МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ЧЕРНІВЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ЮРІЯ ФЕДЬКОВИЧА

Факультет математики та інформатики

Кафедра алгебри та інформатики

Теоретико-методологічні основи вивчення геометричних величин та їх прикладне застосування

в курсі планіметрії ЗЗСО

Дипломна робота

Рівень вищої освіти – другий (магістерський)

Виконала:
студентка 6 курсу 606 групи
Корпанюк Олена Миронівна

Керівник:
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Сікора Віра Степанівна

До захисту допущено

на засіданні кафедри алгебри та інформатики

протокол № 6 від 7 грудня 2022 р.

Зав. кафедрою ____________ доц. Колісник Р.С.

Чернівці-2022

Анотація

Дипломна робота викладена на 71 сторінках, містить 3 розділи, 8 підрозділів та 1 додаток. Об’єктом розгляду є процес вивчення геометричних величин в курсі планіметрії ЗЗСО. Предмет роботи – методика вивчення геометричних величин в курсі планіметрії ЗЗСО. Метою роботи є розкрити теоретико-методологічні основи вивчення та використання геометричних величин та виокремити їх прикладну спрямованість в курсі планіметрії ЗЗСО. У першому розділі представлено теоретичні основи застосування геометричних величин в курсі планіметрії ЗЗСО та їх історичне походження. У другому розділі досліджено методичні аспекти вивчення геометричних величин в курсі планіметрії ЗЗСО. В третьому розділі виокремлено прикладне застосування геометричних величин при розв’язуванні задач в курсі планіметрії ЗЗСО на основі завдань із ЗНО.

За результатами роботи зроблено висновки щодо теоретико - методологічних основ вивчення геометричних величин на прикладі планіметричних задач із шкільного курсу геометрії, а також розроблено нову систему тестування, яка представлена в додатку. Результати досліджень впроваджено у власній педагогічній діяльності. За темою “Вивчення геометричних величин та їх вимірювання в курсі геометрії ЗЗСО” опубліковано тези на науковій конференції.

Ключові слова: планіметрія,геометрична величина,геометрична фігура, довжина, кут, площа, задача.

Annotation

The graduate work is laid out on 71 pages, contains 3 chapters, 8 subsections and 1 appendix. The object of consideration is the process of studying geometric quantities in the high school planimetry course. The subject of the work is the method of studying geometric quantities in the high school planimetry course. The purpose of the work is to reveal the theoretical and methodological foundations of the study and use of geometric quantities and to highlight their applied direction in the high school planimetry course. The first chapter presents the theoretical basic applications of geometric quantities in the high school planimetry course and their historical origin. In the second chapter, methodological aspects of studying geometric quantities in the high school planimetry course are investigated. The third chapter highlights the applied application of geometric quantities in solving problems in the high school planimetry course on the basis of tasks from the extracurricular. Based on the results of the work, conclusions were drawn regarding the theoretical and methodological foundations of the study of geometric quantities using the example of planimetric problems from the school geometry course, and also developed a new testing system, which is presented in the appendix. The results of research are implemented in one's own pedagogical activity.

Theses were published at the scientific conference on the topic "Study of geometric quantities and their measurement in the high school geometry course".

Key words: planimetry, geometric quantity, geometric figure, length, angle, area, problem.

Дипломна робота містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів наукових досліджень інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

____________________ О.М.Корпанюк

ЗМІСТ

ВСТУП

В процесі розвитку ЗЗСО головні їх завдання полягають у тому, щоб дати учням ключові знання із основних наук, поглибити їх матеріалістичний світогляд, розвинути логічне мислення та бажання навчатися в поєднанні із трудовими навичками, а також заохотити до вміння самостійно здобувати та вдосконалювати набуті знання. Вирішення таких цілей потребує неабиякої наполегливості у здобутті відповідних компетентностей , навчальної та дослідницької діяльності в поєднанні із трудолюбивістю.

Взаємозв'язок математики і навколишнього світу досягаються поєднанням теоретичної бази знань і сучасних прикладних аспектів шкільного курсу математики, що становить основу діалектико-матеріалістичних уявлень учнів, що відображається в свою чергу на внутрішньопредметних та міжпредметних зв'язках. Вивчення базових понять із математики є необхідною передумовою для засвоєння суміжних шкільних курсів на достатньо високому рівні. Одним із таких базових ключових понять є "величина".

Вивчення в курсі математики ЗЗСО величин і їх вимірювань має глибоке значення в плані розвитку школярів, оскільки через поняття величини описуються фактичні властивості предметів і явищ, відбувається розпізнавання навколишнього середовища, що доводить ключове та базове значення поняття "величина" серед всіх математичних дефініцій. Саме встановлення залежностей між величинами допомагає розвивати у дітей цілісні уявлення про навколишній світ, а вивчення процесу вимірювання величин слугує передумовою до формування практичних навиків та умінь, що є необхідними для учнів в ході їх розвитку та становлення як особистості.

Процес вимірювання величин, зокрема, геометричних є одним із найскладніших розділів математики. Для прикладу, лише наприкінці XIX – на початку XX ст. було створено загальну теорію вимірювання, насамперед, завдяки роботам таких вчених як К.Жордан, Е.Борель, А.Лебег та інші. Саме тому, процес вивчення геометричних величин в курсі планіметрії ЗЗСО потребує поглибленої уваги як педагогів так і учнів.

Мета дослідження: розкрити теоретичні та методологічні основи вивчення та застосування геометричних величин, а також виокремити їх прикладну спрямованість в курсі планіметрії ЗЗСО.

Об’єкт дослідження: геометричні величин в курсі планіметрії ЗЗСО.

Предмет дослідження: методика вивчення геометричних величин в курсі планіметрії ЗЗСО.

РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ТА ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН В КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ ЗЗСО

1.1 Історичні основи виникнення та використання геометричних величин

Досліджуючи історичні аспекти становлення та розвитку людства поступово виникала необхідність вимірювати різні величини, тобто потрібність в об'єкті, який слугуватиме шаблоном з кожним роком зростала. Виникала необхідність вимірювати ті чи інші об'єкти як можна точніше. Наявність та точність таких еталонів відображало етап розвитку науки і як наслідок техніки та науково-технічного потенціалу наших предків.

Існує декілька чітко визначених етапів розвитку одиниць величин, а саме:

І етап – ототожнення одиниць довжин із назвами частин людського тіла (наприклад від ліктя до зап'ястя, розмір долоні, розмір ноги, ширина великого пальця тощо). Що стосується величин одиниць площі, то остання ототожнювалася із площами основних сільськогосподарських угідь, а саме : колодязь, "орало" та ін. В подальшому (кінець 13 - початок 14 століття) появляються об'єктивні одиниці вимірювання величин пов'язане із розвитком торгівлі. Яскравим прикладом є Англія, де з'явився дюйм (довжина трьох сухих зернин ячменю, яких був основою будь-яких рахунків). Далі, з'явився фут (становив ширину 64 ячменин). Італія ознаменувалась введенням грама (маса зерна) і карата (маса боба) [36, с.124].

ІІ етап – основою якого був подальший розвиток процесу вимірювання, який потребував введення все нових і нових одиниць, взаємозв'язаних один з одним. В Азії, такими були наступні одиниці, що характеризували довжину, а саме:миля, аршин, верста, а також сажень. З аршина виник сажень, 500 сажнів становили 1 версту, 7 верст становили 1 милю. Каменем спотикання в даному етапі було те, що в різних країнах одиниці виміру різнилися, що становило перешкоду міждержавним торговельним зв'язкам.

III етап – увіковічнився вирішенням проблематики двох попередніх етапів, оскільки тут появилась нова система одиниць, яка як наслідок стала основою для міжнародної системи, яка була створена у Франції ще наприкінці 17- на початку 18 століття. Основною (базовою) одиницею довжини вважався метр(який ми застосовуємо і сьогодні), тобто одна сорокамільйонна частина довжини земного меридіана. Як наслідок, було винайдено такі одиниці виміру, як ар – площа квадрата зі стороною 10 метрів, літр– об'єм води що був тотожним об'єму куба із ребром 0,1 метра, грам – маса чистої води, яка займає об'єм куба з довжиною ребра 0,01 метра. Нова система одиниць характеризувалась також введенням десяткових кратних і частинних одиниць. Щодо величини маси, то кілограм становив 10 $дм^3$ води температурою 4^0C. Враховуючи той факт, що всі одиниці величини виявились тісно пов'язаними з одиницею довжини метром, то нова система величин так і одержала таку назву, як «Метрична система мір». Далі ще в 1921 р. було створено МБММ (Міжнародне Бюро Мір та Мас)[36, с.126].

В процесі історичного становлення величин, ключове та базове місце займають саме геометричні величини, задатки яких беруть свій початок ще кілька тисяч років тому, коли наші предки ототожнювали площу прямокутника чи трапеції квадратних одиницях виміру. Загалом, квадрат ще здавна служив шаблоном при вимірюванні оскільки характеризувався рівними «боками», кутами, симетричністю і правильністю форми, як вважали наші предки. Наприклад вавілоняни казали, що квадрати легко будувати, оскільки з їх допомогою можна заповнити будь-яку необхідну площину без неналежних пропусків (проте у східній Азії мірою площі був прямокутник).

Проводячи парадигму, можна побачити, що стародавні єгиптяни ще декілька тисяч років тому користувалися майже тими ж прийомами, що і ми, вимірюючи площі прямокутника, трикутника чи трапеції (основних геометричних фігур):

- наприклад для обчислення площі чотирикутника вони множили протилежні сторони та ділили їх навпіл. Проте, слід зазначити, що дана формула актуальна лише для прямокутника, адже за допомогою неї можна обчислити наближено площу таких чотирикутників, у яких кути близькі до прямих;

- що стосується трикутника, то його основу єгиптяни множили на висоту та ділили навпіл;
- для трапеції ж сума паралельних сторін також ділилася навпіл та множилась на висоту [36, с.216].

Аналізуючи в свою чергу поняття кута, як геометричної величини, то слід зазначити, що протягом століть воно узагальнювалося та розширювалося під впливом розвитку науки та техніки. Градусна система вимірювання кутів історично бере свій початок ще в середині третього тисячоліття до н. е., тобто ще до періоду виникнення шестидесяткової системи числення в математиці Вавилону. Шестидесятковий градусний вимір характерним був ще за межами ассиро-вавилонської царства і набув широкого поширення в країнах східної Азії (особливо Китай), Північної Африки та Західної Європи, оскільки набув свого широкого застосовувався в астрономії та тригонометрії.

Досить широко ознаменувалась в історії така геометрична величина як “об'єм геометричних тіл”. Вперше дане поняття застосовували такі грецькі вчені як Демокріт та Евдокс. Демокріт ототожнював поняття “об'єм” із поняттям “обсяг”, тобто “вміст того чи іншого об'єкта”. Евклід ж у своїх працях не застосував термін «обсяг». Для нього, наприклад, термін «куб» означав і обсяг куба (тобто сама назва включала в себе і її об'єм). Теореми Евкліда відносяться тільки до порівняння геометричних об'єктів (так і їх об'ємів), на думку вченого сам процес обчислення об'ємів тіл є справою безпосередньо практичних посібників з курсу геометрії.

Наближаючись до сьогодення, проблематика вивчення геометричних величин, висвітлюється у роботах таких видатних вчених як Г.Бевз, Я.Бродський, М.Бурда, З.Слєпкань, В.Швець та інші. Вчені і педагоги дійшли висновку, що сучасний етап розвитку шкільної освіти і навчання потребує підвищеної уваги до цієї проблематики та використання нових підходів у процесі вивчення геометричних величин, оскільки останні становлять основу при засвоєнні геометрії, як науки, в цілому.

1.2 Особливості застосування геометричних величин та їх роль в процесі навчання

Досліджуючи означення поняття “геометрична величина” у різноманітній літературі (науковій, навчальній, методичній) слід зазначити, що розрізняють аксіоматичний і конструктивний підходи. Аксіоматичне означення геометричної величини характеризується її характеристичним описом та побудовою теорії вимірювання цієї величини, а також побудові алгоритмів та виведенні формул для знаходження цієї величини[33, с.135]. Розглядаючи конструктивне означення величини візьмемо для прикладу поняття об’єм, яке за конструктивним означенням відображається як множина фігур. Основні властивості об’єму, в такому випадку, стають теоремами. Реалізація обидвох підходів доволі складна та потребує значних знань. Наприклад, при аксіоматичному підході потрібно характеризувати клас фігур, на яких розглядається їх побудова, доводити існування і єдиність цієї побудови. В свою чергу ж при конструктивному підході громіздкими стають доведення основних властивостей об’єму. В результаті обидва означення поняття об’єму еквівалентні. Аналізуючи шкільні підручники, можна зробити висновок, що аксіоматичні означення становлять більшість, оскільки, безумовно, немає великої потреби переобтяжувати та ускладнювати процес засвоєння тих чи інших понять, якщо ж є результат еквівалентний.

В контексті дослідження шкільних підручників, слід сказати, що матеріал має високий рівень абстрактності й узагальненості, що можна побачити на прикладі поняття “об'єми тіл”, оскільки перше уявлення про об’єми тіл і їх обчислення учні отримують у курсі математики п'ятого класу при вивченні прямокутного паралелепіпеда, проте вже в 10 та 11 класі учні вивчають об’єми вже на дедуктивній основі. Що стосується поняття “площа поверхні тіла”, то слід зазначити що при його розгляді виникає ще більше методичних проблем. Відсутність простого означення, яке б охоплювало всі три види «викривлених» поверхонь – циліндричну, конічну і сферичну- є ключовою проблематикою на даному етапі [2, с.236].

Аналізуючи той факт, що величини в деякій мірі описують властивості об'єктів, а також візуалізують їх, слід зазначити, що вони являються взаємозалежною субстанцією, яка не може існувати сама по собі, а доповнює та матеріалізує геометричні об'єкти як на стадії їх побудови так і дослідження. В процесі абстрактного мислення завжди відбувається "укрупнення реальності", а саме відходження від багатьох обставин. Саме тому величини являються лише відображенням того, що вона не є безпосереднім реальним відображенням (конкретний об'єкт чи фігура), а лише її характеристикою. Але практика показує, що величини точно відображають властивості навколишньої дійсності. Всі об'єкти живої та неживої природи неможливо точно описати без використання тих чи інші величин чи їхніх властивостей.

Існують такі види величин, а саме: скалярні, векторні (напрямлені), а також тензорні. Досліджуючи шкільну навчальну програму можна зробити висновок, що найбільш широкого застосування набули саме скалярні та векторні величини. В свою чергу тензорні величини здебільшого застосовуються при вивченні курсу математики в ЗВО.

Поняття величини є фундаментальним не лише в деяких науках, а й у повсякденному житті (за словами Семена Богданова [9, с.4-7]), враховуючи це поняття "величина" повинне однаково трактуватися як у шкільних підручниках, так і в практичному житті. Але, якщо врахувати той факт, що поняття величини є тільки початковим, то трактується воно по-різному. У навчальному процесі воно вводиться, як правило емпірично, тобто, на описових прикладах величин, вже відомих для учнів із навколишнього світу.

