ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 330.101: 519.866
JEL Classification: C 510, C 610

© Бойчук М.В., Маханець Л.Л., 2022
l.makhanets@chnu.edu.ua
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

СТОХАСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА

У роботі запропонована стохастична статична узагальнена модель Леонтьєва з використанням вінерівських та пуассонівських випадкових процесів та проведено її дослідження. Для запропонованої стохастичної моделі проведено опис оптимального процесу та приведені розрахункові формули обчислення довірчих проміжків для оптимальних траєкторій за капіталами галузей при заданому довірчому рівні. Наведено модельний приклад дослідження статичної моделі оптимального розвитку трьохгалузевої економіки.

Ключові слова: *стохастична модель, статична узагальнена модель Леонтьєва, оптимальне керування, оптимальна траєкторія, оптимальний процес.*

Постановка проблеми. У моделі Леонтьєва продукція виробляється за однією виробничою технологією [1, с. 163-166], тоді як в узагальненій моделі Леонтьєва може бути використано скінчене число виробничих технологій для виробництва продукції [2, с. 239].

Важливим напрямком досліджень є вивчення стохастичної оптимальної статичної узагальненої моделі Леонтьєва, яка містить використання вінерівських та пуассонівських процесів, як у теоретичному, так і практичному аспектах.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогодення розвиток стохастичного моделювання оптимальних динамічних систем відбувається у двох напрямках.

У першому напрямку (необхідні умови оптимальності) проводяться дослідження, такі як роботи [3-5] та інші, де обчислюються градієнти критеріїв мети за відомих законах розподілу ймовірностей параметрів, станів системи та початкових умов. Оптимізаційні величини обчислюються за допомогою чисельних градієнтних методів.

Другий напрямок (достатні умови оптимальності) присвячений дослідженням, таким як роботи [6-8] та інші, де використовуються стохастичні достатні умови оптимальності при вінерівських і пуассонівських процесах. Дана робота належить до цього другого напрямку дослідження.

Формулювання цілей статті (постановка завдання). Головною метою цієї роботи є створення та дослідження стохастичної оптимальної узагальненої моделі Леонтьєва з використанням вінерівських і пуассонівських процесів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Спочатку здійснимо формалізацію детермінованої моделі, а потім, базуючись на ній, розробимо стохастичну модель.

Для побудови детермінованої моделі ми встановлюємо певні припущення, згідно з [2, с. 289-242; 9, с. 88-92].

Припущення 1. Припустимо, що в економіці є n виробничих технологій та випускається m видів продукції. Нехай $A=\left(a_{ij}^{(l)}\right)$, $i,j=\overline{1,m}$, $l=\overline{1,l(i)}$ – узагальнена матриця коефіцієнтів прямих затрат (узагальнена матриця Леонтьєва), $a_{ij}^{(l)}$ – кількість i–го ресурсу для виробництва одиниці продукції виду j в галузі (секторі) j та виготовленої за l виробничою технологією

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textit{галузь}\,1 & \textit{галузь}\,2 & & \textit{галузь}\,m \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} \ldots a_{11}^{(l(1))} & a_{12}^{(1)} \ldots a_{12}^{(l(2))} & \ldots & a_{1m}^{(1)} \ldots a_{1m}^{(l(m))} \\ a_{21}^{(1)} \ldots a_{21}^{(l(1))} & a_{22}^{(1)} \ldots a_{22}^{(l(2))} & \ldots & a_{2m}^{(1)} \ldots a_{2m}^{(l(m))} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}^{(1)} \ldots a_{m1}^{(l(1))} & a_{m2}^{(1)} \ldots a_{m2}^{(l(2))} & \ldots & a_{mm}^{(1)} \ldots a_{mm}^{(l(m))} \end{pmatrix} \end{array},$$

B – матриця коефіцієнтів випуску

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textit{галузь}\,1 & \textit{галузь}\,2 & & \textit{галузь}\,m \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1\ldots1 & 0\ldots0 & \ldots & 0\ldots0 \\ 0\ldots0 & 1\ldots1 & \ldots & 0\ldots0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0\ldots0 & 0\ldots0 & \ldots & 1\ldots1 \end{pmatrix} \end{array},$$

X – вектор валового випуску (рівень діяльності) та Y – вектор кінцевого випуску продукції (кінцевий випуск):

$$X = \begin{pmatrix} X_1^{(1)},\ldots,X_1^{(l(1))} \\ X_2^{(1)},\ldots,X_2^{(l(2))} \\ \ldots \\ X_m^{(1)},\ldots,X_m^{(l(m))} \end{pmatrix},$$

$Y = \left(Y_1,\ldots,Y_m\right)^{\mathrm{T}}$, Т – операція транспонування матриць.

У кожній галузі обирається одна конкретна виробнича технологія з доступного набору. При цьому необхідно дотримуватись матричних нерівностей.

$$\left(B-A\right)X \ge Y,$$
$$X \ge 0.$$

Припущення 2. Рівень діяльності обмежений не лише працею (робочою силою), але також залежить від вибору терміну виробництва і основних фондів. Основними елементами цих фондів є виробничі споруди та станки, а також земля та інші важливі ресурси.

Нехай γ_{ij} – обсяг ресурсу i потрібного для випуску одиниці продукції кожного процесу для галузі j, $l=\overline{1,l(j)}$, $j=\overline{1,m_1}$, $i=\overline{m_1+1,m}$, а в дійсності маємо в наявності обсяг ресурсу i як γ_i, $i=\overline{m_1+1,m}$. Тоді реальний досягнутий обсяг випуску повинен відповідати наступній умові (нерівності) в матричній формі

$$\Gamma X \le \gamma,$$

де

$$\Gamma = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \textit{галузь}\,1 & \textit{галузь}\,2 & & \textit{галузь}\,m_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \gamma_{m_1+1,1}^{(1)} \cdots \gamma_{m_1+1,1}^{(l_{(1)})} & \gamma_{m_1+1,2}^{(1)} \cdots \gamma_{m_1+1,2}^{(l_{(2)})} & \ldots & \gamma_{m_1+1,m_1}^{(1)} \cdots \gamma_{m_1+1,m_1}^{(l_{(m_1)})} \\ \gamma_{m_1+2,1} \cdots \gamma_{m_1+2,1}^{(l_{(1)})} & \gamma_{m_1+2,2}^{(1)} \cdots \gamma_{m_1+2,m_1}^{(l_{(2)})} & \ldots & \gamma_{m_1+2,m_1} \cdots \gamma_{m_1+2,m_1}^{(l_{(m_1)})} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{m,1}^{(1)} \cdots \gamma_{m,1}^{(l_{(1)})} & \gamma_{m,2}^{(1)} \cdots \gamma_{m,2}^{(l_{(2)})} & \ldots & \gamma_{m,m_1}^{(1)} \cdots \gamma_{m,m_1}^{(l_{(m_1)})} \end{pmatrix} \end{array},$$

$$\gamma = \left(\gamma_{m_1+1},\gamma_{m_1+2},\ldots,\gamma_m\right)^{\mathrm{T}}.$$

