\alpha}\right) \leq c_1\left(\|\varphi; R^n\|_{2+\alpha} + \|f; \Pi\|_\alpha\right)$. Отже, справедлива оцінка (2.93).

Розділ 3. Крайові задачі для параболічних рівнянь другого порядку з інтегральною нелокальною умовою

За допомогою теорії потенціалів і принципу максимуму вивчаються задача Діріхле, задача з косою похідною та одностороння крайова задача для параболічних рівнянь другого порядку з інтегральною умовою за часовою змінною. Одержані результати використовуються для встановлення необхідних та достатніх умов існування оптимального розв'язку систем, що описуються крайовими задачами з внутрішнім, стартовим та межовим обмеженим керуванням і інтегральними критеріями якості.

§3.1. Задача Діріхле з інтегральною умовою для параболічних рівнянь

Нехай D – обмежена область в R^n з межею ∂D, T – фіксоване додатне число. Розглянемо в області $Q = [0, T) \times D$ задачу знаходження функції $u(t, x)$, яка задовольняє при $t > 0$ рівнянню

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} - a_0(t,x)\right] u(t,x) = f(t,x) \qquad (3.1)$$

і інтегральну умову за часовою змінною

$$u(0,x) + \int_0^T d(\tau,x)u(\tau,x)d\tau = \varphi(x), \qquad (3.2)$$

а на бічній межі $\Gamma = (0, T) \times \partial D$ крайову умову

$$(u(t,x) - \psi(t,x))|_\Gamma = 0. \qquad (3.3)$$

Нехай для задачі (3.1)–(3.3) виконуються умови:

A_1. Коефіцієнти $a_i \in H^{\alpha}(Q)$, $i \in \{0, 1, \ldots\}$, $a_0 \le K < +\infty$, K – const, $a_{ij} \in H^{\alpha}(Q)$ і для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1 |\xi|^2 \le \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \le \pi_2 |\xi|^2,$$

π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі, $(t,x) \in Q$.

A_2. $d(\tau,x) \in H^{2+\alpha}(Q)$, $\sup\limits_{\overline{Q}} \int\limits_0^T |d(\tau,x)| e^{-\lambda\tau} d\tau \le \lambda_0 < 1$, де λ – довільне число, яке задовольняє нерівність $\lambda < \inf\limits_{\overline{Q}}(-a_0(t,x))$.

A_3. Функції $f \in H^{\alpha}(Q)$, $\varphi \in H^{2+\alpha}(D)$, $\psi \in H^{2+\alpha}(\Gamma)$,

$$\left.\left[\psi(0,x) + \int\limits_0^T d(\tau,x)\psi(\tau,x)d\tau - \psi(x)\right]\right|_{\partial D} = 0.$$

Межа ∂D належить класу $C^{2+\alpha}$.

В задачі (3.1)–(3.3) зробимо заміну

$$u(t,x) = v(t,x)e^{-\lambda t} + \tilde{\psi}(t,x),$$

де λ задовольняє умову A_2, $\tilde{\psi}(t,x)$ – довизначена функція $\psi(t,x)$ за змінною $z \in \partial D$ в область D так, що $\tilde{\psi}(t,x) \in H^{2+\alpha}(Q)$.

Одержимо

$$(L_1 v)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) - \right.$$

$$\left. -a_0(t,x) - \lambda\right] v(t,x) = f(t,x)e^{\lambda t} - (Lv)(t,x) \equiv F(t,x), \quad (3.4)$$

$$v(0,x)+\int\limits_0^T d(\tau,x)e^{-\lambda\tau}v(\tau,x)d\tau=$$

$$=\varphi(x)-\tilde{\psi}(0,x)-\int\limits_0^T d(\tau,x)\tilde{\psi}(\tau,x)d\tau\equiv\Phi(x), \tag{3.5}$$

$$v|_\Gamma=0. \tag{3.6}$$

Знайдемо оцінку розв'язку крайової задачі (3.4)–(3.6).

Правильна така теорема.

Теорема 3.1. *Нехай v – класичний розв'язок задачі (3.4)–(3.6) в області Q і виконані умови A_1–A_3. Тоді для $v(t,x)$ правильна нерівність*

$$|v|\le\max\left(\left\|\Phi\left(1-\int\limits_0^T|d(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau\right)^{-1},D\right\|_0,\right.$$

$$\left.\|F(-a_0-\lambda)^{-1},Q\|_0\right). \tag{3.7}$$

Доведення. Можливі три випадки: v недодатний в Q, або найбільше додатне значення v досягається на D, або це найбільше додатне значення досягається в точці $P_1\in Q$.

В першому випадку $\max\limits_{\overline{Q}}v(t,x)\le 0$; в другому $0<\max\limits_{\overline{Q}}v(t,x)=\max\limits_{\overline{D}}v(t,x)\equiv v(0,x^{(1)})$. Тоді з нелокальної умови (3.5) маємо

$$\Phi(x^{(1)})\ge v(0,x^{(1)})\left[1-\int\limits_0^T|d(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau\right],$$

$$(0,x^{(1)})\in Q\cap\{t=0\}.$$

Тому

$$v(0, x^{(1)}) \le \max_{\overline{D}} \left(\Phi(x) \left(1 - \int\limits_0^T |d(\tau, x)| e^{-\lambda\tau} d\tau \right)^{-1} \right).$$

В третьому випадку $0 < \max\limits_{\overline{Q}} v(t,x) = v(P_1)$. Повторюючи методику доведення теореми 2.1, маємо

$$v(P_1) \le F(P_1)(-a_0(P_1) - \lambda)^{-1}.$$

Аналогічно, розглядаючи точку найменшого від'ємного значення функції v, маємо

$$v \ge \min \left\{ 0, \min_{\overline{D}} \left(\Phi(x) \left(1 + \int\limits_0^T |d(\tau, x)| e^{-\lambda\tau} d\tau \right)^{-1} \right), \right.$$

$$\left. \min_{\overline{Q}} \left(F(-a_0 - \lambda)^{-1} \right) \right\}.$$

Отже, для розв'язку задачі (3.4)–(3.6) справедлива оцінка (3.7).

Розглянемо однорідну задачу Діріхле (3.4)–(3.6). Встановимо існування розв'язку задачі. Правильна така теорема.

Теорема 3.2. *Якщо виконані умови A_1–A_3, то існує єдиний розв'язок задачі (3.4)–(3.6) у просторі $H^{2+\alpha}(Q)$ і для нього правильна оцінка*

$$\|v, Q\|_{2+\alpha} \le c \left(\|F; \overline{Q}\|_\alpha + \|\Phi, D\|_{2+\alpha} \right). \tag{3.8}$$

Доведення. Розв'язок задачі (3.4)–(3.6) шукаємо у вигляді

$$v(t,x) = \int\limits_D E(t, x, 0, \xi) v(0, \xi) d\xi + \omega(t, x), \tag{3.9}$$

де $E(t,x,\tau,\xi)$ – функція Гріна однорідної задачі Діріхле:

$$(L_1 v)(t,x) = 0, \quad v(0,x) = g(x), \quad v|_\Gamma = 0,$$

$$\omega(t,x) = \int\limits_D E(t,x,0,\xi)\Phi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D E(t,x,\tau,\xi)F(\tau,\xi)d\xi$$

є розв'язок задачі Діріхле (3.4), (3.6) з початковою умовою

$$\omega(0,x) = \Phi(x).$$

Згідно з теоремою 3.1 для $\omega(t,x)$ правильна оцінка

$$|\omega| \le \max\left(\|\Phi, D\|_0, \|F(-a_0-\lambda)^{-1}, Q\|_0\right).$$

Задовольнивши інтегральну умову (3.5), маємо

$$v(0,x) + \int\limits_0^T d(\tau,x)e^{-\lambda\tau}d\tau \int\limits_D E(\tau,x,0,\xi)v(0,\xi)d\xi =$$

$$= -\int\limits_0^T d(\tau,x)e^{-\lambda\tau}\omega(\tau,x) \equiv F_1(x). \qquad (3.10)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (3.10) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$v_k(0,x) = F_1(x) + \int\limits_0^T d(\tau,x)e^{-\lambda\tau}d\tau \int\limits_D E(\tau,x,0,\xi)v_{k-1}(0,\xi)d\xi,$$

$$v_0(0,x) = F_1(x).$$

Оскільки $E(t,x,0,\xi) \ge 0$ і $0 \le \int\limits_D E(t,x,0,\xi)d\xi < 1$, то

$$\left|\int\limits_0^T d(\tau,x)e^{-\lambda\tau}d\tau \int\limits_D E(\tau,x,0,\xi)d\xi\right| \le \int\limits_0^T |d(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau \le \lambda_0 < 1.$$

Тому, оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, одержимо

$$|v_k(0,x) - v_{k-1}(0,x)| \leq \lambda_0^k \|F_1; Q\|_0.$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння (3.10) зображається рівномірно збіжним функціональним рядом

$$v(0,x) = F_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (v_k(0,x) - v_{k-1}(0,x))$$

і для нього справедлива оцінка

$$|v(0,x)| \leq \frac{1}{1-\lambda_0} \|F_1; Q\|_0. \tag{3.11}$$

Підставляючи $v(0,x)$ у (3.9), одержуємо розв'язок задачі (3.4)–(3.6).

Запишемо рівність (3.10) у вигляді

$$v(0,x) = F_1(x) - \int_0^T d(\tau,x) e^{-\lambda\tau} d\tau \int_D E(\tau,x,0,\xi) v(0,\xi) d\xi.$$

Враховуючи оцінку (3.11) і обмеження на функції $d(\tau,x)$, $\varphi(x)$, $\psi(t,x)$, $f(t,x)$ одержуємо, що $v(0,x) \in H^{2+\alpha}(D)$. Тому, згідно з формулою (3.9), маємо: $v(t,x) \in H^{2+\alpha}(Q)$ і правильна нерівність (3.8).

Враховуючи обмеження $\lambda_0 < 1$, визначаємо розв'язок інтегрального рівняння (3.10) у вигляді

$$v(0,x) = F_1(x) + \int_D G(x,y) F_1(y) dy, \tag{3.12}$$

де $G(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$G(x,\xi) = \int_0^T d(\tau,x) E(\tau,x,0,\xi) e^{-\lambda\tau} d\tau +$$

$$+\int_0^T d(\tau,x)e^{-\lambda\tau}\int_D E(\tau,x,0,y)G(y,\xi)dy,$$

звідки отримуємо оцінку

$$\left|\int_D G(x,\xi)dy\right| \le \frac{1}{1-\lambda_0}.$$

Підставивши у рівність (3.12) замість $F_1(x)$ значення

$$F_1(x) = -\int_0^T d(\tau,x)\left(\int_D E(\tau,x,0,\xi)\Phi(\xi)d\xi + \right.$$

$$\left. + \int_0^\tau d\beta \int_D E(\tau,x,\beta,\xi)F(\beta,\xi)d\xi\right)d\tau$$

і змінивши порядок інтегрування, отримуємо

$$v(0,x) = \int_D G(\tau,0,x,\xi)\Phi(\xi)d\xi +$$

$$+ \int_0^T d\beta \int_D G(\tau,\beta,x,\xi)F(\beta,\xi)d\xi, \tag{3.13}$$

де

$$G(T,x,\beta,\xi) = \int_\beta^T d(\tau,x)e^{-\lambda\tau}E(\tau,x,\beta,\xi)d\xi +$$

$$+ \int_\beta^T d\tau \int_D G(x,y)d(\tau,u)e^{-\lambda\tau}E(\tau,y,\beta,\xi)dy.$$

Підставивши (3.13) у (3.9) і змінивши порядок інтегрування, знаходимо інтегральне зображення розв'язку задачі (3.4)–(3.6)

$$v(t,x) = \int\limits_D \Gamma(t,x,0,\xi)\Phi(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_D \Gamma(t,x,\tau,\xi)F(\tau,\xi)d\xi, \tag{3.14}$$

де

$$\Gamma(t,x,\tau,\xi) = E(t,x,\tau,\xi) + \int\limits_D E(t,x,0,y)G(T,y,\tau,\xi)dy.$$

§3.2. Нелокальна задача Діріхле для параболічного рівняння з інтегро-диференціальною нелокальною умовою

Нехай D – обмежена випукла область простору $\mathbb{R}^n$. Розглянемо в області $\overline{Q} = [0,T) \times D$ нелокальну задачу Діріхле для параболічного рівняння

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a(t,x)u = f(t,x) \tag{3.15}$$

з інтегральною нелокальною умовою

$$u(0,x) + \int\limits_0^{T_1}\Bigg(a(\tau,x)u(\tau,x) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} b_k(\tau,x)D_x u(\tau,x)\Bigg)d\tau = \varphi(x) \tag{3.16}$$

і однорідною крайовою умовою

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{3.17}$$

Для побудови розв'язку задачі (3.15)–(3.17) використаємо функцію Гріна однорідної задачі Діріхле $G(t, x, \tau, \xi)$

$$\begin{cases} Lu = f(t, x), \\ u(0, x) = \varphi(x), \\ u|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

Справедлива наступна теорема.

Теорема 3.3. *Нехай коефіцієнти* $a_{ij}(t, x)$, $a_i(t, x)$, $a(t, x)$ *визначені в області* $\overline{Q} = [0, T) \times D$, *неперервні по* t *і задовольняють рівномірну умову Гельдера по* x; $a, b_k \in C(Q)$, *поверхня* $\partial D \in C^{(2+\alpha)}$,

$$\int_0^{T_1} \left| a(\tau, x) G(\tau, x, 0, \xi) + \sum_{k=1}^{n} b_k(\tau, x) D_x G(\tau, x, 0, \xi) \right| d\tau \leq \lambda_0 < 1,$$

виконується умова рівномірної параболічності:

$$c_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2(t, x) \xi_i \xi_j \leq c_2 |\xi|^2, \quad c_1, c_2 > 0.$$

Тоді існує функція Гріна (G, Γ) *задачі (3.15)–(3.17) і розв'язок зображається формулою*

$$u(t, x) = \int_0^t d\tau \int_D G(t, x, \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \int_D G(t, x, 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi +$$

$$+ \int_D \Gamma\left(T_1, t, x, 0, y\right) \varphi(y) dy + \int_0^{T_1} d\xi \int_D \Gamma\left(T_1, t, x, \beta, y\right) f(\beta, y) dy.$$

Доведення. Розв'язок задачі (3.15)–(3.17) шукаємо у вигляді

$$u(t,x)=\int\limits_D G(t,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi+\int\limits_D G(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi. \tag{3.19}$$

Оскільки

$$v(t,x)=\int\limits_D G(t,0,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G(t,\tau,x-\xi)f(\tau,\xi)d\xi$$

– розв'язок задачі (3.18), то згідно з принципом максимуму

$$|v(t,x)|\le c\left(|f|_{C(Q)}+|\varphi|_{C(D)}\right).$$

Рівність (3.19) можна переписати у вигляді

$$u(t,x)=\int\limits_D G(t,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi+v(t,x). \tag{3.20}$$

Задовольнимо тепер нелокальну умову (3.16). Отримаємо:

$$u(0,x)+\int\limits_0^{T_1}\left[a\left(\tau,x\right)\int\limits_D G(\tau,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi+\sum_{k=1}^n b_k(\tau,\xi)\times\right.$$

$$\left.\times\int\limits_D D_xG(\tau,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi\right]d\tau=\int\limits_0^{T_1}\left\{a(\tau,x)v(\tau,x)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^n b_k(\tau,x)D_xv(\tau,x)\right\}d\tau=F(x). \tag{3.21}$$

Розв'язок інтегрального рівняння (3.21) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд:

$$u^{(k)}(0,x) = F(x) + \int\limits_D \int\limits_0^{T_1} \Big(a(\tau,x)G(\tau,x,0,\xi)u^{(k-1)}(0,\xi) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} b_k(\tau,x)D_x G(\tau,x,0,\xi)u^{(k-1)}(0,\xi) \Big) d\tau d\xi,$$

$$u^0(0,x) = F(x), \quad k \in \{1,2,\dots\}.$$

Оскільки

$$G(\tau,x,0,\xi) \geq 0, \quad 0 \leq \int\limits_D G(\tau,x,0,\xi)d\xi \leq 1,$$

$$\left| D_x^k G(t,x,\tau,\xi) \right| \leq c(t-\tau)^{-\frac{n+k}{2}} \exp\left(-C\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right),$$

то

$$\int\limits_0^{T_1} \left| a(\tau,x)G(\tau,x,0,\xi) + \sum_{k=1}^{n} b_k(\tau,x)D_x G(\tau,x,0,\xi) \right| d\tau \leq \lambda_0 < 1.$$

Тому, оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, одержуємо:

$$\left| u^{(k)}(0,x) - u^{(k-1)}(0,x) \right| \leq \lambda_0^k \|F;Q\|_0$$

Отже, розв'язок інтегрального рівняння (3.20) зображається рівномірно збіжним функціональним рядом

$$u(0,x) = F(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(u^{(k)}(0,x) - u^{(k-1)}(0,x) \right),$$

для якого справедливою є оцінка

$$u(0,x) \leq \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}\|F;Q\|_0.$$

Враховуючи обмеження $\lambda_0 < 1$, запишемо розв'язок інтегрального рівняння (3.21) у вигляді:

$$u(0,x) = F(x) + \int\limits_D R(x,y)F(y)dy, \tag{3.22}$$

де $R(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння:

$$R(x,\xi) = \int\limits_0^{T_1} a(\tau,x)G(\tau,x,0,\xi)d\tau + \int\limits_0^{T_1}\sum_{k=1}^n b_k(\tau,x)\times$$

$$\times D_xG(\tau,x,0,\xi)d\tau + \int\limits_D dy\int\limits_0^{T_1} a(\tau,x)G(\tau,x,0,y)R(y,\xi)d\tau +$$

$$+\int\limits_D dy\int\limits_0^{T_1}\sum_{k=1}^n b_k(\tau,x)D_xG(\tau,x,0,y)R(y,\xi)d\tau,$$

звідки отримаємо оцінку:

$$\left|\int\limits_D R(x,\xi)d\xi\right| \leq \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}.$$

В рівності (3.22) замість $F(x)$ підставимо значення

$$F(x) = \int\limits_0^{T_1}\Bigg[a(\tau,x)\Bigg(\int\limits_D G(\tau,x,x-\xi)\varphi(\xi)d\xi +$$

$$+\int_0^\tau d\beta \int_D G(\tau,\beta,x-\xi) f(\beta,\xi) d\xi \Bigg) +$$

$$+\sum_{k=1}^n b_k(\tau,x) \Bigg(\int_D D_{x_k} G(\tau,0,x-\xi)\varphi(\xi) d\xi +$$

$$+\int_0^\tau d\beta \int_D D_{x_k} G(\tau,\beta,x-\xi) f(\beta,\xi) \Bigg) d\xi \Bigg] d\tau$$

і змінимо порядок інтегрування.

Отримаємо:

$$u(0,x) = \int_0^{T_1} d\tau \int_D \Bigg\{ a(\tau,x) G(\tau,0,x-\xi) + \sum_{k=1}^n b_k(\tau,x) D_{x_k} \times$$

$$\times G(\tau,0,x-\xi) + \int_D R(x,y) \Bigg(a(\tau,y) G(\tau,0,y-\xi) +$$

$$+\sum_{k=1}^n b_k(\tau,y) D_{x_k} G(\tau,0,y-\xi) \Bigg) dy \Bigg\} \varphi(\xi) d\xi +$$

$$+\int_0^{T_1} d\tau \int_0^\tau d\beta \int_D \Bigg\{ a(\tau,x) G(\tau,\beta,x-\xi) + \sum_{k=1}^n b_k(\tau,x) D_{x_k} \times$$

$$\times G(\tau,\beta,x-\xi) + \int_D R(x,y) \Bigg(a(\tau,y) G(\tau,\beta,y-\xi) +$$

$$+\sum_{k=1}^n b_k(\tau,y) D_{x_k} G(\tau,\beta,y-\xi) \Bigg) dy \Bigg\} f(\beta,\xi) d\xi =$$

$$= \int_D d\xi \int_0^{T_1} \Bigg\{ a(\tau,x) G(\tau,0,x-\xi) + \sum_{k=1}^n b_k(\tau,x) D_{x_k} \times$$

$$\times G(\tau,0,x-\xi)+\int\limits_D R(x,y)\Bigg(a(\tau,y)G(\tau,0,y-\xi)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} b_k(\tau,y)D_{x_k}G(\tau,0,y-\xi)\Bigg)\,dy\Bigg\}\,\varphi(\xi)d\tau+$$

$$+\int\limits_D d\xi\int\limits_0^{T_1} d\beta\int\limits_\beta^{T_1}\Bigg\{a(\tau,x)G(\tau,\beta,x-\xi)+\sum_{k=1}^{n} b_k(\tau,x)D_{x_k}\times$$

$$\times G(\tau,\beta,x-\xi)+\int\limits_D R(x,y)\Bigg(a(\tau,y)G(\tau,\beta,y-\xi)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} b_k(\tau,y)D_{x_k}G(\tau,\beta,y-\xi)\Bigg)\,dy\Bigg\}\,f(\beta,\xi)d\tau=$$

$$=\int\limits_D E_1\left(T_1,x,0,\xi\right)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^{T_1} d\beta\int\limits_D E_1\left(T_1,x,\beta,\xi\right)f(\beta,\xi)d\xi.$$

Через $E_1\left(T_1,x,\beta,\xi\right)$ позначено вираз:

$$E_1\left(T_1,x,\rho,\xi\right)=\int\limits_\beta^{T_1}\Bigg\{a(\tau,x)G(\tau,\beta,x-\xi)+\sum_{k=1}^{n} b_k(\tau,x)D_{x_k}\times$$

$$\times G(\tau,\beta,x-\xi)+\int\limits_D R(x,y)\Bigg(a(\tau,y)G(\tau,\beta,y-\xi)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} b_k(\tau,y)D_{x_k}G(\tau,\beta,y-\xi)\Bigg)\,dy\Bigg\}\,d\tau.$$

Функцію $u(0,x)$ підставимо у формулу (3.19) і знайдемо розв'язок задачі (3.15)–(3.17) $u(t,x)$:

$$u(t,x)=\int\limits_D G(t,x,0,\xi)\left[\int\limits_D E_1\left(T_1,\xi,0,y\right)\varphi(y)dy+\right.$$

$$+\int\limits_0^{T_1} d\beta \int\limits_D E_1\left(T_1,\xi,\beta,y\right) f(\beta,y)dy\Bigg] d\xi+$$

$$+\int\limits_D G(t,x,0,y)\varphi(y)dy+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi=$$

$$=\int\limits_D\left(\int\limits_D G(t,x,0,\xi)E_1\left(T_1,\xi,0,y\right)d\xi+G(t,x,0,\xi)\right)\varphi(y)dy+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+\int\limits_0^{T_1} d\beta\int\limits_D\Bigg(\int\limits_D G(t,x,0,\xi)\times$$

$$\times E_1\left(T_1,\xi,\beta,y\right)d\xi\Bigg)f(\beta,y)dy=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_D G(t,x,\tau,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_D G(t,x,0,\xi)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_D \Gamma\left(T_1,t,x,0,y\right)\varphi(y)dy+$$

$$+\int\limits_0^{T_1} d\beta\int\limits_D \Gamma\left(T_1,t,x,\beta,y\right)f(\beta,y)dy, \tag{3.23}$$

де

$$\Gamma\left(T_1,t,x,\beta,y\right)=\int\limits_D G(t,x,0,\xi)E_1\left(T_1,\xi,\beta,y\right)d\xi.$$

§3.3. Задача оптимального керування для параболічних рівнянь з інтегральною нелокальною умовою

Нехай D – обмежена випукла область простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\Gamma=[0,T)\times\partial D$. Розглянемо в області $\overline{Q}=[0,T)\times D$

задачу знаходження функцій (u, p, q), на яких функціонал

$$I(p,q)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D F_1\left(t,x;u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)dx+$$

$$\left.+\int\limits_D F_2\left(x,u(T,x;p(T,x),q),q\right)\right)dx \tag{3.24}$$

досягає мінімуму у класі функцій

$$(p,q)\in V=\left\{p(x),q(x)\in C^{\alpha}(D)\mid p_1\le p\le p_2, q_1\le q\le q_2\right\},$$

із яких $u(t, x; p, q)$ є розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}-$$

$$-a(t,x)u=f(t,x,p), \tag{3.25}$$

яке задовольняє нелокальну умову за змінною t

$$u(0,x;p,q)+\int\limits_0^T\left(a(\tau,x)u(\tau,x;p,q)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}b_k(\tau,x)D_{x_k}u(\tau,x;p,q)\right)d\tau=\varphi(x,q) \tag{3.26}$$

і однорідну крайову умову

$$u|_{\Gamma}=0. \tag{3.27}$$

Будемо вважати, що для задачі (3.24)–(3.27) виконуються умови:

1) коефіцієнти $a_{ij} \in H^\alpha(Q)$, $a_i \in H^\alpha(Q)$, $a \in H^\alpha(Q)$, $\partial D \in C^{\alpha+2}$ і $\forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ і довільних $(t,x) \in Q$ виконується умова

$$c_1|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \le c_2|\xi|^2,$$

де $c_1, c_2 > 0$, $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$;

2) функції $f(t,x,p(t,x)) = f_1(t,x) \in H^\alpha(Q)$,

$$\varphi(x, q(x)) = \varphi_1(x) \in C(D);$$

3) $F_1\left(t, x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, p\right)$, $f(t,x,p(t,x))$ мають гельдерові похідні другого порядку за змінними (u,p) – неперервні як функції змінних (t,x), а функції $F_2(x, u(T,x;p(T,x),q))$, $\varphi(x,q)$ мають гельдерові похідні другого порядку за змінними (u,q), які неперервні як функції змінної x.

Нехай $G(t,x,\tau,\xi)$, $\Gamma(T,t,x,\tau,\xi)$ – функції Гріна нелокальної задачі Діріхле (3.25)–(3.27).

Позначимо через

$$\vec{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}) \equiv (u, \partial_{x_1}u, \ldots, \partial_{x_n}u, p)$$

$$\vec{\omega} = (u(T,x;p(T,x),q(x)),q) \equiv (\omega_1, \omega_2)\,,$$

$$\eta(\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{D} \left[\frac{\partial F_1(t,x;\vec{u})}{\partial u_0} G(t,x,\tau,\xi) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1(t,x;\vec{u})}{\partial u_i} \times \right.$$

$$\left. \times D_{x_i} G(t,x,\tau,\xi) \right] dx + \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{D} \left[\frac{\partial F_1(t,x;\vec{u})}{\partial u_0} \Gamma\Big(T_1, t, x, \tau, \xi\Big) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1(t,x;\vec{u})}{\partial u_i} D_{x_i}\Gamma\left(T_1, t, x, \tau, \xi\right) \right] dx +$$

$$+\int\limits_D \frac{\partial F_2(x;\vec{\omega})}{\partial \omega_1}\left[G(t,x,0,\xi)+\Gamma\left(T_1,t,x,0,\xi\right)\right]dx,$$

$$\mu(\xi)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D\int\limits_D \frac{\partial F_1(t,x;\vec{u})}{\partial u_0}\left[G(t,x,0,\xi)+\Gamma\left(T_1,t,x,0,\xi\right)\right]dx+$$

$$+\int\limits_D \frac{\partial F_2(x;\vec{\omega})}{\partial \omega}\left[G(T,x,0,\xi)+\Gamma\left(T_1,T,x,0,\xi\right)\right]dx,$$

$$H_1(\vec{u},\eta)=\eta(t,x)f(t,x,p)+F_1(t,x;\vec{u}),$$

$$H_2(\vec{\omega},\mu)=\mu(x)\varphi(x,q)+F_2(x;\vec{\omega}).$$

При обмеженнях 1), 2) задача (3.25)–(3.27) має єдиний розв'язок для будь-яких $p(t,x)$, $q(x)$.

Правильна така теорема.

Теорема 3.4. *Якщо функції $H_1(u,\eta,p)$, $H_2(u,\mu,q)$ монотонно зростаючі за аргументами $p,q\in V$, то оптимальним є керування $p^0(x)=p_1(x)$, $q^0(x)=q_1(x)$, а оптимальним розв'язком задачі (3.25)–(3.27) буде розв'язок вигляду $u^0\left(t,x;p^0,q^0\right)=u\left(t,x;p_1(x),q_1(x)\right)$. Якщо $H_1(u,\eta,p)$ монотонно зростаюча, $H_2(u,\mu,q)$ – монотонно спадна за аргументами $p,q\in V$, то $p^0(x)=p_1(x)$, $q^0(x)=q_2(x)$, а $u^0\left(t,x;p^0,q^0\right)=u\left(t,x;p_1(x),q_2(x)\right)$. Якщо $H_1(u,\eta,p)$ монотонно спадна,* $\mathrm{H}_2(u,\mu,q)$ *– монотонно зростаюча, то $p^0(x)=p_2(x)$, $q^0(x)=q_1(x)$, а відповідний оптимальний розв'язок задачі (3.25)–(3.27) матиме вигляд $u^0\left(t,x;p^0,q^0\right)=u\left(t,x;p_2(x),q_1(x)\right)$. Якщо функції $H_1(u,\eta,p)$, $H_2(u,\mu,q)$ монотонно спадні за аргументами $p,q\in V$, то оптимальним є керування $p^0(x)=p_2(x)$, $q^0(x)=q_2(x)$, а оптимальним розв'язком задачі (3.25)–(3.27) буде розв'язок вигляду $u^0\left(t,x;p^0,q^0\right)=u\left(t,x;p_2(x),q_2(x)\right)$.*

Доведення. Нехай Δp – допустимий приріст керування $p(t,x)$, а Δq – допустимий приріст керування $q(x)$.

Позначимо через $\Delta_p u$ і Δq відповідні частинні прирости розв'язку $u(t,x,p,q)$ за змінними p і q.