Аналізуючи навчальну та наукову літературу в контексті величин, виникає можливість виокремити такі їх основні характеристики, а саме:

1) можливість переходу від якісного емпіричного до кількісного, більш точного опису характеристик (властивостей) того чи іншого об'єкта (матеріалізація та матемізація);

2) кількісна характеристика величини здійснюється не лише за допомогою дійсного числа, а й одиницею виміру.

Геометрична величина - це дійсне число, яке описує (характеризує) той чи інший геометричний об'єкт з точки зору його розмірів, а саме: довжин відрізків, величин відповідних кутів, площі чи об'єму поверхні.

Ті геометричні величини, які можна описати числовим значенням, називаються скалярними величинами. До таких величин відносять довжину, площу, об'єм, масу тощо. Проте іноді для характеристики значення величин достатньо лише числа (площа чи об'єм), але існують ще й такі значення величин, які характеризується ще й напрямком (швидкість).

В шкільному освітньому процесі вивчаються скалярні адитивні величини, проте слід зазначити що більшість із них визначається аксіоматично, що відображено наочно у всіх шкільних підручниках геометрії (для прикладу: відрізок довжиною n, квадрат площею m, кут величиною α).

Досліджуючи теорію множин, усі геометричні величини можна вважати одним із прикладів аксіоматично вираженого загальноматематичного поняття-множини. Перевіривши конкретний зміст цього визначення для поняття довжини відрізка, величини кута, площі геометричної фігури, об'єму тіла, можна стверджувати, що величини тісно пов'язані з поняттям вимірювання. Процес вимірювання є одним із способів пізнання людиною навколишнього світу, об'єднавши теорію з практичною діяльністю людини. В результаті розвитку природничих та технічних наук безперервно зростає роль і значення вимірювань, оскільки зростає кількість і якість різноманітних вимірів величин.

Розрізняють два базових способи вимірювання геометричних величин: безпосередній та опосередкований (тобто непрямий).

Щодо безпосереднього способу вимірювання геометричних величин, то він характеризується порівнянням даної величини з обраною одиницею виміру, що асоціюється із первинним уявленням, наприклад, проаналізуємо довжину відрізка: число, що показує скільки разів деяка частина довжини вміщується в певному відрізку. Такий спосіб потребує виконання наступних кроків:

1) вибір одиниці виміру;

2) порівняння з одиницею виміру (що являється її мірою).

В результаті вимірювання величини безпосереднім способом знаходять деяке число x яке ще називають дійсним (числовим) виміром величини a одиницею вимірювання e :

$$a = x \times e \tag{1.1}$$

Крім того, здійснивши множення величин можна обґрунтувати процес переходу від однієї одиниці величини до іншої. В результаті, за допомогою отриманої деякої величини відкривається можливість виконувати певні дії над ними, а саме порівняння, додавання, віднімання чи навіть множення і ділення на число.

Досліджуючи поняття геометричних величин, слід чітко розрізняти безпосередньо геометричну фігуру (як об'єкт),величину за допомогою якої її можна було б виміряти та відповідно числове значення цієї величини. Розглянувши приклад, який наведено в таблиці (див.табл.1.1), можна зробити висновок, що різниця між довжиною відрізка та його числовим значенням полягає в тому, що довжина залишається незмінною, а її числове значення напряму залежить від обраної одиниці виміру.

Таблиця 1.1.

Геометрична фігура	Величина	Значення величини
Відрізок AB	Довжина відрізка AB: AB = 4 см	Числове значення довжини відрізка AB: 4

Що стосується опосередкованого способу вимірювання геометричних величин, то він полягає в тому, що безпосередньо можна виміряти лише величини тих елементів геометричних фігур (довжин відрізків, мір кутів) для яких це реально виконати, а площу чи об'єм потім обчислюють за допомогою формул, що застосовуються на основі теорем чи аксіом (відповідно до спеціально встановленої залежності між усіма геометричними величинами, що стосується конкретної геометричної фігури).

Аналізуючи два основні способи вимірювання геометричних величин, слід зазначити, що спосіб безпосереднього вимірювання не завжди зручний (наприклад, вимірювання площі фігури за допомогою палетки) та можливий. Тому використання опосередкованого (непрямого) способу вимірювання геометричних величин набуло більш поширеного та практичного значення.

Розрізняють такі методи непрямого вимірювання геометричних величин, а саме:

1) метод рівновеликості (застосовується переважно для визначення геометричних величин многокутників шляхом рівноскладеності рівноскладених фігур). Два многокутники називаються рівноскладеним, якщо їх можна розкласти на однакову кількість відповідно рівних фігур [34, с.111].

2) метод граничного переходу (застосовується для таких геометричних фігур, які не можуть бути визначені, а також виміряні безпосередньо (довжина кола або дуги). Перше застосування цього методу було для визначення формули за допомогою якої обчислюють довжину кола. Враховуючи те, що одиницю вимірювання довжини (одиничний відрізок) неможливо поєднати із дугою кола, то спочатку вимірюють довжину окружності приблизно (за допомогою периметра вписаного чи описаного в неї многокутника). Для підвищення точності наближеного обчислення, необхідно збільшити число сторін багатокутника і таким чином визначити його периметр. На теоретичному рівні

цей процес можна продовжувати безкінечно. Проте, за теоремою К. Вейєрштрасса існує певна межа. Ця межа називається формулою довжини кола:

$$C = 2\pi \times R \qquad (1.2)$$

Аналогічні міркування проводилися в свою чергу для визначення і виведення формули вже відомих нам площі кола, бічної поверхні та об'єму циліндра, конуса чи зрізаного конуса тощо [34, с.125].

Отож, поняття величини в математичному аспекті виникло внаслідок абстрагування від якісних особливостей властивостей об'єктів навколишнього світу до виділення кількісних співвідношень, що становлять основу вимірювання.

Проаналізувавши поняття величини, необхідно зазначити, що воно являється взаємозалежною субстанцією, яка не може існувати сама по собі. Вона доповнює та матеріалізує геометричні об'єкти як на стадії їх побудови так і дослідження. В процесі абстрактного мислення завжди відбувається огрубіння дійсності, відволікання від ряду обставин. Саме тому вивчення взаємозалежностей між геометричними величинами дає можливість учням пізнавати не тільки якісні зв'язки різноманітних сторін об'єктивної реальності, а й оцінювати їх кількісно,більш детально, що дозволяє матеріалізувати той чи інших об’єкт (математизувати). Результатом такої взаємозалежності є формули, які дозволяють перейти від від описового до кількісного вивчення властивостей об'єктів.

Процес застосування геометричних величин дозволяє учням математизувати набуті знання. Все це має ключове значення, оскільки таким чином в них формуються реальні уявлення про те, як математика взаємодіє з природничими науками.

Проаналізувавши роль та місце геометричних величин у процесі навчання, необхідно підкреслити важливість отримання учнями наступних уявлень про:

- поняття величини та способи її вимірювання;
- роль і місце величин у дослідженні тих чи інших об’єктів;

- властивості величин та їх види;
- взаємозалежність геометричних величин та їх аналіз;
- математичну обробку результатів вимірювань та вміння їх порівнювати в реальній дійсності (прикладне застосування).

Слід зазначити, що важливою умовою готовності учнів саме до прикладного застосування геометричних величин є повторення відповідного планіметричного матеріалу, насамперед формул для обчислення площ многокутників, довжини кола і площі круга, понять кола, вписаного в многокутник і описаного навколо нього, що доцільно було б подати учням наочно у вигляді табличних даних.

Висновки до 1 розділу

Проаналізувавши історичні аспекти становлення і розвитку поняття «геометричні величини», а також їх роль та місце в освітньому процесі, слід зазначити, що необхідність вимірювати різні величини, тобто потрібність в об'єкті, який слугуватиме шаблоном з кожним роком зростала. Виникала необхідність вимірювати ті чи інші об'єкти як можна точніше. Сучасний етап розвитку шкільної освіти і навчання в свою чергу потребує підвищеної уваги до цієї проблематики та використання нових підходів у процесі вивчення геометричних величин, що становлять основу при засвоєнні геометрії, як науки, в цілому.

Процес застосування геометричних величин дозволяє учням математизувати набуті знання. Все це має ключове значення, оскільки таким чином в них формуються реальні уявлення про те, як математика взаємодіє з природничими науками.

Аналізуючи два основні способи вимірювання геометричних величин, слід зазначити, що спосіб безпосереднього вимірювання не завжди зручний (наприклад, вимірювання площі фігури за допомогою палетки) та можливий. Тому використання опосередкованого (непрямого) способу вимірювання геометричних величин набуло більш поширеного та практичного значення.

Розглядаючи алгоритм вивчення учнями поняття “геометричні величини” в шкільному курсі геометрії, слід зазначити, що важливою умовою готовності учнів до практичного (прикладного) застосування геометричних величин, що демонструє результат засвоєного матеріалу, є повторення відповідного саме планіметричного матеріалу, насамперед формул.

Проаналізувавши перший розділ дипломної роботи, досягнуто таких результатів:

- дослiджено чітко визначені етапи розвитку одиниць величин;
- проведено парадигму використовуваних прийомів стародавніх єгиптян, вавилонян, греків для вимірювання різноманітних геометричних величин фігур чи об'єктів;
- досліджено роботи видатних вчених, котрі вивчали проблематику вивчення геометричних величин, наближаючись до сьогодення;
- проаналізовано вивчення геометричних величин в контексті дослідження шкільних підручників із геометрії;
- виокремлено основні характеристики величин, проводячи аналіз навчальної та наукової літератури;
- розглянуто основні підходи визначення геометричних величин;
- виокремлено способи вимірювання геометричних величин та відповідні до них методи вимірювання;
- виділено базові набуті знання та вміння учнями в процесі вивчення геометричних величин.

РОЗДІЛ 2 МЕТОДОЛОГІЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН В КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ ЗЗСО

2.1 Методика вивчення довжин у курсі планіметрії ЗЗСО

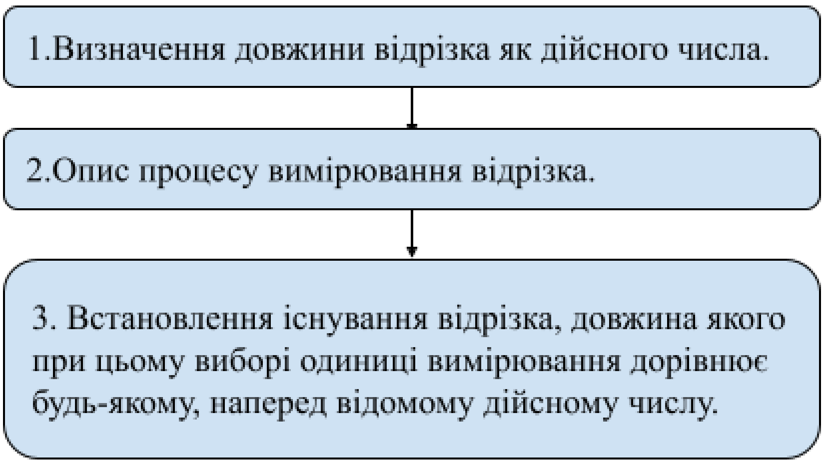
Довжина — відстань від точки до точки вздовж обраної прямої (лінії), вимір кривої, а саме:

- для відрізка прямої ,довжина — це відстань між кінцями відрізка;
- для ламаної лінії — це сума довжин всіх її ланок (частин);
- для інших кривих ліній — це верхня границя довжини ламаної лінії, що вписана в цю криву [37].

Стандартною одиницею довжини у міжнародній системі одиниць (МСО) SI є метр та інші похідні від нього величини: міліметр, сантиметр, дециметр, кілометр та ін. У деяких країнах також широко використовуються такі одиниці довжини як миля або ярд [37].

Досліджуючи вивчення поняття «величин» в курсі планіметрії ЗЗСО, слід зазначити, що воно бере свій початок саме від поняття «довжини» тих чи інших предметів. Методику вивчення процесу вимірювання довжини відрізка , доцільно побудувати за такою схемою:

Блок-схема 2.1



Термін довжина можна розглядати з різних напрямків з погляду застосування:

- ✔ науковий (у фонетиці, фізиці, геометрії тощо);
- ✔ абстрактний (лінійні розміри тіла);
- ✔ відносний (теорія відносності).

Науковий напрям відображає застосування поняття «довжина» в призмі наук. Для прикладу, довжина в геометрії (планіметрії) - відстань від точки до точки вздовж деякої лінії, у фонетиці – це характеристика тривалості звуку, що відрізняє його від інших звуків.

Абстрактний напрям, передбачає застосування терміну «довжина» для позначення одного з лінійних розмірів тіла. Наприклад у паралелепіпеда сторони називають довжиною, шириною і висотою. Найбільша (найдовша) з сторін — довжина [37].

Відносний напрям, в свою чергу, представляє застосування поняття «довжина» згідно зі спеціальною теорією відносності, де поняття «довжина» стосується рухомого тіла. Сама ж теорія відносності звучить так : «довжина будь-якого тіла що рухається виглядає меншою у напрямку руху цього тіла в порівнянні з довжиною у власній системі відліку цього тіла. Якщо довжина тіла у власній системі відліку дорівнює l_0, то його довжина в рухомій системі скорочується до:

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \qquad (2.1)$$

де v - швидкість рухомої системи, а c - швидкість світла [37].

Розуміння поняття «довжина», що асоціюється із властивістю предмета, у дітей виникає ще в дошкільному віці. Ще з початку навчання у школі, ключовим завданням вчителя є поглибити просторову уяву (абстрактного мислення) дітей.

Загалом методику вивчення довжин в курсі планіметрії ЗЗСО доцільно було б представити у вигляді наступного алгоритму :

1) спочатку учні порівнюють предмети за довжиною, але не вимірюючи їх (методом накладення чи просто візуально). Чудовим наочним прикладом є розгляд малюнків учнями і відповіді на запитання: «Який відрізок довший, синього чи жовтого кольору?» Потім пропонується порівняти два предмети не лише різного кольору а й різні по довжині практичним методом накладення. Для прикладу, учні можуть розглянути малюнки і дати відповідь на запитання: «Який саме ремінець коротший (довший) чорний чи білий?». За допомогою таких простих на перший погляд вправ, діти підходять до розуміння поняття «довжини» як порівняльної властивості, а саме, якщо ж два предмети при накладанні збігаються, то вони мають однакову довжину і т.д.;

2) наступним після знайомства із довжинами предметів є вивчення прямої та відрізка, як «носіїв» лінійної протяжності. Тут довжина виступає саме як властивість відрізка. На даному етапі, важливо навчити учнів розрізняти поняття «відрізок» та «пряма»;

3) роз'яснення учням сутності аксіоми Кантора (одна із аксіом, що характеризують безперервність прямої лінії), яка звучить так : «Будь яка послідовність накладених один на один відрізків , довжини яких наближаються до нуля, має одну спільну точку». Для прикладу, якщо задане число раціональне, аксіома Кантора застосовується і виконується елементарна побудова. Якщо ж задане число є ірраціональним, наприклад x = *2,313113111311113 ...*, то можна побудувати точки A_1 і B_1, де A_1 = *2,3*; B_1 = *2,4* - наближення з точністю до *0,1*. Ми можемо знайти A_2 = 2,31 і B_2 = 2,32 і т.д. Виконуючи цей процес до безкінечності, ми отримуємо наслідок з аксіоми Кантора:

- ✔ кожен відрізок, крім першого, лежить всередині попереднього;
- ✔ довжини відрізків наближаються до 0 (чи до відрізка, який розташований всередині відрізків із цієї сукупності).

