І. Д. Пукальський, Г. М. Перун,
І. П. Лусте, Б. О. Яшан

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

(вибрані розділи)

Міністерство освіти і науки України

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича

І.Д. Пукальський, Г.М. Перун, І.П. Лусте, Б.О. Яшан

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА: ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА

(ВИБРАНІ РОЗДІЛИ)

Навчально-методичний посібник
(видання виправлене та доповнене)

Чернівці
Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича
2024

УДК 519.2(072)
П 883

Друкується за ухвалою вченої ради
Чернівецького національного університету
імені Юрія Федьковича
(протокол № 15 від 27 грудня 2023 року)

Рецензенти:

Вершигора В.Г., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри комп'ютерних систем і технологій, заступник декана факультету інформаційних технологій та економіки ПВНЗ "Буковинський університет";

Семчук А.Р., кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри методики викладання природничо-математичних дисциплін ІППОЧО.

П 883 **Пукальський І.Д., Перун Г.М., Лусте І.П., Яшан Б.О.**

Теорія ймовірностей та математичної статистики: теорія та практика (Вибрані розділи) : навч.-методичний посібник. Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича. 2024. 335 с.

ISBN 978-966-423-827-1

Навчальний посібник містить курс теорії ймовірностей згідно з програмою курсу "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів. У посібнику подано теоретичний матеріал, який супроводжується розв'язаними прикладами типових задач. Наприкінці кожного параграфа наведено значну кількість завдань з відповідями для проведення практичних занять. Після кожного розділу подано варіанти модульного контролю.

Призначений для студентів технічних спеціальностей усіх форм навчання вищих навчальних закладів.

ISBN 978-966-423-827-1 УДК 519.2(072)

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Пропонований навчальний посібник написано відповідно до чинних програм з теорії ймовірностей і математичної статистики для студентів економічних вищих навчальних закладів. В основу його написання покладено багаторічний досвід авторів, набутий при викладанні дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" в Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича. Виклад матеріалу супроводжується розв'язанням задач, що є вкрай важливим для вивчення даної дисципліни. Адже тільки таким способом формуються теоретико-ймовірнісні навички спеціаліста, уміння будувати моделі реальних процесів.

Матеріал посібника подано у вигляді викладу теоретичних положень та підкріплення їх розв'язанням прикладів і задач. Наприкінці кожного параграфа наведено значну кількість задач для самостійного розв'язання. Багато задач подано з детальним розв'язанням, а вправи – з відповідями. У кінці кожного розділу посібника вміщено варіанти завдань для модульного контролю та тести.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Тема 1. Основні поняття. Простір елементарних подій. Операції над подіями. Ймовірність подій

Усі процеси, що відбуваються у природі чи людському суспільстві, є наслідком взаємодії багатьох факторів. Для того, щоб вивчити ці процеси і надалі керувати ними, необхідно з'ясувати, яку роль у досліджуваному процесі відіграє кожний фактор окремо. Наприклад, у разі вивчення руху тіла слід з'ясувати, які сили спричинюють його рух, а які гальмують; яким чином саме рухоме тіло впливає на ті сили, що діють на нього. Досліджуючи процес зміни курсу деякої валюти, скажімо гривні, потрібно з'ясувати вплив багатьох економічних і соціальних факторів як внутрішніх, так і зовнішніх, що можуть істотно змінювати курс національної валюти щодо долара, німецької марки і т. ін.

Усі зазначені фактори необхідно подати з допомогою певних кількісних оцінок, а далі – скористатися відповідними математичними методами. Отже, щоб мати змогу застосувати математичні методи з метою вивчення взаємодії тих чи інших факторів, слід уміти виражати дію кожного з них кількісно.

Щоб дістати потрібні числові дані, необхідно провести серію спостережень. Отже, спостереження є найважливішою ланкою будь-якого експерименту. Слід, проте, ураховувати, що жодний найретельніше підготовлений експеримент не дозволяє виокремити саме той фактор, який для нас головний. Адже в здійснюваному експерименті ми не в змозі вилучити численні зайві фактори, які нас не цікавлять. Так, вивчаючи падіння тіла, ми не уникнемо дії на нього сил, зумовлених обертанням Земної кулі. Коли ж ідеться про хімічні реакції, нам ніколи не доведеться стикатися з чистими елементами. А досліджуючи вплив на врожайність тієї чи іншої культури внесеного в грунт добрива, ми не можемо знехтувати впливом інших факторів (опади, середня весняна температура, економічний стан регіону тощо), які безпосередньо впливають на остаточний наслідок експерименту – урожайність.

Для того, щоб якось оцінити подію, необхідно врахувати або спеціально організувати умови, в яких вона відбувається.

Випробування – реальний або мислений експеримент (виконуваний за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

Подія – результат випробування.

Достовірна подія – подія, яка в результаті випробування неодмінно відбудеться. Позначатимемо її літерою U.

Неможлива подія – подія, яка в даному випробуванні не може відбутися. Позначатимемо її літерою V.

Випадкова подія – подія, яка в результаті випробування може відбутися, а може й не відбутися. Такі події позначатимемо літерами A, B, C, $\ldots$.

Елементарні події – події, які не можна розкласти на простіші. Їх, як правило, позначають літерами ω_1, ω_2, $\ldots$, ω_n. З елементарних подій можна скласти складнішу подію.

Простір елементарних подій – це множина можливих елементарних подій, кожною з яких може закінчитися випробування. Цей простір може містити скінченну, зліченну або незліченну множину значень. Позначимо його Ω.

Сумою подій A_1, A_2, $\ldots$, A_n називається подія A, яка полягає в тому, що при випробуванні відбудеться принаймні одна з цих подій:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Добуток подій A_1, A_2, $\ldots$, A_n – це подія A, яка полягає в тому, що при випробуванні відбуваються всі події $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i.$$

Різницею подій B і C називається така подія A, що $A = B - C$, або $A = B \setminus C$, якщо відбувається подія B і не відбувається подія C.

Дві події називаються **несумісними** (**сумісними**), якщо при випробуванні відбуття однієї виключає (не виключає) відбуття іншої.

Сукупність випадкових подій утворює **повну групу**, якщо в результаті випробування неодмінно відбудеться принаймні одна з них, а **будь-які** дві події несумісні.

Події, "породжені" одним випробуванням, назвемо **рівноможливими**, якщо є підстави вважати, що жодна з них не є об'єктивно більш можливою, ніж інша.

Дві події, які утворюють повну групу, називаються **протилежними**. Подія, протилежна події A, позначається $\overline{A}$. Очевидно, що $A \cdot \overline{A} = V$ і $A + \overline{A} = U$.

Операції над подіями можна подати у вигляді діаграм, використовуючи геометричні образи, наприклад, як на рис. 1.1.

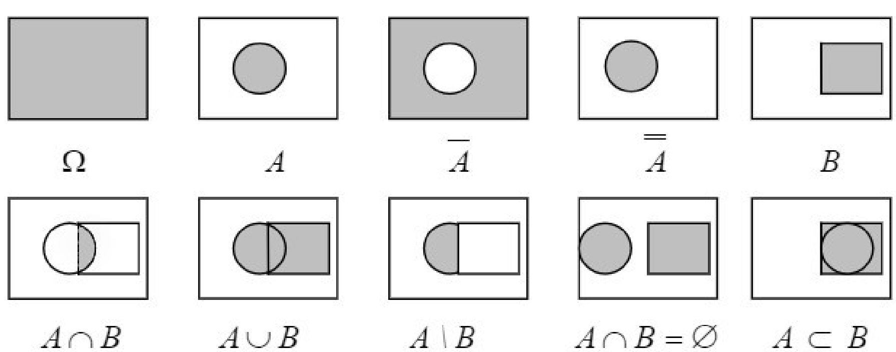


Рис. 1.1. Діаграми Ейлера–Венна операцій над подіями

Випадкові події A, B, C, ($A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$), для яких визначено операції додавання, множення та віднімання, підлягають таким законам:

1.$A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
2.$A \cup B = B \cup A$ (Комутативний закон для операції додавання).
3.$A \cap B = B \cap A$ (Комутативний закон для операцій множення).
4.$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
5.$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (Асоціативний закон для операцій додавання та множення).
6.$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (Перший дистрибутивний закон).
7.$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (Другий дистрибутивний закон).
8.$A \cup \Omega = \Omega$.
9.$A \cap \Omega = A$.
10.$A \cup \varnothing = A$.
11.$A \cap \varnothing = \varnothing$.
12.$\overline{A} = \Omega \setminus A$.
13.$\overline{\Omega} = \varnothing$.
14.$\overline{\varnothing} = \Omega$.
15.$A \cup (A \cap \overline{B}) = A$; $B = B \cup (B \cap \overline{A})$.
16.$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
17.$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
18.$A - B = A \cap \overline{B}$.

Елементарні випадкові події задовольняють такі твердження: 1) між собою несумісні; 2) утворюють повну групу; 3) є рівноможливими, а саме: усі елементарні події мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення одного експерименту.

Для дискретного простору Ω перші два твердження можна записати так: 1) $\omega_i \cap \omega_j = \varnothing$, $i \neq j$; $\bigcup\limits_{i=1} \omega_i = \Omega$.

Для кількісного вимірювання появи випадкових подій і їх комбінацій уводиться поняття ймовірності події, що є числом такої ж природи, як і відстань у геометрії або маса в теоретичній механіці.

Класичне визначення ймовірності пов'язане з поняттям сприятливої події.

Імовірністю випадкової події A називається відношення кількості m елементарних рівноможливих подій, що сприяють появі події A, до загальної кількості n елементарних рівноможливих подій, що утворюють повну групу:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Основні властивості класичної імовірності

1) $P(U) = 1$;
2) $P(V) = 0$;
3) якщо A – випадкова подія, тоді:

$$0 < P(A) < 1. \tag{1.2}$$

Статистичне означення ймовірності пов'язане з поняттям відносної частоти появи події A у випробуваннях. **Відносна частота появи** події A обчислюється за формулою

$$P^*(A) = \frac{m_1}{n_1}, \tag{1.3}$$

де m_1 – кількість появ події A в серії з n_1 випробувань.

Імовірністю події A є число, відносно якого стабілізується відносна частота $P^*(A)$ при необмеженому збільшенні кількості випробувань.

У практичних задачах за імовірність події A береться відносна частота $P^*(A)$ при достатньо великій кількості випробувань.

Геометричне визначення ймовірності: Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій для події A – як частину цього геометричного образу, то ймовірність події A визначається як відношення мір цих множин:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

(Це може бути, наприклад, відношення площ, довжин або об’ємів).

Для того, щоб обчислити ймовірність події A за формулою (1.1), часто використовують формули комбінаторики.

Елементи комбінаторики

I. Нехай скінченна невпорядкована множина складається з n елементів.

1. Упорядкуємо дану множину, пронумерувавши всі її елементи. Елементарною подією в експерименті буде довільна перестановка з n елементів, а кількість таких **перестановок** дорівнюватиме $n!$:

$$P_n = n!. \tag{1.4}$$

2. Розіб’ємо цю множину на впорядковані підмножини з m ($m < n$) елементів, які різняться між собою або порядком, або елементами. Кількість довільних **розміщень** із n елементів по m дорівнюватиме:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{1.5}$$

Приклад 1. Скількома способами можна скласти розклад з 5 уроків у вівторок (усі уроки різні), якщо вивчається 12 предметів?

Розв’язування. Потрібно знайти кількість сполук, що складаються з п’яти елементів з даних дванадцяти і різняться або порядком, або елементами, тому $A_{12}^5 = 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8 = 95040$.

Відповідь. 95040.

Приклад 2. Студент забув дві останні цифри номера телефону. Пам’ятаючи, що вони різні, набирає їх навмання. Скільки є варіантів такого набору?

Розв’язування. У наборі порядок цифр має значення і цифри не повторюються, тому $A_{10}^2 = 10\cdot 9 = 90$.

Відповідь. 90.

3. Розіб'ємо дану множину на невпорядковані підмножини з m $(m < n)$ елементів, які різняться принаймні одним елементом. Кожну таку підмножину називатимемо **комбінацією**, а їх кількість дорівнюватиме:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.6}$$

Приклад 3. У турнірі беруть участь 12 шахістів, і кожні два з них зустрічаються один раз. Скільки партій планується провести?

Розв'язування. Потрібно знайти кількість сполук, що складаються з двох елементів з даних дванадцяти, які різняться принаймні одним елементом (порядок елементів не має значення), тому $C_{12}^2 = \dfrac{11 \cdot 12}{2} = 66$.

Відповідь. 66.

Властивості комбінацій:

1. $C_n^1 = n$.
2. $C_n^n = C_n^0 = 1$.
3. $C_n^m = C_n^{n-m}$.
4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^m = 2^n$.
5. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Примітка. Формулу $C_n^m = C_n^{n-m}$ зручно застосовувати при $m > \dfrac{n}{2}$.

II. Нехай скінченну множину з n елементів розбито на k підмножин, у кожній з яких міститься n_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ однакових елементів, причому $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. Упорядкуємо цю множину довільною **перестановкою з** n **елементів із повторенням**. Кількість таких можливих перестановок дорівнюватиме:

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!}. \tag{1.7}$$

Приклад 4. Скількома способами можна розподілити 15 випускників по трьох районах, якщо в одному з них є 8, у другому 5 і в третьому 2 вакантних місця?

Розв'язування. $P_{15}(2,5,8) = \dfrac{15!}{2!5!8!} = 135135.$

Відповідь. 135135.

Приклад 5. Скількома способами з 12 осіб можна скласти чотири групи по три особи?

Розв'язування. $P_{12}(3,3,3,3) = \dfrac{12!}{3!3!3!3!} = 369600.$

Відповідь. 369600.

Сполученням (комбінацією) з повторенням з n елементів по m називають такі сполуки, які складаються з m не обов'язково різних елементів, що взяті з даних n і різняться принаймні одним елементом, причому порядок елементів не має значення.

Число усіх комбінацій з повторенням з n елементів по m позначають $\overline{C}_n^m$ і знаходять за формулою

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}. \tag{1.8}$$

Зауваження. У формулі (1.8) m може бути і більшим за n. Тут n фактично не кількість елементів, а кількість груп елементів, причому в кожній групі елементи однакові між собою. Наприклад, наступному прикладі йдеться не про 6 різних листівок, а про 6 різних типів листівок.

Приклад 6. Скількома способами можна купити вісім листівок у кіоску, де є шість різних видів листівок?

Розв'язування. Потрібно знайти кількість сполук, що складаються з 8 не обов'язково різних елементів з даних шести, які різняться принаймні одним елементом (порядок елементів не має значення), тому $\overline{C}_6^8 = C_{6+8-1}^8 = C_{13}^8 = C_{13}^5 = 1287.$

Відповідь. 1287.

Приклад 7. У конкурсі на п'ять номінацій беруть участь 10 кінофільмів. Скільки є варіантів розподілу п'яти призів між 10 кінофільмами, якщо за кожною номінацією встановлено: а) різні призи; б) однакові призи?

Розв'язування. а) Кожний з варіантів розподілу призів є сполукою п'яти елементів з десяти, що відрізняються від інших як елементами (складом кінофільмів), так і їхнім порядком (за номінаціями); як тим, так і іншим, причому будь-який фільм може здобути призи як за однією, так і за кількома номінаціями. Кожний варіант розподілу призів є розміщенням з повторенням з 10 елементів по 5. Їхня кількість: $\overline{A}_{10}^5 = 10^5 = 100000$.

б) Якщо за кожну номінацію встановлено однакові призи, то послідовність фільмів п'яти призерів значення не має, і кількість варіантів розподілу призів дорівнює кількості комбінацій з повтореннями з 10 елементів по 5. Їхня кількість: $\overline{C}_{10}^5 = C_{10+5-1}^5 = C_{14}^5 = 2002$.

Відповідь. а) 100 000; б) 2002.

Приклади розв'язування задач

1. Із 6 осіб треба вибрати керівника та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язування. Завдання полягає у знаходженні кількості розміщень (без повторень) із шести елементів по два. Отже, шукане число

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30.$$

Відповідь. 30.

2. Скільки тризначних чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Розв'язування. Кожне тризначне число, складене зі вказаних цифр, можна вважати як розміщення з повтореннями, складені із трьох цифр, взятих із даних семи. Тому, скориставшись формулою кількості розміщень із n різних елементів по k із повторенням $\overline{A}_n^k = n^k$, маємо шукане число:

$$\overline{A}_7^3 = 7^3 = 343.$$

Відповідь. 343.

3. Скількома способами можна набрати на нитку 4 зелених, 5 синіх і 6 червоних намистин?

Розв'язування. Необхідно визначити кількість перестановок із повторенням, які можна зробити із $n_1 = 4$ (зелені намистини), $n_2 = 5$ (сині намистини) і $n_3 = 6$ (червоні намистини). За формулою

$$P_n(n_1, n_2, n_3) = \frac{(4+5+6)!}{4!5!6!} = \frac{15!}{4!5!6!} = 630630.$$

Відповідь. 630630.

4. Скількома способами можна поставити на шаховій дошці три тури?

Розв'язування. Очевидно, способів такої розстановки існує стільки, скільки є способів вибору трьох полів серед 64 полів шахової дошки, тобто $C_{64}^3 = \dfrac{64!}{3! \cdot 61!} = 41664$ різних способів.

Відповідь. 41664.

5. З урни, в якій знаходиться 4 білих, 9 чорних і 7 червоних куль, навмання вибирають одну кулю. Яка ймовірність вибору білої кулі?

Розв'язування. Елементарною подією є вибір з урни довільної кулі. Кількість усіх таких подій дорівнює кількості куль в урні. Отже, $n = 20$. Кількість подій появи білої кулі (подія A) дорівнює кількості білих куль в урні. Отже, $m = 4$. Тому за формулою $P(A) = \dfrac{m}{n}$ маємо

$$P(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Відповідь. $\frac{1}{5}$.

6. Гральний кубик кидають два рази. Яка ймовірність того, що сума набраних очок дорівнює 8?

Розв'язування. Позначимо через A_{ij} подію, що відповідає появі i очок при першому киданні й j очок – при другому. Таких подій буде 36:

$A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{16};$
$A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{26};$
$\ldots, \ldots, \ldots, \ldots;$
$A_{61}, A_{62}, \ldots, A_{66}.$

Їх можна розглядати як елементарні події. Отже, $n = 36$. Появі події A (сума набраних очок дорівнює 8) сприяють події A_{26}, A_{35}, A_{44}, $_{53}$, A_{62}. Отже, $m = 5$. Тому $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{5}{36}$.

Відповідь. $\frac{5}{36}$.

7. У партії з S виробів є T нестандартних. Визначити ймовірність того, що з вибраних навмання s виробів нестандартних буде t.

Розв'язування. Елементарною подією є вибір s виробів із загальної кількості S. Кількість усіх таких подій дорівнює кількості комбінацій із S по s. Отже, $n = C_S^s$. Позначимо через A подію, яка відповідає вибору s виробів, з яких t – нестандартні. Отже, сприятливі для A такі групи s виробів, в яких $s - t$ виробів – якісні, а t – нестандартні. Кількість таких груп

$$m = C_{S-T}^{s-t} \cdot C_T^t.$$

Оскільки групу із t нестандартних виробів можна утворити C_T^t способами, а групу із $s-t$ якісних виробів – C_{S-T}^{s-t} способами, причому довільна група якісних виробів може комбінуватися з довільною групою нестандартних виробів. Звідси

$$P(A) = \frac{C_{S-T}^{s-t} C_T^t}{C_S^s}.$$

Відповідь. $\dfrac{C_{S-T}^{s-t} C_T^t}{C_S^s}$.

8. У круг вписано квадрат. Яка ймовірність того, що точка, навмання поставлена у крузі, знаходиться всередині квадрата?

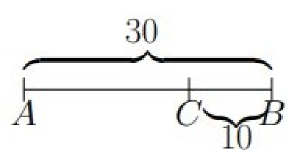
Розв'язування. Нехай r – радіус круга. Тоді сторона квадрата дорівнює $r\sqrt{2}$. Отже, $S_{\text{кр.}} = \pi r^2$, $S_{\text{кв.}} = 2r^2$. Скориставшись геометричним визначенням ймовірності, одержимо:

$$P = \frac{S_{\text{кв.}}}{S_{\text{кр.}}} = \frac{2r^2}{\pi r^2} = \frac{2}{\pi}.$$

Відповідь. $\dfrac{2}{\pi}$.

9. Відомо, що телефонний дзвінок повинен продзвонити від 11 год до 11 год 30 хв. Яка ймовірність того, що дзвоник продзвонить в останні 10 хвилин указаного проміжку, якщо момент дзвінка випадковий?

Розв'язування. Скористаємося геометричною схемою. Для цього проміжок часу від 11 год до 11 год 30 хв зобразимо у вигляді відрізка AB довжиною 30 одиниць, а проміжок від 11 год 20 хв до 11 год 30 хв – у вигляді відрізка CB довжиною 10 одиниць.



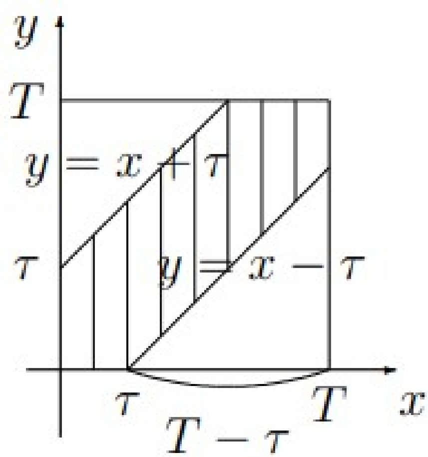
Випадковий дзвінок у деякий момент заданої півгодини зображається навмання взятою точкою на відрізку AB. Тоді ймовірність того, що дзвінок продзвучить протягом останніх 10 хв, дорівнює

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Відповідь. $\dfrac{1}{3}$.

10. У довільний момент часу проміжку T рівноможливі надходження у приймач двох сигналів. Приймач вважається забитим, якщо різниця за часом між сигналами менша τ, $\tau < T$. Яка ймовірність того, що приймач буде забитим?

Розв'язування. Розглянемо прямокутну декартову систему координат xOy. Нехай x і y – моменти надходження у приймач відповідно першого і другого сигналів. Тоді всеможливі комбінації надходження сигналів зображаються точками квадрата $0 \leq x \leq T$, $0 \leq y \leq T$. Оскільки моменти надходження сигналів рівноможливі за проміжок часу T, то положення точок (x, y) також рівноможливе у квадраті часу T. Знайдемо точки квадрата, сприятливі нашій події A (приймач забитий). Подія A може настати лише тоді, коли різниця за часом між сигналами буде менша τ, тобто $|x - y| < \tau$. Оскільки площа квадрата дорівнює T^2, а площа фігури, координати точок якої задовольняють нерівність $|x-y| < \tau$, дорівнює $S_0 = T^2 - 2\frac{1}{2}(T-\tau)^2 = T^2 - (T-\tau)^2$, то



$$P(A) = \frac{S_0}{S} = \frac{T^2 - (T-\tau)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2.$$

Відповідь. $1 - \left(1 - \dfrac{\tau}{T}\right)^2$.

11. Знайти ймовірність того, що при киданні грального кубика випала парна кількість очок; випала кількість очок кратна трьом.

Розв'язування. Нехай подія A_1 – на кубику випало одно очко, A_2 – випало два очка, A_3 – три очка і т. ін., тоді $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ – простір елементарних подій (кількість рівноможливих елементарних подій простора: $n = 6$). Позначимо подію, що полягає у випаданні парної кількості очок, літерою A, а подію, що полягає у випаданні кількості очок кратної трьом – B, отже, $A = \{A_2, A_4, A_6\}$ (кількість рівноможливих елементарних подій: $m_1 = 3$), $B = \{A_3, A_6\}$ (кількість рівноможливих елементарних подій: $m_2 = 2$).

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{3}{6} = 0,5; \quad P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0,33.$$

Відповідь. 0,5; 0,33.

12. Партія складається з 20 деталей, серед яких є три браковані. З партії навмання беруть 5 деталей. Яка ймовірність того, що серед узятих деталей будуть 3 стандартні?

Розв'язування. Елементарною подією в даному випадку є будь-який вибір п'яти деталей з даних двадцяти. Кількість елементарних подій простору дорівнює кількості способів вибору п'яти деталей з двадцяти. Оскільки порядок вибору деталей не має значення, то

$$n = C_{20}^5 = \frac{A_{20}^5}{5!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 15504.$$

Обчислимо кількість елементарних подій, які сприяють події A – "серед п'яти навмання взятих деталей 3 стандартні та 2 нестандартні деталі". 3 стандартні деталі з 17 можна вибрати C_{17}^3 способами, а дві нестандартні з трьох – C_3^2 способами. Отже:

$$m = C_{17}^3 \cdot C_3^2 = C_{17}^3 \cdot C_3^1 = \frac{A_{17}^3}{3!} \cdot 3 = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{2 \cdot 3} \cdot 3 = 2040;$$

$$P(A) = \frac{2040}{15504} \approx 0,1316.$$

Відповідь. 0,1316.

13. У відрі 10 білих і 5 червоних троянд. Яка ймовірність того, що три навмання взяті троянди виявляться одного кольору?

Розв'язування. Елементарною подією в даному випадку є будь-який набір трьох троянд з даних п'ятнадцяти. Кількість елементарних подій простору дорівнює кількості способів вибору трьох троянд з п'ятнадцяти. Оскільки порядок вибору троянд не має значення, то

$$n = C_{15}^3 = \frac{A_{15}^3}{3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{2 \cdot 3} = 455.$$

Обчислимо кількість елементарних подій, які сприяють події A "серед трьох навмання взятих троянд усі виявились одного кольору". 3 червоні троянди з 10 можна вибрати C_{10}^3 способами, а три білі з п'яти C_5^3 способами. Отже,

$$m = C_{10}^3 + C_5^3 = \frac{A_{10}^3}{3!} + \frac{A_5^3}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 120 + 10 = 130;$$

$$P(A) = \frac{130}{455} \approx 0,2857.$$

Відповідь. 0,2857.

14. Знайти ймовірність того, що навмання вибране ціле тризначне число, яке утворене з цифр від 0 до 9, ділиться на 12.

Розв'язування. Елементарною подією у даному випадку є будь-яке ціле тризначне число з даних цифр. Кількість елементарних подій простору дорівнює кількості цілих тризначних чисел, тобто $n = 999 - 99 = 900$.

Обчислимо кількість елементарних подій, які становлять подію A – "утворене ціле тризначне число ділиться на 12". 108 – перше тризначне число, яке ділиться на 12, 996 – останнє. За формулою арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$ дістанемо рівняння $996 = 108 + 12(m-1)$, розв'язавши яке, матимемо $m = 75$. Отже, $P(A) = \dfrac{75}{900} \approx 0,083$.

Відповідь. 0,083.

15. Учасники жеребкування тягнуть зі скрині жетони з номерами від 1 до 100. Знайти ймовірність того, що номер першого навмання витягнутого жетона, не містить цифри 7.

Розв'язування. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що номер першого витягнутого жетона не містить цифри 7. Число всіх можливих випадкових подій дорівнює 100. Щоб визначити число випадкових подій, сприятливих події A, підрахуємо скільки чисел від 1 до 100 не містять цифри 7. Таких чисел $9 \cdot 9 = 81$. Шукана ймовірність: $P(A) = 81/100 = 0,81$.

Відповідь. 0,81.

У випадках, коли не можна застосувати класичний спосіб обчислення ймовірності випадкової події (формулу (1.1)), використовується **статистичний спосіб**.

Використання формули (1.3) являє собою статистичний спосіб визначення ймовірності.

16. Якщо при 100 випробуваннях подія A відбулась 30 разів, то $P(A) \approx \dfrac{30}{100} = 0,3$.

17. Для дослідження взяли випадкову вибірку з 200 колосків пшениці. Відносна частота колосся, що має 12 зернин у колосі, виявилась 0,125, а для 18 зернин в колосі – $0,05$. Знайти для цієї вибірки частоту колосся, що має 12 зернин у колосі; 18 зернин у колосі.

Розв'язування. Розглянемо події: A – узятий колос має 12 зернин; B – узятий колос має 18 зернин.

Знайдемо частоти m_1 і m_2 подій A і B, використовуючи формулу (1.3). Позначимо через $W_n(A) = \dfrac{m_1}{n}$ відносну частоту події A, а через $W_n(B) = \dfrac{m_2}{n}$ відносну частоту події B. Оскільки $n = 200$, $W_{200}(A) = 0,125$, $W_{200}(B) = 0,05$, то $m_1 = W_n(A) \cdot n = 0,125 \cdot 200 = 25$, $m_2 = W_n(B) \cdot n = 0,05 \cdot 200 = 10$.

Відповідь. 25; 10.

18. Усередині квадрата навмання вибирається точка. Знайти ймовірність того, що точка виявиться всередині вписаного у квадрат круга.

Розв'язування. Подія A – ''навмання взята точка виявилась усередині вписаного у квадрат круга'' (рис. 1.2)

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega} = \frac{S_{\text{круга}}}{S_{\text{квадрта}}} = \frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi \cdot \frac{a^2}{4}}{a^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0,79.$$

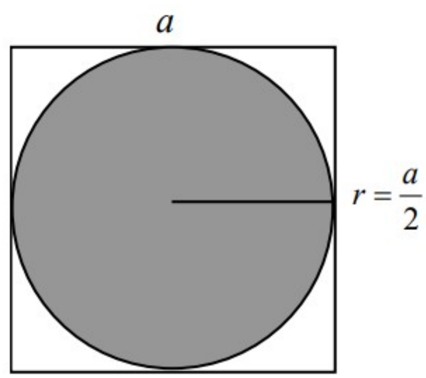


Рис. 1.2

Відповідь. 0,79.

19. Два товариші домовились зустрітись у певному місці між 12 годиною і 12 годиною 40 хвилинами, а також про те, що той, хто прийде першим, чекатиме на іншого протягом 30 хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожний 3 товаришів може прийти в довільний момент часу між 12 годиною і 12 годиною 40 хвилинами.

Розв'язування. Позначимо: подія A – зустріч відбудеться; момент приходу одного з них через x, а момент приходу іншого – y. Для того, щоб зустріч відбулась, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $|x - y| \leq 30$. Зобразимо x та y декартовими координати площини, узявши за одиницю масштабу одну хвилину.