В області Q $\Delta_p u$ буде розв'язком параболічного рівняння

$$L\Delta_p u = f(t,x,p+\Delta p) - f(t,x,\Delta p) \equiv \Delta_p f, \tag{3.28}$$

що задовольняє однорідну нелокальну умову

$$\Delta_p u(0,x;p(t,x),q(x)) + \int_0^T \Big[a(\tau,x)\Delta_p u(\tau,x;p(\tau,x),q(x)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n b_k(\tau,x) D_{x_k} \Delta_p u(\tau,x;p(\tau,x),q(x)) \Big] d\tau = 0 \tag{3.29}$$

і однорідну крайову умову

$$\Delta_p u|_\Gamma = 0. \tag{3.30}$$

За теоремою 3.3 розв'язок задачі (3.28)–(3.30) виражається формулою

$$\Delta_p u = \int_0^t d\tau \int_D G(t,x,\tau,\xi)\Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi +$$

$$+ \int_0^t d\xi \int_D \Gamma(T,t,x,\tau,\xi)\Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi. \tag{3.31}$$

Відповідний приріст $\Delta_q u$ в області Q буде розв'язком задачі з неоднорідною нелокальною умовою

$$L\Delta_q u = 0,$$

$$B\Delta_q u = \varphi(x,q+\Delta q) - \varphi(x,q) \equiv \Delta_q \varphi, \tag{3.32}$$

$$u|_\Gamma = 0.$$

Використовуючи теорему 3.3 для розв'язку задачі (3.32), маємо зображення

$$\Delta_q u = \int\limits_D E_2\left(T_1, t, x, 0, \xi\right) \Delta_q \varphi(\xi) d\xi, \tag{3.33}$$

де

$$E_2\left(T_1, t, x, 0, \xi\right) = G(t, x, 0, \xi) + \Gamma\left(T_1, t, x, 0, \xi\right).$$

Використовуючи формулу Тейлора запишемо приріст функціонала $I(p, q)$:

$$\Delta I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left\{ \frac{\partial F_1\left(t, x; u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, p\right)}{\partial u} \left(\Delta_p u + \Delta_q u\right) + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1\left(t, x; u, u_{x_1}, \ldots u_{x_n}, p\right)}{\partial u_{x_k}} \left(\Delta_p u_{x_k} + \Delta_q u_{x_p}\right) +$$

$$\left. + \frac{\partial F_1}{\partial p} \Delta_q p \right\} dx + \int\limits_0^t dt \int\limits_D \mathcal{E}\left(u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, p\right) dx +$$

$$+ \int\limits_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial u_T} \left(\Delta_p u_T + \Delta_q u_T\right) + \frac{\partial F_2}{\partial q_T} \Delta q_T \right] dq + \int\limits_D \mathcal{E}_1 dx, \tag{3.34}$$

де

$$\mathcal{E}_1 = \left(\frac{\partial F_2(x, \tilde{u}, \tilde{q})}{\partial u_T} - \frac{\partial F_2(x, u, q)}{\partial u_T} \right) \left(\Delta_p u_T + \Delta_q u_T\right) +$$

$$+ \left[\frac{\partial F_2(x, \tilde{u}, \tilde{q})}{\partial q} - \frac{\partial F_2(x, u, q)}{\partial q} \right] \Delta_q u + \left(\frac{\partial F_2(x, \tilde{u}, \tilde{q})}{\partial q} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial F_2(x, u, q)}{\partial q} \right] \Delta q,$$

$$\mathcal{E}\left(u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, p\right) = \left(\frac{\partial F_1\left(t, x, \tilde{u}, \tilde{u}_{x_1}, \ldots, \tilde{u}_{x_n}, \tilde{p}\right)}{\partial u} - \right.$$

$$-\frac{\partial F_1\left(t,x,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},p\right)}{\partial u}\Bigg)\left(\Delta_p u+\Delta_q u\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial F_1\left(t,x,\tilde{u},\tilde{u}_{x_1},\dots,\tilde{u}_{x_n},\tilde{p}\right)}{\partial u_k}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F_1\left(t,x,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},p\right)}{\partial u_k}\right]\left\{\Delta_p u_k+\Delta_q u_{x_k}\right\}+$$

$$+\Bigg(\frac{\partial F_1\left(t,x,\tilde{u},\tilde{u}_{x_1},\dots,\tilde{u}_{x_n},\tilde{p}\right)}{\partial p}-$$

$$-\frac{\partial F_1\left(t,x,u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},p\right)}{\partial p}\Bigg)\Delta p,$$

$\tilde{u}_{x_k}\in\left[u_{x_k},u_{x_k}+\Delta_p u_{x_k}+\Delta_q u_{x_k}\right],\tilde{p}\in[p,p+\Delta p],\tilde{q}\in[q,q+\Delta p].$

Використовуючи зображення (3.31) та (3.33) знаходимо

$$\Delta_p u_{x_k}=\int_0^t d\tau\int_D D_{x_k}G(t,x,\tau,\xi)\Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi+$$

$$+\int_0^t d\tau\int_D D_{x_k}\Gamma(T,t,x,\tau,\xi)\Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi,$$

$$\Delta_q u_{x_k}=\int_D D_{x_k}E_2(T,t,x,0,\xi)\Delta_q\varphi(\xi)d\xi. \tag{3.35}$$

Підставляючи (3.31), (3.33), (3.35) у (3.34), маємо:

$$\Delta I=\int_0^T dt\int_D\Bigg\{\frac{\partial F_1(t,x;u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},p)}{\partial u}\times$$

$$\times\Bigg(\int_0^t d\tau\int_D G(t,x,\tau,\xi)\Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi+$$

$$+\int_0^T d\xi \int_D \Gamma\left(T_1,t,x,\tau,\xi\right)\Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi\Bigg)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_1\left(t,x;u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)}{\partial u_{x_k}}\times$$

$$\times\left(\int_0^t d\tau\int_D D_{x_k}G(t,x,\tau,\xi)\Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi+\right.$$

$$\left.+\int_0^T d\xi\int_D D_{x_k}\Gamma\left(T_1,t,x,\tau,\xi\right)\Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi\right)+$$

$$+\frac{\partial F_1\left(t,x;u,u_{x1},\ldots,u_{x_n},p\right)}{\partial u}\int_D E_2\left(T_1,t,x,0,\xi\right)\Delta_q\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_1\left(t,x;u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)}{\partial u_{x_k}}\int_D D_{x_k}E_2\left(T_1,t,x,0,\xi\right)\times$$

$$\left.\times\Delta_q\varphi(\xi)d\xi\right\}dx+\int_D\frac{\partial F_2(x;u(T,x),p(T,x),q)}{\partial u}\times$$

$$\times\left\{\int_0^t d\tau\int_D G(t,x,\tau,\xi)\Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi\right.$$

$$+\int_0^T d\xi\int_D\Gamma\left(T_1,T,x,\tau,\xi\right)\Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi+$$

$$+E_2\left(T_1,T,x,0,\xi\right)\Delta_q\varphi(\xi)d\xi\}\,dx+\frac{\partial F_2(x;u,q)}{\partial q_T}\Delta_{q_T}d\xi+$$

$$+\int_0^T d\tau\int_D\mathcal{E}_1\left(u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)d\xi+\int_D\mathcal{E}_2\left(u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)d\xi.$$

Змінивши порядок інтегрування отримаємо:

$$\Delta I = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_D \left\{ \int\limits_\tau^T dt \int\limits_D \frac{\partial F_1\left(t,x;u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)}{\partial u} \times \right.$$

$$\times G(t,x,\tau,\xi)dx + \int\limits_0^T dt \int\limits_D \frac{\partial F_1\left(t,x;u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)}{\partial u} \times$$

$$\times \Gamma\left(T_1,T,x,\tau,\xi\right)dx + \int\limits_\tau^T dt \int\limits_D \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1\left(t,x;u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)}{\partial u_{x_k}} \times$$

$$\times D_{x_k} G(t,x,\tau,\xi)dx + \int\limits_0^T dt \int\limits_D \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1\left(t,x;u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)}{\partial u_{x_k}} \times$$

$$\times D_{x_k} \Gamma\left(T_1,t,x,\tau,\xi\right)dx + \int\limits_D \frac{\partial F_2(x;u,q)}{\partial u} G(t,x,\tau,\xi)dx +$$

$$\left. + \int\limits_D \frac{\partial F_2(x;u,q)}{\partial u} \Gamma\left(T_1,T,x,\tau_i\xi\right)dx \right\} \Delta_p f(\tau,\xi,p(\tau,\xi))d\xi +$$

$$+ \left(\int\limits_0^T dt \int\limits_D \frac{\partial F_1\left(t,x;u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)}{\partial u} E_2\left(T_1,t,x,0,\xi\right)dx + \right.$$

$$+ \int\limits_D \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_1\left(t,x;u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},p\right)}{\partial u_{x_k}} D_{x_k} E_2\left(T_1,t,x,0,\xi\right)dx +$$

$$\left. + \int\limits_D \frac{\partial F_2(x;u,q)}{\partial u_T} E_2(T_1,T,x,0,\xi)dx \right) \Delta_q \varphi(\xi) +$$

$$+ \int\limits_D \frac{\partial F_2(x;u,q)}{\partial u_T} \Delta_q \varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \int_0^T d\tau \int_D D_p H_1(\eta, u, p)\Delta_p dx + \int_D D_q H_2(\mu, u, q)\Delta_q dx +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_D \mathcal{E}\left(u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, p\right) dx + \int_D \mathcal{E}_1\left(u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, p\right) dx.$$

Якщо $p(x) = p^0(x)$, $q(x) = q^0(x)$ і $H_1(u, \eta, p)$, $H_2(u, \mu, q)$ задовольняють умови теореми 3.4, то при досить малих Δp і Δq маємо, що $\Delta I > 0$.

Нехай $p^0(x)$, $q^0(x)$ – оптимальні значення, тобто $\Delta I > 0$. Перевіримо виконання умов теореми 3.4.

Якщо $H_1(u, \eta, p)$, $H_2(u, \mu, q)$ не є монотонними за аргументами p, q відповідно, то $\partial_p H_1(u, \eta, p)$, $\partial_q H_2(u, \mu, q)$ – знакозмінні величини, тобто $\partial_p H_1(u, \eta, p) > 0$ в $Q^+ \subset Q$, $\partial_q H_2(u, \mu, q) > 0$ в $Q^+ \subset Q$ і $\partial_p H_1(u, \eta, p) < 0$ в $Q^- = Q \backslash Q^+$, $\partial_q H_2(u, \mu, q) < 0$ в $Q^- = Q \backslash Q^+$.

Використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I = \iint_{Q^+} \partial_p H_1(u, \eta, p)\Delta_p dt dx - \iint_{Q^-} \left|\partial_p H_1(u, \eta, p)\right| \Delta_p dt dx +$$

$$+ \int_{D^+} \partial_q H_2(u, \mu, q)\Delta_q dx - \int_{D^-} \left|\partial_q H_2(u, \mu, q)\right| \Delta_q dx +$$

$$+ \iint_Q \left(O\left(|\Delta u|^2\right) + \iint_Q O\left(\left|\Delta_p\right|^2\right) \right) dx dt + \int_D O\left(\left|\Delta_q\right|^2\right) dx =$$

$$= \partial_p H_1\left(u^+, \eta^+, p^+\right) \iint_{Q^+} \Delta_p dt dx - \left|\partial_p H_1\left(u^-, \eta^-, p^-\right)\right| \times$$

$$\times \iint_{Q^-} \Delta_p dt dx + \partial_q H_2\left(u^+, \mu^+, q^+\right) \iint_{Q^+} \Delta_q dt dx -$$

$$-\left|\partial_q H_2\left(u^-,\mu^-,q^-\right)\right|\iint\limits_{Q^-}\Delta_q dtdx+\iint\limits_{Q}\left(O\left(|\Delta u|^2\right)+\right.$$

$$\left.+O\left(|\Delta_p|^2\right)+O\left(|\Delta_q|^2\right)\right)dxdt.$$

При досить малих Δ_p і Δ_q знак ΔI визначається першими двома членами суми. Різниця перших двох доданків змінює знак в залежності від величин $\operatorname{mes} Q^+$, $\operatorname{mes} Q^-$, Δ_p і Δ_q.

При досить малих $\operatorname{mes} Q^+$ і $\Delta_p>0, \Delta_q>0$ маємо $\Delta I<0$ і навпаки, $\Delta I>0$, якщо мала $\operatorname{mes} Q^-$ і $\Delta_p, \Delta_q>0$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Теорема 3.5. *Нехай $H_1(\vec{u},\eta)$ і $H_2(\vec{\omega},\mu)$ не є монотонними за аргументом p і q відповідо. Для того, щоб керування $\left(p^{(0)},q^{(0)}\right)$ і відповідний розв'язок задачі (3.24)–(3.27) були оптимальними, необхідно і достатньо, шоб виконувалися умови:*

а) функція $H_1(\vec{u},\eta)$ за аргументом p в точці $p^{(0)}$ досягала мінімального значення;

б) функція $H_2(\vec{\omega},\mu)$ за аргументом q в точці $q^{(0)}$ досягала мінімального значення;

в) для довільного вектора $(e_0,\ldots,e_{n+1})\neq 0$ і $(t,x)\in\overline{Q}$ виконувалася нерівність

$$K_1(e)\equiv\sum_{ij=0}^{n+1}\frac{\partial^2 F_1\left(\vec{u}^{(0)}\right)}{\partial u_i\partial u_j}e_ie_j>0;$$

г) для довільного вектора $(\nu_1,\nu_2)\neq 0$ і $x\in\overline{D}$ виконувалася нерівність

$$K_2(\nu)\equiv\frac{\partial^2 F_2(\vec{\omega})}{\omega_1^2}\nu_1^2+2\frac{\partial^2 F_2\left(\vec{\omega}^{(0)}\right)}{\partial\omega_1\partial\omega_2}\nu_1\nu_2+\frac{\partial^2 F_2\left(\vec{\omega}^{(0)}\right)}{\partial\omega_2^2}\nu_2^2>0.$$

Доведення. Достатність. Нехай $(p^0(t,x),q^0(x))$ задовольняють умови теореми 3.5, покажемо його оптимальність. Надамо керуванню $(p^0(t,x),q^0(x))$ деяких допустимих приростів

Δp і Δq і позначимо через Δu відповідний приріст функції $u(t,x;p,q)$: $\Delta u = \Delta_p u + \Delta_q u$. Тоді $\Delta_p u \in$ розв'язком задачі (3.28)–(3.30), а $\Delta_q u$ є розв'язком задачі (3.32) і правильні формули (3.31), (3.33).

За допомогою формули Тейлора знаходимо приріст функціонала $I(p)$

$$\Delta I = \Delta_p I + \Delta_q I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \Delta_p u_k + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{n+1} \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_k \partial u_l} \Delta_p u_k \Delta_p u_l + O\left(|\Delta p|^{2+\alpha}\right) \right] dx +$$

$$+ \int\limits_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial \omega_1} \Delta_p \omega_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \omega_1^2} \left(\Delta_p \omega_1\right)^2 + O\left(|\Delta p|^{2+\alpha}\right) \right] dx +$$

$$+ \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[\sum_{k=0}^{n+1} \frac{\partial F_1}{\partial u_k} \Delta_q u_k + \frac{1}{2} \sum_{k,l=0}^{n+1} \frac{\partial^2 F_1}{\partial u_k \partial u_l} \Delta_q u_k \Delta_q u_l + \right.$$

$$\left. + O\left(|\Delta q|^{2+\alpha}\right) \right] dx + \int\limits_D \left[\frac{\partial F_2}{\partial \omega_1} \Delta_q \omega_1 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \omega_2^2} \Delta \omega_2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \omega_1^2} \left(\Delta_q \omega_1\right)^2 + \frac{\partial^2 F_2}{\partial \omega_1 \partial \omega_2} \Delta_q \omega_1 \Delta \omega_2 +$$

$$\left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2}{\partial \omega_2^2} \left(\Delta \omega_2\right)^2 + O\left(|\Delta q|^{2+\alpha}\right) \right] dx \qquad (3.36)$$

Підставляючи (3.31), (3.33) в (3.36) і змінюючи порядок інтегрування, одержимо

$$\Delta I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[\partial_p H_1(\vec{u}, \eta) \Delta u_{n+1} + \frac{1}{2} K_1(\Delta \vec{u}) + o\left(|\Delta p|^{2+\alpha}\right) \right] dx +$$

$$+\int\limits_D \partial_q H_2(\vec{u},\mu)\Delta\omega_2 + \frac{1}{2}K_2(\Delta\omega) + o\left(|\Delta q|^{2+\alpha}\right)dx.$$

Оцінимо ΔI знизу, враховуючи, що $\partial_p H_1(\vec{u},\eta) = 0$ і $\partial_q H_2(\vec{u},\mu) = 0$. Позначимо $\delta_1 = \inf\limits_{|\xi|=1} K_1(\Delta\vec{u})$, $\delta_2 = \inf\limits_{|v|=1} K_2(\Delta\vec{v})$. За умовою в) маємо $\delta_1 > 0$ для всіх $(t,x)\in\overline{Q}$, а за умовою 2) маємо $\delta_2 > 0$ для всіх $x\in D$. Тоді

$$K_1(\Delta\vec{u}) \geq \delta_1\left(|\Delta u|^2 + |\Delta p|^2\right),$$

$$K_2(\Delta\omega) \geq \delta_2\left(|\Delta\omega|^2 + |\Delta q|^2\right).$$

Отже,

$$\Delta_p I \geq \delta_1 \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[|\Delta u|^2\left(1 - o\left(|\Delta u|^\alpha\right)\right) + \right.$$

$$\left. + |\Delta p|^2\left(1 - o\left(|\Delta p|^\alpha\right)\right)\right] dx.$$

Враховуючи співвідношення (3.31), маємо, що $\Delta u \to 0$ при $\Delta p \to 0$. Тому при досить малих Δp таких, що $1 - o\left(|\Delta p|^\alpha\right) > \frac{1}{2}$, $1 - o\left(|\Delta q|^\alpha\right) > \frac{1}{2}$, одержимо

$$\Delta_p I \geq \frac{\delta_1}{2}\int\limits_0^T dt \int\limits_D \left(|\Delta u|^2 + |\Delta p|^2\right)dx > 0.$$

Аналогічно одержуємо нерівність для $\Delta_q I$:

$$\Delta_q I \geq \delta_2 \int\limits_D \left[|\Delta u|^2\left(1 + o\left(|\Delta\omega|^\alpha\right)\right) + |\Delta q|^2\left(1 + o\left(|\Delta q|^2\right)\right)\right] dx.$$

Враховуючи формулу (3.33), маємо, що $\Delta\omega \to 0$ при $\Delta q \to 0$. Тому при досить малих Δq таких, що $1 - o\left(|\Delta q|^\alpha\right) > \frac{1}{2}$,

$1 - o\left(|\Delta\omega|^{\alpha}\right) > \dfrac{1}{2}$, одержимо

$$\Delta_q I \geq \frac{\delta_2}{2} \int\limits_D \left(|\Delta\omega|^2 + |\Delta q|^2\right) dx > 0.$$

Отже, $\Delta I = \Delta_p I + \Delta_q I > 0$.

Необхідність. Нехай $p^{(0)}(t,x)$ і $q^{(0)}(x)$ – оптимальні, тобто $\Delta_p I > 0$ і $\Delta_q I > 0$. Перевіримо виконання умов теореми 3.5. Нехай $\partial_p H_1(\vec{u}^{(0)}, \eta) \neq 0$. Тоді, вибираючи досить малі різні за знаком в області Q прирости Δp, із формули

$$\Delta_p I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[\partial_p H_1\left(\vec{u}^{(0)}, \eta\right)\Delta p + \mathcal{E}\right] dx$$

одержимо, що $\Delta_p I$ змінює знак в залежності від знаку Δp. Це суперечить наявності мінімуму функціоналу $I(p)$ в точці $p^0(t,x)$. Отже, $\partial_p H_1\left(\vec{u}^{(0)}, \eta^{(0)}\right) = 0$.

Нехай $\partial_q H_2\left(\omega^{(0)}, \mu\right) \neq 0$. Тоді, вибираючи досить малі різні за знаком в області D прирости Δq, із формули

$$\Delta_q I = \int\limits_D \left[\partial_q H_2\left(\omega^{(0)}, \mu\right)\Delta q + \mathcal{E}_1\right] dx$$

одержимо, що $\Delta_q I$ змінює знак в залежності від знаку Δq. Це суперечить наявності мінімуму функціоналу $I(p)$ в точці $q^{(0)}(x)$. Отже, $\partial_q H_2\left(\vec{\omega}^{(0)}, \mu\right) = 0$. Визначимо знаки функцій $\partial_p H_1(\vec{u}, \eta)$ і $\partial_q H_2(\vec{\omega}, \mu)$ в околах точок $p^{(0)}$, $q^{(0)}$. Запишемо прирости $\Delta_p I$ і $\Delta_q I$, обмежившись першими похідними функцій F_1 і F_2:

$$\Delta_p I = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \left[\partial_p H_1(\vec{u}, \eta)\Delta p\right] dx,$$

$$\Delta_q I = \int\limits_{D^-} \left[\partial_p H_1(\vec{\omega}, \mu)\Delta q\right] dx.$$

При досить малих Δp із умови $\Delta_p I > 0$ випливає, що $\partial_p H_1(\vec{u}, \eta)\Delta p > 0$, тобто $\partial_p H_1 < 0$ при $p < p^{(0)}$ і $\partial_p H_1 > 0$ при $p > p^{(0)}$. Тому в точці $p^{(0)}$ функція $H_1\left(\vec{u}^{(0)}, \eta\right)$ досягає мінімуму за змінною p.

При досить малих Δq із умови $\Delta_q I > 0$ випливає, що $\partial_q H_2(\vec{\omega}, \mu)\Delta q > 0$, тобто $\partial_q H_2 < 0$ при $q < q^{(0)}$ і $\partial_q H_2 > 0$ при $q > q^{(0)}$. Тому в точці $q^{(0)}$ функція $H_2(\vec{\omega}, \mu)$ досягає мінімуму за змінною q.

Якщо $K_1\left(\Delta_p \vec{u}\right) \leq 0$ і $\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial \omega_1} \leq 0$ в області Q, то з урахуванням умови а), б) одержимо $\Delta_p I < 0$. Якщо $K_2(\Delta\omega) \leq 0$ в області D і $K_1\left(\Delta_q \vec{u}\right) \leq 0$ в області Q по $\Delta_q I \leq 0$, що неможливо.

Нехай $K_1(\Delta\vec{u}) > 0$ в області Q^+ і $K_1(\Delta\vec{u}) < 0$ в області $Q^- = Q \backslash Q^+$, $\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial \omega_1^2} \geq 0$ в D^+ і $\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial \omega_1^2} < 0$ в $D^- = D \backslash D^+$. Використовуючи теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta_p I = \frac{1}{2} K_1\left(\vec{u}^+\right) \operatorname{mes} Q^+ - \frac{1}{2}\left|K_1\left(\vec{u}^-\right)\right| \operatorname{mes} Q^- +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial F_2^+}{\partial \omega_1^2} \operatorname{mes} D^+ - \frac{1}{2}\left|\frac{\partial F_2^-}{\partial \omega_2^2}\right| \operatorname{mes} D^- +$$

$$+\int\limits_0^T dt \int\limits_D \left(o\left(|\Delta u|^{2+\alpha}\right) + o\left(|\Delta p|^{2+\alpha}\right)\right) dx.$$

При досить малих Δp знак приросту $\Delta_p I$ залежить від значень $\operatorname{mes} Q^+$, $\operatorname{mes} D^+$, $\operatorname{mes} Q^-$, $\operatorname{mes} D^-$. Отже, при знакозмінній формі $K_1(\vec{u})$ і функції $\dfrac{\partial^2 F_2}{\partial \omega_2^2}$ функціонал $I(p)$ не досягає мінімуму.

Аналогічно перевіряємо приріст $\Delta_q I$. Нехай $K_2(\omega) \geq 0$ в D^+ і $K_2(\omega) \leq 0$ в $D^- = D \backslash D^+$. Тоді, використовуючи теорему про середнє, маємо

$$\Delta_q I = \frac{1}{2} K_1\left(\Delta \vec{u}^+\right) \operatorname{mes} Q_1^+ - \frac{1}{2}\left|K_1\left(\Delta \vec{u}^-\right)\right| \operatorname{mes} Q_1^- +$$

$$+\frac{1}{2} K_1\left(\Delta \vec{\omega}^+\right) \operatorname{mes} D^+ - \frac{1}{2}\left|K_2\left(\Delta \vec{\omega}^-\right)\right| \operatorname{mes} D^- +$$

$$+\int\limits_D \left(o\left(|\Delta \omega|^{2+\alpha}\right) + o\left(|\Delta q|^{2+\alpha}\right)\right) dx,$$

де $Q_1^+ \cup Q_1^- = Q$.

При досить малих Δq знак приросту $\Delta_q I$ залежить від значень $\operatorname{mes} Q_1^+$, $\operatorname{mes} D^+$, $\operatorname{mes} Q_1^-$, $\operatorname{mes} D_1^-$. Отже, при знакозмінній формі $K_2(\vec{\omega})$ функціонал $I(p)$ не досягає мінімуму.

Існування $\left(p^{(q)}, q^{(0)}, u^{(0)}\right)$ встановлюється наступним чином. Якщо $\left(p^{(0)}, q^{(0)}, u^{(0)}\right)$ – оптимальне, то $\partial_p H_1 = 0$, $\partial_q H_2 = 0$ і $\partial_p H_1 > 0$, $\partial_q H_2 > 0$. Застосовуючи теореми про неявну функцію із [10] до системи рівнянь

$$\partial_p H_1(\vec{u}, \eta) = 0,$$

$$\partial_q H_2(\vec{\omega}, \mu) = 0,$$

одержимо

$$\begin{cases} p^{(0)} = W_1\left(u_0, u_1, \ldots, u_n, \lambda\right), \\ q^{(0)} = W_2\left(\omega_1, \mu\right), \end{cases}$$

де $W_1\left(u_0, u_1, \ldots, u_n, \lambda\right)$ і $W_2\left(\omega_1, \mu\right)$ – диференційовні функції за аргументом $u_0, u_1, \ldots, u_n, \lambda, \omega_1, \mu$.

Використовуючи зображення розв'язку задачі (3.25)–(3.27) і формулу (2.57), маємо інтегро-диференціальну систему

$$u = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G(t, x, \tau, \xi) f\left(\tau, \xi, W_1\left(u_0, \ldots, u_n, \lambda\right)\right) d\xi +$$

$$+\int\limits_0^T d\xi\int\limits_D \Gamma\left(T_1,t,x,\tau,\xi\right) f\left(\tau,\xi,W_1\left(u_0,\ldots,u_n,\lambda\right)\right) d\xi+$$

$$+\int\limits_D G(t,x,0,\xi)\varphi\left(\xi,W_2\left(\omega_1,\mu\right)\right) d\xi+$$

$$+\int\limits_D \Gamma\left(T_1,t,x,0,\xi\right)\varphi\left(\xi,W_2\left(\omega_1,\mu\right)\right) d\xi, \qquad (3.37)$$

$$\mu(\xi)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D \left(\frac{\partial F_1(t,x,\vec{u})}{\partial u_0}E_2(t,x,\tau,\xi)+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1(t,x,\vec{u})}{ptu_i}D_{x_i}E_2(t,x,\tau,\xi)\right)dx+$$

$$\eta(\tau,\xi)=\int\limits_\tau^T dt\int\limits_D \left(\frac{\partial F_1(t,x,\vec{u})}{\partial u_0}G(t,x,\tau,\xi)+\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_1(t,x,\vec{u})}{ptu_k}\times\right.$$

$$\left.\times D_{x_k}G(t,x,\tau,\xi)\right)dx+\int\limits_D \frac{\partial F_2\left(x,\omega_1,q\right)}{\partial\omega_1}E_2(T,x,\tau,\xi).$$

Розв'язок системи (3.37) знаходимо методом послідовних наближень.

§3.4. Нелокальна задача з косою похідною та задача оптимального керування

Постановка задачі та основні обмеження. Нехай D – обмежена, випукла область з $\mathbb{R}^n$, з межею ∂D. В області $Q=[0,T)\times D$ розглянемо задачу знаходження функцій $u(t,x,p(t,x),q(x),r(t,x))$, $p(t,x)$, $q(x)$ та $r(t,x)$, які реалізують мінімум функціоналу

$$I(p,q,r)=\int\limits_0^T dt\int\limits_D \mathcal{F}_1(t,x,\overrightarrow{\omega})dx+$$

$$+\int\limits_D \mathcal{F}_2(T,x,\overrightarrow{v})dx+\int\limits_0^T dt\int\limits_{\partial D}\mathcal{F}_3(t,x,\overrightarrow{w})d_xS \tag{3.38}$$

на класі функцій (u,p,q,r), із яких $(p,q,r)\in V$, де $V\equiv\{p\in C^\alpha(Q),p_1\le p\le p_2;q\in C(D),q_1\le q\le q_2;r\in C(Q),r_1\le r\le r_2\}$, а $u(t,x,p,q,r)$ є розв'язком рівномірно параболічного рівняння

$$(Lu)(t,x)\equiv\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{ij=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}-$$

$$-\sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}-a_0(t,x)u=f(t,x,p), \tag{3.39}$$

що задовольняє нелокальну умову

$$u(0,x)+\int\limits_0^T\left(\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x)D_{x_i}u(\tau,x)+\right.$$

$$\left.+k_0(\tau,x)u(\tau,x)\right)d\tau=\varphi(x,q), \tag{3.40}$$

а на бічній межі $\Gamma=[0,T)\times\partial D$ крайову умову

$$(\mathcal{B}u)(t,x)\Big|_\Gamma=\Big(\sum_{k=1}^n b_k(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_k}+b_0(t,x)u\Big)\Big|_\Gamma=g(t,x,r), \tag{3.41}$$

де $\overrightarrow{\omega}=(\omega_0,\omega_1,\dots,\omega_{n+1})=(u,u_{x_1},\dots,u_{x_n},p)$, $\overrightarrow{v}=(v_0,v_1,\dots,v_{n+1})=(u|_{t=T},u_{x_1}|_{t=T},\dots,u_{x_n}|_{t=T},q)$, $\overrightarrow{w}=(w_0,w_1,\dots,w_{n+1})=(u|_\Gamma,u_{x_1}|_\Gamma,\dots,u_{x_n}|_\Gamma,r)$.

Припустимо, що для задачі (3.38)–(3.41) виконуються умови:

1°. Коефіцієнти $a_{ij} \in H^{(\alpha)}(Q)$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_k \in H^{(\alpha)}(Q)$, $k \in \{0, \ldots, n\}$ і для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$\pi_1|\xi|^2 \leq \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j \leq \pi_2|\xi|^2,$$

де π_1, π_2 – фіксовані додатні сталі, а $|\xi|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

2°. Коефіцієнти $k_i(\tau, x)$, $k_0(\tau, x) \in C(D)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, $b_k \in H^{(1+\alpha)}(\Gamma)$, $k \in \{0, \ldots, n\}$, і виконуються умови

$$\int\limits_0^T d\tau \int\limits_D \Big| \sum_{i=1}^{n} k_i(\tau, x) \frac{\partial E}{\partial x_i}(t, x, 0, \xi) + k_0(\tau, \xi) E(t, x, 0, \xi) \Big| dx \leq \mu < 1,$$

$$\lim_{x \to \partial D} k_i(\tau, x) \ln \rho(x, \partial D) = 0,$$

де $\rho(x, \partial D)$ – відстань від точки x до ∂D, μ – довільне число; вектор $\overrightarrow{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ утворює з нормаллю $\overrightarrow{n}$ в точці $(t, x) \in \Gamma$ гострий кут, $E(t, x, \tau, \xi)$ – функція Гріна однорідної крайової задачі

$$(Lu)(t, x) = f(t, x, p), \quad u(0, x) = \varphi(x, q),$$

$$(\mathcal{B}u)(t, x)|_\Gamma = 0. \tag{3.42}$$

3°. Функції $f(t, x, p) \in C^{(\alpha)}(Q)$, $g(t, x, r) \in C(\Gamma)$, $\varphi(x, q) \in C(D)$.

4°. Межа ∂D належить класу $C^{(1+\alpha)}$.