Основою аксіоми Кантора є існування точки, що лежить всередині всіх відрізків цієї послідовності.

При вивченні курсу геометрії, а саме розділу планіметрії потрібно звернути увагу учнів на те, що довжина – це первісне поняття, а сам процес вимірювання довжин описує властивість цього поняття. Як наслідок, неможливо розпочати вивчення наступних тем планіметрій чи геометрії в цілому, не опанувавши базових геометричних понять, що включають в себе поняття «довжин» зокрема.

2.2 Методика вивчення величин кутів в курсі планіметрії ЗЗСО

В геометрії існує ряд об'єктів, які складають основу всієї науки. Поняття кута відноситься до одного із таких і визначається за допомогою поняття променя, тому в процесі вивчення даного поняття , доцільно було б починати саме з нього. Також перед тим, як приступати до визначення самого кута, потрібно пригадати про декілька не менш важливих об'єктів у геометрії (точка, пряма, площина). Методично, вивчення поняття “кута” в курсі планіметрії ЗЗСО, доцільно користуватися наступною схемою:

Блок-схема 2.2

Досліджуючи навчальну методичну літературу із математики, виокремимо наступні визначення поняття «кут»:

1. Кут – це геометрична фігура, утворена двома променями, що виходять із однієї точки, що називається вершиною кута [37].

2. Кутом називається невизначена частина деяких площин, розташована між двома променями, що виходять із спільної точки [3, с.85-86].

3. Кутом називається «частина пучка променів, обмежена двома із них (із сукупності пучка) [13, с.8].

4. Кутом - це сукупність точки та двох променів, що беруть свій початок із цієї точки (точка розглядається як вершина кута) [30, с.18].

Необхідно зауважити, що аналітика шкільної практики показує, найпоширенішим є застосування першого визначення. Користуючись вищезазначеними означеннями, можна сформулювати твердження, що кутом є геометрична фігура, яка повністю лежить у деякій площині і складається з двох променів (що не збігаються) із спільним початком. Такі промені є сторонами кута, а початок сторін називається його вершиною.

Розглядаючи поняття «кут» в подальшому шкільному курсі елементарної математики можна помітити,що воно дещо розширюється, а саме:

- ✔ у тригонометрії - кут розглядають як міру обертання;
- ✔ в стереометрії - кут має місце між двома перехресними прямими, чи кут між прямою та площиною, двогранний кут тощо).

Також кут іноді досліджують як фігуру, що виникла в процесі обертання променя, починаючи з деякого початкового положення [37]. Внаслідок обертання (напрямку) величина кута змінюється від додатного до від'ємного значення. Тобто, обертаючи промінь за годинниковою стрілкою, величина кута зменшується, наближається до від'ємного значення [37].

Такий підхід дозволяє також розглядати значення кутів, більших від повного кута, в залежності від кількості обертів. Така методика актуальна в таких науках як тригонометрія та фізика.

В результаті знайомлення із кутами, їх вимірюванням, вивчення видів кутів та дій над ними, важливо також навчити учнів порівнювати кути. Тут учні знайомляться із поняттям ”конгруентності”. “Два кути називаються конгруентними, якщо їх можна сумістити за допомогою операцій ізометрії: переносу, обертання і дзеркального відбиття, тобто таких операцій, при яких не змінюється віддаль між будь-якими точками на площині” [37] .

Для порівняння кутів необхідно “скласти їхні вершини, й один із двох променів для кожного кута. Якщо при цьому другі промені теж накладаються один на одного, то ці кути конгруентні. Якщо при накладанні вершин і одного з променів простір, обмежений сторонами кута α повністю поміщається в просторі, обмеженому сторонами кута β, то кут α менший від кута β, і, відповідно, кут β більший від кута α. Нестрого й неформально конгруентні кути називають рівними” [37].

Підсумовуючи методичні аспекти ознайомлення та вивчення теми кутів в курсі геометрії (зокрема планіметрії) ЗЗСО, необхідно зазначити, що подальше закріплення поняття «кут» учнями відбувається в процесі вивчення наступних геометричних об’єктів (фігур), саме тому засвоєння базових уявлень про кути є основою у вивченні не лише планіметрії, стереометрії, а й геометрії як науки в цілому.

2.3 Методика вивчення площ фігур в курсі планіметрії ЗЗСО

”Величина, що визначає розмір поверхні, одна з основних властивостей геометричних фігур у математиці, що розглядається як міра множини точок, які займають поверхню або якусь її частину називається площею. Історично, обчислення площі називалося квадратурою. Фігура, що має площу, називається квадрованою” [37].

Площею в курсі планіметрії ЗЗСО може називатися будь-яка величина, яка задовольняє такі умови:

1) вона додатно-визначена (тобто не менша від нуля);

2) вона адитивна (площа фігур, що складається із декількох фігур дорівнює сумі їх площ);

3) у конгруентних фігур площа однакова;

4) для квадрата зі стороною 1 вона приймається рівною 1 [6,с. 142].

З даного визначення площі випливає її монотонність (площа деякої частини фігури -менша від площі цілої фігури).

“Спочатку визначення площі було сформульоване виключно для многокутників, згодом воно було розширене на квадровані фігури. Квадрованою називається така фігура, яку можна вписати у многокутник і в яку можна вписати многокутник, причому площі обох многокутників різняться на довільно малу величину” [37]. Такі фігури називають також вимірними за Жорданом [36 с. 174—181].

Досліджуючи методику вивчення площ фігур в курсі планіметрії ЗЗСО, доцільно виокремити кілька етапів в розрізі навчальних класів:

1) ознайомлення учнів із визначенням площі;

2) ознайомлення учнів із одиницею площі – квадратним сантиметром;

3) вивчення процесу обчислення площі на прикладі прямокутника (квадрата);

4) ознайомлення учнів із іншими одиницями вимірювання площі (міліметр квадратний, метр квадратний, ар, гектар тощо);

5) вивчення формул для знаходження площ різних геометричних фігур відмінних від прямокутника (площа трикутника, площа паралелограма, площа трапеції тощо);

6) узагальнення та систематизація знань про площі на основі вивчення основних властивостей площ геометричних фігур.

Що стосується перших чотирьох етапів вивчення учнями ЗЗСО поняття площа, то із ними діти знайомляться ще в початкових класах . Процес вивчення формул та безпосередньо знаходження учнями площ різноманітних геометричних фігур, а також знайомство із їх властивостями припадає вже на старші класи ЗЗСО.

Особливу увагу, на мою думку, вивчаючи методику засвоєння площ фігур у курсі планіметрії ЗЗСО, необхідно приділити останнім двом етапам, а саме вивчення формул для знаходження площ різних геометричних фігур відмінних від прямокутника та узагальнення знань про площі на основі вивчення основних властивостей площ геометричних фігур.

Числова характеристика геометричної фігури, що демонструє її розміри, а саме частини поверхні, обмеженої замкнутим контуром даної фігури та вимірюється в квадратних одиницях в геометрії називається площею[37]. Набуття учнями умінь по знаходженні даної характеристики демонструє їх знання ,що охоплюють обсяг умінь і навичок набутих на всіх попередніх етапах вивчення курсу геометрії ЗЗСО.

Формули площ плоских фігур в курсі планіметрії ЗЗСО можна розподілити за допомогою наступної класифікації:

- ✔ формули площі трикутника;
- ✔ формули площі квадрата;
- ✔ формули площі прямокутника;
- ✔ формули площі паралелограма;
- ✔ формули площі ромба;
- ✔ формули площі трапеції;
- ✔ формули площі опуклого чотирикутника;
- ✔ формули площі круга;
- ✔ формула площі еліпса.

Для кращого наочного сприйняття та запам'ятовування учнями матеріалу, що стосується формул знаходження площ плоских фігур в курсі планіметрії ЗЗСО пропоную користуватися наступною таблицею (див. табл.2.1) [2]:

Таблиця 2.1

№	Назва формул площ фігур	Назва підгрупи формул площ фігур	Формули площ
1.	Формули площі трикутника	Формула площі трикутника за стороною та висотою	$S = \frac{1}{2}ah$, де a- основа трикутника h- висота трикутника
		Формула площі трикутника за трьома сторонами (Формула Герона)	$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, де p- півпериметр трикутника a, b, c - сторони трикутника
		Формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними	$S = \frac{1}{2}ab \times sin\gamma$, де a, b- відповідні сторони трикутника γ- кут між сторонами a і b
		Формула площі трикутника за трьома сторонам і радіусом описаного кола	$S = \frac{abc}{4R}$, де a, b, c - сторони трикутника R - радіус описаного кола
		Формула площі трикутника за трьома сторонами і радіусом вписаного кола	$S = p \times r$, де p - півпериметр трикутника r - радіус вписаного кола

2.	Формули площі квадрата	Формула площі квадрата за довжиною сторони	$S = a^2$, де a- сторона квадрата
		Формула площі квадрата за довжиною діагоналі	$S=\frac{1}{2}d^2$, де d - довжина діагоналей квадрата.
3.	Формула площі прямокутника	Формула площі прямокутника	$S = a \times b$, де a, b - довжини сторін прямокутника.
4.	Формули площі паралелограма	Формула площі паралелограма за довжиною сторони і висоти	$S = a \times h$, де a - сторона паралелограма h - висота паралелограма
		Формула площі паралелограма за двома сторонами і кутом між ними	$S = a \times b \times sin\alpha$, де a, b - сторони паралелограма α - кут між ними
		Формула площі паралелограма за двома діагоналями і кутом між ними	$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \times sin\beta$, де d_1, d_2 - довжини діагоналей паралелограма β - кут між діагоналями паралелограма

5.	Формули площі ромба	Формула площі ромба за довжиною сторони і висоти	S $=a \times h$, де a - сторона ромба h - висота ромба
		Формула площі ромба за довжиною сторони і кутом	S $=a^2 \times sin\alpha$, де a - довжина сторони ромба α - кут між сторонами ромба
		Формула площі ромба за довжинами його діагоналей	S = $\frac{1}{2}d_1 \times d_2$, де d_1, d_2 - довжини діагоналей.
6.	Формули площі трапеції	Формула Герона для трапеції	S= $\frac{a+b}{\lvert a-b \rvert}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-a-c)(p-a-d)}$, де *a, b* - довжини основ трапеції *c, d* - довжини бокових сторін трапеції *p* - півпериметр трапеції
		Формула площі трапеції за довжиною основ і висоти	S= $\frac{1}{2}(a+b) \times h$, де *a, b* - довжини основ трапеції h - висота трапеції

7.	Формули площі опуклого чотирикутника	Формула площі чотирикутника за довжинами діагоналей і кутом між ними	S= $\frac{1}{2}d_1 d_2 \times sin\alpha$, де $d_1,\ d_2$ - діагоналі чотирикутника α- кут між діагоналями чотирикутника
		Формула площі описаного чотирикутника (за півпериметром і радіусом вписаного кола)	S = $p \times r$, де p - півпериметр чотирикутника r - радіус вписаного кола
		Формула площі чотирикутника за довжиною сторін і значенням протилежних кутів	S = $\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) - abcd \times cos^2\theta}$, де p - півпериметр чотирикутника θ - півсума двох протилежних кутів чотирикутника
		Формула площі чотирикутника, навколо якого можна описати коло	S = $\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$, де p - півпериметр чотирикутника a,b,c,d - сторони чотирикутника

8.	Формули площі круга	Формула площі круга через радіус	$S = \pi R^2$, де R - радіус круга
		Формула площі круга через діаметр	$S = \frac{1}{4}\pi d^2$, де d - діаметр круга
9.	Формула площі еліпса	Формула площі еліпса	$S = \pi ab$, де a - довжина великої півосі еліпса, b - довжина малої півосі еліпса.

Розглянемо кілька властивостей площ, які часто використовують при розв'язуванні планіметричних задач.

Властивість 1. Якщо два трикутника мають однакові висоти (або спільну висоту), то відношення їх площ дорівнює відношенню їх основ [27]. Наслідок до властивості 1: якщо відношення площ трикутників дорівнює відношенню їхніх основ, то висоти таких трикутників рівні або ж їхня висота - спільна.

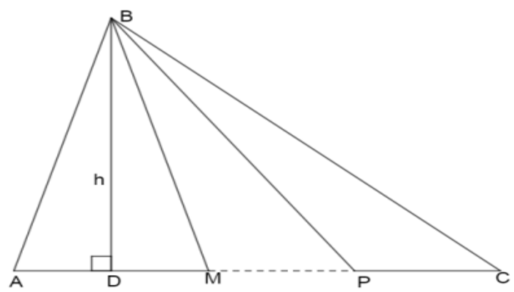


Рисунок 2.1

Доведення. Нехай у двох трикутників з основами AM і PC рівні висоти $h_1 = h_2 = h$. Розглянемо відношення площ цих трикутників:

$$\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta PBC}} = \frac{\frac{1}{2}AM \times h}{\frac{1}{2}PC \times h} = \frac{AM}{PC} \tag{2.2}$$

Властивість 2. Якщо два трикутника мають однакові сторони (спільну сторону), то відношення їхніх площ дорівнює відношенню їх висот, які проведені до них [27]. Наслідок до властивості 2: якщо відношення площ трикутників дорівнює відношенню їх висот, то такі трикутники мають однакові сторони (спільну сторону) (див. рис.2.2) або ж медіана трикутника ділить його на два рівновеликих трикутники (див. рис. 2.3).

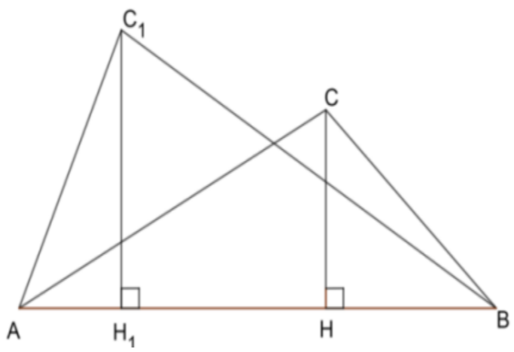


Рисунок 2.2

Доведення. Розглянемо ΔABC_1 і ΔABC. C_1H_1 і CH - їх висоти до спільної сторони.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ABC_1}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times CH}{\frac{1}{2}AB \times C_1H_1} = \frac{CH}{C_1H_1} \tag{2.3}$$

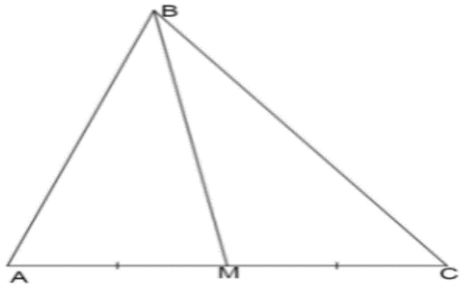


Рисунок 2.3

Доведення. За властивістю: $\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta BCM}} = \frac{AM}{MC}$. За умовою $AM = MC$, отже $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta BCM}$.

