УДК 517.929

МОДЕЛЮВАННЯ SIR МОДЕЛЕЙ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Ігор Черевко, Тетяна Щур

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

i.cherevko@chnu.edu.ua, tetiana.lunyk@chnu.edu.ua,

Періодичні спалахи інфекційних захворювань стимулювали активні наукові дослідження їх поширення. Важливим інструментом для розуміння механізмів поширення таких процесів є математичне та імітаційне моделювання їх математичних моделей.

Математичні моделі динаміки інфекційних хвороб детально проаналізовані в наукових дослідженнях[1-3]. Як правило, це компартментні SIR моделі: системи диференціальних рівнянь, що описують поширення захворювання в популяції розміру N, які мають три «компартменти». Кожен компартмент є функцією часу t: $S(t)$ — кількість сприйнятливих осіб, які ще не інфіковані хворобою, $I(t)$ — кількість інфекційних осіб, а $R(t)$ – кількість осіб, які одужали від захворювання та мають імунітет.

Вважаємо, що хвороба має інкубаційний період вірусу $\tau_1 > 0$ (орієнтовно 3 дні), а період відновлення $\tau_2 > 0$ (орієнтовно 1-3 тижні). Інкубаційний період являє собою час затримки від контакту до розвитку симптомів вірусу, а період відновлення - час затримки від зараження до отримання повного імунітету та переміщення в групу осіб, які одужали.

Динаміку моделі такого процесу можна описати так [4]

$$\frac{dS}{dt} = -bS(t-t_1)I(t-t_1),$$

$$\frac{dI}{dt} = bS(t-t_1)I(t-t_1) - gI(t-t_2) - aI(t),$$

$$\frac{dR}{dt} = gI(t-t_2).$$

У нашій роботі для автоматизації моделювання систем із запізненням розроблено прикладне програмне забезпечення. Для числового моделювання початкових задач для диференціальних рівнянь з запізненням використовуються наближені алгоритми, які є узагальненням різницевих схем для розв’язування звичайних диференціальних рівнянь [5]. Розроблений додаток представляє собою набір структурованих сторінок для розв’язання диференціально-різницевих рівнянь та побудови графіків розв'язків.

На рисунку наведено наближений розв'язок розгляненої SIR моделі із запізненнями за допомогою модифікованого ітераційного методу Ейлера [5] з початковими умовами $y_1(0)=5,\ y_2(0)=1,\ y_3(x)=0$ при $t\geq 0$ та параметрами $h=0.1, \tau_1=1, \tau_2=10.$

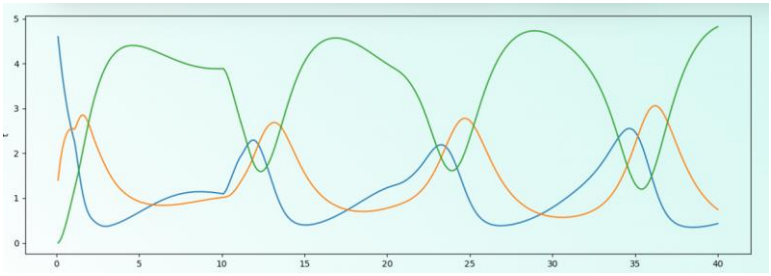

Рис 1. *Розв'язок SIR моделі*

Із отриманих числових експериментів можемо зробити висновок, що періодичні спалахи інфекції (при інкубаційному періоді $\tau_1=1$) виникають, якщо імунітет втрачається за час $\tau_2\geq 7$. Епідемія стабілізується, якщо $\tau_2\leq 6$.

Аналіз математичних моделей біології, екології, медицини показав, що введення в них запізнення дозволяє зробити їх адекватними до реальних процесів. Для числового моделювання початкових задач із запізненням ефективними виявилися побудовані різницеві схеми, які є узагальненнями класичних різницевих схем. Числові експерименти дозволили при моделюванні SIR моделі із запізненням виявити можливі спалахи епідемії при достатньо великому інкубаційному періоді хвороби.

1. *Fathalla A. Rihan.* Delay Dierential Equations and Applications to Biology. Springer. 2021.– 303 p.

2. *N. Bacaër,* "McKendrick and Kermack on epidemic modelling (1926–1927) ". In: A Short History of Mathematical Population Dynamics. Springer, London. 2011. – P. 89-96.

3. *Blackwood, J.C. and Childs, L.M.* An Introduction to Compartmental Modeling for the Budding Infectious Disease Modeler. Letters in Biomathematics. 2018, № 5.– P. 195-221.

4. *Ebraheem H., Alkhateeb N., Badran H., Sultan E.* Delayed Dynamics of SIR Model for COVID-19. Open Journal of Modelling and Simulation. 2021, № 9. 146–158.

5. *Луник Т.В., Черевко І.М.* Моделювання математичних моделей біології та імунології із запізненням. Буковинський матем. журнал. 2021. Т. 8, № 2. С. 92- 98.

SIMULATION OF SIR MODELS WITH DELAY

The work considers the SIR model, which describes the dynamics of the spread of the infectious disease COVID-19. An applied application has been developed for automating the simulation of such models using the proposed algorithms for finding their approximate solutions.