5°. Функції $f(t, x, p)$, $\varphi(x, q)$, $g(t, x, r)$, $\mathcal{F}_1(t, x, \overrightarrow{\omega})$, $\mathcal{F}_2(x, \overrightarrow{v})$ і $\mathcal{F}_3(t, x, \overrightarrow{w})$ мають гельдерові похідні другого порядку за аргументами ω_k, v_k та w_k неперервні як функції від (t, x).

Існування та зображення розв'язку задачі (3.39)–(3.41)

В області Q розглянемо задачу (3.39)–(3.41). Правильна така теорема.

Теорема 3.6. *Нехай виконуються умови* 1°–4°. *Тоді існує функція Гріна* (G_1, G_2, Z_1, Z_2) *задачі (3.39)–(3.41), за допомогою якої розв'язок* $u(t,x,p,q,r)$ *визначається формулою*

$$u(t,x,p,q,r) = \int_0^t d\tau \int_D G_1(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,p) d\xi +$$

$$+ \int_D G_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\partial D} G_2(t,x,\tau,\xi) g(\tau,\xi,r) d_\xi S +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_D Z_1(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,p) d\xi + \int_D Z_1(t,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_{\partial D} Z_2(t,x,\tau,\xi) g(\tau,\xi,r) d_\xi S \qquad (3.43)$$

і для нього правильні оцінки

$$|u(t,x)| \le c(|\varphi|_{C(D)} + t|f|_{C(Q)} + \sqrt{t}|g|_{C(\Gamma)}) \equiv A(t,\varphi,f,g),$$

$$|D_x u| \le A(t,\varphi,f,g) t^{-1/2} Q(\rho),$$

$$|D_x^2 u| \le A(t,\varphi,f,g)(t^{-1} + t^{-1/2}\rho^{-1}(x,\partial D))|Q(\rho)|,$$

$$|D_t u| \le A(t,\varphi,f,g)(t^{-1} + t^{-1/2}\rho^{-1}(x,\partial D))|Q(\rho)|, \qquad (3.44)$$

де $Q(\rho) = \begin{cases} \ln \dfrac{1}{\rho(x,\partial D)}, & \rho < 1, \\ 1, & \rho \ge 1. \end{cases}$

Доведення. Розв'язок задачі (3.39)–(3.41) шукатимемо у вигляді

$$u(t,x) = \int_D E(t,x,0,\xi) u(0,\xi) d\xi + V(t,x), \qquad (3.45)$$

де $V(t,x)$ – розв'язок задачі з косою похідною

$$(LV)(t,x) = f(t,x,p(t,x)),$$

$$V(0,x) = \varphi(x,q(x)),$$

$$(\mathcal{B}V)(t,x)|_{\Gamma} = g(t,x,r(t,x)). \tag{3.46}$$

Використовуючи функцію Гріна задачі (3.42), (G_1, G_2), побудовану в другому розділі, розв'язок $V(t,x)$ визначається формулою

$$V(t,x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_D G_1(t,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,p) d\xi + \int\limits_D G_1(t,x,0,\xi) \times$$

$$\times \varphi(\xi,q) d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\partial D} G_2(t,x,\tau,\xi) g(\tau,\xi,r) d_\xi S \tag{3.47}$$

і для нього правильні оцінки (3.44).

Використовуючи зображення (3.45), задовольнимо нелокальну умову (3.40), одержимо

$$u(0,x) + \int\limits_0^T \Bigg(\int\limits_D \Big(\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x) \frac{\partial E}{\partial x_i}(\tau,x,0,\xi) +$$

$$+ k_0(\tau,x) E(\tau,x,0,\xi) \Big) u(0,\xi) d\xi \Bigg) d\tau =$$

$$= - \int\limits_0^T \Big(\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x) \frac{\partial V}{\partial x_i}(\tau,x) + k_0(\tau,x) V(\tau,x) \Big) d\tau. \tag{3.48}$$

Введемо позначення

$$\int\limits_0^T \sum_{i=1}^n \Big(k_i(\tau,x) \frac{\partial E}{\partial x_i}(\tau,x,0,\xi) +$$

$$+k_0(\tau,x)E(\tau,x,0,\xi)\Big)d\tau \equiv K(T,x,0,\xi),$$

$$-\int\limits_0^T \sum_{i=1}^n \Big(k_i(\tau,x)\frac{\partial V}{\partial x_i}(\tau,x)+k_0(\tau,x)V(\tau,x)\Big)d\tau \equiv F(x).$$

Тоді рівняння (3.48) набуде вигляду

$$u(0,x)+\int\limits_D K(T,x,0,\xi)u(0,\xi)d\xi = F(x). \qquad (3.49)$$

Розв'язок інтегрального рівняння (3.48) шукаємо методом послідовних наближень. Враховуючи умову 2°, а саме нерівність

$$\int\limits_0^T d\tau \int\limits_D \Big|\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x)\frac{\partial E}{\partial x_i}(\tau,x,0,\xi)+$$

$$+k_0(\tau,x)E(\tau,x,0,\xi)\Big|d\xi \le \mu < 1,$$

одержимо розв'язок інтегрального рівняння (3.49), для якого правильна нерівність

$$|u(0,x)| \le \frac{\mu}{1-\mu}\|V\|_{C(Q)}. \qquad (3.50)$$

Встановимо формулу зображення розв'язку задачі (3.39)–(3.41). Враховуючи нерівність $\mu < 1$ запишемо розв'язок інтегрального рівняння (3.49) у вигляді

$$u(0,x) = F(x)+\int\limits_D R(x,y)F(y)dy, \qquad (3.51)$$

де $R(x,y)$ – резольвента, яка задовольняє інтегральне рівняння

$$R(x,\xi)+\int\limits_0^T \Big(\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x)D_{x_i}E(\tau,x,0,\xi)+$$

$$+k_0(\tau,x)E(\tau,x,0,\xi)\Big)d\tau =$$

$$= -\int\limits_D \left(\int\limits_0^T \Big(\sum_{i=1}^n k_i(\tau,x) D_{x_i} E(\tau,x,0,y) +$$

$$+k_0(\tau,x)E(\tau,x,0,y)\Big) R(y,\xi) d\tau \right) dy,$$

звідки отримуємо оцінку $\int\limits_D R(x,y)dy \leq \dfrac{\mu}{1-\mu}$.

Підставимо у рівність (3.51) замість $F(y)$ вираз

$$F(y) = -\int\limits_0^T \left(\sum_{i=1}^n \left(\int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_D D_{y_i} G_1(\tau,y,\beta,\xi) f(\beta,\xi,p) d\xi + \right.\right.$$

$$+\int\limits_D D_{y_i} G_1(\tau,y,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi +$$

$$\left. + \int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_{\partial D} D_{y_i} G_2(\tau,y,\beta,\xi) g(\beta,\xi,r) d_\xi S \right) k_i(\tau,y) +$$

$$+k_0(\tau,y)\Big(\int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_D G_1(\tau,y,\beta,\xi) f(\beta,\xi,p) d\xi +$$

$$+\int\limits_D G_1(\tau,y,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi +$$

$$\left. + \int\limits_0^\tau d\beta \int\limits_{\partial D} G_2(\tau,y,\beta,\xi) g(\beta,\xi,r) d_\xi S \Big) \right) d\tau$$

і змінимо порядок інтегрування. Отримаємо

$$u(0,x) = \int_0^T d\tau \int_D \Gamma_1(T,x,\tau,\xi) f(\tau,\xi,p) d\xi +$$

$$+ \int_D \Gamma_1(T,x,0,\xi)\varphi(\xi,q)d\xi + \int_0^T d\tau \int_{\partial D} \Gamma_2(T,x,\tau,\xi) g(\tau,\xi,r) d_\xi S,$$

де

$$\Gamma_j(T,x,\tau,\xi) \equiv -\int_\tau^T \Big[\sum_{i=1}^n D_{x_i} G_j(\beta,x,\tau,\xi) k_i(\beta,x) +$$

$$+ k_0(\beta,x) G_j(\beta,x,\tau,\xi) +$$

$$+ \int_D R(x,y) \Big(\sum_{i=1}^n D_{y_i} G_j(\beta,y,\tau,\xi) k_i(\beta,y) +$$

$$+ G_j(\beta,y,\tau,\xi) k_0(\beta,y) \Big) dy \Big] d\beta, \quad j \in \{1,2\}.$$

Підставляючи тепер значення $u(0,x)$ в поверхневий інтеграл рівності (3.45) і змінюючи порядок інтегрування, отримаємо зображення (3.43), де

$$Z_j(t,x,\tau,\xi) \equiv \int_D E(t,x,0,y)\Gamma_j(T,y,\tau,\xi) dy, \quad j = 1,2.$$

Враховуючи оцінки похідних функції Гріна $E(t,x,0,\xi)$, оцінки похідних функції $V(t,x)$, зображення (3.45) і нерівність (3.50), одержуємо оцінки (3.44).

Побудова оптимального розв'язку задачі (3.38)–(3.41)

Введемо такі позначення:

$$E_i(t,x,0,\xi) = G_i(t,x,0,\xi) + Z_i(t,x,0,\xi), \quad i = 1,2;$$

$$\{\overrightarrow{\nu}^{(1)}, \overrightarrow{\nu}^{(2)}, \overrightarrow{\nu}^{(3)}\} = \{\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\};$$

$$R_{k,j}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)},0,\xi) = \frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \nu_0^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})E_j(t,x,0,\xi)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \nu_i^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})D_{x_i}E_j(t,x,0,\xi);$$

$$W_{k,j}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)},\tau,\xi) = \frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \nu_0^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})G_j(t,x,\tau,\xi)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \nu_i^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})D_{x_i}G_j(t,x,\tau,\xi);$$

$$V_{k,j}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)},\tau,\xi) = \frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \nu_0^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})Z_j(t,x,\tau,\xi)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial \nu_i^{(k)}}(t,x,\overrightarrow{\nu}^{(k)})D_{x_i}Z_j(t,x,\tau,\xi);$$

$$\lambda(\tau,\xi) = \int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\partial D} W_{1,1}(t,x,\overrightarrow{\omega},\tau,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{D} V_{1,1}(t,x,\overrightarrow{\omega},\tau,\xi)dx + \int\limits_{D} R_{2,1}(T,x,\overrightarrow{v},0,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_{\tau}^{T} dt \int\limits_{\partial D} W_{3,1}(t,x,\overrightarrow{w},\tau,\xi)d_xS + \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{\partial D} V_{3,1}(t,x,\overrightarrow{w},\tau,\xi)d_xS;$$

$$\mu(\xi) = \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{D} R_{1,1}(t,x,\overrightarrow{\omega},0,\xi)dx+$$

$$+\int\limits_{D} R_{2,1}(T,x,\overrightarrow{v},0,\xi)dx + \int\limits_{0}^{T} dt \int\limits_{\partial D} R_{3,1}(t,x,\overrightarrow{w},\tau,\xi)d_xS;$$

$$\eta(\tau,\xi) = \int_\tau^T dt \int_D W_{1,2}(t,x,\overrightarrow{\omega},\tau,\xi)dx+$$

$$+\int_0^T dt \int_{\partial D} V_{1,2}(t,x,\overrightarrow{\omega},\tau,\xi)d_xS + \int_D R_{2,2}(T,x,\overrightarrow{v},0,\xi)dx+$$

$$+\int_\tau^T dt \int_{\partial D} W_{3,2}(t,x,\overrightarrow{w},\tau,\xi)d_xS + \int_0^T dt \int_{\partial D} V_{3,2}(t,x,\overrightarrow{w},\tau,\xi)d_xS;$$

$$H_\lambda(\tau,\xi,p) \equiv \lambda(\tau,\xi)f(\tau,\xi,p) + \mathcal{F}_1(\tau,\xi,\overrightarrow{\omega});$$

$$H_\mu(\xi,q) \equiv \mu(\xi)\varphi(\xi,q) + \mathcal{F}_2(\xi,\overrightarrow{v});$$

$$H_\eta(\tau,\xi,r) \equiv \eta(\tau,\xi)g(\tau,\xi,r) + \mathcal{F}_3(\tau,\xi,\overrightarrow{w}).$$

В залежності від знаків похідних функцій D_pH_λ, D_pH_μ, D_rH_η сформулюємо умови існування оптимального розв'язку задачі (3.38)–(3.41) при виконанні умов $1° - 5°$.

Зокрема, правильна така теорема

Теорема 3.7. *Якщо $D_pH_\lambda > 0$, $D_qH_\mu > 0$ і $D_rH_\eta > 0$, то оптимальними керуваннями будуть (p_1, q_1, r_1), а оптимальним розв'язком задачі (3.38)–(3.41) є $u(t,x,p_1,q_1,r_1)$.*

Доведення. Нехай Δp, Δq і Δr – допустимі прирости керувань. Запишемо повний приріст функції $u(t,x,p,q,r)$ через частинні прирости

$$\Delta u(t,x) \equiv \Delta_p u(t,x) + \Delta_q u(t,x) + \Delta_r u(t,x).$$

Оскільки ці частинні прирости є розв'язками відповідних нелокальних задач, то використовуючи функцію Гріна маємо їх інтегральні зображення, наприклад

$$\Delta_p u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_D G_1(t,x,\tau,\xi)\Delta_p f(\tau,\xi,p)d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau \int\limits_D Z_1(t,x,\tau,\xi)\Delta_p f(\tau,\xi,p)d\xi.$$

Приріст функціоналу $I(p,q,r)$ теж можна подати через частинні прирости

$$\Delta I(p,q,r) \equiv \Delta_p I(p,q,r) + \Delta_q I(p,q,r) + \Delta_r I(p,q,r). \quad (3.52)$$

Використовуючи формулу Тейлора, знаходимо зображення приростів $\Delta_p I$, $\Delta_q I$ та $\Delta_r I$. Зокрема, для $\Delta_p I$ маємо зображення

$$\Delta_p I(p,q,r) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D \Bigg(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \omega_0}(t,x,\overrightarrow{\omega})\Delta_p\omega_0 +$$

$$+\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \omega_i}(t,x,\overrightarrow{\omega})\Delta_p\omega_i\Bigg)dx + \int\limits_D \Bigg(\frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial v_0}(x,\overrightarrow{v})\Delta_p v_0 +$$

$$+\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial v_i}(x,\overrightarrow{v})\Delta_p v_i\Bigg)dx + \int\limits_0^T dt \int\limits_{\partial D} \Bigg(\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial w_0}(t,x,\overrightarrow{w})\Delta_p w_0 +$$

$$+\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial w_i}(t,x,\overrightarrow{w})\Delta_p w_i\Bigg)d_xS + o(\|\Delta_p\omega\|), \quad (3.53)$$

де

$$\|\Delta_p\omega\| = \Big(\sum_{i=0}^n (\Delta_p\omega_i)^2\Big)^{1/2}.$$

Підставивши інтегральні зображення $\Delta_p u$, $\Delta_q u$ і $\Delta_r u$ у (3.53), змінивши порядок інтегрування і скориставшись позначеннями, одержимо

$$\Delta_p I(p,q,r) = \int\limits_0^T d\tau \int\limits_D D_p H_\lambda(\tau,\xi)\Delta p d\xi + o(\|\Delta_p\omega\|).$$

Аналогічно одержуються зображення $\Delta_q I$ та $\Delta_r I$. Тоді

$$\Delta I(p,q,r)=\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D D_pH_\lambda(\tau,\xi)\Delta p d\xi+\int\limits_D D_qH_\mu(\xi)\Delta q d\xi+$$

$$+\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{\partial D} D_rH_\eta(\tau,\xi)\Delta r d_\xi S+o(\|\Delta_p\omega\|)+o(\|\Delta_q\omega\|)+o(\|\Delta_r\omega\|).$$

Нехай $(p^{(0)},q^{(0)},r^{(0)})$ – оптимальні керування. Тоді запишемо приріст функціоналу $I(p,q,r)$ в точці $(p^{(0)},q^{(0)},r^{(0)})$:

$$\Delta I(p^{(0)},q^{(0)},r^{(0)})=\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D D_pH_\lambda(\tau,\xi,p^{(0)}+\theta_1\Delta p)\Delta p d\xi+$$

$$+\int\limits_D D_qH_\mu(\xi,q^{(0)}+\theta_2\Delta q)\Delta q d\xi+$$

$$+\int\limits_0^T d\tau\int\limits_{\partial D} D_rH_\eta(\xi,r^{(0)}+\theta_3\Delta r)\Delta r d_\xi S,\quad \theta_i\in(0,1), i=1,2,3.$$

Оскільки $\Delta I(p^{(0)},q^{(0)},r^{(0)})\geq 0$, то необхідно, щоб $D_pH_\lambda(\tau,\xi,p^{(0)}+\theta_1\Delta p)\Delta p\geq 0$, $D_qH_\mu(\xi,q^{(0)}+\theta_2\Delta q)\Delta q\geq 0$ і $D_rH_\eta(\tau,\xi,r^{(0)}+\theta_3\Delta r)\Delta r\geq 0$. За умовою а) теореми 2 $D_pH_\lambda(\tau,\xi,p^{(0)}+\theta_1\Delta p)>0$, $D_qH_\mu(\xi,q^{(0)}+\theta_2\Delta q)>0$ і $D_rH_\eta(\tau,\xi,r^{(0)}+\theta_3\Delta r)>0$. А оскільки $p_1\leq p^{(0)}\leq p_2$, $q_1\leq q^{(0)}\leq q_2$, $r_1\leq r^{(0)}\leq r_2$, то $\Delta p=p-p^{(0)}\geq 0$, $\Delta q=q-q^{(0)}\geq 0$, $\Delta r=r-r^{(0)}\geq 0$, а звідси випливає, що $p^{(0)}\equiv p_1$, $q^{(0)}\equiv q_1$ і $r^{(0)}\equiv r_1$.

Отже, якщо виконуються умови теореми, то при досить малих Δp, Δq і Δr маємо, що $\Delta I(p_1,q_1,r_1)\geq 0$. А це означає, що p_1, q_1, r_1 – оптимальні керування і $u(t,x,p,q,r)\equiv u(t,x,p_1,q_1,r_1)$ – оптимальний розв'язок задачі (3.38)–(3.41).

Нехай $p_1(t,x)$, $q_1(x)$, $r_1(t,x)$ – оптимальні керування задачі (3.38)–(3.41), тобто $\Delta I(p,q,r) \geq 0$. Перевіримо виконання умов теореми 3.7.

Якщо функції H_λ, H_μ і H_η не задовольняють умови теореми 3.7, то $D_p H_\lambda$, $D_q H_\mu$ і $D_r H_\eta$ – знакозмінні величини, тобто $D_p H_\lambda > 0$ в $Q^+ \subset Q$, $D_q H_\mu > 0$ в $D^+ \subset D$, а $D_r H_\eta > 0$ в $\Gamma^+ \subset \Gamma$ і $D_p H_\lambda < 0$ в $Q^- \subset Q \setminus Q^+$, $D_q H_\mu < 0$ в $D^- \subset D \setminus D^+$, а $D_r H_\eta < 0$ в $\Gamma^- \subset \Gamma \setminus \Gamma^+$ відповідно. Використавши теорему про середнє значення, маємо

$$\Delta I(p,q,r) = D_p H_\lambda(t^+, x^+, p) \iint\limits_{Q^+} \Delta p d\xi d\tau -$$

$$-|D_p H_\lambda(t^-, x^-, p)| \iint\limits_{Q^-} \Delta p d\xi d\tau + D_q H_\mu(x^+, q) \int\limits_{D^+} \Delta q d\xi -$$

$$-|D_q H_\mu(x^-, q)| \int\limits_{D^-} \Delta q d\xi + D_r H_\eta(t^+, x^+, r) \iint\limits_{\Gamma^+} \Delta r d_\xi S d\tau -$$

$$-|D_r H_\eta(t^-, x^-, r)| \iint\limits_{\Gamma^-} \Delta r d_\xi S d\tau.$$

При досить малих Δp, Δq і Δr знак $\Delta I(p,q,r)$ визначається шістьма доданками суми. Різниці перших двох доданків змінюють знак в залежності від величин $\operatorname{mes} Q^+$, $\operatorname{mes} D^+$, $\operatorname{mes} \Gamma^+$, $\operatorname{mes} Q^-$, $\operatorname{mes} D^-$, $\operatorname{mes} \Gamma^-$, Δp, Δq і Δr. При досить малій $\operatorname{mes} Q^+$, $\operatorname{mes} D^+$, $\operatorname{mes} \Gamma^+$ і $\Delta p > 0$, $\Delta q > 0$, $\Delta r > 0$ маємо, що $\Delta I(p,q,r) < 0$ і, навпаки, $\Delta I(p,q,r) > 0$, якщо малі $\operatorname{mes} Q^-$, $\operatorname{mes} D^-$, $\operatorname{mes} \Gamma^-$ і $\Delta p > 0$, $\Delta q > 0$, $\Delta r > 0$. Отже, функціонал не досягає мінімуму.

Зауваження. Обґрунтування умов існування оптимального розв'язку задачі (3.38)–(3.41) у всеможливих випадках, коли $D_p H_\lambda \neq 0$, $D_q H_\mu \neq 0$ і $D_r H_\eta \neq 0$ проводиться аналогічно доведенню теореми 3.7.

Встановимо умови існування оптимального розв'язку задачі (3.38)–(3.41) у випадку, коли функції H_λ, H_μ і H_η не є монотонними. Справедлива така теорема.

Теорема 3.8. *Нехай виконуються умови* 1°–5° *і функції* H_λ, H_μ *і* H_η *не є монотонними за аргументами* ω_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} *відповідно. Для того, щоб керування* $(\omega_{n+1}^{(0)}, v_{n+1}^{(0)}, w_{n+1}^{(0)}) \in V$ *і відповідний розв'язок* $u(t, x, \omega_{n+1}^{(0)}, v_{n+1}^{(0)}, w_{n+1}^{(0)})$ *крайової задачі (3.39)–(3.41) були оптимальними, необхідно й досить, щоб виконувалися умови:*

1) функція H_λ *за аргументом* ω_{n+1} *має в точці* $\omega_{n+1}^{(0)}$ *мінімальне значення;*

2) функція H_μ *за аргументом* v_{n+1} *має в точці* $v_{n+1}^{(0)}$ *мінімальне значення;*

3) функція H_η *за аргументом* w_{n+1} *має в точці* $w_{n+1}^{(0)}$ *мінімальне значення;*

4) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$ *і* $(t, x) \in \overline{Q}$ *виконується нерівність*

$$K_1(t, x, \overrightarrow{y}) = \sum_{ij=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1(t, x, \overrightarrow{y})}{\partial y_i \partial y_j} y_i y_j > 0;$$

5) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n+1})$ *виконується нерівність*

$$K_2(x, \overrightarrow{\xi}) = \sum_{kl=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2(x, \overrightarrow{\xi})}{\partial \xi_k \partial \xi_l} \xi_k \xi_l > 0;$$

6) для довільного ненульового вектора $\overrightarrow{\beta} = (\beta_0, \ldots, \beta_{n+1})$ *правильна нерівність*

$$K_3(t, x, \overrightarrow{\beta}) = \sum_{ij=0}^{n+1} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_3(t, x, \overrightarrow{\beta})}{\partial \beta_i \partial \beta_j} \beta_i \beta_j > 0.$$

§3.5. Одностороння крайова задача для параболічних рівнянь з інтегральною нелокальною умовою

Постановка задачі. Нехай T – фіксоване додатне число, D – обмежена область у R^n з межею ∂D. Розглянемо в області $Q = (0,T) \times D$ задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка задовольняє при $(t,x) \in Q$ рівняння (3.1), нелокальну умову (3.2), а на бічній межі $\Gamma = [0,T) \times D$ крайові умови

$$(\mathcal{B}u - g)(t,x)|_\Gamma \geq 0,\ u|_\Gamma \geq 0,\ [u(\mathcal{B}u - g)(t,x)]|_\Gamma = 0. \quad (3.54)$$

Нехай для задачі (3.1), (3.2), (3.54) виконані умови:

А) Функції $f(t,x) \in H^\alpha(Q)$, $\varphi \in H^{2+\alpha}(D)$, $g \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, вектор $\vec{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ утворює з напрямком внутрішньої нормалі $\vec{n}$ до Γ у точці $P \in \Gamma$ кут менший за $\dfrac{\pi}{2}$, $b_k \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $b_0 \in H^{1+\alpha}(F)$. Межа ∂D належить класу $C^{1+\alpha}$.

У задачі (3.1), (3.2), (3.54) зробимо заміну

$$u(t,x) = v(t,x)e^{-\lambda t},$$

де $\lambda = \inf\limits_{\overline{Q}}(-a_0(t,x))$. Одержимо

$$(L_1 v)(t,x) = f(t,x)e^{\lambda t},$$

$$v(0,x) + \int\limits_0^T d(\tau,x)v(\tau,x)e^{-\lambda\tau}d\tau = \varphi(x), \quad (3.55)$$

$$(\mathcal{B}v - ge^{\lambda t})(t,x)|_\Gamma \geq 0,\ v|_\Gamma \geq 0,\ [v(\mathcal{B}u - ge^{\lambda t})]|_\Gamma = 0. \quad (3.56)$$

Знайдемо оцінку розв'язку крайової задачі (3.55), (3.56). Правильна така теорема.

Теорема 3.9. *Якщо $u(t,x)$ – класичний розв'язок задачі (3.55), (3.56) у області Q і виконані умови A_1, A_2, A, то для $u(t,x)$, $(t,x) \in Q$ справедлива оцінка*

$$|v(t,x)| \leq \max\Bigg(\left\| fe^{\lambda t}(-a_0 - \lambda)^{-1}, Q \right\|_0,$$

$$\left\|\varphi\left(1-\int\limits_0^T |d(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau\right)^{-1}, D\right\|_0, \left\|b_0^{-1}ge^{\lambda t}, \Gamma\right\|_0\Bigg). \quad (3.57)$$

Доведення нерівності (3.57) проводиться за методикою доведення теореми 2.6.

Встановимо існування розв'язку задачі (3.1), (3.2), (3.54).

Правильна така теорема.

Теорема 3.10. *Якщо виконані умови теореми 3.6, то існує єдиний розв'язок задачі (3.1), (3.2), (3.54) у просторі* $H^{2+\alpha}(Q)$.

Доведення. У задачі (3.1), (3.2), (3.54) зробимо заміну $v(t,x) = \omega(t,x)e^{Rt}$, де R – додатна стала, яку виберемо пізніше, і розв'язок її будемо шукати методом штрафа.

Для цього розглянемо крайову задачу

$$((L_1+R)\omega)(\varepsilon,t,x) = f(t,x)e^{(\lambda-R)t} \equiv F_1(t,x),$$

$$\omega(\varepsilon,0,x) = \varphi(x)-$$

$$-\int\limits_0^T d(\tau,x)e^{-(\lambda-R)\tau}\omega(\varepsilon,\tau,x)d\tau \equiv \varphi_1(x), \quad (3.58)$$

$$[(\mathcal{B}\omega_m)(\varepsilon,t,x)]|_\Gamma = g(t,x)e^{(\lambda-R)t} + \varepsilon^{-p}\sup(-\omega(\varepsilon,t,x),0) \equiv$$

$$\equiv g_1(t,x), \quad 0 < p < \frac{1}{2}.$$

Враховуючи оцінки компонент функції Гріна (G_1, G_2) задачі (3.58)

$$|G_\nu| \le c(t-\tau)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-R(t-\tau) - c\frac{|x-\xi|^2}{(t-\tau)}\right\}, \quad \nu \in \{1,2\},$$

поставимо у відповідність задачі (3.58) інтегральне рівняння

$$\omega(\varepsilon,t,x) = \omega_0(t,x) - \int\limits_0^T d\tau \int\limits_D G_1(\tau,x,0,\xi)d(\tau,\xi)e^{-(\lambda-R)\tau}\times$$

$$\times\omega(\varepsilon,\tau,x)d\xi+\varepsilon^{-p}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D}G_2(t,x,\tau,y)\times$$

$$\times\sup(-\omega(\varepsilon,\tau,y),0)d_yS, \tag{3.59}$$

де $\omega_0(t,x)$ – розв'язок крайової задачі

$$((L_1+R)\omega)(\varepsilon,t,x)=F_1(t,x),\quad \omega(\varepsilon,0,x)=\varphi_1(x),$$

$$(\mathcal{B}\omega_m)(\varepsilon,t,x)|_\Gamma=g_1(t,x)e^{(\lambda-R)t}.$$

Згідно з теоремою 3.6 для розв'язку $\omega_0(t,x)$ справедлива оцінка

$$\|\omega_0;Q\|_{2+\alpha}\le c\left(\|F_1;Q\|_\alpha+\|\varphi_1;D\|_{2+\alpha}+\|g_1;\Gamma\|_{1+\alpha}\right).$$

Розв'язок рівняння (3.59) шукаємо методом послідовних наближень. Рекурентні співвідношення для послідовних наближень мають вигляд

$$\omega_0(\varepsilon,t,x)=\omega_0(t,x),$$

$$\omega_k(\varepsilon,t,x)=\omega_0(t,x)-\int\limits_0^T d\tau\int\limits_D d(\tau,y)G_1(t,x,0,y)e^{-(\lambda-R)\tau}\times$$

$$\times\omega_{k-1}(\varepsilon,\tau,x)d\xi+\varepsilon^{-p}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\partial D}G_2(t,x,\tau,y)\times$$

$$\times\sup(-\omega_{k-1}(\varepsilon,\tau,y),0)d_yS.$$

Оцінимо різниці між послідовними наближеннями. При $k=1$ маємо

$$|\omega_1(\varepsilon,t,x)-\omega_0(\varepsilon,t,x)|\le\lambda_0\|\omega_0;Q\|_0+$$

$$+ce^{-p}\left[\int\limits_0^{t-\varepsilon}e^{-R(t-\tau)}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau+\int\limits_{t-\varepsilon}^t e^{-R(t-\tau)}(t-\tau)^{-\frac{1}{2}}d\tau\right]\le$$

$$\le \|\omega_0; Q\|_0 \le \|\omega_0; Q\|_0 \left(\lambda_0 + ce^{-p}\left(e^{-R\varepsilon}T^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)\right).$$

Числа R і ε вибираємо так, щоб виконувалась нерівність

$$C(R, \lambda_0, \varepsilon) \equiv \lambda_0 + ce^{-p}\left(e^{-R\varepsilon}T^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right) < 1.$$

Оцінюючи різниці між послідовними наближеннями, знаходимо

$$|\omega_k(\varepsilon, t, x) - \omega_{k-1}(\varepsilon, t, x)| \le C^k(R, \lambda_0, \varepsilon)\|\omega_0; Q\|_0.$$

Отже, розв'язок задачі (3.58) зображається рівномірно збіжним функціональним рядом

$$\omega(\varepsilon, t, x) = \omega_0(t, x) - \sum_{k=1}^{\infty}(\omega_k(\varepsilon, t, x) - \omega_{k-1}(\varepsilon, t, x))$$

і для нього справедлива оцінка (3.57), де стала c не залежить від ε.

Враховуючи зображення (3.59), оцінку (3.57) і обмеження на функції d, f, φ, g, одержимо, що $\omega(\varepsilon, t, x) \in H^{2+\alpha}(Q)$. Виділяючи у послідовності $\omega(\varepsilon, t, x)$ збіжну підпослідовність $\omega(\varepsilon(j); t, x)$ і переходячи до границі при $\varepsilon(j) \to 0$, одержимо розв'язок задачі (3.55), (3.56) у просторі $H^{2+\alpha}(Q)$.

