Bukovinian Math. Journal. 2023, **11**, 2, 100–103 Буковинський матем. журнал 2023, Т.11, №2, 100–103

Гритчук М.В., Клевчук І.І.

БІФУРКАЦІЯ ТОРІВ У ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМАХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ

Доведено існування інваріантних торів автономної параболічної системи диференціальних рівнянь з малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль такої системи. Існування торів у цій параболічній системі зводиться до подібної задачі для звичайних диференціальних рівнянь.

Ключові слова і фрази: біфуркація, стійкість, параболічна система, інтегральний многовид, біжуча хвиля..

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine

e-mail: *i.klevchuk@chnu.edu.ua*

Вступ

Ми використовуємо метод інтегральних многовидів Боголюбова і Митропольського [3]. Книга [4] повністю присвячена вивченню параболічних систем. У книгах [5] і [6] розглянута якісна теорія звичайних диференціальних рівнянь і параболічних систем. Тут розглянуто умови існування інтегральних многовидів та біфуркації періодичних розв'язків. У книзі [5] є також розділ, присвячений рівнянням із запізненням. Книга [12] присвячена дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків квазілінійних параболічних рівнянь із запізненням та їх застосуванню. Книга [2] присвячена фундаментальним математичним аспектам теорії біфуркацій для звичайних диференціальних рівнянь. Існування зліченного числа циклів для гіперболічних систем диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом розглядалося в [8]. Існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів рівняння спінового горіння розглянуто в [1, 9]. У цій статті досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа торів параболічної системи із малою дифузією. Існування торів у цій параболічній системі зводиться до подібної задачі для звичайних диференціальних рівнянь. Ми шукаємо розв'язок параболічної системи з періодичною умовою у вигляді ряду Фур'є в комплексній формі і вводимо норму у просторі коефіцієнтів розкладу Фур'є [7]. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися, наприклад, у працях [1, 9, 10, 11, 12].

УДК 517.9
2010 *Mathematics Subject Classification:* 35B10, 35B25, 35C07.

1. Основні результати

Розглянемо нелінійну параболічну систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_0 u + \varepsilon A_1 u + F(u, \overline{u}) \qquad (1)$$

з періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \qquad (2)$$

Тут ε – малий додатний параметр, $u \in \mathbb{R}^n$, $D = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$, $d_k > 0$ при $1 \leq k \leq n$, $A_0 = diag(i\omega_1, i\omega_2, ..., i\omega_n)$, $\omega_k > 0$ при $1 \leq k \leq n$, функція $F(u, \overline{u}) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ п'ять раз неперервно диференційовна відносно u та $\overline{u}$, $F(0, 0) = 0$, причому F має в нулі порядок малості вище першого.

Нехай виконується умова A:

$$p_1\omega_1 + \cdots + p_n\omega_n \neq m \quad \text{при} \quad 0 < |p_1| + \cdots + |p_n| < 6,$$

де m, p_1, $\ldots$, p_n – цілі.

Перетворимо систему (1) за допомогою підстановки

$$u = v + \sum_{i=2}^{4} W_i(t, v, \overline{v}), \qquad (3)$$

де W_2, W_3, W_4 – форми відповідно другого, третього і четвертого порядку. Перетворення (3) можна підібрати так, що рівняння для v та $\overline{v}$ набудуть вигляду [2]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A_0 v + \varepsilon A_1 v + G(v, \overline{v})v + V(v, \overline{v}), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x^2} + \overline{A}_0 \overline{v} + \varepsilon A_1 \overline{v} + \overline{G}(v, \overline{v})\overline{v} + \overline{V}(v, \overline{v}),$$

де $G(v, \overline{v})$ – діагональна матриця з елементами $g_k(v, \overline{v}) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j \overline{v}_j$, $1 \leq k \leq n$, на діагоналі, $V(v, \overline{v}) = O(|v|^5)$ при $|v| \to 0$.

При $\varepsilon = 0$ одержуємо систему звичайних диференціальних рівнянь. Нехай нульовий розв'язок системи (4) при $\varepsilon = 0$ і $V(v, \overline{v}) \equiv 0$ асимптотично стійкий.