Властивість 3. Якщо два трикутника мають спільний кут, то їх площі відносяться як добуток сторін, утворюють цей кут (див. рис. 2.4).

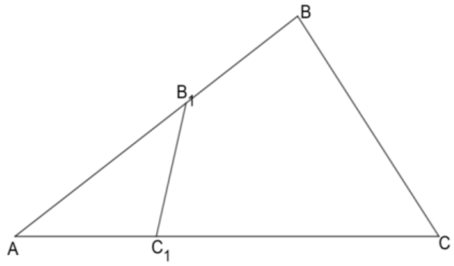


Рисунок 2.4

Доведення: Розглянемо ΔBAC і $\Delta B_1A\ C_1$ зі спільним кутом A. Використовуючи формулу площі трикутника S = $\frac{1}{2}ab \times sin\gamma$, отримуємо:

$$\frac{S_{\Delta BAC}}{S_{\Delta B_1AC_1}} = \frac{\frac{1}{2}AB\times AC\times sin\ A}{\frac{1}{2}AB_1\times AC_1\times sin\ A} = \frac{AB\times AC}{AB_1\times AC_1} \qquad (2.4)$$

Наслідок 3. Бісектриса кута трикутника ділить його на два трикутники, площі яких відносяться як сторони, які утворюють цей кут.

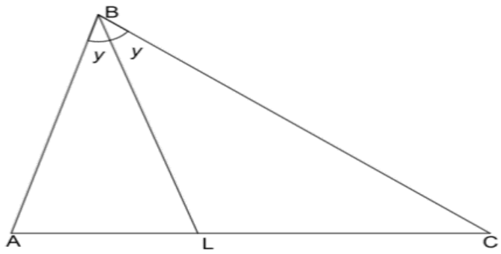


Рисунок 2.5

Доведення:

$$\frac{S_{\Delta BAL}}{S_{\Delta CBL_1}} = \frac{\frac{1}{2}AB\times BL\times sin\,\gamma}{\frac{1}{2}BC\times BL\times sin\,\gamma} = \frac{AB}{BC} \qquad (2.5)$$

Властивість 4. Відношення площ подібних трикутників (фігур) дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

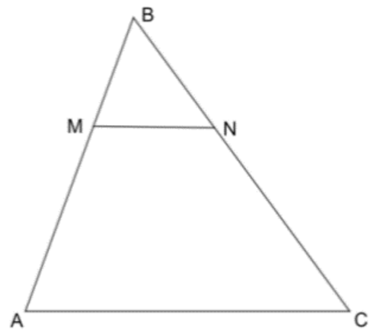


Рисунок 2.6

Доведення: Нехай в ΔABC і ΔMBN : $AB = k \times MB$, $BC = k \times BN$, та $\angle B$ – спільний. Розглянемо відношення площ подібних трикутників, отримуємо:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}} = \frac{\frac{1}{2}AB \times BC \times \sin B}{\frac{1}{2}MB \times BN \times \sin B} = \frac{k \times MB \times k \times BN}{MB \times BN} = k^2 \qquad (2.6)$$

Підводячи підсумок методики вивчення площ геометричних фігур в курсі планіметрії ЗЗСО, актуально зазначити, що при проведенні уроків ключову увагу необхідно приділити саме практичним завданням, а виклад теоретичного матеріалу, в свою чергу має бути зведено до мінімуму, що дозволить заощадити час для вирішення більш складних та важливих задач із ціллю здобуття практичних навиків. Невід'ємною частиною в процесі засвоєння матеріалу повинні бути самостійні роботи, які дозволять моніторити результативність проведеної навчальної роботи вчителем.

Висновки до 2 розділу

Проаналізувавши методику вивчення геометричних величин в курсі планіметрії ЗЗСО, а саме методику вивчення довжин, кутів та площ геометричних фігур, слід зазначити що вимірювання геометричних величин пов'язано з ідеями аксіоматичного методу, теорією дійсного числа та методикою математичного аналізу. Головним завданням методики їх вивчення є поєднання різних математичних ідей та методів і як результат вміння їх практично застосовувати при розв'язуванні задач. Застосування відподної, доступної методики - спростить процес вивчення та підвищить результативність засвоєння учнями понять про геометричні величини в процесі навчання (наприклад вивчаючи площі геометричних фігур часто використовується традиційно-аналітичний метод).

В геометрії, зокрема планіметрії, існує ряд об'єктів, які складають основу всієї науки. До таких об’єктів належать і ті геометричні величини, що становлять об’єкт даної роботи, саме тому методика їх вивчення є вкрай важливою та такою, що потребує особливої уваги. Також необхідно звернути увагу, що методика вивчення геометричних величин стимулює до розвитку логічного мислення учнів, що є важливою складовою навчального процесу, адже побудова математичної моделі, а також її дослідження та інтерпретація потребує великих знань і досвіду самих учнів.

Проаналізувавши другий розділ дипломної роботи, досягнуто таких результатів:

- ☐ побудовано блок-схему методики вивчення процесу вимірювання довжини відрізка;
- ☐ представлено алгоритм методики вивчення довжин в курсі планіметрії ЗЗСО;
- ☐ запропоновано блок-схему методики вивчення поняття “кута” в курсі планіметрії ЗЗСО;
- ☐ виокремлено визначення поняття “кут” відповідно до різноманітної навчальної та методичної літератури;
- ☐ виокремлено етапи методики вивчення площ геометричних фігур в розрізі навчальних класів;
- ☐ представлено всі формули площ фігур відповідно до курсу планіметрії ЗЗСО у вигляді таблиці відповідно до запропонованої класифікації;
- ☐ проаналізовано основні властивості площ, які найчастіше використовуються при розв'язуванні планіметричних задач.

РОЗДІЛ 3 ПРИКЛАДНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ВЕЛИЧИН ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ В КУРСІ ПЛАНІМЕТРІЇ ЗЗСО

3.1 Прикладне застосування величин довжин в курсі планіметрії ЗЗСО

На сучасному етапі розвитку людства, кожна людина повинна володіти певними прийомами математичної діяльності, а особливо навичками до їх застосувань, а саме до розв'язання конкретних практичних задач. Тому перед сучасними педагогами в процесі освітньо-навчальної діяльності поставлені завдання, щоб поєднати теоретичні знання із вмінням їх практично застосовувати при розв'язанні конкретних прикладів чи задач.

Розв'язування практичних задач на уроках математики сприяє розвитку в учнів перш за все вміння логічно та творчого мислити, свідомо та якісно засвоювати матеріал, активізує навчально-дослідну діяльність, дозволяє застосовувати отримані знання та вміння в тій чи іншій галузі, що в свою чергу, активізує в учнів інтерес до вивчення математики як науки в цілому.

Взагалі, реалізувати прикладну спрямованість вивчення математики вчителю доволі нелегко, адже перед ним постають такі дві основні проблеми:

- добір вдалого змісту навчального матеріалу з прикладною спрямованістю (важливо вибрати такий зміст, який відповідає навчальній програмі, в доступній формі , а також такий, що відповідає їхнім пізнавальним потребам);
- розуміння та можливість засвоїти учнями прикладний зміст математики.

Розв'язання практичних задач потребує достатньої математичної підготовки. Крім того, часто необхідні взаємопов'язані знання та навички з шкільних предметів, що тісно взаємодіють із математикою. Проте, як демонструє педагогічний досвід, лише невелика частина учнів володіє вміннями визначати міжпредметні зв'язки та використовувати (інтегрувати) потрібні знання та вміння в правильному напрямку.

Розкриваючи прикладний зміст математики, педагог повинен враховувати індивідуальні особливості учнів, що виражається диференціацією та урізноманітненням змісту, систем задач, прийомів та методів навчання.

Практичні задачі належать до тих засобів, які дають змогу розкрити прикладний зміст навчального матеріалу та показати результат його засвоєння учнями. Розв'язування практичних задач дозволяє активізувати спроможність учнів до навчання, стимулювати в них інтерес до вивчення математики (при правильному індивідуальному підході педагога), тому на уроках геометрії (планіметрії зокрема) вчитель повинен разом із учнями розв'язувати прикладні задачі для того, щоб в подальшому житті, учні могли самостійно досліджувати, застосовувати нестандартні підходи при розв'язуванні задач, що сприяє формуванню логічного та творчого мислення, а також навчально-дослідному та пізнавальному розвитку.

Досліджуючи поняття довжини в розрізі планіметрії , можна виокремити такі напрями прикладного застосування даного поняття в шкільній програмі:

✔довжина відрізка;

✔довжина вектора;

✔довжина кола;

✔довжина дуги кола.

Задачі на визначення довжини відрізків є одними з найлегших в курсі шкільної математики. Зупинимось на найбільш та поширених із них.

Задача

Дано: відрізок AB , точка M належить відрізку AB. AM=5см, MB=15см. Знайти: $AM:AB$ [17, с.137].

Рисунок 3.1

Розв'язування: $AB=AM+MB$=5+15=20см. Звідси, AM/AB=5/20=1/4.

Відповідь: 1/4 .

Задача

Дано: відрізок *MK* = 26 см. Точка *O* належить відрізку *MK*.Знайти *MO*, якщо вона на 12 см більша ніж *OK* [17, с.138].

Рисунок 3.2

Розв'язання: Нехай $OK=x$,тоді $MO=x+12$. За аксіомою вимірювання відрізків: довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою, отримаємо $MO+OK=MK$, тобто

$$x + 12 + x = 26;\ x + x = 26 - 12; 2x = 14; x = 7$$

Отже, *OK*=7см, *MO* = 7+12=19 см.

Відповідь: *MO* = 19 см.

Задача

Дано: відрізок довжиною 24 см розділено на чотири нерівні відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 20 см. Знайти відстань між серединами середніх відрізків [17, с.140].

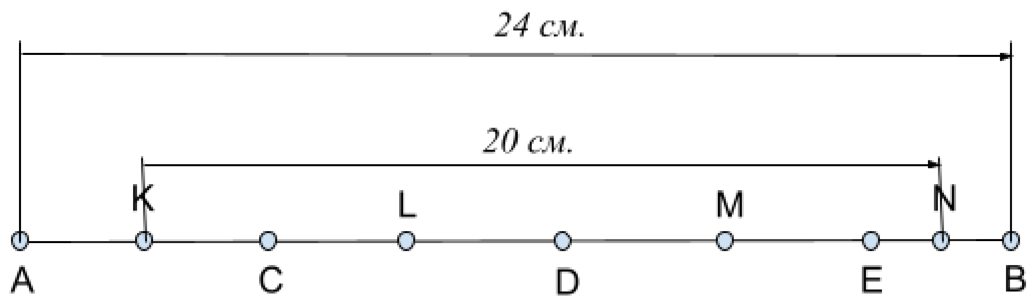


Рисунок 3.4

Розв'язання: за умовою задачі маємо:

$AK = KC, EN = NB$. Тоді $AK + NB = AB - KN = 24 - 20 = 4$ см., звідси $KC + EN = 4$ см.

Отже, $CE = KN - (KC + EN) = 20 - 4 = 16$см. Відповідно до заданої умови задачі: $CL = LD,\ DM = ME$. Тоді: $CL + ME = LD + DM = CE/2 = 16/2 = 8$.

Відповідь: відстань між серединами середніх відрізків = 8см.

Розглянемо найбільш поширені задачі, які зустрічаються в шкільній програмі, що стосуються довжини вектора.

Задача

Знайти довжину вектора $\overline{a}$ = (2;4) [38].

Розв'язання: | $\overline{a}$ | = $\sqrt{2^2 + 4^2}$ = $\sqrt{4 + 16}$ = $\sqrt{20}$ = 2 $\sqrt{5}$.

Відповідь: | $\overline{a}$ |=2 $\sqrt{5}$.

Задача

Дано: $\overline{a}$ (4; z). $|\overline{a}| = 5$.Знайти z.

Розв'язання: оскільки, $|\overline{a}| = \sqrt{4^2 + z^2} = \sqrt{16 + z^2}$, то $\sqrt{16 + z^2} = 5$. Маємо рівняння: $16 + z^2 = 25$, корені якого $z_1 = 3; z_2 = -3$

Відповідь : $z_1 = 3; z_2 = -3$

Що стосується довжини кола, то слід зазначити, що формула для обчислення довжини кола з радіусом R чи діаметром D доволі проста: *C=πD=2πR*. Але завдань в яких ми можемо напряму застосувати цю формулу мало як в шкільній практиці так і ЗВО. Тому пропоную розглянути частину завдань (для прикладу із ЗНО) , в яких в умові завдання потрібно знайти довжину кола, із різним рівнем складності.

Задача

Дано: радіус кола дорівнює 10 см. Знайти довжину дуги кола, якщо її кутова величина дорівнює 30^0 [38].

Розв’язання: $l = \frac{\pi R}{180} \times \alpha$, де $\angle MOK = \alpha$ - градусна міра відповідного центрального кута, $OM = OK = R$ - радіус кола.

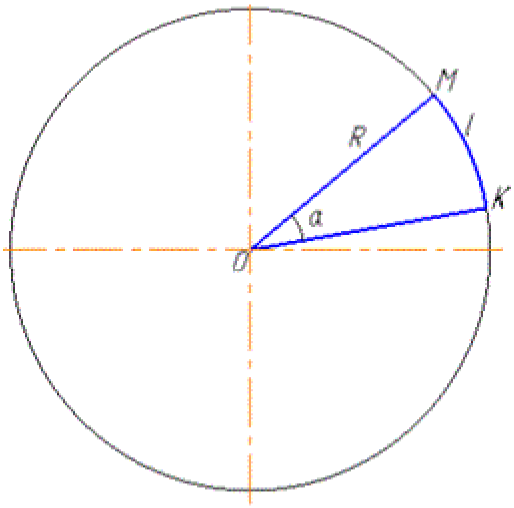


Рисунок 3.5

$\pi \approx 3{,}14$ - відношення довжини кола до його діаметра; l - довжина дуги кола, $l=\frac{\pi R}{180} \times \alpha = \frac{10\pi}{180} \times 30 = \frac{5}{3}\pi$.

Відповідь: $l=\frac{5}{3}\pi$.

Задача

Дано: при збільшенні круга його площа збільшилась у 9 разів. У скільки разів збільшилась довжина кола даного круга? [38]

Розв'язання: Відношення площ кругів $\frac{S_1}{S_2}$ дорівнює відношенню квадратів їх лінійних розмірів, зокрема і відношенню квадратів довжин їхніх кіл $\frac{C_1^2}{C_2^2}$,тобто $\frac{C_1^2}{C_2^2} = \frac{S_1}{S_2}$, де відношення площ рівне 9 за умовою $\frac{S_1}{S_2}=9$, звідси знаходимо коефіцієнт пропорційності: $\frac{C_1}{C_2} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{9}=3$.