Розділ 4. Крайові задачі з імпульсною дією для параболічних рівнянь

Задачі для рівнянь з частинними похідними виникають при моделюванні різних складних явищ і процесів у сучасному природознавстві, техніці, математичній фізиці, квантовій механіці тощо. Дослідження задач теорії автоматичного керування, теорії ядерних реакторів, динамічних систем приводять до розв'язання періодичних крайових задач для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Зацікавленість до вивчення систем з розривними траєкторіями пов'язано з розвитком техніки, в якій імпульсні системи керування, імпульсні обчислювальні пристрої відіграють важливе значення.

В цьому розділі вивчаються крайові задачі для параболічного рівняння другого порядку з імпульсною дією за часовою змінною.

§4.1. Задача Діріхле з імпульсною дією для параболічного рівняння

Нехай D – обмежена область простору R^n з межею ∂D, $t_0, t_1, \ldots, t_{N+1}$ – фіксовані додатні числа, $t_0 < t_1 < \ldots < t_N < t_{N+1}$. В області $Q = [t_0, t_{N+1}) \times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \neq t_\lambda$, $\lambda \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $x \in D$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} + a_0(t,x)\right] u(t,x) = f(t,x), \qquad (4.1)$$

умови за змінною t:

$$u(t_0 + 0, x) = \varphi_0(x), \qquad (4.2)$$

$$u(t_\lambda + 0, x) - u(t_\lambda - 0, x) = b_\lambda(x) u(t_\lambda - 0, x) + \varphi_\lambda(x), \quad (4.3)$$

та крайову умову

$$\lim_{x \to z \in \partial D} (u(t,x) - g(t,x)) = 0. \tag{4.4}$$

Нехай $Q^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times D$, $k \in \{0, 1, \ldots, N\}$, α, l – дійсні числа, $\alpha \in (0,1)$, $[l]$ – ціла частина числа l, $\{l\} = l - [l]$, $(x_1^r, \ldots, x_n^r)$ – координати точки x^r в області D, $r \in \{1, 2\}$, $P(t,x)$, $P_1\left(t^{(1)}, x^{(1)}\right)$, $P_2\left(t^{(2)}, x^{(2)}\right)$ – довільні точки області $\overline{Q}$.

Визначимо функціональні простори, в яких буде розглядатися задача (4.1)–(4.4).

Позначимо через $H^l(Q)$ – множину функцій $u(t,x)$, які мають неперервні частинні похідні при $t \neq t_\lambda$, $x \in D$, вигляду $\partial_t^i \partial_x^r u$, $2i + [r] \leq [l]$, для яких скінченна норма

$$\|u; N, Q\|_0 \equiv \sup_k \left\{ \sup_{Q^{(k)}} |u| \right\} = \sup_k \left| u, Q^{(k)} \right|_0,$$

$$\|u; N, Q\|_l = \sup_k \left\{ \sum_{2i+|m| \leq [l]} \left\| u; Q^{(k)} \right\|_{2i+|m|} + \left\langle u; Q^{(k)} \right\rangle_l \right\},$$

де $\left\| u; Q^{(k)} \right\|_{2i+|m|} = \sup\limits_{P \in Q^{(k)}} \left| \partial_t^i \partial_x^r u(P) \right|$,

$$\left\langle u; Q^{(k)} \right\rangle_l = \sup_{(P_1, P_3) \in \overline{Q}^{(k)}} \sum_{2i+|m|=[l]} \left| \partial_t^i \partial_x^m u(P_1) - \partial_t^i \partial_x^m u(P_3) \right| \times$$

$$\times \left| x^1 - x^2 \right|^{-\{l\}} + \sup_{(P_2, P_3) \in \overline{Q}^{(k)}} \sum_{2i+|m|=[l]} \left| \partial_t^i \partial_x^m u(P_2) - \partial_t^i \partial_x^m u(P_3) \right| \times$$

$$\times \left| t^1 - t^2 \right|^{-\left(\frac{l - 2i - |m|}{2} \right)},$$

$\left| t^1 - t^2 \right| \leq \rho_0$, ρ_0 – довільне додатне число, $|m| = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$

$$\left| x^1 - x^2 \right| = \left[\sum_{j=1}^n \left(x_j^{(1)} - x_j^{(2)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Щодо задачі (4.1)–(4.4) вважаємо виконаними умови:

а) для довільного вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ виконується нерівність

$$\Pi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x) \xi_i \xi_j \leq \Pi_2 |\xi|^2,$$

Π_1, Π_2 – фіксовані додатні числа, $a_{ij}(t,x) \in H^{\alpha}(Q)$, $a_i(t,x) \in H^{\alpha}(Q)$, $a_0(t,x) \in H^{\alpha}(Q)$, $b_{\lambda}(x) \in H^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_{\lambda}))$, $\max[-a_0(t,x)] \equiv a_0 < \infty$;

б) функції $f \in H^{\alpha}(Q)$, $\varphi_0 \in H^{2+\alpha}(D)$, $\varphi_{\lambda}(x) \in H^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_{\lambda}))$,

$$[g(t_{\lambda} + 0, x) - g(t_{\lambda} - 0, x)]|_{\partial D} = [b_{\lambda}(x) g(t_{\lambda} - 0, x) + \varphi_{\lambda}(x)]|_{\partial D},$$

$$\varphi_0(x)|_{\partial D} = g(t_0, x)|_{\partial D}, \quad g(t,x) \epsilon H^{2+\alpha}(\Gamma),$$
$$\partial D \in C^{2+\alpha}, \quad \Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D.$$

Правильна така теорема.

Теорема 4.1. *Нехай для задачі (4.1)–(4.4) виконані умови а) та б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі (4.1)–(4.4) із простору $H^{2+\alpha}(Q)$ і справджується нерівність*

$$\|u; N, Q\|_{2+\alpha} \leq c \left\{ \sum_{k=1}^{N} \prod_{\lambda=k}^{N} (1 + \|b_{\lambda}; Q \cap (t = t_{\lambda})\|_0) \times \right.$$
$$\times \left(\|\varphi_{k-1}; Q \cap (t = t_{k-1})\|_{2+\alpha} + \left\| f; Q^{(k-1)} \right\|_{\alpha} + \right.$$
$$\left. + \left\| \tilde{g}, Q^{(k-1)} \right\|_{\alpha+2} \right) + \|\varphi_N; Q \cap (t = t_N)\|_{\alpha+2} +$$
$$\left. + \left\| f; Q^{(N)} \right\|_{\alpha} + \left\| \tilde{g}; Q^{(N)} \right\|_{\alpha+2} \right\}, \tag{4.5}$$

де $\tilde{g}(t,x)$ – довизначена функція $g(t,x)$ за змінною x в область D.

Для дослідження задачі (4.1)–(4.4) встановимо спочатку оцінку розв'язку задачі, його єдиність. Використовуючи функцію Гріна однорідної задачі Діріхле одержимо оцінку (4.5).

§4.2. Оцінка розв'язку задачі Діріхле з імпульсними умовами

Позначимо через $\tilde{g}(t,x)$ розв'язок задачі Діріхле в області $Q\backslash\left(\bigcup\limits_{\lambda=1}^{N} Q\cap(t=t_\lambda)\right)$

$$\partial_t u=\Delta u,\quad u\left(t_0,x\right)=0,\quad u|_\Gamma=g(t,x). \tag{4.6}$$

В задачі (4.1)–(4.4) зробимо заміну

$$u(t,x)=v(t,x)e^{\mu t}+\tilde{g}(t,x), \tag{4.7}$$

де $\mu>\max_{\overline{Q}}\left[-a_0(t,x)\right]\equiv a$. Одержимо

$$\left(L_1 v\right)(t,x)\equiv\left[\partial_t-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i}+a_0(t,x)+\mu\right]v(t,x)=f_1(t,x), \tag{4.8}$$

$$v\left(t_0+0,x\right)=\psi_0(x), \tag{4.9}$$

$$v\left(t_\lambda+0,x\right)-v\left(t_\lambda-0,x\right)=b_\lambda(x)v\left(t_\lambda-0,x\right)+\psi_\lambda(x), \tag{4.10}$$

$$v(t,x)|_\Gamma=0, \tag{4.11}$$

де $f_1(t,x)=f(t,x)e^{-\mu t}-e^{-\mu t}(L\tilde{g})(t,x)$,

$$\psi_0(x)=\varphi_0(x)e^{-\mu t_0}-\tilde{g}\left(t_0,x\right)e^{-\mu t_0},$$

$$\psi_\lambda(x)=\left[\varphi_\lambda(x)-\tilde{g}\left(t_\lambda+0,x\right)+\left(1+b_\lambda(x)\right)\tilde{g}\left(t_\lambda-0,x\right)\right]e^{-\mu t\lambda}.$$

Знайдемо оцінку розв'язку задачі (4.8)–(4.11). Правильна така теорема.

Теорема 4.2. *Нехай $v(t,x)$ – класичний розв'язок задачі (4.8)–(4.11) в області Q і виконані умови а) та б). Тоді для $v(t,x)$ правильна така нерівність*

$$|v| \leq \sum_{k=1}^{N} \prod_{\lambda=k}^{N} \left(1 + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0\right) \Big(\|\psi_{k-1}; Q \cap (t = t_{k-1})\|_0 +$$

$$+ \left\| f_1 \left(a_0 + \mu\right)^{-1}; Q^{(k-1)} \right\|_0 \Big) + \|\psi_N; Q \cap (t = t_N)\|_0 +$$

$$+ \left\| f_1 \left(a_0 + \mu\right)^{-1}; Q^{(N)} \right\|_0 . \qquad (4.12)$$

Доведення. Нехай $\max_{\overline{Q}^{(k)}} v(t,x) = v\left(P_1\right)$. Якщо $P_1 \in Q^k$, то в точці P_1 виконується співвідношення

$$\partial_t v\left(P_1\right) \ \ 0, \quad \partial_{x_i} v\left(P_1\right) = 0, \ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(P_1\right) \partial_{x_i} \partial_{x_j} v\left(P_1\right) \leq 0 \qquad (4.13)$$

і задовольняється рівняння (4.8).

Нерівність (4.13) правильна, оскільки в точці максимуму другі похідні $\partial_{y_k} \partial_{y_k} v$ за будь-яким напрямком

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{k_i} \left(x_i - x_i^{(1)}\right), \quad \left(\det \|\alpha_{k_i}\| \neq 0\right)$$

недодатні, а вираз

$$\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\left(P_1\right) \partial_{x_i} \partial_{x_k} v\left(P_1\right) = \sum_{l,j=1}^{n} \left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\left(P_1\right) \alpha_{kl} \alpha_{ji} \right) \partial_{y_j} \partial_{y_k} \times$$

$$\times v\left(P_1\right) = \sum_{l=1}^{n} \eta_l \partial_{y_l} \partial_{y_l} v < 0.$$

Оскільки $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – характеристичні числа квадратичної форми, то вони додатні згідно з обмеженням в умові а).

З урахуванням (4.13) і рівняння (4.8) в точці P_1 правильна нерівність

$$v\left(P_1\right) \leq f_1\left(P_1\right)\left(a_0\left(P_1\right)+\mu\right)^{-1}. \qquad (4.14)$$

Нехай $\min\limits_{\overline{Q}^{(k)}} v(t,x) = v_m\left(P_2\right)$. Якщо $P_2 \in Q^k$, то в точці P_2 виконується співвідношення

$$\partial_t v\left(P_2\right) \leq 0,\ \partial_{x_i} v\left(P_2\right) = 0,\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(P_2\right)\partial_{x_i}\partial_{x_j} v\left(P_2\right) \geq 0 \qquad (4.15)$$

і задовольняється рівняння (4.8).

Нерівність (4.15) правильна, оскільки в точці мінімуму другі похідні $\partial_{z_k}\partial_{z_k} v$ за будь-яким напрямком

$$z_k = \sum_{i=1}^{n} \beta_{k_i}\left(x_i - x_i^{(2)}\right) \quad \left(\det\left\|\beta_{k_i}\right\| \neq 0\right)$$

невід'ємні, а вираз

$$\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik}\left(P_2\right)\partial_{x_i}\partial_{x_k} v\left(P_2\right) = \sum_{l,j=1}^{n}\left(\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\left(P_2\right)\beta_{kl}\beta_{ji}\right)\partial_{z_j}\partial_{z_k}\times$$

$$\times v\left(P_2\right) = \sum_{l=1}^{n} \eta_l \partial_{z_l}\partial_{z_l} v > 0.$$

Оскільки $\eta_1, \ldots, \eta_n$ – характеристичні числа квадратичної форми, то вони додатні згідно з обмеженням в умові а). З урахуванням (4.15) і рівняння (4.8) в точці P_2 правильна нерівність

$$v\left(P_2\right) \leq f_1\left(P_2\right)\left(a_0\left(P_2\right)+\mu\right)^{-1}. \qquad (4.16)$$

Нехай $P_1 \in Q \cap (t = t_k)$. Якщо $k = 0$, то з початкової умови (4.9), одержимо

$$v\left(P_1\right) = \psi_0\left(x^{(1)}\right) \leq \left|\psi_0; D\right|_0. \qquad (4.17)$$

Нехай $P_2 \in D$. Тоді з початкової умови (4.9), одержимо

$$v\left(P_2\right) = \psi_0\left(x^{(2)}\right) \geq -\left|\psi_0; D\right|_0. \tag{4.18}$$

Враховуючи нерівності (4.14), (4.16), (4.17), (4.18) при $k = 0$ одержимо

$$\left\|v; Q^{(0)}\right\|_0 \leq \left\|f_1\left(a_0 + \mu\right)^{-1}; Q^{(0)}\right\|_0 + \left\|\psi_0; D\right\|_0. \tag{4.19}$$

Якщо $P_1 \in Q \cap (t = t_\lambda)$, або $P_2 \in Q \cap (t = t_\lambda)$, $\lambda \geq 1$, то, враховуючи умову (4.10), одержимо співвідношення

$$\left\|v; Q \cap (t = t_\lambda)\right\|_0 \leq \left(1 + \left\|b_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\right\|_0\right) \times$$

$$\times \left\|v; Q^{(\lambda-1)}\right\|_0 + \left\|\psi_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\right\|_0. \tag{4.20}$$

Для доведення нерівності (4.18) використаємо метод математичної індукції. При $\lambda = 1$, враховуючи нерівності (4.19), (4.20), маємо

$$\left\|v; Q^{(1)} \cup Q^{(0)}\right\|_0 \leq \left(1 + \left\|b_1; Q \cap (t = t_1)\right\|_0\right)\left(\left\|\psi_0; D\right\|_0 + \right.$$

$$\left. + \left\|f_1\left(a_0 + \mu\right)^{-1}; Q^{(0)}\right\|_0\right) + \left\|f_1\left(a_0 + \mu\right)^{-1}; Q^{(1)}\right\|_0 +$$

$$+ \left\|\psi_1; Q \cap (t = t_1)\right\|_0. \tag{4.21}$$

При $\lambda = 2$ одержимо

$$\left\|v; Q^{(2)} \cup Q^{(1)} \cup Q^{(0}\right\|_0 \leq \left(1 + \left\|b_2; Q \cap (t = t_2)\right\|_0\right) \times$$

$$\times \left\{\left(1 + \left\|b_1; Q \cap (t = t_1)\right\|_0\right)\left(\left\|\psi_0; D\right\|_0 + \left\|f_1\left(a_0 + \mu\right)^{-1}; Q^{(0)}\right\|_0\right) + \right.$$

$$\left. + \left\|f_1\left(a_0 + \mu\right)^{-1}; Q^{(1)}\right\|_0 + \left\|\psi_1; Q \cap (t = t_1)\right\|_0\right\} +$$

$$+ \left\|f_1\left(a_0 + \mu\right)^{-1}; Q^{(2)}\right\|_0 + \left\|\psi_2; Q \cap (t = t_2)\right\|_0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{2} \sum_{\lambda=k}^{2} (1 + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_k)\|_0) \left(\|\psi_{k-1}; Q \cap (t = t_{k-1})\|_0 + \right.$$

$$\left. + \left\| f_1 (a_0 + \mu)^{-1}; Q^{(k-1)} \right\|_0 \right) + \|f_1 (a_0 + \mu)^{-1}; Q^{(2)}\|_0 +$$

$$+ \|\psi_2; Q \cap (t = t_2)\|_0 .$$

Вважаємо, що при $k = p$ правильна нерівність

$$\left\| v; \bigcup_{k=0}^{P} Q^{(k)} \right\|_0 \leq \sum_{k=1}^{P} \prod_{\lambda=k}^{P} (1 + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0) \times$$

$$\times \left(\|\psi_{k-1}; Q \cap (t = t_{k-1})\|_0 + \left\| f_1 (a_0 + \mu)^{-1}; Q^{(k-1)} \right\|_0 \right) +$$

$$+ \left\| f_1 (a_0 + \mu)^{-1}; Q^{(P)} \right\|_0 + \|\psi_P; Q \cap (t = t_P)\|_0 .$$

При $k = P+1$, враховуючи (4.14), (4.16), (4.20), одержимо

$$\left\| v; \bigcup_{k=0}^{P+1} Q^{(k)} \right\|_0 \leq (1 + \|b_{P+1}; Q \cap (t = t_{P+1})\|_0) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=1}^{P} \sum_{\lambda=k}^{P} (1 + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_k)\|_0) \left(\|\psi_{k-1}; Q \cap (t = t_{k-1})\|_0 + \right. \right.$$

$$\left. + \left\| f_1 (a_0 + \mu)^{-1}; Q^{(k-1)} \right\|_0 \right) + \left\| f_1 (a_0 + \mu)^{-1}; Q^{(P)} \right\|_0 +$$

$$+ \|\psi_P; Q \cap (t = t_p)\|_0 + \left\| f_1 (a_0 + \mu)^{-1}; Q^{(P+1)} \right\|_0 +$$

$$+ \|\psi_{P+1}; Q \cap (t = t_{P+1})\|_0 = \sum_{k=1}^{P+1} \sum_{\lambda=k}^{P+1} (1 + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_k)\|_0) \times$$

$$\times \left(\|\psi_{k-1}; Q \cap (t = t_{k-1})\|_0 + \left\| f_1 (a_0 + \mu)^{-1}; Q^{(k-1)} \right\|_0 \right) +$$

$$+ \left\| f_1 (a_0 + \mu)^{-1}; Q^{(P+1)} \right\|_0 + \|\psi_{P+1}; Q \cap (t = t_{P+1})\|_0 .$$

Отже, для розв'язку задачі (4.8)–(4.11) правильна оцінка (4.12).

Для знаходження оцінки (4.5) розв'язку задачі (4.1)–(4.4) в областях $Q^{(k)}$ зробимо заміну (4.7). Одержимо

$$\partial_t v - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} v + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\partial_{x_i} v +$$

$$+\left(a_0(t,x)+\mu\right) v = f_1(t,x), \tag{4.22}$$

$$v\left(t_k+0,x\right) = G^{(k)}\left(t_k,x\right), \quad \left(t_k,x\right) \in Q \cap \left(t=t_k\right), \tag{4.23}$$

$$v|_{\Gamma^{(k)}} = 0, \tag{4.24}$$

де $f_1(t,x) = f(t,x)e^{-\mu t} - e^{-\mu t}(L\tilde{g})(t,x)$,

$$G^{(0)}\left(t_0,x\right) = \varphi(x)e^{-\mu t_0} - \tilde{g}\left(t_0,x\right)e^{-\mu t_0},$$

$$G^{(k)}\left(t_k,x\right) = \left(1+b_k(x)\right) u\left(t_k-0,x\right) +$$

$$+\left[\varphi_k(x) - \tilde{g}\left(t_k+0,x\right) + \left(1+b_k(x)\right)\tilde{g}\left(t_k-0,x\right)\right] e^{-\mu t_k},$$

$$\Gamma^{(k)} = Q^{(k)} \cap \Gamma^{(k)}.$$

В області $Q^{(k)}$ розв'язок крайової задачі (4.22)–(4.24) існує і єдиний в просторі $H^{2+\alpha}\left(Q^{(k)}\right)$ і для нього згідно теореми 3.3, правильна оцінка

$$\left\| u; Q^{(k)} \right\|_{2+\alpha} \leq$$

$$\leq \left(\left| f_1; Q^{(k)} \right|_{\alpha} + \left\| G^{(k)}; Q^{(k)} \cap \left(t=t_k\right) \right\|_{2+\alpha} \right). \tag{4.25}$$

Для доведення нерівності (4.5) використовуємо оцінки (4.25) і метод математичної індукції. При $k=0$, враховуючи оцінку (4.25), маємо

$$\left\| u; Q^{(0)} \right\|_{2+\alpha} \leq c \left(\left\| f_1; Q^{(0)} \right\|_{\alpha} + \left\| G^{(0)}; D \right\|_{2+\alpha} \right). \tag{4.26}$$

Враховуючи зображення для функцій $f_1(t,x)$ і $G^{(0)}\left(t_0,x\right)$, знаходимо оцінки

$$\left\|f_1;Q^{(0)}\right\|_\alpha \leq c\left(\left\|f;Q^{(0)}\right\|_\alpha+\left\|\tilde{g};Q^{(0)}\right\|_{2+\alpha}\right), \qquad (4.27)$$

$$\left\|G^{(0)};D\right\|_{2+\alpha} \leq c\left(\|\varphi_0;D\,\|_{2+\alpha}+\|\,\tilde{g};D\|_{2+\alpha}\right).$$

Підставляючи (4.27) у (4.26), будемо мати оцінку

$$\left\|u;Q^{(0)}\right\|_{2+\alpha}<$$

$$<c\left(\left\|f;Q^{(0)}\right\|_\alpha+\|\varphi_0;D\|_{2+\alpha}+\left\|\tilde{g};Q^{(0)}\right\|_{2+\alpha}\right). \qquad (4.28)$$

При $k=1$, враховуючи нерівність (4.25), маємо оцінку

$$\left\|u;Q^{(1)}\right\|_{2+\alpha}\leq$$

$$\leq c\left(\left\|f_1;Q^{(1)}\right\|_\alpha+\left\|G^{(1)};Q^{(1)}\cap(t=t_1)\right\|_{2+\alpha}\right). \qquad (4.29)$$

Враховуючи зображення для функцій $f_1(t,x)$ і $G^{(1)}\left(t_1,x\right)$ знаходимо оцінки

$$\left\|f_1;Q^{(1)}\right\|_\alpha \leq \mathrm{c}\left(\left\|f;Q^{(1)}\right\|_\alpha+\left\|\tilde{g};Q^{(1)}\right\|_{2+\alpha}\right) \qquad (4.30)$$

$$\left\|G^{(1)};Q^{(1)}\cap(t=t_1)\right\|_{2+\alpha}\leq c\left(1+\sup_{Q^{(1)}\cap(t=t_1)}|b_1(x)|\right)\times$$

$$\times\left(\left\|u;Q^{(0)}\right\|_{2+\alpha}\right)+\left\|\varphi_0;Q^{(1)}\cap(t=t_1)\right\|_{2+\alpha}+$$

$$+\left\|\tilde{g};Q^{(1)}\cap(t=t_1)\right\|_{2+\alpha}\leq c\left(1+\|b_1;Q\cap(t=t_1)\|_0\right)\times$$

$$\times\left(\left\|f;Q^{(0)}\right\|_\alpha+\|\varphi_0;D\|_{2+\alpha}+\left\|\tilde{g};Q^{(0)}\right\|_{2+\alpha}\right)+$$

$$+\left\|\varphi_1; Q^{(1)} \cap (t=t_1)\right\|_{2+\alpha} + \left\|\tilde{g}; Q^{(1)} \cap (t=t_1)\right\|_{2+\alpha}. \qquad (4.31)$$

Підставляючи (4.30), (4.31) в (4.29) і враховуючи (4.28), маємо

$$\left\|u; Q^{(0)} \cup Q^{(1)}\right\|_{2+\alpha} \leq c\left(1+\|b_1; Q\cap(t=t_1)\|_0\right) \times$$

$$\times\left(||f; Q^{(0)}\,\|_\alpha + \|\,\varphi_0; D\,\|_{2+\alpha} + \|\,\tilde{g}; Q^{(0)}\|_{2+\alpha}\right) + \left\|f; Q^{(1)}\right\|_\alpha +$$

$$+\left\|\varphi_1; Q^{(1)} \cap (t=t_1)\right\|_{2+\alpha} + \|\tilde{g}; Q^{(1)}\Big|_{2+\alpha}. \qquad (4.32)$$

При $k=2$ одержимо

$$\left\|u; Q^{(2)}\right\|_{2+\alpha} \leq$$

$$\leq c\left(\left\|f_1; Q^{(2)}\right\|_\alpha + \left\|G^{(2)}; Q^{(2)} \cap (t=t_2)\right\|_{2+\alpha}\right). \qquad (4.33)$$

Для оцінки норм функцій f_1 і $G^{(2)}$, враховуючи їх зображення, маємо

$$\left\|f_1; Q^{(2)}\right\|_\alpha \leq c\left(\left\|f; Q^{(2)}\right\|_\alpha + \left\|\tilde{g}; Q^{(2)}\right\|_{2+\alpha}\right), \qquad (4.34)$$

$$\left\|G^{(2)}; Q^{(2)} \cap (t=t_2)\right\|_{2+\alpha} \leq c\left(1+\|b_2; Q\cap(t=t_2)\|_0\right),$$

$$\Big\{\left(1+\|b_1; Q\cap(t=t_1)\|_0\right)\left(\left\|f; Q^{(0)}\right\|_\alpha + \|\varphi_0; D\|_{2+\alpha} +\right.$$

$$\left.+\left\|\tilde{g}; Q^{(0)}\right\|_{2+\alpha}\right) + \left\|f; Q^{(1)}\right\|_\alpha + \left\|\varphi_1; Q^{(1)} \cap (t=t_1)\right\|_{2+\alpha} +$$

$$+\left\|\tilde{g}; Q^{(1)}\right\|_{2+\alpha}\Big\} + \left\|f; Q^{(2)}\right\|_\alpha + \left\|\varphi_2; Q^{(2)} \cap (t=t_2)\right\|_{2+\alpha} +$$

$$+\left\|\tilde{g}; Q^{(2)}\right\|_{2+\alpha}. \qquad (4.35)$$

Підставляючи (4.34), (4.35) в (4.33), маємо

$$\left\|u; Q^{(0)} \cup Q^{(1)} \cup Q^{(2)}\right\|_{2+\alpha} \leq \left\{\sum_{k=1}^{2} \sum_{\lambda=1}^{2} (1 + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)\|_0) \times\right.$$

$$\times \left(\|\varphi_{k-1}; Q \cap (t = t_{k-1})\|_{2+\alpha} + \left\|f; Q^{(k-1)}\right\|_\alpha + \left\|\tilde{g}; Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha}\right) +$$

$$\left. + \|\varphi_2; Q \cap (t = t_2)\|_{2+\alpha} + \left\|f; Q^{(2)}\right\|_\alpha + \left\|\tilde{g}; Q^{(2)}\right\|_{2+\alpha}\right\}. \quad (4.36)$$

Вважаємо, що при $k = r$ правильна нерівність

$$\left\|u; \bigcup_{k=0}^{r} Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} \leq c \left\{\sum_{k=1}^{r} \prod_{\lambda=k}^{r} (1 + \|b_\lambda; Q \cap (t = t_\lambda)|_0) \times\right.$$

$$\times \left(\|\varphi_{k-1}; Q \cap (t = t_{k-1})\|_{2+\alpha} + \left\|f; Q^{(k-1)}\right\|_\alpha + \left\|\tilde{g}; Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha}\right) +$$

$$+ \|\varphi_r; Q \cap (t = t_r)\|_{2+\alpha} + \left\|\tilde{g}; Q^{(r)}\right\|_{2+\alpha} + \left\|f; Q^{(r)}\right\|_\alpha. \quad (4.37)$$

При $k = r + 1$, враховуючи (4.25), маємо

$$\left\|u; Q^{(r+1)}\right\|_{2+\alpha} \leq c \left(\left\|f_1; Q^{(r+1)}\right\|_\alpha + \right.$$

$$\left. + \left\|G^{(r+1)}; Q^{(r+1)} \cap \left(t = t_{(r+1)}\right)\right\|_{2+\alpha}\right). \quad (4.38)$$

Оскільки

$$\left\|f_1; Q^{(r+1)}\right\|_\alpha \leq c \left(\left\|f; Q^{(r+1)}\right\|_\alpha + \left\|\tilde{g}; Q^{(r+1)}\right\|_{2+\alpha}\right), \quad (4.39)$$

$$\left\|G^{(r+1)}; Q^{(r+1)} \cap \left(t = t_{(r+1)}\right)\right\|_{2+\alpha} \leq$$

$$\leq c \left(1 + \left\|b_{(r+1)}; Q \cap \left(t = t_{(r+1)}\right)\right\|_0\right) \left\|u; \bigcup_{k=0}^{r} Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha} +$$

$$+\left\|f;Q^{(r+1)}\right\|_{\alpha}+\left\|\tilde{g};Q^{(r+1)}\cap\left(t=t_{(r+1)}\right)\right\|_{2+\alpha}+$$

$$\|\varphi_{r+1};Q\cap(t=t_{r+1})\|_{2+\alpha}\,, \tag{4.40}$$

то, підставляючи (4.37), (4.39), (4.40) у (4.38), одержимо

$$\left\|u;\bigcup_{k=0}^{r+1}Q^{(k)}\right\|_{2+\alpha}\leq c\left\{\sum_{k=1}^{r+1}\prod_{\lambda=k}^{r+1}\left(1+\|b_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_0\right)\times\right.$$

$$\times\left(\|\varphi_{k-1};Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+\left\|f;Q^{(k-1)}\right\|_{\alpha}+\left\|\tilde{g};Q^{(k-1)}\right\|_{2+\alpha}\right)+$$

$$+\|\varphi_{r+1};Q\cap(t=t_{r+1})\|_{2+\alpha}+\left\|\tilde{g};Q^{(r+1)}\right\|_{2+\alpha}+\left\|f;Q^{(r+1)}\right\|_{\alpha}.$$

Отже, розв'язок задачі (4.1)–(4.4) існує, єдиний і для нього правильна нерівність (4.5).

§4.3. Задача з косою похідною та імпульсною дією для параболічних рівнянь

Постановка задачі. Основні обмеження. Нехай D обмежена область простору R^n з межею ∂D, $t_0,t_1,\ldots,t_{N+1}$ – фіксовані додатні числа, $t_0<t_1<\ldots<t_{N+1}$. В області $Q=[t_0,t_{N+1})\times D$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t\neq t_\lambda$, $\lambda\in\{1,\ldots,N\}$, $x\in D$ задовольняє рівняння

$$(Lu)(t,x)=f(t,x), \tag{4.1}$$

умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x)=\varphi_0(x), \tag{4.2}$$

$$u(t_\lambda+0,x)-u(t_\lambda-0,x)=d_\lambda(x)u(t_\lambda-0,x)+\varphi_\lambda(x) \tag{4.3}$$

та крайову умову

$$Bu|_\Gamma=\lim_{x\to z\in\partial D}\left(\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+b_0(t,x)u\right)=g(t,x), \tag{4.41}$$

де $\Gamma = [t_0, t_{N+1}) \times \partial D$.