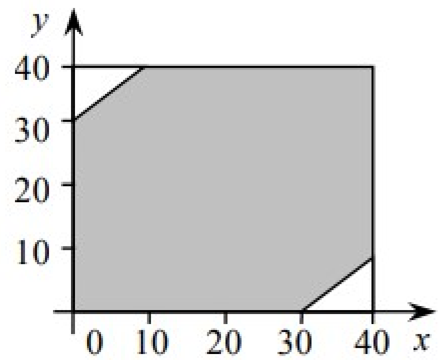


Рис. 1.3

Усі можливі результати випробування зображаються точками квадрата з стороною 40; площа цього квадрата: $40^2 = 1600$.

Нерівність $|x - y| \leq 30$ рівносильна системі нерівностей: $\begin{cases} x - y \leq 30, \\ x - y \geq -30. \end{cases}$ Отже, результати випробування, що сприяють події A, відповідають розв'язкам системи нерівностей $\begin{cases} x - y \leq 30, \\ x - y \geq -30, \\ 0 \leq x \leq 40, \\ 0 \leq y \leq 40. \end{cases}$ Розв'язки цієї системи є координатами точок площини, що на рисунку належать зафарбованій області, тобто розміщуються між прямими: $x - y = 30$, $x - y = -30$, $x = 0$, $x = 40$, $y = 0$, $y = 40$ і на самих цих прямих. Площа зафарбованої області:

$$S_{\text{квадрата}} - 2S_{\text{трикутника}} = 40^2 - (40 - 30)^2 = 1600 - 100 = 1500.$$

Імовірність події A дорівнює відношенню площі зафарбованої фрігури до площі квадрата: $P(A) = \dfrac{15}{16} = 0,9375$.

Відповідь. 0,9375.

Завдання для самостійного розв'язування

Умовні позначення:

$\circ$ – завдання, рекомендовані для самостійного розв'язання за зразками розв'язаних раніше завдань при підготовці до практичного заняття;

д/з – завдання, рекомендовані для домашньої роботи після практичного заняття.

1. Операції над подіями

$\circ$ **1.1.** $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9.10\}$; $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6,7\}$. Записати, у чому полягають події: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A}B$, $A\bar{B}$, $\bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB}$, $A+B$, $A\backslash B$, $\bar{A}+\bar{B}$, $\overline{A+B}$.

$\circ$ **1.2.** $\Omega = \{5,10,20,40,80,160,320\}$; $A = \{5,10,160,320\}$; $B_1 = \{5,10,80,160\}$; $B_2 = \{20,40,80\}$; $B_3 = \{5,10,20,80,160,320\}$; $B_4 = \{10,20,40,80,160,320\}$. Яка з подій $B_i (i = 1,2,3,4)$ утворює з подією A повну групу?

1.3. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$; $A = \{2,4,6,8,10,12\}$; $B = \{3,6,9,12\}$. Записати, у чому полягають події: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{A}B$, $A\bar{B}$, $\bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB}$, $A+B$, $A \mid B$, $\bar{A}+\bar{B}$, $\overline{A+B}$.

1.4. $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9.10\}$; $A = \{1,2,3,4\}$; $B_1 = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $B_2 = \{1,2,3,4,5,6,7\}$; $B_3 = \{4,5,6,7,8,9,10\}$; $B_4 = \{5,6,7,8,9,10\}$. Яка з подій $B_i (i = 1,2,3,4)$ утворює з A повну групу?

1.5. Монету підкинули тричі. Записати простір елементарних подій Ω можливих результатів випробування та події: A – герб випав не менше ніж два рази, B – цифра випала принаймні один раз, C – випали лише цифри, $A \cap B \cup C$, $\overline{A \cup B} \cap C$.

1.6. Кидають два гральні кубики. Побудувати простір елементарних подій, а також записати такі події: A – на кубиках випали парні цифри; B – хоча б на одному кубику випала цифра кратна трьом, $A \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$.

1.7. У книжковій шафі стоять підручники з математики, теорії ймовірностей, статистики – не менше ніж три з кожної дісципліни. Студент навмання бере три підручники. Побудувати простір елементарних подій, а також записати такі події: A – студент узяв принаймні одного підручника з математики; B – студент не взяв підручника з теорії ймовірностей; C - студент узяв два підручники зі статистики, $A \cap B \cap C$, $\bar{A} \cup \overline{B \cap C}$.

1.8 (д/з). У майстерню надійшли три партії мікросхем. Події: A – у першій партії є браковані мікросхеми; B – у другій партії всі мікросхеми якісні; C – у третій партії є якісні мікросхеми. Записати, у чому полягають події: $\bar{A}B$, $A\bar{B}$, AB, $\bar{A}\bar{B}$, $\overline{AB}$, $A+B$, $\bar{A}+\bar{B}$, $\overline{A+B}$, $A \cap B \cap C$, $\bar{A} \cup \overline{B \cap C}$, $A \cap B \cup C$, $\overline{A \cup B} \cap C$.

∘ **1.9.** Обчислити: P_4, $P_{12}(2,4,6)$, A_7^2, $\bar{A}_7^2$, C_9^1, C_9^8, C_9^3, C_9^7, $\bar{C}_9^3$, $\bar{C}_3^9$, $C_9(5,4)$.

∘ **1.10.** Із цифр 4, 7, 9 складають числа. Скільки можна скласти: а) трицифрових чисел так, щоб жодна з них не повторювалась; б) трицифрових чисел; в) двоцифрових чисел так, щоб жодна з них не повторювалась; г) двоцифрових чисел?

1.11. Із цифр $0, 5, 7$ складають числа. Скільки можна скласти: а) трицифрових чисел так, щоб жодна з них не повторювалась; б) трицифрових чисел; в) двоцифрових чисел так, щоб жодна з них не повторювалась; г) двоцифрових чисел?

1.12. Скільки існує шестизначних телефонних номерів (номер не може починатися з нуля)?

1.13. Правління підприємства складається з 9 осіб. Скількома способами можна вибрати серед них: а) три особи у відрядження; б) президента, директора та комерційного директора?

1.14 (д/з). Проект економічного розвитку деякої галузі виробництва складається з 6 розділів. У його розробленні беруть участь 6 організацій. Скількома способами може бути розподілена: а) робота над розділами; б) над першим, другим та третім розділами?

1.15. У речовій лотереї розігрується 8 предметів. З урни, в якій 50 квитків, беруть 5 квитків. Скількома способами їх можна взяти так, щоб: а) рівно два з них були виграшними; б) принаймні два з них були виграшними?

1.16. В ящику 20 деталей, серед яких 4 браковані. Скількома способами можна взяти: а) 5 деталей; б) дві браковані; в) одну браковану і чотири стандартні; г) шість деталей, серед яких хоча б одна бракована; д) дві однакові за якістю?

1.17 (д/з). Скількома способами з колоди (36 карт) можна взяти 4 карти, щоб серед них було: а) три пікової масті; б) дві бубнової, одна чирвової масті; в) дві чирвової масті; г) усі різної масті; д) хоча б дві однієї масті?

1.18. На книжковій полиці вміщується 10 томів енциклопедії. Скількома способами їх можна розставити так, щоб: а) томи 1 і 2 стояли поруч; б) томи 3 і 4 не стояли поруч?

1.19 (д/з). Вісім груп навчається в десяти розміщених поряд аудиторіях. Скільки існує варіантів розміщення груп в аудиторіях, якщо: а) групи № 1 і № 2 будуть у сусідніх аудиторіях; б) групи № 5 і № 7 будуть не в сусідніх аудиторіях?

1.20. При зустрічі 4 чоловіки потиснули один одному руки. Скільки рукостискань було зроблено?

1.21. Шість ящиків із різними матеріалами доставляються на вісім поверхів будови. Скількома способами: а) можна розподілити доставку матеріалів на поверхи; б) на восьмий поверх буде доставлено один матеріал; в) на восьмий поверх буде доставлено не менше ніж два матеріали?

1.22 (д/з). Четверо зайшли на першому поверсі в ліфт десятиповерхового будинку. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта: а) піднявшись на потрібний для кожного поверх? б) на різних поверхах? в) на сьомому поверсі вийде один пасажир?

1.23. Ліфт, в якому перебувають 13 пасажирів, може зупинитися на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по шість, чотири і три особи. Скількома способами вони можуть вийти, якщо ліфт не повертається на поверх, де він уже був, і на одному поверсі може вийти не більше ніж одна група?

∘ **1.24.** Скількома способами з 12 учасників змагань можна скласти: а) команду з чотирьох осіб; б) 3 групи по 4 особи?

2. Імовірність подій

∘ **2.1.** $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6,7\}$. Знайти ймовірності подій: A, B, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A+B$, $\overline{AB}$.

2.2. Підкинули три монети. Які ймовірності таких подій: A – гербів випало більше ніж чисел, B – випало рівно два числа, C – три монети випали однаковими сторонами, D – гербів не більше ніж один, E – хоч один герб.

2.3. Кидають дві однакові монети. Яка з подій більш ймовірна: A – монети випадуть однаковими сторонами; B – монети випадуть різними сторонами?

2.4 (д/з). Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність таких подій: A, B, C, D, $\bar{C}$, $\bar{B}$, $A+D$, $\overline{AB}$, якщо події: A – випало число, що є дільником числа 6; B – випало не менше ніж 5 очок; C – випало не більше ніж 5 очок; D – випало число, що є квадратом натурального числа?

∘ **2.5.** В урні 10 кульок білого, 5 зеленого, 7 червоного кольору. З урни навмання беруть кульки. З якою ймовірністю можна взяти: а) одну червону кульку; б) дві білі кульки; в) три кульки одного кольору; г) три кульки різного кольору; д) чотири білі й дві зелені кульки; е) три кульки, серед яких принаймні одна білого кольору?

2.6. Чотири кульки випадковим чином можуть опинитися в одній з чотирьох лунок з однаковою ймовірністю та незалежно одна від одної. Знайти ймовірність того, що в одній лунці будуть три кульки, у другій – одна, а у двох інших лунках кульок не буде.

2.7. З урни, що містить 5 занумерованих кульок, навмання дістають одну за одною всі кульки. Знайти ймовірність того, що всі вийняті кульки з'являться за порядком нумерації.

2.8. Урна містить 8 занумерованих від 1 до 8 кульок. Виймають кульку, записують її номер і повертають в урну. Знайти ймовірність того, що числа будуть записані в послідовності від 1 до 8.

∘ **2.9.** З цифр 4, 7, 9 навмання складають числа. Яка ймовірність того, що склали: а) трицифрове число, в якому жодна із цифр не повторюється; б) трицифрове число; в) двоцифрове число, в якому жодна з цифр не повторюється; г) двоцифрове число?

2.10. Знайдіть імовірність того, що число, навмання вибране з чисел від 9 до 100, ділиться на 4.

2.11 (д/з). Знайдіть імовірність того, що навмання вибране ціле число від 10 до 120 ділиться на 5.

2.12. Знайти ймовірність того, що дні народження 12 осіб припадуть на різні місяці року.

2.13. Замок містить 4 диски, на кожному з яких 10 цифр. Замок відімкнеться, якщо правильно набрати код з чотирьох цифр. Яка ймовірність того, що замок відімкнуть з першої спроби?

2.14. На бочечках лото написані числа від 1 до 99. З них випадковим чином вибирають дві. Знайти ймовірності таких подій:

а) A – на обох бочечках написано числа менші 40;

б) B – на обох бочечках написано числа більші 40;

в) C – на одній бочечці написано число менше 40, а на другій – більше ніж 40.

2.15 (д/з). У пачці є 100 лотерейних білетів, один з яких виграшний. Яка ймовірність виграти, якщо купили 10 білетів?

2.16. Знайти ймовірність вгадування k чисел з шести виграшних у суперлото (усього 49 чисел, але виграшних 6).

2.17. У лотереї є n білетів, серед яких m виграшних. Обчислити ймовірність виграшу для того, хто має r білетів цієї лотереї.

2.18. Три гравці грають у карти. Кожному здано по 10 карт, і дві карти залишено у прикупі. Один з гравців має 6 карт бубнової масті та 4 не бубнової. Він скидає дві небубнові карти та бере прикуп. Знайти ймовірність того, що він прикупить дві бубнові карти.

2.19 (д/з). З колоди (36 карт) беруть карти. З якою ймовірністю можна взяти: а) одну чирвову карту; б) дві пікових; в) чотири карти, з яких: дві бубнової, одна чирвової масті; г) чотири карти різних мастей; д) три карти різної масті; е) чотири карти, серед яких хоча б дві однієї масті?

2.20. З колоди карт (52 карти) виймають кілька карт. Скільки карт достатньо взяти, щоб з імовірністю більше ніж 0,5 стверджувати, що серед них будуть 2 карти однієї масті?

2.21. При грі у бридж колода з 52 карт ділиться порівну між чотирма гравцями. Знайти ймовірність того, що кожен гравець отримає по одному тузу?

2.22 (д/з). У білет іспиту входять 4 питання з 45, що містить програма. Студент вивчив 30 питань. Яка ймовірність того, що він буде знати всі 4 питання з навмання взятого білета?

2.23. Слово "інтеграл" складається з букв розрізаної азбуки. Ці букви перемішали і навмання, одна за одною, дістали 3 картки і розклали в ряд у порядку появи. Яка ймовірність того, що: а) вийшло слово "гра"; б) з відібраних карток можна скласти слово "гра"?

2.24. З букв розрізаної азбуки складено слово. Потім букви слова перемішують і навмання беруть одну за одною і розкладають у ряд у порядку їх появи. Знайти ймовірність того, що буде складено початкове слово, якщо це слово: а) "книга"; б) "математика".

2.25 (д/з). Словосполучення "теорія ймовірностей" складено з розрізної азбуки. Зі словосполучення навмання беруть картки і викладають у ряд одна за одною в порядку їх появи. Яка ймовірність того, що буде складене слово: а) "вірно"; б) "історія"?

2.26. З 10 книг, що стоять на книжковій полиці, – 3 книги зі статистики. Знайти ймовірність того, що вони стоять поруч.

2.27. На книжковій полиці випадковим чином розставляють 4 книги з економіки і три книги з географії. Яка ймовірність того, що книги з одного предмета стоятимуть поруч?

2.28 (д/з). На книжковій полиці розставили 6 томів енциклопедії. Яка ймовірність того, що: а) томи 1 і 2 стоять поруч; б) томи 3 і 4 не стоять поруч?

2.29. Вісім осіб випадковим чином сідають за круглий стіл. Знайдіть імовірність того, що: а) дві визначені особи сидітимуть поруч; б) три визначені особи сидітимуть поруч.

2.30 (д/з). Десять осіб випадковим чином сідають за круглий стіл. Знайти ймовірність того, що чотири визначені особи опиняться поруч.

2.31. Сім осіб випадковим чином сідають з одного боку прямокутного стола. Знайти ймовірність того, що: а) дві визначені особи опиняться поруч; б) три визначені особи опиняться поруч.

2.32. A та B і ще 8 осіб стоять у черзі. Знайти ймовірність того, що між A та B стоять три особи.

2.33. У ліфт семиповерхового будинку на першому поверсі ввійшли три особи. Кожна з них з однаковою ймовірністю може вийти на довільному поверсі, починаючи з другого. Знайти ймовірності подій: A – усі пасажири вийдуть на четвертому поверсі; B – усі пасажири вийдуть на тому самому поверсі; C – усі пасажири вийдуть на різних поверхах.

2.34 (д/з). Чотири особи зайшли на першому поверсі у ліфт десятиповерхового будинку. Кожна з них з однаковою ймовірністю може вийти на довільному поверсі починаючи з другого. Знайти ймовірності подій: A – на восьмому поверсі вийде один пасажир; B – усі пасажири вийшли на тому самому поверсі; C – усі пасажири вийдуть на різних поверхах.

2.35. У ліфті 7 пасажирів. Ліфт зупиняється на десяти поверхах. Яка ймовірність того, що всі пасажири вийдуть на різних поверхах?

2.36. У три вагони заходять дев'ять пасажирів. Яка ймовірність того, що: а) у перший вагон зайдуть три пасажири; б) у кожний вагон зайдуть по три пасажири; в) в один з вагонів зайдуть чотири, у другий – три й у третій – два пасажири?

2.37. Визначаючи якість насіння, узяли на пробу 1000 насінин. З відібраних зійшли 90. Яка відносна частота появи якісного насіння?

∘ **2.38.** У круг вписано квадрат. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка круга попаде у квадрат?

2.39. Знайти ймовірність того, що навмання вибрана точка правильного трикутника попадає в коло, вписане в цей трикутник?

2.40 (д/з). Яка ймовірність, що навмання вибрана точка правильного трикутника попаде у вписаний у трикутник квадрат?

2.41. У крузі радіусом R проведено хорду довжиною R, яка ділить круг на дві частини. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка попадає до меншої частини круга?

2.42 (д/з). У крузі радіусом R навмання проведено хорду. Знайти ймовірність того, що довжина цієї хорди не більша ніж R.

2.43. Між числами -1 і 1 навмання вибирають два числа. Знайти ймовірність того, що сума квадратів цих чисел буде не більшою за одиницю.

2.44 (д/з). Між числами 0 і 1 навмання вибирають два числа. Знайти ймовірність того, що сума цих чисел не більша ніж 1, а модуль їх різниці не менший ніж 0,5.

2.45. Навмання вибираємо два числа x і y, такі що $0 \leq \ \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Знайти ймовірність того, що $y \leq x^2$.

2.46 (д/з). Парабола дотикається нижньої сторони квадрата і проходить через його вершини. Яка ймовірність того, що точка, навмання вибрана у квадраті, попаде в область, що обмежена параболою і верхньою стороною квадрата?

∘ **2.47.** Дві особи домовились зустрітись між 13-ю і 14-ю годинами. Той, хто прийде першим, чекатиме на іншого лише 10 хвилин. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожна особа може прийти в довільний момент часу між 13-ю і 14-ю годинами.

2.48. Робітник обслуговує 2 агрегати. Тривалі спостереження показали, що кожен з них потребує уваги робітника протягом 10 хвилин на годину. Знайти ймовірність того, що за годину якийсь один агрегат потребуватиме уваги робітника в той час, коли він зайнятий обслуговуванням другого агрегата.

Тема 2. Основні теореми теорії ймовірностей

Теорема додавання ймовірностей. Нехай подія A є сумою двох подій B і C. Тоді:

1) якщо події B і C несумісні, то

$$P(A) = P(B) + P(C); \tag{2.1}$$

2) якщо події B і C сумісні, то

$$P(A) = P(B) + P(C) - P(B \cdot C). \tag{2.2}$$

Наслідок 1. Імовірність суми k попарно несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій:

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_k). \tag{2.3}$$

Наслідок 2. Формула (2.2) у випадку більшої кількості подій-доданків має вигляд:

$$P(A_1 + A_2 + \cdots + A_k) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cdot A_j) +$$

$$+ \sum_{i<j<r} P(A_i \cdot A_j \cdot A_r) + \cdots + (-1)^{k-1} P(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_k). \tag{2.4}$$

Події B і C називаються **залежними**, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась друга подія чи ні. Якщо ж відбуття (чи невідбуття) однієї з подій не змінює ймовірність іншої, то такі події називаються **незалежними**.

Імовірність події C, визначена за умови, що подія B відбулася, називається **умовною** й позначається $P(C/B)$.

Теорема множення ймовірностей. Нехай подія A є добутком двох подій B і C. Тоді:

1) якщо події B і C незалежні, то

$$P(A) = P(BC) = P(B) \cdot P(C); \tag{2.5}$$

2) якщо події B і C залежні, то

$$P(A) = P(BC) = P(B) \cdot P(C/B). \tag{2.6}$$

Наслідок 1. Імовірність добутку k подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_k). \tag{2.7}$$

(Зауважимо, що декілька подій називаються незалежними в сукупності, якщо вони попарно незалежні, а також незалежні кожна з них і всі можливі добутки інших.)

Наслідок 2. Імовірність добутку довільних k подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовні імовірності всіх інших подій, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що всі попередні події вже відбулися::

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \dots$$
$$\dots \cdot P(A_k/A_1 A_2 \dots A_{k-1}). \tag{2.8}$$

Імовірність настання принаймні однієї події. Нехай у результаті випробування можуть відбутися n подій $A_1, \dots, A_n$, імовірності появи кожної з яких відомі і які незалежні в сукупності. Позначимо літерою A подію, яка полягає в тому, що відбудеться принаймні одна з цих подій. Протилежною буде подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що в результаті випробування одночасно настали протилежні події: $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \dots \cdot \overline{A}_n$. Отже, ймовірність події A знайдеться так:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \dots \cdot P(\overline{A}_n). \tag{2.9}$$

Наслідок. Якщо $P(A_1) = P(A_2) = \dots = P(A_n) = p$, то формула (2.9) набуде вигляду:

$$P(A) = 1 - q^n, \quad \text{де} \quad q = 1 - p.$$

Приклад 1. Над виготовленням приладу працюють послідовно чотири робітники; якість приладу під час передачі наступному робітникові не перевіряється. Перший і другий робітники допускають брак з ймовірністю 0,01; третій – $0,02$; четвертий – $0,03$. Знайти ймовірність того, що в процесі виготовлення приладу брак буде допущено.

Розв'язування. Подія A – брак допущено. Нехай події: A_1 – брак допустив перший робітник, A_2 – брак допустив другий робітник, A_3 – брак допустив третій робітник, A_4 – брак допустив четвертий робітник, а події: $\overline{A_1}$ – перший робітник не допустив браку, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$, $\overline{A_4}$ – відповідно другий, третій, четвертий робітники не допустили браку. $P\left(\bar{A}_1\right) = 1 - 0,01 = 0,99$; $P\left(\bar{A}_2\right) = 1 - 0,01 = 0,99$; $P\left(\bar{A}_3\right) = 1 - 0,02 = 0,98$; $P\left(\bar{A}_4\right) = 1 - 0,03 = 0,97$. При виготовленні приладу брак буде допущено, якщо помилиться принаймні один робітник. Отже, браку не буде лише за однієї умови: якщо жоден з робітників не помилиться. За наслідком з теореми множення ймовірностей незалежних подій шукана ймовірність дорівнює:

$$P(A) = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) \cdot P\left(\overline{A_4}\right) =$$

$$= 1 - 0,99 \cdot 0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,97 \approx 1 - 0,93 = 0,07.$$

Відповідь. 0,07.

Приклад 2. Для збільшення надійності приладу він дублюється ще одним таким самим приладом (рис. 2.1) і надійність кожного – 0,8. Знайти надійність системи.

Розв'язування. Нехай події: A_1 – перший прилад працює безвідмовно, A_2 – другий прилад працює безвідмовно. Тоді $\overline{A_1}$ – перший прилад відмовив у роботі, $\overline{A_2}$ – другий прилад відмовив у роботі. Отже, $P\left(\bar{A}_1\right) = P\left(\bar{A}_2\right) = 1 - 0,8 = 0,2$. Надійність системи – ймовірність безвідмовної роботи принаймні одного з приладів. За наслідком теореми множення ймовірностей незалежних подій шукана ймовірність дорівнює:

$$P = 1 - P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) = 1 - 0,2 \cdot 0,2 = 1 - 0,04 = 0,96.$$

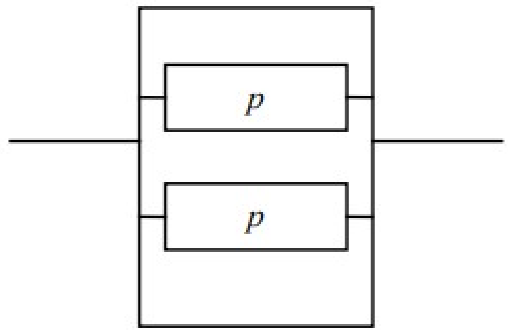


Рис. 2.1

Відповідь. 0,96.

Приклад 3. У технічній системі дубльовані не всі, а тільки деякі (найменш надійні) прилади (рис. 2.2). Знайти надійність системи, якщо $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,9$.

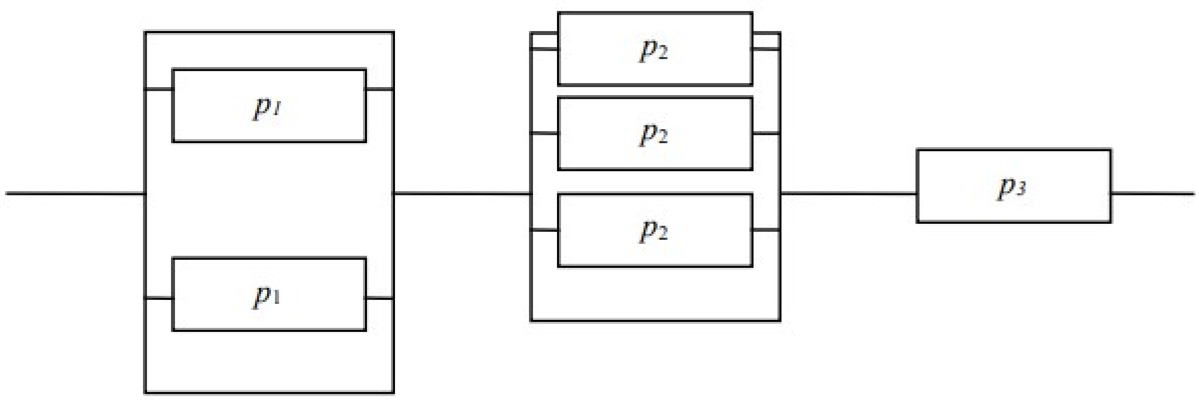


Рис. 2.2

Розв'язування. Надійність тієї частини системи, що складається з приладів з надійністю 0,8, позначимо P_1; відповідно з надійністю $0,7 - P_2$. Отже, $P_1 = 0,96$ (див. попередній приклад). Аналогічно за наслідком теореми множення ймовірностей незалежних подій: $P_2 = 1 - 0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 1 - 0,027 = 0,973$. Отже, надійність системи ймовірність безвідмовної роботи всіх її частин:

$$P = 0,96 \cdot 0,973 \cdot 0,9 \approx 0,84067.$$

Відповідь. 0,84067.

Зауважимо, що якщо події A_1, A_2, ..., A_n залежні, то

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2/\overline{A}_1) \cdot \ \ldots \ \cdot P(\overline{A}_n/\overline{A}_1\overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{n-1}).$$

Формула повної ймовірності. Нехай подія A може відбутися тільки за умови настання однієї з несумісних подій B_1, B_2, ..., B_n, які утворюють повну групу й називаються гіпотезами. Тоді ймовірність події A знаходиться за так званою **формулою повної ймовірності**

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + \cdots + \\ + P(B_n) \cdot P(A/B_n), \tag{2.10}$$

де $P(B_i)$ – імовірності гіпотез, $P(A/B_i)$ – умовні ймовірності настання події A.

Приклад 4. 60 % виробів контролює перший експерт, 40 % другий. Імовірності забракувати дефектний виріб для першого та другого експертів відповідно дорівнюють 0,9 та 0,7. Імовірність помилкового бракування виробу, що не має дефекту, дорівнює відповідно 0,02 та 0,11. Знайти ймовірності того, що: а) дефектний виріб забракують; б) забракують якісний виріб.

Розв'язування. Нехай подія A полягає в тому, що дефектний виріб забракували; C – забракували якісний виріб. Події: H_1 – виріб контролював перший експерт, H_2 – другий експерт. Імовірності даних подій:

$$P\left(H_1\right) = 0,6; \quad P\left(H_2\right) = 0,4.$$

Зауважимо, що $P\left(H_1\right) + P\left(H_2\right) = 1$. Події H_1 і H_2 утворюють повну групу, а отже, гіпотезами для подій A та C.

Умовні ймовірності подій A та C відповідно дорівнюють: $P_{H_1}(A) = 0,9$ – імовірність того, що дефектний виріб перший експерт визнав бракованим; $P_{H_2}(A) = 0,7$ – імовірність того, що дефектний виріб другий експерт визнав бракованим; $P_{H_1}(C) = 0,02$

– імовірність того, що якісний виріб перший експерт визнав бракованим; $P_{H_2}(C) = 0,11$ – імовірність того, що якісний виріб другий експерт визнав бракованим. За формулою повної ймовірності:

а) $P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0,6 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7 = 0,54 + 0,28 = 0,82$;

б) $P(C) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(C) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(C) = 0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,11 = 0,012 + 0,044 = 0,056$.

Відповідь. 0,82; 0,056.

Нехай виконуються наведені умови щодо подій $B_1, \ldots, B_n$ та A. Припустимо, що в результаті випробування подія A відбулася. З огляду на це переоцінити ймовірності гіпотез B_i можна за **формулами Байєса**:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{P(A)}, \quad i = \overline{1, n}. \qquad (2.11)$$

Приклад 5. 60 % виробів контролює перший експерт, 40 % другий. Імовірності забракувати дефектний виріб для першого та другого експертів відповідно дорівнюють 0,9 та 0,7. Імовірність помилкового бракування виробу, що не має дефекту, дорівнює відповідно 0,02 та 0,11. Навмання вибраний виріб, який пройшов перевірку, виявився дефектним. Знайти ймовірності того, що цей виріб перевіряв: а) перший експерт; б) другий експерт. Навмання вибраний виріб, який пройшов перевірку, виявився якісним. Знайти имовірності того, що цей виріб перевіряв: в) перший експерт; г) другий експерт.

Розв'язування. Нехай подія A полягає в тому, що дефектний виріб забракували; C – забракували якісний виріб. Події: H_1 – виріб контролював перший експерт, H_2 – другий експерт. Імовірності даних подій:

$$P(H_1) = 0,6; \quad P(H_2) = 0,4.$$

Зауважимо, що $P(H_1) + P(H_2) = 1$. Події H_1 і H_2 утворюють повну групу, отже, гіпотезами для подій A та C.

Умовні ймовірності подій A та C відповідно дорівнюють: $P_{H_1}(A) = 0,9$; $P_{H_2}(A) = 0,7$; $P_{H_1}(C) = 0,02$; $P_{H_2}(C) = 0,11$ (див. приклад 4).

За формулами Байеса:

а) $P_A(H_1) = \dfrac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)} =$
$= \dfrac{0,6 \cdot 0,9}{0,6 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7} = \dfrac{0,54}{0,82} \approx 0,659;$

б) $P_A(H_2) = \dfrac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)} =$
$= \dfrac{0,4 \cdot 0,7}{0,6 \cdot 0,9 + 0,4 \cdot 0,7} = \dfrac{0,28}{0,82} \approx 0,341;$

в) $P_C(H_1) = \dfrac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(C)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(C) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(C)} =$
$= \dfrac{0,6 \cdot 0,02}{0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,11} = \dfrac{0,012}{0,056} \approx 0,214;$

г) $P_C(H_2) = \dfrac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(C)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(C) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(C)} =$
$= \dfrac{0,4 \cdot 0,11}{0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,11} = \dfrac{0,044}{0,056} \approx 0,786.$

Відповідь. 0,659; 0,341; 0,214; 0,786.