Відповідь:3

Задача

Дано: з точки кола проведено дві перпендикулярні хорди, завдовжки 12 і 16 см. Знайти довжину кола [38].

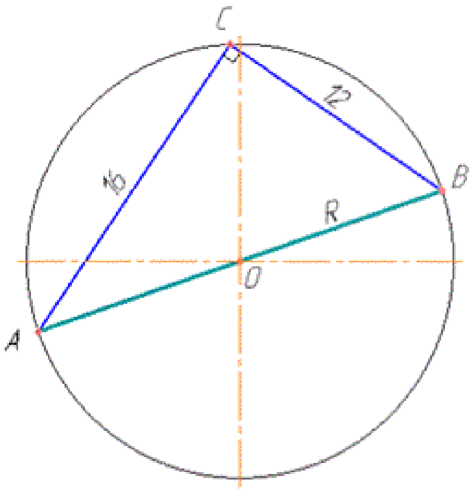


Рисунок 3.6

Розв'язання: Розглянемо прямокутний ΔACB (за умовою задачі) та за теоремою Піфагора знайдемо гіпотенузу AB:

$AB^2=AC^2+BC^2$, беремо корінь квадратний з обох частин від знаку рівності

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{16^2+12^2}=\sqrt{256+144}=\sqrt{400}=20 \text{ (см.)}$$

Отже, $D=AB=20$ (см) - діаметр заданого кола. $C=\pi D=20\pi$ (см.) - довжина заданого кола.

Відповідь: C=20π.

Задача

Дано: ромб, діагоналі якого дорівнюють 15 і 20 см. Знайти довжину кола l, вписаного в ромб. У відповідь записати l/π [38].

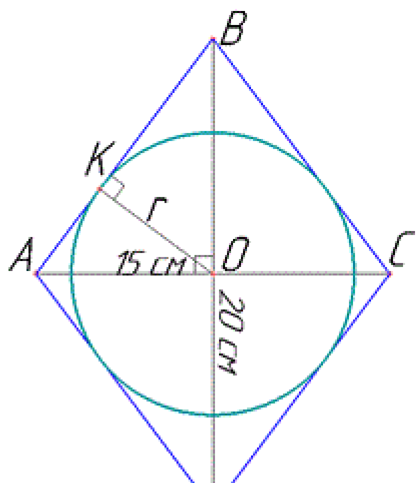


Рисунок 3.7

Розв’язання (I спосіб): відомо, що у ромб *ABCD* вписано коло з центром у точці перетину діагоналей ромба, що дотикається до сторони *AB* у точці *K*. Тому *OK=r* - радіус вписаного кола і, за властивістю, $AB\perp OK$. А за властивістю діагоналей ромба : $AC\perp BD$ і *AO=CO=AC/2=7,5, BO=DO=BD/2=10*. Отже, *OK* - висота прямокутного трикутника ΔAOB. Оскільки $\angle AOB=90^{\circ}$, то за теоремою Піфагора обчислимо гіпотенузу *AB*:

$$AB^2=AO^2+BO^2$$

$$AB^2=\sqrt{AO^2+\ BO^2}=\sqrt{7.5^2+\ 10^2}=\sqrt{56.25\ +\ 100}=\sqrt{156.25}=12.5\text{см}.$$

Обчислимо площу прямокутного трикутника ΔAOB через півдобуток катетів:

$$S_{\Delta AOB}=AO\frac{1}{2}\times BO=\frac{1}{2}\times 7.5\times 10=37.5\ \text{см}^2.$$

Обчислимо висоту *OK* прямокутного ΔAOB, *r* - радіус вписаного кола у ромб *ABCD*:

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}AB\times OK,\ \text{звідси}\ r=OK=\frac{2S_{\Delta AOB}}{AB}=\frac{2\times 37.5}{12.5}=6\text{см}.$$

$$l=2\pi r=2\pi\times 6=12\pi.$$

Розв'язання (II спосіб): Знайдемо площу ромба *ABCD*:

$$S_{ABCD}=\ \frac{1}{2}AC\times BD=\frac{1}{2}\times 15\times 20=150\ \text{см}^2.$$

Обчислимо півпериметр ромба *ABCD* (у ромба всі сторони рівні):

$$p_{ABCD}=\frac{1}{2}P_{ABCD}=\frac{1}{2}\times 4\text{AB}=\frac{1}{2}\times 4\times 12.5=25\ \text{см}.$$

Обчислимо радіус вписаного кола *r* у ромб *ABCD*:

$$\text{r}=\frac{S_{ABCD}}{p_{ABCD}}=\frac{150}{25}=6\ \text{см}.$$

Знайдемо довжину вписаного кола *l*: $l=2\pi r=2\pi\times 6=12\pi$. Отже, $l/\pi=12$.

Відповідь: $l/\pi=12$.

Узагальнюючи прикладне застосування величин довжин в курсі планіметрії ЗЗСО, слід зазначити, що розв’язування задач на застосування величин довжин, потребує аналітично-логічного мислення, уміння виділяти елементи і включати їх у нові математичні зв'язки. Засвоївши розв'язування вищепродемонстрованих задач, учні матимуть змогу застосовувати свої вміння та навички в подальших етапах вивчення планіметрії, геометрії і математики як науки в цілому.

3.2 Прикладне застосування величин кутів в курсі планіметрії ЗЗСО

Змістова лінія кута, як геометричної величини проходить через весь курс геометрії ЗЗСО, оскільки зустрічається в процесі вивчення багатьох тем та потребує чимало набутих знань та систематичного вивчення математики як науки в цілому.

Практичних задач, що стосуються визначення міри кута є досить багато не лише в шкільній програмі, але й при вступі у ЗВО. Зупинимось на підбірці задач, що стосуються визначення міри кута, різного рівня складності, які можуть зустрічатися учнями при складанні ЗНО. Слід зазначити, що в більшості випадків такі завдання потребують знань властивостей кутів, що є базовими при визначенні їх міри.

Задача

Знайти: який кут утворюють стрілки годинника о 16 годині (див.рис.3.8) [38].

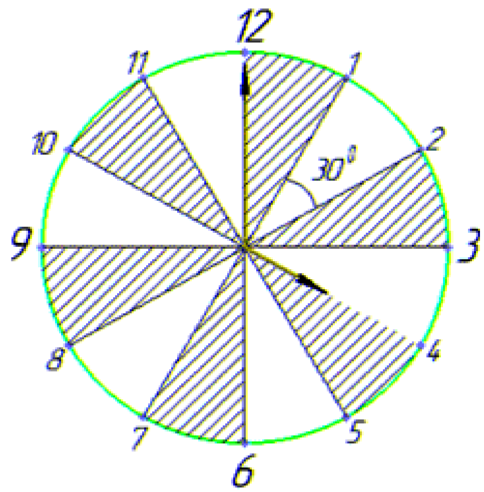


Рисунок 3.8

Розв'язання: градусна міра годинника (круга) дорівнює *36о°*. Градусна міра однієї із 12 частин годинника : *36о°/12=30°*. О 16 годині хвилинна стрілка годинника стоятиме в початковому положенні 12, а стрілка годинника пройде рівно 4 частини круга. Тому кут між стрілками о 16 годині буде дорівнювати: $4\times30° = 120°$.

Відповідь: $\angle 120°$.

Задача

Дано: всередині $\angle AOB$ проведено промінь OC так, що $\angle AOC=2\angle BOC$. Знайти кут AOC, якщо $\angle AOB=54^0$ [38].

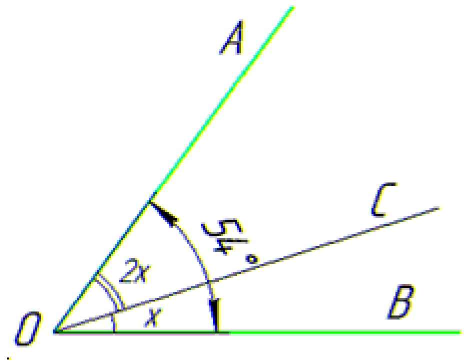


Рисунок 3.9

Розв'язання: нехай $\angle BOC=x$, тоді $\angle AOC$ дорівнює $2x$. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами. Отже, $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = x + 2x = 3x$. За умовою задачі: $\angle AOB = 54^{\circ}$, тобто $3x=54^0$, звідси $x = \angle BOC = 18^{\circ}$ і $\angle AOC = 2x = 36^{\circ}$.

Відповідь: $\angle AOC = 36^{\circ}$.

Задача

Дано: через точку перетину двох перпендикулярних прямих проведено третю пряму. Знайдіть найменший з тупих кутів, що утворився в результаті перетину, якщо найбільший з кутів дорівнює 165^0 [38].

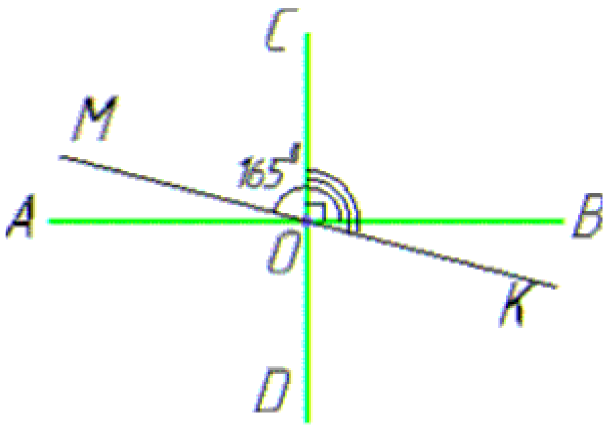


Рисунок 3.10

Розв'язання: відомо, що $\angle BOC=90^0$, $\angle BOM=165^0$ (за умовою). $\angle AOB=180$ °(розгорнутий), тому $\angle AOM=\angle AOB-\angle BOM=180^0-165^0=15^0$. $\angle BOK=\angle AOM=15°$, як вертикальні. $\angle COK=\angle BOC+\angle BOK=90^0+15^0=105^0$ – найменший з тупих кутів, що утворилися.

Відповідь: $\angle 105^0$.

Задача

Дано: різниця внутрішніх односторонніх кутів, які утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, відноситься до їх суми як 2:3.Знайти градусну міру кута, під яким січна перетинає паралельні прямі [38].

Рисунок 3.11

Розв'язання: сума внутрішніх односторонніх кутів, за ознакою паралельністю прямих = 180^0 . Нехай менший з них становить x, тоді більший =

180^0-x. Їх різниця - це 180^0-x-x, або 180^0-$2x$. За умовою задачі, склавши пропорцію, знайдемо x:

$$\frac{180-2x}{180}=\frac{2}{3};\ 180-2x=\frac{180\times 2}{3};\ 180-2x=120;\ 2x=60;\ x=30.$$

Отже, *30* - градусна міра кута, під яким січна перетинає паралельні прямі.

Відповідь: $\angle 30^0$.

Задача

Дано: прямі AB, CD і MK, які перетинаються у точці O. Знайти $\angle BOK$, якщо $\angle AOC=30^0$, $\angle MOD=110^0$ [38].

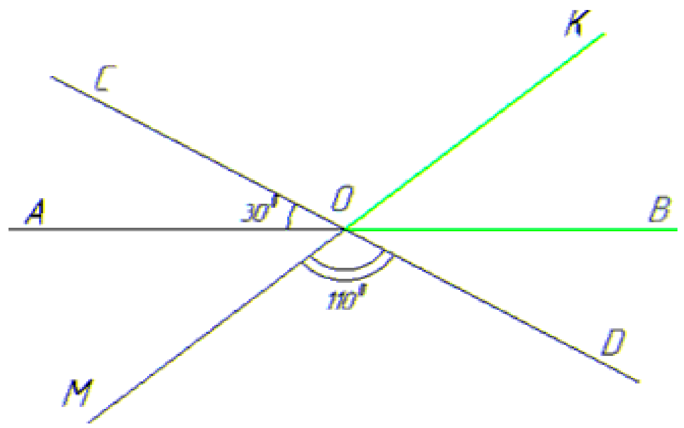


Рисунок 3.12

Розв'язання: $\angle COK=\angle MOD=110^0$ як вертикальні кути. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами [17]. $\angle AOK=\angle AOC+\angle COK=30^0+110^0=140^0$. Оскільки, $\angle AOK+\angle BOK=180^0$ як суміжні кути. Звідси отримуємо, $\angle BOK=180^0-\angle AOK=180^0-140^0=40^0$.

Відповідь: $\angle BOK=40^0$.

Узагальнюючи прикладне застосування величин кутів у курсі геометрії (планіметрії зокрема) ЗЗСО, а саме визначення їх міри, слід зауважити, що таких задач є безліч в шкільній практиці. Розв'язування задач прикладного змісту, які виникають не лише в математиці, а й поза її межами, що стосуються визначення міри кутів, демонструє актуальність вивчення даного матеріалу при освоєнні низки робітничих професій, що сприяє посиленню гнучкості та системності навчання учнів. Крім того, засвоєння учнями цього матеріалу дасть змогу успішно брати участь у вступних випробуваннях з математики при вступі до ЗВО. Застосування набутих знань та умінь при вивченні вимірювання величин кутів доволі часто практично застосовується в тих чи інших професіях (зокрема технічних), що підкреслює актуальність їх вивчення.

3.3 Прикладне застосування величин площ фігур в курсі планіметрії ЗЗСО

Передумовою успішного практичного застосування величин площ фігур , а саме їх обчислення чи застосування при обчисленні інших елементів задачі, є знання теоретичної бази, а саме формул площ геометричних фігур, основних властивостей тих чи інших геометричних фігур та їх площ зокрема.

В методичній літературі виділяють три основні типи задач, які розв’язуються при визначенні площ геометричних фігур:

✔ знаходження площі фігури двома способами: складанням або рівняння, або системи рівнянь;

✔ задачі, при розв’язанні яких використовується властивість адитивності площі (площа, як сукупність площ елементів із яких вона складається);

✔ задачі на застосування властивостей відношення площ [26, с.114].

Дослідивши перший тип задач доцільно виокремити конкретні дії, які характеризують даний прийом:

1) формування виразу для знаходження площі фігури використовуючи невідому складову;

2) складання рівності з отриманих виразів для отримання площі фігури;

3) розв'язування отриманого рівняння і знаходження невідомою в умові задачі величини.

Зваживши вищенаведені дії, зазначу, що перший тип задач дозволяє перейти від розв'язування геометричної задачі до алгебраїчної.

Проаналізувавши багато задач з різних посібників й збірників, розглянемо найбільш типові задачі.

Задача

Дано: прямокутний $\Delta\, ABC$. Знайти бісектрису прямого кута , якщо AC=2 см., BC=3 см. [38].