Припущення 3. Кінцевий попит на продукцію i-ої галузі Y_i дорівнює сумі валових інвестицій VI_i та невиробничого споживання (споживання) C_i

$$Y_i = VI_i + C_i,\ i=\overline{1,m}.$$

Причому, для фондоутворюючих галузей $Y_i = VI_i + C_i$, $i = \overline{1,r}$ $(r \le m)$, а нефондоутворюючих $Y_i = C_i$, $i = \overline{r+1,m}$.

Припущення 4. Витрати валових інвестицій кожної галузі VI_i ідуть на збільшення основних фондів інших галузей (розвиток економіки)

$$VI_i = \sum_{j=1}^{m} \chi_{ij} I_j \, , \ i = \overline{1,r}$$

причому $\sum_{i=1}^{r} \chi_{ij} = 1$ для $\forall j = \overline{1,m}$ без врахування амортизаційних відрахувань. При $i > r$ $\chi_{ij} = 0$ для $\forall j = \overline{1,m},$ якщо для кожного $i \le r$ існує j, що $\chi_{ij} > 0$ тоді $i-$ ту галузь називають фондоутворюючою.

Припущення 5. Рівняння руху капіталу має вигляд

$$\dot{\mathrm{K}}_i^{(l)}(t) = I_i - \mu_i^{(l)} \mathrm{K}_i^{(l)}(t) \, , \ l = \overline{1, l_{(i)}} \, , \ i = \overline{1,m} \, , \ t \in [t_0, \mathrm{T}]$$

та означає, що валові інвестиції I_i ідуть на приріст капіталу (чисті інвестиції) $\dot{\mathrm{K}}_i^{(l)}(t) \equiv d\mathrm{K}_i^{(l)} / dt$ та амортизаційні відрахування $\mu_i \mathrm{K}_i^{(l)}(t),$ де $\mu_i^{(l)} \in (0;1)$ – норма амортизації, $l = \overline{1, l(i)},$ $i = \overline{1,m}$.

Припущення 6. Рівень діяльності $X_i^{(l)}$ обмежений макровиробничою функцією $F_{li}\left(\mathrm{K}_i^{(l)}, L_i^{(l)}\right)$

$$0 \le X_i^{(l)} \le F_{li}\left(\mathrm{K}_i^{(l)}, L_i^{(l)}\right), \ l = \overline{1, l(i)}, \ i = \overline{1,m} \, ,$$

яка залежить від капіталу $\mathrm{K}_i^{(l)}$ та робочої сили $L_i^{(l)}$ та має властивості [10, с.6–7]: двічі неперервно–диференційована на $\mathrm{K}_i^{(l)} \ge 0$ та $L_i^{(l)} \ge 0$, монотонно зростаюча $F'_{l_i \mathrm{K}_i^{(l)}} > 0$ та $F'_{l_i L_i^{(l)}} > 0$, увігнута $F''_{l_i \left(\mathrm{K}_i^{(l)}\right)^2} < 0$ та $F''_{l_i \left(L_i^{(l)}\right)^2} > 0$, $l = \overline{1, l(i)},$ $i = \overline{1,m}$.

Припущення 7. На робочу силу накладається обмеження

$$0 \le L_i^{(l)}(t) \, , \ l = \overline{1, l(i)}, \ i = \overline{1,m} \, ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{l_{(i)}} L_i^{(l)}(t) \le \mathrm{N}(t) \, , \ t \in [t_0, \mathrm{T}] .$$

Припущення 8. На кінцеві стани системи (капітали) накладаються обмеження

$$\mathrm{K}_i^{(l)}(\mathrm{T}) \ge \mathrm{K}_{iT}^{(l)}, \ l = \overline{1, l(i)}, \ i = \overline{1,m} .$$

Припущення 9. На споживання накладаються обмеження

$$C_i(t) \ge C_i^{(\min)}, \ i = \overline{1,m} \, , \ t \in [t_0, \mathrm{T}] .$$

Із припущень 1-9 одержимо детерміновану модель

$$\dot{\mathrm{K}}_i^{(l)}(t) = -\mu_i^{(l)} \mathrm{K}_i^{(l)}(t) + I_i(t), \ l = \overline{1, l(i)},$$

$$\sum_{l=1}^{l(i)} \mathrm{X}_i^{(l)}(t) - \sum_{l=1}^{l_{(i)}} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(l)} X_j^{(l)}(t) \ge$$

$$\ge \begin{Bmatrix} \sum_{j=1}^{m} \chi_{ij} \mathrm{I}_j(t) + C_i(t), i = \overline{1,r} \\ C_i(t), i = \overline{r+1,m} \end{Bmatrix}, \ i = \overline{1,m} \, ,$$

$$\sum_{l=1}^{l(i)} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{ij}^{(l)} X_j^{(l)}(t) \le \gamma_i \, , \ i = \overline{m_1 + 1, m} \, ,$$

$$L_i^{(l)}(t) \ge 0 \, , \ 0 \le \mathrm{X}_i^{(l)}(t) \le F_{li}\left(\mathrm{K}_i^{(l)}(t), L_i^{(l)}(t)\right), \ l = \overline{1, l(i)}, \ C_i(t) \ge C_i^{(\min)}, \ i = \overline{1,m} \, , \ \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{l(i)} L_i^{(l)}(t) \le \mathrm{N}(t) .$$

Перейдемо до формалізації стохастичної моделі.