Приклади розв'язування задач

1. У партії із 50 деталей є п'ять бракованих. Яка ймовірність того, що з вибраних навмання 30 деталей не більше однієї бракованої?

Розв'язування. Нехай A – подія, яка відповідає вибору якісних 30 деталей, B – подія, яка відповідає вибору однієї бракованої деталі із 30 вибраних, C – не більше однієї бракованої. Отже, $C = A + B$. Оскільки події A і B несумісні, то

$$P(C) = P(A) + P(B),$$

$P(A) = \dfrac{C_{45}^{30}}{C_{50}^{30}} \approx 0,007$, $P(B) = \dfrac{C_{45}^{29}C_5^1}{C_{50}^{30}} \approx 0,065$. Отже, $P(C) \approx 0,072$.

Відповідь. $\approx 0,072$.

2. Перевезення вантажів для підприємства забезпечують два автогосподарства, які з цією метою щодня в першу зміну мають виділяти по одному автомобілю. Імовірність виходу автомобіля на лінію в першому автогосподарстві дорівнює 0,7, а в другому – 0,6. Знайти ймовірність того, що в першу зміну на підприємстві перевозитимуть вантажі.

Розв'язування. Розглянемо події: A – "на підприємстві в першу зміну перевозитимуть вантажі"; A_1 – "для перевезення вантажів прибув автомобіль із першого автогосподарства"; A_2 – "для перевезення вантажів прибув автомобіль із другого автогосподарства". Тоді $A = A_1 \bigcup A_2$. Події A_1 і A_2 сумісні, тому $P(A) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \bigcap A_2)$. Очевидно, що події A_1 і A_2 незалежні і $P(A_1 \bigcap A_2) = P(A_1)P(A_2)$. Остаточно дістанемо:

$$P(A) = 0,7 + 0,6 - 0,7 \cdot 0,6 = 0,88.$$

Відповідь. 0.88.

3. Прилад складається із трьох вузлів, які працюють незалежно один від одного, причому другий і третій вузли взаємозамінювані. Ймовірність виходу з ладу вузлів на заданому часовому проміжку становить відповідно 0,2; 0,3 і 0,4. Знайти ймовірність того, що протягом заданого часу прилад працюватиме.

Розв'язування. Розглянемо події: A – "прилад працює протягом заданого часу"; B_1 – "перший вузол працює"; A_2 – "другий вузол працює"; B_3 – "третій вузол працює". Тоді A настає, якщо працюють перший та другий вузли або перший та третій вузли, або всі три вузли разом. Звідси $A = B_1 \bigcap (B_2 \bigcup B_3)$. За умовою задачі маємо, що події B_1 і $(B_1 \bigcup B_3)$ незалежні, а події B_2 і B_3 –

сумісні. Тому

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(B_2 \bigcup B_3) = P(B_1)\Big(P(B_2) + P(B_3) -$$

$$-P(B_2 \bigcap B_3)\Big) = P(B_1)(P(B_2) + P(B_3) - P(B_2)P(B_3)) =$$

$$= 0,8(0,7 + 0,7 - 0,7 \cdot 0,7) = 0,728.$$

Відповідь. 0.728.

4. По лінії зв'язку передаються сигнали A і B із ймовірністю 0,72 і 0,28. Через перешкоди $\frac{1}{6}$ частина A-сигналів спотворюється і приймається як B-сигнали, а $\frac{1}{7}$ частина переданих B-сигналів приймається як A-сигнали.

а) Визначити ймовірність того, що буде прийнято A-сигнал;

б) Відомо, що прийнято A-сигнал. Яка ймовірність того, що A-сигнал був дійсно переданий?

Розв'язування. а) Нехай подія A – прийнятий A-сигнал. Введемо гіпотези: H_A – передавався сигнал A, H_B – передавався сигнал B. За умовою $P(H_A) = 0,72$; $P(H_B) = 0,28$.

Імовірність того, що прийнятий A-сигнал за умови, що справді A-сигнал передавався:

$$P(A/H_A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Імовірність того, що прийнято A-сигнал за умови, що передавався B-сигнал, дорівнює:

$$P(A/H_A) = \frac{1}{7}.$$

Отже, за формулою повної ймовірності знаходимо

$$P(A) = P(H_A)P(A/H_A) + P(H_B)P(A/H_B) =$$

$$= 0,72 \cdot \frac{5}{6} + 0,28 \cdot \frac{1}{7} = 0,64.$$

б) Імовірність надходження A-сигналу за умови, що він був переданий, знайдемо за формулою Байєса:

$$P(H_A/A) = \frac{P(H_A)P(A/H_A)}{P(A)} = \frac{0,72 \cdot \frac{5}{6}}{0,64} = \frac{0,6}{0,64} \approx 0,94.$$

Відповідь. а) 0,64; б) $\approx 0,94$.

Завдання для самостійного розв'язування

○ **1.** Імовірності того, що необхідна деталь знаходиться в першому, другому, третьому, четвертому ящиках відповідно дорівнюють 0,6; 0,7; 0,8; 0,9. Знайти ймовірність того, що деталь міститься: а) не більш ніж у трьох ящиках; б) не менш ніж у двох ящиках.

Відповідь. а) $p = 0,6976$; б) $p = 0,9572$.

2 (д/з). Студент знає 20 із 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент знає запропоновані йому екзаменатором три питання.

Відповідь. $p = 57/115$.

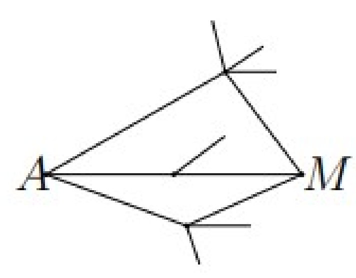
○ **3.** У цеху працює 7 чоловіків і 3 жінки. За табельними номерами навмання відібрано 3 особи. Знайти ймовірність того, що вибрано трьох чоловіків.

Відповідь. $p = 7/24$.

4. Імовірність того, що питання в екзаменаційному білеті стандартне, дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що з двох питань тільки одне стандартне.

Відповідь. $p = 0,095$.

○ **5.** Турист виходить із пункту A і на роздорожжі вибирає навмання одну з можливих доріг. Яка ймовірність того, що турист потрапить у пункт M? Схема доріг зображена на рисунку.



Відповідь. $p = 13/36$.

6. Ймовірність браку через порушення режиму обробки деталей дорівнює 0,02, а внаслідок поломки верстата – 0,08. Знайти ймовірність випуску бракованих деталей.

Відповідь. $p \approx 0,099$.

∘ **7 (д/з).** У разі масового виготовлення виробів брак становить у середньому 1,5% від загальної кількості всіх виробів. Із-поміж придатних виробів 85,3% становлять вироби 1-го гатунку. Знайти ймовірність того, що навмання взятий виріб належить до 1-го гатунку.

Відповідь. $p = 0,84$.

8. Імовірність одного попадання в ціль при одному залпі з двох руш-ниць дорівнює 0,38. Знайти імовірність попадання в ціль при одному пострілі з першої гвинтівки, якщо відомо, що для другої ця імовірність дорівнює 0.7.

9. В аудиторії серед 15 комп'ютерів 12 справних. Знайти ймовірність того, що з двох навмання вибраних комп'ютерів хоча б один виявиться несправним.

∘ **10.** Радіоприймач із імовірностями $p_1 = 0,9$, $p_2 = 0,1$ може належати до однієї з двох партій. Імовірність того, що радіоприймач пропрацює заданий проміжок часу без ремонту для цих партій відповідно дорівнює 0,8 і 0,6. Яка ймовірність того, що радіоприймач пропрацює заданий проміжок часу?

Відповідь. $p = 0,78$.

11. На складання агрегату надходять деталі, які виготовляються двома верстатами-автоматами. Перший верстат виготовляє в середньому $0,2\%$ бракованих деталей, а другий $0,1\%$. Знайти ймовірність надходження бракованої деталі на складання, якщо від першого верстата надійшло 2000 деталей, а від другого – 3000.

Відповідь. $p = \dfrac{2000}{5000}0,002 + \dfrac{3000}{5000}0,001 = 0,0014$.

12. В ящику міститься 20 тенісних м'ячів, із них 12 нових і 8, які були в користуванні. Із ящика навмання беруть два м'яча і після закінчення гри повертають у ящик. Після цього із ящика навмання вибирають знову два м'яча для наступної гри. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) A – два м'ячі, що вийняли із ящика, ще не були в користуванні; 2) B – два м'ячі вже були в користуванні.

Відповідь. $P(A) = \dfrac{C_{12}^2}{C_{20}^2}\dfrac{C_{10}^2}{C_{20}^2} + \dfrac{C_{12}^1 C_8^1}{C_{20}^2}\dfrac{C_{11}^2}{C_{20}^2} + \dfrac{C_8^2 C_{12}^2}{C_{20}^2 C_{20}^2}$;

$$P(B) = \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}\frac{C_8^2}{C_{20}^2} + \frac{C_{12}^1 C_8^1}{C_{20}^2}\frac{C_7^2}{C_{20}^2} + \frac{C_8^2 C_6^2}{C_{20}^2 C_{20}^2}.$$

○ **13.** У першому ящику міститься 6 стандартних і 5 бракованих деталей. Із першого ящика навмання беруть чотири деталі й перекладають у другий, в якому до цього містилося дві стандартні й одна бракована деталі. Яка ймовірність після цього із другого ящика вийняти одну стандартну деталь?

Відповідь. $p = \dfrac{C_6^4}{C_{11}^4}\dfrac{6}{7} + \dfrac{C_6^3 C_5^1}{C_{11}^4}\dfrac{5}{7} + \dfrac{C_6^2 C_5^2}{C_{11}^4}\dfrac{4}{7} + \dfrac{C_6^1 C_5^3}{C_{11}^4}\dfrac{3}{7} + \dfrac{C_6^0 C_5^4}{C_{11}^4}\dfrac{2}{7}$.

14 (д/з). Відомі значення: $P(A) = 0,3$, $P(\overline{B}) = 0,6$, $P(A/B) = 0,32$.

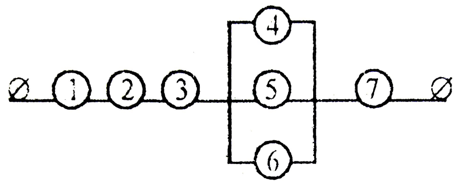
Знайти: $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(B/A)$, $P(A \cap \overline{B})$.

Відповідь. $P(A \cap B) = 0,128$; $P(A \cup B) = 0,572$; $P(B/A) = \dfrac{32}{75}$; $P(A \cap \overline{B}) = 0,172$.

15. В урні міститься 4 зелених і 8 червоних кульок. Кульки із урни виймають по одній без повернення. Таким способом було вийнято три кульки. Обчислити ймовірності таких випадкових подій: 1) A – перша кулька буде червоною, друга – зеленою, третя – червоною; 2) B – перша кулька буде зеленою, друга – червоною, третя – зеленою.

Відповідь. $P(A) = \dfrac{8}{12}\dfrac{4}{11}\dfrac{7}{10} = \dfrac{56}{165}$; $P(B) = \dfrac{4}{12}\dfrac{8}{11}\dfrac{3}{10} = \dfrac{4}{55}$.

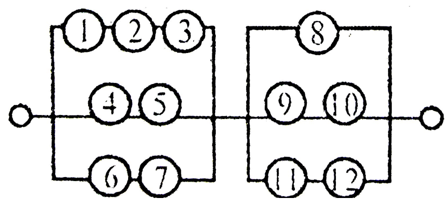
16. Електролампочки з'єднані за схемою, зображеною на рисунку:



Імовірність того, що електролампочка не вийде з ладу при ввімкненні схеми в електричну мережу, є величиною сталою і дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що в електричній схемі, наведеної на рисунку, при ввімкненні її в електричну мережу потече електричний струм?

Відповідь. $P = p^4(1 - q^4) = 0,65633436.$

○ **17.** Електролампочки з'єднані за схемою, зображеною на рисунку:



Імовірність того, що лампочка не перегорить при ввімкненні в електромережу, є величиною сталою і дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що в схемі, якщо вона ввімкнено в електромережу, потече електричний струм?

Відповідь. $P = (1 - (1 - p_1p_2p_3)(1 - p_4p_5)(1 - p_6p_7))(1 - q_8(1 - p_9p_{10})(1 - p_{11}p_{12}))$.

18. Маємо три урни. У першій міститься 8 білих і 2 чорних кульки, у другій – 5 білих і 5 чорних, у третій – 2 білих і 8 чорних. Навмання підкидають гральний кубик. Якщо випаде на грані число кратне 2, то навмання беруть дві кульки з першої урни, якщо випаде число кратне 5 – дві кульки з другої урни, і якщо випаде число, яке не буде кратним ні 2, ні 3 – дві кульки з третьої урни. Знайти ймовірність появи двох білих кульок у такому експерименті.

Відповідь. $p = \frac{3}{6}\frac{C_8^2}{C_{10}^2} + \frac{2}{6}\frac{C_5^2}{C_{10}^2} + \frac{2}{6}\frac{C_2^2}{C_{10}^2}$.

○ **19.** Прилад складається із двох вузлів № 1, і № 2, що дублюють один одного, і може працювати у двох режимах: сприятливому і несприятливому. У сприятливому режимі надійність кожного із узлів $q_1 = 0,8$, а в неспрятливому $q_2 = 0,5$. Імовірність того, що прилад працюватиме в сприятливому режимі $P_1 = 0,6$, а в несприятливому режимі $1 - P_1$. Знайти надійність приладу R.

Відповідь. $R = P_1(1 - q_1^2) + (1 - P_1)(1 - q_2^2)$.

20 (д/з). Деталь може надійти для обробки на перший верстат із імовірністю 0,2, на другий верстат – із імовірністю 0,3 і на третій – із імовірностю 0,5. При обробці деталі на першому верстаті ймовірність допустити брак дорівнює 0,01, на другому і третьому верстатах ця ймовірність відповідно дорівнює 0,05 і 0,08. Оброблені деталі складають в одну шухляду. Навмання взята звідти деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що її обробляв перший верстат?

Відповідь. $p = \frac{20}{57}$.

○ **21.** Клапани, виготовлені цехом заводу, перевіряють три контролери. Імовірність того, що клапан потрапить на перевірку до першого контролера дорівнює 0,3, до другого – 0,5 і до третього – 0,2. Імовірність того, що бракована деталь буде виявлена для першого, другого і третього контролерів відповідно дорівнює 0,95; 0,9; 0,85. Під час повторної перевірки відбракованої деталі вона виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що цю деталь перевіряв третій контролер?

Відповідь. $p = \frac{34}{181}$.

22. Прилад складається із двох вузлів, що працюють незалежно один від одного. Робота кожного вузла необхідна для роботи приладу в цілому. Надійність (імовірність безвідмовної роботи протягом часу t) першого вузла $p_1 = 0,9$; другого $p_2 = 0,8$. Прилад випробовувався протягом часу t, і при цьому один з вузлів вийшов з ладу. Знайти ймовірність того, що відмовив у роботі лише перший вузол, а другий був справним.

Відповідь. $p = \dfrac{p_2q_1}{p_2q_1 + p_1q_2 + q_1q_2} =$
$= \dfrac{0,8 \cdot 0,2}{0,8 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 0,2} = \dfrac{8}{13}$.

23. Відомо, що $A \cap B \neq \varnothing$. Довести, що

$$p(B/A) \geq 1 - \frac{p(\overline{B})}{p(A)}.$$

$\circ$ **24.** В урні міститься 3 червоних, 1 синя і 2 зелених кульки. Із урни кульки виймають по одній без повернення. Кульки виймають до першої появи червоної. Обчислити ймовірність цієї події.

Відповідь. $p = \dfrac{3}{6} + \dfrac{1}{6}\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{6}\dfrac{2}{5}\dfrac{3}{4} + \dfrac{2}{6}\dfrac{1}{5}\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{6}\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{4}1 + \dfrac{2}{6}\dfrac{1}{5}\dfrac{1}{4}1.$

25 (д/з). На вхід радіолокаційного пристрою із імовірністю $P = 0,9$ надходить корисний сигнал із завадами, і з імовірністю $1 - P = 0,1$ – самі лише завади. Коли надходить корисний сигнал із завадами, то пристрій реєструє цей сигнал із імовірністю $p_1 = 0,8$, якщо надходять лише завади, то із імовірністю $p_2 = 0,9$. Відомо, що пристрій зареєстрував наявність якогось сигналу. Яка ймовірність того, що це корисний сигнал?

Відповідь. $p = \dfrac{Pp_1}{Pp_1 + p_2q} = \dfrac{8}{9}$.

26. Пасажир для придбання квитка може звернутись до однієї з чотирьох кас. Відповідні ймовірності дорівнюють $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,3$; $p_3 = 0,4$; $p_4 = 0,1$. Імовірність того, що до моменту появи пасажира в касі буде квиток, дорівнює відповідно $P_1 = 0,6$, $P_2 = 0,3$, $P_3 = 0,8$, $P_4 = 0,5$. Пасажир звернувся до однієї із кас і купив квиток. Яка ймовірність того, що квиток пасажир придбав у першій касі?

Відповідь. $p = \dfrac{P_1p_1}{P_1p_1 + P_2p_2 + P_3p_3 + P_4p_4} = \dfrac{6}{29}$.

27. Для виготовлення деталі необхідно провести чотири незалежні технологічні операції. Імовірність допустити брак при виконанні першої технологічної операції $q_1 = 0,1$, і для другої, третьої і четвертої ці ймовірності дорівнюють відповідно $q_2 = 0,05$, $q_3 = 0,15$, $q_4 = 0,2$. Яка ймовірність того, що виготовлена деталь виявиться стандартною?

Відповідь. $p = p_1p_2p_3p_4 = 0,5814$.

○ **28.** Маємо k радіолокаційних станцій, кожна із них за один оберт антени може виявити літаючий об'єкт у повітрі із імовірністю P (незалежно від інших обертів антени й інших станцій). За час t кожна станція здійснить m обертів антени. Знайти ймовірності таких випадкових подій: 1) A – літаючий об'єкт буде виявлено хоча б один раз; 2) B – об'єкт буде виявлено кожною станцією.

Відповідь. $P(A) = 1 - q^{km}$; $P(B) = [1 - q^m]^k$.

29. Імовірність появи випадкової події в кожному з незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p. Скільки необхідно провести експериментів, щоб імовірність появи випадкової події хоча б один раз дорівнювала P?

Відповідь. $n = \dfrac{ln(1 - P(c))}{ln(1 - P)}$.

Тема 3. Повторні незалежні випробування

Нехай проводиться n випробувань, у кожному з яких подія A може відбутися або не відбутися (це так звані повторні випробування). Якщо ймовірність настання події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються **незалежними** щодо події A. Крім того, випробування також незалежні, якщо в кожному з них імовірність настання події A однакова.

Для розв'язування задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули та теореми.

1. Формула Бернуллі. Імовірність того, що в n повторних незалежних випробуваннях випадкова подія A відбудеться точно m разів, знаходиться за формулою Бернуллі:

$$P_n(M) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \tag{3.1}$$

де C_n^m – кількість комбінацій, визначена формулою (1.6),

p – ймовірність настання події A в одному випробуванні,

q – ймовірність події $\overline{A}$.

Зауважимо, що формула Бернуллі застосовується при $n \leq 10$.

Наслідки:

1. Імовірність того, що подія A при n випробуваннях настане n разів, знаходять за формулою

$$P_n(m) = p^n.$$

2. Імовірність того, що подія A при n випробуваннях настане нуль разів, дорівнює

$$P_n(0) = q^n.$$

3. Імовірність того, що подія A при n випробуваннях настане не більше ніж k разів, дорівнює

$$P_n(m \leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(k) = \sum_{i=0}^{k} P_n(i).$$

4. Імовірність того, що подія A при n випробуваннях настане менше ніж k разів, дорівнює

$$P_n(m < k) = \sum_{i=0}^{k-1} P_n(i).$$

5. Імовірність того, що подія A при n випробуваннях настане не менше ніж k разів, дорівнює

$$P_n(m \geq k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \ldots + P_n(n) = \sum_{i=0}^{k} P_n(i).$$

6. Імовірність того, що подія A при n випробуваннях настане більше ніж k разів, дорівнює

$$P_n(m > k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \ldots + P_n(n) = \sum_{i=k+1}^{n} P_n(i).$$

7. Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія A з'явиться від k_1 до k_2 разів, обчислюється так:

$$P_n\left(k_1 \leq m \leq k_2\right) = \sum_{m=k_1}^{k_2} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

8. Імовірність того, що в результаті n незалежних експериментів подія A з'явиться принаймні один раз, обчислюється так:

$$P_n(1 \leq m \leq n) = 1 - q^n.$$

Приклад 1. Імовірність виграти по одному білету лотереї $p = 1/3$. Знайти ймовірність того, що 3 п'яти куплених білетів виграшними будуть: а) два; б) усі; в) жодного; г) не менше від двох; д) більше від двох; е) не більше від двох; є) менше від двох; ж) від 2 до 4; з) принаймні один.

Розв'язування. Якщо A – подія, що полягає в купівлі виграшного білета, то її ймовірність $p = \dfrac{1}{3}$, а ймовірність купівлі невиграшного білета $q = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$. За формулою Бернуллі та її наслідками маємо:

а) $P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{5 \cdot 4}{2} \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = 10 \cdot \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{8}{27} = \dfrac{80}{243} \approx 0,3292;$

б) $P_5(5) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^5 = \dfrac{1}{243} \approx 0,004;$

в) $P_5(0) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5 = \dfrac{32}{243} \approx 0,1317;$

г) $P_5(m \geq 2) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5);$

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times$$

$$\times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9} = \frac{40}{243} \approx 0,1646;$$

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 5 \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{2}{3} =$$

$$= \frac{10}{243} \approx 0,0412;$$

$$P_5(5) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} \approx 0,0041;$$

$$P_5(m \geq 2) = 0,3292 + 0,1646 + 0,0412 + 0,0041 = 0,5291;$$

д) $P_5(m > 2) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 0,1646 + 0,0412 + 0,0041 = 0,2099;$

е) $P_5(m \leq 2) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = 0,1317 + 0,3292 + 0,3292 = 0,7901;$

$$P_5(1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{16}{81} = \frac{80}{243} \approx 0,3292;$$

є) $P_5(m < 2) = P_5(0) + P_5(1) = 0,1317 + 0,3292 = 0,4609;$

ж) $P_5(2 \leq m \leq 4) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) \approx 0,3292 + 0,1646 + 0,0412 = 0,535$;

з) $P_5(1 \leq m \leq 5) = 1 - P_5(0) \approx 1 - 0,1317 = 0,8683$.

Відповідь. а) 0,3292; б) 0,004; в) 0,1317; г) 0,5291; д) 0,2099; е) 0,7901; є) 0,4609; ж) 0,535; з) 0,8683.

2. Найімовірніше число появи події. В n незалежних повторних випробуваннях подія A може відбутися або 0, або 1, або 2, ..., або $n-1$, або n разів. Відповідні ймовірності для кожної частоти настання події A можна знайти за формулою (3.1). Частота m_0 настання події A, якій відповідає найбільша ймовірність, називається **найімовірнішим числом появи події**. Воно визначається за формулою:

$$np - q \leq m_0 \leq np + p. \tag{3.2}$$

Різниця між правою й лівою частинами цієї нерівності дорівнює одиниці. При цьому:

1) якщо число $np - q$ - ціле, то m_0 має два значення: $np - q$ і $np + p$;

2) якщо число $np - q$ - дробове, то m_0 має тільки одне значення;

3) якщо число np - ціле, то $m_0 = np$.

Приклад 3. Імовірність появи події A в кожному з n незалежних випробувань дорівнює 0,7. Скільки таких випробувань потрібно виконати, щоб найімовірніша частота появи події A в цих випробуваннях дорівнювала 20?

Розв'язування. За умовою $p = 0,7$, тому $q = 0,3$. Найімовірніша частота появи події A в проведених випробуваннях $m_0 = 20$. Потрібно знайти n. Підставивши дані значення у формулу, маємо $0,7 \cdot n - 0,3 \leq 20 \leq 0,7 \cdot n + 0,7$.

Дана подвійна нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 0,7 \cdot n - 0,3 \leq 20; \\ 0,7 \cdot n + 0,7 \geq 20; \end{cases}$$

$$\begin{cases} n \leq 29; \\ n \geq 27,57. \end{cases}$$

Отже, необхідно провести 28 або 29 випробувань.

Відповідь. 28 або 29.

3. Локальна теорема Лапласа. Якщо число випробувань n досить велике, а імовірність p настання випадкової події A в кожному з випробувань незмінна (причому $0 < p < 1$), то ймовірність того, що в n випробуваннях подія відбудеться m разів, знаходиться за наближеною формулою

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{3.3}$$

де $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ – функція Гаусса, $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$.

Формула (3.3) називається **локальною формулою Лапласа**. Вона дає тим точніший результат, чим більше число n. Природно виникає питання про величину похибки при використанні формули (3.3) в конкретних задачах. Практично можна вважати, що локальна формула Лапласа дає добре наближення, якщо $npq > 9$ (ця умова виконується при $n > 36$). Якщо ж вимоги до точності вищі, то слід вимагати виконання нерівності $npq \geq 25$ (при $n \geq 100$).

Графік функції Гаусса зображено на рис. 3.1:

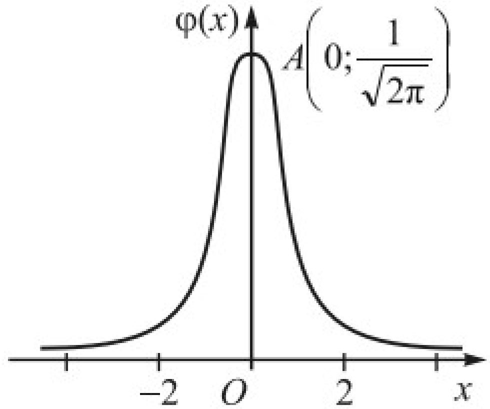


Рис. 3.1

Функція Гаусса парна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

У спеціальних таблицях (див. додатки, табл. 1) подані значення функції $\varphi(x)$ лише для аргументів $0 \leq x < 4$. Для інших значень аргументів беремо: $\varphi(x \geq 4) = 0$ або використовуємо властивість $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Приклад 3. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,51. Знайти ймовірність того, що серед 100 немовлят виявиться 50 хлопчиків.

Розв'язування. Нехай подія A_1 – народження хлопчика. Тоді ймовірності: $P(A) = p = 0,51$ і $P(\bar{A}) = q = 0,49$, $m = 50$, $n = 100$.

Скористаємося формулою Муавра–Лапласа. Для цього обчислимо

$$x = \frac{(50 - 100 \cdot 0,51)}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} = \frac{(50 - 51)}{5} = -\frac{1}{5}.$$

За таблицею значень функції $\varphi(x)$ знайдемо

$$\varphi\left(-\frac{1}{5}\right) = \varphi\left(\frac{1}{5}\right) = \varphi(0,2) \approx 0,3910;$$

$$P_{100}(50) \approx \frac{0,391}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx 0,0782.$$

Відповідь. 0,0782.

4. Формула Пуассона. У випадку великої кількості випробувань n і малоімовірної події A (тобто такої події, ймовірність настання якої значно менша за 0,1) нерівність $npq > 9$ може не виконуватися, а отже, похибка при використанні формули (3.3) буде дуже великою. У таких випадках слід скористатися іншим наближенням правої частини формули Бернуллі:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}, \tag{3.4}$$

де $\lambda = np$.

Зауважимо, що формулою Пуассона (3.4) можна скористатися і для обчислення числа невідбуття події A, якщо $q \ll 0,1$, а nq – невелике.

Якщо $n \in [10; 20]$, то формула Пуассона використовується для грубих прикидочних обчислень, при $\lambda \in (0; 2)$ для $n = 10$ і $\lambda \in (0; 3)$ для $n = 20$; у іншому випадку слід користуватися локальною формулою Лапласа.

Якщо $n \in (20; 100)$, то формулу Пуассона рекомендується використовувати для прикладних економічних та інженерних розрахунків; при цьому для λ повинні виконуватися включення $\lambda \in (0; 3)$ $(n = 20)$ і $\lambda \in (0; 5)$ $(n = 100)$.

Якщо ж $n \in (100; 1000)$, то практично завжди в економічних та інженерних розрахунках можна обмежитися формулою Пуассона, якщо λ знаходиться в інтервалах $(0; 5)$ $(n = 100)$, $(0; 10)$ $(n = 1000)$.

Значення функції $\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$ для деяких m та λ наведені в додатку.

5. Інтегральна формула Лапласа. Імовірність того, що подія A в n незалежних повторних випробуваннях, в кожному з яких A відбувається з імовірністю p, відбудеться від m_1 до m_2 разів, подається формулою:

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{3.5}$$

де $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ – функція Лапласа; $x_1 = \dfrac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функція Лапласа протабульована і її значення наведені в додатку.

При користуванні цією таблицею потрібно враховувати такі властивості функції Лапласа:
1) $\Phi(x)$ визначена для всіх $x \in R$;
2) $\Phi(x)$ непарна функція ($\Phi(-x) = -\Phi(x)$);
3) $\Phi(x)$ монотонно зростає для всіх $x \in R$, при цьому $y = -0,5$ – лівостороння асимптота, а $y = 0,5$ – правостороння;
4) швидкість зростання $\Phi(x)$ на проміжку $[0;5]$ дуже висока (зокрема $\Phi(5) = 0,499997$), тому для всіх $x > 5$ з мізерною похибкою $\Phi(x) \approx 0,5$.

Точність інтегральної формули Лапласа тим більша, чим більше випробувань n. Як і у випадку локальної, **інтегральна формула** дає добрі **наближення, якщо** $npq > 9$. Якщо ж вимоги до точності значно вищі, то потрібно вимагати виконання нерівності $npq \geq 25$.

Приклад 4. Монету кидаємо 10000 разів. Яка ймовірність того, що кількість падінь гербом угору буде між 4900 та 5050?