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2). Розв'язок системи (4) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $v = \theta(y)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_n)^T$, $y = (y_1, ..., y_n)^T$, $y_k = \sigma_k t + x$, $1 \leq k \leq n$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Позначимо $\frac{d\theta}{dy} = \left(\frac{d\theta_1}{dy_1}, ..., \frac{d\theta_n}{dy_n}\right)$. Тоді одержимо систему

$$\sigma \frac{d\theta}{dy} = A_0\theta + \varepsilon \left[D \frac{d^2\theta}{dy^2} + A_1\theta \right] + G(\theta, \overline{\theta})\theta + V(\theta, \overline{\theta}),$$

де $\sigma = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$. Цю систему заміною $\frac{d\theta}{dy} = \vartheta$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \vartheta, \quad \sigma\vartheta = A_0\theta + \varepsilon \left[D \frac{d\vartheta}{dy} + A_1\theta \right] + G(\theta, \overline{\theta})\theta + V(\theta, \overline{\theta}). \qquad (5)$$

Інтегральний многовид системи (5) можна зобразити у вигляді

$$\vartheta = A_0\theta\sigma^{-1} + \varepsilon\left[DA_0^2\theta\sigma^{-3} + A_1\theta\sigma^{-1}\right] + G(\theta,\overline{\theta})\theta\sigma^{-1} + V(\theta,\overline{\theta})\sigma^{-1}.$$

Система на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = A_0\theta\sigma^{-1} + \varepsilon\left[DA_0^2\theta\sigma^{-3} + A_1\theta\sigma^{-1}\right] + G(\theta,\overline{\theta})\theta\sigma^{-1} + V(\theta,\overline{\theta})\sigma^{-1}.$$

Цю систему лінійною заміною можна звести до діагонального вигляду в лінійній частині

$$\frac{dz}{dy} = A_0 z\sigma^{-1} + \varepsilon\left[DA_0^2 z\sigma^{-3} + A_2 z\sigma^{-1}\right] + G(z,\overline{z})z\sigma^{-1} + V(z,\overline{z})\sigma^{-1} + O(\varepsilon^2),$$

де $A_2 = diag(\mu_1, \mu_2, ...\mu_n)$, μ_k – діагональні елементи матриці A_1.

Перейдемо до полярних координат, поклавши $z_k = r_k\exp(i\varphi_k)$, $\overline{z}_k = r_k\exp(-i\varphi_k)$. Тоді одержимо систему рівнянь

$$\frac{dr_k}{dy_k} = \varepsilon\left[\frac{\xi_k}{\sigma_k} - \frac{d_k\omega_k^2}{\sigma_k^3}\right]r_k + \frac{1}{\sigma_k}r_k\sum_{j=1}^{n} b_{kj}(\varepsilon)r_j^2 + \frac{1}{\sigma_k}R_k(r,\varphi),$$

$$\frac{d\varphi_k}{dy_k} = \frac{\omega_k}{\sigma_k} + \varepsilon\frac{\eta_k}{\sigma_k} + \frac{1}{\sigma_k}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}(\varepsilon)r_j^2 + \frac{1}{\sigma_k}r_k^{-1}\Phi_k(r,\varphi),$$

де $\xi_k = Re\ \mu_k$, $\eta_k = Im\ \mu_k$, $b_{kj} = Re\ a_{kj}$, $c_{kj} = Im\ a_{kj}$, $R_k(r,\varphi) = O(|r|^5)$, $\Phi_k(r,\varphi) = O(|r|^5)$.

Нехай $\xi_k\sigma_k^2 > d_k\omega_k^2$, при $1 \le k \le n$ і система рівнянь

$$\varepsilon\left[\xi_k - \frac{d_k\omega_k^2}{\sigma_k^2}\right] + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(\varepsilon)r_j^2 = 0, \quad 1 \le k \le n,$$

має розв'язок. Функції z_k будуть мати період 2π, якщо $\dfrac{\omega_k}{\sigma_k} = m + O(\varepsilon)$, $m \in \mathbb{Z}$, тобто $\sigma_k = \dfrac{\omega_k}{m} + O(\varepsilon)$, $1 \le k \le n$. Нехай виконуються нерівності

$$\xi_k > d_k m^2, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad 1 \le k \le n, \tag{6}$$

і система рівнянь

$$\varepsilon\left[\xi_k - d_k m^2\right] + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}(\varepsilon)r_j^2 = 0, \quad 1 \le k \le n, \tag{7}$$

має розв'язок.