Стохастична модель

Нехай $\{\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P}\}$ – ймовірністний простір із σ – алгеброю $\{\mathrm{F}_t, t\in[t_0,\mathrm{T}]\}\subset\sigma$, множиною елементарних подій Ω та мірою P; $\xi_i^{(l)}(t)\equiv\xi_i^{(l)}(t,\omega)\in\mathbb{R}$ (множина дійсних чисел) – F_t – вимірний стандартний вінерівський процес із нульовим математичним сподіванням $\mathrm{M}\xi_i^{(l)}(t)=0$ та одиничною дисперсією – $\mathrm{M}\left[\xi_i^{(l)}(t)\right]^2=1$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, $\omega\in\Omega$ [11, с.7–8]; $\eta_i^{(l)}(t)\equiv\eta_i^{(l)}(t,\omega)$ ($\in\mathbb{R}$), F_t – вимірний пуассонівський процес із математичним сподіванням $\mathrm{M}\eta_i^{(l)}(t)=x_i^{(l)}(t-t_0)$, $x_i^{(l)}\equiv const$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$, $\omega\in\Omega$ [11, с.7]. Причому, випадкові процеси $\xi_i^{(l)}(t)$ та $\eta_i^{(l)}(t)$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$ є незалежними.

На ймовірнісному просторі $\{\Omega,\mathrm{F},\mathrm{P}\}$ знайдений випадковий процес $\{\mathrm{K}_i^{(l)}(t)\equiv\mathrm{K}_i^{(l)}(t,\omega),\ l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\ \omega\in\Omega\}$ узагальненої моделі Леонтьєва, який

– описується стохастичними диференціальними моделями руху капіталів $\mathrm{K}_i^{(l)}$ галузей в формі Іто [11, с.15-163]

$$\dot{\mathrm{K}}_i^{(l)}(t)=I_i(t)-\mu_i^{(l)}\mathrm{K}_i^{(l)}(t)+\alpha_i^{(l)}(t)\dot{\xi}_i^{(l)}(t)+\beta_i^{(l)}\dot{\eta}_i^{(l)}(t),\quad l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,\mathrm{T}];\tag{1}$$

– задовольняє початкові умови:

$$\mathrm{K}_i^{(l)}(t_0)=\mathrm{K}_{i0}^{(l)},\ \mathrm{K}_{i0}^{(l)}\in\mathrm{F}_{t_0};\tag{2}$$

– задовольняє обмеження на кінцеві стани системи (капітали)

$$\mathrm{K}_i^{(l)}(\mathrm{T})\geq\mathrm{K}_{i\mathrm{T}}^{(l)},\ l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m}.\tag{3}$$

Накладаються обмеження на рівень діяльності $X_i^{(l)}$, валові інвестиції I_i, споживання C_i, робочу силу $L_i^{(l)}$ та сумарну робочу силу

$$\begin{gathered}
0\leq\mathrm{X}_i^{(l)}(t)\leq F_{li}\left(\mathrm{K}_i^{(l)}(t),L_i^{(l)}(t)\right),\ l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m},\\
\sum_{l=1}^{l(i)}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij}^{(l)}X_j^{(l)}(t)\leq\gamma_i,\ i=\overline{m_1+1,m},\\
\sum_{l=1}^{l(i)}\mathrm{X}_i^{(l)}(t)-\sum_{l=1}^{l_{(i)}}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{(l)}X_j^{(l)}(t)\geq\\
\geq\begin{Bmatrix}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}\mathrm{I}_j(t)+C_i(t),i=\overline{1,r}\\ C_i(t),i=\overline{r+1,m}\end{Bmatrix},\ i=\overline{1,m},\\
I_i(t)\geq0,\ C_i(t)\geq C_i^{(\min)},\ L_i^{(l)}(t)\geq0,\ l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m},\\
\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{l(i)}L_i^{(l)}(t)\leq\mathrm{N}(t-\tau),\ t\in[t_0,\mathrm{T}].
\end{gathered}\tag{4}$$

За критерій мети в умовах досконалої конкуренції візьмемо максимізацію середнього інтегрального прибутку за відрізок часу $[t_0,\mathrm{T}]$

$$\begin{gathered}
\mathrm{M}\int_{t_0}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{m}\left[q_i(t)Y_i(\varphi(t))-I_i(\varphi(t))\right]dt=\\
=\sum_{i=1}^{m}\mathrm{M}\int_{t_0}^{\mathrm{T}}\left\{q_i(t)\begin{Bmatrix}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j(t)+C_i(t),i=\overline{1,r}\\ C_i(t),i=\overline{r+1,m}\end{Bmatrix}-I_i((t))\right\}dt\to\max_{\mathrm{X},L,\mathrm{I},C},
\end{gathered}\tag{5}$$

де $X=\left(X_1^{(1)},\ldots,X_1^{(l(1))},\ldots\ldots,X_m^{(1)},\ldots,X_m^{(l(m))}\right)^{\mathrm{T}}$,

$L=\left(L_1^{(1)},\ldots,L_1^{(l(1))},\ldots\ldots,L_m^{(1)},\ldots,L_m^{(l(m))}\right)^{\mathrm{T}}$,

$I=\left(I_1,\ldots,I_m\right)^{\mathrm{T}}$, $C=\left(C_1,\ldots,C_m\right)^{\mathrm{T}}$,

Т – операція транспортування матриць, $\alpha_i^{(l)}$, $\beta_i^{(l)}$, $l=\overline{1,l(i)}$, q_i, $i=\overline{1,m}$ та N – кусково–неперервні функції на $[t_0,\mathrm{T}]$.

Модель (1)–(5) у математичному плані є задачею стохастичного оптимального керування, в якій керуваннями виступає рівень діяльності $X_i^{(l)}$, робоча сила $L_i^{(l)}$ $l=\overline{1,l(i)}$, валові інвестиції I_i та споживання C_i, $i=\overline{1,m}$, а фазовою траєкторією – капітали галузей $\mathrm{K}_i^{(l)}$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$.