Розв'язування. Маємо схему незалежних випробувань Бернуллі, де $n = 10000$; $p = q = 0,5$; $x_1 = 4900$; $x_2 = 5050$. Отже, $x_1 = \dfrac{(4900 - 10000 \cdot 0,5)}{\sqrt{10000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = -2$, $x_2 = \dfrac{(5050 - 10000 \cdot 0,5)}{\sqrt{10000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 1$. $P_{10000}(4900; 5050) \approx \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) = 0,3413 + 0,4772 = 0,8185$.

Відповідь. 0,8185.

Приклад 5. 40 % виборців великого міста голосують за кандидата A. Навмання відібрано 25 виборців. Яка ймовірність того, що більшість з них голосують за A?

Розв'язування. Маємо схему незалежних випробувань Бернуллі, де $n = 25$; $p = 0,4$, $q = 0,6$; $x_1 = 13$; $x_2 = 25$. Отже, $x_1 = \dfrac{(13 - 25 \cdot 0,4)}{\sqrt{25 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = 1,22$, $x_2 = \dfrac{(25 - 25 \cdot 0,4)}{\sqrt{25 \cdot 0,4 \cdot 0,6}} = 6,12$. $P_{25}(13;25) \approx \Phi(6,12) - \Phi(1,22) = 0,5 - 0,3888 = 0,1112$.

Відповідь. 0,1112.

Імовірність відхилення відносної частоти події від її ймовірності. Якщо імовірність p настання випадкової події A в кожному з n незалежних випробувань стала, а кількість випробувань досить велика, то ймовірність того, що відхилення відносної частоти $\dfrac{m}{n}$ події A від її імовірності p за абсолютною величиною не перевищить деякого заданого числа $\varepsilon > 0$, знаходиться за формулою:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \tag{3.6}$$

Приклад 6. Імовірність браку серед 475 виробів дорівнює 0,05. Знайти з імовірністю 0,9426 межі, в яких перебуває кількість n бракованих виробів серед перевірених.

Розв'язування. $n = 475$, $p = 0,05$, $q = 0,95$. Потрібно знайти n.

$$P\left(\left|\frac{m}{475} - 0,05\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{475}{0,05 \cdot 0,95}}\right) = 0,9426.$$

Спочатку треба знайти

$$\varepsilon : 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{475}{0,05 \cdot 0,95}}\right) = 0,9426; \quad \Phi(100\varepsilon) = 0,4713.$$

За таблицею знаходимо: $100\varepsilon = 1,9$; $\varepsilon = 0,019$.
Отже, $\left|\dfrac{m}{475} - 0,05\right| \leq 0,019; -0,019 \leq \dfrac{m}{475} - 0,05 \leq 0,019$; $14,725 \leq m \leq 32,775$.

Відповідь. $15 \leq m \leq 32$.

Приклади розв'язування задач

1. Імовірність влучення в мішень при одному пострілі дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що в серії з чотирьох пострілів буде: а) хоча б одне влучення; б) не менше трьох влучень; в) не більше одного влучення.

Розв'язування. Маємо $n = 4$, $p = 0,8$, $q = 0,2$. а) Знайдемо ймовірність протилежної події – в серії з чотирьох пострілів жодного влучення в мішень:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0,2^4 = 0,0016.$$

Звідси знаходимо ймовірність хоча б одного влучення:

$$P_4(k \geq 1) = 1 - 0,0016 = 0,9984.$$

б) Подія B полягає в тому, що в серії з 4 пострілів було не менше трьох влучень. Це означає, що було або три влучення (подія C), або чотири (подія D), тобто $B = C + D$. Звідси $P(B) = P(C) + P(D)$, отже

$$P_4(k \geq 3) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 q + C_4^4 p^4 q^0 =$$

$$= 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,8^4 = 0,8192.$$

в) Аналогічно знаходиться ймовірність влучення у мішень не більше одного разу:

$$P_4(k \leq 1) = P_4(0) + P_4(1) = 0,0016 + C_4^1 p^1 q^3 =$$

$$= 0,0016 + 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,2576.$$

Відповідь. а) 0,9984; б) 0,8192; в) 0,2576.

2. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 від загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніше число довгих волокон серед них дорівнювало 40?

Розв'язування. Скористаємося формулою, за якою визначається найімовірніше число відбуття події: $np - q \leq m_0 \leq np + p$.

Підставимо сюди значення відомих величин:

$$0,6n - 0,4 \leq 40 \leq 0,6n + 0,6; \quad -0,4 - 40 \leq -0,6n \leq 0,6 - 40,$$

$$\frac{39,4}{0,6} \leq n \leq \frac{40,4}{0,6}, \quad 65,7 \leq n \leq 67,3.$$

Отже, $n = 66$ або $n = 67$.

Відповідь. $n = 66$ або $n = 67$.

3. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться точно 70 разів у 243 дослідах, якщо ймовірність появи події в кожному досліді дорівнює 0,25.

Розв'язування. За умовою $n = 243$, $k = 70$, $p = 0,25$, $q = 0,75$. Оскільки $n = 243$ – достатньо велике число, то скористаємось локальною теоремою Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

де $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Знайдемо значення x:

$$x = \frac{70 - 243 \cdot 0,25}{\sqrt{243 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} = \frac{3,25}{6,75} = 1,73.$$

За таблицею знаходимо: $\varphi(1,73) = 0,0893$. Шукана ймовірність

$$P_{243}(70) = \frac{1}{6,75} \cdot 0,0893 = 0,0132.$$

Відповідь. 0,0132.

4. Зерна пшениці проростають з імовірністю 0,95. Знайти ймовірність того, що із 2000 посіяних зерен зійде від 1880 до 1920.

Розв'язування. Подія A – "зерно пшениці зійшло". Її ймовірність $p = 0,95$, кількість незалежних випробувань $n = 2000$.

Застосуємо формулу інтегральної теореми Лапласа:

$$P_n(m_1, m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1).$$

Маємо $x_1 = \dfrac{1880 - 2000 \cdot 0,95}{\sqrt{2000 \cdot 0,95 \cdot 0,05}} \approx -1,03$, $x_2 = \dfrac{1920 - 1900}{\sqrt{95}} \approx 2,06$;

$$P_{2000}(1880; 1920) = \Phi(2,06) - \Phi(-1,03) = \Phi(2,06) + \Phi(1,03) =$$

$$= 0,4803 + 0,3485 = 0,8288.$$

(Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int\limits_0^x e^{-t^2/2} dt$ знаходимо у відповідній таблиці).

Відповідь. 0,8288.

5. Відділ технічного контролю перевіряє на стандартність 900 деталей. Імовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,9. Знайти з ймовірністю 0,9544 межі, в яких буде знаходитися число m стандартних деталей серед перевірених.

Розв'язування. За умовою $n = 900$; $p = 0,9$, $q = 0,1$, або $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{900}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 0,9544$, $\Phi(100\varepsilon) = 0,4772$. За таблицею знаходимо, що значення функції 0,4772 відповідає аргументу 2. Отже, $100\varepsilon = 2$. Звідси $\varepsilon = 0,02$.

Отже, з ймовірністю 0,9544 відхилення відносної частоти числа стандартних деталей від ймовірності 0,9 задовольняє нерівність

$$\left|\frac{m}{900} - 0,9\right| \leq 0,02$$

або

$$0,88 \leq \frac{m}{900} \leq 0,92.$$

Отже, $792 \leq m \leq 828$.

Відповідь. $792 \leq m \leq 828$.

6. Завод відправив на базу 1000 доброякісних виробів. За час перебування в дорозі кожен виріб може бути пошкоджено з імовірністю 0,003. Знайти ймовірність того, що на базу прибудуть 3 пошкоджені вироби.

Розв'язування. Якщо подія A – "виріб пошкоджено", то її ймовірність $p = 0,003$. Розглядається схема незалежних випробувань, $n = 1000$. Імовірність події A досить мала, тому задачу розв'яжемо за допомогою формули Пуассона:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}.$$

Тут $\lambda = np = 1000 \cdot 0,003 = 3$, $P_{1000}(3) = \dfrac{3^3}{3!}e^{-3} \approx 0,229.$

Відповідь. $\approx 0,229$.

Задачі для самостійного розв'язування

○ **1.** У сім'ї п'ять дітей. Знайти ймовірність того, що серед цих дітей: а) два хлопчики; б) не більше двох хлопчиків; в) більше двох хлопчиків; г) не менше двох і не більше трьох хлопчиків. Імовірність народження хлопчика 0,51.

Відповідь. а) 0,31; б) 0,48; в) 0,52; г) 0,62.

○ **2.** Знайти ймовірність того, що подія A настане 1400 разів у 2400 дослідах, якщо ймовірність появи цієї події в кожному досліді дорівнює 0,6.

Відповідь. $P_{2400}(1400) = 0,0041$.

3 (д/з). Імовірність появи події в кожному із 2100 незалежних дослідів дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія настане: а) не менше 1470 і не більше 1500 разів; б) не менше 1470 разів; в) не більше 1469 разів.

Відповідь: а) 0,4236; б) 0,5; в) 0,5.

○ **4.** Французький учений Бюффон (XVIII ст.) кинув монету 4040 разів, причому герб з'явився 2048 разів. Знайти ймовірність того, що при повторенні досліду Бюффона відносна частота появи герба відхилиться від імовірності появи герба за абсолютною величиною не більше, ніж у дослідах Бюффона.

5. Імовірність виходу з ладу конденсатора дорівнює $\dfrac{3}{11}$. Навмання беруть 10 конденсаторів і вмикають паралельно в електричну мережу. Знайти найімовірніше число m_0 конденсаторів, які вийдуть із ладу, і обчислити відповідну ймовірність.

Відповідь. $m_0 = 2$; $P_{10}(2) = 0,3019897$.

○ **6.** Відомо, що серед виробів заводу стандартні деталі становлять у середньому 85%. Скільки необхідно взяти цих деталей, щоб $m_0 = 65$?

Відповідь. $\dfrac{m_0 - p}{n} \le n \le \dfrac{m_0 + q}{p}$; $n = 76$.

7 (д/з). Імовірність того, що покупець, який завітав до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює в середньому 0,1. Яка ймовірність того, що із 900 покупців, що завітали до магазину, здійснять покупку: 1) 90 покупців; 2) від 100 до 180 покупців?

Відповідь. 1) 0,0443222, 2) 0,1335.

8 (с/р). В яких межах має перебувати ймовірність появи випадкової події в одному експерименті, коли відомо, що в результаті проведення $n = 600$ незалежних експериментів за схемою Бернуллі $m_0 = 60$?

Відповідь. $\dfrac{m_0}{n+1} \le P \le \dfrac{m_0+1}{n+1} \longrightarrow \dfrac{60}{601} \le P \le \dfrac{61}{601}$.

9 (д/з). У партії однотипних деталей стандартні становлять 82%. Навмання з партії беруть 400 деталей. Яка ймовірність того, що серед них стандартних буде: 1) 355; 2) від 300 до 355. Знайти найімовірніше число появи стандартних деталей m_0 і обчислити відповідну ймовірність.

Відповідь. 1) $\approx 0,0001041$; 2) $\approx 0,000071$; $m_0 = 328$; $P_{400}(328) \approx 0,052$.

○ **10.** Імовірність виходу із ладу виробу під час його випробування на надійність дорівнює 0,05. Яка ймовірність того, що під час випробувань 900 виробів із ладу вийдуть: 1) 30; 2) не більш як 30.

Відповідь. 1) 0,0044; 2) 0,0113.

○ **11.** Імовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів за схемою Бернуллі є величиною сталою і дорівнює $p = 0,8$. Скільки необхідно провести таких експериментів, щоб імовірність появи випадкової події $m > 900$ дорівнювала 0,99?

Відповідь. $n \approx 484416 \longrightarrow \Phi\left(\dfrac{n-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{900-np}{\sqrt{npq}}\right) = 0,99.$

12 (с/р). Телефонна станція обслуговує 1000 абонентів. Імовірність того, що протягом години абонент розмовлятиме по телефону, дорівнює в середньому 0,002. Яка ймовірність того, що протягом години одночасно розмовлятимуть по телефону: 1) 5 абонентів; 2) не більш як 5?

Відповідь. 1) 0,036089; 2) 0,983437.

○ **13.** Імовірність появи випадкової події в кожній зі 100 незалежних спроб є величиною сталою і дорівнює 0,3. З якою ймовірністю можна стверджувати, що відносна частота появи випадкової події при цих спробах міститься в межах [0,2; 0,4]?

Відповідь. 0,98.

○ **14.** Імовірність того, що виготовлена на заводі електролампочка при вмиканні її в електромережу перегорить через певний час є величиною сталою і дорівнює 0,02. Скільки необхідно взяти таких електролампочок, щоб імовірність того, що відхилення відносної частоти електролампочок, що перегорить, від імовірності 0,02, взяте по абсолютному значенню, не перевищувала величини 0,001, дорівнювала б 0,999.

Відповідь. $n \approx 226576$.

15. Імовірність виготовити на заводі виріб найвищої якості дорівнює 0,85. Навмання беруть 700 виробів. Визначити межі, в яких перебуватиме відносна частота появи виробів найвищої якості з імовірністю 0,999.

Відповідь. $0,804 < W(A) < 0,896$.

○ **16.** Імовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою і дорівнює p. Яка ймовірність того, що при цьому виконуватиметься нерівність $n - 1,5\sqrt{npq} \le m \le np + 1,5\sqrt{npq}$?

Відповідь. 0,8664.

17 (с/р). Завод відправив на базу 9000 доброякісних виробів. Імовірність пошкодження кожного виробу під час транспортування на базу становить 0,0001. Знайти ймовірність того, що серед 9000 виробів при транспортуванні буде пошкоджено: 1) 3 вироби; 2) не більш як 3.

Відповідь. 1) 0,49398; 2) 0,986642.

18 (д/з). Частка діабетиків у певній місцевості становить у середньому $0,2\%$. Навмання було обстежено 4000 осіб. Яка ймовірність того, що серед них діабетиків буде: 1) 4 особи; 2) від 3 до 6 осіб; 3) не більш як 4 особи.

Відповідь. 1) 0,133737; 2) 0,300548; 3) 0,154963.

○ **19.** Імовірність виявити помилку на сторінці книжки дорівнює 0,001. Яка ймовірність у результаті перевірки книжки на 1000 сторінок виявити помилку: 1) на 5 сторінках; 2) не більш як на 5 сторінках?

Відповідь. 1) 0,003066; 2) 0,999405.

○ **20.** У водойму випустили 100 помічених риб. Згодом із неї було виловлено 400 рибин серед яких виявилося 5 мічених. Визначити з імовірністю 0,9 кількість рибин у цій водоймі.

Відповідь. $P(|W(A)-p| < \varepsilon) = 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{nq}}) \longrightarrow P(|\frac{5}{400}-\frac{100}{N}| <$

$\varepsilon) \approx 2\Phi(\varepsilon\sqrt{\frac{400}{\frac{100}{N}\frac{N-100}{N}}}) \approx 0,9 \longrightarrow -66\sqrt{N-100} < N - 8000 < 66\sqrt{N-10} \longrightarrow P(3919 \leq N \leq 16432) \approx 0,9$.

21 (с/р). Візуально спостерігати в заданому пункті штучний супутник Землі можна з імовірністю $p = 0,1$ (хмарність відсутня) щоразу, коли він пролітає над цим пунктом. Скільки разів має пролетіти супутник над пунктом спостереження, щоб з імовірністю, не меншою за 0,9975, удалося здійснити принаймні 5 спостережень?

Відповідь. $P(m \geq 5) \approx \Phi(3\sqrt{n}) + \Phi(\dfrac{n-50}{3\sqrt{n}}) \approx 0,9975$; $n > 144$.

Тема 4. Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин

Розглянемо такий простір Ω елементарних подій, в якому кожній елементарній події $\omega_i \in \Omega$ відповідає одне й лише одне число x або набір чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тобто на множині Ω визначена певна функція, яка кожній елементарній події ω_i ставить у відповідність певний елемент одновимірного простору $\mathbb{R}^1$ або n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$. Цю функцію називають **випадковою величиною**. Якщо множина можливих значень випадкової величини скінченна або зліченна, то таку величину називають **дискретною**. У противному разі її називають **неперервною**.

Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їй імовірностями, називають **законом розподілу випадкової величини**.

Закони розподілу дискретних випадкових величин можна задавати в табличній формі, аналітичній або графічній.

Найпростішою формою подання закону розподілу дискретної випадкової величини є **ряд розподілу** – прямокутна таблиця, першим рядком якої є можливі значення, другим – відповідні їм імовірності $p_i = P(X = x_i)$.

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	Σ
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	1

Для наочності ряд розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити також графічно. Таблиця у прямокутній системі координат задає набір точок $(x_i; p_i)$, $i = \overline{1, n}$: на осі абсцис відкладають можливі значення x_i, а на осі ординат – відповідні їм імовірності. Здобуті точки з'єднуються ламаною лінією (рис. 4.1). Одержана ламана називається **многокутником розподілу** випадкової величини.

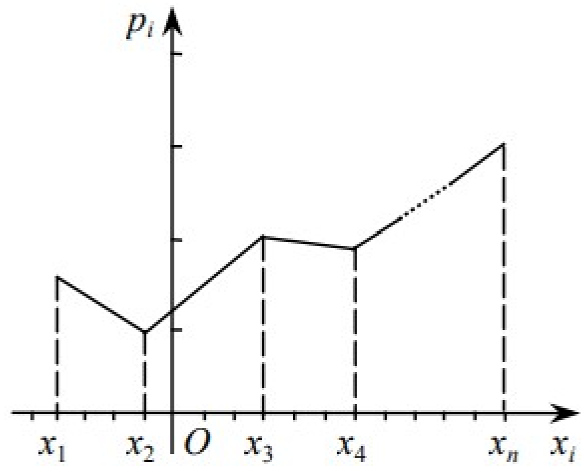


Рис. 4.1

Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є **функція розподілу** $F(x) = P(X < x)$, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$. Для дискретних величин $F(x) = \sum_{x_i<x} p(x_i)$.

Функція розподілу – неспадна, неперервна зліва, $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$. Для довільних α і β $P(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Якщо X – неперервна випадкова величина, то $F(x)$ – функція неперервна й диференційовна; її похідна $F'(x) = f(x)$ називається **щільністю розподілу ймовірностей**. При цьому $f(x)$ – невід'ємна функція, для якої $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, $P(\alpha \le X \le \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Приклад 1. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

$X = x_i$	-4	-1	2	6	9	13
$P(X = x_i) = p_i$	0,1	0,2	0,1	0,3	0,1	0,2

Побудувати $F(x)$ та її графік.

Розв'язування. Згідно з властивостями $F(x)$, дістаємо наведені далі співвідношення:

1) $F(-4) = P(X < -4) = 0$;

2) $F(-1) = P(X < -1) = P(X = -4) = 0,1$;

3) $F(2) = P(X < 2) = P(X = -4) + P(X = -1) = 0,1 + 0,2 = 0,3$;

4) $F(6) = P(X < 6) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) = 0,1 + 0,2 + 0,1 = 0,4$;

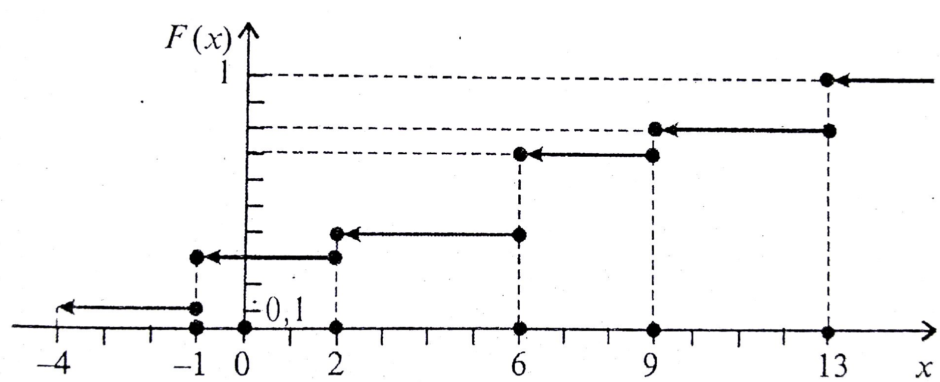
5) $F(9) = P(X < 9) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,7$;

6) $F(13) = P(X < 13) = P(X = -4) + P(X = -1) + P(X = 2) + P(X = 6) + P(X = 9) = 0,1 + 0,2 + 0,1 + 0,3 + 0,1 = 0,8$;

7) $F(x)|_{x>13} = P(X < x) = 1$, оскільки $\max X = 13$. Компактно $F(x)$ можна записати в такій формі:

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0, & x \le -4; \\ 0,1, & -4 < x \le -1; \\ 0,3, & -1 < x \le 2; \\ 0,4, & 2 < x \le 6; \\ 0,7, & 6 < x \le 9; \\ 0,8, & 9 < x \le 13; \\ 1, & x > 13. \end{cases}$$

Графік функції $F(x)$ зображено на рисунку:



Приклад 2. Закон розподілу неперервної випадкової величини X такий:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \dfrac{(x+1)^3}{64}, & -1 < x \leq 3; \\ 1, & x < 3. \end{cases}$$

Знайти $f(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P(0 < X < 2)$.

Розв'язування.

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \dfrac{3(x+1)^2}{64}, & -1 < x \leq 3; \\ 0, & x < 3. \end{cases}$$

Графіки функцій $F(x)$, $f(x)$ зображено відповідно на рис. 4.2 і 4.3.

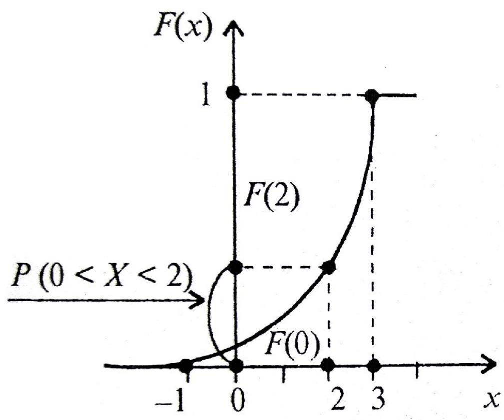


Рис. 4.2

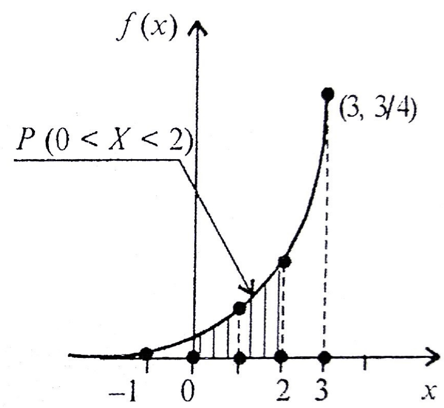


Рис. 4.3

Обчислимо імовірність події $0 < X < 2$:

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32};$$

з іншого боку

$$P(0 < X < 2) = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 \frac{3}{64}(x+1)^2 dx =$$

$$= \frac{3}{64}\int\limits_0^2 (x+1)^2 dx = \frac{3}{64}\frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{27}{64} - \frac{1}{64} = \frac{26}{64} = \frac{13}{32}.$$

Відповідь. $\frac{13}{32}$.

Приклад 3. Закон розподілу неперервної випадкової величини X задано у вигляді:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}\sin x, & 0 < x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти $F(x)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$. Обчислити $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язування. Оскільки $x \in (0, \pi]$, то

$$F(x) = \int\limits_0^x f(t)dt = \int\limits_0^x \frac{1}{2}\sin t dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \sin t dt = \frac{1}{2}\left(-\cos t|_0^x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos x + 1) = \frac{1-\cos x}{2}.$$

Отже, функція розподілу ймовірностей буде така:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0 < x \le \pi; \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображені відповідно на рис. 4.4 і 4.5:

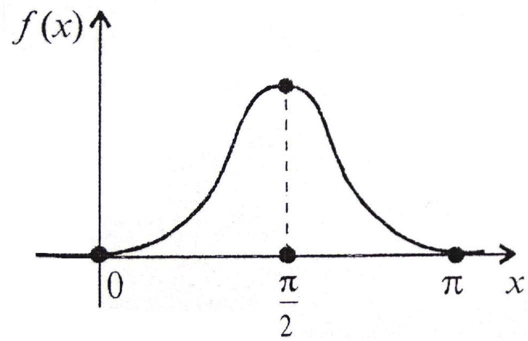


Рис. 4.4

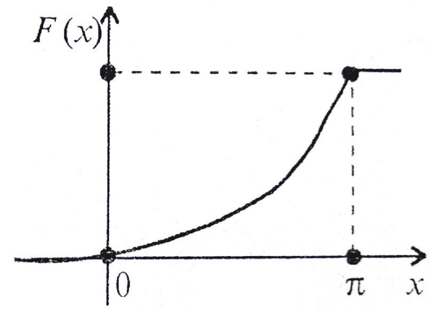


Рис. 4.5

Імовірність події $\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}$ обчислюємо за формулою $P(\alpha < x < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Відповідь. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Приклад 4. За заданою щільністю ймовірностей маємо:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ a\sqrt{x+2}, & -2 < x \le 7; \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

Знайти значення сталої a та функцію $F(x)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$, $F(x)$.

Розв'язування. Значення сталої a визначаємо з умови нормування $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1$:

$$\int\limits_{-2}^{7} f(x)dx = 1 \longrightarrow \int\limits_{-2}^{7} a\sqrt{x+2}dx = 1 \longrightarrow a\int\limits_{-2}^{7} \sqrt{x+2}dx = 1,$$

$$a = \frac{1}{\int\limits_{-2}^{7} \sqrt{x+2}dx}.$$

Тут $\int\limits_{-2}^{7} \sqrt{x+2}dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}\Big|_{-2}^{7} = \frac{2}{3}(\sqrt{9^3} - \sqrt{0}) = \frac{2}{3} \cdot 27 = 18.$
Отже,

$$a = \frac{1}{18}.$$

При знайденому значенні a щільність імовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \frac{1}{18}\sqrt{x+2}, & -2 < x \le 7; \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

Функція розподілу ймовірностей визначається так:

$$F(x) = \int\limits_{-2}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-2}^{x} \frac{1}{18}\sqrt{x+2}dx = \frac{1}{18}\int\limits_{-2}^{x} \sqrt{x+2}dx =$$

$$= \frac{1}{18}\frac{\sqrt{(x+2)^3}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-2}^{x} = \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}\Big|_{-2}^{x} = \frac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}.$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{1}{27}\sqrt{(x+2)^3}, & -2 < x \le 7; \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

Графіки функцій $f(x)$, $F(x)$ зображено відповідно на рис. 4.6 і 4.7:

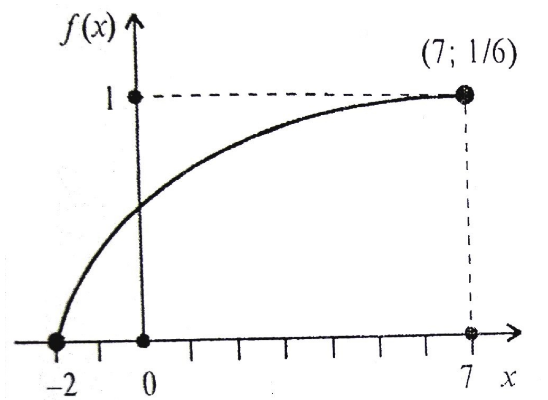


Рис. 4.6

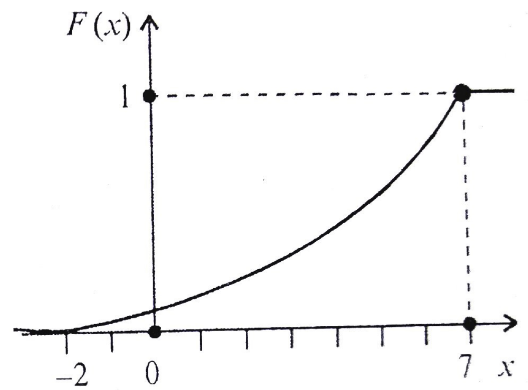


Рис. 4.7

Приклад 5. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0; \quad x < -a, \\ b + c \cdot \mathrm{arctg}\, \dfrac{x}{a}; \quad -a \le x \le a, \\ 1; \quad x > a. \end{cases}$$

Знайти: а) b і c; б) $f(x)$.

Розв'язування.

а) $0 \le F(x) \le 1$; $x \in [-a; a] \Rightarrow F(-a) = 0, F(a) = 1$. Обчислимо $F(-a)$, $F(a)$.

$$F(-a) = b + c \cdot \mathrm{arctg}(-1) = b - c \cdot \frac{\pi}{4}, F(a) = b + c \cdot \mathrm{arctg}\, 1 + c \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Оскільки $F(-a) = 0, F(a) = 1$, то $\begin{cases} b - \dfrac{\pi}{4} \cdot c = 0, \\ b + \dfrac{\pi}{4} \cdot c = 1, \end{cases}$ звідки $b = \dfrac{1}{2}$,

$c = \dfrac{2}{\pi}$. Отже, $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -a, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}, & -a \le x \le a, \\ 1, & x > a. \end{cases}$

б) Тоді $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0; & x < -a, \\ \dfrac{2a}{\pi\left(a^2 + x^2\right)}; & -a \le x \le a, \\ 0; & x > a. \end{cases}$

Відповідь. $b = \dfrac{1}{2}$; $c = \dfrac{2}{\pi}$; $f(x) = \begin{cases} 0; & x < -a, \\ \dfrac{2a}{\pi\left(a^2 + x^2\right)}; & -a \le x \le a, \\ 0; & x > a. \end{cases}$

Приклад 6. Графік щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ випадкової величини X зображено на рис. 4.8.

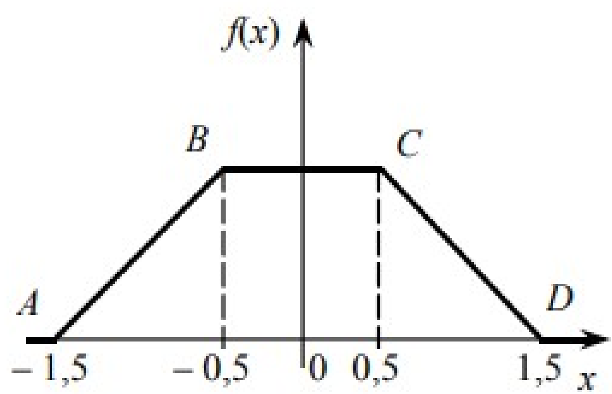


Рис. 4.8

Знайти аналітичний вираз для $f(x)$ при $x \in R$.

Розв'язування.

