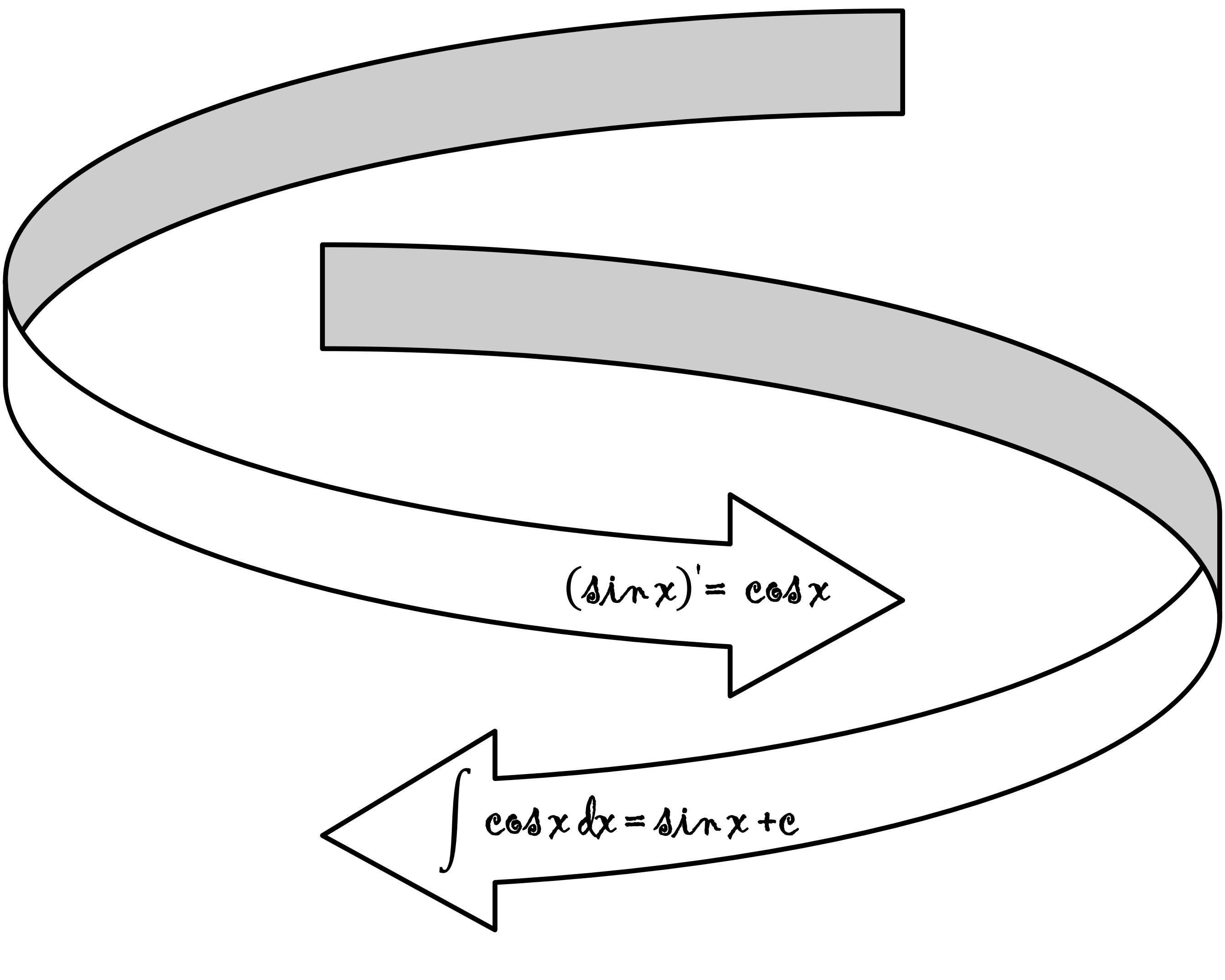
Ленюк О.М., Ленюк Ю.В.

Короткий довідник з математики для підготовки до ЗНО та ДПА



Рекомендовано для використання в освітньому процесі з резолюцією

«Схвалено науково-методичною радою Інституту післядипломної педагогічної освіти Чернівецької області»

(протокол № 4 від 23 грудня 2019 р.)

Автори:

Ленюк Олег Михайлович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича;

Ленюк Юлія Володимирівна, викладач вищої категорії, викладач-методист Чернівецького професійного ліцею автомобільного сервісу.

Рецензенти:

Біляніна Ольга Ярославівна, методист науково-методичного центру природничо-математичних дисциплін ІППОЧО, спеціаліст вищої кваліфікаційної категорії, Відмінник освіти України, учитель-методист;

Житарюк Іван Васильович, професор кафедри алгебри та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича; вчитель вищої категорії.

Короткий довідник з математики для підготовки до ЗНО та ДПА: Навчально-практичний посібник / О.М. Ленюк, Ю.В. Ленюк. – 2-е вид., випр. і доп. – Чернівці, 2021. – 20 с.

Цей довідник містить коротку інформацію про основні змістові лінії програми середньої освіти та підготовки до ЗНО та ДПА, які виражені формулами, рисунками та таблицями.

Зауважимо, що у формулах відсутні ОДЗ для кращого візуального їх сприйняття.

Посібник буде корисним для вчителів, як засіб акцентування уваги учнів на основному теоретичному наповненню для вміння розв’язувати задачі. Особливо зручним та корисним засобом цей посібник стане для учнів та абітурієнтів, які готуються здавати ЗНО та ДПА.