Щодо задачі (4.1)–(4.3), (4.41) вважаємо виконаними умови:

А) рівняння (4.1) рівномірно параболічне, коефіцієнти $a_{ij} \in H^{\alpha}(Q)$, $a_i \in H^{\alpha}(Q)$, $a_0 \in H^{\alpha}(Q)$, $d_{\lambda}(x) \in H^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_{\lambda}))$;

Б) функції $f \in H^{\alpha}(Q)$, $\varphi_0 \in H^{2+\alpha}(D)$, $\varphi_{\lambda}(x) \in H^{2+\alpha}(Q \cap (t = t_{\lambda}))$;

В) вектор $\vec{b} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ утворює з напрямком зовнішньої нормалі $\vec{n}$ до ∂D в точці $P(t, x) \in \Gamma$ кут менший за $\frac{\pi}{2}$, $b_i \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $b_0 \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\partial D \in C^{2+\alpha}$, $g \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $g(t_{\lambda} + 0, x)|_{\partial D} = [(1 + d_{\lambda}(x))g(t_{\lambda} - 0, x) + B\varphi_{\lambda}(x)]\,|_{\partial D}$, $\left.\left[\sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\frac{\partial d_{\lambda}(x)}{\partial x_i}\right]\right|_{\partial D} = 0$.

Побудова розв'язку крайової задачі з імпульсною дією та його оцінка

Справедлива така теорема.

Теорема 4.3. *Нехай для задачі (4.1)–(4.3), (4.41) виконані умови А) – В). Тоді єдиний розв'язок задачі (4.1)–(4.3), (4.41) в просторі $H^{2+\alpha}(N; Q)$ визначається формулами*

$$u(t, x) = u_k(t, x), \quad (t, x) \in Q^{(k)}, \ k \in \{0, 1, \ldots, N\},$$

$$u_0(t, x) = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{D} G_1^{(0)}(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi + \int\limits_{D} G_1^{(0)}(t, t_0, x, \xi) \times$$

$$\times \varphi_0(\xi) d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\partial D} G_2^{(0)}(t, \tau, x, \xi) \psi(\tau, \xi) d_{\xi} S, \qquad (4.42)$$

$$u_k(t, x) = \int\limits_{t_k}^{t} d\tau \int\limits_{D} G_1^{(k)}(t, \tau, x, \xi) f(\tau, \xi) d\xi +$$

$$+\int_{t_k}^{t} d\tau \int_{\partial D} G_2^{(k)}(t,\tau,x,\xi)\psi(\tau,\xi)d_\xi S+$$

$$+\int_D G_1^{(k)}(t,t_k,x,\xi)(1+d_k(\xi))u_{k-1}(t_k-0,\xi)d\xi$$

і для розв'язку правильна нерівність

$$\|u;N,Q\|_0 = \left\|u_N;Q^{(N)}\right\|_0 \le c\left\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}(1+\|d_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_0)\times\right.$$

$$\times\left(\|\varphi_{k-1};Q\cap(t=t_{k-1})\|_0 + \left\|f;Q^{(k-1)}\right\|_0 + \left\|\psi;\Gamma^{(k-1)}\right\|_0\right)+$$

$$\left.+\left\|f;Q^{(N)}\right\|_0 + \left\|\psi;\Gamma^{(N)}\right\|_0 + \|\varphi_N;Q\cap(t=t_N)\|_0\right\}. \qquad (4.43)$$

де $(G_1^{(k)}, G_2^{(k)})$ *– компоненти функції Гріна крайової задачі з косою похідною в області* $Q^{(k)}$, $Q^{(k)} = [t_k,t_{k+1})\times D$, $k\in\{0,1,\dots,N\}$, $\Gamma^{(k)}=[t_k,t_{k+1})\times\partial D$.

Доведення. У циліндрі $Q^{(0)}=[t_0,t_1)\times D$ розглянемо задачу знаходження розв'язку рівняння (4.1) з умовами (4.2) і (4.41). Розв'язок будемо шукати у вигляді суми

$$u_0(t,x)=v_0(t,x)+w_0(t,x),$$

де $v_0(t,x)$ – розв'язок задачі Коші

$$(Lv_0)(t,x)=f(t,x),$$

$$v_0(t_0+0,x)=\varphi_0(x),$$

і w – розв'язок крайової задачі

$$\left.\begin{array}{c} Lw_0=0,\\ w_0|_{t=t_0}=0,\\ Bw_0|_{\Gamma^{(0)}}=g(t,x)-Bv_0|_{\Gamma^{(0)}}\equiv g_0(t,z). \end{array}\right\}$$

Розв'язок задачі Коші визначається за формулою

$$v_0(t,x) = \int\limits_D Z_0(t,t_0,x,\xi)\varphi_0(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_D Z_0(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi \equiv Z_0 * \varphi_0 + Z_0 ** f,$$

де $\varphi \in H^0(R^n)$, $f \in H^\alpha(Q^{(0)})$.

Розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді потенціала простого шару

$$w_0(t,x) = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\partial D} Z_0(t,\tau,x,\xi)\mu(\tau,\xi)dS_\xi \equiv Z_0 \circledast \mu.$$

Задовольнивши крайову умову крайової задачі та скориставшись рівнянням стрибка

$$\lim_{x\to Z\in\partial D}(Bw_0)(t,x) = \pm\frac{1}{2}\mu(t,z) +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\partial D} B(t,z)Z_0(t,\tau,z,\xi)\mu(\tau,\xi)dS_\xi,$$

отримаємо:

$$\frac{1}{2}\mu(t,z) + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\partial D} B(t,z)Z_0(t,\tau,z,\xi)\mu(\tau,\xi)dS_\xi = g_0(t,z),$$

$$\mu(t,z) = -2\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\partial D} B(t,z)Z_0(t,\tau,z,\xi)\mu(\tau,\xi)dS_\xi +$$

$$+2g_0(t,z). \tag{4.44}$$

Отримали інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду з ядром

$$K(t,\tau,z,\xi) = -2B(t,z)Z_0(t,\tau,z,\xi).$$

Побудуємо резольвенту

$$R(t,\tau,z,\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t,\tau,z,\xi),$$

де $K_1(t,\tau,z,\xi) \equiv K(t,\tau,z,\xi)$,

$$K_m(t,\tau,z,\xi) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\partial D} K(t,\beta,z,y)K_{m-1}(\beta,\tau,y,\xi)dS_y,$$

$$m = 2, 3, \ldots .$$

В точках поверхні S ядро K_1 задовольняє наступну нерівність

$$|K_1(t,\tau,z,\xi)| \leq C_1(t-\tau)^{-\frac{n+1-\alpha}{2}} \cdot e^{-C_1\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}, \qquad (4.45)$$

якщо $\partial D \in C^{(2+\alpha)}$, а коефіцієнти рівняння рівномірно Гельдерові.

Оцінимо ядро K_2:

$$K_2(t,\tau,z,\xi) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\partial D} K_1(t,\beta,z,y)K_1(\beta,\tau,y,\xi)dS_y,$$

$$|K_2(t,\tau,z,\xi)| = \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\partial D} |K_1(t,\beta,z,y)| \cdot |K_1(\beta,\tau,y,\xi)|\, dS_y \leq$$

$$\leq C_1^2 \int_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{n+1-\alpha}{2}}(\beta-\tau)^{\frac{n+1-\alpha}{2}}} \cdot \int_{\partial D} e^{-\frac{|z-y|^2}{t-\beta}} e^{-C_1\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}} dS_y =$$

$$= C_1^2 \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-\alpha}{2}}(\beta-\tau)^{\frac{2-\alpha}{2}}} \cdot \int \frac{e^{-C_1\frac{|z-y|^2}{t-\beta}}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{e^{-C_1\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}}}{(\beta-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} dS_y \equiv$$

$$\equiv C_1^2 \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-\alpha}{2}}(\beta-\tau)^{\frac{2-\alpha}{2}}} \cdot H(t,\tau,z,\xi),$$

де

$$H(t,\tau,z,\xi) = \int\limits_{\partial D} \frac{e^{-C_1\frac{|z-y|^2}{t-\beta}}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{e^{-C_1\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}}}{(\beta-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} dS_y.$$

В обох експонентах тип спадання $C_1 = (C_1 - \varepsilon) + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < C_1$. Тоді, об'єднавши експоненти з типом $(C_1 - \varepsilon)$, оцінимо їх за допомогою нерівності

$$f(y) = \frac{|z-y|^2}{t-\beta} + \frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau} \geq \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}, \quad (z,\xi) \in S. \tag{4.46}$$

Отже,

$$H(t,\tau,z,\xi) = \int\limits_{\partial D} \frac{e^{-(C_1-\varepsilon)\left(\frac{|z-y|^2}{t-\beta}+\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}\right)} e^{-\varepsilon\left(\frac{|z-y|^2}{t-\beta}+\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}\right)}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2}}(\beta-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} dS_y \leq$$

$$\leq \int\limits_{\partial D} \frac{e^{-\varepsilon\left(\frac{|z-y|^2}{t-\beta}+\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}\right)}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (\beta-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} dS_y \cdot e^{-(C_1-\varepsilon)\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Розглянемо два випадки:

а) якщо $\beta \in (\tau, t_1)$, де $t_1 = \dfrac{t+\tau}{2}$, то $t - \beta \geq t - t_1 = t - \dfrac{t+\tau}{2} = \dfrac{t-\tau}{2}$. Тоді

$$H(t,\tau,z,\xi) \leq \frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{(t-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} e^{-(C_1-\varepsilon)\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} \int \frac{e^{-\varepsilon\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}}{(\beta-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} dS_y \leq$$

$$\leq C^*(t-\tau)^{-\frac{n-1}{2}} e^{-C_2\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}, \quad C_2 = C_1 - \varepsilon;$$

б) якщо $\beta \in (t_1, t)$, де $t_1 = \dfrac{t+\tau}{2}$, то $\beta - \tau \geq t_1 - \tau = \dfrac{t+\tau}{2} - \tau = \dfrac{t-\tau}{2}$.

Далі оцінюємо $(\beta - \tau)$ через $(t - \tau)$, а інтеграл, що залишиться – збіжний. Тобто отримаємо на цьому проміжку таку ж оцінку для $H(t, \tau, z, \xi)$.

Продовжимо оцінку другого ядра:

$$|K_2(t,\tau,z,\xi)| \leq C_1^2 C^*(t-\tau)^{-\frac{n-1}{2}} e^{-C_2\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} \times$$

$$\times \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-\alpha}{2}} : (\beta-\tau)^{\frac{2-\alpha}{2}}}.$$

В інтегралі зробимо заміну:

$$t - \beta = \eta(t-\tau) \Rightarrow \beta = t - \eta(t-\tau), \quad d\beta = -(t-\tau)d\eta.$$

β	τ	t
η	1	0

Тоді отримаємо:

$$|K_2(t,\tau,z,\xi)| \leq C_1^2 C^*(t-\tau)^{-\frac{n-1}{2}} e^{-C_2\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} \times$$

$$\times \int\limits_{0}^{1} \frac{(t-\tau)d\eta}{\eta^{\frac{2-\alpha}{2}}(t-\tau)^{\frac{2-\alpha}{2}\cdot 2} \cdot (1-\eta)^{\frac{2-\alpha}{2}}} =$$

$$= C_1^2 C^*(t-\tau)^{-\frac{n-1}{2}} e^{-C_2\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} (t-\tau)^{\alpha-1} \int\limits_{0}^{1} \eta^{\frac{\alpha}{2}-1}(1-\eta)^{\frac{\alpha}{2}-1} d\eta =$$

$$= C_1^2 \cdot C^*(t-\tau)^{-\frac{n+1-2\alpha}{2}} e^{-C_2\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} B\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2}\right).$$

Отже,

$$|K_2(t,\tau,z,\xi)| \le C_1^2 C^* B\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}\right)(t-\tau)^{-\frac{n+1-2\alpha}{2}} e^{-C_2\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Оцінимо третє ядро:

$$|K_3(t,\tau,z,\xi)| = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\partial D} |K_1(t,\beta,z,y)|\cdot|K_2(\beta,\tau,y,\xi)|\, dS_y \le$$

$$\le C_1^3 C^* B\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}\right)\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{n+1-\alpha}{2}}(\beta-\tau)^{\frac{n+1-2\alpha}{2}}}\times$$

$$\times\int\limits_{\partial D} e^{-C_1\frac{|z-y|^2}{t-\beta}} e^{-C_2\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}} dS_y.$$

Далі, як і при оцінці $K_2(t,\tau,z,\xi)$ в поверхневому інтегралі представимо $C_1-\varepsilon=(C_1-2\varepsilon)+\varepsilon$ і скористаємося нерівністю (4.3). Будемо мати, що

$$|K_3(t,\tau,z,\xi)| = C_1^3 C^* B\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}\right)\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-\alpha}{2}}(\beta-\tau)^{\frac{2-2\alpha}{2}}}\times$$

$$\times\int\limits_{\partial D}\frac{e^{-(C_1-2\varepsilon)\left(\frac{|z-y|^2}{t-\beta}+\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}\right)} e^{-2\varepsilon\frac{|z-y|^2}{t-\beta}} e^{-\varepsilon\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2}}(\beta-\tau)^{\frac{n-1}{2}}} dS_y \le$$

$$\le C_1^3 C^* B\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}\right)\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-\alpha}{2}}(\beta-\tau)^{\frac{2-2\alpha}{2}}} C^*(t-\tau)^{-\frac{n-1}{2}}\times$$

$$\times e^{-(C_1-2\varepsilon)\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

В інтегралі по β робимо заміну: $t-\beta=\eta(t-\tau)$. Тоді

$$|K_3(t,\tau,z,\xi)| = C_1^3 {C^*}^2 B\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}\right)\times$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{(t-\tau)d\eta}{\eta^{1-\frac{\alpha}{2}}(t-\tau)^{1-\frac{\alpha}{2}+1-\alpha}(1-\eta)^{1-\frac{\alpha}{2}}}(t-\tau)^{-\frac{n-1}{2}}\times$$

$$\times e^{-(C_1-2\varepsilon)\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} = C_1^3 C^{*^2} B\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}\right) B\left(\frac{\alpha}{2};\frac{2\alpha}{2}\right)\times$$

$$\times(t-\tau)^{-\frac{1+n-3\alpha}{2}} e^{-(C_1-2\varepsilon)\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Отже, за індукцією можна встановити нерівність для будь-якого ядра:

$$|K_m(t,\tau,z,\xi)| \le C^m C^{*m-1} B\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\alpha}{2}\right)\cdot B\left(\frac{\alpha}{2};\frac{2\alpha}{2}\right)\cdot\ldots\times$$

$$\times B\left(\frac{\alpha}{2};\frac{(m-1)\alpha}{2}\right)(t-\tau)^{-\frac{1+n-m\alpha}{2}} e^{-(C_1-m\varepsilon)\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Якщо взяти $m_0 = \left[\frac{n+1}{2}\right]+1$, то степінь $(t-\tau)$ вже буде невід'ємним, тобто ядро вже не буде мати особливості при $t=\tau$.

Позначимо $C_{m_0} = C_1 - (m_0-1)\,\varepsilon$, тоді

$$|K_{m_0}(t,\tau,z,\xi)| \le A_{m_0} e^{-C_{m_0}\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Оцінимо наступні ядра $K_{m_0+k}(k=1,2,\ldots)$:

$$|K_{m_0+1}(t,\tau,z,\xi)| = |K_1\cdot K_{m_0}| \le C_1 A_{m_0}\int\limits_\tau^t \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-\alpha}{2}}}\times$$

$$\times\int\limits_{\partial D}\frac{e^{-C_1\frac{|z-y|^2}{t-\beta}}}{(t-\beta)^{\frac{n-1}{2}}} e^{-c_{m_0}\frac{|y-\xi|^2}{\beta-\tau}}\,dS_y.$$

Тепер $C_1 = C_{m_0} + (C_1 - C_{m_0})$ і згрупуємо з другою експонентою і за нерівністю (4.3) винесемо її за знак інтегралу:

$$|K_{m_0+1}(t,\tau,z,\xi)| \leq C_1 A_{m_0} C^* \int\limits_{\tau}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2-\alpha}{2}}} e^{-C_{m_0}\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} \leq$$

$$\leq [t-\beta = \eta(t-\tau)] \leq$$

$$\leq C_1 C^* A_{m_0} B\left(\frac{\alpha}{2};1\right) e^{-C_{m_0}\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

За індукцією встановлюється нерівність:

$$|K_{m_0+k}(t,\tau,z,\xi)| \leq$$

$$\leq C_1 C^{*^k} A_{m_0}^k \prod_{j=0}^{k-1} B\left(\frac{\alpha}{2}; 1 + \frac{j\alpha}{2}\right) e^{-c_{m_0}\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} (t-\tau)^{\frac{k\alpha}{2}}.$$

Залишається довести, що числовий ряд в оцінці є збіжним. Для цього потрібно від B – функції перейти до Γ – функції.

$$C_1 C^{*k} A_{m_0}^k \prod_{j=0}^{k-1} B\left(\frac{\alpha}{2}; 1 + \frac{j\alpha}{2}\right) = C_1 C^{*^k} A_{m_0}^k \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{2\alpha}{2}\right)} \cdot \ldots \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{(k+1)\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{k\alpha}{2}\right)} =$$

$$= C_1 C^{*^k} A_{m_0}^k \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)^k}{\Gamma\left(1+\frac{k\alpha}{2}\right)}.$$

Отже,

$$|R(t,\tau,z,\xi)| \leq \sum_{m=1}^{m_0} A_m (t-\tau)^{-\frac{n+1-m\alpha}{2}} e^{-(C_m - m\varepsilon)\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}} +$$

$$+C_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(A_{m_0}C^*\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\right)^k}{\Gamma\left(1+\frac{k\alpha}{2}\right)}e^{-c_{m_0}\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}\le$$

$$\le C(t-\tau)^{-\frac{n+1-\alpha}{2}}E\left(A_{m_0}\mathrm{C}^*\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)(t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}}\right)e^{-C_{m_0}\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

При $0<t-\tau<t_1$ резольвента задовольняє таку нерівність:

$$|R(t,\tau,z,\xi)|\le C(t-\tau)^{-\frac{n+1-\alpha}{2}}e^{-C\frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Розв'язок інтегрального рівняння (4.1) знаходимо за формулою:

$$\mu(t,z)=2g_0(t,z)+2\int_{t_0}^{t}d\tau\int_{\partial D}R(t,\tau,z,\xi)g_0(\tau,\xi)dS_\xi.$$

Підставимо в $w(t,x)$:

$$w(t,x)=Z_0\circledast(2g_0+2R\circledast g_0).$$

Тоді розв'язок набуде вигляду:

$$u_0(t,x)=Z_0*\varphi+Z_0**f+Z_0\circledast*(2g_0+2R\circledast g_0)=$$

$$=Z_0*\varphi+Z_0**f+Z_0\circledast*(2g-2B(Z_0*\varphi+Z_0**f))+$$

$$+Z_0\circledast(2R\circledast(g-B(Z_0*\varphi+Z_0**f)))=Z_0*\varphi+Z_0**f+2Z_0\circledast g-$$

$$-2Z_0\circledast(BZ_0*\varphi+BZ_0**f)+Z_0\circledast(2R\circledast*g-2R\circledast*(BZ_0*\varphi+$$

$$+BZ_0**f))=Z_0*\varphi+Z_0**f+2Z_0\circledast g-(2Z_0\circledast BZ_0)*\varphi-$$

$$-(2Z_0\circledast BZ_0)**f+(2Z_0\circledast R)\circledast*g-(2Z_0\circledast R\circledast BZ_0)*\varphi-$$

$$-(2Z_0\circledast R\circledast BZ_0)**f=(Z_0-2Z_0\circledast(BZ_0+R\circledast*BZ_0))*\varphi+$$

$$+(Z_0-2Z_0\circledast(BZ_0+R\circledast BZ_0))**f+2(Z_0+Z_0\circledast R)\circledast g\equiv$$

$$\equiv\int_D G_1^{(0)}(t,0,x,\xi)\varphi_0(\xi)d\xi+\int_{t_0}^{t}d\tau\int_D G_1^{(0)}(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\partial D} G_2^{(0)}(t,\tau,x,\xi)g(\tau,\xi)dS_\xi.$$

Отже,

$$u_0(t,x) = \int\limits_D G_1^{(0)}(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_{t^{(0)}}^{t} d\tau \int\limits_D G_1^{(0)}(t,\tau,x,\xi)\times$$

$$\times f(\tau,\xi)d\xi + \int\limits_{t^{(0)}}^{t} d\tau \int\limits_{\partial D} G_2^{(0)}(t,\tau,x,\xi)g(\tau,\xi)dS_\xi.$$

$$u_0(t_1-0,x) = \int\limits_D G_1^{(0)}(t_1,t_0,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \int\limits_D G_1^{(0)}(t_1,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1} d\tau \int\limits_{\partial D} G_2^{(0)}(t,\tau,x,\xi)g(\tau,\xi)d\xi.$$

У циліндрі $Q^{(k)} = [t_k, t_{k+1}) \times D$ розглянемо рівняння (4.1) з умовами (4.41) і

$$u_k(t_k+0,x) = (1+d_k(x))u_{k-1}(t_k-0,x) + \varphi_k(x) \equiv \Phi_k(x).$$

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді суми розв'язку відповідної задачі Коші

$$(Lv_k)(t,x) = f(t,x),$$

$$v_k(t_k+0,x) = \Phi_k(x)$$

та розв'язку крайової задачі:

$$Lw_k = 0,$$

$$w_k(t_k+0,x)=0,$$

$$Bw_k|_{\Gamma^{(k)}}=(g(t,x)-Bv_k)|_{\Gamma^{(k)}}\equiv g_k(t,x).$$

Відповідно розв'язок задачі Коші визначається за формулою:

$$v(t,x)=\int\limits_D Z_1\left(t,t_k,x,\xi\right)\left(\varphi_1\left(t_1,\xi\right)+\left(1+d_k\left(\xi_1\right)\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, u\left(t_k-0,\xi\right)\right)d\xi+\int\limits_{t_k}^{t}d\tau\int\limits_{\Omega}Z_1(t,\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi.$$

Розв'язок крайової задачі шукаємо у вигляді:

$$w(t,x)=\int\limits_{t_k}^{t}d\tau\int\limits_{D}Z_1(t,\tau,x,\xi)\mu_k(\tau,\xi)dS_\xi.$$

Задовольняючи крайову умову, враховуючи рівняння стрибка, отримаємо наступне інтегральне рівняння:

$$\frac{1}{2}\mu_k(t,z)+\int\limits_{t_k}^{t}d\tau\int\limits_{S}B(t,z,D)Z_1(t,\tau,z,\xi)\mu_k(\tau,\xi)dS_\xi=g_k(t,z),$$

$$\mu_k(t,z)=2g_k(t,z)+\int\limits_{t_k}^{t}d\tau\int\limits_{\partial D}K^{(k)}(t,\tau,z,\xi)\mu_k(\tau,\xi)dS_\xi,$$

де $K^{(k)}(t,\tau,z,\xi)=-2B(t,z,D)Z(t,\tau,z,\xi)$, $(t,z)\in\Gamma^{(k)}$ – ядро інтегрального рівняння.

Резольвента має вигляд

$$R_k(t,\tau,z,\xi)=K^{(k)}(t,\tau,z,\xi)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int\limits_{\partial D}K^{(k)}(t,\beta,z,y)K_m^{(k)}(\beta,\tau,y,\xi)dS_y,$$

де $\tau \in (t_k, t)$,

$$K_m^{(k)}(t,\tau,z,\xi) = \int\limits_{\tau}^{t} d\beta \int\limits_{\partial D} K^{(k)}(t,\beta,z,\xi) K_{m-1}^{(k)}(\beta,\tau,y,\xi) dS_y,$$

$$m = 2, 3, \ldots,$$

причому $K_1^{(k)} \equiv K^{(k)}$.

Для ядер $K_m^{(k)}(t,\tau,z,\xi)$, $m = 1, 2, \ldots$, та резольвенти $R(t,\tau,z,\xi)$ правильними є нерівності:

$$\left| K_1^{(\kappa)}(t,\tau,z,\xi) \right| \leq C_1 (t-\tau)^{-\frac{n+1-\alpha}{2}} e^{-C_1 \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}},$$

$$\left| K_2^{(k)}(t,\tau,z,\xi) \right| \leq C_1^2 C^* B\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2}\right) (t-\tau)^{-\frac{n+1-2\alpha}{2}} e^{-C_2 \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left| K_m^{(K)}(t,\tau,z,\xi) \right| \leq C_1^m C^{*m-1} B\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \ldots \cdot B\left(\frac{\alpha}{2}; \frac{(m-1)\alpha}{2}\right) \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\frac{n+1-m\alpha}{2}} e^{-c_m \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}},$$

$$R_k(t,\tau,z,\xi) \leq C (t-\tau)^{-\frac{n+1-\alpha}{2}} E_\alpha \left(A_0 C_0 \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}} \right) \times$$

$$\times e^{-C_{m_0} \frac{|z-\xi|^2}{t-\tau}}.$$

Розв'язок інтегрального рівняння знаходимо за формулою:

$$\mu_k(t,z) = 2 g_k(t,z) + 2 \int\limits_{t_k}^{t} d\tau \int\limits_{\partial D} R(t,\tau,z,\xi) g_k(\tau,\xi) dS_\xi.$$

Отже, розв'язок має вигляд:

$$u_k(t,x) = \int\limits_{D} G_1^{(k)}(t,t_k,x,\mu) \Bigg(\varphi_k(\mu) + (1 + d_k(\mu)) \times$$

$$\times \left[\int\limits_D G_1^{(k-1)}(t_k, 0, \mu, \xi)\varphi_{k-1}(\xi)d\xi + \right.$$

$$+ \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d\tau \int\limits_D G_1^{(k-1)}(t_k, \tau, \mu, \xi) f(\tau, \xi) d\xi +$$

$$\left. \left. + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} d\tau \int\limits_{\partial D} G_2^{(k-1)}(t_k, \tau, \mu, \xi) g(\tau, \xi) dS_\xi \right] \right) d\mu +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t} d\tau \int\limits_D G_1^{(k)}(t, \tau, x, \mu) f(\tau, \mu) d\mu +$$

$$+ \int\limits_{t_k}^{t} d\tau \int\limits_{\partial D} G_2^{(k)}(t, \tau, x, \mu) f(\tau, \mu) dS_\mu.$$

Враховуючи обмеження на коефіцієнти диференціальних виразів L, B і поверхню ∂D, одержимо оцінку компонент функції Гріна

$$\left| G_\nu^{(k)}(t, \tau, x, \xi) \right| \le c_k (t-\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{ -c\frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\}, \qquad (4.47)$$

$$\nu \in \{1, 2\}.$$

Використовуючи оцінки компонент функції Гріна (4.47), знайдемо оцінку розв'язку задачі (4.1)–(4.3), (4.41).

Маємо

$$\left\| u_0; Q^{(0)} \right\|_0 \le c \left(\left\| f; Q^{(0)} \right\|_0 + \|\varphi_0; R^n\|_0 + \left\| g; \Gamma^{(0)} \right\|_0 \right).$$

Оцінимо розв'язок $u_1(t,x)$, $(t,x) \in Q^{(1)}$, одержимо

$$\left\| u_1; Q^{(1)} \right\|_0 \le$$

$$\leq c\left(\left\|f;Q^{(1)}\right\|_0+\left\|(1+d_1)u_0+\varphi_1;Q^{(1)}\cap(t=t_1)\right\|_0+\right.$$

$$\left.+\left\|g;\Gamma^{(1)}\right\|_0\right)\leq c\Big\{\Big(1+\|d_1;Q^{(1)}\cap(t=t_1)\|_0\Big)\times$$

$$\times\left(\left\|f;Q^{(0)}\right\|_0+\|\varphi_0;R^n\|_0+\left\|g;\Gamma^{(0)}\right\|_0\right)+$$

$$+\left\|f;Q^{(1)}\right\|_0+\left\|\varphi_1;Q^{(1)}\cap(t=t_1)\right\|_0+\left\|g;\Gamma^{(1)}\right\|_0\Big\}.$$

Для розв'язку $u_2(t,x)$, $(t,x)\in Q^{(2)}$ маємо оцінку

$$\left\|u_2;Q^{(2)}\right\|_0\leq c\left(\left\|f;Q^{(2)}\right\|_0+\|(1+d_2)u_1+\varphi_2;Q\cap(t=t_1)\|_0+\right.$$

$$\left.+\left\|g;\Gamma^{(2)}\right\|_0\right)\leq c\left(\sum_{k=1}^{2}\prod_{\lambda=k}^{2}(1+\|d_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_0)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left\|f;Q^{(k-1)}\right\|_0+\|\varphi_{k-1};Q\cap(t=t_{k-1})\|_0+\left\|g;\Gamma^{(k)}\right\|_0\right)\right).$$

Продовжуючи аналогічним чином, отримуємо оцінку (4.43) розв'язку задачі (4.1)–(4.3), (4.41).

Правильна така теорема.