$S_{\text{трап.ABCD}} = 1; \quad S = \dfrac{BC + AD}{2}h = \dfrac{1+3}{2}h = 2h = 1 \Rightarrow h = \dfrac{1}{2},$

тому $B(-0,5; 0,5)$, $C(0,5; 0,5)$.

Складемо рівняння AB: $-1,5 < x \le -0,5$; $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$; $A(-1,5; 0)$, $B(-0,5; 0,5)$, $y = 0,5x + 0,75$ – рівняння AB;

складемо рівняння CD: $0,5 < x \leq 1,5$; $C(0,5;0,5)$, $D(1,5;0)$, $y = -0,5x + 0,75$ – рівняння CD.

Відповідь. $f(x) = \begin{cases} 0; & x \leq -1,5; \\ 0,5x + 0,75; & -1,5 < x \leq -0,5; \\ 0,5; & -0,5 < x \leq 0,5 \\ -0,5x + 0,75; & 0,5 < x \leq 1,5 \\ 0; & x > 1,5. \end{cases}$

Числові характеристики випадкових величин та їхні властивості

1. Математичним сподіванням, або середнім значенням $M(X)$ випадкової величини X, називається ряд $\sum\limits_i x_i p_i$ (якщо X – дискретна ВВ) або інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ (якщо X – неперервна ВВ), якщо вони абсолютно збіжні.

Властивості математичного сподівання:

1) $M(C) = C$, де C – довільна стала;

2) $M(C \cdot X) = C \cdot M(X)$;

3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;

4) $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, якщо X і Y – незалежні випадкові величини.

2. Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення цієї величини й визначається за формулою

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - M^2(X). \qquad (4.1)$$

Основні властивості дисперсії:

1) $D(X) \geq 0$;

2) $D(C) = 0$;

3) $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$;

4) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$, якщо випадкові величини незалежні.

Наслідок: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

3. Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається корінь квадратний із дисперсії:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \tag{4.2}$$

4. Початковий, центральний і абсолютний початковий моменти k-го порядку величини X визначаються за такими формулами відповідно:

$$\nu_k=M(X^k), \tag{4.3}$$

$$\mu_k=M[(X-M(X))^k], \tag{4.4}$$

$$\alpha_k=M(|X|^k). \tag{4.5}$$

5. Асиметрія закону розподілу випадкової величини визначається за формулою

$$A_s=\frac{\mu_3}{\sigma^3}. \tag{4.6}$$

6. Ексцес закону розподілу випадкової величини обчислюють за формулою

$$E_s=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3 \tag{4.7}$$

і використовують для характеристики гостровершинності чи пласковершинності кривої розподілу.

7. Мода та медіана випадкової величини.

Модою (Mo) дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи.

Модою для неперервної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає максимальне значення щільності ймовірності:

$$f(\mathrm{Mo})=\max.$$

Якщо випадкова величина має одну моду, то такий розподіл імовірностей називають *одномодальним*; якщо розподіл має дві моди - *двомодальним* тощо. Існують і такі розподіли, які не мають моди. Їх називають *антимодальними*.

Медіаною (Me) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконуються рівність імовірностей подій:

$$P(-\infty < X < \mathrm{Me}) = P(\mathrm{Me} < X < \infty) \longrightarrow F(\mathrm{Me}) - F(-\infty) =$$
$$= F(\infty) - F(\mathrm{Me}) \longrightarrow F(\mathrm{Me}) = 1 - F(\mathrm{Me}) \longrightarrow 2F(\mathrm{Me}) = 1 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow F(\mathrm{Me}) = 0,5.$$

Отже, медіану визначають із рівняння $F(\mathrm{Me}) = 0,5$.

Приклад 7. Задано ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	-2	-1	0	4	8	10
p_i	0,4	0,1	0,1	0,3	0,05	0,05

Обчислити: моду, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію, ексцес. Знайти функцію розподілу $F(x)$ та побудувати її графік.

Розв'язування. $\mathrm{Mo} = -2$, оскільки найбільшій імовірності даного розподілу $p = 0,4$ відповідає $x = -2$.

Функція розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ 0,4, & -2 < x \le -1, \\ 0,5 & -1 < x \le 0, \\ 0,6, & 0 < x \le 4, \\ 0,9 & 4 < x \le 8, \\ 0,95, & 8 < x \le 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

Графік функції розподілу наведено на рис. 4.9.

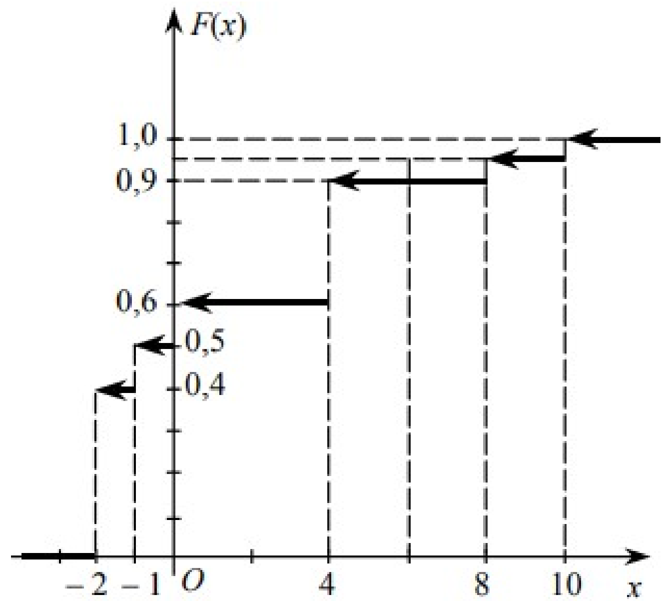


Рис. 4.9

Математичне сподівання:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = -2 \cdot 0,4 - 1 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,3 + 8 \cdot 0,05 + 10 \cdot 0,05 = 1,2.$$

Дисперсія:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - M^2(X) = 14,7 - 1,2^2 = 14,7 - 1,44 = 13,26,$$

де

$$M\left(X^2\right) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = (-2)^2 \cdot 0,4 + (-1)^2 \cdot 0,1 + 0^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,3 + 8^2 \cdot 0,05 +$$

$$+10^2 \cdot 0,05 = 14,7.$$

Середнє квадратичне відхилення: $\sigma(X) = \sqrt{13,26} \approx 3,64.$

Асиметрія: $\mathrm{As} = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$, де

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{6} (x_i - 1,2)^3 \cdot p_i = (-2 - 1,2)^3 \cdot 0,4 + (-1 - 1,2)^3 \cdot 0,1 +$$

$$+(0 - 1,2)^3 \cdot 0,1 + (4 - 1,2)^3 \cdot 0,3 + (8 - 1,2)^3 \cdot 0,05 +$$

$$+(10-1,2)^3 \cdot 0,05 \approx 42,0456.$$

Отже, $\mathrm{As} = \dfrac{42,0456}{3,64^3} \approx 0,8718.$

Ексцес: $\mathrm{Es} = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$

Обчислимо μ_4:

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{6} (x_i - 1,2)^4 \cdot p_i = (-2-1,2)^4 \cdot 0,4 + (-1-1,2)^4 \cdot 0,1+$$

$$+(0-1,2)^4 \cdot 0,1 + (4-1,2)^4 \cdot 0,3 + (8-1,2)^4 \cdot 0,05+$$

$$+(10-1,2)^4 \cdot 0,05 \approx 469,608.$$

Тоді $\mathrm{Es} = \dfrac{469,608}{3,64^4} - 3 \approx -0,325.$

Відповідь. $\mathrm{Mo} = -2$, $M(X) = 1,2$, $D(X) = 13,26$, $\sigma(X) \approx 3,64$, $\mathrm{As} \approx 0,8718$, $\mathrm{Es} \approx -0,325$.

Приклад 8. Випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \notin \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \cos x, \text{ якщо } x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Знайти числові характеристики: моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію, ексцес.

Розв'язування. На проміжку $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ щільність розподілу має максимальне значення для $x = 0$ ($\cos 0 = 1$), тому $\mathrm{Mo} = 0$.

Медіану знаходять з рівняння $F(\mathrm{Me}) = 0,5$. Оскільки $F(\mathrm{Me}) = P(X < \mathrm{Me})$, то

$$F(\mathrm{Me}) = \int\limits_{-\infty}^{\mathrm{Me}} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\mathrm{Me}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\mathrm{Me}} = \sin \mathrm{Me}.$$

Отже, $\sin \mathrm{Me} = 0,5$ і $\mathrm{Me} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, тому $\mathrm{Me} = \frac{\pi}{6}$.

Математичне сподівання: $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$;

$$M(X) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x dx = \begin{bmatrix} u = x, \\ du = dx, \\ dv = \cos x dx, \\ v = \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= x \cdot \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57.$$

Дисперсія:

$$D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (0,57)^2 =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cdot \cos x dx - 0,3249 = \begin{bmatrix} u = x^2, \\ du = 2x dx, \\ dv = \cos x dx, \\ v = \sin x \end{bmatrix} = x^2 \cdot \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx - 0,3249 = \begin{bmatrix} u = x, \\ du = dx, \\ dv = \sin x dx, \\ v = -\cos x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - 2\left(-x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right) - 0,3249 = \frac{\pi^2}{4} - 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-0,3249 = \frac{\pi^2}{4} - 2 - 0,3249 \approx 0,4649 - 0,3249 = 0,14.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{0,14} \approx 0,37$.

Асиметрія $\mathrm{As} = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$. Обчислимо μ_3 за формулою:

$\mu_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^3 \cdot f(x)dx$. Маємо:

$$\mu_3 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - 0,57)^3 f(x)dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} (x - 0,57)^3 \cos x dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(x^3 - 3 \cdot 0,57x^2 + 3 \cdot x \cdot 0,57^2 - 0,57^3\right) \cos x dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx - \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx + 0,9747 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx -$$

$$-0,185193 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx - 1,71 \cdot 0,4649 + 0,9747 \cdot 0,57 -$$

$$- 0,185193 \cdot \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx - 0,794979 + 0,555579 - 0,185193 =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx - 0,424593 \approx 0,0253,$$

де

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx = \begin{bmatrix} u = x^3, \\ du = 3x^2 dx, \\ dv = \cos x dx, \\ v = \sin x \end{bmatrix} = x^3 \cdot \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3 \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x^2, \\ du = 2xdx, \\ dv = \sin x dx, \\ v = -\cos x \end{bmatrix} = \frac{\pi^3}{8} - 3\left(- x^2 \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \right) =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, \\ du = dx, \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{bmatrix} = \frac{\pi^3}{8} - 6\left(x \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx \right) =$$

$$= \frac{\pi^3}{8} - 3\pi + 6 \approx 0,449893.$$

Отже, $\mathrm{As} = \dfrac{0,0253}{0,37^3} \approx 0,45.$

Ексцес $\mathrm{Es} = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Обчисливши μ_4 за формулою

$\mu_4 = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^4 \cdot f(x) dx$, дістанемо

$$\mu_4 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x - 0,57)^4 \cdot \cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^4 - 4 \cdot x^3 \cdot 0,57 + 6 \cdot x^2 \cdot 0,57^2 - \right.$$

$$\left. -4 \cdot x \cdot 0,57^3 + 0,57^4\right) \cdot \cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx - 2,28 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos x dx +$$

$$+1,9494 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx - 0,740772 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx + 0,10556 \cdot \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx - 2,28 \cdot 0,449893 + 1,9494 \cdot 0,4649 - 0,740772 \cdot 0,57 +$$

$$+0,10556 \cdot \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx - 1,025756 + 0,906276 - 0,42224+$$

$$+0,10556 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx - 0,43616 \approx 0,06,$$

де

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos x dx = \left[\begin{array}{l} u = x^4, \\ du = 4x^3 dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array}\right] = x^4 \cdot \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x^3, \\ du = 3x^2 dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array}\right] = \frac{\pi^4}{16} - 4\left(-x^3 \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \\ v = \sin x \end{array}\right] = \frac{\pi^4}{16} - 12\left(x^2 \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x, \\ du = dx \\ dv = \sin x dx \\ v = -\cos x \end{array}\right] = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24\left(-x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right) =$$

$$= \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24 \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{16} - 3\pi^2 + 24 \approx 0,496932.$$

Тоді $\mathrm{Es} = \dfrac{0,06}{0,37^4} - 3 \approx 0,2$.

Відповідь. Mo $= 0$, Me $= \dfrac{\pi}{6}$, $M(X) \approx 0,57$; $D(X) \approx 0,14$; $\sigma(X) \approx 0,37$; As $\approx 0,45$; Es $\approx 0,2$.

Основні закони розподілу ймовірностей

1. Біноміальний закон розподілу. Цілочислова випадкова величина X має біноміальний закон розподілу, якщо ймовірність її можливих значень обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P(X = m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{4.8}$$

Основні числові характеристики для цього закону:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq. \tag{4.9}$$

Властивості біноміального розподілу:

При побудові многокутника біноміального розподілу додаються дві точки $(-1; 0)$ та $(n + 1; 0)$. Площа цього многокутника дорівнює 1. При фіксованому p і зростанні n імовірності значень $0, 1, 2 \ldots$ зменшуються, а розподіл розтягується вправо і ординати вирівнюються, але сума їх залишається рівною 1.

Для $p = \dfrac{1}{2}$ графік розподілу симетричний.

1. Для парного n і $p = \dfrac{1}{2}$ розподіл одномодальний і

$$\text{Mo} = [np + p],$$

де позначено $[a]$ – ціла частина числа a.

2. Для непарного n і $p = \dfrac{1}{2}$ розподіл двомодальний і

$$\text{Mo} = \left[\begin{array}{l} np - q, \\ np + p. \end{array} \right.$$

3. Віддаль між Mo та математичним сподіванням $M(X)$ не перевищує 1.

4. Якщо np – ціле число, то $\text{Mo}(X) = M(X)$ і ординати при віддаленні від моди спадають в обидва боки.

5. Для $p \to 0 \quad M(X) \to 0$ розподіл стає правоасиметричним, як показано на рис. 4.10.

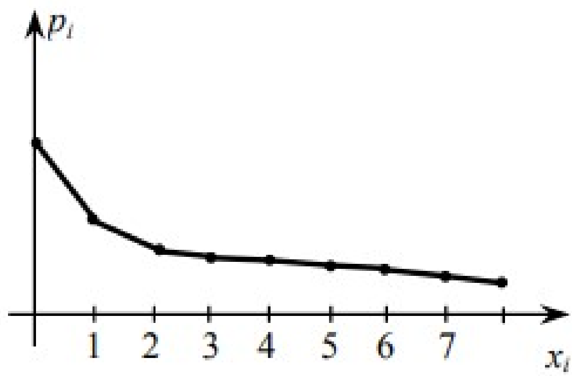


Рис. 4.10

Найпростішим випадком біноміально розподіленої величини X є частота появи події A в одному випробуванні. Цю величину називають **індикатором події** A. Індикатор події A широко використовують при дослідженні якісної ознаки в статистиці (наприклад, "успіх" у випробуванні, наявність браку, наявність класифікаційного рівня і т.д.).

Приклад 9. Знайти середнє значення, моду і середнє квадратичне відхилення біноміального розподілу для $n = 4$, $p = \dfrac{1}{2}$ та зобразити цей розподіл графічно.

Розв'язання. Величина X має значення $0, 1, 2, 3, 4$. Імовірності цих значень знайдемо за формулою (...) для $p = \dfrac{1}{2}$, $q = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $n = 4$. Отже,

$$P_4(0) = C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16}, \quad P_4(1) = C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16},$$
$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}, \quad P_4(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16},$$
$$P_4(4) = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}.$$

Подамо закон розподілу у вигляді таблиці:

X	0	1	2	3	4
P_i	$1/16$	$4/16$	$6/16$	$4/16$	$1/16$

Середнє значення $M(X) = np = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2$; $\mathrm{Mo}(X) = 2$; $\sigma(X) = \sqrt{4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}} = 1$.

Розподіл симетричний, бо $p = \dfrac{1}{2}$.

Зобразимо його графічно (рис. 4.11).

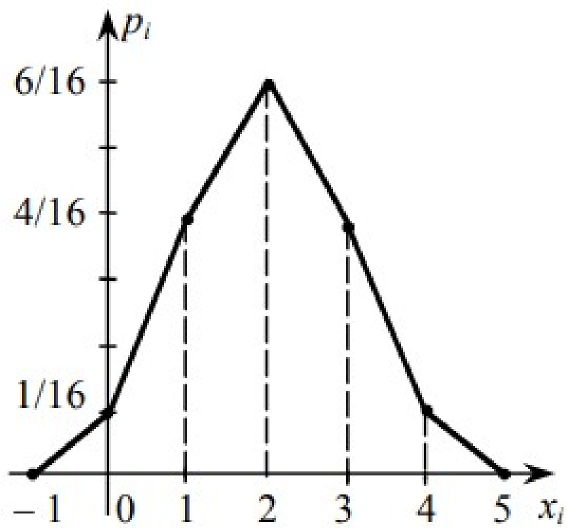


Рис. 4.11

При збільшенні n ламана лінія цього розподілу буде наближатись до кривої Гаусса. Значення $M(X)$, $\sigma(X)$, n, p пов'язані між собою. Знаючи $M(X)$ та $\sigma(X)$, можна знайти ймовірність "успіху" p в одному випробуванні та n – кількість випробувань.

Приклад 10. Величина X розподілена за біноміальним законом з $M(X) = 45$, $\sigma(X) = 6$. Знайти ймовірність p "успіху" в кожному випробуванні та n – кількість випробувань.

Розв'язання. За умовою $\sigma(X) = \sqrt{npq} = 6$, $M(X) = np = 45$. Значення p та n визначимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} np = 45, \\ \sqrt{npq} = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} np = 45, \\ npq = 36, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} np = 45, \\ 45q = 36, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} np = 45, \\ q = \dfrac{36}{45} = \dfrac{4}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \cdot \dfrac{1}{5} = 45, \\ p = \dfrac{1}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 225, \\ p = \dfrac{1}{5}. \end{cases}$$

Відповідь. $n = 225$, $p = \dfrac{1}{5}$.

Приклад 11. Нехай $p = \dfrac{1}{3}$. На скільки зсунеться праворуч середнє значення $M(X)$ біноміального розподілу у разі збільшення n на 1?

Розв'язання. Позначимо Y біноміально розподілену величину при $(n+1)$-му випробуванні і $p = \dfrac{1}{3}$. Тоді

$$M(X) = np = \frac{1}{3}n,\ M(Y) = (n+1)p = \frac{1}{3}(n+1) = \frac{1}{3}n + \frac{1}{3} = M(X) + \frac{1}{3}.$$

Отже, при збільшенні n на 1 математичне сподівання збільшиться на $1/3 = p$.

2. Пуассонівський закон розподілу. Цілочислова випадкова величина X має пуассонівський закон розподілу, якщо вона набуває зліченної множини значень $(m = 0, 1, 2, \dots)$ з імовірностями

$$P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \tag{4.10}$$

де $\lambda = np$.

Цей розподіл визначає кількість подій, які настають в однакові проміжки часу за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної зі сталою інтенсивністю. Розподіл застосовується в задачах статистичного контролю якості, в теорії надійності, теорії масового обслуговування. Математичне сподівання і дисперсія в цьому розподілі однакові:

$$M(X) = D(X) = np. \tag{4.11}$$

3. Геометричний розподіл. Число незалежних повторень випробувань, які проводяться до першого настання події, є цілочисловою випадковою величиною, ймовірності можливих значень якого мають геометричний закон розподілу:

$$P(X=m)=p\cdot q^{m-1},\quad m=1,2,\ldots. \tag{4.12}$$

Числові характеристики розподілу:

$$M(X)=\frac{1}{p},\quad D(X)=\frac{1-p}{p^2}. \tag{4.13}$$

Приклад 12. Гральний кубик підкидають до першої появи шести очок на верхній грані. Побудувати закон розподілу величини X – кількості проведених підкидань. Знайти $M(X)$ та $\sigma(X)$.

Розв'язання. Можливі значення величини $X=\{1,2,3,\ldots\}$. Подія A – поява шести очок;

$$P(A)=\frac{1}{6};\quad P(\bar{A})=q=\frac{5}{6};\quad P(X=1)=\frac{1}{6};\quad P(X=2)=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6};$$

$$P(X=3)=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6},\ldots$$

Отже, закон розподілу має вигляд:

X	1	2	3	$\ldots$	m	$\ldots$	$\sum$
P_i	$1/6$	$5/36$	$25/216$	$\ldots$	$5^{m-1}/6^m$	$\cdots$	1

$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{1/6}=6;\quad \sigma(X)=\frac{\sqrt{5/6}}{1/6}\approx 5,48.$$

4. Гіпергеометричний розподіл. Цей закон відбувається за таких обставин: нехай задано деяку множину однотипних елементів, кількість яких N; із них M елементів мають певну ознаку (наприклад, колір, стандартність тощо); якщо ж із цієї множини навмання беруть n елементів, то кількість m елементів з даною ознакою, що трапляється серед навмання взятих, буде цілочисловою випадковою величиною X із гіпергеометричним законом розподілу. Ймовірність можливих значень X обчислюється за формулою:

$$P(X=m)=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m=0,1,2,\ldots,M. \tag{4.14}$$

Числові характеристики розподілу:

$$M(X)=\frac{M\cdot n}{N}, \quad D(X)=\frac{n\cdot M\cdot(N-M)\cdot(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}. \tag{4.15}$$

5. Рівномірний закон розподілу.

а) Цілочислова випадкова величина X має рівномірний закон розподілу, якщо ймовірності її можливих значень обчислюються за формулою:

$$P(X=k)=\frac{1}{n}, \quad k=1,2,\ldots,n. \tag{4.16}$$

Числові характеристики:

$$M(X)=\frac{n+1}{2}, \quad D(X)=\frac{n^2-1}{12}, \quad \sigma(X)=\frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}. \tag{4.17}$$

б) Випадкова величина має рівномірний закон розподілу, якщо ймовірність її потрапляння на інтервал (a,b) пропорційна до довжини інтервалу і не залежить від розташування інтервалу на осі.

Основні числові характеристики рівномірно розподіленої неперервної випадкової величини та $P(\alpha<X<\beta)$:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b;\\ 0, & x>b, \end{cases} \tag{4.18}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b, \end{cases} \tag{4.19}$$

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{4.20}$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}; \quad P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Приклад 13. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює 0,1 А. Показання округлюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде допущено похибку, яка перевищуватиме $0,02$ А.

Розв'язання. Похибку при округленні відліку можна розглядати як випадкову величину X, яка рівномірно розподілена на відрізку $[0; 0,05]$ (від деякої поділки до середини проміжку між двома сусідніми поділкам). Тому

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 20, & 0 \le x \le 0,05, \\ 0, & x > 0,05. \end{cases}$$

Похибка відліку перевищуватиме 0,02, якщо вона попадатиме в інтервал $(0,02; 0,05)$. Імовірність того, що при відліку буде допущено похибку, яка перевищує 0,02, обчислимо за формулою

$$P(0,02 < X < 0,05) = \int\limits_{0,02}^{0,05} f(x)dx = \int\limits_{0,02}^{0,05} 20 \cdot dx = 20 \cdot x \Big|_{0,02}^{0,05} =$$

$$= 20 \cdot 0,03 = 0,6.$$

Відповідь. 0,6.

Приклад 14. Організатор антикварного аукціону допускає, що пропозиція ціни за деяку картину буде рівномірно розподіленою випадковою величиною в інтервалі від 5 тис. до 100 тис. грн.

а) знайти диференціальну функцію;

б) обчислити ймовірність того, що картину буде продано за ціну, яка менша від 20 тис. грн;

в) знайти ймовірність того, що ціна картини буде вища за 100 тис. грн.

Розв'язання. а) оскільки X – рівномірно розподілена НВВ, то її щільність розподілу згідно з (...)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 5, \\ \dfrac{1}{95}, & 5 < x \le 100, \\ 0, & x > 100. \end{cases}$$

б) $P(X < 20) = P(5 \le X < 20) = \dfrac{20-5}{100-5} = \dfrac{15}{95} = \dfrac{3}{19}$.

в) $P(X > 100) = 1 - P(X \le 100) = 1 - P(5 \le X \le 100) = 1 - \dfrac{100-5}{100-5} = 0$.

Відповідь. б) $\dfrac{3}{19}$; в) 0.

6. Показниковий закон розподілу. Випадкова величина має показниковий закон розподілу ймовірностей, якщо щільність її розподілу задається формулою:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \qquad (4.21)$$

Функція розподілу показникового закону, математичне сподівання та дисперсія знаходяться за формулами:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases} \quad M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \qquad (4.22)$$

А) Якщо показниковий закон задано щільністю ймовірностей (4.21), то для $a \ge 0$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}dx = -\left. e^{-\lambda x}\right|_a^b = e^{-a\lambda\lambda} - e^{-b\lambda}.$$

Для $a < 0$:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^0 0dx + \int_a^b \lambda e^{-\lambda x}dx = -\left. e^{-\lambda x}\right|_0^b =$$

$$= 1 - e^{-\lambda, b}.$$

Б) Якщо ж показниковий закон задано функцією розподілу $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ для $x \geq 0$, то згідно з властивістю $F(x)$

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \left(1 - e^{\lambda b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Отже,

$$P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}, \text{ якщо } a \geq 0 \qquad (4.23)$$

і $P(a < X < b) = 1 - e^{-\lambda b}$, якщо $a < 0$.

Приклад 15. Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом з параметром $\lambda = 4$. Записати $f(x)$, $F(x)$; знайти $P(0,1 < X < 1,5)$; обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. Згідно з (4.21), (4.22) маємо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 4e^{-4x}, & x \geq 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-4x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Імовірність $P(0,1 < X < 1,5)$ обчислимо згідно з (4.23):

$$P(0,1 < X < 1,5) = e^{-40,1} - e^{-41,5} = e^{-0,4} - e^{-6}.$$

З табл. 8 (додаток) знайдемо: $e^{-0,4} = 0,67032$, $e^{-6} = 0,002479$, тоді

$$P(0,1 < X < 1,5) = 0,67032 - 0,002479 = 0,667841.$$

$$M(X) = \frac{1}{4}, \quad D(X) = \frac{1}{16}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{4}.$$

7. Нормальний закон розподілу. Випадкова величина X з математичним сподіванням $M(x) = a$ та середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = \sigma$ розподілена за нормальним законом, якщо

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.24}$$

Функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \tag{4.25}$$

При довільних значеннях a і σ нормальний закон називається **загальним**, а при $a = 0$ і $\sigma = 1$ – **нормованим**.

Головна особливість нормального закону полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу за типових умов.

Нормальному закону розподілу належить центральне місце в побудові статистичних моделей у теорії надійності та математичній статистиці.

Графіки $f(x)$, $F(x)$ для загального нормального закону залежно від параметрів a і σ зображені на рис. 4.12 і 4.13:

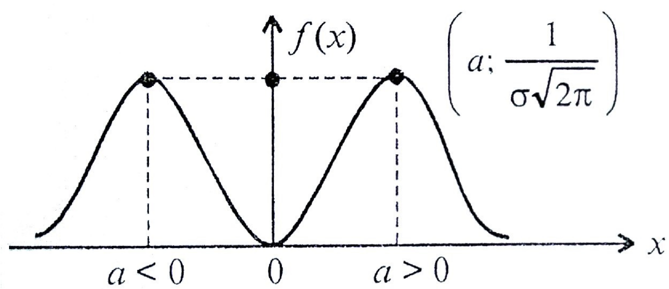


Рис. 4.12

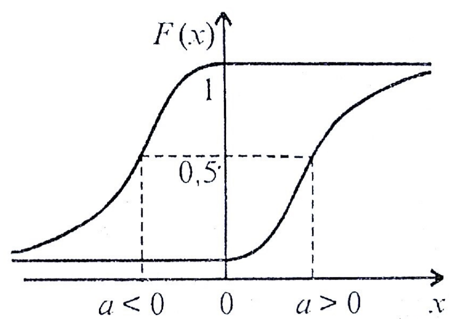


Рис. 4.13

Для обчислення ймовірності потрапляння нормально розподіленої випадкової величини на заданий проміжок $[\alpha, \beta]$ використовується функція Лапласа:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \Phi\Big(\frac{\beta - a}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\frac{\alpha - a}{\sigma}\Big). \tag{4.26}$$

Крім того, часто використовується формула:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \qquad (4.27)$$

Правило трьох сигм для нормального закону

Коли $\delta = 3\sigma$, то згідно з (4.27) маємо:

$$P(|x - a| < 3\sigma) = 2\Phi(\frac{3\sigma}{\sigma}) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973.$$

Практично ця подія при одному експерименті здійсниться, а тому її вважають практично вірогідною. Звідси:

$$P(|x - a| > 3\sigma) = 1 - P(|x - a| < 3\sigma) = 1 - 0,9973 = 0,0027.$$

Тобто ймовірність того, що внаслідок проведення експерименту випадкова величина X, яка має закон розподілу $N(a;\sigma)$, не потрапить у проміжок $[a - 3\sigma; a + 3\sigma]$, дорівнює 0,0027. Це становить $0,27\%$, тобто практично вважається, що ця подія внаслідок проведення одного експерименту не здійсниться.

Приклади розв'язування задач

1. Є 10 деталей, з яких 8 – стандартні. Навмання вибирають 2 деталі. Скласти закон розподілу стандартних деталей серед відібраних.

Розв'язування. Випадкова величина X – кількість стандартних деталей серед вибраних – може приймати значення: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. За формулою (4.14) знаходимо:

$$P(X = 0) = \frac{C_8^0 C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}; \quad P(X = 1) = \frac{C_8^1 C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45};$$

$$P(X = 2) = \frac{C_8^2 C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Складемо шуканий закон розподілу:

X	0	1	2
P	1/45	15/45	28/45

Контроль: $\dfrac{1}{45}+\dfrac{16}{45}+\dfrac{28}{45}=1.$

2. Знайти дисперсію і середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X, заданої законом розподілу

X	-5	2	3	4
P	$0,4$	$0,3$	$0,1$	0,2

Розв'язування. Скориставшись формулою (4.1), знайдемо $D(X)$. Знайдемо математичне сподівання X:

$$M(X)=(-5)\cdot 0,4+2\cdot 0,3+3\cdot 0,1+4\cdot 0,2=-0,3$$

Запишемо закон розподілу X^2:

X^2	25	4	9	16
P	$0,4$	0,3	0,1	0,2

Знайдемо математичне сподівання X^2:

$$M(X^2)=25\cdot 0,4+4\cdot 0,3+9\cdot 0,1+16\cdot 0,2=15,3.$$

Отже,

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=15,3-(-0,3)^2=15,21.$$

Знайдемо середнє квадратичне відхилення за формулою (4.2):

$$\sigma(x)=\sqrt{D(X)}=3,9.$$

Відповідь. 15,21; 3,9.