Проведемо дослідження моделі (1)–(5) із використанням стохастичних достатніх умов оптимальності [12, с.116–119, с.158, с. 162-163].

Оптимальні керування. Для моделі (1)–(5) застосуємо достатні умови оптимальності, за якими запишемо рівняння Беллмана з крайовою умовою

$$\inf_{\mathrm{X},L,I,C} R\left(t,\mathrm{K},\mathrm{X},L,I,C,V\right)\equiv\inf_{\mathrm{X},L,I,C}\Big\{\partial V/\partial t+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{l_{(i)}}\partial V/\partial \mathrm{K}_i^{(l)}\left[-\mu_i^{(l)}\mathrm{K}_i^{(l)}(t)+I_i(t)\right]+$$
$$+0.5\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{l(i)}\left(\alpha_{i(t)}^{(l)}\right)^2\partial^2 V/\partial\left(\mathrm{K}_i^{(l)}\right)^2+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{l(i)}x_i^{(l)}\left[V\left(t,\mathrm{K}',\mathrm{K}_i^{(l)}+\beta_i^{(l)}\right)-V\left(t,\mathrm{K}',\mathrm{K}_i^{(l)}\right)\right]- \tag{6}$$
$$-\sum_{i=1}^{m}\left\{q_i\left\{\begin{matrix}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j+C_i,\ i=\overline{1,r}\\ C_i(t-\tau),\ i=\overline{r+1,m}\end{matrix}\right\}-I_i\right\}\Bigg\}=0,\ t\in[t_0,\mathrm{T}],$$
$$V\left(\mathrm{T},\mathrm{K}_{\mathrm{T}}\right)=0,$$

Де $\mathrm{K}'=\left(\mathrm{K}_1^{(1)},\ldots,\mathrm{K}_1^{l(1)},\ldots\ldots,\mathrm{K}_{i-1}^{(1)},\ldots,\mathrm{K}_{i-1}^{(l(i-1))},\mathrm{K}_{i+1}^{(1)},\ldots,\mathrm{K}_{i+1}^{(l(i+1))},\ldots\ldots,\mathrm{K}_m^{(1)},\ldots,\mathrm{K}_m^{(l(m))}\right)^{\mathrm{T}}$,

невідома функція $V(t,\mathrm{K})$ – неперервно диференційована один раз по t і двічі по К на декартовому добутку $[t_0,\mathrm{T}]\times\{\mathrm{K}\ge 0\}$ та яку будемо шукати у вигляді

$$V(t,\mathrm{K})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{l(i)}b_i^{(l)}\left[\mathrm{K}_i^{(l)}(t)-\mathrm{K}_{i\ \mathrm{T}}^{(l)}\right],\ t\in[t_0,\mathrm{T}]. \tag{7}$$

Тут $b_i^{(l)}$ – сталі, які підлягають визначенню (вибору).

Підставимо (7) у рівняння Беллмана (6). Сформуємо задачу нелінійного програмування для визначення керувань. Із рівняння Беллмана (6) маємо критерій мети

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{l=1}^{l(i)}b_i^{(l)}I_i\left\{q_i(t)\left\{\begin{matrix}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}I_j+C_i,\ i=\overline{1,r}\\ C_i,\ i=\overline{r+1,m}\end{matrix}\right\}-I_i(t-\tau)\right\}\right\}\to\min_{C,\mathrm{I}} \tag{8}$$

та обмеження

$$\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{l=1}^{l(i)} b_i^{(l)}\left[-\mu_i^{(l)}\mathrm{K}_i^{(l)}(t)+\mathrm{I}_i\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{l(i)} x_i^{(l)} b_i^{(l)}\beta_i^{(l)}(t)-\left\{q_i(t)\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}\mathrm{I}_i+C_i, i=\overline{1,r}\\ C_i, i=\overline{r+1,m}\end{cases}-I_i\right\}\right\}=0 \quad (9)$$
$$t\in[t_0,\mathrm{T}].$$

До співвідношень (8) і (9) допишемо обмеження на керування (4) та кінцевий стан системи (капіталів галузей) (3).

Задачу нелінійного програмування (3), (4), (8), (9) можна розв'язати одним із чисельних градієнтних методів [13] і при цьому визначити оптимальні керування за рівнем діяльності $X_{\text{ОП}}(t)=\left(X_{1\text{ОП}}^{(1)}(t),...,X_{1\text{ОП}}^{(l(1))}(t),...,X_{m\text{ОП}}^{(1)}(t),...,X_{m\text{ОП}}^{(l(m))}(t)\right)^T$, за робочою силою $L_{\text{ОП}}(t)=\left(L_{1\text{ОП}}^{(1)}(t),...,L_{1\text{ОП}}^{(l(1))}(t),...,L_{m\text{ОП}}^{(1)}(t),...,L_{m\text{ОП}}^{(l(m))}(t)\right)^T$, за валовими інвестиціями $I_{\text{ОП}}(t)=\left(I_1(t),...,L_{m\text{ОП}}(t)\right)^T$, за споживанням $C_{\text{ОП}}(t)=\left(C_1(t),...,C_{m\text{ОП}}(t)\right)^T$.

Слід зауважити, що оптимальні керування не залежать від коефіцієнта при приростах вінерівських процесів у динаміках капіталів (1) та є детермінованими величинами.

Алгоритм розв'язування задачі нелінійного програмування (3), (4), (8), (9) такий.

1. Розв'язується задача нелінійного програмування (3)-(4), (8)-(9) при $t=\mathrm{T}$. Вибором сталих $b_i^{(l)}$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$ потрібно домогтися виконання існування розв'язку цієї задачі. Якщо розв'язок не існує, то це означає, що кінцеві стани системи $\mathrm{K}_{iT}^{(l)}$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$ не досяжні. У цьому випадку необхідно послабити умови на вхідну інформацію задачі (1)–(5). Вихід із алгоритму.

При існуванні для деяких сталих $\tilde{b}_i^{(l)}$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$ розв'язку задачі (3), (4), (8), (9) – перехід на блок 2.

2. Одержано оптимальні керування при $t=\mathrm{T}$: $\mathrm{X}_{\text{ОП}}(\mathrm{T})$, $L_{\text{ОП}}(\mathrm{T})$, $\mathrm{I}_{\text{ОП}}(\mathrm{T})$, $C_{\text{ОП}}(\mathrm{T})$.