I. Дії зі степенями

$a^0 = 1;$ $a^1 = a;$ $a^k \cdot a^n = a^{k+n};$ $a^k : a^n = a^{k-n};$	$(a^k)^n = a^{k \cdot n};$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n;$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n};$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$

Означення кореня n-го степеня: $\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a.$

$\sqrt[n]{a^k} = a^{\frac{k}{n}};$	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k};$
$\sqrt[2n-1]{-a} = -\sqrt[2n-1]{a};$	$\sqrt[2n]{a^{2n}} = \lvert a \rvert = \begin{cases} a, \text{при } a \geq 0, \\ -a, \text{при } a < 0. \end{cases}$	

II. Формули скороченого множення

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad\quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \quad\quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b);$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 − корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0.$

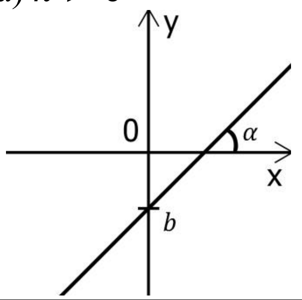
III. Прогресії

	Арифметична прогресія $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots;$ d −різниця прогресії	Геометрична прогресія $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots;$ $q \neq 0$ −знаменник прогресії
Формула n-го члена прогресії	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 q^{n-1}$
Характеристична властивість прогресії	$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$	$b_k^2 = b_{k-1} b_{k+1}$
Сума n перших членів прогресії	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$	$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1$
Сума нескінченно-спадної геометричної прогресії		$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad \lvert q \rvert < 1$

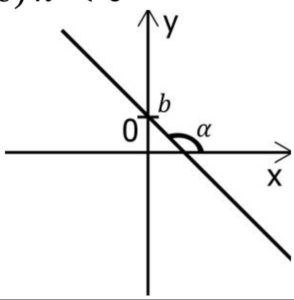
IV. Графіки

1. $y = kx + b$ – лінійна функція, графік – пряма лінія, $k = tg\alpha$ (кутовий коеф.)

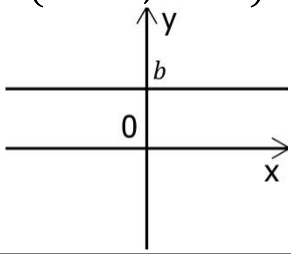
а) $k > 0$



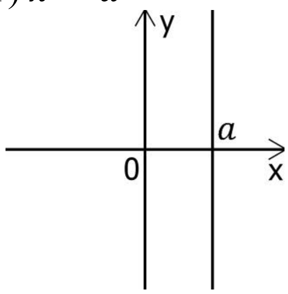
б) $k < 0$



в) $y = b$
($k = 0, \alpha = 0$)