3. Задана диференціальна функція неперервної випадкової величини X (щільність розподілу):

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x\le 0,\\ \cos x, & \text{при } 0<x\le \frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію $F(x)$ (функцію розподілу).

Розв'язування. Скористаємося формулою

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Якщо $x \le 0$, то $f(x) = 0$, отже $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$. Якщо $0 < x \le \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{x} \cos x dx = \sin x.$$

Якщо $x > \dfrac{\pi}{2}$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} 0dx = \sin x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Отже, шукана інтегральна функція має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ \sin x, & \text{при } 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4. Відомо, що випадкова величина X має закон розподілу $N(-4; 2)$. Записати вирази для $f(x)$, $F(x)$ і накреслити їх графіки. Обчислити $P(-6 < x < 3)$, $P(|x+4| < 4)$. Чому дорівнюють Mo, Me, As, Es?

Розв'язання.

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{3}}, \;\; -\infty < x < \infty;$$

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+4)^2}{3}} dx.$$

Графіки $f(x)$, $F(x)$ наведені на рис. 4.14 і 4.15:

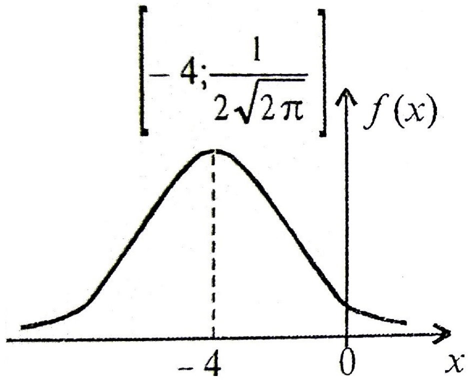


Рис. 4.14

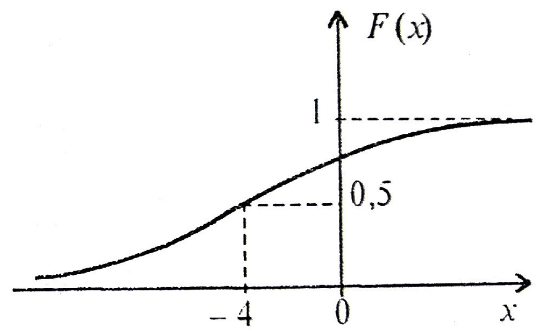


Рис. 4.15

Використовуючи формули (4.26), (4.27), обчислюємо ймовірності:

1) $P(-6 < x < 3) = \Phi\left(\dfrac{3-(-4)}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{-6-(-4)}{2}\right) = \Phi\left(\dfrac{3+4)}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{-6+4}{2}\right) = \Phi(3,5) - \Phi(-1) = \Phi(3,5) + \Phi(1) = 0,49966 + 0,3413 = 0,84096$;

$P(-6 < x < 3) = 0,84096$.

2) $P(|x+4| < 4) = 2\Phi(\dfrac{4}{2}) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$.

$P(|x+4| < 4) = 0,9544$; $\mathrm{Mo} = \mathrm{Me} = a = -4$; $\mathrm{As} = \mathrm{Es} = 0$.

5. Знайти математичне сподівання випадкової величини X, заданої функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ x/4, & \text{при } 0 < x \le 4, \\ 1, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Розв'язування. Знайдемо щільність розподілу величини X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \le 0, \\ 1/4, & \text{при } 0 < x \le 4, \\ 0, & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Знаходимо шукане математичне сподівання за формулою

$$M(X) = \int\limits_0^4 x f(x) dx = \int\limits_0^4 \frac{1}{4} x dx = \left. \frac{x^2}{8} \right|_0^4 = 2.$$

6. Щільністю розподілу ймовірностей випадкової величини X є функція $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-10)^2}{8}}$.

Знайти: а) імовірність того, що випадкова величина X набуде значень з інтервалу $(12; 14)$;

б) імовірність того, що абсолютна величина відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання $M(X)$ буде менша за 2.

Розв'язування:

а) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, отже, $\sigma = 2$, $a = 10 = M(X)$, оскільки $2\sigma^2 = 8$, тому $\sigma^2 = 4$, а $\sigma = 2$.

Імовірність того, що $X \in (12; 14)$, обчислимо згідно з (4.26):

$$P(12 < X < 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1) =$$

$$= 0,4772 - 0,3413 = 0,1359.$$

Отже, лише близько 13,6 % значень величини X припадає на інтервал $(12; 14)$;

б) згідно з (4.27) $P(|X - 10| < 2) = \Phi\left(\dfrac{2}{2}\right) = 2\Phi(1) =$
$= 2 \cdot 0,3413 = 0,6826$.

Відповідь. а) 0,1359; б) 0,6826.

7. Випадкова величина X є нормально розподіленою з математичним сподіванням $a = -7$ і дисперсією $D(X) = 9$. Записати вирази для щільності розподілу ймовірностей $f(x)$ та функції розподілу $F(x)$; побудувати їхні графіки. Обчислити ймовірність попадання випадкової величини X на проміжок $(-5; -3)$. Яка ймовірність відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання більше ніж на 2 одиниці?

Розв'язування. Оскільки випадкова величина X розподілена за нормальним законом, то щільність розподілу ймовірностей

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

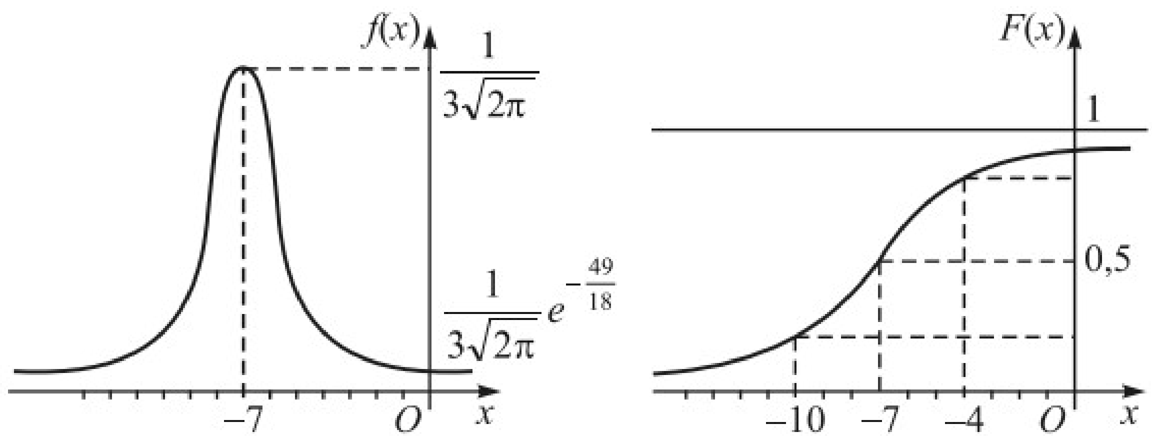
де $a = -7$, $\sigma = \sqrt{D(X)} = 3$, тобто

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-7)^2}{18}},\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Функція розподілу має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{(x+7)^2}{18}} dx.$$

Графіки $f(x)$ та $F(x)$:



Імовірність того, що $X \in (-5; -3)$, обчислимо згідно з (4.26):

$$P(-5 < X < -3) = \Phi\left(\frac{-3+7}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-5+7}{3}\right) = \Phi\left(\frac{4}{3}\right) - \Phi\left(\frac{2}{3}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(1,33) - \Phi(0,67) = 0,4082 - 0,2486 = 0,1596.$$

Імовірність відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання більше ніж на 2 одиниці обчислюємо через імовірність протилежної події $|X+7| \leq 2$:

$$P(|X+7|>2) = 1 - P(|X+7| \leq 2) = [\text{згідно з (4.27)}] =$$

$$= 1 - 2\Phi\left(\frac{2}{3}\right) = 1 - 2 \cdot 0,2486 = 0,5028.$$

У побудові статистичних моделей використовуються й інші розподіли. А саме *логнормальний розподіл, напівнормальний розподіл, χ^2 розподіл, розподіли Стьюдента та Фішера–Снедекора.* Більшість з них збігається до нормального розподілу, коли $n \to \infty$.

Завдання для самостійного розв'язування

○ **1.** Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

Знайти центральні моменти першого, другого, третього і четвертого порядків.

Відповідь. $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1,29$; $\mu_3 = -0,888$; $\mu_4 = 2,7777$.

○ **2.** Неперервна випадкова величина X розподілена за показниковим законом, заданим при $x \geq 0$ диференціальною функцією $f(x) = 0,04 \cdot e^{-0,04x}$; при $x < 0$ функція $f(x) = 0$. Знайти ймовірність того, що в результаті дослідів X попаде в інтервал $(1;2)$.

Відповідь. $P = 0,038$.

3. Знайти ексцес $E_s = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4(x)} - 3$ показникового розподілу.

Відповідь. $E_s = 6$.

4 (д/з). Знайти закон розподілу числа появи грані з п'ятьма очками в результаті п'яти кидань гральної кістки, а також числові характеристики цього числа. 2. Знайти математичне сподівання випадкової величин $Z = X + Y$, якщо X та Y незалежні і задані законами розподілу

X	1	3	4
P	0,2	0,5	0,3

,

Y	2	5
P	0,4	0,6

5. Імовірність того, що сумарні витрати електроенергії на підприємстві за один робочий день не перевищать $M = 20000$ квт/год, дорівнює 0,9. Скласти закон розподілу числа робочих днів тижня (п'ятиденного), протягом кожного із яких витрати електроенергії не перевищуватимуть M. Знайти середнє число таких днів.

6 (д/з). Знайти математичне сподівання величини $Z = XY$, якщо відомо, що X та Y – незалежні випадкові величини, закон розподілу яких:

X	2	3
P	...	0,3

,

Y	1	1,5
P	0,8	...

7. В урні знаходиться п'ять куль з номерами від 1 до 5. Навмання витягують дві кулі. Скласти закон розподілу випадкової величини X – суми номерів витягнутих куль. Знайти $\sigma(X)$.

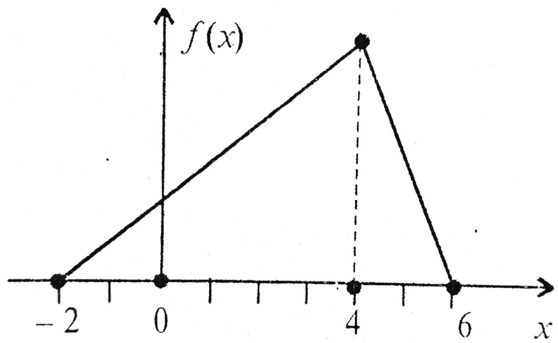
∘ **8.** Знаючи

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ \dfrac{1}{18}\sqrt{x+2}, & -2 < x \le 7; \\ 0, & x > 7. \end{cases}$$

знайти $\sigma(X)$; Me.

Відповідь. $\sigma(X) \approx 2,36$; $\text{Me} = \sqrt[3]{182,25} - 2$.

9 (д/з). Закон розподілу ймовірностей зображено на малюнку



Знайти $M(X)$; $\sigma(X)$; Mo; Me.

Відповідь. $M(X) = \dfrac{8}{3}$, $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{26}}{3}$, $\mathrm{Mo} = 4$, $\mathrm{Me} = \sqrt{24} - 2$.

10. Задано закон розподілу ймовірностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -3; \\ \dfrac{1}{4\sqrt{x+3}}, & -3 < x \leq 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти $D(X)$; $\sigma(X)$; Me.

Відповідь. $D(X) = \dfrac{64}{45}$, $\sigma(X) = \dfrac{8}{3\sqrt{5}}$, $\mathrm{Me} = 2$.

∘ **11.** Задано

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 1 + x(\ln x - 1), & 1 < x \leq e; \\ 1, & x > e. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$; $\sigma(X)$.

Відповідь. $M(X) = \dfrac{e^2+1}{4}$; $\sigma(X) = \dfrac{1}{12}\sqrt{32e^3 - 9e^4 - 18e^2 + 7}$.

12. Задано

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \dfrac{2}{7}\cos\dfrac{2}{7}x, & 0 < x \leq \frac{7}{4}\pi; \\ 0, & x > \frac{7}{4}\pi. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$; $D(X)$.

Відповідь. $M(X) = \dfrac{7}{2}\left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$, $D(X) = \dfrac{98\pi - 224}{16}$.

13. Задано

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ ae^{-x^2}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти a і $F(x)$. Обчислити $M(X)$ і $\sigma(X)$.

Відповідь. $a = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$, $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 2\Phi(x\sqrt{2}), & x > 0. \end{cases}$

$M(X) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sigma(X) = \sqrt{\frac{\pi-2}{2\pi}}$.

○ **14.** Задано

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1 - e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Знайти As; Es.

Відповідь. $As = 2$, $Es = 6$.

15. Задано

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+4)^2}{8}}, \ \ -\infty < x < \infty.$$

Знайти Mo; Me; As; Es.

Відповідь. Mo $=$ Me $= -4$, $As = 0$, $Es = 0$.

16. В електромережу містечка увімкнуто для освітлення вулиць у вечірню пору 20000 електролампочок. Імовірність того, що лампочка не перегорить протягом вечірнього часу дорівнює в середньому 0,95. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа електролампочок, що не перегорять протягом вечірнього часу.

Відповідь. $M(X) = 19000$, $\sigma(X) \approx 30,8$.

17. Для космічного корабля ймовірність зіткнення його з метеоритом малої маси дорівнює 0,001 протягом одного оберту навколо Землі. Космічний корабель здійснив 900 обертів. Знайти

$M(X)$, $\sigma(X)$ для дискретної випадкової величини X – числа зіткнень космічного корабля із метеоритами малої маси.

Відповідь. $M(X) = 0,9$, $\sigma(X) \approx 0,95$.

18. Монета підкидається доти, доки вона випаде гербом. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа здійснених підкидань.

Відповідь. $M(X) = 2$, $\sigma(X) \approx 1,41$.

∘ **19.** Робітник за зміну обслуговує 14 однотипних верстатів-автоматів. Імовірність того, що верстат за зміну потребує уваги робітника, становить 1/7. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа верстатів-автоматів, що потребують уваги робітника за зміну.

Відповідь. $M(X) = 2$, $\sigma(X) = 2\sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

20. За одну робочу зміну верстат-автомат виготовляє 400 однотипних деталей. Імовірність, що виготовлена верстатом деталь стандартна, дорівнює 0,8. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей, виготовлених верстатом-автоматом за робочу зміну.

Відповідь. $M(X) = 320$, $\sigma(X) = 8$.

21. Серед 12 однотипних телевізорів 8 відповідають вимогам стандарту, а решта – ні. Навмання вибирають 10 телевізорів. Знайти $M(X)$, $\sigma(X)$ дискретної випадкової величини X – числа телевізорів, що відповідають вимогам стандарту серед 10 навмання вибраних.

Відповідь. $M(X) \approx 6,67$, $\sigma(X) \approx 0,601$.

22 (с/р). Задано ряд розподілу випадкової величини X. Обчислити параметр $p, P(-3 < X < 2)$, моду, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію, ексцес. Побудувати многокутник розподілу. Записати функцію розподілу і побудувати її графік.

а)

x_i	-4	-1	0	1	2	4
p_i	0,1	p	0,1	0,3	0,05	0,05

б)

x_i	-5	-3	2	4	6	7
p_i	$2p$	p	$3p$	p	p	$2p$

в)

x_i	$-0,4$	$-0,1$	0	0,01	0,02	0,4
p_i	0,4	p	$2p$	p	0,05	0,05

г)

x_i	-4	-1	0	1	2	4
p_i	$0,p$	p	$0,1p$	$0,3p$	$0,05p$	$0,05p$

23 (с/р). Задано ряд розподілу випадкової величини X. Обчислити параметр p, $P(-3 < X < 2)$ моду, медіану, математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, асиметрію, ексцес. Побудувати многокутник розподілу. Записати функцію розподілу і побудувати її графік.

x_i	a	b	c	d	m	n
p_i	p	$2p$	p	kp	$3p$	$4p$

Варіанти	a	b	c	d	m	n	k
1	-2	0	1	2	4	6	1
2	-5	-3	0	1	4	6	2
3	-10	-8	-6	0	2	3	3
4	-3	-2	-1	1	2	3	4
5	-4	-3	-1	0	4	8	5

24 (с/р). Є три способи контролю кондиційності (готовності) партії виробів. При використанні кожного способу кількість помилково визнаних кондиційними некондиційних виробів є випадковою величиною. Позначимо ці величини для кожного способу відповідно X, Y, Z.

x_i	0	1	3	4
p_i	0,5	0,4	0,05	0,05

y_i	0	1	2	3
p_i	0,7	0,1	0,1	0,1

z_i	0	1	2	3	4
p_i	0,8	0,05	0,05	0,05	0,05

Який спосіб контролю є більш раціональним?

25. За заданою функцією розподілу ймовірностей записати ряд розподілу випадкової величини X. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

$$\text{а) } F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \leq -6, \\ 0,2, \text{ якщо } -6 \leq x \leq -4, \\ 0,6, \text{ якщо } -4 \leq x \leq 0, \\ 0,8, \text{ якщо } 0 \leq x \leq 4, \\ 1, \text{ якщо } x > 4. \end{cases}$$

$$\text{б) } F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \leq -5, \\ 0,1, \text{ якщо } -5 \leq x \leq -3, \\ 0,5, \text{ якщо } -3 \leq x \leq 5, \\ 0,9, \text{ якщо } 5 \leq x \leq 8, \\ 1, \text{ якщо } x > 8. \end{cases}$$

в) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 0, \\ 0,22, \text{ якщо } 0 \le x \le 4, \\ 0,36, \text{ якщо } 4 \le x \le 10, \\ 0,8, \text{ якщо } 10 \le x \le 14, \\ 1, \text{ якщо } x > 14. \end{cases}$

г) $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le 2, \\ 0,3, \text{ якщо } 2 \le x \le 8, \\ 0,45, \text{ якщо } 8 \le x \le 11, \\ 0,7, \text{ якщо } 11 \le x \le 12, \\ 1, \text{ якщо } x > 12. \end{cases}$

26 (с/р). За заданою функцією розподілу ймовірностей записати ряд розподілу випадкової величини X. Обчислити $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \le d, \\ 0,a, \text{ якщо } d \le x \le m, \\ 0,b, \text{ якщо } m \le x \le n, \\ 0,c, \text{ якщо } n \le x \le r, \\ 1, \text{ якщо } x > r. \end{cases}$$

Варіанти	a	b	c	d	m	n	r
1	4	5	6	2	4	5	7
2	3	6	8	-4	0	4	5
3	2	5	9	2	4	5	9
4	3	5	7	-2	-1	0	2
5	1	2	5	0	3	4	7

27 (с/р). Задано щільність розподілу випадкової величини X:

а) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0, \\ ax^2, & \text{якщо } 0 < x \le 2, \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0,\\ ax^3, & \text{якщо } 0<x\le 3,\\ 0, & \text{якщо } x>3.\end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } \ x<0;\\ 2ae^{-6x}, & \text{якщо } \ x\ge 0.\end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x<0;\\ 5e^{-ax}, & \text{якщо } x\ge 0.\end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 2;\\ a, & \text{якщо } 2<x\le 10;\\ 0, & \text{якщо } x>10.\end{cases}$

е) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 0;\\ \frac{1}{6}a, & \text{якщо } 0<x\le 18;\\ 0, & \text{якщо } x>18.\end{cases}$

є) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le 1;\\ a\left(x^2-x\right), & \text{якщо } 1<x\le 2\\ 0, & \text{якщо } x>2.\end{cases}$

ж) $f(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо } x\le -1;\\ a\left(6x-x^2+7\right), & \text{якщо } \ -1<x\le 3\\ 0, & \text{якщо } x>3.\end{cases}$

з) $f(x)=\dfrac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-1)^2}{50}}$. и) $f(x)=\dfrac{1}{7\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x+6)^2}{2a}}$.

Обчислити: 1) параметр a; 2) $P(-3<X<5)$; 3) $P(5)$; 4) моду; 5) медіану; 6) математичне сподівання; 7) дисперсію; 8) середнє квадратичне відхилення; 9) асиметрію; 10) ексцес; 11) побудувати графік щільності розподілу; 12) записати функцію розподілу і побудувати її графік.

28. Задано функцію щільності ймовірностей $f(x)=\dfrac{a}{16+25x^2}$,

$-\infty < x < \infty$. Знайти a.

29. Задано функцію розподілу випадкової величини X:

а) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0 \\ ax + c, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1; \\ ax^2 + c, & \text{якщо } 1 < x \le 6; \\ 1, & \text{якщо } x > 6. \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ ax^3 + c, & \text{якщо } 0 < x \le 4; \\ 1, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$

г) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ -a\sqrt{x}, & \text{якщо } 0 < x \le 9; \\ 1, & \text{якщо } x > 9. \end{cases}$

д) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 1; \\ \dfrac{x-a}{b}, & \text{якщо } 1 < x \le 3; \\ 1, & \text{якщо } x > 3. \end{cases}$

е) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 6; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{якщо } 6 < x \le 10 \\ 1, & \text{якщо } x > 10. \end{cases}$

є) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \sin ax + c, & \text{якщо } 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & \text{якщо } x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

ж) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le -0,5; \\ a \arcsin x + c, & \text{якщо } -0,5 < x \le 0,5 \\ 1, & \text{якщо } x > 0,5. \end{cases}$

Обчислити: 1) невідомі параметри; 2) $P(-1 < X < 4)$; 3) $P(7)$; 4) моду; 5) медіану; 6) математичне сподівання; 7) дисперсію; 8) середнє квадратичне відхилення; 9) асиметрію; 10) ексцес; 11) побудувати графік функції розподілу; 12) записати функцію – щільність розподілу та побудувати її графік.

Тема 5. Багатовимірні випадкові величини

На одному й тому самому просторі елементарних подій Ω можна визначити не одну, а кілька випадкових величин. Одночасна поява внаслідок експерименту n випадкових величин X_1, X_2, $\ldots$, X_n з певною ймовірністю являє собою n-вимірну випадкову величину, яку називають **системою n випадкових величин**, або **n-вимірним випадковим вектором**.

Розглянемо дискретну двовимірну випадкову величину (X, Y), тобто величину, складові X і Y якої дискретні. **Законом розподілу ймовірностей**, або **розподілом дискретної двовимірної випадкової величини** (X, Y), називають відповідність між парами чисел (x_i, y_i) $(i = \overline{1, n};\ j = \overline{1, m})$ та відповідними їм ймовірностями спільної появи P_{ij} $(P_{ij} \equiv p(x_i, y_j))$.

У табличній формі цей закон має вигляд

Таблиця 1.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_1	p_{11}	p_{21}	$\ldots$	p_{n1}
y_2	p_{12}	p_{22}	$\ldots$	p_{n2}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\ldots$	p_{nm}

Умовою нормування для системи (X, Y) є рівність $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

Для знаходження ймовірностей подій $X = x_i$ або $Y = y_j$ потрібно в табл. 1 підсумувати відповідні стовпчики або рядки:

$$P(X = x_i) \equiv p(x_i) = \sum_{j=1}^{m} p(x_i, y_j), \tag{5.1}$$

$$P(Y = y_j) \equiv p(y_j) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i, y_j). \tag{5.2}$$

Розглянемо тепер двовимірну випадкову величину, складові якої можуть бути дискретними або неперервними величинами. **Функція розподілу** такої величини визначається співвідношенням

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) \tag{5.3}$$

і геометрично визначає ймовірність того, що випадкова точка (X, Y) потрапить у нескінченний квадрат із вершиною в точці (x, y), розміщений ліворуч від неї.

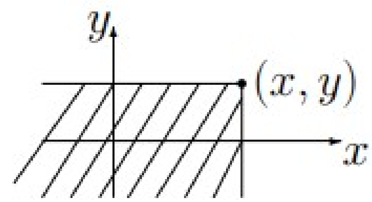


Рис. 5.1

Розглянемо **властивості функції розподілу** двовимірної випадкової величини.

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.

2. $F(x, y)$ є неспадною функцією по кожному аргументу, тобто

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \text{ якщо } x_2 > x_1;$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1.$$

3. Для $F(x, y)$ виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \longrightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{\substack{x \longrightarrow -\infty \\ y \longrightarrow -\infty}} F(x, y) = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \longrightarrow +\infty \\ y \longrightarrow +\infty}} F(x, y) = 1.$$

4. Якщо один із аргументів $F(x, y)$ прямує до $+\infty$, то вона перетворюється у функцію розподілу випадкової величини, яка відповідає іншому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_1(x), \;\; F(+\infty, y) = F_2(y),$$

де $F_1(x)$, $F_2(y)$ – відповідно функції розподілу випадкової величини X та Y.

5. $F(x,y)$ неперервна зліва по кожному аргументу.

Властивості 1. – 5. є **характеристичними**. Це означає, що кожна функція $F(x,y)$, яка володіє цими властивостями, є функцією позподілу двовимірної випадкової величини (X,Y).

Використання розглянутих властивостей і теореми додавання імовірностей дозволяє отримати наступні формули.

Імовірності попадання випадкової точки (X,Y) у нескінченну напівсмугу (рис. 5.2, рис. 5.3) та прямокутник (рис. 5.4) визначаються за формулами відповідно:

$$P(x_1 < X < x_2, Y < y) = F(x_2, y) - F(x_1, y), \tag{5.4}$$

$$P(X < x, y_1 < Y < y_2) = F(x, y_2) - F(x, y_1), \tag{5.5}$$

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) =$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1). \tag{5.6}$$

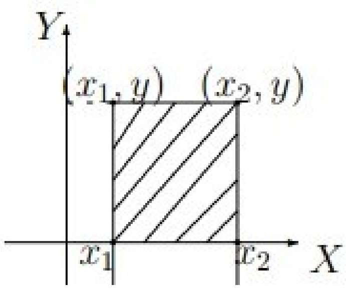


Рис. 5.2

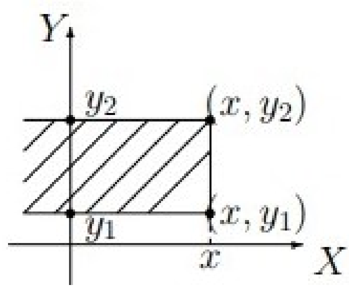


Рис. 5.3

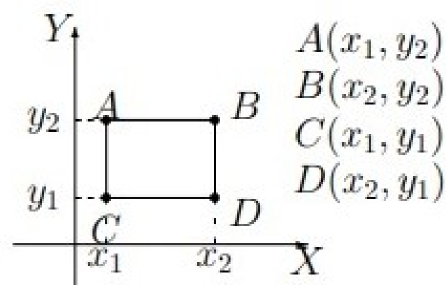


Рис. 5.4

Неперервну двовимірну випадкову величину можна задати також і густиною (щільністю) розподілу ймовірностей:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y},$$

за умови, що $F(x,y)$ є неперервною за аргументами x і y та двічі диференційованою.

За відомою густиною розподілу можна знайти функцію розподілу:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y) dx dy. \tag{5.8}$$

Властивості густини розподілу

1) Функція $f(x, y) \geq 0$, оскільки $F(x, y)$ є неспадною відносно аргументів x, y.

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1$ – умова нормування;

3) Якщо відома щільність розподілу системи двох випадкових величин $f(x, y)$, то можна знайти щільності розподілу кожної складової: $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy$; $f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$.

При вивченні системи двох випадкових величин доводиться з'ясовувати наявність зв'язку між цими величинами та його характер. Для цього застосовують **кореляційний момент**

$$K_{xy} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y) \tag{5.9}$$

(при $K_{xy} = 0$ зв'язок між X і Y відсутній, при $K_{xy} \neq 0$ – існує) та **коефіцієнт кореляції**

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}. \tag{5.10}$$

Властивості r_{xy}:

1. $|r_{xy}| \leq 1$, $-1 \leq r_{xy} \leq 1$.

2. Якщо X і Y незалежні, то $r_{xy} = 0$.

3. Якщо X і Y зв'язані лінійною функціональною залежністю ($Y = aX + b$, $a \neq 0$), то $|r_{xy}| = 1$.

4. Якщо $|r_{xy}| = 1$, то випадкові величини X і Y зв'язані лінійною функціональною залежністю: (якщо $r = 1$ – пряма, а якщо $r = -1$ – обернена залежність).

Зауваження:

Якщо $r_{xy} > 0$, то випадкові величини зв'язані додатною кореляцією, а якщо $r_{xy} < 0$, то випадкові величини зв'язані від'ємною кореляцією. Чим ближче $|r_{xy}|$ до одиниці, тим більше підстав вважати, що зв'язок між X і Y наближається до лінійної залежності.

Випадкові величини X і Y називаються некорельованими, якщо $r_{xy} = 0$ або $K_{xy} = 0$. Незалежні величини завжди некорельовані.

Якщо дві випадкові величини X і Y корельовані ($r_{xy} \neq 0$; $K_{xy} \neq 0$), то вони завжди залежні.

Якщо $r_{xy} = 0$ або $K_{xy} = 0$, то це не означає їх незалежності. Це означає відсутність лінійної залежності між випадковими величинами, але інший вид залежності може бути. З незалежності величин випливає їх некорельованість, але з некорельованості не випливає їх незалежність.

Наведемо формули для обчислення математичного сподівання, дисперсії та кореляційного моменту випадкових величин X та Y:

Таблиця 2

X і Y – дискретні	X і Y – неперервні
$M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_i p_{ij}$	$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x,y)dxdy$
$M(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} y_j p_{ij}$	$M(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y \cdot f(x,y)dxdy$
$D(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_i^2 p_{ij} - M^2(X)$	$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x,y)dxdy - M^2(X)$
$D(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - M^2(Y)$	$D(Y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2 \cdot f(x,y)dxdy - M^2(Y)$
$F_{xy} = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_i y_j p_{ij} - M(X) \cdot M(Y)$	$K_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy - M(X) \cdot M(Y)$

Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X при фіксованому значенні $Y = y_j$ називається перелік можливих значень випадкової X і відповідних їм умовних імовірностей, обчислених при фіксованому значенні $Y = y_j$: $P(x_1/y_j)$, $p(x_2/y_j)$, $\ldots$, $p(x_n/y_j)$.

