УДК 517.929

©2003 р. І.І. Клевчук

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ЗВЕДЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДО РІЗНИЦЕВИХ ТА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Крайові задачі для гіперболічних систем диференціальних рівнянь зводяться до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь. Побудована область стійкості для лінійного автономного диференціального рівняння із двома запізненнями.

We reduce a boundary value problems for hyperbolic systems to difference and differential difference equations. We construct a domain of stability for linear autonomous differential equation with two delays.

У монографіях [1,2] крайові задачі для гіперболічних систем першого порядку з однією просторовою змінною зводяться до диференціально-різницевих рівнянь з одним запізненням. У цій статті розглянуто крайові задачі для гіперболічних систем з багатьма просторовими змінними, які зводяться до диференціально-різницевих рівнянь з багатьма запізненнями. Це дозволяє дослідити асимптотичну поведінку розв'язків крайових задач.

Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = k_i(d, grad\ u_i), \tag{1}$$

де $d = (d_1, ..., d_p)^T$, $grad\ u_i = (\partial u_i/\partial x_1, ..., \partial u_i/\partial x_p)^T$, $x = (x_1, ..., x_p)^T$, $i \in \{1, ..., q\}$. Функції u_1, ..., u_q задовольняють граничні умови

$$u_1|_{(c,x)=0} = u_2|_{(c,x)=0} = ... = u_q|_{(c,x)=0}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}|_{(c,x)=1} = f(u_1|_{(c,x)=1}, ..., u_q|_{(c,x)=1}), \tag{3}$$

де $c = (c_1, ..., c_p)^T$. Припустимо, що $k_q > k_{q-1} > ... > k_1 > 0$, $(c, d) > 0$, де $(c, d)-$скалярний добуток векторів c, d.

Загальний розв'язок системи (1) записується у вигляді біжучих хвиль $u_i(x, t) = \varphi_i(x + k_i td)$, $i \in \{1, ..., q\}$. Підставляючи в (2), одержимо

$$\varphi_1(x + k_1 td)|_{(c,x)=0} = \varphi_2(x + k_2 td)|_{(c,x)=0} =$$

$$= ... = \varphi_q(x + k_q td)|_{(c,x)=0}.$$

Нехай $x = \bar{x} - k_2\gamma d$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^p$, $t = t_0 + \gamma$. Тоді $x + k_2 td = \bar{x} + k_2 t_0 d$, $(c, x) = (c, \bar{x}) - k_2\gamma(c, d)$. Якщо $(c, x) = 0$, то $(c, \bar{x}) = k_2\gamma(c, d)$. Із умови $(c, \bar{x}) = 1$ знаходимо $\gamma = 1/[k_2(c, d)]$. Тоді

$$x + k_1 td = \bar{x} - \frac{d}{(c,d)} + k_1\left(t_0 + \frac{1}{k_2(c,d)}\right)d =$$

$$= \bar{x} + k_1\left(t_0 - \frac{k_2 - k_1}{k_1 k_2(c,d)}\right)d.$$

Позначимо $\Delta_2 = (k_2 - k_1)/[k_1 k_2(c, d)]$. Тоді $\varphi_2(\bar{x} + k_2 t_0 d)|_{(c,\bar{x})=1} = \varphi_1(\bar{x} + k_1(t_0 - \Delta_2)d)|_{(c,\bar{x})=1}$. Аналогічно $\varphi_i(\bar{x}+k_i t_0 d)|_{(c,\bar{x})=1} = \varphi_1(\bar{x} + k_1(t_0 - \Delta_i)d)|_{(c,\bar{x})=1}$, де $\Delta_i = (k_i - k_1)/[k_1 k_i(c, d)]$. Позначимо $z(t) = \varphi_1(\bar{x} + k_1 td)|_{(c,\bar{x})=1}$. Тоді умова (3) набуде вигляду

