УДК 517.956

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ В ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Іван Пукальський, Богдан Яшан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

i.pukalsky@chnu.edu.ua, b.yashan@chnu.edu.ua

Нехай D обмежена область в R^n з межею ∂D, $\dim D = n$, Ω – деяка обмежена область, $\overline{\Omega} \subset \overline{D}$, $\dim \Omega \leq n-1$. Розглянемо в області D задачу знаходження функцій $(u(x;q(x)),q(x))$ на яких функціонал

$$I(q) = \int\limits_D F(x;u(x,q(x)),q(x))dx \tag{1}$$

досягає мінімуму в класі функцій $q \in V = \{q | q \in C^{\alpha}(D),\ \nu_1(x) \leq q(x) \leq \nu_2(x)\}$ із яких $u(x,q(x))$ задовольняє при $x \in D \backslash \Omega$ рівняння з параметром λ

$$(Lu)(x) \equiv \Big[\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\partial_{x_i} + A_0(x) + \lambda\Big] u(x,q) = f(x,q(x)), \tag{2}$$

а на межі області ∂D крайову умову

$$\lim_{x \longrightarrow z \in \partial D} \Big[u(x,q(x)) - \varphi(x)\Big] = 0. \tag{3}$$

Порядок особливостей коефіцієнтів рівняння (2) і крайової умови (3) у точці $P(x) \in D$ характеризуватимуть функції $s(\beta_i,x)$: $s(\beta_i,x) = \rho^{\beta_i}(x)$ при $\rho(x) \leq 1$, $s(\beta_i,x) = 1$ при $\rho(x) \geq 1$, $\beta_i \in (-\infty,\infty)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$, $\rho(x) = \inf\limits_{z \in \overline{\Omega}} |x-z|$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3). $C^l(\gamma;\beta;a;D)$ – множина функцій u: $x \in \overline{D}$, які мають неперервні частинні похідні в області $D \backslash \overline{\Omega}$ вигляду ∂_x^k, $|k| \leq [l]$, для яких скінченна норма

$$||u;\gamma;\beta;a;D||_l = \sum_{|k| \leq [l]} ||u;\gamma;\beta;a;D||_k + \langle u;\gamma;\beta;a;D\rangle_l,$$

де

$$||u;\gamma;\beta;a;D||_k = \sup_{P\in\overline{D}} s((a+|k|)\gamma;x)|\partial_x^k u(P)|\prod_{i=1}^{n} s(-k_i\beta_i,x),$$

$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1},...,\partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1+\cdots+k_n$.

Щодо задачі (1)–(3) вважаємо виконаними умови:
а) коефіцієнти рівняння (1) $A_{ij}(x)s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $A_i(x)s(\mu_i,x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $\mu_i\geq 0$, $A_0(x)s(\mu_0;x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $\mu_0\geq 0$, $A_0(x)<\lambda$, $0<\lambda<\infty$ і виконується умова рівномірної еліптичності

$$C_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)s(\beta_i,x)s(\beta_j,x)\xi_i\xi_j \leq C_2|\xi|^2,$$

б) функції $f(x,q)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2\gamma;D)$, $\varphi(x)\in C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $\gamma=\max\{\max_i \beta_i, \max_i(\mu_i-\beta_i), \frac{\mu_0}{2}\}$, $\partial D\in C^{2+\alpha}$.

Теорема 1. *Нехай для задачі* (2) – (3) *виконані умови а), б). Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (2) – (3) *із простору* $C^{2+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha} \leq c\|f;\gamma;\beta;2\gamma;D\|_{\alpha} + \|\varphi;\gamma;\beta;0;D\|_{2+\alpha}. \tag{4}$$

Якщо $f\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$, $(L\varphi)(x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$ *і для задачі виконуються умови а)–б), то єдиний розв'язок задачі* (2), (3) *в області* D *визначається інтегралом Стілтьєса з борелівською мірою*

$$u(x)=\varphi(x)+\int_D Z(x,d\xi)[f(\xi,q(\xi))-(L\varphi)(\xi)]d\xi$$

Необхідні і достатні умови існування розв'язку задачі (1) – (3) встановлюються за допомогою методики праці [1].

Список літератури в алфавітному порядку

1. *Пукальський І.Д., Яшан Б.О.* Багатоточкова крайова задача оптимального керування для параболічних рівнянь з виродженням // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2020. - Том. 63, № 4. - С. 17-33.

OPTIMAL CONTROL IN A DIRICHLE PROBLEM FOR ELLIPTICAL EQUATIONS WITH DEGENERATION

The problem of optimal control of the system described by the Dirichle problem for the elliptic equation of the second order is studied. Cases of internal and boundary management are considered. The quality criterion is given by the sum of volume and surface integrals. The coefficients of the equation and the boundary condition allow power singularities of arbitrary order in any variables at some set of points. The necessary and sufficient conditions for the existence of the optimal solution of the system described by the boundary value problem for the elliptic equation with degeneracy have been established.