Аналогічно, **умовним законом розподілу складової Y при фіксованому значенні** $X = x_i$ називається сукупність умовних імовірностей $P(y_1/x_i)$, $p(y_2/x_i)$, $\ldots$, $p(y_m/x_i)$.

Тут умовні ймовірності визначаються за формулами:

$$p(x_i/y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p(y_j)} \ (i = \overline{1, n}); \quad p(y_j/x_i) = \frac{p(y_j, x_i)}{p(x_i)} \ (j = \overline{1, m}). \tag{5.11}$$

Числові характеристики умовного закону називаються умовними:

1) умовне математичне сподівання:

$$M(X/Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i/y_j), \tag{5.12}$$

$$M(Y/X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j p(y_j/x_i); \tag{5.13}$$

2) умовна дисперсія й умовне середнє квадратичне відхилення:

$$D(X/Y = y_j) = \frac{1}{p(y_j)} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_{ij} - M^2(X/Y = y_j), \tag{5.14}$$

$$\sigma(X/Y = y_j) = \sqrt{D(X/Y = y_j)}. \tag{5.15}$$

Система довільної кількості випадкових величин

Функцією розподілу n випадкових величин називається така функція від n аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, яка визначає ймовірність спільної одночасної появи подій $X_i < x_i$:

$$F(x, x_2, \ldots, x_n) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i < x_i)\right). \tag{5.16}$$

Щільністю імовірностей системи n випадкових величин є функція

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}. \qquad (5.17)$$

Числові характеристики системи n випадкових величин

1) $$M(x_i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n; \qquad (5.18)$$

2) $$D(x_i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n - \\ - M^2(x_i); \qquad (5.19)$$

3) $$K(x_i x_j) \equiv K_{ij} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i x_j f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots \\ \ldots dx_n - M(x_i) M(x_j). \qquad (5.20)$$

При цьому

$$K_{ij} = K_{ji}, \quad K_{ii} = K_{jj} = D(x_i) = \sigma_i^2. \qquad (5.21)$$

Усі кореляційні моменти й дисперсії розміщують у вигляді квадратної таблиці, яка називається **кореляційною матрицею системи n випадкових величин** і має такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \ldots & K_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (5.22)$$

Елементи кореляційної матриці симетрично розміщені відносно її головної діагоналі.

Приклади розв'язування задач

1. Задано розподіл ймовірностей дискретної двовимірної випадкової величини

Y \ X	26	30	41	50
2.3	0.05	0.12	0.08	0.04
2.7	0.09	0.30	0.11	0.21

Знайти закон розподілу складових X і Y.

Розв'язування. Додавши ймовірності "по стовпцях", одержимо ймовірності всеможливих значень X: $P(26) = 0.14$, $P(30) = 0.42$, $P(41) = 0.19$, $P(50) = 0,25$.

Запишемо закон розподілу складової X:

X	26	30	41	50
P	0.14	0.42	0.19	0.25

Контроль: $0.14 + 0.42 + 0.19 + 0.25 = 1$.

Додавши ймовірності "за рядком", аналогічно знайдемо розподіл складової Y:

Y	2.3	2.7
P	0.29	0.71

Контроль: $0.29 + 0.71 = 1$.

2. Задана інтегральна функція двовимірної випадкової величини

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - 3^{-x} - 3^{-y} + 3^{-x-y} & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини.

Розв'язування. Скористаємося формулою

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ln 3(3^{-x} - 3^{-x-y}), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \ln^2 3 \cdot 3^{-x-y}.$$

Отже, щільність розподілу має вигляд

$$f(x,y) = \begin{cases} 3^{-x-y} \ln^2 3 & \text{при } x \geq 0, y \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, y < 0. \end{cases}$$

3. Задана щільність розподілу неперервної двовимірної випадкової величини
$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}.$$
Знайти: а) щільності розподілу складових; б) умовні щільності розподілу складових.

Розв'язування. а) Знайдемо щільність розподілу X:
$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}dy=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{5}{2}(y^2+\frac{2}{5}xy+\frac{1}{5}x^2)}dy=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{5}{2}(y+\frac{1}{5}x)^2-\frac{2}{5}x^2)}dy=$$
$$=\frac{1}{\pi}e^{-\frac{2}{5}x^2}\sqrt{\frac{2}{5}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz,\quad \text{де } z=\sqrt{\frac{5}{2}}\Big(y+\frac{1}{5}\Big)x.$$
Скориставшись рівністю $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$, маємо
$$f_1(x)=\sqrt{\frac{2}{5}}\frac{1}{\pi}\sqrt{\pi}e^{-\frac{2}{5}x^2}=\sqrt{\frac{2}{5\pi}}e^{-\frac{2}{5}x^2}.$$
Аналогічно знаходимо
$$f_2(y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2-2y^2}dx=\frac{1}{\pi}e^{-2y^2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{\pi}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2y^2}.$$
б) Знайдемо умовні щільності складових:
$$\varphi(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x+y)^2},$$

$$\psi(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{5}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{10}(x+5y)^2}.$$

4. Задана щільність розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y):

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xye^{-x^{-}y^2}, & (x > 0, y > 0), \\ 0, & (x < 0, y < 0). \end{cases}$$

Знайти: а) Математичне сподівання складових X і Y; б) дисперсію складових.

Розв'язування. а) Знайдемо спочатку щільність розподілу X:

$$f_1(x) = \int_0^\infty f(x,y)dy = 4xe^{-x^2} \int_0^\infty ye^{-y^2}dy = -2xe^{-x^2} \cdot e^{-y^2}\Big|_0^\infty =$$

$$= 2xe^{-x^2} \ (x > 0).$$

Аналогічно знаходимо

$$f_2(y) = 2ye^{-y^2} \ (y > 0).$$

Знайдемо математичне сподівання складової X:

$$M(X) = \int_0^\infty xf_1(x)dx = \int_0^\infty x(2xe^{-x^2}dx).$$

Інтегруючи частинами і враховуючи, що інтеграл Пуассона $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, одержимо $M(X) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Очевидно, $M(Y) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

б) Знайдемо дисперсію X:

$$D(X) = \int_0^\infty x^2 f_1(x)dx - [M(X)]^2 = \int_0^\infty 2x^3e^{-x^2}dx - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4};$$

очевидно, $D(Y) = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

5. Визначити математичне сподівання і кореляційну матрицю системи випадкових величин (X, Y), якщо

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

Розв'язування. Знайдемо числові характеристики системи за наведеними раніше формулами:

$$M(X) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{(x^2 + y^2 + 1)^3} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lim_{b \to \infty} \frac{(x^2 + y^2 + 1)^{-2}}{-2} \Big|_{x=-b}^{x=b} dy = 0.$$

Очевидно, що з огляду на симетрію розподілу $M(Y) = 0$.

Визначимо дисперсії величин, які входять до системи:

$$D(X) = M(X^2) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + y^2 + 1)^3}.$$

Проінтегрувавши один раз частинами, а далі переходячи до полярних координат, маємо

$$D(X) = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cdot xdx}{(x^2 + y^2 + 1)^3} =$$

$$= \left(\begin{array}{cc} u = x, & du = dx, \\ dv = \dfrac{xdx}{(x^2 + y^2 + 1)^3}, & v = -\dfrac{1}{4} \dfrac{1}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \end{array} \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\left[\lim_{b \to \infty} -\frac{x}{4(x^2 + y^2 + 1)^2} \right] \Bigg|_{x=-b}^{x=b} \right) dy +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+y^2+1)^2}=\left(\begin{array}{ll} x=r\cos\varphi, & \\ y=r\sin\varphi, & dxdy=rdrd\varphi \\ x^2+y^2=r^2, & \end{array}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{\infty}\frac{rdr}{(r^2+1)}=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi=\frac{1}{2}.$$

На підставі симетричності щільності розподілу системи маємо: $D(Y)=\dfrac{1}{2}$. Залишилося знайти K_{XY}. Математичні сподівання X і Y дорівнюють нулеві, а тому

$$K_{XY}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}ydy\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+y^2+1)^3}=0.$$

Отже,

$$K=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

6. Система двох випадкових величин (X,Y) рівномірно розподілена в трикутнику (рис. 5.5), обмеженому прямими $y=x$, $y=0$, $x=2$. Установити: залежні чи незалежні X і Y.

Розв'язування:

Якщо система двох неперервних випадкових величин має рівномірний закон розподілу в області трикутника OAB, площа якого дорівнює 2, тоді

$$f(x,y)=\begin{cases}0,5, \text{ якщо } (x,y)\in D, D\{0<x<2; 0<y<x\}\\ 0, \text{ якщо } (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Знайдемо щільності складових $f_1(x)$, та $f_2(y)$:

$$f_1(x)=\int\limits_{0}^{x}f(x,y)dy=\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2}y\Big|_0^x=\frac{1}{2}x;$$

отже $f_1(x) = \dfrac{1}{2}x$, якщо $0 < x < 2$.

$$f_2(y) = \int_y^2 f(x,y)dx = \frac{1}{2}\int_y^2 dx = \frac{1}{2}x\Big|_y^2 = \frac{2-y}{2}$$

отже $f_1(y) = \dfrac{2-y}{2}$ якщо $0 < x < 2$.

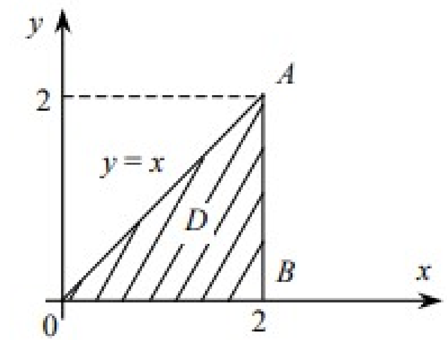


Рис. 5.5

Для перевірки незалежності (залежності) випадкових величин X і Y обчислимо умовні щільності ймовірностей складових:

$$f_1(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{1}{2-y}; \quad f_2(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{x}.$$

Оскільки $f_1(x) \neq f_1(x/y)$ і $f_2(y) \neq f_2(y/x)$, то випадкові величини X і Y є залежні.

Завдання для самостійного розв'язування

○ **1.** Двовимірна випадкова величина (X, Y) має щільність розподілу

$$f(x,y) = \frac{a}{(3+x^2)(1+y^2)}.$$

Знайти: 1) параметр a; 2) функцію розподілу $F(x,y)$; 3) імовірність потрапити у квадрат, обмежений прямими $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

2 (д/з). Система випадкових величин (X, Y) має щільність розподілу $f(x, y) = \dfrac{A}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}$. Знайти A і функцію розподілу $F(x, y)$.

Відповідь. $A = 3$, $F(x, y) = \left(\dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}\right) \left(\dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{5} + \dfrac{1}{2}\right)$.

∘ **3.** Знайти $P\left(x < \dfrac{1}{2}, y < \dfrac{1}{3}\right)$, якщо відома функція розподілу системи

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 2x + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 3y + \frac{1}{2}\right).$$

4. Задана диференціальна функція неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y): $f(x, y) = \dfrac{1}{2} \sin(x + y)$ у квадраті $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$; поза квадратом $f(x, y) = 0$. Знайти математичні сподівання й дисперсію складових.

Відповідь. $M(X) = M(Y) = \dfrac{\pi}{4}$, $D(X) = D(Y) = (\pi^2 + 8\pi - 32)/16$.

∘ **5.** Система випадкових величин (X, Y) розподілена зі сталою щільністю всередині області $D = \{3 \le x \le 7; 11 \le y \le 16\}$ і $f(x, y) = 0$ поза областю. Знайти: 1) $f(x, y)$; 2) $F(x, y)$; 3) $f_1(x)$, $f_2(y)$.

6. Задано $f(x, y) = a$, якщо $(x, y) \in \Omega$, $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin \Omega$, де $\Omega = (-6 \le x \le 2,\ -3 \le y \le 5)$. Знайти a. Обчислити r_{xy}, $P(-4 < x < 1;\ -2 < y < 4)$.

Відповідь. $a = 1/64$, $r_{xy} = 0$, $P(-4 < x < 1;\ -2 < y < 4) = 15/32$.

∘ **7.** Закон системи двох дискретних випадкових величин (X, Y) заданий таблицею:

Y \ X	2	4	6	8	p_{y_i}
-6	0.1 a	0.5a	0.4 a	a	
-4	0.9 a	0.4 a	0.5 a	0.2 a	
-2	a	2.1 a	1.1 a	1.8 a	
p_{x_i}					

Обчислити r_{xy}, $M(X/y=4)$, $M(Y/x=-2)$.

Відповідь. $r_{xy}=-0,009$; $M(X/y=4)=-3,3$; $M(Y/x=-2)=5,23$.

8. Щільність імовірностей системи випадкових величин задана виразом $f(x,y)=a\cos(x-y)$, якщо $(x,y)\in\Omega$, $f(x,y)=0$, якщо $(x,y)\notin\Omega$, де $\Omega=(0\le x\le\pi/2,\ 0\le y\le\pi/2)$. Визначити a, r_{xy}.

Відповідь. $a=1/2$, $r_{xy}=\dfrac{\pi^2-8\pi+16}{\pi^2+8\pi-32}$.

9 (д/з). Щільність імовірностей двох випадкових величин (X,Y) задано виразом

$$f(x,y)=ae^{-\frac{(x+3)^2}{8}-\frac{(y-1)^2}{2}},\ \ -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty.$$

Знайти a; $M(x)$; $M(y)$; σ_x; σ_y; r_{xy}.

Відповідь. $a=\dfrac{1}{4\pi}$, $M(x)=-3$, $M(y)=1$, $\sigma_x=2$, $\sigma_y=1$, $r_{xy}=0$.

10. За заданою щільністю ймовірностей

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-0,5(x^2+2xy+5y^2)},\ \ -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty,$$

знайти $f(x)$, $f(y)$.

Відповідь. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2,5\pi}}e^{-0,4x^2}$, $f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{0,5\pi}}e^{-2y^2}$.

∘ **11.** Виготовлені на заводі циліндри сортуються за відхиленням їх внутрішніх діаметрів від номінального розміру на чотири групи зі значеннями 0,01; 0,02; 0,03; 0,04 мм і за овальністю на чотири групи зі значенями 0,002; 0,004; 0,006; 0,008 мм. Спільний розподіл цих відхилень X – діаметра і Y – овальності циліндрів наведено в таблиці:

$Y \backslash X$	0,01	0,02	0,03	0,04	p_{y_i}
0,002	0,01	0,02	0,04	0,04	
0,004	0,03	0,24	0,15	0,06	
0,006	0,04	0,1	0,08	0,08	
0,008	0,02	0,04	0,03	0,02	
p_{x_i}					

Знайти r_{xy}.

Відповідь. $r_{xy} = 0,141$.

12. П'ять приладів випробовують на надійність. Імовірність того, що окремо взятий прилад витримає режим випробування дорівнює 0,85. Нехай X – число приладів, які витримають випробування, а Y – число приладів, які не витримають їх. Побудувати закон спільного розподілу X і Y і обчислити K_{xy}, r_{xy}.

Відповідь. $K_{xy} = -0,6375$, $r_{xy} = -1$.

13. У трьох посудинах містяться однотипні вироби. У першій посудині міститься 6 стандартних і 4 браковані вироби; у другій – 8 стандартних і 2 браковані, а у третій – 9 стандартних і 1 бракований виріб. Із кожної посудини навмання беруть по одному виробу. Нехай X – поява числа стандартних виробів серед трьох навмання взятих, а Y – поява відповідного числа бракованих. Побудувати закон розподілу X і Y і обчислити K_{xy}, r_{xy}.

Відповідь.

X / Y	0	1	2	3
0	0	0	0	0,432
1	0	0	0,444	0
2	0	0,116	0	0
3	0,008	0	0	0

$K_{xy} = 0,21$, $r_{xy} = 0,148$.

14 (с/р). Брак продукції заводу внаслідок дефекту A становить 3%, а внаслідок дефекту B – $4,5\%$. Стандартна продукція становить 95%. Знайти кореляційний момент і коефіцієнт кореляції між дефектами A і B.

Відповідь. $K_{AB} = 0,02365$, $r_{AB} = 0,67$.

15. Задана щільність імовірностей:

$f(x,y) = 0,5\sin(x+y)$, якщо $(X,Y) \in \Omega$;

$f(x,y) = 0$, якщо $(X,Y)\overline{\in}\Omega$,

де $\Omega = \left\{0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\, 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

Побудувати кореляційну матрицю.

Відповідь.

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} 0,188 & -0,046 \\ -0,046 & 0,188 \end{pmatrix}.$$

○ **16.** Система випадкових величин (X,Y) має щільність імовірностей

$$f(x,y) = \frac{a}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)},$$

якщо $(X,Y) \in \Omega$ де $\Omega = (-\infty < x < \infty; -\infty < y < \infty)$. Знайти a і $F(x,y)$, r_{xy}.

Відповідь. $a = 20$, $F(x,y) = \left(\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{y}{5} + \dfrac{1}{2}\right)$, $r_{xy} = 0$.

17. За заданою функцією розподілу ймовірностей

$$F(x,y) = (1 - e^{-4x})(1 - e^{-5y}),\ \ x \geq 0, y \geq 0$$

знайти $f(x,y)$ і r_{xy}.

Відповідь. $f(x,y) = 20e^{-4x-5y}$, $x \geq 0$, $y \geq 0$; $r_{xy} = 0$.

18 (д/з). За заданою функцією розподілу ймовірностей системи (X,Y) маємо:

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq -6,\ y \leq 4; \\ \dfrac{x+6}{8}, & -6 < x \leq 2,\ y > 4; \\ \dfrac{(x+6)(y+2)}{48}, & -6 < x \leq 2,\ -2 < y \leq 4; \\ \dfrac{y+2}{6}, & x > 2,\ -2 < y \leq 4; \\ 1, & x > 2,\ y > 4. \end{cases}$$

Знайти K_{xy}. Обчислити $P(-2 < x < 1,\ -1 < y < 3)$.

Відповідь. $K_{xy} = 0$; $P(-2 < x < 1, -1 < y < 3) = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

19. Задано

$f(x,y) = a$, якщо $(X,Y) \in \Omega$;

$f(x,y) = 0$, якщо $(X,Y) \overline{\in} \Omega$,

де $\Omega = \{0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$.

Знайти a і $r_{x,y}$.

Відповідь. $a = 3$; $r_{x,y} = 0$.

20. Задано

$f(x,y) = a(xy + x^2)$, якщо $(X,Y) \in \Omega$;

$f(x,y) = 0$, якщо $(X,Y) \overline{\in} \Omega$,

де $\Omega = \{0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$.

Знайти a і побудувати кореляційну матрицю.

Відповідь. $a = \dfrac{120}{11}$; $K_{ij} = \begin{pmatrix} 0,81 & 0,035 \\ 0,035 & 0,0423 \end{pmatrix}$.

Задача № 21. Закон системи двох дискретних випадкових величин (X,Y) задано таблицею:

X / Y	2,2	4,2	6,2	8,2	p_{y_i}
2,5	0,02	a	0,08	0,1	
3,5	a	0,04	0,06	0,2	
4,5	0,08	0,06	0,6a	0,1	
p_{x_i}					

Знайти ймовірності p_{21}; p_{12}; p_{33}; побудувати кореляційну матрицю і нормовану кореляційну матрицю.

Відповідь. $p_{21} = 0,1$; $p_{12} = 0,1$; $p_{33} = 0,06$.

$$K = \begin{pmatrix} 5,432 & -0,13 \\ -0,13 & 0,6 \end{pmatrix}; \ \begin{pmatrix} 1 & -0,072 \\ -0,072 & 1 \end{pmatrix}.$$

22. Задано

$f(x, y) = a(1 + xy)x$, якщо $(X, Y) \in \Omega$;

$f(x, y) = 0$, якщо $(X, Y)\overline{\in}\Omega$,

де $\Omega = \{0 \le x \le 1,\ x \le y \le \sqrt{x}\}$.

Знайти a і побудувати кореляційну матрицю і нормовану кореляційну матрицю.

Відповідь. $a = \dfrac{105}{23}$; $K = \begin{pmatrix} 0,09478 & 0,14 \\ 0,14 & 0,2995 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0,827 \\ 0,827 & 1 \end{pmatrix}$.

Тема 6. Функції випадкового аргументу

Визначення. *Якщо кожному можливому значенню випадкової величини X відповідає одне можливе значення випадкової величини Y, то Y називається функцією випадкового аргументу X:*

$$Y = g(X). \tag{6.1}$$

Якщо X є дискретною випадковою величиною, то і $Y = g(X)$ буде дискретною випадковою величиною; якщо ж X – неперервна випадкова величина, то й Y буде неперервною.

Нехай аргумент X – дискретна випадкова величина, закон розподілу імовірностей якої має вигляд:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Тоді закон розподілу випадкової величини $Y = g(X)$ набуде вигляду:

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\ldots$	$g(x_n)$
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Тут кожне з можливих значень Y отримують, виконуючи ті операції, які зазначені в невипадковій функції, умовно позначеної g. При цьому, якщо серед можливих значень Y є однакові, то в законі розподілу записують тільки одне з них з імовірністю, що дорівнює сумі ймовірностей повторюваних значень Y.

Числові характеристики **функції дискретного випадкового аргументу**:

1) математичне сподівання

$$M(Y) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i)p_i. \tag{6.2}$$

2) дисперсія

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{i=1}^{n} g^2(x_i)p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i)p_i\right)^2. \quad (6.3)$$

Нехай аргумент X є неперервною випадковою величиною, закон розподілу ймовірностей якої задано щільністю $f(x)$. Необхідно знайти щільність розподілу ймовірностей $f_1(Y)$, якщо $Y = g(x)$.

Доведено, що, якщо $Y = g(x)$ – диференційовна строго зростаюча або строго спадна функція, обернена до якої $x = \Psi(y)$, то щільність розподілу ймовірностей випадкової величини Y має вигляд:

$$f_1(y) = f[\Psi(y)] \cdot |\Psi'(y)|. \quad (6.4)$$

Якщо при цьому виконується умова нормування для $f_1(y)$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f_1(y)dy = 1,$$

то $f_1(y)$ знайдено правильно (a і b – межі інтервалу, на якому визначена щільність $f(x)$).

Числові характеристики **функції неперервного випадкового аргументу** визначаються за формулами:

1) математичне сподівання:

$$M(Y) = \int_{a}^{b} g(x)f(x)dx. \quad (6.5)$$

Якщо ж $f_1(y)$ відома, то справджується рівність:

$$M(Y) = \int_{g(a)}^{g(b)} yf_1(y)dy. \quad (6.6)$$

2) дисперсія:

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \int\limits_a^b g^2(x) f(x) dx - M^2(Y) =$$

$$= \int\limits_{g(a)}^{g(b)} y^2 \cdot f(y) dy - M^2(Y). \qquad (6.7)$$

Якщо функція $g(x)$ на інтервалі (a, b) задання випадкової величини X є немонотонною функцією, то в цьому випадку слід виділити ділянки монотонності кривої $y = g(x)$, для кожної з цих ділянок знайти щільність ймовірності, і в результаті підсумувати одержані вирази.

Характеристичні функції

Закон розподілу випадкової величини X може бути заданий характеристичною функцією $g_X(t) = M(e^{itX})$ $(i^2 = -1)$.

Властивості характеристичної функції:

1) $g_X(0) = 1$;

2) Якщо $Y = aX + b$ і відома $g_X(t)$, то $g_Y(t) = e^{itb} \cdot g_X(at)$;

3) $g_{X+Y}(t) = g_X(t) \cdot g_Y(t)$, якщо X і Y – незалежні.

Характеристичні функції деяких законів розподілу:

1) біноміальний закон розподілу:

$$g_X(t) = (pe^{it} + 1 - p)^n;$$

2) закон розподілу Пуассона:

$$g_X(t) = e^{-\lambda}(-e^{it});$$

3) рівномірний закон розподілу на проміжку $(a, b]$:

$$g_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)};$$

4) показниковий закон розподілу:

$$g_X(t) = \frac{a}{a - it};$$

5) нормальний закон розподілу:

$$g_X(t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Приклади розв'язування задач

1. Випадкову величину X задано щільністю розподілу

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \le 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } 0 < x \le 1; \\ \frac{1}{3}x, & \text{якщо } 1 < x \le 2; \\ 0, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

Розв'язування. Дослідимо задану функцію на монотонність: $y' = 2x$, $2x = 0$, $x = 0$. Отже, критична точка міститься в області зміни X. Функція монотонно зростає в області зміни аргументу x. Тому можна застосувати формулу $f(y) = f_1(\psi(y))|\psi'(y)|$, де $x = \psi(y) = \sqrt{y}$, $\psi'(y) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$.

Щільність розподілу для X має два відміні від нуля аналітичні вирази. Стільки ж виразів матиме й щільність розподілу Y.

Якщо $x \in (0, 1]$, $y \in (0, 1]$, то $f_1(x) = \dfrac{1}{2}$, $f(y) = \dfrac{1}{4\sqrt{y}}$.

Якщо $x \in (1, 2]$, $y \in (1, 4]$, то $f_1(x) = \dfrac{1}{3}x$, $f(y) = \dfrac{1}{6}$.

Звідси маємо:

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y \le 0; \\ \frac{1}{4\sqrt{y}}, & \text{якщо } 0 < y \le 1; \\ \frac{1}{6}, & \text{якщо } 1 < y \le 4; \\ 0, & \text{якщо } x > 4. \end{cases}$$

2. Швидкість обробки – випадкова величина X – за напівнормальним законом розподілу:

$$f_1(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad x > 0.$$

Знайти закон розподілу випадкової величини Y – часу, потрібного для обробки деталі, якщо сумарний час її обробки дорівнює A.

Розв'язування. З умови задачі випливає, що $Y = \dfrac{A}{x}$. Ця функція монотонна при додатних значеннях X. Скориставшись формулою

$$f(y) = f_1(\psi(y))|\psi'(y)|, \quad x = \psi(y) = \frac{A}{y}, \quad \psi'(y) = -\frac{A}{y^2}, \tag{6.8}$$

маємо

$$f(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{A^2}{2y^2\sigma^2}} \frac{A}{y^2} = \frac{2A}{3y^2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A}{2\sigma^2 y^2}}.$$

Оскільки область зміни X – множина додатних чисел, то маємо

$$f(y) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \ y \leq 0, \\ \dfrac{2A}{\sigma y^2 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{A}{2\sigma^2 y^2}}, & \text{якщо } \ y > 0. \end{cases}$$

3. Випадкова величина X розподілена за законом Коші

$$f(x) = \frac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}, -\infty < x < +\infty.$$

Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \mathrm{arcctg} X$.

Розв'язування. Функція $y = \mathrm{arcctg} x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ спадає від π до 0 та має обернену функцію $x = \mathrm{arcctg} y$. Знаходимо похідну $x' = -\frac{1}{\sin^2 y}$ і за формулою (6.8) дістанемо

$$g(y) = \frac{1}{\pi\left(1 + \mathrm{ctg}^2 y\right)} \cdot \left| -\frac{1}{\sin^2 y} \right| = \frac{\sin^2 y}{\pi \cdot \sin^2 y} = \frac{1}{\pi}.$$

Остаточно знаходимо

$$g(x) = \begin{cases} 0, y \le 0 \\ \dfrac{1}{\pi} y, 1 < y \le \pi \\ 0, y > \pi. \end{cases}$$

4. Випадкова величина X розподілена за законом, щільність якого

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 1; \\ a\sqrt[3]{x^2}, 1 < x \le 8; \\ 0, x > 8. \end{cases}$$

Знайти та щільність розподілу випадкової величини $Y = X^2 - 1$.

Розв'язування. Знайдемо параметр з умови нормування

$$\int\limits_1^8 a\sqrt[3]{x^2}dx = 1 \Rightarrow \frac{3}{5}ax^{\frac{5}{3}}\Big|_1^8 = 1 \Rightarrow \frac{93}{5}a = 1 \Rightarrow a = \frac{5}{93}.$$

Коли $x \in [1; 8]$, то $y \in [0; 63]$. На відрізку $[1; 8]$ функція $y = x^2 - 1$ має обернену $x = \sqrt{y+1}$, похідна якої $x' = \dfrac{1}{2\sqrt{y+1}}$. За формулою (6.8) дістанемо

$$g(x) = \frac{5}{93}\sqrt[3]{y+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y+1}} = \frac{5}{186\sqrt[6]{y+1}}.$$

Отже, щільність випадкової величини Y має вигляд

$$g(x) = \begin{cases} 0, y \le 0 \\ \dfrac{5}{186\sqrt[6]{y+1}}, 0 < y \le 63; \\ 0, y > 63. \end{cases}$$

5. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Знайти щільність розподілу випадкової величини $Y = \cos X$.

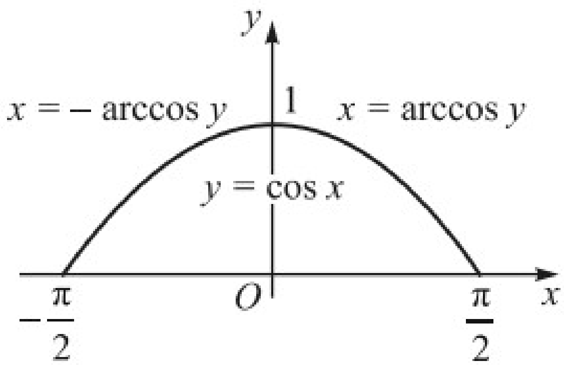


Рис. 6.1

Розв'язування. Випадкова величина X рівномірно розподілена на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тому на цьому інтервалі щільність її розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\pi/2 - (-\pi/2)} = \frac{1}{\pi}.$$

Зовні цього інтервалу $f(x) = 0$.

На інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $y = \cos x$ не монотонна (рис. 6.1), тому розбиваємо його на два інтервали $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ та $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Коли $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то функція $y = \cos x$ зростає і має обернену $x = -\arccos y$, похідна якої $x' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Коли $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то функція $y = \cos x$ спадна і має обернену $x = \arccos y$ похідна якої $x' = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. За формулою (6.8) маємо

$$g(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right| + \frac{1}{\pi} \mid -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

Якщо $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $y \in (0; 1)$. Отже, маємо

$$g(x) = \begin{cases} 0, y \leq 0 \\ \dfrac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, 0 < y \leq 1; \\ 0, y > 1, \end{cases}$$

6. Випадкова величина X розподілена за таким законом:

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо}\, x \leq 0, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{якщо}\, 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{якщо}\, x > 2. \end{cases}$$

Визначити характеристичну функцію для випадкової величини $Y = 2X + 3$.