Теорема 1. *Нехай $\omega_k > 0$ при $1 \le k \le n$, для деякого цілого m виконуються нерівності (6), система рівнянь (7) має розв'язок і виконується умова A. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має інваріантний тор.*

Розв'язки на торі будуть квазіперіодичними, якщо $|(p,\omega) + q| > \gamma|p|^{-n-1}$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ при деякому $\gamma > 0$ цілому q і векторі $p = (p_1, p_2, ...p_n)$ з цілими елементами.

Для дослідження стійкості інваріантного тора потрібно лінеаризувати систему в околі тора, здійснити перетворення лінеаризованої системи і дослідити одержану систему.

Список літератури

[1] Belan E.P., Samoilenko A.M. Dynamics of periodic modes of the phenomenological equation of spin combustion // *Ukrainian Math. J.* – 2013. – **65**, No. 1. – P. 21 – 46.

[2] Bibikov Yu.N. Local theory of nonlinear analytic ordinary differential equations. – Berlin: Springer. – 147 p.

[3] Bogolyubov N.N., Mitropol'skii Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations (in Russian). – Moscow: Nauka, 1974. – 502 p.

[4] Eidel'man S.D. Parabolic Systems. – Amsterdam: North-Holland, 1969. – 469 p.

[5] Hassard B.D., Kazarinoff N.D., Wan Y.-H. Theory and applications of Hopf bifurcation. – Cambridge: Cambridge university press, 1981. – 311 p.

[6] Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations. – New York: Springer, 1981. – 348 p.

[7] Klevchuk I.I. Bifurcation of the state of equilibrium in the system of nonlinear parabolic equations with transformed argument // *Ukrainian Math. J.* – 1999. **51**, No. 10. – P. 1512 – 1524.

[8] Klevchuk I.I. Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument // *Journal of Mathematical Sciences* – 2016. **215**, No. 3. – P. 341 – 349.

[9] Klevchuk I.I. Bifurcation of self-excited vibrations for parabolic systems with retarded argument and weak diffusion // *Journal of Mathematical Sciences* – 2017. **226**, No. 3. – P. 285 – 295.

[10] Klevchuk I.I. Existence and stability of traveling waves in parabolic systems of differential equations with weak diffusion // *Carpathian Mathematical Publications.* – 2022. **14**, No 2. - P. 493-503.

[11] Mishchenko E.F., Sadovnichii V.A., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh. Autowave Processes in Nonlinear Media with Diffusion (in Russian). – Moscow: Fizmatlit, 2005. – 430 p.

[12] Wu J. Theory and applications of partial functional differential equations. – New York: Springer, 1996. – 429 p.

Надійшло 11.12.2023

Hrytchuk M.V., Klevchuk I.I. *Bifurcation of tori for parabolic systems of differential equations with weak diffusion*, Bukovinian Math. Journal. **11**, 2 (2023), 100–103.

The aim of the present article is to investigate of some properties of quasiperiodic solutions of nonlinear autonomous parabolic systems with the periodic condition. The research is devoted to the investigation of parabolic systems of differential equations with the help of integral manifolds method in the theory of nonlinear oscillations. We prove the existence of quasiperiodic solutions in autonomous parabolic system of differential equations with weak diffusion on the circle. We study existence and stability of an arbitrarily large finite number of tori for a parabolic system with weak diffusion. The quasiperiodic solution of parabolic system is sought in the form of traveling wave. A representation of the integral manifold is obtained. We seek a solution of parabolic system with the periodic condition in the form of a Fourier series in the complex form and introduce the norm in the space of the coefficients in the Fourier expansion. We use the normal forms method in the general parabolic system of differential equations with weak diffusion. We use bifurcation theory for ordinary differential equations and quasilinear parabolic equations. The existence of quasiperiodic solutions in an autonomous parabolic system of differential equations on the circle with small diffusion is proved. The problems of existence and stability of traveling waves in the parabolic system with weak diffusion are investigated.