$$\frac{dz}{dt} = f(z(t), z(t - \Delta_2), ..., z(t - \Delta_p)). \tag{4}$$

Якщо крім умов (2), (3) для функції u_1 задати початкову умову

$$u_1|_{t=0} = \psi(x), \quad k_1/k_p \le (c, x) \le 1, \tag{5}$$

то одержимо початкову функцію для рівняння (4)

$$z(t) = \psi(x+k_1 td)|_{(c,x)=1}, \quad -\Delta_p \le t \le 0. \tag{6}$$

Отже, правильна наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $(c, d) > 0$, $0 < k_1 < k_2 < ... < k_q$. Тоді задача (1), (2), (3), (5) зводиться до задачі (4), (6).*

Зауваження 1. *Якщо умову (3) замінити умовою $u_1|_{(c,x)=1} = h(u_2|_{(c,x)=1},...,u_q|_{(c,x)=1})$, то замість рівняння (4) одержимо різницеве рівняння з неперервним часом $z(t) = h(z(t-\Delta_2),...,z(t-\Delta_p))$.*

Розглянемо частковий випадок рівняння (4)

$$\frac{dz}{dt} = az(t-m) + bz(t-n), \tag{7}$$

де m та n – взаємно прості натуральні числа, $m < n$.

Згідно з [3] для того, щоб нульовий розв'язок рівняння (7) був асимптотично стійким, необхідно і досить, щоб всі корені характеристичного рівняння

$$\lambda = ae^{-m\lambda} + be^{-n\lambda} \tag{8}$$

лежали в лівій півплощині.

Означення. *Областю стійкості рівняння (8) називається множина точок $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, для яких всі корені рівняння (8) містяться в лівій півплощині.*

Нехай L – проста неперервна крива, на якій вказано напрямок руху. Через $\Delta Arg_{z\in L} f(z)$ позначимо зміну аргументу функції $f(z)$ при русі вздовж кривої L.

Лема 1. *Нехай функції $f(z)$ та $g(z)$ аналітичні в комплексній площині і для точок z із деякої простої неперервної кривої L виконуються нерівності $|g(z)| < |f(z)|$. Тоді*

$$\Delta Arg_{z\in L}(f(z)+g(z)) \geq \Delta Arg_{z\in L} f(z) - \pi. \tag{9}$$

Доведення. Справджується рівність

$$\Delta Arg_{z\in L}(f(z)+g(z)) = \Delta Arg_{z\in L}[f(z)(1+$$

$$+\frac{g(z)}{f(z)}] = \Delta Arg_{z\in L} f(z) + \Delta Arg_{z\in L}(1+\frac{g(z)}{f(z)}).$$

Оскільки $|g(z)/f(z)| < 1$, то функція $1 + g(z)/f(z)$ відображає криву L у внутрішність одиничного круга з центром в точці $z = 1$. Тому образ кривої L при відображенні $1 + g(z)/f(z)$ може змінити аргумент не більше, ніж на π. Із нерівності

$$\Delta Arg_{z\in L}\left(1+\frac{g(z)}{f(z)}\right) \geq -\pi$$

випливає нерівність (9). Лема доведена.

Теорема 2. *Область стійкості рівняння (8) обмежена.*

Доведення. Позначимо $P(\lambda) = \lambda - ae^{-m\lambda} - be^{-n\lambda}$. Тоді рівняння (8) перепишеться у вигляді $P(\lambda) = 0$. Застосуємо принцип аргументу до прямокутника на комплексній площині з вершинами A $(\lambda = \alpha + \pi i)$, B $(\lambda = \alpha - \pi i)$, C $(\lambda = \gamma - \pi i)$, D $(\lambda = \gamma + \pi i)$, де $\alpha \in \{0, 1\}$. Число $\gamma > 1$ виберемо настільки великим, щоб образ сторони CD при відображенні $P(\lambda)$ містився у правій півплощині. Згідно з принципом аргументу число нулів квазіполінома $P(\lambda)$ у прямокутнику рівне зміні аргументу функції $P(\lambda)$ при русі λ вздовж контура $ABCD$.