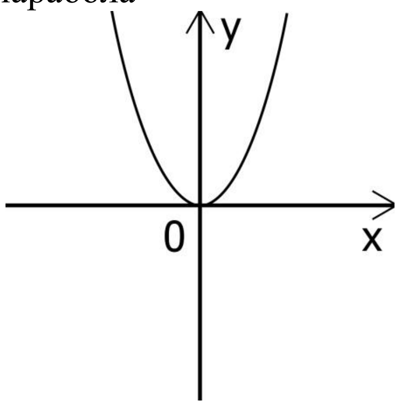


г) $x = a$

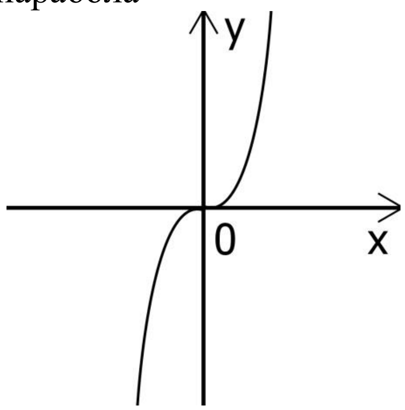


2. $y = x^n$ – степенева функція

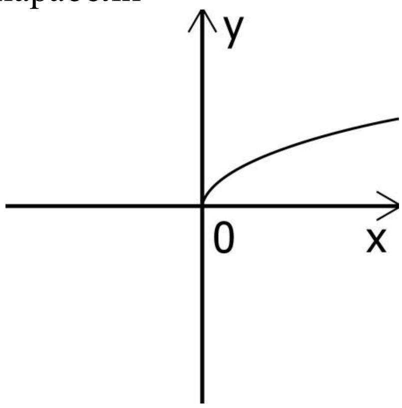
а) $y = x^2$ – квадратна парабола



б) $y = x^3$ – кубічна парабола

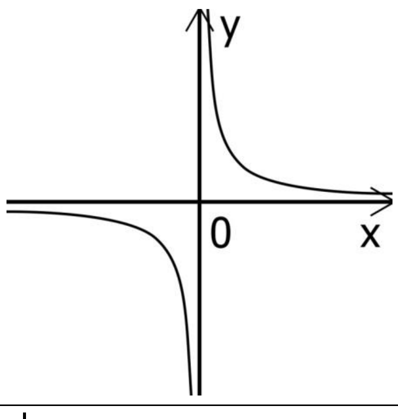


в) $y = \sqrt{x},\ x \geq 0;$ – вітка параболи

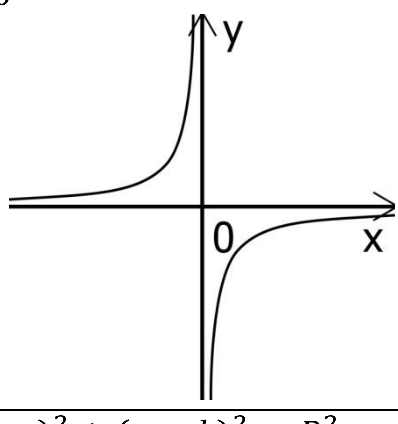


3. $y = \frac{k}{x}$ – обернена пропорційність, графік – гіпербола

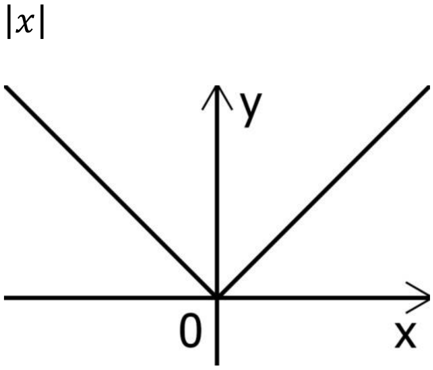
а) $k > 0$



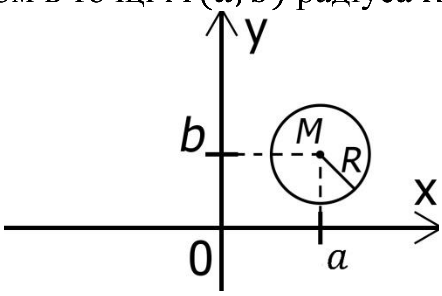
б) $k < 0$

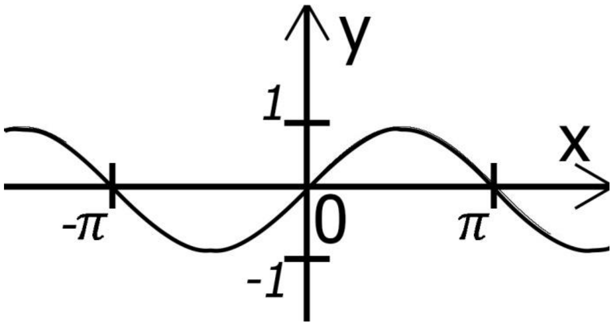
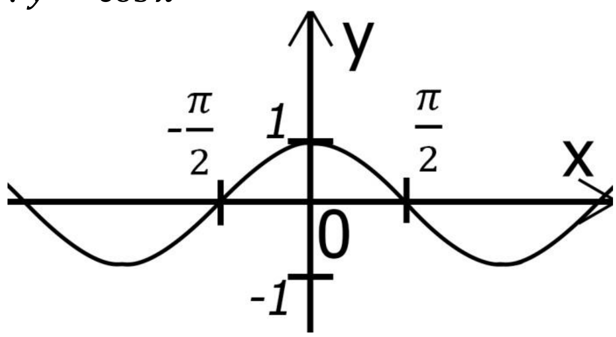
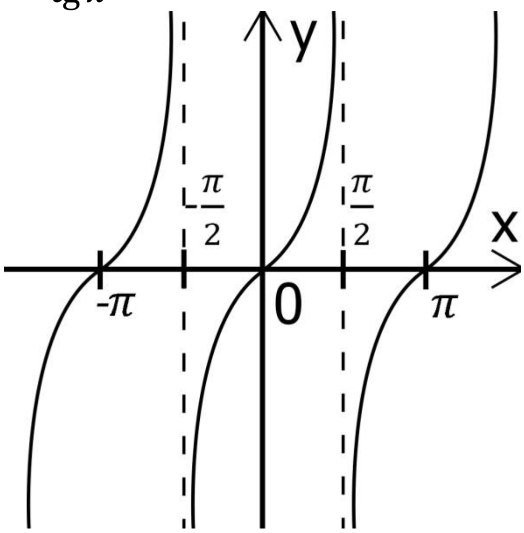
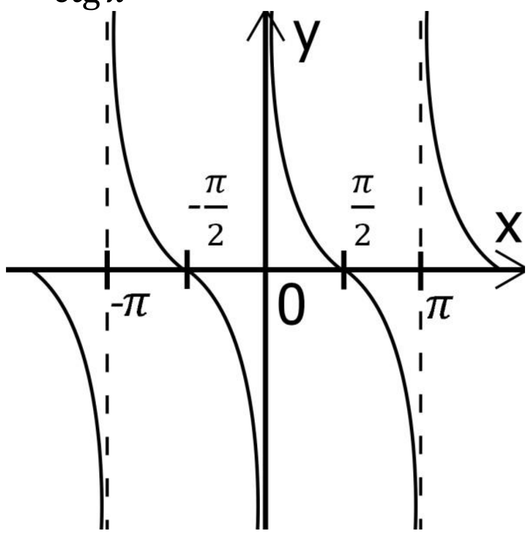


4. $y = |x|$



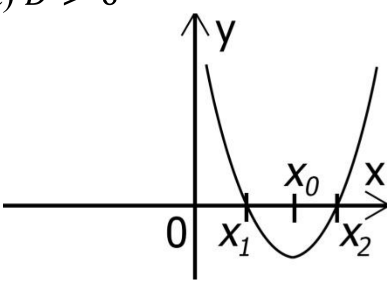
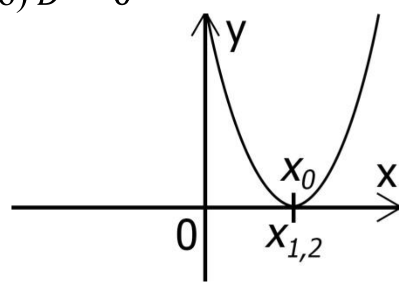
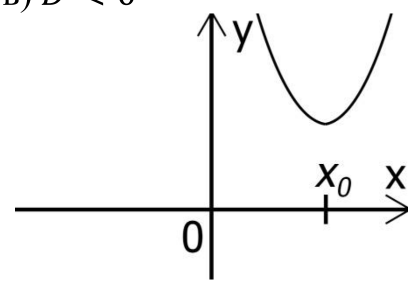
5. $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ – коло з центром в точці $M(a; b)$ радіуса R.