Розіб'ємо часовий відрізок $[t_0,\mathrm{T}]$ на λ частин із кроком $\Delta t=(\mathrm{T}-t_0)/\lambda$.

3. Проведемо розрахунок оптимальних керувань $\mathrm{X}_{\text{ОП}}(t_0+\rho\Delta t), L_{\text{ОП}}(t_0+\rho\Delta t)$, $\mathrm{I}_{\text{ОП}}(t_0+\rho\Delta t)$, $C_{\text{ОП}}(t_0+\rho\Delta t)$, $\rho=\overline{1,\lambda-1}$ із розв'язування задачі нелінійного програмування (4), (8), (9).

Таким чином, отримали оптимальні керування за рівнем діяльності $\mathrm{X}_{\text{ОП}}(t_0+\rho\Delta t)$, за робочою силою $L_{\text{ОП}}(t_0+\rho\Delta t)$, за валовими інвестиціями $\mathrm{I}_{\text{ОП}}(t_0+\rho\Delta t)$, за споживанням $C_{\text{ОП}}(t_0+\rho\Delta t)$, $\rho=\overline{1,\lambda}$.

Причому оптимальні керування не залежать від коефіцієнтів при приростах вінерівських процесів у динаміках капіталів і є детермінованими величинами.

За знайденими оптимальним керуванням за валовими інвестиціями $\mathrm{I}_{\text{ОП}}$ *стохастичні* оптимальні траєкторії за капіталами галузей $\mathrm{K}_{\text{ОП}}$ визначаються одним із чисельних методів [14, с.278–296; 15] із стохастичної початкової задачі (1)–(2) при $\mathrm{I}=\mathrm{I}_{\text{ОП}}$.

А *середні* оптимальні траєкторії $\mathrm{K}_{\text{ОП}}^{(c)}$ визначаються із використанням властивостей вінерівського та пуасонівсткого процесів $\mathrm{M}\dot{\xi}(t)=\left(\mathrm{M}\xi(t)\right)^{\cdot}=0$, $\mathrm{M}\dot{\eta}(t)=\left(\mathrm{M}\eta(t)\right)^{\cdot}=x$ з середньої динаміки капіталів (1) при середніх початкових умовах (2) та мають вигляд

$$\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l,c)}(t)=\mathrm{MK}_{i0}^{(l)}e^{-\mu_i^{(e)}(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}e^{-\mu_i^{(l)}(t-y)}\left[\mathrm{I}_i^{(\text{ОП})}(y)+\beta_i^{(l)}(y)x_i^{(l)}\right]dy,\ l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m},$$
$$x=\left(x_1^{(1)},\ldots,x_1^{(l(1))},\ldots\ldots,x_m^{(1)},\ldots,x_m^{(l(m))}\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\xi(t)=\left(\xi_1^{(1)}(t),\ldots,\xi_1^{(l(1))}(t),\ldots\ldots,\xi_m^{(1)}(t),\ldots,\xi_m^{(l(m))}(t)\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\eta(t)=\left(\eta_1^{(1)}(t),\ldots,\eta_1^{(l(1))}(t),\ldots\ldots,\eta_m^{(1)}(t),\ldots,\eta_m^{(l(m))}(t)\right)^{\mathrm{T}},$$
$$\mathrm{K}_{\text{ОП}}^{(c)}=\left(\mathrm{K}_{1\text{ОП}}^{(1,c)},...,\mathrm{K}_{1\text{ОП}}^{(l(1),c)},...,\mathrm{K}_{m\text{ОП}}^{(1,c)},...,\mathrm{K}_{m\text{ОП}}^{(l(m),c)}\right)^T,$$

$$\mathrm{K}_{\text{ОП}}=\left(\mathrm{K}_{1\text{ОП}}^{(1)},...,\mathrm{K}_{1\text{ОП}}^{(l(1))},...,\mathrm{K}_{m\text{ОП}}^{(1)},...,\mathrm{K}_{m\text{ОП}}^{(l(m))}\right)^T.$$

Тоді оптимальні керування за кінцевим випуском продукції $Y_{\text{ОП}}=\left(Y_1^{(\text{ОП})},...,Y_m^{(\text{ОП})}\right)^T$ обчислюється за формулою

$$Y_i^{(\text{ОП})}(t)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\chi_{ij}\mathrm{I}_i^{(\text{ОП})}(t)+C_i^{(\text{ОП})}(t),\ i=\overline{1,r}\\ C_i^{(\text{ОП})}(t),\ i=\overline{r+1,m}\end{cases},\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\ i=\overline{1,m}.$$

Таким чином, визначили оптимальний процес $\{\mathrm{K}_{\text{ОП}}(t),\ \mathrm{X}_{\text{ОП}}(t),\ L_{\text{ОП}}(t),\ \mathrm{I}_{\text{ОП}}(t),\ C_{\text{ОП}}(t),\ t\in[t_0,\mathrm{T}]\}$. Причому, оптимальні керування є кусково-неперевними функціями, а оптимальні траєкторії – кусково-диференційованими функціями на $[t_0,\mathrm{T}]$.

При стохастичному моделюванні необхідно знати довірчі межі за заданою ймовірністю (довірчим рівнем) середніх значень та дисперсій нормальних генеральних сукупностей оптимальних траєкторій за капіталами галузей.

Нехай проведено обчислювальний експеримент по визначенню оптимальних траєкторій за капіталами галузей і одержано Q ансамблів $K_{ij}^{(l)}(t)$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,Q}$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$.