На відрізку BC маємо $\lambda = -\pi i + x$, $\alpha \leq x \leq \gamma$, $P(\lambda) = -\pi i + x - a(-1)^m e^{-mx} - b(-1)^n e^{-nx}$. Уявна частина функції $P(\lambda)$ залишається сталою, а дійсна частина прямує до $+\infty$ при $x \to +\infty$. На відрізку AD $\lambda = \pi i + x$, $\alpha \leq x \leq \gamma$, $P(\lambda) = \pi i + x - a(-1)^m e^{-mx} - b(-1)^n e^{-nx}$. Тут знову уявна частина функції $P(\lambda)$ буде сталою. У результаті сумарна зміна аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж відрізків BC, CD і DA буде додатною. Залишилось оцінити зміну аргументу образу відрізка AB. При досить великому $\max\{a, b\}$ визначальним на відрізку AB для приросту аргументу функції $P(\lambda)$ буде вплив функції $ae^{-m\lambda} + be^{-n\lambda}$.

Приріст аргументу функції $ae^{-m\lambda} + be^{-n\lambda}$ при русі по відрізку AB рівний приросту аргументу функції $az^m + bz^n$, коли z робить обхід кола $|z| = e^{-\alpha}$ проти годинникової стрілки. Згідно з принципом аргументу

$$\Delta Arg_{|z|=e^{-\alpha}}(az^m + bz^n) = 2\pi N,$$

де $N-$ число нулів функції $az^m + bz^n$ в крузі $|z| < e^{-\alpha}$. Але в цьому крузі завжди є нуль $z = 0$ кратності m, отже

$$\Delta Arg_{|z|=e^{-\alpha}}(az^m + bz^n) \geq 2\pi m.$$

Спочатку припустимо, що $\alpha = 0$. Тоді при $||a| - |b|| > \pi$ маємо $|ae^{-imy} + be^{-iny}| > \pi \geq |iy|$. Застосовуючи лему 1 до відрізка AB, одержимо

$$\Delta Arg_{\pi\geq y\geq -\pi}(iy - ae^{-imy} - be^{-iny}) \geq 2\pi m - \pi.$$

Тому зміна аргументу функції $P(\lambda)$ при русі вздовж контура $ABCD$ буде додатною. Отже, функція $P(\lambda)$ буде мати нуль в прямокутнику $ABCD$.

Застосовуючи цю ж методику до прямокутника $ABCD$ при $\alpha = 1$, одержимо, що функція $P(\lambda)$ буде мати нуль у цьому прямокутнику при

$$||a|e^{-m} - |b|e^{-n}| > \sqrt{\pi^2 + 1}.$$

Звідси випливає, що для точок (a, b) із області стійкості справджуються нерівності

$$||a| - |b|| \leq \pi, \quad ||a|e^{-m} - |b|e^{-n}| \leq \sqrt{\pi^2 + 1}. \tag{10}$$

Нерівність (10) визначає на площині параметрів a та b деякий обмежений многокутник. Теорема доведена.

Лема 2. *Якщо вектор (a, b) належить області стійкості рівняння (8), то $a + b < 0$.*

Доведення. Нехай $a + b \geq 0$. Тоді квазімногочлен $P(\lambda) = \lambda - ae^{-m\lambda} - be^{-n\lambda}$ задовольняє умови

$$P(0) \leq 0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} P(\lambda) = +\infty.$$

Значить, існує число λ_0, $0 \leq \lambda_0 < \infty$, таке, що $P(\lambda_0) = 0$. Рівняння (8) має невід'ємний дійсний корінь. Отже, вектор (a, b) не належить області стійкості. Лема доведена.

Застосуємо метод $D-$ розбиттів до рівняння (8). Квазіполіном має нульовий корінь, якщо $a + b = 0$. Ця пряма і є однією з ліній, що утворюють межу $D-$ розбиття.