Теорема 4.4. *Нехай для задачі (4.1)–(4.3), (4.41) виконані умови A)–B). Тоді для єдиного розв'язку задачі (4.1)–(4.3), (4.41) в просторі $H^{2+\alpha}(N;Q)$ правильна оцінка*

$$\|u;N;Q\|_{2+\alpha}\leq c\left\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1+\|d_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_{2+\alpha}\right)\times\right.$$

$$\times\left(\left\|f;Q^{(k-1)}\right\|_\alpha+\|\varphi_{k-1};Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+\left\|\psi;\Gamma^{(k-1)}\right\|_{1+\alpha}\right)+$$

$$\left.+\left\|f;Q^{(N)}\right\|_\alpha+\left\|\psi;\Gamma^{(N)}\right\|_{1+\alpha}+\|\varphi_N;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}\right\}. \tag{4.48}$$

Доведення. Для знаходження оцінки розв'язку задачі (4.1)–(4.3), (4.41) в областях $Q^{(k)}$ розглянемо задачу вигляду

$$(Lu)(t,x) = f(t,x), \quad u(t_k+0,x) = \Phi_k(t_k,x),$$
$$(Bu)(t,x)|_{\Gamma^{(k)}} = g(t,x), \tag{4.49}$$

де $\Phi_0(t_0,x) = \varphi_0(x)$,

$$\Phi_k(t_k,x) = (1+d_k(x))u(t_k-0,x) + \varphi_k(x).$$

В області $Q^{(k)}$ розв'язок крайової задачі (4.49) існує і єдиний в просторі $H^{2+\alpha}(Q^{(k)})$ і за теоремою 2.10, для нього правильна оцінка

$$\left\| u; Q^{(k)} \right\|_{2+\alpha} \leq$$
$$\leq c \left(\left\| f; Q^{(k)} \right\|_{\alpha} + \| \Phi_k; Q \cap (t=t_k) \|_{2+\alpha} + \left\| g; \Gamma^{(k)} \right\|_{1+\alpha} \right).$$

При $k=0$ маємо

$$\left\| u; Q^{(0)} \right\|_{2+\alpha} \leq c \left(\left\| f; Q^{(0)} \right\|_{\alpha} + \| \varphi_0; D \|_{1+\alpha} + \left\| g; \Gamma^{(0)} \right\|_{1+\alpha} \right).$$

Враховуючи зображення для функції $\Phi_1(t_1,x)$ знаходимо оцінку при $k=1$

$$\left\| u; Q^{(1)} \right\|_{2+\alpha} \leq$$
$$\leq c \left(\left\| f; Q^{(1)} \right\|_{\alpha} + \| \Phi_1; Q \cap (t=t_1) \|_{2+\alpha} + \left\| g; \Gamma^{(1)} \right\|_{1+\alpha} \right) \leq$$
$$\leq \Bigg(c \left(1 + \| d_1; Q \cap (t=t_1) \|_{2+\alpha}\right) \times$$
$$\times \left(\left\| f; Q^{(0)} \right\|_{\alpha} + \| \varphi_0; D \|_{2+\alpha} + \left\| g; \Gamma^{(0)} \right\|_{1+\alpha} \right) +$$
$$+ \left\| f; Q^{(1)} \right\|_{\alpha} + \| \varphi_1; Q \cap (t=t_1) \|_{2+\alpha} + \left\| g; \Gamma^{(1)} \right\|_{1+\alpha} \Bigg).$$

При $k = 2$ одержимо

$$\left\|u;Q^{(2)}\right\|_{2+\alpha} \le c\Bigg\{\left(1+\|d_2;Q\cap(t=t_2)\|_{2+\alpha}\right)\left\|u;Q^{(1)}\right\|_{2+\alpha}+$$

$$+\left\|f;Q^{(2)}\right\|_{\alpha}+\|\varphi_2;Q\cap(t=t_2)\|_{2+\alpha}+\left\|g;\Gamma^{(2)}\right\|_{1+\alpha}\Bigg\} \le$$

$$\le c\left(\sum_{k=1}^{2}\prod_{\lambda=k}^{2}\left(1+\|d_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_{2+\alpha}\right)\times\right.$$

$$\times\left(\|\varphi_{k-1};Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}+\left\|f;Q^{(k-1)}\right\|_{\alpha}+\left\|g;\Gamma^{(k-1)}\right\|_{1+\alpha}\right)+$$

$$+\|\varphi_2;Q\cap(t=t_2)\|_{2+\alpha}+\left\|f;Q^{(2)}\right\|_{\alpha}+\left\|g;\Gamma^{(2)}\right\|_{1+\alpha}\Bigg\}.$$

Продовжуючи оцінювати розв'язок задачі в областях $Q^{(k)}$, одержимо

$$\|u;N;Q\|_{2+\alpha} \le \left\|u;Q^{(N)}\right\|_{2+\alpha} \le$$

$$\le c\left\{\sum_{k=1}^{N}\prod_{\lambda=k}^{N}\left(1+\|d_\lambda;Q\cap(t=t_\lambda)\|_{2+\alpha}\right)\times\right.$$

$$\times\left(\left\|f;Q^{(k-1)}\right\|_{\alpha}+\left\|\psi;\Gamma^{(k-1)}\right\|_{1+\alpha}+\|\varphi_{k-1};Q\cap(t=t_{k-1})\|_{2+\alpha}\right)+$$

$$\left.+\left\|f;Q^{(N)}\right\|_{\alpha}+\left\|\psi;\Gamma^{(N)}\right\|_{1+\alpha}+\|\varphi_N;Q\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha}\right\}.$$

§4.4. Задача Коші з імпульсною дією для параболічного рівняння другого порядку

В області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times R^n$ розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $t \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1,2,\ldots,N\}$, задовольняє рівняння

$$u_t - \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t)u_{x_i} +$$

$$+a(x,t)u = f(x,t), \tag{4.50}$$

умови за змінною t:

$$u\,(t_0+0,x) = \varphi_0(x), \tag{4.51}$$

$$u\,(t_\lambda+0,x) - u\,(t_\lambda-0,x) =$$

$$= b_\lambda(x)u\,(t_\lambda-0,x) + \varphi_\lambda\,(t_\lambda,x)\,, \tag{4.52}$$

де $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N < t_{N+1}$.

Задачу Коші з імпульсною дією для параболічного рівняння будемо вивчати в просторах $H^l(N;\Pi)$; $H^l(N;\Pi)$ – множина функцій, яка належить $H^l(N;Q)$ для довільної замкнутої підобласті $\overline{Q} \subset \Pi$.

Нехай $\Pi_{(K)} = [t_K, t_{K+1}) \times R^n$, $k \in \{0,1,\dots,N\}$. Справедлива така теорема.

Теорема 4.5. *Нехай* $u(t,x)$ *– класичний розв'язок задачі (4.50)–(4.52) і виконуються умови А), Б) для* $(t,x) \in \Pi$, $a_0(t,x) \le a < 0$, $b_\lambda(x) \in H^0(R^n)$, $\varphi_\lambda(t_\lambda,x) \in H^0(R^n)$. *Тоді для* $u(t,x)$ *справджується оцінка*

$$\|u(t,x)\| \le \sum_{K=1}^{N}\prod_{\nu=K}^{N}\left(1+\|b_\nu;\Pi\cap(t=t_\nu)\|_0\right)\times$$

$$\times\left(\|\varphi_{K-1};\Pi\cap(t=t_{K-1})\|_0 + \left\|fa_0^{-1};\Pi_{K-1}\right\|_0 + \right.$$

$$\left. + \|\varphi_N;\Pi\cap(t=t_N)\|_0 + \left\|fa_0^{-1};\Pi_N\right\|_0 \equiv M_1,\right.$$

де $|f|_{(\Pi_{K-1})} = \sup\limits_{\Omega}|f|$, Ω *– довільна замкнута півобласть* $\Omega \subset \Pi_{K-1}$.

Доведення. Нехай функція $u(t,x)$ неперервна в області $\Pi^0 = \{(t,x) \in \Pi, |x| < \infty, t_0 \le t \le t_{N+1}\}$ і її модуль не перевищує деякого числа M_0.

Розглянемо функцію

$$W(t,x) = u(t,x) - M_1 - \frac{M_0}{R_0^2}\left(|x|^2 + C_3 t\right).$$

Знайдемо значення

$$LW = f(t,x) - a_0 M_1 - \frac{M_0}{R_0^2}\left[-2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) - \right.$$

$$\left. -2\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) - a_0\left(x^3 + C_3 t\right) + C_3\right].$$

Виберемо C_3 і R_0 так, щоб вираз, який стоїть біля $\dfrac{M_0}{R_0^2}$ був від'ємний. Тоді $LW \leq 0$. Крім того, на бічній межі і нижній основі циліндра $\Pi^{(R)} = \{(t,x) \in \Pi, |x| \leq R_0, t_0 \leq t \leq t_{N+1}\}$ функція $W(t,x) \leq 0$. Отже, $W(t,x) \leq 0$ в циліндрі $\Pi^{(R)}$.

Візьмемо довільну точку $\left(t^{(1)}, x^{(1)}\right) \in \Pi$. Тоді при $\left(t^{(1)}, x^{(1)}\right) \in \Pi^0$ і при $R_0 \to \infty$ одержимо оцінку $u(t,x) \leq M_1$.

Для оцінки $u(t,x)$ знизу потрібно взяти функцію

$$W_1(t,x) = u(t,x) + M_1 + \frac{M_0}{R_0^2}\left(|x|^2 + C_3 t\right).$$

Для неї $LW_1 \geq 0$ і на нижній основі й на бічній межі $\Pi^{(R)} W_1(t,x) \geq 0$. Тому $W\left(t^{(2)}, x^{(2)}\right) \geq 0$ при $\left|x^{(2)}\right| \leq R_0$. Спрямовуючи $R_0 \to \infty$, одержимо

$$u(t,x) \geq -M_1.$$

Отже, $|u(t,x)| \leq M_1$.

§4.5. Існування розв'язку задачі Коші з імпульсною дією для параболічного рівняння

Встановимо існування розв'язку задачі (4.50)–(4.52). Правильна така теорема.

Теорема 4.6. *Нехай виконані умови теореми 4.5, $b_\lambda(x) \in H^{\alpha+2}(R^n)$. Тоді існує розв'язок задачі (4.50)–(4.52) у класі $H^{\alpha+2}(\Pi)$, для нього правильна оцінка*

$$\|u;N;\Pi\|_{2+\alpha} \leq c\sum_{K=1}^{N}\prod_{\nu=K}^{N}\left(1+\|b_\nu;\Pi\cap(t=t_\nu)\|_{2+\alpha}\right)\times$$

$$\times\left(\|f;\Pi_{K-1}\|_\alpha + \|\varphi_{K-1};\Pi_{K-1}\cap(t=t_{K-1})\|_\alpha + \right.$$

$$\left. + \|\varphi_N;\Pi\cap(t=t_N)\|_{2+\alpha} + \|f;\Pi_N\|_\alpha \right. . \qquad (4.53)$$

Доведення. Якщо $(t,x) \in \Pi_0 = [t_0,t_1) \times R^n$, то розв'язок задачі

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} + a(t,x)u = f(t,x),$$

$$u|_{t=t_0} = \varphi_0(x), \qquad (4.54)$$

за теоремою 1.11, існує, єдиний, задається формулою

$$u(t,x) = \int\limits_{R^n} Z\left(x,\xi,t,t_0\right)\varphi_0(\xi)d\xi +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{R^n} Z(x,\xi,t,\tau)f(\xi,\tau)d\xi \qquad (4.55)$$

і для нього правильна оцінка

$$\|u;\Pi\|_{2+\alpha} \leq c\left(\|f;\Pi\|_\alpha + \|\varphi_0;R^n\|_{2+\alpha}\right). \qquad (4.56)$$

У випадку, коли $(t,x) \in \Pi_1 = [t_1,t_2) \times R^n$, розглянемо задачу (4.50)–(4.52) у вигляді

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} + a(t,x)u = f(t,x), \tag{4.57}$$

$$u|_{t=t_1+0} = (1 + b_1(t_1,x))\, u(t_1 - 0, x) + \varphi_1(t_1,x)\,. \tag{4.58}$$

За теоремою 1.11 для розв'язку задачі (4.57), (4.58) правильна формула

$$u(t,x) = \int_{t_1}^{t} d\tau \int_{R^n} Z(x,\xi,t,\tau) f(\xi,\tau) d\xi +$$

$$+\int_{R^n} Z(x,\xi,t_1,\tau)\left[(1 + b_1(t_1,\xi))\,(u(t_1 - 0,\xi) + \varphi_1(t_1,\xi))\right] d\xi$$

і для $u(t,x)$ правильна оцінка

$$\|u;\Pi_1\|_{2+\alpha} \le c\left[\|f;\Pi_1\|_{\alpha} + \right.$$

$$+\|(1+b_1)u(t_1-0,\xi);\Pi_1 \cap (t=t_1)\|_{2+\alpha} +$$

$$\left. +\|\varphi_1;\Pi_1 \cap (t=t_1)\|_{2+\alpha}\right] =$$

$$= c\left\{\left(1 + \|b_1;\Pi_1 \cap (t=t_1)\|_{2+\alpha}\right)(\|\varphi_0;R^n\|_{2+\alpha} + \|f;\Pi_0\|_{\alpha}) + \right.$$

$$\left. +\|\varphi_1;\Pi \cap (t=t_1)\|_{2+\alpha} + \|f;\Pi_1\|_{\alpha}\right\}.$$

Нехай $(t,x) \in \Pi_2 = [t_2,t_3) \times R^n$. Тоді $u(t,x)$ буде розв'язком задачі Коші

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} + a(t,x)u = f(t,x), \tag{4.59}$$

$$u|_{t=t_2+0} = (1 + b_2(t_2,x))\, u(t_2 - 0, x) + \varphi_2(t_2,x)\,. \tag{4.60}$$

За теоремою 1.11 для розв'язку задачі Коші (4.59)–(4.60) правильна формула

$$u(t,x)=\int\limits_{R^n} Z\left(x,\xi,t,t_2\right)\left[\left(1+b_2\left(t_2,\xi\right)u\left(t_2-0,\xi\right)+\right.\right.$$

$$\left.+\varphi_2\left(t_2,\xi\right)\right]d\xi+\int\limits_{t_2}^{t} d\tau\int\limits_{R^n} Z(x,\xi,t,\tau)f(\xi,\tau)d\xi$$

і для $u(t,x)$ справедлива оцінка

$$\|u;\Pi_2\|_{2+\alpha}\leq C\left(\|f;\Pi_2\|_{\alpha}+\right.$$

$$+\left\|(1+b_2)\left|u\left(t_2-0;\xi\right)\right|+\varphi_2;\Pi_2\cap\left(t=t_2\right)\right\|_{2+\alpha}\leq$$

$$\leq c\left\{\left(1+\|b_2;\Pi_2\cap\left(t=t_2\right)\|_{2+\alpha}\right)\left[\left(1+\|b_1;\Pi_1\cap(t=t_1)\|_{2+\alpha}\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left(\|\varphi_0;R^n\|_{2+\alpha}+\|f;\Pi_0\|_{\alpha}\right)+\|\varphi_1;\Pi_1\cap(t=t_1)\|_{2+\alpha}+$$

$$\left.+\|f;\Pi_1\|_{\alpha}\right]+\|\varphi_2;\Pi_2\cap(t=t_2)\|_{2+\alpha}+$$

$$+\|f;\Pi_2\|_{\alpha}\leq c\left\{\sum_{k=1}^{2}\prod_{\lambda=k}^{2}\left(1+\|b_\lambda;\Pi\cap\left(t=t_\lambda\right)\|_{2+\alpha}\right)\times\right.$$

$$\times\left(\|\varphi_{k-1};\Pi\cap\left(t=t_{k-1}\right)\|_{2+\alpha}+\|f;\Pi_{k-1}\|_{\alpha}\right)+$$

$$\left.+\|\varphi_2;\Pi\cap\left(t=t_2\right)\|_{2+\alpha}+\|f;\Pi_2\|_{\alpha}\right\}.$$

Продовжуючи оцінювати розв'язки відповідних задач в областях Π_λ, $\lambda\in\{3,\ldots,N\}$, одержимо оцінку розв'язку задачі (4.50)–(4.52) в області Π.

Розділ 5. Задача керування температурним режимом при обмеженні на перепад температур

Переважна більшість сучасних технологічних процесів в різних галузях промисловості, зокрема, у металургійній, машинобудівній і хімічній, пов'язана з нагріванням і охолодженням елементів конструкцій або деталей. До основних факторів, що обмежують швидкість нагрівання конструкцій, є максимальний перепад температур, величина якого визначається густиною і однорідністю мікроструктурних перетворень тіла.

Розглянемо задачу оптимального керування нестаціонарним температурним режимом при обмеженнях на керування і максимальний перепад температур тіла.

Нехай $u(\rho, t)$ – температурне поле, яке задовольняє рівняння

$$\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t} = \beta(t)\Delta u + F(\rho, t), \tag{1}$$

де $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \dfrac{j}{r}\dfrac{\partial}{\partial \rho}$ $(j = 0, 1, 2)$ і нелокальну умову за часовою змінною

$$u(r, 0) + \sum_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) u\left(r, t_i\right) = \varphi(r). \tag{2}$$

Керування нагріванням пластини і циліндричного тіла здійснюється за допомогою конвективного теплообміну на бічних поверхнях

$$\begin{gathered} u_r\left(R_2, t\right) + H_2\left(u\left(R_2, t\right) - p(t)\right) = 0, \\ u_r\left(R_1, t\right) + H_1\left(u\left(R_1, t\right) - \lambda(t)\right) = 0, \\ p(t) < \lambda(t). \end{gathered} \tag{3}$$

Розглянемо задачу знаходження функції $p(t)$, яка обмежена знизу і зверху

$$p_1(t) \leq p(t) \leq p_2(t), \tag{4}$$

щоб при обмеженні на максимальний перепад температури тіла

$$\max_r u(r,t) - \min_r u(r,t) \le \delta^* u, \quad r \in (R_1, R_2)\,, \tag{5}$$

за мінімально короткий час $t^{(1)}$ нагріти тіло до середныої температури

$$u^*\left(t^{(1)}\right) = \frac{(1+j)R_2^{j+1}}{R_2^{j+1} - R_1^{j+1}} \int\limits_{R_1}^{R_2} r^j u(r,t)dr. \tag{6}$$

Побудова розв'язку задачі (1)–(6) відбувається у такій послідовності:

1) На першому етапі нагрівання відбувається, коли

$$p(t) = p_2(t), \max_r u(r,t) - \min_r u(r,t) \le \delta^* u, r \in (R_1, R_2)\,. \tag{7}$$

2) На другому етапі нагрівання відбувається при обмеженні:

$$p_1(t) \le p(t) \le p_2(t), \quad \max_r u(r,t) - \min_r u(r,t) = \delta^* u. \tag{8}$$

При вивченні задачі керування з умовами (8) вважаємо, що температурне поле $u(r,t)$ являє собою монотонно неспадну функцію за координатою r. Нехай $\delta^* u = b(t) + cu^*(t)$. Тоді умову (8) можна записати у вигляді

$$u\left(R_2, t\right) - u\left(R_1, t\right) - cu^*(t) = b(t). \tag{9}$$

Отже, визначення температурного поля при виконанні умови (8) зводиться до розв'язання задачі (1), (2), (3), (9), а оптимальне керування знаходиться з умови (3).

§5.1. Задача керування температурним режимом при обмеженні на перепад температур

Дослідження поставленої задачі будемо проводити спочатку у випадку виконання умови (7), тобто

$$p(t) = p_2(t).$$

Отримаємо задачу вигляду:

$$\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t} = \beta(t)\Delta u + F(\rho, t), \qquad \text{де } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{j}{r}\frac{\partial}{\partial \rho}, \tag{5.1}$$

$$u(r,0) + \sum_{j=1}^{N} a_j\left(t_j\right) u\left(r, t_j\right) = \varphi(r). \tag{5.2}$$

$$\begin{gathered} u_r\left(R_2, t\right) + H_2\left(u\left(R_2, t\right) - p_2(t)\right) = 0, \\ u_r\left(R_1, t\right) - H_1\left(u\left(R_1, t\right) - \lambda(t)\right) = 0. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Оскільки умови (5.2) неоднорідні, то розв'язок задачі (5.1), (5.2), (5.3) шукаємо у вигляді:

$$u(r,t) = v(r,t) + \omega(r,t), \tag{5.4}$$

де $\omega(r,t)$ задовольняє крайові умови (5.3). Нехай

$$\omega(r,t) = x(t) + r y(t).$$

Підставимо в (5.3), маємо

$$\begin{cases} y(t) + H_2\left(x(t) + R_2 y(t) - p_2(t)\right) = 0, \\ y(t) + H_1\left(x(t) + R_1 y(t) - \lambda(t)\right) = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} y(t)\left(1 + H_2 R_2\right) + x(t) H_2 = H_2 p_2(t), \\ y(t)\left(1 - H_1 R_1\right) - x(t) H_1 = -\lambda(t) H_1. \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + H_2 R_2 & H_2 \\ 1 - H_1 R_1 & -H_1 \end{vmatrix} = -H_1 - H_1 H_2 R_2 - H_2 + H_1 H_2 R_1.$$

Оскільки

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} H_2 p_2(t) & H_2 \\ -H_1\lambda(t) & -H_1 \end{vmatrix} = -H_1H_2p_2(t) + H_1H_2\lambda(t),$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+H_2R_2 & H_2p_2(t) \\ 1-H_1R_1 & -H_1\lambda(t) \end{vmatrix} =$$

$$= -H_1\lambda(t) - H_1H_2R_2\lambda(t) - H_2p_2(t) + H_1H_2R_1p_2(t) =$$

$$= H_1\lambda(t)\left(-1-H_2R_2\right) - H_2p_2(t)\left(H_2R_2-1\right),$$

то за теоремою Крамера маємо

$$y(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{H_1H_2\lambda(t) - H_1H_2p_2(t)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)},$$

$$x(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{H_1\lambda(t)\left(-1-H_2R_2\right) - H_2p_2(t)\left(H_2R_2-1\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}.$$

Тоді

$$\omega(r,t) = r\frac{H_1H_2\left[p_2(t)-\lambda(t)\right] + H_2p_2(t)\left(H_2R_2-1\right)}{3H_1+H_2+H_1H_2\left(R_2-R_1\right)} +$$

$$+ r\frac{H_1\lambda(t)\left(1+H_2R_2\right)}{3H_1+H_2+H_1H_2\left(R_2-R_1\right)} =$$

$$= \frac{rH_1H_2\left(\lambda(t)-p_2(t)\right) + H_2p_2(t)\left(H_2R_2-1\right) + H_1\lambda(t)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}.$$

5.1.1. Нагрівання пластини при обмеженні на перепад температур

Підставимо (5.4) в початкову задачу, одержимо крайову задачу для $v(r,t)$. Підставимо (5.4) в (5.1):

$$\alpha(t)\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{rH_1H_2\left(\lambda'(t)-p_2'(t)\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)} +\right.$$

$$\left. + \frac{H_2p_2'(t)\left(H_2R_2-1\right) + H_1\lambda'(t)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}\right] =$$

$$= \beta(t)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{B' - H_1 H_2\left(\lambda(t) - p_2(t)\right)}{-H_1 - H_2 - H_1 H_2\left(R_2 - R_1\right)}\right] + F(r,t);$$

$$\alpha(t)\frac{\partial v}{\partial t} = \beta(t)\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \left[F(r,t) + \beta(t)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{-\mathrm{b}^2 H_1 \mathrm{H}_2\left(\lambda(t) - p_2(t)\right)}{-H_1 - H_2 - H_1 H_2\left(R_2 - R_1\right)}\right] -$$

$$-\alpha(t)\frac{r H_1 H_2\left(\lambda'(t) - p_2'(t)\right)}{-H_1 - H_2 - H_1 H_2\left(R_2 - R_1\right)} +$$

$$\left. + \alpha(t)\frac{H_2 p_2'(t)\left(H_2 R_2 - 1\right) + H_1 \lambda'(t)\left(1 + H_2 R_2\right)}{-H_1 - H_2 - H_1 H_2\left(R_2 - R_1\right)}\right].$$

Підставимо (5.4) в (5.2):

$$v(r,0) + \sum_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) v\left(r, t_i\right) =$$

$$= \varphi(r) + \frac{r H_1 H_2\left(\lambda(0) - p_2(0)\right) + H_2 p_2(0)\left(H_2 R_2 - 1\right)}{-H_1 - H_2 - H_1 H_2\left(R_2 - R_1\right)} +$$

$$+ \frac{r H_1 \lambda(0)(1 + H_2 R_2)}{-H_1 - H_2 - H_1 H_2\left(R_2 - R_1\right)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right)\left[\frac{r H_1 H_2\left(\lambda\left(t_i\right) - p_2\left(t_i\right)\right)}{-H_1 - H_2 - H_1 H_2\left(R_2 - R_1\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{H_2 p_2\left(t_i\right)\left(H_2 R_2 - 1\right) + H_1 \lambda'\left(t_i\right)\left(1 + H_2 R_2\right)}{-H_1 - H_2 - H_1 H_2\left(R_2 - R_1\right)}\right].$$

Підставимо (5.4) в (5.3):

$$\frac{\partial v}{\partial r}\left(R_2, t\right) + H_2 v\left(R_2, t\right) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}\left(R_1, t\right) - H_1 v\left(R_1, t\right) = 0.$$

Отже, отримали таку задачу:

$$\alpha(t)\frac{\partial v}{\partial t}=\beta(t)\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+F_1(r,t), \tag{5.5}$$

$$v(r,0)+\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)v\left(r,t_i\right)=\varphi_1(r), \tag{5.6}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial v}{\partial r}\left(R_2,t\right)+H_2 v\left(R_2,t\right)=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial r}\left(R_1,t\right)-H_1 v\left(R_1,t\right)=0,\end{array}\right. \tag{5.7}$$

де

$$F_1(r,t)=F(r,t)+\beta(t)\left[\frac{H_1H_2\left(\lambda(t)-p_2(t)\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}\right]+$$

$$+\alpha(t)\frac{rH_1H_2\left(\lambda'(t)-p_2'(t)\right)+H_2p_2'(t)\left(H_2R_2-1\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$\left.+\alpha(t)\frac{H_1\lambda'(t)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}\right];$$

$$\varphi_1(r)=\varphi(r)+\frac{rH_1H_2\left(\lambda(0)-p_2(0)\right)+H_2p_2(0)\left(H_2R_2-1\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\frac{H_1\lambda'(0)(1+H_2R_2)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\left[\frac{rH_1H_2\left(\lambda\left(t_i\right)-p_2\left(t_i\right)\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{H_2p_2\left(t_i\right)\left(H_2R_2-1\right)+H_1\lambda'\left(t_i\right)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}\right].$$

Розв'язок задачі (5.5)–(5.7) шукаємо у вигляді

$$v(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)X_n(r),$$

де $v_n(t)$ – невідома функція, $X_n(r)$ – власні функції задачі

$$X''(r) + \mu \cdot X(r) = 0,$$

$$X'\left(R_2\right) + H_2 X\left(R_2\right) = 0,$$

$$X'\left(R_1\right) - H_1 X\left(R_1\right) = 0.$$

Знайдемо ці власні функції:

$$X(r) = C_1 \cos\sqrt{\mu} r + C_2 \sin\sqrt{\mu} r.$$

Підставимо $X(r)$ в крайові умови. Для цього окремо обчислимо $X'(r)$:

$$X'(r) = -C_1\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu} r + C_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu} r.$$

Підставимо $X(r)$ в першу крайову умову:

$$X'\left(R_2\right) + H_2 X\left(R_2\right) = -C_1\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}R_2 + C_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}R_2 +$$

$$+ H_2 C_1 \cos\sqrt{\mu}R_2 + H_2 C_2 \sin\sqrt{\mu}R_2 = C_1\left(H_2\cos\sqrt{\mu}R_2 -\right.$$

$$\left. -\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}R_2\right) + C_2\left(H_2\sin\sqrt{\mu}R_2 + \sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}R_2\right).$$

Підставимо $X(r)$ в другу крайову умову:

$$X'\left(R_1\right) - H_1 X\left(R_1\right) = -C_1\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}R_1 + C_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}R_1 +$$

$$+ H_1 C_1 \cos\sqrt{\mu}R_1 - H_1 C_2 \sin\sqrt{\mu}R_1 = C_1\left(H_1\cos\sqrt{\mu}R_1 -\right.$$

$$\left. -\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}R_1\right) + C_2\left(-H_1\sin\sqrt{\mu}R_1 + \sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}R_1\right).$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1\left(H_2\cos\sqrt{\mu}R_2 - \sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}R_2\right) + \\ \quad + C_2\left(H_2\sin\sqrt{\mu}R_2 + \sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}R_2\right) = 0, \\ C_1\left(H_1\cos\sqrt{\mu}R_1 - \sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}R_1\right) + \\ \quad + C_2\left(-H_1\sin\sqrt{\mu}R_1 + \sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}R_1\right) = 0. \end{cases}$$

Знайдемо головний визначник даної системи:

$$\Delta = H_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}R_2\cos\sqrt{\mu}R_1 - H_1H_2\cos\sqrt{\mu}R_2\sin\sqrt{\mu}R_1 -$$

$$-\mu\sin\sqrt{\mu}R_2\cos\sqrt{\mu}R_1 + H_1\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}R_2\sin\sqrt{\mu}R_1 +$$

$$+H_2\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}R_2\sin\sqrt{\mu}R_1 + H_1H_2\cos\sqrt{\mu}R_1\sin\sqrt{\mu}R_2 +$$

$$+\mu\cos\sqrt{\mu}R_2\sin\sqrt{\mu}R_1 + H_1\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}R_1\cos\sqrt{\mu}R_2 =$$

$$= H_1H_2\left(H_2\sqrt{\mu} + \cos\sqrt{\mu}R_1\sin\sqrt{\mu}R_2 - \cos\sqrt{\mu}R_2\sin\sqrt{\mu}R_1\right) +$$

$$+H_2\sqrt{\mu}\left(\cos\sqrt{\mu}R_2\cos\sqrt{\mu}R_1 + \sin\sqrt{\mu}R_2\sin\sqrt{\mu}R_1\right) +$$

$$+H_1\sqrt{\mu}\left(\sin\sqrt{\mu}R_2\sin\sqrt{\mu}R_1 + \cos\sqrt{\mu}R_2\cos\sqrt{\mu}R_1\right) +$$

$$+\mu\left(\cos\sqrt{\mu}R_2\sin\sqrt{\mu}R_1 - \sin\sqrt{\mu}R_2\cos\sqrt{\mu}R_1\right) =$$

$$= H_1H_2\sin\sqrt{\mu}\left(R_2 - R_1\right) + H_2\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}\left(R_2 - R_1\right) +$$

$$+H_1\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}\left(R_2 - R_1\right) + \mu\sin\sqrt{\mu}\left(R_2 - R_1\right).$$

Прирівняємо Δ до нуля:

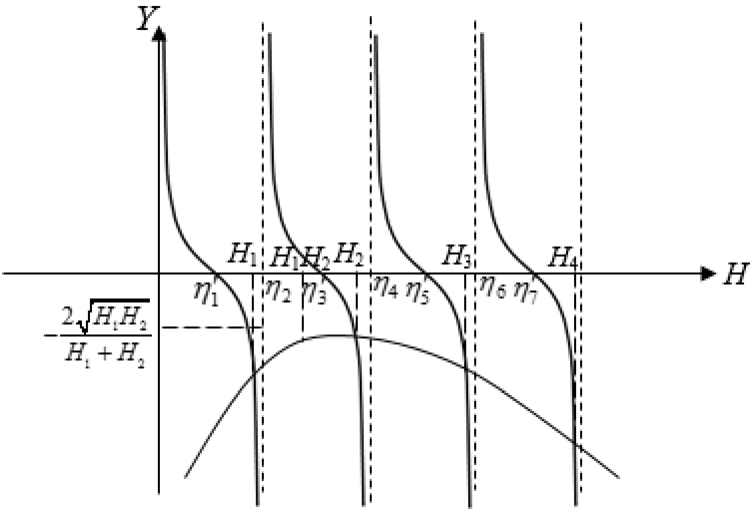
$$\sin\sqrt{\mu}\left(R_2 - R_1\right)\left(H_1H_2 + \mu\right) +$$

$$+\cos\sqrt{\mu}\left(R_2 - R_1\right)\left(H_2\sqrt{\mu} + H_1\sqrt{\mu}\right) = 0,$$

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\mu}\left(R_2 - R_1\right) = -\frac{H_1H_2 + \mu}{\sqrt{\mu}\left(H_1 + H_2\right)}.$$

Отримали трансцендентне рівняння, розв'язок якого шукаємо графічним методом. Нехай

$$y_1 = \operatorname{ctg}\sqrt{\mu}\left(R_2 - R_1\right), \quad y_2 = -\frac{H_1H_2}{\sqrt{\mu}\left(H_1 + H_2\right)} + \frac{\sqrt{\mu}}{H_1 + H_2},$$



де $\eta_{2k+1} = \left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2(R2-R1)}\right)^2$.