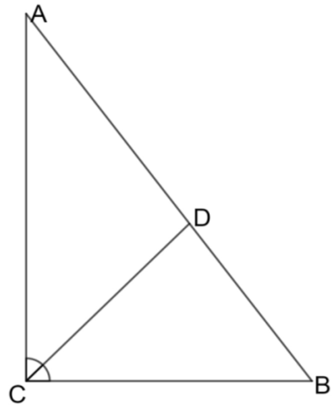


Рисунок 3.13

Розв'язання (I спосіб): за теоремою Піфагора:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \text{ см.}$$

За властивістю бісектриси кута трикутника :

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC};\ \frac{AD}{\sqrt{13}-AD} = \frac{2}{3};\ AD = \frac{2}{5}\sqrt{13}\ .\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

З ΔACD за теоремою косинусів:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD \times \cos A = 2^2 + \left(\frac{2}{5}\sqrt{13}\right)^2 - 2 \times 2 \times \frac{2}{5}\sqrt{13} \times \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{72}{25};\ CD = \frac{6}{5}\sqrt{2} \text{ см.}$$

Відповідь: $CD = \frac{6}{5}\sqrt{2}$ см.

Розв'язання (II спосіб): застосовуючи метод площ, знайдемо площу ΔABC двома способами:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \times BC = 3.$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta DCB} = \frac{1}{2} AC \times CD \times \sin 45^\circ + \frac{1}{2} BC \times CD \times \sin 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{4} \times CD.$$

$$\frac{5\sqrt{2}}{4} \times CD = 3 \text{ см.}$$

Отже, $CD = \frac{6}{5}\sqrt{2}$ см.

Як показує практика, другий метод розв’язання, є більш простим та доступним для учнів.

Задача

Дано: $\Delta\, ABC$,AH - висота , яка дорівнює медіані CM. Знайти $\angle MCB$ [38].

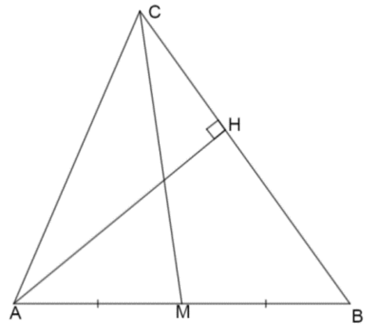


Рисунок 3.14

Розв'язання: обчислимо площу ΔABC двома способами:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\ \times AH \text{ і } S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta MCB}.$$

$$S_{\Delta MCB}=\frac{1}{2}CM\ \times BC\ \times sin\angle MCB.$$

$$S_{\Delta ABC} = 2S_{\Delta MCB} = 2\times(\frac{1}{2}CM\ \times BC\ \times sin\angle MCB).$$

$$S_{\Delta ABC}=CM\ \times BC\ \times sin\angle MCB.$$

Прирівнюємо вирази для площ:

$$\frac{1}{2}BC\ \times AH = CM\ \times BC\ \times sin\angle MCB.$$

За умовою $AH = CM$, отже $sin\angle MCB =\frac{1}{2}$.

Відповідь: $\angle MCB = 30^{\circ}$.

Що стосується другого типу задач, доцільно виокремити алгоритм прийомів для їх розв'язування:

1) розбиття фігури на елементи відповідно до умови задачі;

2) формування виразу для знаходження площі фігури як суми площ фігур, з яких вона складається;

3) обчислення площі вихідної фігури, відповідно до умов задачі;

4) складання рівності отриманих виразів для обчислення площі фігури;

5) розв’язування отриманого рівняння і знаходження необхідної, шуканої величини.

Отож, розглянемо приклади задач другого типу.

Задача

Дано: $ABCD$ - паралелограм, площа якого = S. Знайти площу $AMCK$, якщо точки M і K середини сторін BC і CD відповідно [38].

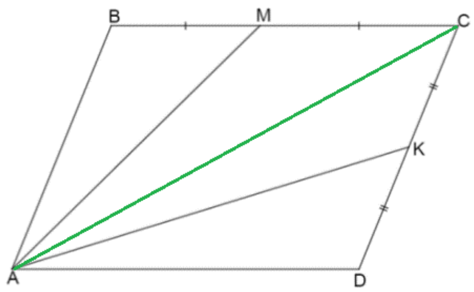


Рисунок 3.15

Розв'язання: проводимо діагональ AC. $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD}$, а за наслідком 1 : $S_{\Delta ABM} = S_{\Delta AMC}$ і $S_{\Delta ACK} = S_{\Delta AKD}$. Отже, $S_{AMCK} = S_{\Delta AMC} + S_{\Delta ACK} = \frac{S}{2}$.

Відповідь: $S_{AMCK} = \frac{S}{2}$.

Задача

Дано: середини двох паралельних сторін паралелограма з'єднані з протилежними вершинами. Знайти, яка частина площі паралелограма обмежена проведеними відрізками [38].

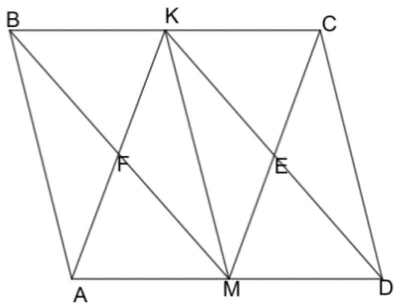


Рисунок 3.16

Розв'язання: провівши відрізок *MK*, отримуємо два паралелограми з рівними площами. Діагоналі ділять кожний з них на чотири рівновеликих частини, отже $S_{MFKE} = S_{\Delta MFK}+S_{\Delta MEK} = \frac{2}{8} S_{ABCD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

Відповідь: $\frac{1}{4} S_{ABCD}$.

Розглянемо також третій тип розв’язування задач із застосуванням поняття величини площі геометричних фігур.

Що стосується третього типу задач, доцільно виокремити алгоритм прийомів для їх розв'язування:

1) співвідношення невідомих відрізків з площею фігур,складовими яких вони є (або співвідношення площ шуканих фігур з відповідними відрізками), і застосування відповідних зазначених властивостей;

2) знаходження співвідношення площ відповідних фігур (довжин відрізків).

Розглянемо кілька типових задач третього типу.

Задача

Дано: Δ *ABC*, точка *H* належить стороні АВ і ділить її в співвідношенні 2 : 3, від вершини *B*. Знайти площу Δ*HBC*, якщо площа Δ*ABC* =15 см^2 [38].

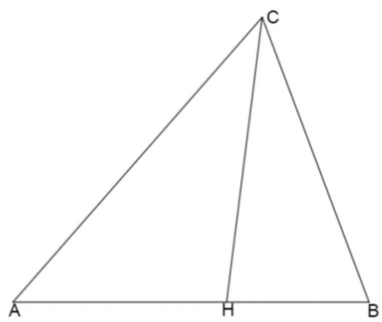


Рисунок 3.17

Розв'язання: ΔABC і ΔHBC мають спільний кут B, отже:

$$\frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{HB\times BC}{AB\times BC} = \frac{HB}{AB} = \frac{2}{5}.$$

Отже, $S_{\Delta HBC} = \frac{2}{5} S_{\Delta ABC} = \frac{2}{5} \times 15 = 6$ см^2.

Відповідь: $S_{\Delta HBC} = 6$ см^2.

Аналізуючи педагогічний досвід, зазначу, що найбільш складний із розглянутих прийомів є тип задач, в розв'язанні яких необхідно одночасно використовувати і властивість адитивності площ, і властивість відношень площ.

Задача

Дано: *ABC* - трикутник. На сторонах трикутника є точки *M, N, P* так, що *AM : MB = BN : CN = CP : AP = 1 : 2.* Знайти площу ΔABC, якщо площа ΔMNP = 15см^2 [38].

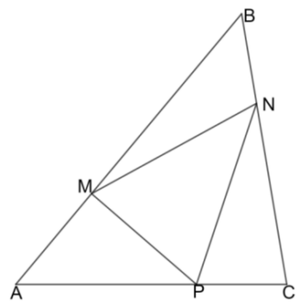


Рисунок 3.18

Розв'язання: відповідно до умови задачі: $BM = \frac{2}{3}BA,\ BN = \frac{1}{3}BC$. ΔABC та ΔMBN мають спільний $\angle B$, отож: $\frac{S_{\Delta MBN}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{2}{3}BA\times\frac{1}{3}BC}{BA\times BC} = \frac{2}{9}.S_{\Delta MBN} = \frac{2}{9}S_{\Delta ABC}$. Аналогічно $S_{\Delta MAP} = \frac{2}{9}S_{\Delta ABC}$; $S_{\Delta NCP} = \frac{2}{9}S_{\Delta ABC}$. За властивістю адитивності: $S_{\Delta ABC}$=$S_{\Delta MNP} + 3\times\frac{2}{9}S_{\Delta ABC}$. Отже, $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$=15, тоді $S_{\Delta ABC}$=45 см^2.

Відповідь: $S_{\Delta ABC}$=45 см^2.

Досліджуючи типи задач на застосування величин площ геометричних фігур чи їх безпосереднє обчислення, слід зазначити, що такі задачі доволі часто зустрічаються при складанні ЗНО, зупинимось на деяких із них:

Задача

Дано: *ABC* - трикутник. *AB* = 26 см., *AC* = 30 см., а довжина медіани *AM* = 14 см. Знайти площу ΔABC [38].

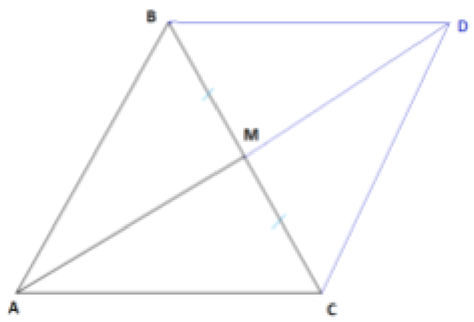


Рисунок 3.19

Розв'язання: добудуємо ΔABC до паралелограма *ABCD*, в якому *M* – середина *AD*. Тоді сторона *AD* = 28 см. Знайдемо площу ΔABD за формулою Герона: $p = \frac{30+26+28}{2} = 42$, отже, $S_{\Delta ABD} = \sqrt{42 \times 16 \times 12 \times 14} = 336.$ $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$ та $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$=336 (см^2).

Відповідь:$S_{\Delta ABC}$336 (см^2).

Задача

Дано: ABC- трикутник. В ΔABC вписано коло радіусом 5 см. Одна зі сторін ΔABC точкою дотику ділиться на відрізки 12 см. і 7,5 см.. Знайти площу ΔABC [38].

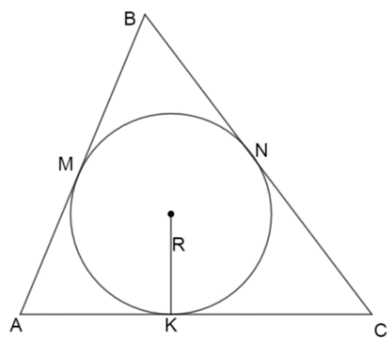


Рисунок 3.20

Розв'язання: нехай точки *К, М, N* – точки дотику кола зі сторонами ΔABC. За властивістю дотичних:

$$\text{АК} = \text{АМ} = 12 \text{ см.};$$

$$\text{МВ} = \text{В}N = 7,5 \text{ см.};$$

$$\text{СК} = \text{С}N = x.$$

$S_{\Delta ABC} = p \times r = (19.5 + x) \times 5$, але з іншого боку (відповідно до формули Герона) : $S_{\Delta ABC}$=$\sqrt{(19.5 + x) \times 12 \times 7.5 \times x}$. Прирівнюємо вирази для площ ΔABC і отримаємо рівняння:

$$(19.5 + x) \times 5 = \sqrt{(19.5 + x) \times 12 \times 7.5 \times x};$$

$$(19.5 + x) \times 5^2 = 12 \times 7.5 \times x;$$

$$x = 7.5.$$

$$S_{\Delta ABC} = (19,5 + 7,5) \times 5 = 135 \text{ см}^2.$$

Відповідь: $S_{\Delta ABC} = 135$ (см^2).

Задача

Дано: *ABC* - прямокутний трикутник. Довжина гіпотенузи *AB = 26 см.* Точка *M* - середина гіпотенузи *AB*. Точка *O* віддалена від вершин *B* і *C* на 15 см, а від сторони *BC* – на $10\sqrt{2}$ см. З точки *O* на катет *BC* опущено перпендикуляр *OK*, точка *K* належить відрізку *OM*. Довести, що *KMAC* – трапеція. Знайти площу трапеції *KMAC* [38].

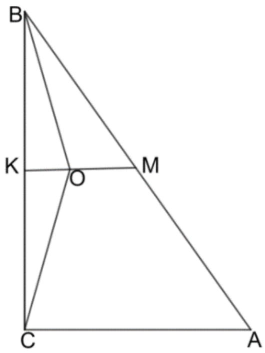


Рисунок 3.21

Розв'язання: відповідно до умови задачі *BO = OC=15см.*, отже, ΔBOC – рівнобедрений, тому *OK* - медіана. *K* – середина *BC, M* – середина *AB*. Таким чином, *KM* - середня лінія ΔABC. Отже $KM \parallel AC$, звідси виходить, що чотирикутник *KMAC* – трапеція. З ΔBKO: $BK = \sqrt{BO^2 - KO^2} = \sqrt{225 - 200} = 5$ см. Точка *M* – середина *AB*, тому BM=$\frac{1}{2} \times AB$=13. З ΔBKM:

KM=12 (5, 12, 13 – піфагорова трійка). $S_{\Delta BKM} = \frac{1}{2} \times BK \times KM = \frac{1}{2} \times 5 \times 12$ =30.ВКМ ~∆ВСА (за другою ознакою подібності трикутників); $\frac{S_{\Delta BKM}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$; $S_{\Delta ABC} = 4 \times S_{\Delta BKM}$=4×30=120, тоді $S_{KMAC} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta BKM}$= 120-30 = 90 (см^2).

Відповідь: $S_{KMAC} = 90$ (см^2).

Підводячи підсумки в питанні прикладного застосування величини площ геометричних фігур, слід зазначити, що вміння та навички, при обчисленні площ фігур чи їх застосування для знаходження будь яких інших елементів задач вищенаведених типів, є потужним інструментом, який дає можливість учням обирати найбільш раціональний та доступний шлях в розв’язуванні планіметричних задач, що значною мірою спрощує процес розв’язування та заощаджує час при складанні ЗНО чи на екзаменах при вступі до ЗВО. З педагогічної практики, хотілося б зазначити також, що набір задач на обчислення площ геометричних фігур має бути багатим на різні комбінації, тобто необхідно передбачити достатню кількість варіантів завдань, що потребують виконання відповідних обчислень, котрі демонструють величезну систему набутих знань та умінь.

Висновки до 3 розділу

В сучасних умовах розвитку суспільства, кожен індивід повинен володіти певними прийомами та навичками математичної діяльності до розв'язання конкретних практичних задач. Саме тому завданням сучасної школи є поєднання теоретичного навчання з подальшим практичним застосуванням. Головним завданням сучасної шкільної освіти повинно бути посилене впровадження саме практичного (прикладного) навчання, яке дозволяє краще засвоювати та відтворювати, як наслідок набуті знання та вміння в процесі вивчення.