Обчислимо вибіркові статистики [16, с.213] оптимальних траєкторій за капіталами галузей:

– вибіркові середні

$$\overline{\mathrm{K}}_{i\text{ОП}}^{(l)}(t)=Q^{-1}\sum_{j=1}^{Q}K_{ij\text{ОП}}^{(l)}(t),\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\ l=\overline{1,l(i)};$$

– вибіркові дисперсії

$$S^2_{\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l)}}(t)=(Q-1)^{-1}\sum_{j=1}^{Q}\left(K_{ij\text{ОП}}^{(l)}(t)-\overline{\mathrm{K}}_{i\text{ОП}}^{(l)}(t)\right)^2,\ t\in[t_0,\mathrm{T}],\ l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m}.$$

Зауважимо, що вибіркові середні оптимальних траєкторій за капіталами $\overline{\mathrm{K}}_i^{(l)}$ дорівнюють середнім оптимальним траєкторіям $K_{ij\text{ОП}}^{(l,c)}$, тобто $\overline{\mathrm{K}}_i^{(l)}(t)=K_{ij\text{ОП}}^{(l,c)}(t)$, $l=\overline{1,l(i)}$, $i=\overline{1,m}$, $t\in[t_0,\mathrm{T}]$. Довірчі проміжки для дисперсій нормальних сукупностей оптимальних траєкторій за капіталами галузей та за заданою ймовірністю $\Theta\in(0;1)$ набувають вигляду

$$\left(\frac{(Q-1)S^2_{\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l)}}(t)}{\chi^2_{1-\Theta/2}(Q-1)};\frac{(Q-1)S^2_{\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l)}}(t)}{\chi^2_{\Theta/2}(Q-1)}\right),\ l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,\mathrm{T}],$$

де $\chi^2_{\Theta/2}(Q-1)\left[\chi^2_{1-\Theta/2}(Q-1)\right]-\Theta/2[1-\Theta/2]$ – квантилі розподілу Пірсона із ступенями ($Q-1$) та довірчим рівнем Θ (табличне значення в [16, с. 238-239]).

Тоді довірчими проміжками для реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами галузей $\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l,p)}$ та за заданим довірчим рівнем Θ є

$$\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l,p)}(t)\in\left(\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l,c)}(t)-\frac{S_{\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l)}}(t)\cdot t_\Theta}{\sqrt{Q}};\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l,c)}(t)+\frac{S_{\mathrm{K}_{i\text{ОП}}^{(l)}}(t)\cdot t_\Theta}{\sqrt{Q}}\right),$$

$$l=\overline{1,l(i)},\ i=\overline{1,m},\ t\in[t_0,\mathrm{T}],$$

де t_Θ – Θ-квантиль розподілу Ст'юдента із ($Q-1$) ступенем вільності при довірчому рівні Θ (табличне значення в [16, с. 236-237]).

Таким чином, визначені довірчі межі реальних значень оптимальних траєкторій за капіталами галузей при заданому довірчому рівні.

Зауваження. Вище описана методика справедлива для стохастичної моделі (1)-(4) із критерієм мети – максимізувавши середню інтегральну дисконтовану функцію корисності $U(C)$ від споживання C на відрізку часу $[t_0,\mathrm{T}]$

$$\mathrm{M}\int_t^{\mathrm{T}}e^{-\delta(t-t_0)}U(C(t))dt\to\max_{X,L,I,C},$$

де M – математичне сподівання, δ – норма дисконту, $U(C \ge 0) \ge 0$ – функція корисності з властивостями: двічі неперевно-диференційована, монотонно зростаюча, вгнута та $U(0)=0$.

Модельний приклад. Проведемо дослідження статичної моделі оптимального розвитку трьохгалузевої економіки при таких даних:

$$A=\begin{pmatrix} \text{галузь } 1 & \text{галузь } 2 & & \text{галузь } 3 & & \\ 0,403 & 0,564 & 0,528 & 0,089 & 0,102 & 0,096 \\ 0,092 & 0,006 & 0,003 & 0,212 & 0,254 & 0,226 \\ 0,092 & 0,009 & 0,006 & 0,048 & 0,103 & 0,054 \end{pmatrix},\ \chi=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$m=3$, $r=1$,

$F_1^{(1)}(K_1^{(1)},L_1^{(1)})=10\left(K_1^{(1)}\right)^{1/4}\left(L_1^{(1)}\right)^{3/4}$,

$F_2^{(1)}(K_2^{(1)},L_2^{(1)})=10\left(K_2^{(1)}\right)^{0.4}\left(L_2^{(1)}\right)^{0.6}$, $F_2^{(2)}(K_2^{(2)},L_2^{(2)})=12\left(K_2^{(2)}\right)^{1/3}\left(L_2^{(2)}\right)^{2/3}$,

$F_3^{(1)}(K_3^{(1)},L_3^{(1)})=14\left(K_3^{(1)}\right)^{0.19}\left(L_3^{(1)}\right)^{0.81}$. $F_3^{(2)}(K_3^{(2)},L_3^{(2)})=13\left(K_3^{(2)}\right)^{0.22}\left(L_3^{(2)}\right)^{0.78}$,

$F_3^{(3)}(K_3^{(3)},L_3^{(3)})=15\left(K_3^{(3)}\right)^{1/5}\left(L_3^{(3)}\right)^{4/5}$,

$\mu_1^{(1)}=0.07$, $\mu_2^{(1)}=0.075$, $\mu_2^{(2)}=0.08$, $\mu_3^{(1)}=0.083$, $\mu_3^{(2)}=0.093$, $\mu_3^{(3)}=0.09$,

$T=10$, $t_0=0$,

$K_{10}^{(1)}=5$, $K_{20}^{(1)}=4.2$, $K_{20}^{(2)}=4$, $K_{30}^{(1)}=3.2$, $K_{30}^{(2)}=2.8$, $K_{30}^{(3)}=3.0$,

$K_{1T}^{(1)}=350$, $K_{2T}^{(1)}=142$, $K_{2T}^{(2)}=140$, $K_{3T}^{(1)}=327$, $K_{3T}^{(2)}=323$, $K_{3T}^{(3)}=325$,

$C_1^{(\min)}=0.1$, $C_2^{(\min)}=0.2$, $C_3^{(\min)}=0.3$,

$\alpha_1^{(1)}=8$, $\alpha_2^{(1)}=8.9$, $\alpha_2^{(2)}=9$, $\alpha_3^{(1)}=9.8$, $\alpha_3^{(2)}=10.2$, $\alpha_3^{(3)}=10$,

$\beta_1^{(1)}=4$, $\beta_2^{(1)}=4.9$, $\beta_2^{(2)}=5$, $\beta_3^{(1)}=7.2$, $\beta_3^{(2)}=6.8$, $\beta_3^{(3)}=7$,