Нехай μ_n – розв'язки трансцендентного рівняння, тобто власні числа задачі Штурма-Ліувілля,

Відповідні власні функції:

$$X_n(r) = \sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}\,(r-R_1) + H_1\sin\sqrt{\mu_n}\,(r-R_1)\,.$$

Розвинемо функції $F_1(r,t)$ та $\varphi_1(r)$ за власними функціями $X_n(r)$:

$$F_1(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(t)\varphi_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} d_nX_n(r),$$

де $f_n(t) = \dfrac{1}{\|X_n\|^2}\displaystyle\int_{R_1}^{R_2} F_1(r,t)X_n(r)dr$, $d_n(t) = \dfrac{1}{\|X_n\|^2}\displaystyle\int_{R_1}^{R_2}\varphi_1(r,t)X_n(r)dr.$

Підставимо у (5.5)–(5.7). Отримаємо:

$$\alpha(t)\frac{dv_n}{dt}+\beta(t)\mu_n v_n(t)=f_n(t), \tag{5.8}$$

$$v_n(0)+\sum_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) v_n\left(t_i\right)=d_n. \tag{5.9}$$

Розглянемо відповідне однорідне рівняння:

$$\alpha(t)\frac{dv_n^0}{dt}+\beta(t)\mu_n v_n^0(t)=0,$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$v_n^0(t)=A_n e^{-\mu_n\int\limits_0^t\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо методом варіації довільної сталої:

$$v_n^0(t)=A_n(t) e^{-\mu_n\int\limits_0^t\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}.$$

Підставимо в рівняння (5.8)

$$\alpha(t)A_n'(t) e^{-\mu_n\int\limits_0^t\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}=f_n(t).$$

Одержимо

$$A_n(t)=\int\limits_0^t \alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{\mu_n\int\limits_0^t\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi+B_n.$$

Отже,

$$v_n=\left(B_n+\int\limits_0^t \alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{\mu_n\int\limits_0^t\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^t\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}.$$

Задовільнимо умову (5.9):

$$B_n\left(1+\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}\right)=d_n-\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^{t_i}\alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{-\mu_n\int\limits_\xi^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi.$$

Звідси знаходимо B_n, а отже і v_n:

$$v_n(t)=\left(\int\limits_0^{t}\alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{\mu_n\int\limits_0^{\xi}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{d_n-\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\int\limits_0^{t_i}\alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{-\mu_n\int\limits_\xi^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi}{1+\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}}\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}.$$

Тому

$$u(r,t)=\frac{rH_1H_2\left(\lambda(t)-p_2(t)\right)+H_2p_2(t)\left(H_2R_2-1\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\frac{H_1\lambda(t)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{t}\frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)}e^{\mu_n\int\limits_0^{\xi}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi\right)+$$

$$+\frac{d_n-\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\int\limits_0^{t_i}\frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)}e^{-\mu_n\int\limits_\xi^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi}{1+\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}}e^{-\mu_n\int\limits_0^{t}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}\times$$

$$\times \cos \sqrt{\mu_n}\left(r-R_1\right)+H_1 \sin \sqrt{\mu_n}\left(r-R_1\right).$$

Теорема 5.1. *(про існування розв'язку задачі) Нехай виконуються такі умови:*

$$F_1(r,t) \in C^{(0,2)}\left([0,\infty)\times[R_2,R_1]\right),\ \varphi_1(r) \in C^{(2)}[R_2,R_1]$$

і задовольняють крайові умови (5.7),

$$\beta\alpha^{-1} \in L_1(0,T), \quad \sum_{j=1}^{N}\left|a\left(t_j\right)\right| \le \lambda_0 < 1.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (5.1)–(5.3), який зображується у вигляді:

$$u(r,t)=\frac{rH_1H_2\left(\lambda(t)-p_2(t)\right)+H_2p_2(t)\left(H_2R_2-1\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\frac{H_1\lambda(t)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^t \frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)}e^{\mu_n\int\limits_0^{\xi}\frac{\beta(\tau)}{d}\tau}d\xi\right)+$$

$$+\frac{d_n-\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\int\limits_0^{t_i}\frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)}e^{-\mu_n\int\limits_{\xi}^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi}{1+\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t_i\beta(\tau)}d\tau}}e^{-\mu_n\int\limits_0^{t}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}\times$$

$$\times \cos \sqrt{\mu_n}\left(r-R_1\right)+H_1 \sin \sqrt{\mu_n}\left(r-R_1\right).$$

5.1.2. Задача керування температурою нагрівання циліндричного тіла

Розглянемо випадок виконання умови (7). У цьому випадку оптимальне керування $p(t)=p_2(t)$. Тому для знаходження оптимальної температури потрібно знайти розв'язок рівняння

$$\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t}=\beta(t)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)+F(t,r), \qquad (5.10)$$

що задовольняє нелокальну умову

$$u(\rho,0)+\sum_{j=1}^{N}a_j\left(t_j\right)u\left(r,t_j\right)=f(\rho) \tag{5.11}$$

крайові умови

$$\begin{gathered}u_r\left(R_2,t\right)+H_2u\left(R_2,t\right)=H_2p_2(t),\\ u_r\left(R_1,t\right)-H_1u\left(R_1,t\right)=-H_1\lambda(t),\\ r\in\left[R_2,R_1\right],\quad k\geq 0.\end{gathered} \tag{5.12}$$

Розв'язок задачі (5.10)–(5.12) шукаємо у вигляді

$$u(r,t)=v(r,t)+\omega(r,t),$$

де $\omega(r,t)$ – довільна двічі неперервно диференційована функція, для якої виконуються крайові умови (5.12). Функція $\omega(r,t)$ має вигляд:

$$\omega(r,t)=\frac{R_2H_1H_2\lambda(t)+H_1\lambda(t)+H_2p_2(t)}{H_1+H_2+H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\frac{rH_1H_2\left(p_2(t)-\lambda(t)\right)+R_2H_1H_2\lambda(t)}{H_1+H_2+H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}.$$

Функція $v(r,t)$ задовільняє однорідну крайову задачу

$$\alpha(t)\frac{\partial v}{\partial t}=\rho(t)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+F_2(t,r), \tag{5.13}$$

$$v(r,0)+\sum_{j=1}^{N}a_j\left(t_j\right)V\left(r,t_j\right)=f_2(r), \tag{5.14}$$

$$\begin{gathered}v_r\left(R_2,t\right)+H_2v\left(R_2,t\right)=0,\\ v_r\left(R_1,t\right)-H_1v\left(R_1,t\right)=0,\end{gathered} \tag{5.15}$$

де

$$F_2(t,r) = F_1(t,r) - \frac{2}{r}\frac{H_1H_2\lambda(t) - H_1H_2p_2(t)}{H_1 + H_2 + H_1H_2\left(R_2 - R_1\right)}\beta(t).$$

$$f_2(r) = \varphi_1(r).$$

Справедлива така теорема

Теорема 5.2. *Нехай* $H_1 + H_2 + H_1H_2 \neq 0$, *функції* $F_3(t,r) \in C^{(0,2)}\left([0,\infty) \times [R_2, R_1]\right)$, $f_1(r) \in C^{(2)}\left([R_1, R_2]\right)$ *і задовольняють крайові умови (5.15),*

$$\beta\alpha^{-1} \in L_1(0,T), \quad \sum_{j=1}^{N} \left|a_j\left(t_j\right)\right| \leq \lambda_0 < 1.$$

Тоді існує оптимальний розв'язок задачі (5.10)–(5.12), який визначається формулою:

$$u(r,t) = \frac{H_1H_2(t) + H_1(t) + H_2p_2(t) + rH_1H_2\left(p_2(t) - (t)\right)}{H_1 + H_2 + H_1H_2} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right)\int\limits_0^{t_i}\varphi_n(\beta)e^{-\lambda_n^2(t_i-\beta)}d\beta}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right)e^{-\lambda_n^2\int\limits_0^{t_i}\beta(\tau)}d\tau} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^t \varphi_n(\tau)e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}d\tau\right] Z_n\rho, \tag{5.16}$$

де

$$\varphi_n(\tau) = \frac{1}{\|Z_n\|^2}\int\limits_{R_1}^{R_2}\rho F_3(t,\rho)Z_n(\rho)d\rho,$$

$$a_n = \frac{1}{\|Z_n\|^2}\int\limits_{R_1}^{R_2}\rho f_1(\rho)Z_n(\rho)d\rho$$

$$Z_n(\rho) = \left[\lambda_n Y_0'(\lambda_n) + H_2 Y_0(\lambda_n)\right]_0 (\lambda_n, \rho) -$$
$$- \left[\lambda_n J_0'(\lambda_n) + H_2 J_0(\lambda_n)\right] Y_0(\lambda_n, \rho).$$

Доведення. Роз'язок задачі (5.13)–(5.15) шукатимемо у вигляді,

$$v(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) Z_n(r), \tag{5.17}$$

де $v_n(t)$ – невідомі функції, а $Z_n(r)$ – власні функції, тобто нетривіальні розв'язки задачі

$$r^2 Z''(r) + rZ'(r) + \lambda^2 r^2 Z(r) = 0, \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} &Z'(R_2) + H_2 Z(R_2) = 0, \\ &Z'(R_1) - H_1 Z(R_1) = 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Загальний розв'язок рівняння (5.18) має вигляд

$$Z(r) = C_1 J_0(\lambda, r) + C_2 Y_0(\lambda, r), \tag{5.20}$$

де $J_0(\lambda, r), Y_0(\lambda, r)$ – функції Бесселя першого та другого роду відповідно. Тоді задовольняючи умови (5.19), маємо:

$$\left\{ \begin{aligned} &\lambda \left(C_1 J_0'(\lambda, R_2) + C_2 Y_0'(\lambda, R_2)\right) + H_2 \left(C_1 J_0(\lambda, R_2) + \right. \\ &\quad \left. + C_2 Y_0(\lambda, R_2)\right) = 0, \\ &\lambda \left(C_1 J_0'(\lambda, R_1) + C_2 Y_0'(\lambda, R_1)\right) - H_1 \left(C_1 J_0(\lambda, R_1) + \right. \\ &\quad \left. + C_2 Y_0(\lambda, R_1)\right) = 0, \end{aligned} \right.$$

або

$$\left\{ \begin{aligned} &C_1 \left(\lambda J_0'(\lambda, R_2) + H_2 J_0(\lambda, R_2)\right) + C_2 \left(\lambda Y_0'(\lambda, R_2) + \right. \\ &\quad \left. + H_2 Y_0(\lambda, R_2)\right) = 0, \\ &C_1 \left(\lambda J_0'(\lambda, R_1) - H_1 J_0(\lambda, R_1)\right) + C_2 \left(\lambda Y_0'(\lambda, R_1) - \right. \\ &\quad \left. + H_1 Y_0(\lambda, R_1)\right) = 0. \end{aligned} \right. \tag{5.21}$$

Знайдемо визначник Δ системи (5.21) і прирівняємо його до нуля

$$\Delta = \left[\lambda J_0'(\lambda, R_2) + H_2 J_0(\lambda, R_2)\right] \left[\lambda Y_0'(\lambda, R_1) - H_1 Y_0(\lambda, R_1)\right] -$$

$$
\begin{aligned}
-\left[\lambda Y_0'(\lambda, R_2) + H_2 Y_0(\lambda, R_2)\right] \times \\
\times \left[\lambda J_0'(\lambda, R_1) - H_1 J_0(\lambda, R_1)\right] = 0. \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

Звідси знаходимо власні значення задачі (5.17), (5.19). Нехай $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – власні значення. Тоді власні функції мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
Z_n(r) = \left[\lambda_n Y_0'(\lambda_n) + H_2 Y_0(\lambda_n)\right] J_0(\lambda_n, r) - \left[\lambda_n J_0'(\lambda_n) + \right. \\
\left. + H_2 J_0(\lambda_n)\right] Y_0(\lambda_n, r). \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

Розвинемо в ряд за власними функціями вільний член рівняння (5.13)

$$
F_3(t, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) Z_n(r), \qquad (5.24)
$$

де

$$
\varphi_n(t) = \int_{R_1}^{R_2} \rho F_3(t, \rho) Z_n(\rho) d\rho.
$$

Підставляючи (5.17), (5.24) в (5.13), отримаємо рівняння

$$
v_n'(t) + \lambda_n^2 v_n(t) = f_n(t). \qquad (5.25)
$$

Розкладаючи за власними функціями в ряд функцію $f_1(\rho)$, маємо

$$
f_1(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Z_n(\rho), \qquad (5.26)
$$

де

$$
a_n = \frac{1}{\|Z_n\|^2} \int_{R_1}^{R_2} \rho f_1(\rho) Z_n(\rho) d\rho.
$$

Підставляючи (5.26), (5.17) в (5.14), отримаємо

$$
v_n(0) + \sum_{i=1}^{N} a_i(t_i) v_n(t_i) = a_n. \qquad (5.27)
$$

Повторюючи міркування першого параграфа, знаходимо розв'язок задачі (5.25), (5.27). Маємо

$$v_n(t) = \frac{a_n - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\,(t_i) \int\limits_0^{t_i} f_n(\beta) e^{-\lambda_n^2(\tau-\beta)} d\beta}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\,(t_i)\, e^{-\lambda_n^2 t_i}} +$$

$$+ \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau. \tag{5.28}$$

.

Підставляючи (5.28) в (5.17) і враховуючи значення функції $\omega(\rho, t)$, знаходимо розв'язок задачі (5.10)–(5.12):

$$u(\rho, t) = \frac{R_2 H_1 H_2 \lambda(t) + H_1 \lambda(t) + H_2 p_2(t)}{H_1 + H_2 + H_1 H_2\,(R_2 - R_1)} +$$

$$+ \frac{r H_1 H_2\,(p_2(t) - \lambda(t)) + R_2 H_1 H_2 \lambda(t)}{H_1 + H_2 + H_1 H_2\,(R_2 - R_1)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\,(t_i) \int\limits_0^{t_i} \varphi_n(\beta) e^{-\lambda_n^2 \int\limits_0^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\beta}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\,(t_i)\, e^{-\lambda_n^2 \int\limits_0^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} d\tau \right] Z_n(\rho),$$

де

$$\varphi_n(\tau) = \frac{1}{\|Z_n\|^2} \int\limits_k^1 \rho F_3(t, \rho) Z_n(\rho) d\rho,$$

$$a_n = \frac{1}{\|Z_n\|^2} \int\limits_k^1 \rho f_1(\rho) Z_n(\rho) d\rho,$$

$$Z_n(\rho) = \left[\lambda_n Y_0'(\lambda_n) + H_2 Y_0(\lambda_n)\right] J_0(\lambda_n, \rho) -$$
$$- \left[\lambda_n J_0'(\lambda_n) + H_2 J_0(\lambda_n)\right] Y_0(\lambda_n, \rho).$$

5.1.3. Задача про нагрівання сферичного тіла

Підставимо (5.4) в початкову задачу і одержимо крайову задачу для $v(r,t)$.

$$\alpha(t)\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{rH_1H_2(\lambda'(t) - p_2'(t)) + H_2 p_2'(t)(H_2R_2 - 1)}{-H_1 - H_2 - H_1H_2(R_2 - R_1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{H_1\lambda'(t)(1 + H_2R_2)}{-H_1 - H_2 - H_1H_2(R_2 - R_1)}\right] = \beta(t)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2}{r}\frac{H_1H_2(\lambda(t) - p_2(t))}{-H_1 - H_2 - H_1H_2(R_2 - R_1)}\right] + F(r,t);$$

$$\alpha(t)\frac{\partial v}{\partial t} = \beta(t)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) +$$
$$+ \left[F(r,t) + \beta(t)\left[\frac{2}{r}\frac{H_1H_2(\lambda(t) - p_2(t))}{-H_1 - H_2 - H_1H_2(R_2 - R_1)}\right] - \right.$$
$$- \alpha(t)\frac{rH_1H_2(\lambda'(t) - p_2'(t))}{-H_1 - H_2 - H_1H_2(R_2 - R_1)} +$$
$$\left. + \frac{\bar{H}_2 p_2'(t)(H_2R_2 - 1) + H_1\lambda'(t)(1 + H_2R_2)}{-H_1 - H_2 - H_1H_2(R_2 - R_1)}\right].$$

Підставимо (5.4) в (5.2). Одержимо:

$$v(r,0) + \sum_{i=1}^{N} a_i(t_i) v(r, t_i) =$$

$$= \varphi(r) + \frac{rH_1H_2(\lambda(0) - p_2(0))}{-H_1 - H_2 - H_1H_2(R_2 - R_1)} +$$

$$+\frac{H_2p_2(0)\left(H_2R_2-1\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\frac{H_1\lambda(0)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\left[\frac{rH_1H_2\left(\lambda\left(t_i\right)-p_2\left(t_i\right)\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{H_2p_2\left(t_i\right)\left(H_2R_2-1\right)+H_1\lambda'\left(t_i\right)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}\right].$$

Підставимо (5.4) в (5.3):

$$\frac{\partial v}{\partial r}\left(R_2,t\right)+H_2v\left(R_2,t\right)=0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}\left(R_1,t\right)-H_1v\left(R_1,t\right)=0.$$

Отже, отримали таку задачу:

$$\alpha(t)\frac{\partial v}{\partial t}=\beta(t)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)+F_1(r,t), \tag{5.29}$$

$$v(r,0)+\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)v\left(r,t_i\right)=\varphi_1(r), \tag{5.30}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial v}{\partial r}\left(R_2,t\right)+H_2v\left(R_2,t\right)=0,\\ \dfrac{\partial v}{\partial r}\left(R_1,t\right)-H_1v\left(R_1,t\right)=0,\end{array}\right. \tag{5.31}$$

де

$$F_1(r,t)=F(r,t)+\beta(t)\left[\frac{2}{r}\frac{H_1H_2\left(\lambda(t)-p_2(t)\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}\right]-$$

$$-\alpha(t)\frac{rH_1H_2\left(\lambda'(t)-p_2'(t)\right)+H_2p_2'(t)\left(H_2R_2-1\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\alpha(t)\frac{H_1\lambda'(t)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}.$$

$$\varphi_1(r)=\varphi(r)+\frac{rH_1H_2\left(\lambda(0)-p_2(0)\right)+H_2p_2(0)\left(H_2R_2-1\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\frac{H_1\lambda'(0)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+$$

$$+\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\left[\frac{rH_1H_2\left(\lambda\left(t_i\right)-p_2\left(t_i\right)\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{H_2p_2\left(t_i\right)\left(H_2R_2-1\right)+H_1\lambda'\left(t_i\right)\left(1+H_2R_2\right)}{-H_1-H_2-H_1H_2\left(R_2-R_1\right)}\right].$$

Розв'язок задачі (5.29)–(5.31) шукаємо у вигляді

$$v(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)X_n(r),$$

де $v_n(t)$ – невідома функція, $X_n(r)$ – власні функції задачі

$$r^2X''(r)+2rX'(r)+\mu r^2X(r)=0,$$

$$X'\left(R_2\right)+H_2X\left(R_2\right)=0,$$

$$X'\left(R_1\right)-H_1X\left(R_1\right)=0.$$

Знайдемо ці власні функції, для цього зробимо заміну:

$$\eta=\sqrt{\mu}r,\quad X(r)=X\left(\frac{\eta}{\sqrt{\mu}}\right)=Z(\eta).$$

Тоді воно набуде вигляду:

$$\eta^2Z''+2\eta Z'+\eta^2Z=0$$

– це рівняння Бесселя, загальний розв'язок якого має вигляд:

$$Z(\eta)=\eta^{-\frac{1}{2}}\left(C_1J_{\frac{1}{2}}(\eta)+C_2J_{\frac{1}{2}}(\eta)\right)=$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{\eta} \left(C_1 \sin \sqrt{\mu} r + C_2 \cos \sqrt{\mu} r\right).$$

Тобто

$$X(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi\mu}} \frac{1}{r} \left(C_1 \cos \sqrt{\mu} r + C_2 \sin \sqrt{\mu} r\right).$$

Підставимо $X(r)$ в крайові умови. Для цього окремо обчислимо $X'(r)$:

$$X'(r) = -\sqrt{\frac{1}{\pi\mu}} \frac{1}{r^2} \left(C_1 \sin \sqrt{\mu} r + C_2 \cos \sqrt{\mu} r\right) +$$

$$+\sqrt{\frac{1}{\pi\mu}} \frac{1}{r} \sqrt{\mu} \left(C_1 \cos \sqrt{\mu} r - C_2 \sin \sqrt{\mu} r\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{\pi\mu}} \frac{1}{r} \left[C_1 \left(-\frac{\sin \sqrt{\mu} r}{r} + \sqrt{\mu} \cos \sqrt{\mu} r\right) + \right.$$

$$\left. +C_2 \left(-\frac{\cos \sqrt{\mu} r}{r} - \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} r\right)\right].$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 \left(-\frac{\sin \sqrt{\mu} R_2}{R_2} + \sqrt{\mu} \cos \sqrt{\mu} R_2 + H_2 \sin \sqrt{\mu} R_2\right) + \\ \quad +C_2 \left(-\frac{\cos \sqrt{\mu} R_2}{R_2} - \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} R_2 + H_2 \cos \sqrt{\mu} R_2\right) = 0, \\ C_1 \left(-\frac{\sin \sqrt{\mu} R_1}{R_1} + \sqrt{\mu} \cos \sqrt{\mu} R_1 - H_2 \sin \sqrt{\mu} R_1\right) + \\ \quad +C_2 \left(-\frac{\cos \sqrt{\mu} R_1}{R_1} - \sqrt{\mu} \sin \sqrt{\mu} R_1 - H_2 \cos \sqrt{\mu} R_1\right) = 0. \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник даної системи:

$$\Delta = \left(\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{H_2}{R_2} + \mu - \frac{H_2}{R_1} - H_2^2\right) \sin \sqrt{\mu} \left(R_2 - R_1\right) +$$

$$+ \left(\frac{\sqrt{\mu}}{R_2} - \frac{\sqrt{\mu}}{R_1} - 2H_2 \sqrt{\mu}\right) \cos \sqrt{\mu} \left(R_2 - R_1\right).$$

Прирівняємо Δ до нуля:

$$\left(\frac{1}{R_1R_2}+\frac{H_2}{R_2}+\mu-\frac{H_2}{R_1}-H_2^2\right)\sin\sqrt{\mu}\,(R_2-R_1)+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{\mu}}{R_2}-\frac{\sqrt{\mu}}{R_1}-2H_2\sqrt{\mu}\right)\cos\sqrt{\mu}\,(R_2-R_1)=0.$$

Отримали трансцендентне рівняння

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\mu}\,(R_2-R_1)=-\frac{\mu+\frac{1}{R_1R_2}+H_2\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)-H_2^2}{\sqrt{\mu}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)-2H_2\sqrt{\mu}},$$

розв'язок якого шукають графічним методом.

Нехай μ_n – розв'язки цього рівняння, тобто власні числа задачі Штурма–Ліувілля.

Відповідні власні функції мають вигляд:

$$X_n(r)=\sqrt{\frac{1}{\pi\mu_n}}\frac{1}{r}\left(R_1\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}\,(r-R_1)+\right.$$

$$\left.+(1+H_2R_1)\sin\sqrt{\mu_n}\,(r-R_1)\right).$$

Розкладемо функції $F_1(r,t)$ та $\varphi_1(r)$ за власними функціями $X_n(r)$:

$$F_1(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)X_n(t),\quad \varphi_1(r)=\sum_{n=1}^{\infty}d_nX_n(r),$$

де

$$f_n(t)=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int\limits_{R_1}^{R_2}r^2F_1(r,t)X_n(r)dr,$$

$$d_n(t)=\frac{1}{\|X_n\|^2}\int\limits_{R_1}^{R_2}r^2\varphi_1(r,t)X_n(r)dr.$$

Підставимо в (5.29)–(5.31) $F_1(r,t)$ і $\varphi_1(r)$, отримаємо:

$$\alpha(t)\frac{dv_n}{dt}+\beta(t)\mu_n v_n(t)=f_n(t), \tag{5.32}$$

$$v_n(0)+\sum_{i=1}^{N} b_i^n\left(t_i\right) v_n\left(t_i\right)=d_n. \tag{5.33}$$

Розглянемо відповідне однорідне рівняння:

$$\alpha(t)\frac{dv_n^0}{dt}+\beta(t)\mu_n v_n^0(t)=0,$$

$$v_n^0(t)=A_n e^{-\mu_n\int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}.$$

За методом варіації довільної сталої

$$v_n^0(t)=A_n(t) e^{-\mu_n\int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}.$$

Підставимо в рівняння (5.32):

$$\alpha(t)A_n'(t) e^{-\mu_n\int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}=f_n(t),$$

$$A_n(t)=\int\limits_0^t \alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{\mu_n\int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi+B_n.$$

Отже,

$$v_n=\left(B_n+\int\limits_0^t \alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{\mu_n\int\limits_0^t \frac{t\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}.$$

Задовольнимо умову (5.14):

$$B_n\left(1+\sum_{i=1}^{N} a_i^n\left(t_i\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}\right)=$$

$$= d_n - \sum_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) \int\limits_0^{t_i} \alpha^{-1}(\xi) f_n(\xi) e^{-\mu_n \int\limits_{\xi}^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi.$$

Звідси знаходимо B_n, а, отже, і v_n:

$$v_n(t) = \left(\int\limits_0^t \alpha^{-1}(\xi) f_n(\xi) e^{\mu_n \int\limits_0^{\xi} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{d_n - \sum\limits_{i=1}^{N} b_i^N\left(t_i\right) \int\limits_0^{t_i} \alpha^{-1}(\xi) f_n(\xi) e^{-\mu_n \int\limits_{\xi}^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i^n\left(t_i\right) e^{-\mu_n \int\limits_0^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}} d\tau} e^{-\mu_n \int\limits_0^{t} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} \right).$$

Тому

$$u(r,t) = \frac{r H_1 H_2 \left(\lambda(t) - p_2(t)\right) + H_2 p_2(t) \left(H_2 R_2 - 1\right)}{-H_1 - H_2 - H_1 H_2 \left(R_2 - R_1\right)} +$$

$$+ \frac{H_1 \lambda(t) \left(1 + H_2 R_2\right)}{-H_1 - H_2 - H_1 H_2 \left(R_2 - R_1\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^t \frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)} e^{\mu_n \int\limits_0^{\xi} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{d_n - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) \int\limits_0^{t_i} \frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)} e^{-\mu_n \int\limits_{\xi}^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) e^{-\mu_n \int\limits_0^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau}} \right) e^{-\mu_n \int\limits_0^{t} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} \sqrt{\frac{1}{\pi \mu_n}} \times$$

$$\times \frac{1}{r} \left(R_1 \sqrt{\mu_n} \cos \sqrt{\mu_n} \left(r - R_1\right) + \left(1 + H_2 R_1\right) \sin \sqrt{\mu_n} \left(r - R_1\right) \right).$$

Теорема 5.3. *(про існування розв'язку задачі). Нехай виконуються такі умови:*

$$F_1(t,r) \in C^{(0,2)}\left([0,\infty) \times [R_2, R_1]\right), \quad \varphi_1(r) \in C^{(2)}\left([R_1, R_2]\right)$$

і ці функції задовольняють крайові умови (5.31),

$$\beta\alpha^{-1} \in L_1(0,T), \quad \sum_{j=1}^{N} |a\,(t_j)| \le \lambda_0 < 1.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (5.1)–(5.3), який зображується у вигляді:

$$u(r,t) = \frac{rH_1H_2\,(\lambda(t) - p_2(t)) + H_2p_2(t)\,(H_2R_2 - 1)}{-H_1 - H_2 - H_1H_2\,(R_2 - R_1)} +$$

$$+\frac{H_1\lambda(t)\,(1 + H_2R_2)}{-H_1 - H_2 - H_1H_2\,(R_2 - R_1)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t \frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)} e^{\mu_n \int_0^{\xi} \beta(\tau)\alpha(\tau)d\tau} d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{d_n - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\,(t_i) \int\limits_0^{t_i} \frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)} e^{-\mu_n \int\limits_{\xi}^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\,(t_i)\, e^{-\mu_n \int\limits_0^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau}} \right) e^{-\mu_n \int\limits_0^{\xi} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} \sqrt{\frac{1}{\pi\mu_n}} \times$$

$$\times \frac{1}{r}\left(R_1\sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}\,(r - R_1) + (1 + H_2R_1)\sin\sqrt{\mu_n}\,(r - R_1)\right).$$

§5.2. Задача керування температурним режимом при обмеженні на керування

Нехай виконуються обмеження:

$$p_1(t) \le p(t) \le p_2(t),$$

$$\max_r u(r,t) - \min_r u(r,t) = \delta^* u(t),$$

де

$$\delta^* u = cu^* + b(t).$$

Отримаємо задачу вигляду:

$$\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t} = \beta(t)\Delta u + F(\rho, t), \qquad \text{де} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{j}{r}\frac{\partial}{\partial \rho},$$

$$u(r,0) + \sum_{j=1}^{N} a_j\left(t_j\right) u\left(r, t_j\right) = \varphi(r),$$

$$u_r\left(R_1, t\right) + H_1\left(u\left(R_1, t\right) - \lambda(t)\right) = 0,$$

$$u\left(R_2, t\right) - u\left(R_1, t\right) - c\frac{(1+j)R_2^{j+1}}{R_2^{j+1} - R_1^{j+1}}\int\limits_{R_1}^{R_2} r^j u(r,t)dr = b(t).$$

5.2.1. Задача керування температурним режимом пластини

$$\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t} = \beta(t)\Delta u + F(\rho, t), \qquad \text{де} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}, \tag{5.34}$$

$$u(r,0) + \sum_{j=1}^{N} a_j\left(t_j\right) u\left(r, t_j\right) = \varphi(r), \tag{5.35}$$

$$u_r\left(R_2, t\right) + H_1\left(u\left(R_1, t\right) - \lambda(t)\right) = 0,$$

$$u\left(R_2, t\right) - u\left(R_1, t\right) - c\frac{R_2}{R_2 - R_1}\int\limits_{R_1}^{R_2} u(r,t)dr = b(t). \tag{5.36}$$

Оскільки умови (5.36) неоднорідні, то розв'язок задачі (5.34)–(5.36) шукаємо у вигляді:

$$u(r,t) = v(r,t) + \omega(r,t), \tag{5.37}$$

де $\omega(r,t)$ задовольняє крайові умови (5.36)

$$\omega(r,t) = r\eta(t) + \mu(t).$$

Підставимо в (5.36)

$$\left\{\begin{array}{l} \eta(t)-H_1\left(R_1\eta(t)+\mu(t)-\lambda(t)\right)=0, \\ R_2\eta(t)+\mu(t)-R_1\eta(t)-\mu(t)- \\ \qquad -\dfrac{cR_2}{R_2-R_1}\int\limits_{R_1}^{R_2}(r\eta(t)+\mu(t))dr=b(t), \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \eta(t)\left(1-H_1R_1\right)-H_1\mu(t)=-H_1\lambda(t), \\ \eta(t)\left(R_2-R_1-cR_2^2-cR_1R_2\right)-cR_2\mu(t)=b(t). \end{array}\right.$$