В процесі розв’язування прикладних задач, встановлено, що останнє сприяє розвитку в учнів перш за все вміння логічно та творчого мислити, свідомо та якісно засвоювати матеріал, активізує навчально-дослідну діяльність, дозволяє застосовувати отримані знання та вміння в тій чи іншій галузі, що в свою чергу, активізує в учнів інтерес до вивчення математики як науки в цілому.

Взагалі, реалізувати прикладну спрямованість вивчення математики вчителю доволі нелегко, адже перед ним постають такі дві основні проблеми:

- добір вдалого змісту навчального матеріалу з прикладною спрямованістю (важливо вибрати такий зміст, який відповідає навчальній програмі, в доступній формі , а також такий, що відповідає їхнім пізнавальним потребам);
- розуміння та можливість засвоїти учнями прикладний зміст математики.

Розв'язання практичних задач потребує достатньої математичної підготовки. Крім того, часто необхідні взаємопов'язані знання з інших шкільних предметів. Проте лише незначна частина учнів володіє уміннями встановлювати міжпредметні зв'язки та інтегрувати потрібні знання та вміння в правильному напрямку. Важливо, щоб учні вміли використовувати нестандартні підходи до розв'язування задач, що сприяє результативному та ефективному формуванню творчого, логічного мислення учнів, підвищенню навчально-пізнавальної діяльності та розвитку учня як особистості в цілому.

Проаналізувавши третій (практичний) розділ дипломної роботи, досягнуто таких результатів:

- на основі педагогічного досвіду виокремлено основні проблеми, що постають перед вчителем математики при реалізації прикладної спрямованості на уроках;

- виділено основні напрями прикладного застосування поняття "довжина" в шкільній програмі, а також розглянуто типові практичні задачі із знаходження довжини (відрізка, вектора, кола);
- підібрано і розглянуто практичні задачі, що стосуються визначення міри кута, які найчастіше зустрічаються як в шкільній практиці, так і при складанні ЗНО;
- виокремлено та розглянуто три основні типи задач на визначення площ геометричних фігур та їх елементів;
- запропоновано алгоритм застосування відповідних прийомів для розв'язування кожного із виокремлених типів задач;
- аналізуючи педагогічний досвід, зроблено висновки, щодо доступності для учнів способів розв'язання розглянутих задач, виокремлення найбільш складних для засвоєння та найбільш поширених при складанні ЗНО тощо.

ВИСНОВКИ

В контексті проведеного дослідження виявлено, що вимірювання величин, зокрема, геометричних (довжин, кутів, площ, об'ємів), – один з найскладніших розділів математики. Для прикладу, лише наприкінці XIX – на початку XX ст. було створено загальну теорію вимірювання, насамперед, завдяки роботам таких вчених як К.Жордан, Е.Борель, А.Лебег та інші. Саме тому , процес вивчення геометричних величин в курсі планіметрії ЗЗСО потребує поглибленої уваги як педагогів так і учнів та є надзвичайно актуальним та необхідним на сучасному етапі розвитку.

У концепції математичної освіти підкреслюється, що остання повинна спиратись на розвивальний характер навчання і прикладну спрямованість, розвиток вміння застосовувати набуті учнями знання для розв'язування практичних задач, які часто виникають за межами математики проте розв'язати їх без математичного досвіду складно, а часом і неможливо. Проте як показують численні педагогічні дослідження у навчанні математики, а саме розв'язуванні прикладних задач дедалі більше набуває значення особистісний, індивідуальний підхід, а саме диференціація змісту, систем задач, прийомів та методів навчання у відповідності до особливостей учнів, та рівня їх знань. Проте важливою умовою готовності учнів до вивчення геометричних величин є певні набуті теоретичні знання із геометрії та часом і алгебри.

Також , аналізуючи прикладне застосування геометричних величин при розв'язуванні задач в курсі планіметрії середньої школи, необхідно підкреслити, що процес застосування набутих учнями математичних знань та умінь до розв'язування будь яких практичних задач ділиться на три етапи:

1) етап формалізації (формування та розуміння умови задачі);

2) етап розв'язування задачі в контексті сформованої моделі;

3) етап інтерпретації одержаного розв'язку задачі, тобто застосування результату отриманих розвязків, досягнення мети задачі.

Вміння виокремити вищезазначені етапи в контексті застосування математичних прийомів і методів із конкретними аксіомами, теоремами, формулами, властивостями то визначає рівень знань і як результат – роботу педагога при навчанні (підготовці) учнів.

Досвід роботи вчителів математики, власний досвід, отриманий на педагогічній практиці та у ході дослідження теми, написання магістерської роботи, свідчить про те, що розв’язування прикладних задач на визначення різноманітних геометричних величин, не викликають в учнів особливих труднощів, якщо ж теоретичний матеріал вчасно та систематично було засвоєно, що демонструє системно-конструктивний характер математики як науки в цілому.

В геометрії, зокрема планіметрії, існує ряд об'єктів, які складають основу всієї науки. До таких об’єктів належать і ті геометричні величини, що становлять об’єкт даної роботи, саме тому методика їх вивчення та практичне застосування є вкрай важливими та такими, що потребують концентрованої уваги.

Внаслідок проведеного дослідження та написання дипломної роботи досягнуто таких результатів:

☑ досліджено чітко визначені етапи розвитку одиниць величин;

☑ проведено парадигму використовуваних прийомів стародавніх єгиптян, вавилонян, греків для вимірювання різноманітних геометричних величин фігур чи об'єктів;

☑ досліджено роботи видатних вчених, котрі вивчали проблематику вивчення геометричних величин, наближаючись до сьогодення;

☑ проаналізовано вивчення геометричних величин в контексті дослідження шкільних підручників із геометрії;

☑ виокремлено основні характеристики величин, проводячи аналіз навчальної та наукової літератури;

☑ розглянуто основні підходи визначення геометричних величин;

- ☑ виокремлено способи вимірювання геометричних величин та відповідні до них методи вимірювання;
- ☑ виділено базові набуті знання та вміння учнями в процесі вивчення геометричних величин;
- ☑ побудовано блок-схему методики вивчення процесу вимірювання довжини відрізка;
- ☑ представлено алгоритм методики вивчення довжин в курсі планіметрії ЗЗСО;
- ☑ запропоновано блок-схему методики вивчення поняття “кут” в курсі планіметрії ЗЗСО;
- ☑ виокремлено визначення поняття “кут” відповідно до різноманітної навчальної та методичної літератури;
- ☑ виокремлено етапи методики вивчення площ геометричних фігур в розрізі навчальних класів;
- ☑ представлено всі формули площ фігур відповідно до курсу планіметрії ЗЗСО у вигляді таблиці відповідно до запропонованої класифікації;
- ☑ проаналізовано основні властивості площ, які найчастіше використовуються при розв'язуванні планіметричних задач.
- ☑ на основі педагогічного досвіду виокремлено основні проблеми, що постають перед вчителем математики при реалізації прикладної спрямованості на уроках;
- ☑ виділено основні напрями прикладного застосування поняття “довжина” в шкільній програмі, а також розглянуто типові практичні задачі із знаходження довжини (відрізка, вектора, кола);
- ☑ підібрано і розглянуто практичні задачі, що стосуються визначення міри кута, які найчастіше зустрічаються як в шкільній практиці, так і при складанні ЗНО;
- ☑ виокремлено та розглянуто три основні типи задач на визначення площ геометричних фігур та їх елементів;

☑ запропоновано алгоритм застосування відповідних прийомів для розв'язування кожного із виокремлених типів задач;

☑ аналізуючи педагогічний досвід, зроблено висновки, щодо доступності для учнів способів розв'язання розглянутих задач, виокремлення найбільш складних для засвоєння та найбільш поширених при складанні ЗНО тощо.

☑ запропоновано специфічне тестування "чорної", "сірої" та "білої скриньки", які застосовуються у власній педагогічній діяльності за допомогою Google Форм (дод.);

☑ опубліковано тези на III Всеукраїнській науково-методичній інтернет-конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ плюс-2022 Форум молодих дослідників»;

☑ результати досягнуті внаслідок досліджень при написанні дипломної роботи успішно впроваджено в власній педагогічній практиці протягом 2021-22 та 2022-23 навчальних років.

Цілеспрямоване дослідження в ході написання дипломної роботи продемонструвало досягнення поставленої мети.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Багіш О.А. Вимірювання довжин у ході практичних робіт / Багішова О.А. / / Математика в школі.- 2005. - №4.- С.62-64.
2. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Геометрія (академічний, профільний рівень) .11 клас. / Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г., Владіміров В.М. - Київ: Генеза, 2011. - 336с.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики: навч. пос. / Г.П.Бевз. - К.: Вища школа, 1989. - 366с.
4. Блох А.Я. Методика викладання математики в середній школі : загальна методика: навч. посібник для студентів пед. ін-тів / А.Я. Блох. - К.: Вища школа, 1985. - 336 с.
5. Богданович М.В. Методика викладання математики: навч. пос./ М.В.Богданович, М.В.Козак, Я.А.Король. - 3-тє вид., переробл. - Тернопіль: навч. книга. - Богдан, 2006. - 336 с.
6. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія: Навч. посібник для студ. / Борисенко О.А. — Харків : Основа, 1995. — 304 с.
7. Бродський Я.С. Планіметрія у старшій школі/ Я.С.Бродський, В.Ю.Гречук, О.Я.Павлов, А.К.Сліпенко – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005 – 404 с.
8. Виноградова І.К. Методика викладання математики в середній школі./ Виноградова І.К. - Р-на-Д.: Фенікс. 2005.- 214с.
9. Віленкін Н.Я. Про поняття величини. / Віленкін Н.Я. // Математика в школі: наук.-метод. журн., 1973.- №3. - С. 4-7.
10. Гадяцький М.В., Хлібнік Т.М. Організація навчального процесу в сучасній школі. - Харків: Видавництво «Ранок», «Векс». - 2004. - 136 с.
11. Глейзер Г.І. Історія математики в школі./ Глейзер Г.І. -К.: Освіта. 1982. – 181с.
12. Гусєв В.А. . Методика навчання геометрії ./ Гусєв В.А. - К.: ACADEMA. 2004. - 156с.
13. Давидів А.Ю. Елементарна геометрія ./ Давидів А.Ю. - К.: 35 Дуленчук. 1915. – 316с.
14. Єпішева О. Б. Загальна методика викладання математики в середній школі : курс лекцій: навч. посібник для студентів фіз.-мат. спец. пед. ін-тів / О.Б. Єпішева. - Тобольськ: Вид. ТГПІ ім. Д.І. Менделєєва, 1997. - 191 с

15. Єршова А.П. Геометрія. Підручник. 11 клас. Академічний рівень.Профільний рівень / Єршова А.П. - Харків: Ранок, 2017.-304с.
16. Жданов В. І. Вступ до теорії відносності. / Жданов В.І. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2008. - 290 с
17. Істер О.С. Геометрія (профільний рівень), Підручник 10 клас. Профільний рівень./ Істер О. С. – Київ: Генеза, 2018. - 368с.
18. Кремень В.Г. Освіта і наука України: шляхи модернізації (факти, роздуми, перспективи). - К., 2003. - 215 с.
19. Кобкович Р.І., Мазуренко Н.І. Шкільна геометрія в задачах: начальний посібник , видання друге / Р.І. Кобкович, Н.І. Мазуренко. - Івано-Франківськ: Голіней О.М., 2019.- 226с.
20. Кобко Л. Аналогія: планіметрія – стереометрія / Лідія Кобко // Математика в рід. шк. : наук.-метод. журн. , 2014. - N 11. - С. 16-24.
21. Кобко Л. Аналогія: планіметрія – стереометрія / Лідія Кобко // Математика в рід. шк. : наук.-метод. журн. , 2014. - N 11. - С. 16-24.
22. Колягін Ю.М. Методика викладання математики в середній школі./ Колягін Ю.М. - К.: Просвіта. 1999р. – 151с.
23. Колягін Ю.М. Методика викладання математики в середній школі: загальна методика: навч. посібник для студентів фіз.-мат. фак. пед. інститутів / Сост. Ю.М. Колягін, - К.: Просвіта, 1995. - 462 с.
24. Корєшкова Т.А., Цукерман В.В. Багатокутники і їх площі шкільному курсі математики. / / Математика в школі . : наук.-метод. журн. , 2003.- №3.- С. 70-73.
25. Кучугурова Н.Д. Методика викладання математики. Приватна методика./ Н.Д.Кучугурова - С.: СТІ. 2004. – 172с.
26. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії: кн. для вчителя / І.А. Кушнір. –К.: Абрис, 1994, – с.314
27. Лисенко Р.Н. З досвіду проведення інтегрованих уроків. Початкова школа. / Р.Н. Лисенко - 1998. - №8. - С.46-48.
28. Ляпко С.Є. Методика викладання математики. / Ляпко С.Є. - К.: Освіта. 1965. – 148с.
29. Мішин В.І. Методика викладання математики в середній школі./ Мішин В.І. - К.: Просвітництво. 1997. – 134с.
30. Перепілко Д.І. Курс елементарної геометрії./ Перепілко Д.І. - К.: 14.1998.- 285с.
31. Полонський В.Б. Вчимося вирішувати завдання з геометрії : учеб.-методич. посібник / В. Б. Полонський, Є.М. Рабинович, М.С. Якір. - К.: Магістр - S, 1996.-256 с.

32. Пометун О.К., Пироженко Л.М. Сучасний математичний урок: інтерактивні технології навчання./ О.К. Пометун, Л.М. Пироженко - К.: А. С. К. - 2004, - 192 с.

33. Слєпкань З.І. Методика навчання математики/ З.І.Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

34. Фізико-математична освіта: Зб. наукових праць./ Лиман В.С. Іваній М.В. Каленик Т.Д. Лукашова С.В. Петренко А.О. Розуменко О.В. Семеніхіна О.Д. Стадник . – Суми : Вид-во фізико-математичного факультету СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2015. – №1 (7). – 146 с.

35. Шубіна Т.В. Новий підхід до засвоєння школярами понять геометрії / Т.В. Шубіна, Н.А. Різник / / Математика в школі.-К. - 2004. - № 3. - С. 55 – 59.

36. Яшко М.П. Нариси з історії математики: навч. посіб. / М. П. Яшко. — Чернівці: Прут, 2010. — 359, [1] с. — Бібліогр.: с. 350—358.

37. https://uk.wikipedia.org/

38. https://zno-online.com.ua/

39. https://yukhym.com/uk/

40. https://ua-referat.com/

41. Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс-2022 Форум молодих дослідників»: матеріали ІІІ Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції студентів, аспірантів та молодих вчених (18 листопада 2022 р., м. Суми) – Суми: [СумДПУ імені А.С.Макаренка], 2022. – 152 с.

Додаток

Тестування «чорної скриньки»
«Геометричні величини» (10 хв.)

1. Аналізуючи способи вимірювання геометричних величин , оберіть який відповідає первісному наочному уявленню:

a) безпосередній;
b) опосередкований;
c) ваш варіант.