$N=152.236$, $q_1=10$, $q_2=12$, $q_3=13$,

$x_1^{(1)}=2$, $x_2^{(1)}=2.8$, $x_2^{(2)}=3$, $x_3^{(1)}=5.2$, $x_3^{(2)}=4.8$, $x_3^{(3)}=5$,

$\gamma_1=17.518$, $\gamma_2=13.516$, $\gamma_3=9.911$,

$$\Gamma=\begin{pmatrix} 0.008 & 0.009 & 0.003 & 0.013 & 0.016 & 0.007 \\ 0.006 & 0.010 & 0.002 & 0.014 & 0.009 & 0.006 \\ 0.005 & 0.012 & 0.001 & 0.015 & 0.017 & 0.003 \end{pmatrix}.$$

Приведемо деякі оптимальні значення економічних показників:

- оптимальні керування за валовими інвестиціями

$\mathrm{I}_{1\,\text{ОП}}=40.3895$, $\mathrm{I}_{2\,\text{ОП}}=5.3822$, $\mathrm{I}_{3\,\text{ОП}}=5.3822$;

- оптимальні керування за рівнями діяльності

$\mathrm{X}_{1\,\text{ОП}}^{(1)}=1580$, $\mathrm{X}_{2\,\text{ОП}}^{(2)}=202$, $\mathrm{X}_{3\,\text{ОП}}^{(3)}=603$;

- оптимальні керування за робочою силою

$L_{1\,\text{ОП}}^{(1)}=101.4463$, $L_{2\,\text{ОП}}^{(2)}=10.0247$, $L_{3\,\text{ОП}}^{(3)}=40.7654$;

- оптимальні керування за споживаннями

$C_{1\,\text{ОП}}=24.7529$, $C_{2\,\text{ОП}}=4.3407$, $C_{3\,\text{ОП}}=20.4235$;

- оптимальні керування за кінцевою продукцією

$Y_{1\,\text{ОП}}=84.6293$, $Y_{2\,\text{ОП}}=4.3407$, $Y_{3\,\text{ОП}}=20.4235$.

Оптимальні траєкторії за капіталами з її довірчими проміжками при довірчому рівні $\Theta=0.90$ із 19 ступенями вільності ($t_{0.90}(19)=1.729$ – розподіл Ст'юдента, мінус "–" – нижня межа довірчого проміжку, плюс "+" – верхня межа) подані в таблиці 1.

Таблиця 1

Оптимальні траєкторії за капіталами та їх довірчі проміжки

t	$K_{1\,ОП}^{(1)} \pm \frac{S_{K_{1\,ОП}^{(1)}} t_{0.9}(19)}{\sqrt{20}}$	$K_{2\,ОП}^{(2)} \pm \frac{S_{K_{2\,ОП}^{(2)}} t_{0.9}(19)}{\sqrt{20}}$	$K_{3\,ОП}^{(3)} \pm \frac{S_{K_{3\,ОП}^{(3)}} t_{0.9}(19)}{\sqrt{20}}$
0.5	28.6043±3.4325	13.8331±1.3833	26.8761±2.9564
1	51.3967±6.1676	23.2807±2.3281	49.7016±5.4672
2	94.6566±11.3588	41.0790±4.1080	92.3837±10.1622
3	134.9920±16.1990	57.5089±5.7510	131.3921±14.4531
4	172.6004±18.9860	72.6757±6.5408	167.0432±16.7043
5	207.6662±22.8433	86.6763±7.8009	197.7129±19.7713
6	240.3614±26.4398	99.6005±8.9640	229.4040±22.9404
7	270.8462±27.0846	111.5311±8.9225	256.6193±23.0957
8	299.2700±29.9270	112.5503±9.0040	281.4922±25.3343
9	325.7722±32.5772	132.7110±10.6169	304.2243±27.3809
10	350.4827±35.0483	142.0959±11.3677	325±29.2532

Висновки. 1. Запропоновано і досліджено стохастичну оптимізаційну узагальнену модель Леонтьєва, яка містить вінерівські та пуассонівські процеси.

2. Для розробленої стохастичної моделі надано опис оптимального процесу та розрахункові формули для обчислення довірчих проміжків оптимальних траєкторій капіталів галузей з заданим рівнем довіри.

3. Виявлено, що в запропонованій стохастичній моделі оптимальні керування за рівнем діяльності, робочою силою, валовими інвестиціями, споживанням та кінцевим випуском продукції не залежать від коефіцієнтів при приростах вінерівських процесів в динаміках капіталів галузей і мають детермінований характер, тоді як оптимальні траєкторії капіталів галузей мають стохастичний характер.

Список літератури

1. Пономаренко О.І., Перестюк М.О., Бурим В.М. Основи математичної економіки. Київ: Інформтехніка, 1995. 320 с.
2. Математическая экономика на персональном компьютере/ под ред. М. Кубонива. Москва: Финансы и статистика, 1991. 303 с.
3. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. О решении задач оптимального управления на классе кусочно-постоянных функций. *Автоматика и вычислительная техника*. 2007. Т. 41. № 1. С. 27–36.
4. Третьяков В.Е., Целищева И.В., Шишкин Г.И. Оптимальное управление системами с неполной и неточной информацией. *Сборник научных трудов*, *Труды Института математики и механики УрО РАН.* 1992. Т. 2. С. 176–187.
5. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И. Синтез оптимальных управлений для динамических систем при неполной и неточной информации об их состояниях. *Труды Математического института имени В. А. Стеклова.* 1995. Т. 211, С. 140–152.
6. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. Москва: Наука, 1992. 336 с.
7. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Стохастическое моделирование полного цикла однопродуктовой макроэкономики роста. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. Т. 49, № 2. С. 156-163.
8. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Стохастическая модель полного цикла оптимальной эколого-экономической динамики. *Проблемы управления и информатики*. 2013. № 2. С. 125-139.
9. Бойчук М.В., Шмуригіна Н.М. Моделювання та оптимізація еколого-економічних систем міжгалузевих балансів з інвестиційними запізненнями. Чернівці: "Місто", 2013. 212 с.
10. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Моделювання та оптимізація повного циклу однопродуктової макроекономіки зростання з урахуванням екологічного фактора. Чернівці: "Місто", 2012. 208 с.
11. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів: навчальний посібник. Київ: Либідь, 1990. 168 с.
12. Бойчук М.В., Семчук А.Р. Оптимізаційна стохастична модель із вінерівським і пуассонівським процесами однопродуктової макроекономіки зростання та із запізненням. *Вісник Тернопільського національного економічного університету*. 2013. Вип. 5. С. 20-27.
13. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Москва: Высшая школа, 1986. 319 с.
14. Юрченко І.В., Ясинська Л.І., Ясинський В.К. Методи стохастичного моделювання систем. Чернівці: Вид-во Прут, 2002. 416 с.