Нехай тепер рівняння (8) має суто уявний корінь iy, $y \neq 0$:

$$a(\cos my - i \sin my) + b(\cos ny - i \sin ny) = iy.$$

Відокремлюючи дійсну і уявну частини, одержимо систему

$$a \cos my + b \cos ny = 0,$$
$$a \sin my + b \sin ny = -y. \tag{11}$$

Розв'яжемо систему (11), якщо

$$\begin{vmatrix} \cos my & \cos ny \\ \sin my & \sin ny \end{vmatrix} = \sin(n - m)y \neq 0.$$

Рівняння ліній $D-$ розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y \cos ny}{\sin(n - m)y}, \quad b = -\frac{y \cos my}{\sin(n - m)y}.$$

Система (11) може бути сумісною також у випадку, коли її головний визначник $\sin(n - m)y = 0$. Це можливо при $y \neq 0$ тоді і тільки тоді, коли $\cos my = \cos ny = 0$ або $my = \pi/2 + k\pi$, $ny = \pi/2 + l\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $l \in \mathbb{Z}$. Такі рівності виконуються тільки у випадку, коли m та n непарні. Якщо ж m та n непарні, то досить взяти $k = (m - 1)/2$, $l = (n-1)/2$, $y = \pi/2$ і система (11) визначатиме пряму лінію $a \sin m\pi/2 + b \sin n\pi/2 = -\pi/2$. Крім цієї прямої існуватиме ще зліченне число однаково віддалених взаємно паралельних прямих, які є лініями $D-$ розбиття.

Як приклад знайдемо область стійкості рівняння

$$\lambda = ae^{-\lambda} + be^{-3\lambda}.$$

Щоб знайти оцінки для коефіцієнтів a та b, використаємо нерівності (10) із доведення теореми 2, які в нашому випадку набудуть вигляду

$$||a| - |b|| \leq \pi, \quad ||a|e^{-1} - |b|e^{-3}| \leq \sqrt{\pi^2 + 1}. \tag{12}$$

Згідно з лемою 2 область стійкості повинна задовольняти ще одну нерівність

$$a + b < 0. \tag{13}$$

Нерівності (12) і (13) визначають деякий обмежений многокутник.

Для знаходження області стійкості застосуємо тепер метод $D-$ розбиттів. Пряма $a + b = 0$ є однією з ліній, що утворюють межу $D-$ розбиття.

Якщо квазіполіном має суто уявний корінь iy, то рівняння меж $D-$ розбиття в параметричній формі матимуть вигляд

$$a = \frac{y(4\cos^2 y - 3)}{2 \sin y}, \quad b = -\frac{y}{2 \sin y}. \tag{14}$$

Побудуємо лінії, що відповідають випадку $\cos y = \cos 3y = 0$. Ці рівняння мають сумісні корені $y = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому лініями $D-$розбиття будуть прямі $a-b=(-1)^{k+1}(\pi/2+k\pi)$.

Відзначимо, що лінії $D-$розбиття досить нанести в многокутнику, що обмежує область стійкості. Неважко переконатися, що зв'язна область, обмежена відрізками прямих $b=-a$, $-\pi/4\le a\le 1/2$; $b=a+\pi/2$, $-3\pi/4\le a\le -\pi/4$ та дугою лінії (14) при $0\le y\le \pi/2$ є областю стійкості.

Якщо крайова задача зводиться до різницевого рівняння першого порядку, то потрібно досліджувати відображення відрізка в себе.