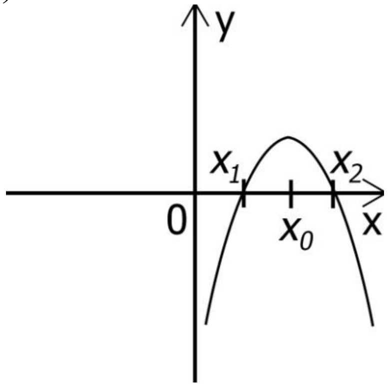
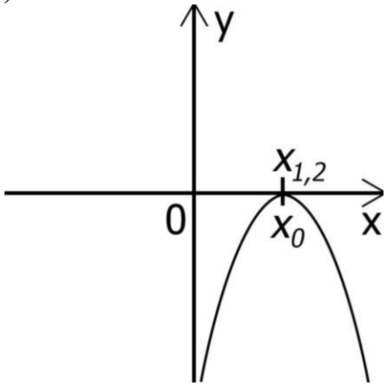
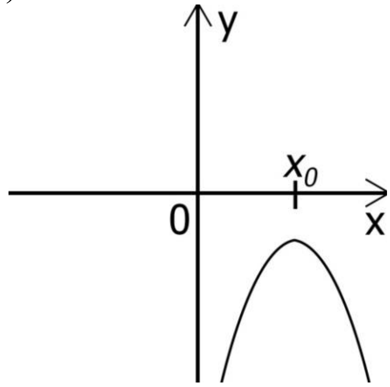
6. $y = \sin x$ 	7. $y = \cos x$ 
8. $y = \operatorname{tg} x$ 	9. $y = \operatorname{ctg} x$ 

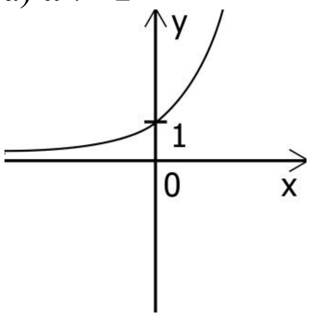
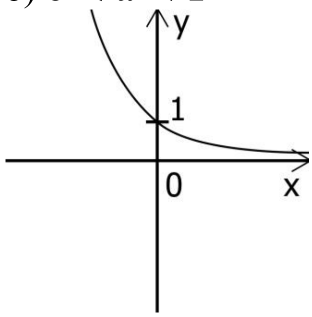
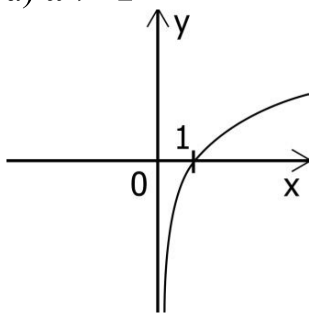
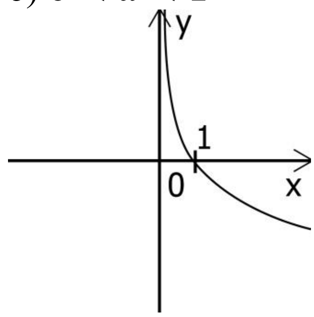
10. $y = ax^2 + bx + c$ – квадратична функція, графік – квадратна парабола; $x_0 = -\frac{b}{2a}$ – абсциса вершини параболи

А. $a > 0$ – вітки параболи напрямлені вгору

а) $D > 0$ 	б) $D = 0$ 	в) $D < 0$ 

Б. $a < 0$ – вітки параболи напрямлені вниз

а) $D > 0$ 	б) $D = 0$ 	в) $D < 0$ 

<table>
<tr><td colspan="2">11. $y = a^x$ – показникова функція</td><td colspan="2">12. $y = log_a x$ – логарифмічна функція</td></tr>
<tr><td>а) $a > 1$
</td><td>б) $0 < a < 1$
</td><td>а) $a > 1$
</td><td>б) $0 < a < 1$
</td></tr>
</table>

V. Логарифми

1. Означення. $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, де $b > 0, a > 0, a \neq 1$.

2. Види логарифмів:

$\lg b = \log_{10} b$ – десятковий логарифм; $\text{lb}\, b = \log_2 b$ – бінарний логарифм;

$\ln b = \log_e b$ – натуральний логарифм, $e \approx 2{,}7$ – число Ейлера.

3. Властивості:

а) $a^{\log_a b} = b$ – основна логарифмічна тотожність;

б) $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$ (обчислення логарифмів) ;

в) $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$;

г) $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$;

д) $\log_a(b^p) = p \log_a b$;

е) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ – формула переходу до нової основи.

VI. Рівняння

1. Лінійні рівняння: $ax + b = 0$.

Якщо $a \neq 0$, то $x = -\frac{b}{a}$ – єдиний розв’язок;

Якщо $a = 0, b = 0$, то $x \in (-\infty; +\infty)$ – безліч розв’язків;

Якщо $a = 0, b \neq 0$, то $x \in \emptyset$ – немає розв’язків.

2. Квадратні рівняння: $ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0.$

$D = b^2 - 4ac$ – дискримінант.

а) $D > 0$, два дійсні різні корені: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$;

б) $D = 0$, один дійсний двократний корінь: $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$;

в) $D < 0$, дійсних коренів немає: $x \in \emptyset$.

Теорема Вієта: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$

3. Показникові рівняння: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

$$a = 1 \text{ або } f(x) = g(x).$$

4. Логарифмічні рівняння: $log_a f(x) = log_a g(x), a > 0, a \neq 1.$

$$\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0; \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

5. Найпростіші тригонометричні рівняння:

а) $\sin x = a$.

$-1 < a < 1$	$a = 1$	$a = -1$	$a = 0$	$\lvert a \rvert > 1$
$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi,$ $k \epsilon \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$ $k \epsilon \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$ $k \epsilon \mathbb{Z}$	$x = k\pi,$ $k \epsilon \mathbb{Z}$	$x \in \emptyset$

б) $\cos x = a$.