15. Мильштейн Г.Н. Приближенное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. *Теория вероятностей и ее применение*, 1975.
16. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс: Учебное пособие. Москва: Дело, 1988. 248 с.

References

1. Ponomarenko, O.I., Perestyuk, M.O., Burim, B.M. (1995) Osnovy matematychnoyi ekonomiky [Basics of mathematical economics]. Kyiv: Informotekhnika. 320 p.
2. Kuboniva, M. ed. (1991) Matematicheskaya ekonomika na personal'nom komp'yutere [Mathematical Economics on a Personal Computer], Finansy i statistika, Moscow, 304p.
3. Aida-zadeh, K.R., Ragimov, A.B. (2007) O reshenii zadach optimal'nogo upravleniya na klasse kusochno-postoyannykh funktsiy [About the solution of optimal control tasks on the class of piecewise constant functions]. *Automatics and computer engineering*. Vol. 41. № 1. pp. 27-36.
4. Tretyakov, V.E., Tselishcheva, I.V., Shishkin, G.I. (1992) Optimal'noye upravleniye sistemami s nepolnoy i netochnoy informatsiyey [Optimal control of systems with incomplete and inaccurate information]. *Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, UBRAS*. 1992. Vol. 2. pp. 176–187.
5. Gabasov, R., Kirillova, F.M., Kostyukova, O.I. (1995) Sintez optimal'nykh upravleniy dlya dinamicheskikh sistem pri nepolnoy i netochnoy informatsii ob ikh sostoyaniyakh [Synthesis of optimal controls for dynamic systems with incomplete and inaccurate information about their states]. *Proceedings of the Steklov Mathematical Institute*. Vol. 211, pp. 140–152.
6. Andreeva, E.A., Kolmanovskiy, V.B., Shaykhet, L.E. (1992). *Upravlenie sistemami s posledeystviem* [System management with aftereffect]. Moscow: Nauka. 336 p.
7. Boychuk, M.V., Semchuk, A.R. (2013) Stokhasticheskoe modelirovanie polnogo tsikla odnoproduktovoy makroekonomiki rosta [Full-cycle stochastic modeling of single-product growth macroeconomics]. *Cybernetics and systems analysis*. Vol. 49, No. 2. pp. 156-163.
8. Boychuk, M.V., Semchuk, A.R. (2013) Stokhasticheskaya model' polnogo tsikla optimal'noy ekologo-ekonomicheskoy dinamiki [A stochastic full cycle model of optimal environmental and economic dynamics]. *Problems of Control and Informatics*. No. 2. pp. 125-139.
9. Boychuk, M.V., Shmurigina, N.M. (2013) *Modeliuvannia ta optymizatsiia ekoloho-ekonomichnykh system mizhhaluzevykh balansiv z investytsiinymy zapiznenniamy* [Modeling and optimization of ecological and economic systems of intersectoral balances with investment delays]. Chernivtsi: "Misto". 212 p.
10. Boychuk, M.V., Semchuk, A.R. (2012). *Modeliuvannia ta optymizatsiia povnoho tsyklu odnoproduktovoi makroekonomiky zrostannia z urakhuvanniam ekolohichnoho faktora* [Modeling and optimization of the full cycle of single-product macroeconomics of growth taking into account the environmental factor]. Chernivtsi: "Misto". 208 p.
11. Skorokhod, A.V. (1990). *Lektsii z teorii vypadkovykh protsesiv* [Lectures of the theory of random processes]. Kyiv: Lybid. 168 p.
12. Boychuk, M.V., Semchuk, A.R. (2013) Optymizatsiina stokhastychna model iz vinerivskym i puassonivskym protsesamy odnoproduktovoi makroekonomiky zrostannia ta iz zapiznenniam [Optimization stochastic model with Wiener and Poisson processes of single-product macroeconomics of growth and with delay]. *Herald of Ternopil National Economic University*. Issue 5. pp. 20-27.
13. Akulich, I.L. (1986). *Matematicheskoe programmirovanie v primerakh i zadachakh* [Mathematical programming in examples and tasks]. Moscow: Vysshaya shkola (in Russian).
14. Yurchenko, I.V., Yasyns′ka, L.I., Yasyns′kyy, V.K. (2002). *Metody stokhastychnoho modeliuvannia system* [Methods of stochastic modeling of systems]. Chernivtsi: Prut (in Ukrainian).
15. Milshtein, G.N. (1975) Priblizhennoe integrirovanie stokhasticheskikh differentsial'nykh uravneniy [Approximate integration of stochastic differential equations]. *Probability Theory and Its Application*. Vol. 2, Issue 3. pp. 583-588.
16. Magnus, Ya.R., Katyshev, P.K., Peresetskiy, A.A. (1988*) Ekonometrika. Nachal'nyy kurs: Uchebnoe posobie* [Econometrics. Beginner Course: Study Guide]. Moscow: Delo. 248 p.

Summary

Myroslav Boichuk, Liubov Makhanets

STOCHASTIC MODELING OF THE OPTIMAL GENERALIZED LEONTIEF MODEL

The paper proposes a stochastic static generalized Leontief model using Wiener and Poisson random processes and studies it. For the proposed stochastic model, the optimal process is described and the calculation formulas for calculating confidence intervals for optimal trajectories in terms of the capital of industries at a given confidence level are presented. A model example of the study of a static model of optimal development of a three-sector economy is presented.
***Keywords**: stochastic model, static generalized Leontief model, optimal control, optimal trajectory, optimal process.*