Обчислимо головний визначник даної системи:

$$\Delta=\left|\begin{array}{cc} 1-H_1R_1 & -H_1 \\ R_2-R_1-cR_2^2-cR_1R_2 & -cR_2 \end{array}\right|=$$

$$=2CH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right).$$

За теоремою Крамера:

$$\Delta_1=\left|\begin{array}{cc} -H_1\lambda(t) & -H_1 \\ b(t) & cR_2 \end{array}\right|=cH_1R_2\lambda(t)+H_1b(t),$$

$$\Delta_2=\left|\begin{array}{cc} 1-H_1R_1 & -H_1\lambda(t) \\ R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2 & b(t) \end{array}\right|=$$

$$=b(t)\left(1-H_1R_1\right)+H_1\lambda(t)\left(R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2\right).$$

Отримаємо, що

$$\eta(t)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{cH_1R_2\lambda(t)+H_1b(t)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)},$$

$$\mu(t)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{b(t)\left(1-H_1R_1\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}+$$

$$+\frac{H_1\lambda(t)\left(R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}.$$

Тоді

$$\omega(r,t)=\frac{b(t)\left(rH_1+1-H_1R_1\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}+$$

$$+\frac{\lambda(t)\left(crR_2+R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}.$$

Підставимо (5.37) в (5.34)–(5.36). Одержимо крайову задачу для $v(r,t)$. Підставимо (5.37) в (5.34):

$$\alpha(t)\left[\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{b'(t)\left(rH_1+1-H_1R_1\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda'(t)\left(crR_2+R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}\right]=\beta(t)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{cH_1R_2\lambda(t)+H_1b(t)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}\right]+F(r,t);$$

Підставимо (5.37) в (5.35):

$$v(r,t)+\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)v\left(r,t_i\right)=$$

$$=\varphi(r)-\frac{b(0)\left(rH_1+1-H_1R_1\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}+$$

$$+\frac{\lambda(0)\left(crR_2+R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\left[\frac{b(t_i)\left(rH_1+1-H_1R_1\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda(t_i)\left(crR_2+R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}\right].$$

Підставимо (5.37) в (5.36):

$$\frac{\partial v}{\partial r}(R_1,t)+H_1 v(R_1,t)=0,$$

$$v\left(R_2,t\right)-v\left(R_1,t\right)-\frac{cR_2}{R_2-R_1}\int\limits_{R_1}^{R_2} v(r,t)dr=0.$$

Отже, отримали таку задачу:

$$\alpha(t)\frac{\partial v}{\partial t}=\beta(t)\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+F_1(r,t), \tag{5.38}$$

$$v(r,0)+\sum_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right)v\left(r,t_i\right)=\varphi_1(r), \tag{5.39}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(R_1,t)+H_1 v(R_1,t)=0, \\ v\left(R_2,t\right)-v\left(R_1,t\right)-\dfrac{cR_2}{R_2-R_1}\displaystyle\int\limits_{R_1}^{R_2} v(r,t)dr=0, \end{cases} \tag{5.40}$$

де

$$F_1(r,t)=F(r,t)+\beta(t)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{cH_1R_2\lambda(t)+H_1b(t)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}\right]-\alpha(t)\times$$

$$\frac{b'(t)\left(rH_1+1-H_1R_1\right)+\lambda'(t)\left(crR_2+R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}$$

$$\varphi_1(r)=\varphi(r)-\frac{b(0)\left(rH_1+1-H_1R_1\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}+$$

$$+\frac{\lambda(0)\left(crR_2+R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N} a_i(t_i)\left[\frac{b(t_i)(rH_1+1-H_1R_1)}{2cH_1R_1R_2+H_1(R_2-R_1)-cR_2(1+R_2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda(t_i)\left(crR_2+R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1(R_2-R_1)-cR_2(1+R_2)}\right].$$

Розв'язок задачі (5.38)–(5.40) шукаємо у вигляді

$$v(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)X_n(r),$$

де $v_n(t)$ – невідома функція, $X_n(r)$ – власні функції задачі

$$X''(r)+\mu X(r)=0,$$

$$X'(R_1)+H_1X(R_1)=0,$$

$$X(R_2)-X(R_1)-\frac{cR_2}{R_2-R_1}\int\limits_{R_1}^{R_2} X(r)dr=0.$$

Знайдемо ці власні функції:

$$X(r)=C_1\cos\sqrt{\mu}r+C_2\sin\sqrt{\mu}r.$$

Підставимо $X(r)$ в крайові умови. Отримаємо:

$$\begin{cases} C_1\left(H_1\cos\sqrt{\mu}R_1-\sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}R_1\right)+C_2\left(H_1\cos\sqrt{\mu}R_1+\right.\\ \left.+\sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}R_1\right)=0,\\ C_1\left(\cos\sqrt{\mu}R_2-\cos\sqrt{\mu}R_1-\dfrac{cR_2}{\sqrt{\mu}\,(R_2-R_1)}\times\right.\\ \left.\times\left(\sin\sqrt{\mu}R_2-\sin\sqrt{\mu}R_1\right)\right)+C_2\left(\sin\sqrt{\mu}R_2-\sin\sqrt{\mu}R_1-\right.\\ \left.-\dfrac{CR_2}{\sqrt{\mu\,(R_2-R_1)}}\left(\cos\sqrt{\mu}R_2-\cos\sqrt{\mu}R_1\right)\right)=0. \end{cases}$$

Позначимо

$$A=\cos\sqrt{\mu}R_2-\cos\sqrt{\mu}R_1-\frac{cR_2}{R_2-R_1}\left(\sin\sqrt{\mu}R_2-\sin\sqrt{\mu}R_1\right),$$

$$B = \sin\sqrt{\mu}R_2 - \sin\sqrt{\mu}R_1 - \frac{cR_2}{R_2 - R_1}\left(\cos\sqrt{\mu}R_2 - \cos\sqrt{\mu}R_1\right).$$

Знайдемо головний визначник даної системи:

$$\Delta =$$

$$\left| \begin{matrix} H_1\cos\sqrt{\mu}R_1 - \sqrt{\mu}\sin\sqrt{\mu}R_1, & H_1\cos\sqrt{\mu}R_1 + \sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}R_1 \\ A & B \end{matrix} \right| =$$

$$= \sqrt{\mu} + \frac{cR_2}{R_2 - R_1}\sin\sqrt{\mu}\,(R_2 - R_1) - \sqrt{\mu}\cos\sqrt{\mu}\,(R_2 - R_1) +$$

$$+\frac{cR_2H_1}{\sqrt{\mu}\,(R_2 - R_1)}\left(\cos^2\sqrt{\mu}R_2 + \frac{\sin 2\sqrt{\mu}R_1}{2}\right) + H_1\left(\cos^2\sqrt{\mu}R_1 -\right.$$

$$\left.-\frac{\sin 2\sqrt{\mu}R_1}{2}\right) + \frac{cH_1\cos\sqrt{\mu}R_1}{\sqrt{\mu}\,(R_2 - R_1)}\left(-R_2\cos\sqrt{\mu}R_2 +\right.$$

$$\left.+R_1\sin\sqrt{\mu}R_2\right) + H_1\cos\sqrt{\mu}R_1\left(\sin\sqrt{\mu}R_2 - \cos\sqrt{\mu}R_2\right).$$

Прирівнявши Δ до нуля отримаємо трансцендентне рівняння, розв'язок якого знаходимо графічним методом. Нехай μ_n – розв'язки цього рівняння, тобто власні числа задачі Штурма–Ліувілля. А відповідні власні функції:

$$X_n(r) = \left(H_1\cos\sqrt{\mu_n}R_1 - \sqrt{\mu_n}\sin\sqrt{\mu_n}R_1\right)\cos\sqrt{\mu_n}r +$$

$$+\left(H_1\cos\sqrt{\mu_n}R_1 + \sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}R_1\right)\sin\sqrt{\mu_n}r.$$

Розкладемо функції $F_1(r,t)$ та $\varphi_1(r)$ за власними функціями $X_n(r)$:

$$F_1(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(t), \quad \varphi_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} d_nX_n(r),$$

де

$$f_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_{R_1}^{2} r^2F_1(r,t)X_n(r)dr,$$

$$d_n(t) = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int\limits_{R_1}^{2} r^2 \varphi_1(r,t) X_n(r) dr.$$

Підставимо у (5.38)–(5.40) отримаємо:

$$\alpha(t)\frac{dv_n}{dt} + \beta(t)\mu_n v_n(t) = f_n(t), \tag{5.41}$$

$$v_n(0) + \sum_{i=1}^{N} b_i^n\left(t_i\right) v_n\left(t_i\right) = d_n. \tag{5.42}$$

Розглянемо відповідне однорідне рівняння:

$$\alpha(t)\frac{dv_n^0}{dt} + \beta(t)\mu_n v_n^0(t) = 0,$$

$$v_n^0(t) = A_n e^{-\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau}.$$

За методом варіації довільної сталої:

$$v_n^0(t) = A_n(t) e^{-\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau}.$$

Підставимо в рівняння (5.41):

$$\alpha(t) A_n'(t) e^{-\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} = f_n(t),$$

$$A_n(t) = \int\limits_0^t a^{-1}(\xi) f_n(\xi) e^{\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi + B_n.$$

Отже,

$$v_n = \left(B_n + \int\limits_0^t \alpha^{-1}(\xi) f_n(\xi) e^{\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi \right) e^{-\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau}.$$

Задовольнимо умову (5.42):

$$B_n\left(1+\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}\right)=$$

$$=d_n-\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\int\limits_0^{t_i}\alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{-\mu_n\int\limits_\xi^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi.$$

Звідси знаходимо B_n, а, отже, і v_n:

$$v_n(t)=\left(\int\limits_0^t\alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{\mu_n\int\limits_0^{\xi}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{d_n-\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\int\limits_0^{t_i}\alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{-\mu_n\int\limits_\xi^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi}{1+\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}}\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}.$$

Тому

$$u(r,t)=\frac{b(t)\left(rH_1+1-H_1R_1\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}+$$

$$+\frac{\lambda(t)\left(crR_2+R_2-R_1-cR_2^2+cR_1R_2\right)}{2cH_1R_1R_2+H_1\left(R_2-R_1\right)-cR_2\left(1+R_2\right)}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^t\frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)}e^{\mu_n\int\limits_0^{\xi}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{d_n-\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\int\limits_0^{t_i}\frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)}e^{-\mu_n\int\limits_\xi^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi}{1+\sum\limits_{i=1}^{N}b_i^n\left(t_i\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}}\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}\times$$

$$\times \left(H_1 \cos\sqrt{\mu_n}R_1 - \sqrt{\mu_n}\sin\sqrt{\mu_n}R_1\right)\cos\sqrt{\mu_n}r +$$

$$+ \left(H_1 \cos\sqrt{\mu_n}R_1 + \sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}R_1\right)\sin\sqrt{\mu_n}r.$$

Теорема 5.4. *(про існування розв'язку задачі). Нехай виконуються такі умови: функції*

$$F_1(t,r) \in C^{(0,2)}\left([0,\infty) \times [R_1, R_2]\right), \quad \varphi_1(r) \in C^{(2)}\left([R_1, R_2]\right)$$

задовольняють умови (5.40),

$$\beta\alpha^{-1} \in L_1(0,T), \quad \sum_{j=1}^{N} |a\left(t_j\right)| \le \lambda_0 < 1.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (5.1)–(5.3), який зображується у вигляді:

$$u(r,t) = \frac{b(t)\left(rH_1 + 1 - H_1R_1\right)}{2cH_1R_1R_2 + H_1\left(R_2 - R_1\right) - cR_2\left(1 + R_2\right)} +$$

$$+ \frac{\lambda(t)\left(crR_2 + R_2 - R_1 - cR_2^2 + cR_1R_2\right)}{2cH_1R_1R_2 + H_1\left(R_2 - R_1\right) - cR_2\left(1 + R_2\right)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t \frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)} e^{\mu_n \int\limits_0^{\xi} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau} d\xi\right. +$$

$$\left. + \frac{d_n - \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) \int\limits_0^{t_i} \frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)} e^{-\mu_n \int\limits_{\xi}^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau} d\xi}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) e^{-\mu_n \int\limits_0^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}}\right) e^{-\mu_n \int\limits_0^{t} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau} \times$$

$$\times \left(H_1 \cos\sqrt{\mu_n}R_1 - \sqrt{\mu_n}\sin\sqrt{\mu_n}R_1\right)\cos\sqrt{\mu_n}r +$$

$$+ \left(H_1 \cos\sqrt{\mu_n}R_1 + \sqrt{\mu_n}\cos\sqrt{\mu_n}R_1\right)\sin\sqrt{\mu_n}r.$$

5.2.2. Задача керування температурним режимом циліндра

Розглянемо задачу

$$\alpha(t)\frac{\partial u}{\partial t} = \beta(t)\Delta u + F(\rho, t);\ \text{де}\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad (5.43)$$

$$u(r, 0) + \sum_{j=1}^{N} a_j(t_j)\, u(r, t_j) = \varphi(r), \quad (5.44)$$

$$u_r(R_2, t) + H_1(u(R_1, t) - \lambda(t)) = 0,$$

$$u(R_2, t) - u(R_1, t) - c\frac{2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\int\limits_{R_1}^{R_2} ru(r, t)dr = b(t). \quad (5.45)$$

Оскільки умови (5.45) неоднорідні, то розв'язок задачі (5.43)–(5.45) шукаємо у вигляді:

$$u(r, t) = v(r, t) + \omega(r, t), \quad (5.46)$$

де $\omega(r, t)$ задовольняє крайові умови (5.2):

$$\omega(r, t) = r\eta(t) + \mu(t).$$

Підставимо в (5.45)

$$\begin{cases} \eta(t) - H_1(R_1\eta(t) + \mu(t) - \lambda(t)) = 0, \\ R_2\eta(t) + \mu(t) - R_1\eta(t) - \mu(t) - \\ \quad -\dfrac{2cR_2^2}{R_2^2 - R_1^2}\displaystyle\int\limits_{R_1}^{R_2}(r\eta(t) + \mu(t))dr = b(t), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \eta(t)(1 - H_1R_1) - H_1\mu(t) = -H_1\lambda(t), \\ \eta(t)\left(R_2 - R_1 - \frac{2}{3}c\frac{R_2^2(R_2^2 + R_1R_2 + R_1^2)}{R_1 + R_2}\right) - cR_2^2\mu(t) = b(t). \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник даної системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - H_1 R_1 & -H_1 \\ R_2 - R_1 - \frac{2}{3} c \frac{R_2^2\left(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2\right)}{R_1 + R_2} & -cR_2^2 \end{vmatrix} = cH_1 R_1 R_2^2 +$$

$$+ H_1 (R_2 - R_1) - cR_2^2 - \frac{2}{3} c \frac{H_1 R_2^2 \left(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2\right)}{R_1 + R_2}.$$

За теоремою Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -H_1 \lambda(t) & -H_1 \\ b(t) & cR_2^2 \end{vmatrix} = cH_1 R_2^2 \lambda(t) + H_1 b(t);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 - H_1 R_1 & -H_1 \lambda(t) \\ R_2 - R_1 - \frac{2}{3} c \frac{R_2^2\left(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2\right)}{R_1 + R_2} & b(t) \end{vmatrix} =$$

$$= b(t)(1 - H_1 R_1) + H_1 \lambda(t) \left(R_2 - R_1 - \frac{2}{3} c \frac{R_2^2 \left(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2\right)}{R_1 + R_2} \right).$$

Отримаємо, що

$$\eta(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} =$$

$$= \frac{cH_1 R_2^2 \lambda(t) + H_1 b(t)}{cR_2^2 \left(H_1 R_1 - 1\right) + H_1 \left(R_2 - R_1 - \frac{2}{3} c \frac{R_2^2\left(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2\right)}{R_1 + R_2} \right)};$$

$$\mu(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} =$$

$$= \frac{b(t) \left(1 - H_1 R_1\right) + H_1 \lambda(t) \left(R_2 - R_1 - \frac{2}{3} c \frac{R_2^2\left(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2\right)}{R_1 + R_2} \right)}{cR_2^2 \left(H_1 R_1 - 1\right) + H_1 \left(R_2 - R_1 - \frac{2}{3} c \frac{R_2^2\left(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2\right)}{R_1 + R_2} \right)}.$$

Тоді

$$\omega(r, t) = \frac{rcH_1 R_2^2 \lambda(t) + rH_1 b(t)}{cR_2^2 \left(H_1 R_1 - 1\right) + H_1 \left(R_2 - R_1 - \frac{2}{3} c \frac{R_2^2\left(R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2\right)}{R_1 + R_2} \right)} +$$

$$+\frac{b(t)\left(1-H_1R_1\right)+H_1\lambda(t)\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}{cR_2^2\left(H_1R_1-1\right)+H_1\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}.$$

Підставимо (5.46) в (5.43)–(5.45). Одержимо крайову задачу для $v(r,t)$. Підставимо (5.46) в (5.43):

$$\alpha(t)\left[\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{rcH_1R_2^2\lambda'(t)+rH_1b'(t)}{cR_2^2\left(H_1R_1-1\right)+H_1\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{b'(t)\left(1-H_1R_1\right)+H_1\lambda'(t)\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}{cR_2^2\left(H_1R_1-1\right)+H_1\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}\right]=$$

$$=\beta(t)\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r}\frac{cH_1R_2^2\lambda(t)+H_1b(t)}{cR_2^2\left(H_1R_1-1\right)+H_1\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}\right]+$$

$$+F(r,t).$$

Підставимо (5.46) в (5.44):

$$v(r,t)+\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)v\left(r,t_i\right)=\varphi(r)-$$

$$-\frac{rcH_1R_2^2\lambda(0)+rH_1b(0)}{cR_2^2\left(H_1R_1-1\right)+H_1\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}-$$

$$-\frac{b(0)\left(1-H_1R_1\right)+H_1\lambda(0)\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}{cR_2^2\left(H_1R_1-1\right)+H_1\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}-$$

$$-\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\frac{rcH_1R_2^2\lambda\left(t_i\right)+rH_1b\left(t_i\right)}{cR_2^2\left(H_1R_1-1\right)+H_1\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}-$$

$$-\frac{b\left(t_i\right)\left(1-H_1R_1\right)+H_1\lambda\left(t_i\right)\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}{cR_2^2\left(H_1R_1-1\right)+H_1\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}$$

$$\equiv\varphi_1(r).$$

Підставимо (5.46) в (5.45):

$$\frac{\partial v}{\partial r}\left(R_1,t\right)+H_1v\left(R_1,t\right)=0,$$

$$v\left(R_2,t\right)-v\left(R_1,t\right)-\frac{cR_2^2}{R_2^2-R_1^2}\int\limits_{R_1}^{R_2}rv(r,t)dr=0.$$

Отже, отримали таку задачу:

$$a(t)\frac{\partial v}{\partial t}=\beta(t)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right)+F_1(r,t), \tag{5.47}$$

$$v(r,0)+\sum_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)v\left(r,t_i\right)=\varphi_1(r), \tag{5.48}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial r}\left(R_1,t\right)+H_1v\left(R_1,t\right)=0,\\ v\left(R_2,t\right)-v\left(R_1,t\right)-\dfrac{cR_2^2}{R_2^2-R_1^2}\displaystyle\int\limits_{R_1}^{R_2}rv(r,t)dr=0.\end{cases} \tag{5.49}$$

Розв'язок задачі (5.47)–(5.49) шукаємо у вигляді

$$v(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)X_n(r),$$

де $v_n(t)$ – невідома функція, $X_n(r)$ – власні функції задачі

$$r^2X''(r)+rX'(r)+\mu r^2X(r)=0,$$

$$X'(R_1)+H_1X(R_1)=0,$$

$$X(R_2)-X(R_1)-\frac{cR_2^2}{R_2^2-R_1^2}\int_{R_1}^{R_2} rX(r)dr=0.$$

Знайдемо ці власні функції, для цього зробимо заміну:

$$\eta=\sqrt{\mu}r, \quad X(r)=X\left(\frac{-1}{\sqrt{\mu}}\right)=Z(\eta).$$

Тоді воно набуває вигляду:

$$\eta^2Z''+\eta Z'+\eta^2Z=0$$

– це рівняння Беселля, загальний розв'язок якого має вигляд:

$$Z(\eta)=C_1J_0(\eta)+C_2Y_0(\eta),$$

де

$$J_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\left[1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right].$$

Виконуються такі рівності:

$$\int\limits_0^x tJ_0(t)dt = xJ_1(x), \quad \int\limits_0^x tY_0(t)dt = xY_1(x).$$

Тоді

$$X(r) = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\sqrt{\mu} r}{2}\right)^{2k} +$$

$$+C_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\sqrt{\mu} r}{2}\right)^{2k} \left(\ln \frac{\sqrt{\mu} r}{2} + C - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}\right)\right).$$

Позначимо:

$$N_k = \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{\sqrt{\mu}}{2}\right)^{2k}.$$

Тоді

$$X(r) = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} N_k r^{2k} + C_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} N_k r^{2k} \left(\ln \frac{\sqrt{\mu} r}{2} + C - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}\right)\right).$$

Підставимо $X(r)$ в крайові умови. Для цього окремо обчислимо $X'(r)$:

$$X'(r) = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} N_k r^{2k} +$$

$$+C_2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} N_k r^{2k-1} \left(2k \left(\ln \frac{\sqrt{\mu} r}{2} + C - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right) - 1\right)\right).$$

Підставимо в першу крайову умову:

$$X'(R_2) + H_2 X(R_2) = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} N_k R_2^{2k} (1 + H_2) +$$

$$+C_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} N_k R_2^{2k-1} \left(\ln \frac{\sqrt{\mu} R_2}{2} + c + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right) (1 + H_2 R_2)\right).$$

Підставимо в другу крайову умову:

$$X\left(R_2\right) - X\left(R_1\right) - \frac{cR_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \int\limits_{R_1}^{R_2} rX(r)dr = C_1 \sum_{k=0}^{\infty} N_k \left(R_2^{2k} - R_1^{2k}\right) +$$

$$+C_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi} N_k \left(\ln \frac{\sqrt{\mu} R_2}{2} + C - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right) \frac{R_2^{2k+2} - R_1^{2k+2}}{2k+2}.$$

Позначимо:

$$A_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} N_k R_2^{2k-1} \left(\ln \frac{\sqrt{\mu} R_2}{2} + C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right) \left(1 + H_2 R_2\right);$$

$$A_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} N_k R_2^{2k-1} \left(\ln \frac{\sqrt{\mu} R_2}{2} + C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{R_2^{2k+2} - R_1^{2k+2}}{2k+2}\right).$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 \sum\limits_{k=1}^{\infty} N_k R_2^{2k} \left(1 + H_2\right) + C_2 A_1 = 0, \\ C_1 \sum\limits_{k=1}^{\infty} N_k \left(R_2^{2k} - R_1^{2k}\right) + C_2 A_2 = 0. \end{cases}$$

Обчислимо головний визначник даної системи:

$$\Delta = A_2 \sum_{k=1}^{\infty} N_k R_2^{2k} \left(1 + H_2\right) - A_1 \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left(R_2^{2k} - R_1^{2k}\right).$$

Прирівнюємо Δ до нуля. Нехай μ_n – розв'язки цього рівняння, тобто власні числа задачі Штурма–Ліувілля.

Позначимо $M_{kn} = \dfrac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\dfrac{\sqrt{\mu_n}}{2}\right)^{2k}$. Відповідні власні функції:

$$X_n(r) = \sum_{k=1}^{\infty} M_{kn} R_2^{2n} \left(1 + H_2\right) J_0(r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} M_{kn} R_2^{2n-1} \left(\ln \frac{\sqrt{\mu} R_2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right) \left(1 + H_2 R_2\right) Y_0(r).$$

Розкладемо функції $F_1(r,t)$ та $\varphi_1(r)$ за власними функціями $X_n(r)$:

$$F_1(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(t), \quad \varphi_1(r) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n X_n(r),$$

де

$$f_n(t) = \frac{1}{\|x_n\|^2} \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 F_1(r,t) X_n(r) dr,$$

$$d_n(t) = \frac{1}{\|x_n\|^2} \int\limits_{R_1}^{R_2} r^2 \varphi_1(r,t) X_n(r) dr.$$

Підставимо у (5.47)–(5.49), отримаємо:

$$\alpha(t) \frac{dv_n}{dt} + \beta(t) \mu_n v_n(t) = f_n(t), \tag{5.50}$$

$$v_n(0) + \sum_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) v_n\left(t_i\right) = d_n. \tag{5.51}$$

Розглянемо відповідне однорідне рівняння:

$$\alpha(t) \frac{dv_n^0}{dt} + \beta(t) \mu_n v_n^0(t) = 0,$$

$$v_n^0(t) = A_n e^{-\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau}.$$

За методом варіації довільної сталої:

$$v_n^0(t) = A_n(t) e^{-\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau}.$$

Підставимо в рівняння (5.50):

$$\alpha(t) A_n'(t) e^{-\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} = f_n(t),$$

$$A_n(t) = \int\limits_0^t \alpha^{-1}(\xi) f_n(\xi) e^{\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi + B_n.$$

Отже,

$$v_n = \left(B_n + \int\limits_0^t \alpha^{-1}(\xi) f_n(\xi) e^{\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi \right) e^{-\mu_n \int\limits_0^t \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau}.$$

Задовільнимо умову (5.51):

$$B_n \left(1 + \sum_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) e^{-\mu_n \int\limits_0^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} \right) =$$

$$= d_n - \sum_{i=1}^{N} a_i\left(t_i\right) \int\limits_0^{t_i} \alpha^{-1}(\xi) b_n(\xi) e^{-\mu_n \int\limits_\xi^{t_i} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi.$$

Звідси знаходимо B_n, а отже і v_n:

$$v_n(t) = \left(\int\limits_0^t \alpha^{-1}(\xi) f_n(\xi) e^{\mu_n \int\limits_0^\xi \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi + \right.$$

$$+\frac{d_n-\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\int\limits_0^{t_i}\alpha^{-1}(\xi)f_n(\xi)e^{-\mu_n\int\limits_{\xi}^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi}{1+\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}}\Bigg)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}.$$

Тому

$$u(r,t)=$$

$$=\frac{rcH_1R_2^2\lambda(t)+rH_1b(t)}{cR_2^2\left(H_1R_1-1\right)+H_1\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}+$$

$$+\frac{b(t)\left(1-H_1R_1\right)+H_1\lambda(t)\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}{cR_2^2\left(H_1R_1-1\right)+H_1\left(R_2-R_1-\frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{t}\frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)}e^{\mu_n\int\limits_0^{\xi}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{d_n-\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)\int\limits_0^{t_i}\frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)}e^{-\mu_n\int\limits_{\xi}^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}d\xi}{1+\sum\limits_{i=1}^{N}a_i\left(t_i\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t_i}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}}\right)e^{-\mu_n\int\limits_0^{t}\frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)}d\tau}\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}N_nR_2^{2n}\left(1+H_2\right)J_0(r)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}N_nR_2^{2n-1}\times$$

$$\times\left(\ln\frac{\sqrt{\mu}R_2}{2}+C+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)\left(1+H_2R_2\right)Y_0(r).$$

Теорема 5.5. *(про існування розв'язку задачі). Нехай виконуються такі умови:* $F_1 \in C^{(0,2)}(0,T) \times [R_2, R_1]$, $\varphi_1 \in C^{(2)}([R_1, R_2])$ *і задовольняють умови (5.49),*

$$\beta\alpha^{-1} \in L_1(0,T), \quad \sum_{j=1}^{N} |a(t_j)| \le \lambda_0 < 1.$$

Тоді існує єдиний розв'язок задачі (5.1)–(5.3), який зображується у вигляді:

$$u(r,t) =$$

$$-\frac{rcH_1R_2^2\lambda(t) + rH_1b(t)}{cR_2^2(H_1R_1 - 1) + H_1\left(R_2 - R_1 - \frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)} +$$

$$+\frac{b(t)(1 - H_1R_1) + H_1\lambda(t)\left(R_2 - R_1 - \frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)}{cR_2^2(H_1R_1 - 1) + H_1\left(R_2 - R_1 - \frac{2}{3}c\frac{R_2^2\left(R_2^2+R_1R_2+R_1^2\right)}{R_1+R_2}\right)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t \frac{f_n(\xi)}{\alpha(\xi)} e^{\mu_n \xi_0^{\xi} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau} d\xi\right) + \sum_{n=1}^{\infty} N_n R_2^{2n}(1 + H_2)J_0(r) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}N_nR_2^{2n-1}\left(\ln\frac{\sqrt{\mu}R_2}{2} + C + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\right)(1 + H_2R_2)Y_0(r).$$

Зауваження. Аналогічний результат одержується при керуванні температурним режимом сферичного тіла.

§5.3. Побудова оптимального керування нагрівом тіла при обмеженнях на керування і максимальний перепад температур

Розв'язення задачі оптимального керування нагрівом тіла (1)–(8) складається із окремих етапів, на кожному з яких виконується умова (7) або (8). Перший етап нагрівання тіла здійснюється при умові (7), тобто керування $p(t) = p_2(t)$ до того часу, поки не буде досягнуто максимально допустимий перепад температур

$$u\left(R_2, t_1\right) - u\left(R_1, t_1\right) - cT^*\left(t_1\right) = b\left(t_1\right). \qquad (5.52)$$

З (5.52) визначається час t_1 перемикання температурного режиму, що здійснюється при умові (7), на гранично допустимій режим, який характеризується максимально допустимим перепадом температур (8). Оптимальне керування знаходиться з крайової умови (3).

Нагрівання тіла на другому етапі здійснюється до тих пір, поки не буде досягнута умова кінцевої мети нагрівання $u^*\left(t_1\right) = u_1$, або керування знову перейде на допустиму величину $p\left(t_2\right) = p_2\left(t_2\right)$.

Отже, побудова оптимального керування повторюється до того часу, поки не буде виконана умова (6).

Список використаної літератури

1. *Ладиженская О.М., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М. : Наука. 1967, – 736 с.

2. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М. : Мир, 1968. – 427 с.

3. Крайові задачі для параболічних і еліптичних рівнянь : навч. посібник / укл. : М.І. Матійчук, Г.М. Перун. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2011. – 144 с.

4. *Пукальський І.Д. Лусте І.П.* Диференціальні рівняння у частинних похідних: теорія, приклади та задачі : навч. посібник / Чернівці : Чернівецький національний університет, 2017. – 304 с.

5. *Ісарюк І.М.* Нелокальна задача з косою похідною та задача оптимального керування. Науковий вісник Чернівецького університету : 2011. – Т.1, Вип.3, Математика. – С. 19-25.

6. *Вичак В.М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями . – Киев : Наукова думка, 1988. – 312 с.

7. *Пукальський І.Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженями і ообливостями : Монографія. – Чернівці, 2008. – 253 с.

8. *Пукальський І.Д., Лусте І.П.* Вища математика у задачах і прикладах. Частина III. Навчальний посібник. – Чернівці : Чернівецький національний університет, 2015. – 416 с.

9. *Лионе Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М. : Мир, 1997. – 614 с.

10. *Фіхтенгольц Г.М.* Основы математического анализа, том II. – М. : Мир, 1968. – 464 с.