$-1 < a < 1$	$a = 1$	$a = -1$	$a = 0$	$\lvert a \rvert > 1$
$x = \pm \arccos a + 2n\pi,$ $n \epsilon \mathbb{Z}$	$x = 2n\pi,$ $n \epsilon \mathbb{Z}$	$x = \pi + 2n\pi,$ $n \epsilon \mathbb{Z}$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi,$ $n \epsilon \mathbb{Z}$	$x \in \emptyset$

в) $\operatorname{tg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + k\pi, k \epsilon \mathbb{Z}$.

г) $\operatorname{ctg} x = a \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} a + k\pi, k \epsilon \mathbb{Z}$.

6. Властивості обернених тригонометричних функцій:

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$;

$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$; $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

VII. Нерівності

1. Показникові нерівності:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \text{ якщо } a > 1; \\ f(x) < g(x), \text{ якщо } 0 < a < 1. \end{array} \right.$$

2. Логарифмічні нерівності:

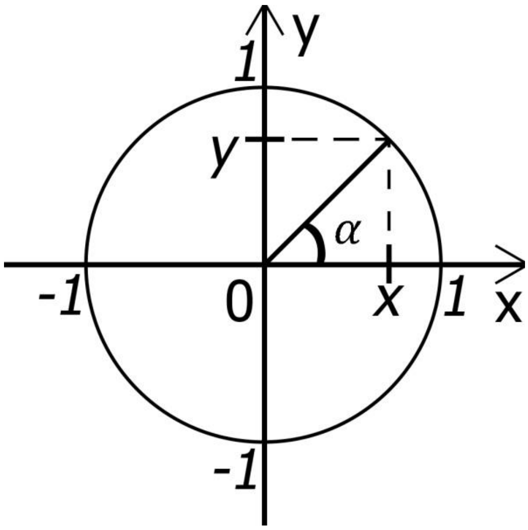
$$log_a f(x) > log_a g(x) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x) > 0, \text{якщо } a > 1; \\ 0 < f(x) < g(x), \text{якщо } 0 < a < 1. \end{array} \right.$$

3. Ірраціональні нерівності:

а) $\sqrt{f(x)} < g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0; \\ g(x) > 0; \\ f(x) < \left(g(x)\right)^2; \end{cases}$

б) $\sqrt{f(x)} > g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0; \\ g(x) < 0; \end{cases}$ або $\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) > \left(g(x)\right)^2; \end{cases}$

VIII. Тригонометричні функції



1. Означення.

$$\cos\alpha = x; \ \sin\alpha = y;$$

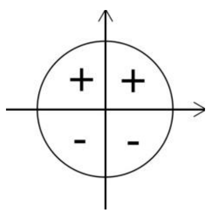
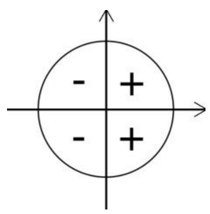
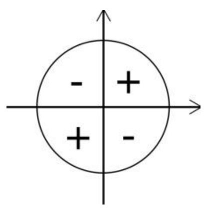
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

2. Градусна та радіанна міра кутів.

$$180° = \pi \ \textit{радіан;}$$

$$\alpha° = \alpha° \cdot \frac{\pi}{180°} \textit{радіан}; \quad x \ \textit{радіан} = x \cdot \frac{180°}{\pi}.$$

3. Знаки тригонометричних функцій.

 $\sin x$	 $\cos x$	 $\operatorname{tg} x$; $\operatorname{ctg} x$

4. Формули зведення (вираження тригонометричних функцій кутів $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha, k\epsilon\mathbb{Z}$, через тригонометричні функції кута α).

При відхиленні кута α від вертикалі $(\pm\frac{\pi}{2} \pm \alpha; \pm\frac{3\pi}{2} \pm \alpha; \dots)$ функція змінюється на кофункцію (sin на cos, tg на ctg і навпаки); при відхиленні кута α від горизонталі $(\pm\pi \pm \alpha; \pm 2\pi \pm \alpha; \dots)$ функція не змінюється. При цьому перед останньою функцією потрібно поставити знак початкової функції у відповідній чверті.

Наприклад: $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$; $\sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$;

$$\operatorname{tg}(5\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha; \ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha.$$

5. Властивості тригонометричних функцій.

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Область визначення	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,$ $n\epsilon\mathbb{Z}$	$x \neq n\pi, n\epsilon\mathbb{Z}$
Область значень	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Парність	непарна: $\sin(-x) = -\sin x$	парна: $\cos(-x) = \cos x$	непарна: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$	непарна: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$
Основний період	$T = 2\pi$ $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$	$T = 2\pi$ $\cos(x + 2n\pi) = \cos x$	$T = \pi$ $\operatorname{tg}(x + n\pi) = \operatorname{tg} x$	$T = \pi$ $\operatorname{ctg}(x + n\pi) = \operatorname{ctg} x$

6. Основні тригонометричні формули.

а) Формули функцій одного аргументу:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \text{ — основна тригонометрична тотожність;}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

б) Формули суми, різниці аргументів:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta; \qquad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta; \qquad \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \qquad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

в) Формули подвійного аргументу:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

г) Формули пониження степеня (половинного аргументу):

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}; \qquad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}.$$

д) Формули перетворення суми в добуток:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}; \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}; \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

е) Формули перетворення добутку в суму:

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta));$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta));$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)).$$

IX. Похідна функції

1. Означення. $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$

2. Геометричний зміст похідної: $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = k$ (похідна в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, тобто тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції до додатного напрямку осі абсцис).

3. Фізичний зміст похідної:

$$v(t) = S'(t); \qquad a(t) = v'(t) = S''(t).$$

4. Таблиця похідних.