Теорема 3. *Нехай $f-$унімодальне відображення, $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(0)=0$, $f(1/2)=1$, $f(1/2+x)=f(1/2-x)$, $0\le x\le 1/2$, функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна на $[0,1]$, $f''(1/2)<0$. Тоді відображення $x\to f(x)$ еквівалентне відображенню $x\to h(x)$, тобто $\varphi(f(x))=h(\varphi(x))$, де $\varphi(x)=\mu[0,x]$, $\varphi(1)=1$, $\mu-$абсолютно неперервна інваріантна міра. Тут функція h кусково диференційовна на $[0,1]$, причому $h'(\varphi(1/2-0))=2$, $h'(\varphi(1/2+0))=-2$.*

Доведення. Згідно з [4] існує абсолютно неперервна інваріантна міра μ, $\mu[0,1]=1$. Із означення інваріантної міри випливає, що $\mu[0,f(x)]=\mu[0,x]+\mu[1-x,1]$ при $0\le x\le 1/2$. Згідно з властивостями міри існує монотонно зростаюча функція $g(x)$, така, що $\mu[1-x,1]=g(\mu[0,x])$. Позначимо $\varphi(x)=\mu[0,x]$. Тоді одержимо рівність

$$\varphi(f(x))=\varphi(x)+g(\varphi(x)),0\le x\le 1/2. \quad (15)$$

Якщо $1/2\le x\le 1$, то $\mu[0,f(x)]=\mu[0,1-x]+\mu[x,1]$. Оскільки $\mu[x,1]=1-\mu[0,x]=1-\varphi(x)$, $\mu[0,1-x]=g^{-1}(\mu[x,1])=g^{-1}(1-\varphi(x))$, то

$$\varphi(f(x))=1-\varphi(x)+g^{-1}(1-\varphi(x)),$$
$$1/2\le x\le 1. \quad (16)$$

Диференціюючи рівності (15) та (16), одержимо $\varphi'(f(x))f'(x)=\varphi'(x)+g'(\varphi(x))\varphi'(x)$, $0\le x\le 1/2$; $\varphi'(f(x))f'(x)=-\varphi'(x)-\varphi'(x)/[g'(g^{-1}(1-\varphi(x))]$, $1/2\le x\le 1$. Згідно з [4] існує $\lim_{x\to 1/2}\sqrt{1-f(x)}\varphi'(f(x))=a\neq 0$. Позначимо $b=-f''(1/2)$. Тоді $\lim_{x\to 1/2}f'(x)/(x-1/2)=-b$. Але $\lim_{x\to 1/2-0}\sqrt{1-f(x)}/(x-1/2)=-\sqrt{b}/\sqrt{2}$, $\lim_{x\to 1/2+0}\sqrt{1-f(x)}/(x-1/2)=\sqrt{b}/\sqrt{2}$. Тому $\lim_{x\to 1/2-0}\varphi'(f(x))f'(x)=a\sqrt{2b}$, $\lim_{x\to 1/2+0}\varphi'(f(x))f'(x)=-a\sqrt{2b}$. Отже, $\lim_{x\to 1/2-0}\varphi'(f(x))f'(x)=-\lim_{x\to 1/2+0}\varphi'(f(x))f'(x)$, звідки $\varphi'(1/2)+g'(\varphi(1/2))\varphi'(1/2)=\varphi'(1/2)+\varphi'(1/2)/[g'(\varphi(1/2))]$. Якщо $\varphi'(1/2)\neq 0$, то $g'(\varphi(1/2)=-1$, або $g'(\varphi(1/2)=1$. Оскільки $a\neq 0$, $b\neq 0$, то перший випадок неможливий. Розглянемо відображення $h(x)=x+g(x)$ при $0\le x\le 1/2$, $h(x)=1-x+g^{-1}(1-x)$ при $1/2\le x\le 1$. Тоді $\varphi(f(x))=h(\varphi(x))$, $0\le x\le 1$; $h'(\varphi(1/2-0))=2$, $h'(\varphi(1/2+0))=-2$. Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.
2. *Шарковский А.Н., Майстренко Ю.Л., Романенко Е.Ю.* Разностные уравнения и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1986.— 280 с.
3. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М.: Наука, 1971.— 296 с.
4. *Якобсон М.В.* Топологические и метрические свойства одномерных эндоморфизмов // Докл. АН СССР.— 1978.— **243**, N 4.— С.866—869.

Стаття надійшла до редколегії 10.01.2003