2. За допомогою геометричних величин можна здійснювати наступні операції:

a) досліджувати, аналізувати, порівнювати об’єкти;
b) порівнювати, додавати, віднімати та множити одну геометричну величину на іншу;
c) аналізувати, порівнювати різні об’єкти , додавати, віднімати та множити на число геометричні величини.
d) ваш варіант.

3. Виберіть із переліку методи непрямого (опосередкованого) вимірювання геометричних величин:

a) методи рівновеликості;
b) методи граничного переходу;
c) методи інтегрального числення.
d) всі відповіді вірні.

4. Які із нижченаведених напрямків застосування характерні для такої геометричної величини як «довжина»?

a) науковий, абстрактний, відносний;
b) емпіричний, абстрактний, статистичний;
c) відносний, науковий, емпіричний.

5. Яка із геометричних величин є первісною та такою із якою людство познайомилось найшвидше:

a) довжина;
b) площа;
c) кут;
d) ваш варіант.

6.Оберіть із нижченаведених визначень поняття «кут», яке найбільш точно та правильно розкриває його сутність:

a) кут – це геометрична фігура, утворена двома променями, що виходять із однієї точки;

b) кут є невизначена частина площини, укладена між двома променями, що виходять із загальної точки;
c) кутом називається сукупність точки і двох променів, що виходять з цієї точки;
d) ваш варіант.
7. Площею в курсі планіметрії ЗЗСО може називатися будь-яка величина, яка задовольняє такі умови:
a) вона додатно-визначена;
b) вона адитивна;
c) у конгруентних фігур площа однакова;
d) для квадрата зі стороною 1 вона приймається рівною 1;
e) всі відповіді вірні.
8. Історично визначення площі асоціювалося із:
a) квадратурою;
b) протяжністю;
c) обсягом;
d) всі відповіді вірні.
9. У відповідності до властивостей площ, які часто застосовуються при розв'язуванні планіметричних задач, оберіть правильну відповідь:
a) якщо два трикутника мають однакові сторони, то відношення їх площ дорівнює відношенню їх висот;
b) якщо два трикутника мають спільний кут, то їх площі відносяться як відношенню їх висот;
c) відношення площ подібних трикутників (фігур) дорівнює квадрату коефіцієнта подібності;
d) ваш варіант.
10. Величина, що визначає розмір поверхні, одна з основних властивостей геометричних фігур у математиці, що розглядається як міра множини точок, які займають поверхню або якусь її частину називається:
a) об'ємом;
b) площею;
c) довжина;
d) ваш варіант.
11. Розрізняють декілька видів геометричних величин:
a) скалярні, векторні, відносні;
b) скалярні, векторні;
c) скалярні, векторні, тензорні.
12. Прикладом (так званим «еталоном») при вимірюванні площ завдяки багатьом своїм чудовим властивостям історично вважається:

a) квадрат;
b) паралелограм;
c) прямокутник;
d) ваш варіант.

Тестування «білої скриньки»
«Застосування геометричних величин в курсі планіметрії ЗЗСО» (60 хв.)

1. На відрізку *AB* завдовжки 26 см. вибрано точку *M*. Знайти відстань між точками *A* та *M*, якщо вона на 12 см більша ніж відстань між точками *M* та *B*.

Рисунок 4.1

А) 19 см.;
Б) 31 см.;
В) 16 см.
2. Точка *C* належить відрізку *AB* завдовжки 9 см. Знайти довжину відрізка ВС, якщо 4×*AC*+3×*BC*=32 см.

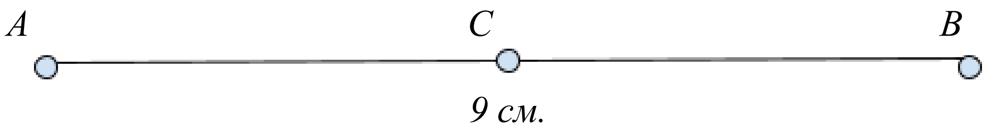


Рисунок 4.2

А)4 см.;
Б) 6 см.;
В)8см..
3. Знайти довжину кола *l*, вписаного в ромб, діагоналі якого дорівнюють 15 і 20.У відповідь записати *l/π*
А) 6;
Б)12;
В)72.
4. Знайдіть довжину (модуль) вектора $\overrightarrow{BC}$ (-3;-3;-3).
А) 9;
Б)$3\sqrt{3}$;
В)$3\sqrt{6}$.
5. Бісектриса кута *A* утворює з його стороною кут, що дорівнює 30°(рис.4.3). Знайти кут, суміжний з кутом *A*.

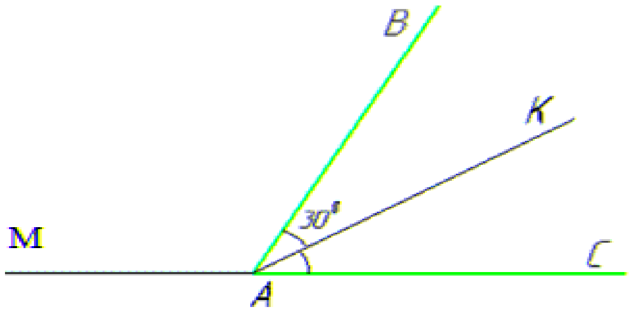


Рисунок 4.3

А)120°;
Б) 110°;
В)135°.

6. Скільки кутів, менших за розгорнутий, зображено на рисунку 4.4?

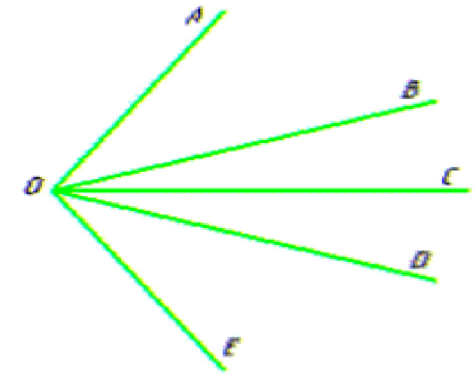


Рисунок 4.4

А)5;
Б)10;
В)7.

7. Який кут утворюють стрілки годинника о 9 год 15 хв. (рис.4.5)?

А)152,5°;
Б) 172,5°;
В) 175°.

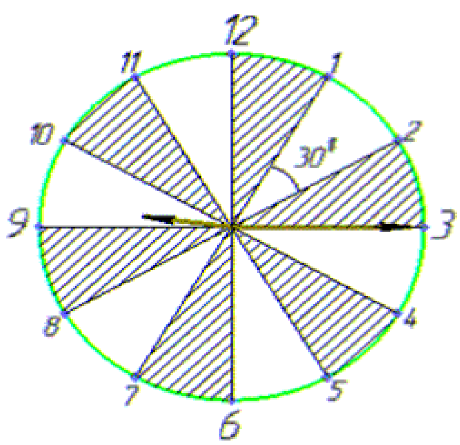


Рисунок 4.5

8. На рисунку 4.6 прямі *AB, CD* і *MK* перетинаються у точці *O*. Знайти кут *BOK*, якщо $\angle AOC=30^0$, $\angle MOD=110^0$.

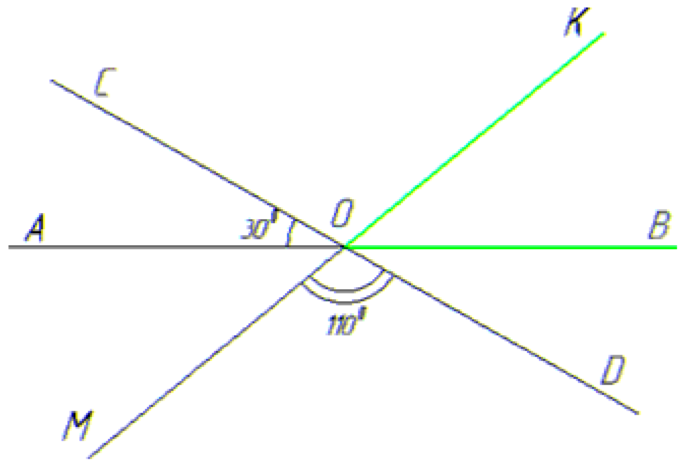


Рисунок 4.6

А) 40°;
Б) 45°;
В) 60°.

9. Площа паралелограма *ABCD* дорівнює *S*. Знайдіть площу чотирикутника *AMCK*, якщо точки *M* і *K* середини сторін *BC* і *CD* відповідно.
А) *S/2*;
Б) *S/4*;
В) *S/3*.

10. У трикутнику *ABC* точка *H* ділить сторону *AB* в відношенні 2 : 3, вважаючи від вершини *B*. Знайдіть площу трикутника *HBC*, якщо площа трикутника *ABC* дорівнює 15.
А) 6;
Б) 9;
В) 12.

11. Знайти площу ΔABC, якщо *AB* = 26 см, *AC* = 30 см, а довжина медіани *AM* = 14 см.

А) $S_{\Delta ABC} = 336\ (\text{см})^2$;

Б) $S_{\Delta ABC} = 320\ (\text{см})^2$;

В) $S_{\Delta ABC} = 236\ (\text{см})^2$.

12. В трикутник вписано коло, радіус якого дорівнює 5 см.. Знайти площу $\Delta ABC,$ якщо одна зі сторін трикутника точкою дотику ділиться на відрізки 12 см. і 7,5 см..

А) $S_{\Delta ABC} = \ 235\ (\text{см})^2$;

Б) $S_{\Delta ABC} = \ 135\ (\text{см})^2$;

В) $S_{\Delta ABC} = \ 386\ (\text{см})^2$.

Тестування «сірої скриньки»
«Геометричні величини та їх застосування в курсі планіметрії ЗЗСО»
(30 хв.)

1. За допомогою геометричних величин можна здійснювати наступні операції:
А) досліджувати, аналізувати, порівнювати об’єкти;
Б) порівнювати, додавати, віднімати та множити одну геометричну величину на іншу;
В) аналізувати, порівнювати різні об’єкти , додавати, віднімати та множити на число геометричні величини.
Г) ваш варіант.
2. Знайти довжину кола *l*, вписаного в ромб, діагоналі якого дорівнюють 15 і 20.У відповідь записати *l/π*
А) 6 ;
Б) 12;
В) 72;
3. Виберіть із переліку методи непрямого (опосередкованого) вимірювання геометричних величин:
А) методи рівновеликості;
Б) методи граничного переходу;
В) методи інтегрального числення;
Г) всі відповіді вірні.
4. Знайти площу ΔABC, якщо AB = 26 см, AC = 30 см, а довжина медіани AM = 14 см.

А) $S_{\Delta ABC} = \ 336\ (\text{см})^2$;

Б) $S_{\Delta ABC} = \ 320\ (\text{см})^2$;

В) $S_{\Delta ABC} = 236\ (\text{см})^2$.

5. Історично визначення площі асоціювалося із:

А) квадратурою;

Б) протяжністю;

В) обсягом;

Г) всі відповіді вірні.

6. На відрізку AB завдовжки 26 см вибрано точку M. Знайти відстань між точками A та M, якщо вона на 12 см більша ніж відстань між точками M та B (рис. 4.7).

Рисунок 4.7

А) 19см.;

Б) 31см.;

В) 16см..

7. Величина, що визначає розмір поверхні, одна з основних властивостей геометричних фігур у математиці, що розглядається як міра множини точок, які займають поверхню або якусь її частину називається:

А) об'ємом;

Б) площею;

В) довжина;

Г) ваш варіант.

8. Знайдіть довжину (модуль) вектора $\vec{BC}$ (-3;-3;-3).

А) 9;

Б) $3\sqrt{3}$;

В) $3\sqrt{6}$.

9. Площею в курсі планіметрії середньої школи може назватися будь-яка величина, яка задовольняє такі умови:

А) вона додатно-визначена;

Б) вона адитивна;

В) у конгруентних фігур площа однакова;

Г) для квадрата зі стороною 1 вона приймається рівною 1;

Д) всі відповіді вірні.

10. На рисунку 4.8 прямі *AB*, *CD* і *MK* перетинаються у точці *O*. Знайти кут *BOK*, якщо $\angle AOC=30^0$, $\angle MOD=110^0$.

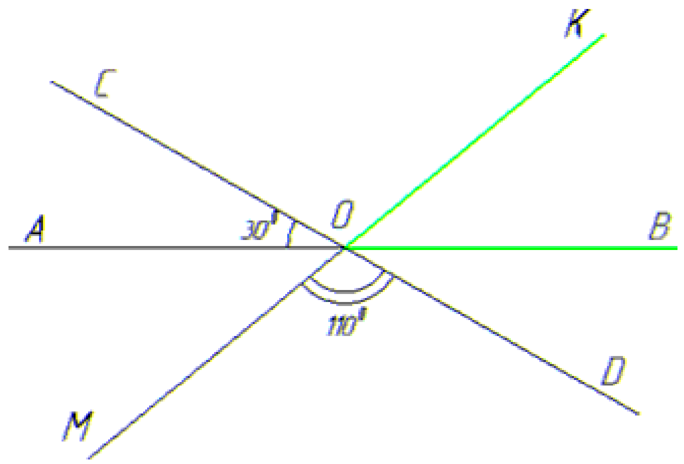


Рисунок 4.8

А) 40°;
Б) 45°;
В) 60°.

Самооцінка учня.

Оцініть свою роботу: _______ балів.
Які труднощі при розв'язанні тестових завдань у вас виникали?
____
____

Тестування рівня знань учнів на уроках математики *(особиста розробка)*.

Тестування «чорної скриньки» - має певну специфіку, адже передбачає перевірку не якихось вузько спрямованих знань із конкретної теми, а вбачає розуміння базових математичних понять, термінів чи величин тощо. За допомогою описової характеристикиу учень повинен обрати ту чи іншу відповідь чи запропонувати свою власну. Тестування «чорної скриньки» демонструє рівень оволодіння математикою як наукою не лише на поверхневому рівні, а й на інтуїтивному. Час виконання такого тестування 10-15 хв.

Тестування «білої скриньки» - вирізняється практичною спрямованістю, тобто завдання які потребують поглиблених знань та вміння їх застосовувати на конкретних прикладах. Учень повинен розв'язати задачу, приклад, вправу та на основі отриманого результату обрати відповідну правильну відповідь або ж запропонувати свою власну. Тестування «білої скриньки» може мати вузьку спрямованість (в межах конкретної теми) або ж широку (в межах декількох тем) , в залежності від мети тестування. Час виконання такого типу тестування 60-90 хв.

Тестування «сірої скриньки» - передбачає поєднання специфіки тестування «чорної скриньки» та тестування «білої скриньки». Такий тип тестування найбільш широко застосовується в моїй практичній діяльності, оскільки охоплює не лише теоретичні знання, а й практичні навички, тобто учень, який очікує на високий рівень , проходячи цей вид тестування повинен володіти математичними знаннями не лише поверхнево, інтуїтивно, а й практично вміти застосовувати свої вміння як із конкретно обраної теми, так із всього вивченого курсу математики на рівні середньої школи. Вкінці тестування учень має можливість самостійно оцінити свою роботу та виокремити завдання, які викликали в нього певні труднощі (якщо ж такі були). Час виконання такого типу тестування 30-45 хв.