№	Функція	Похідна	№	Функція	Похідна
1	c	0	9	$\sin x$	$\cos x$
2	x	1	10	$\cos x$	$-\sin x$
3	x^n	nx^{n-1}	11	$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
4	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	12	$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
5	a^x	$a^x \ln a$	13	$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6	e^x	e^x	14	$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	15	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
8	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	16	$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

5. Правила диференціювання.

$\left(Cu(x)\right)' = Cu'(x)$; $(u \pm v)' = u' \pm v'$; $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$; $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right)g'(x)$ – похідна складеної функції.

6. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

7. Монотонність функції:

Якщо $f'(x) > 0$ на деякому проміжку, то функція $y = f(x)$ зростає на цьому проміжку.

Якщо $f'(x) < 0$ на деякому проміжку, то функція $y = f(x)$ спадає на цьому проміжку.

X. Первісна та інтеграл

1. Означення. $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.

2. Таблиця первісних.

№	Функція	Первісна	№	Функція	Первісна
1	1	$x + C$	7	$\cos x$	$\sin x + C$
2	$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	8	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
3	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	9	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
4	a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	10	$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\arcsin x + C$ або $-\arccos x + C$
5	e^x	$e^x + C$	11	$\frac{1}{1 + x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$ або $-\operatorname{arcctg} x + C$
6	$\sin x$	$-\cos x + C$			

3. Правила інтегрування.

а) $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$;

б) $\int f(kx + b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx + b) + C$;

в) $\int\big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$;

4. Визначений інтеграл.

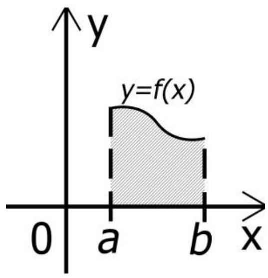
а) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ – формула Ньютона-Лейбніца.

б) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx, a < c < b.$

5. Геометричний зміст визначеного інтеграла.

$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx -$ площа криволінійної трапеції ($f(x) \geq 0$).

$S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$, якщо $f(x) \leq 0$.



XI. Комбінаторика. Теорія ймовірності

Вибірка (із множини n елементів вибираємо множину k елементів)

З повторенням

кількість: $\underbrace{n \cdot n \cdot \dots \cdot n}_{k\ \text{разів}} = n^k$

Без повторення

Розміщення (порядок важливий) $A_n^k = \underbrace{n(n-1)\cdot \dots \cdot (n-k+1)}_{k\ \text{множників}}$; або $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Комбінації (порядок неважливий) $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \dfrac{A_n^k}{k!}$

Перестановки (всі елементи) $P_n = A_n^n = n!$

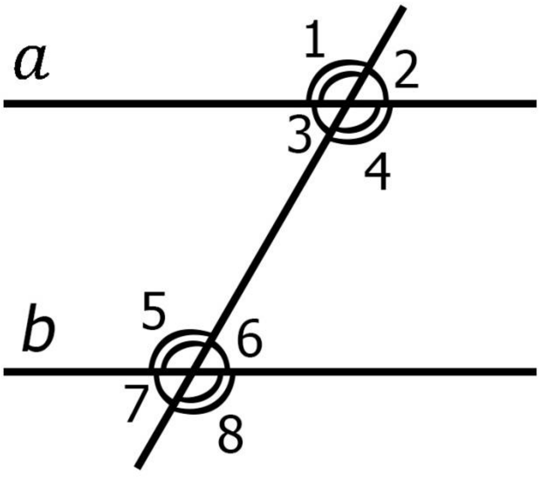
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$; $0! = 1$ за означенням.

Ймовірність події A:

$P(A) = \frac{m}{n}$, де n – число всеможливих результатів випробувань; m – число випробувань, що сприяють появі події A.

XII. Планіметрія

1. Кути, пропорції.



$a||b$.

$\angle 1 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 8$;

$\angle 2 = \angle 3 = \angle 6 = \angle 7$;

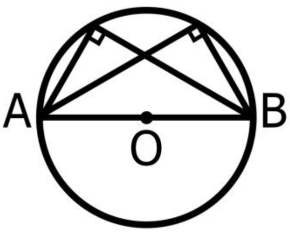
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (суміжні);

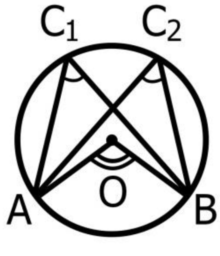
$\angle 2 = \angle 6$ (відповідні);

$\angle 1 = \angle 4$ (вертикальні);

$\angle 3 = \angle 6$ (внутрішні різносторонні);

$\angle 3 + \angle 5 = 180°$(внутрішні односторонні);

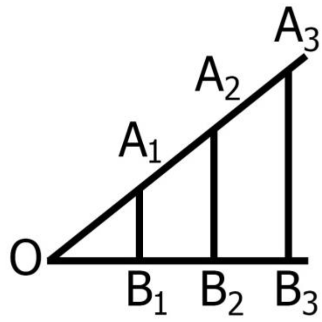




$\angle AC_1B = \angle AC_2B = \frac{1}{2}\angle AOB$ (кут, вписаний в коло, дорівнює половині центрального кута)

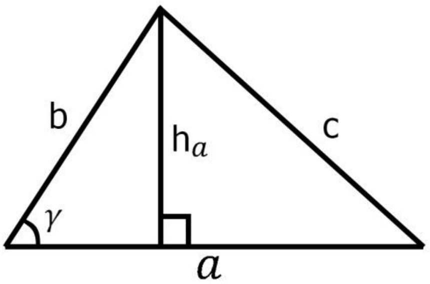
$A_1B_1||A_2B_2||A_3B_3.$

Теорема Фалеса: $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3}$.



2. Трикутники.

а) Довільний трикутник.



$S = \frac{1}{2}ah_a$; $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

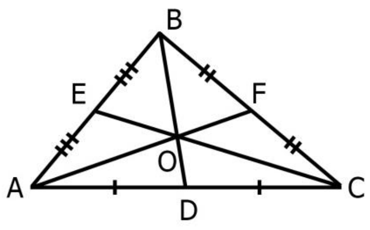
$p = \frac{a+b+c}{2}$ – півпериметр;

$r = \frac{S}{p}$ – **радіус вписаного кола** (центр знаходиться в точці претину бісектрис);

$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$; $R = \frac{abc}{4S}$ – **радіус описаного кола** (центр знаходиться в точці перетину серединних перпендикулярів сторін);

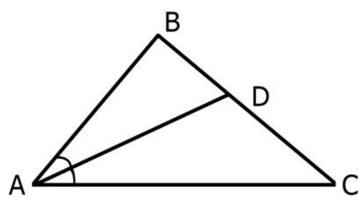
Теорема синусів: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$

Теорема косинусів: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.



BD – медіана: $AD = DC$.
$BO : OD = 2:1$;
$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$
(m_a – медіана, проведена до сторони a).

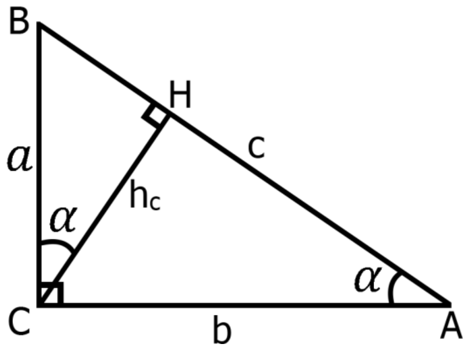
EF– середня лінія.
$EF||AC$; $EF = \frac{1}{2}AC$
(середня лінія паралельна основі і вдвічі менша за основу).



AD – бісектриса : $\angle BAD = \angle CAD$.

$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}$ або $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

б) Прямокутний трикутник.



$S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2}ch_c$;

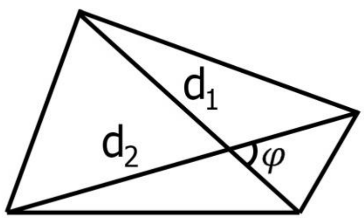
Теорема Піфагора: $a^2 + b^2 = c^2$.

$r = \frac{a+b-c}{2}$; $R = \frac{c}{2}$;

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

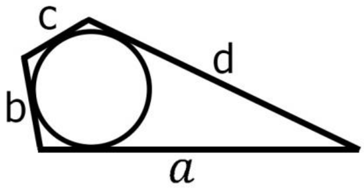
$\Delta ABC \sim \Delta ACH \sim \Delta CBH$.

3. Чотирикутники.



$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$;

d_1, d_2 – діагоналі; φ – кут між ними.

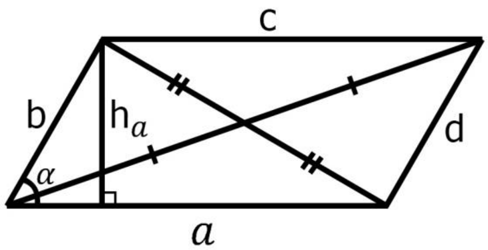


Сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює $360°$.

Якщо у чотирикутник вписано коло, то

$$a + c = b + d.$$

а) Паралелограм.

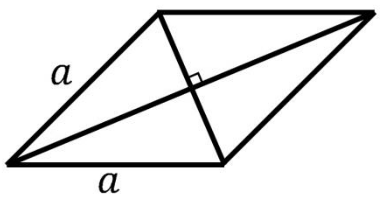


$a||c$; $b||d$; $a = c$; $b = d$;

$S = ah_a$; $S = ab\sin\alpha$;

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$;

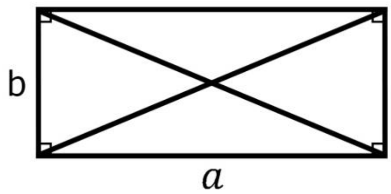
б) Ромб (паралелограм, у якого всі сторони рівні).



$a = b$; $d_1 \perp d_2$.

$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$;

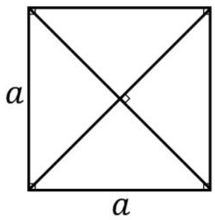
в) Прямокутник (паралелограм, у якого всі кути прямі).



$\angle\alpha = 90°$; $d_1 = d_2$.

$S = ab$; $d^2 = a^2 + b^2$.

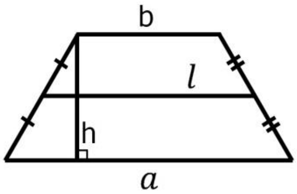
г) Квадрат (ромб і прямокутник одночасно).



$S = a^2$;

$d^2 = 2a^2$.

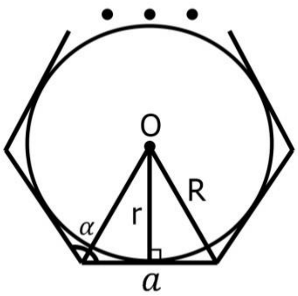
д) Трапеція.



$S = \dfrac{a+b}{2}h$; $S = l \cdot h$;

$l = \frac{a+b}{2}$ – середня лінія; $l||a$; $l||b$.

4. Правильний многокутник (n-кутник).

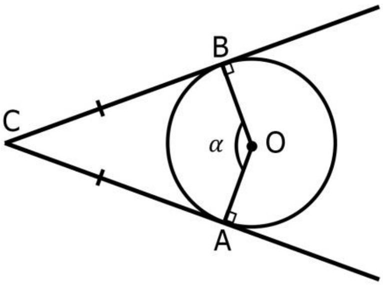


$\alpha_n = 180° - \frac{360°}{n}$ – кут n-кутника;

$\mathrm{tg}\dfrac{180°}{n} = \dfrac{a}{2r}$; $\sin\dfrac{180°}{n} = \dfrac{a}{2R}$; $\cos\dfrac{180°}{n} = \dfrac{r}{R}$.

$S = p \cdot r$, де p – півпериметр;

5. Коло, круг.



$CB \perp OB$ (дотична перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику);

$CB = CA$ (дотичні, проведені з однієї точки, рівні);

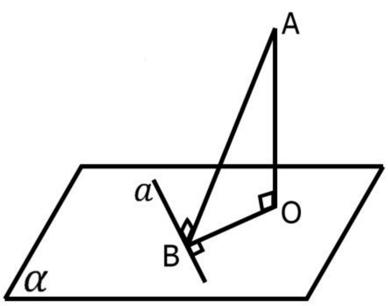
$C = 2\pi R$ – **довжина кола**; $S = \pi R^2$ – **площа круга**;

$l = \dfrac{\pi R}{180°}\alpha$ – довжина дуги кола з центральним кутом α;

$S_c = \dfrac{\pi R^2}{360°}\alpha$ – площа кругового сектора з центральним кутом α.

XIII. Стереометрія

1. Теорема про три перпендикуляри.

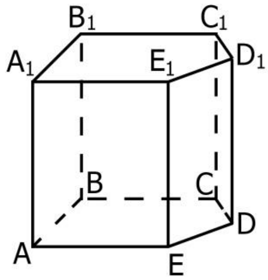


$AO \perp \alpha$; AO – перпендикуляр до площини α;

AB – похила; BO – проекція похилої на площину α.

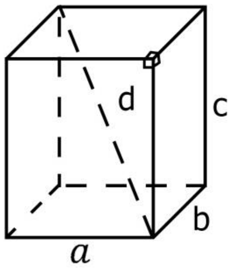
Якщо $AB \perp a$, то $BO \perp a$. Якщо $BO \perp a$, то $AB \perp a$.

2. Призма.



$V = S_{\text{осн}} \cdot H$;
$S_n = 2S_{\text{осн}} + S_{б}$.
S_n — площа повної поверхні; $S_б$ – площа бічної поверхні; $S_{\text{осн}}$ – площа основи; H – висота призми.

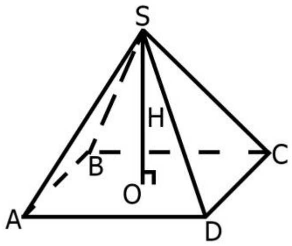
3. Прямокутний паралелепіпед.



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ (діагональ);

$V = abc$;

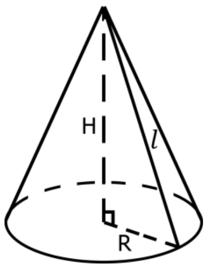
4. Піраміда.



$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$;

$S_n = S_{\text{осн}} + S_б$.

5. Конус.

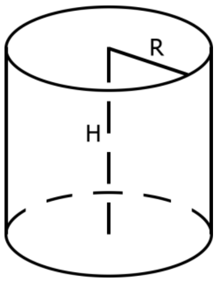


$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$;

$S_б = \pi R l$; $l = \sqrt{R^2 + H^2}$ – твірна;

$S_n = S_{\text{осн}} + S_б = \pi R^2 + \pi R l$.

6. Циліндр.

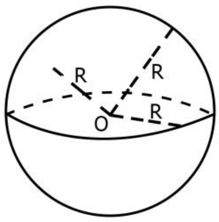


$V = S_{\text{осн}} \cdot H = \pi R^2 H$;

$S_б = 2\pi R H$;

$S_n = 2S_{\text{осн}} + S_б = 2\pi R^2 + 2\pi R H$.

7. Куля, сфера.



$S = 4\pi R^2$ – площа сфери (поверхні кулі);

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ – об’єм кулі.

XIV. Координати та вектори

Нехай точки $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$.

1. Середина відрізка: $C\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

2. Координати вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

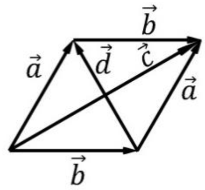
3. Довжина відрізка AB (модуль вектора $\overrightarrow{AB}$)**:**

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Нехай вектори $\vec{a}(x_1; y_1; z_1), \vec{b}(x_2; y_2; z_2)$.

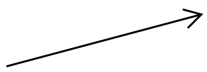
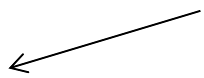
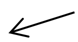
4. Модуль вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

5. Сума, різниця векторів:



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; $\quad \vec{c}(x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$;
$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$; $\quad \vec{d}(x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$.

6. Множення вектора на число: $k\vec{a}(kx_1; ky_1; kz_1)$

$\vec{a}$	$k > 0, \lvert k\rvert > 1$	$k > 0, \lvert k\rvert < 1$	$k < 0, \lvert k\rvert > 1$	$k < 0, \lvert k\rvert < 1$
				

7. $\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2;\ y_1 = y_2;\ z_1 = z_2$.

8. Вектори колінеарні $(\vec{a}||\vec{b})$ тоді і тільки тоді, коли $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k \quad \left(\vec{a} = k\vec{b}\right)$.

9. Скалярний добуток векторів:

а) **Означення.** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$, де α — кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$;

б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$; $\qquad$ в) $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$;

г) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$; $\qquad$ е) $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$; $\qquad$ д) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Теорема. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Зауваження. Аналогічні формули є правильними для двовимірного випадку (при $z = 0$).

Зміст

Таблиця значень тригонометричних функцій:

α,град.	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
α,рад.	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-$	0	$-$

Таблиця Піфагора (множення):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Квадрати натуральних чисел другого десятка:

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400