Розв'язування. Знайдемо характеристичну функцію для випадкової величини X, а далі скористаємося властивістю характеристичних функцій:

$$g_X(t) = \int_0^2 \frac{1}{2} x e^{itx} dx = \left| \begin{array}{ll} u = x; & du = dx, \\ dv = e^{itx} dx, & v = \dfrac{e^{itx}}{it} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{2it} e^{itx} \Big|_0^2 - \frac{1}{2it} \int_0^2 e^{itx} dx = \frac{e^{2it}}{it} + \frac{e^{2it}}{2t^2} - \frac{1}{2t^2} = \frac{e^{2it} - 1 - 2ite^{2it}}{2t^2}.$$

Оскільки $Y = 2X + 3$ і відома характеристична функція $g_X(t)$, то

$$g_Y(t) = e^{3it} g_X(2t) = \frac{e^{3it}(e^{4it} - 1 - 4ite^{4it})}{8t^2}.$$

7. Задано послідовність функцій розподілу:

$$F_n(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^i}{i!}, \quad n = 2r + 1, r \in \mathbb{Z}_0.$$

Визначити $g(t)$ – граничну функцію для відповідної послідовності характеристичних функцій.

Розв'язування. Застосуємо теорему про граничну характеристичну функцію для послідовності функцій розподілу. Знайдемо граничну функцію розподілу.

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(-\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{x^i}{i!} \right) = 1 - e^{-x}.$$

Отже, гранична функція розподілу – функція показникового розподілу з параметром $a = 1$. Тоді гранична характеристична функція

$$g(t) = \frac{1}{1 - it}.$$

Завдання для самостійного розв'язування

○ **1.** Залежно від умов зберігання кількість придатної продукції через період t визначається за формулою

$$Y(t) = Ae^{-Xt},$$

де A – кількість продукції, закладеної на зберігання; X – випадкова величина, рівномірно розподілена на проміжку $(c; d)$. Визначити закон розподілу для $Y(t)$. Знайти для нього математичне сподівання та дисперсію.

Відповідь. $M(Y) = A\dfrac{e^{ct} - e^{-dt}}{t(d-c)}$,

$D(Y) = \dfrac{A^2}{2t^2(d-c)}\Big((t-2)e^{-2dt} - (t+2)e^{-2dt} + 4e^{-(c+d)t}\Big)$.

2. Довести, що сума двох випадкових величин, розподілених за законом Пуассона, має також закон розподілу Пуассона.

3 (д/з). Випадкова величина розподілена рівномірно на проміжку $(-4, 4)$. Знайти $g_Y(t)$, якщо $Y = 3X + 6$.

Відповідь. $\dfrac{e^{18it} - e^{-6it}}{24it}$.

4 (д/з). Незалежні випадкові величини X і Y розподілені нормально, $M(X) = 4$, $D(X) = 16$; $M(Y) = 6$; $D(Y) = 20$. Знайти $g_Z(t)$, якщо $Z = 5X + 3Y$.

Відповідь. $e^{38it-290t^2}$.

5. Визначити характеристичну функцію випадкової величини X, якщо щільність розподілу її – трикутник ABC. Точка B лежить на осі ординат, а точки A і C мають координати $A(-2,0)$, $C(2,0)$.

Відповідь. $\dfrac{2 - (e^{-2it} + e^{2it})}{4t^2}$.

Тема 7. Закон великих чисел. Граничні теореми теорії ймовірностей

Математичні закони теорії ймовірностей одержані внаслідок формалізації реальних статистичних закономірностей, що притаманні масовим випадковим подіям. Під час спостереження масових однорідних випадкових подій у них виявляються певні закономірності типу стабільності. Так, у разі великого числа проведених експериментів відносна частота події $W(A)$ виявляє стабільність і за ймовірністю наближається до ймовірності $P(A)$; середнє арифметичне для випадкової величини наближається за ймовірністю до її математичного сподівання.

Усі ці явища об'єднують під спільною назвою закону великих чисел, який можна загалом сформулювати так: у разі великого числа експериментів, що здійснюються для вивчення певної випадкової події або випадкової величини, середній їх результат практично перестає бути випадковим і може передбачатися з великою надійністю.

Закон великих чисел об'єднує кілька теорем, у кожній з яких за певних умов виявляється факт наближення середніх характеристик під час проведення великої кількості експериментів до певних невипадкових, сталих величин.

Для доведення цих теорем використовується нерівність Чебишова.

Лема Чебишева. *Якщо всі можливі значення випадкової величини X невід'ємні, то ймовірність того, що в результаті випробування вона набуде значення, більше від додатного числа b, не перевищує відношення математичного сподівання величини X до числа b:*

$$P\{X > b\} \leq \frac{M(X)}{b}. \tag{7.1}$$

Нерівність Чебишева. *Якщо випадкова величина X має обмежені $M(X)$ і $D(X)$, то ймовірність того, що відхилення цієї величини від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше від додатного числа ε, не менша ніж $1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$:*

$$P\{|X - M(X)| \leq \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{7.2}$$

Теорема Чебишева (теорема про стійкість середніх). *Якщо X_1, X_2, ..., X_n попарно незалежні випадкові величини з обмеженими дисперсіями ($D(X_i) \leq C$, $i = \overline{1, n}$), то для довільного числа $\varepsilon > 0$ і достатньо великого n імовірність події:*

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \cdots + M(X_n)}{n} \right| \leq \varepsilon$$

буде як завгодно близька до одиниці.

Іншими словами,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \left| \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M(X_i)}{n} \right| \leq \varepsilon \right\} = 1. \tag{7.3}$$

У частинному випадку, якщо $M(X_1) = M(X_2) = \ldots = M(X_n) = \ldots = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - a \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

З теореми Чебишова випливає, що середнє арифметичне випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ для достатньо великого n буде з імовірністю близькою до 1 як завгодно мало відрізнятися від середнього арифметичного їхніх математичних сподівань або від числа a у частинному випадку.

Нерівність Чебишева для відносної частоти має вигляд

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}\ge 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{7.4}$$

Теорема Бернуллі (теорема про стійкість відносних частот). *Якщо в кожному з n повторних незалежних випробувань імовірність p появи випадкової події A стала, то при необмеженому збільшенні числа n експериментів імовірність того, що відхилення відносної частоти появи події A від її ймовірності за абсолютною величиною не перевищує деякого $\varepsilon > 0$, буде як завгодно близька до одиниці:*

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right\}=1. \tag{7.5}$$

Центральна гранична теорема Ляпунова

Нехай задано n незалежних випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n, які мають один і той самий закон розподілу імовірностей із $M(X_i) = 0$, $\sigma(X) = \sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|\nu_3|$. Тоді зі зростанням числа n закон розподілу $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ наближатиметься до нормального.

(Зауважимо, що це один із найпростіших варіантів центральної граничної теореми.)

Приклад розподілу $\dfrac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} = \bar{X}$ при киданні грального кубика. Результат кожного кидка є випадковою величиною x_i з рівномірним розподілом, тобто

X_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Графічно цей розподіл подамо на рис. 7.1:

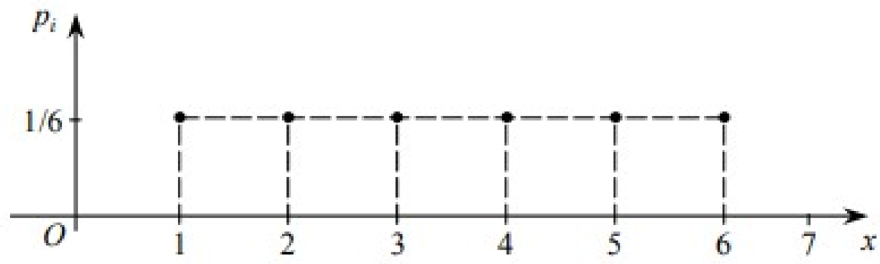


Рис. 7.1

$$M(X_i) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5; \quad \sigma^2(X_i) = 2,92.$$

Закон розподілу величини $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2}{2}(n = 2)$:

$\bar{X}$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
p	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

$$M(\bar{X}) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 1,5 \cdot \frac{2}{36} + 30 \cdot \frac{3}{36} + \ldots + 5,5\frac{2}{36} + 6,0 \cdot \frac{1}{36} = 3,5;$$

$$\sigma^2(\bar{X}) = 1,46 \Rightarrow \sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{2}\sigma^2(X_i) = \frac{2,92}{2} = 1,46.$$

Графічно розподіл величини $\bar{X}$ зображено на рис. 7.2:

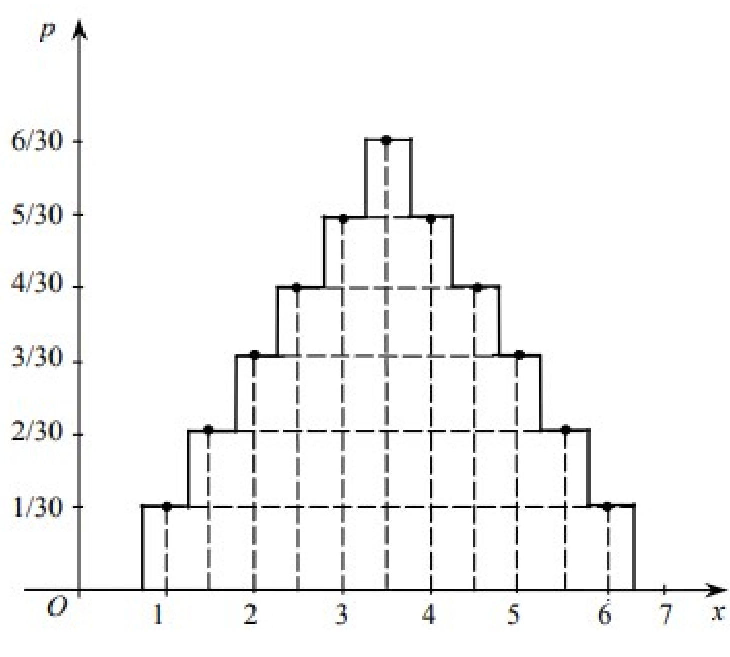


Рис. 7.2

З рис. 7.2 бачимо, що розподіл $\bar{X}$ близький до нормального. Більш близьким до нормального буде розподіл $\bar{X}$ при збільшенні n.

Для $n = 5, 10$, відповідно, маємо $M(\bar{X}) = 3,5$, тобто не змінюється, і $\sigma^2(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2(X_i)}{5}$ (для $n = 5$) та $\sigma^2(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2(X_i)}{10}$ (для $n = 10$). Отже, $\sigma^2(\bar{X}) = \dfrac{\sigma^2(X_i)}{n}$ і $\sigma(\bar{X}) = \dfrac{\sigma(X_i)}{\sqrt{n}}$ для довільного $n > 1$.

У практичних задачах центральну граничну теорему Ляпунова часто використовують для обчислення ймовірності того, що сума багатьох випадкових величин набере значення, яке належить вказаному інтервалу. Тому для обчислення ймовірності події $\alpha < X < \beta$ використовується формула (4.25)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right). \tag{7.6}$$

Приклади розв'язування задач

1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,2$.

Розв'язування. Знайдемо математичне сподівання й дисперсію величини X:

$$M(X) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,8 = 0,54,$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0,3^2 \cdot 0,2 + 0,6^2 \cdot 0,8 - 0,54^2 = 0,0144.$$

Скористаємось нерівністю Чебишева у вигляді (7.2). Підставляючи $M(X) = 0,54$, $D(X) = 0,144$, $\varepsilon = 0,2$, одержимо

$$P(|X - 0,54| < 0,2) \geq 1 - \frac{0,0144}{0,04} = 0,64.$$

2. Послідовність незалежних випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n, ... задана законом розподілу

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
P	$\dfrac{1}{2n^2}$	$1-\dfrac{1}{n^2}$	$\dfrac{1}{2n^2}$.

Перевірити можливість застосування теореми Чебишева до заданої послідовності.

Розв'язування. Для того, щоб до послідовності випадкових величин можна було б застосувати теорему Чебишева, достатньо, щоб усі величини були попарно незалежними, мали скінченні математичні сподівання й рівномірно обмежені дисперсії.

Оскільки випадкові величини незалежні, то вони попарно незалежні. Отже, перша умова теореми Чебишева виконана.

Знайдемо математичні сподівання випадкових величин. Маємо

$$M(X_n) = -n\alpha \cdot \frac{1}{2n^2} + 0\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + n\alpha \cdot \frac{1}{2n^2} = 0.$$

Бачимо, що математичні сподівання випадкових величин скінченні (дорівнюють нулю), тобто друга вимога теореми виконана.

Знайдемо дисперсії випадкових величин. Для цього запишемо закон розподілу величин X_n^2:

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0	$n^2\alpha^2$
P	$\dfrac{1}{2n^2}$	$1-\dfrac{1}{n^2}$	$\dfrac{1}{2n^2}$

Знайдемо математичні сподівання $M(X_n^2)$:

$$M(X_n^2) = n^2\alpha^2 \cdot \frac{1}{2n^2} + 0\left(1-\frac{1}{n^2}\right) + n^2\alpha^2 \cdot \frac{1}{2n^2} = \alpha^2.$$

Знайдемо дисперсії $D(X_n)$:

$$D(X_n) = M(X_n^2) - [M(X_n)]^2 = \alpha^2.$$

Таким чином, дисперсії випадкових величин рівномірно обмежені числом α^2, тобто третя умова виконана.

Оскільки всі умови теореми Чебишева виконані для заданої послідовності випадкових величин, то теорему Чебишева можна застосувати.

3. Дисперсія кожної із 4500 незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу ймовірностей, дорівнює 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього їх математичних сподівань, взяте за абсолютною величиною, не перевищить 0,4.

Розв'язування. Використовуючи нерівність Чебишова для теореми Чебишова, одержимо:

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{4500} X_i}{4500} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{4500} M(X_i)}{4500}\right| < 0,4\right) \geq 1 - \frac{5}{4500 \cdot 0,4} = 0,003.$$

4. Унаслідок медичного огляду 900 допризовників було виявлено, що середня маса кожного з них на 1,2 кг більша від попереднього призову. Чи можна це констатувати як випадковість, якщо середнє відхилення маси допризовника дорівнює 8 кг?

Розв'язування.

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| < 1,2\right) \geq 1 - \frac{8}{900 \cdot (1,2)^2} =$$

$$= 1 - 0,0062 = 0,9938;$$

$$P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{900} X_i}{900} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{900} M(X_i)}{900}\right| > 1,2\right) \approx 0,0062.$$

Оскільки ця ймовірність дуже мала, відхилення маси можна вважати невипадковим.

5. Імовірність виготовити стандартну деталь робітником дорівнює 0,95. Контролю підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність відхилення відносної частоти появи стандартної деталі $W(A)$ від імовірності 0,95 не більше ніж на величину 0,02. $\left(W(A) = \dfrac{m}{n}\right)$

Розв'язування. За умовою задачі: $p = 0,95$; $q = 0,05$; $n = 400$. На підставі (7.2) дістаємо:

$$P(|W(A) - 0,95| < 0,02) \geq 1 - \frac{0,95 \cdot 0,05}{400 \cdot (0,02)^2} = 1 - 0,2969 = 0,7031.$$

6. Скільки необхідно провести експериментів n, щоб імовірність відхилення відносної частоти появи випадкової події $W(A)$ від імовірності $p = 0,85$, взятого за абсолютною величиною, на $\varepsilon = 0,001$, була б не меншою за 0,99.

Розв'язування. Із умови задачі маємо $p = 0,85$; $q = 0,15$; $\varepsilon = 0,001$,

$$P(|W(A) - 0,85| < 0,001) \geq 0,99.$$

$$1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 0,99 \longrightarrow n = \frac{pq}{0,01\varepsilon^2} = \frac{0,85 \cdot 0,15}{0,010,000001} = 12450000.$$

7. Прилад складається з 80 незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента за час T дорівнює 0,005. За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між кількістю елементів, що відмовили та середньою кількістю відмов за час T менша від двох.

Розв'язування. Нехай випадкова величина X – кількість елементів, що відмовили за час T.

$$M(X) = np = 80 \cdot 0,005 = 0,4;$$

$$D(X) = npq = 80 \cdot 0,005 \cdot 0,995 = 0,398.$$

За нерівністю Чебишева (7.2):

$$P(|X - 0,4| < 2) \geq 1 - \frac{0,398}{4} = 0,9005.$$

8. Імовірність появи події A у кожному випробуванні дорівнює 0,8. Оцінити ймовірність того, що у 100 незалежних випробуваннях подія A відбудеться від 70 до 90 разів: 1) за допомогою нерівності Чебишова; 2) за допомогою інтегральної теореми Лапласа.

Розв'язування. Знайдемо математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X – кількості появи події A у 100 незалежних випробуваннях:

$$M(X) = np = 100 \cdot 0,8 = 80;$$

$$D(X) = npq = 100 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 16.$$

Використаємо нерівність Чебишева (7.2):

$$P(70 < X < 90) = P(|X - 80| < 10) \geq 1 - \frac{16}{100} = 0,84.$$

Також використаємо інтегральну теорему Лапласа (7.6):

$$P_{100}(70; 90) \approx \Phi\left(\frac{90-80}{\sqrt{16}}\right) - \Phi\left(\frac{70-80}{\sqrt{16}}\right) = 2\Phi(2,5) = 2 \cdot 0,4938 = 0,9876.$$

Імовірність, обчислена з використанням нерівності Чебишова, набагато менша, тому що не враховує особливостей закону розподілу випадкової величини. Вона задає нижній поріг, дійсний для будь-якого закону розподілу.

9. Імовірність появи події в одному випробуванні $p = 0,9$. Скільки незалежних випробувань необхідно провести, щоб з імовірністю не меншою від 0,95 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи випадкової події від її ймовірності була менша ніж 0,01? Оцінку зробити за нерівністю Чебишова та інтегральною теоремою Лапласа.

Розв'язування. За умовою задачі

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,9\right| < 0,01\right) \geq 0,95.$$

Оцінюючи цю ймовірність за нерівністю Чебишова (7.4), дістанемо:

$$1 - \frac{0,9 \cdot 0,1}{n \cdot 0,01^2} \geq 0,95; 0,05 \geq \frac{900}{n}; n \geq 18000.$$

Оцінимо значення n на основі теореми Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-0,9\right|<0,01\right)\approx 2\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{n}{0,9\cdot 0,1}}\right);\ 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{30}\right)\geq 0,95;$$

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{30}\right)\geq 0,475;\ \frac{\sqrt{n}}{30}\geq 1,96;\ \sqrt{n}\geq 58,8;\ n\geq 3458.$$

Оцінка за інтегральною теоремою Лапласа значно менша, ніж за нерівністю Чебишова, тому що нерівність Чебишова не враховує особливостей розподілу відносної частоти.

10. За нерівністю Чебишова оцінити кількість незалежних випробувань, коли з імовірністю не меншою від 0,95 абсолютна величина відхилення відносної частоти появи випадкової події від її ймовірності не перевищує 0,05.

Розв'язування. Розглянемо формулу (7.4):

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<0,05\right)\geq 1-\frac{pq}{n\cdot 0,05^2}.$$

Вираз $pq=p(1-p)$ оцінимо максимальним його значенням 0,25 і дістанемо

$$1-\frac{0,25}{0,0025n}\geq 0,95;\ \frac{100}{n}\leq 0,05;\ n\geq 2000.$$

11. В цех надійшло 500 комплектів деталей. Математичне сподівання та дисперсія кількості бракованих деталей у кожному комплекті дорівнюють 1 та 0,8. Знайти ймовірність того, що у цих 500 комплектах буде від 490 до 510 бракованих деталей.

Розв'язування. Нехай X_i – кількість бракованих деталей в i-му комплекті, $X=\sum\limits_{i=1}^{500}X_i$ – кількість бракованих деталей у всіх 500 комплектах. За центральною граничною теоремою випадкова величина X має закон розподілу близький до нормального.

Знайдемо його числові характеристики:

$$M(X) = M\left(\sum_{i=1}^{500} X_i\right) = 500;$$

$$D(X) = D\left(\sum_{i=1}^{500} X_i\right) = 500 \cdot 0,8 = 400; \sigma(X) = 20.$$

Для нормального закону розподілу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Тому

$$P(490 < X < 510) = \Phi\left(\frac{510 - 500}{20}\right) - \Phi\left(\frac{490 - 500}{20}\right) = 2\Phi(0,5) = 0,383.$$

Завдання для самостійного розв'язування

○ **1.** Середні витрати води в населеному пункті становлять 50000 л за день. Оцінити ймовірність того, що в цьому населеному пункті протягом одного певного дня витрати води не перевищать 150000 л.

Відповідь. $P \geq \dfrac{2}{3}$.

○ **2.** Середнє квадратичне відхилення похибки вимірювання аргументу дорівнює $20'$ (математичне сподівання її дорівнює 0). Визначити ймовірність того, що похибка середнього арифметичного трьох вимірювань не перевищить одного градуса.

Відповідь. $P \geq 0,963$.

3. Випадкова величина – середня арифметична незалежних однаково розподілених випадкових величин: $n = 225$, $\sigma = 15$. Якого максимального відхилення цієї величини від її математичного сподівання можна очікувати з імовірністю $P = 0,9544$?

Відповідь. 2.

∘ **4.** Перевіряється партія деталей. З імовірністю $P = 0,01$ деталь може мати дефект A і незалежно від цього з імовірністю $P = 0,03$ – дефект B. В яких межах при $P = 0,9973$ перебуватиме кількість стандартних деталей у партії із 10000 деталей?

Відповідь. $(942; 979)$.

5 (д/з). При виготовленні виливків брак становить 20%. Скільки потрібно виготовити зливків, щоб з імовірністю $P = 0,95$ забезпечити програму випуску виробів, згідно з якою передбачено отримати 50 бездефектних зливків?

Відповідь. 70.

6 (с/р). Імовірність появи випадкової події в одному експерименті є величиною сталою і дорівнює 0,3. Із якою імовірністю можна стверджувати, що відносна частота цієї події при 100 експериментах буде знаходитись у межах $[0,2; 0,4]$?

Відповідь. 0,98.

7. Випадкова подія A може здійснитися при одному експерименті із імовірністю p. Експеримент повторили n раз. Яка ймовірність того, що при цьому виконується нерівність

$$np - 2\sqrt{npq} < m < np + 2\sqrt{npq}?$$

Відповідь. 0,9544.

8. Яке повинна мати значення величина ε у нерівності Чебишова, щоб $P(|X - a| < \varepsilon) \approx 0,99$, коли відомо, що $D(X) = 4$.

Відповідь. $\varepsilon = 20$.

9. Із якою надійністю середнє арифметичне вимірів певної величини відповідає істинному виміру цієї величини, якщо було здійснено 500 вимірювань із точністю 0,1 і при цьому дисперсії випадкових величин – результатів вимірювання – не перевищують 0,3.

Відповідь. 0,94.

$\circ$ **10.** Скільки необхідно провести вимірів діаметра втулки, щоб середнє арифметичне цих вимірів відрізнялося від істинного розміру діаметра втулки не більше як 0,05 із надійністю 90%, якщо дисперсії випадкових величин (результатів вимірів) не перевищують 0,2.

Відповідь. $n = 800$.

$\circ$ **11.** Імовірність того, що за час t із ладу вийде один конденсатор, дорівнює 0,2. Яка ймовірність того, що за час t із 100 конденсаторів із ладу вийде:

1) не менш як 28 конденсаторів;

2) від 14 до 26 конденсаторів?

Відповідь. 1) 0,98; 2) 0,9.

12 (с/р). При відливанні відливок, із яких потім виготовляють на верстатах деталі, одержують у середньому 20% браку. Скільки необхідно запланувати відливок, щоб із імовірністю не меншою за 0,95 була забезпечена програма випуску деталей, для виготовлення яких необхідно 50 бездефектних відливок?

Відповідь. $n = 305$.

13. Здійснюється вибіркове обстеження партії електроламп для визначення тривалості їх горіння. Скільки необхідно перевірити електролампочок, щоб із імовірністю не меншою за 0,9876 можна було стверджувати, що середня тривалість горіння лампочки для всіх n штук перевірених відхилялось від її середньої величини не більше ніж на 10 годин, якщо середнє квадратичне відхилення тривалості горіння лампочок дорівнює 80 годин?

Відповідь. $n = 4776$.

14. Випадкова величина $\overline{X}$ – середнє арифметичне 10000 незалежних випадкових велечин, що мають один і той самий закон розподілу, і середнє квадратичне відхилення кожної із них дорівнює 2. Яке максимальне відхилення величини $\overline{X}$ від його математичного сподівання можна очікувати із імовірністю 0,9544?

Відповідь. 0,04.

○ **15.** Верстат із програмним управлінням виготовляє за робочу зміну 900 виробів, із яких в середньому 1% складає брак. Знайти наближено ймовірність того, що за зміну буде виготовлено не менше 810 доброякісних виробів, якщо вони виявляються доброякісними незалежно один від одного.

Відповідь. 0,99865.

16. Кожна із 40 незалежних випадкових величин має гамма-розподіл із значенями параметрів $\alpha = 2$, $\lambda = 10$. На підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей записати наближено закон розподілу для випадкової величини $X = \sum_{i=1}^{40} X_i$.

Відповідь. $a = 8$; $\sigma \approx 0,9$; $f(x) = \dfrac{1}{0,9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-8)^2}{1,62}}$, $-\infty < x < \infty$.

17. У касі певного закладу в наявності є 4000 гривень. У черзі знаходиться $n = 30$ робітників. Сума X, яку потрібно виплатити кожному, є випадковою величиною із математичним сподіванням, рівним 200 грн. і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 60$ грн. Знайти ймовірність того, що суми, котра є в касі, не вистачить усім людям, які стоять у черзі.

Відповідь. $M(Y) = n$, $M(X) = 30 \cdot 200 = 6000$ грн.;
$\sigma(Y) = \sqrt{30}60 \approx 5,48 \cdot 60 \approx 328,8$ грн.;
$P(X > 4000) = 0,5 - \Phi\left(\dfrac{4000 - 6000}{328,8}\right) = 1$. Не вистачить.

18. Зберігається умова задачі 23, тільки в черзі стоїть $n = 15$ робітників і сума X, яку повинен одержати кожний із них, є випадковою величиною із значеннями $M(X) = 150$ грн., $\sigma(X) = 60$ грн. Яка ймовірність того, що суми вистачить усім людям?

Відповідь. $M(X) = 2250$ грн.; $\sigma(Y) = \sqrt{15} \cdot 60 \approx 232,4$ грн.;
$P(X > 4000) = 0,5 - \Phi\left(\dfrac{4000 - 2250}{232,4}\right) = 0,5 - 0,5 = 0.$

Усім робітникам вистачить суми, що є в касі.

19. Потяг складається із 30 вагонів. Маса кожного з них є випадковою величиною X із математичним сподіванням $M(X) = 400$ т і середнім квадратичним відхиленням $\sigma(X) = 20$ т. Локомотив може нести масу не більшу за 12100 т. Якщо маса потягу перевищує допустиму, то необхідно причеплювати другий локомотив. Знайти ймовірність того, що одного локомотива не досить для перевезення потягу.

Відповідь. $G = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ – маса потягу.
$M_G = nM(X) = 30 \cdot 400 = 12000$ т;
$\sigma(Y) = \sqrt{30}\ \sigma_X \approx 5,5 \cdot 20 = 110$ т; $P(G > 14500) \approx 0,1814.$

Варіанти завдань для модульної контрольної роботи з теорії ймовірностей

Варіант 1

1. На складі взяли 5 мішків борошна I ґатунку і 7 мішків борошна II ґатунку. Довільні 6 мішків з 12 витратили на приготування одного з видів паляниць. Знайти ймовірність того, що половина з цих 6 мішків борошна виявилася борошном I ґатунку.

2. Відбувається два постріли по мішені. Чи будуть несумісними дві події: відбулося хоча б одне влучення або був хоча б один промах?

3. Імовірність того, що один із трьох ліфтів виявиться в даний момент на першому поверсі, дорівнює 0,1. Яка ймовірність того, що хоча б один ліфт виявиться на першому поверсі?

4. 30% приладів складає спеціаліст високої кваліфікації і 70% – середньої. Надійність приладу, складеного спеціалістом високої кваліфікації, дорівнює 0,9, а приладу, складеного спеціалістом середньої кваліфікації, – 0,8. Взятий прилад працює бездоганно. Визначити ймовірність того, що його складав спеціаліст високої кваліфікації.

5. Імовірність того, що витрата води на деякому підприємстві виявиться нормальною, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що в найближчі 6 днів витрата води буде нормальною протягом 3 днів.

6. При деякому випробуванні ймовірність позитивного наслідку дорівнює 0,8. Знайти імовірність того, що число позитивних наслідків при 200 випробуваннях буде не меншим за 170.

7. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	-7	-6	-5	-4	-3
p	0,2	0,25	0,1	0,15	0,3

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Інтегральна функція розподілу випадкової величини X має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 0; \\ ax^2, & \text{при} \quad 0 \le x \le 1; \\ 1, & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію щільності розподілу $f(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу (0,25; 0,5).

9. Відомо, що випадкова величина X може набувати значення 1, 2 і 3. Знайти ймовірності цих значень, якщо математичне сподівання цієї випадкової величини дорівнює 1,8, а дисперсія дорівнює 0,56.

10. 50 % помилок приладу не виходить за межі ±10 м. Знайти процент помилок приладу, що не виходить за межі ±20 м, коли відомо, що прилад не має систематичних помилок. Випадкові помилки підпорядковуються нормальному розподілу.

11. Дисперсія кожної з 2500 незалежних випадкових величин не перевищує 5. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих випадкових величин від середнього арифметичного їх математичного сподівання не перевищує 0,4.

12. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, якщо відомий двовимірний розподіл цих величин:

Y \ X	1	2	3	4
-2	0,1	0,1	0,05	–
-1	0,05	0,2	0,2	0,05
0	–	–	0,05	0,2

Варіант 2

1. Виготовлено 6 замків, ключі до яких змішані. Випадково беруть два ключі і два замки. Яка ймовірність того, що навмання взяті ключі підійдуть до взятих замків.

2. Здійснюється 3 постріли по мішені. Перелічити елементарні події, з яких складаються події: відбулося рівно одне попадання; при повторному пострілі не було попадання.

3. Яка ймовірність, що довільно взяті 3 людини народилися в один і той самий день тижня?

4. У ящику 12 сталевих і 8 мідних деталей. Імовірність того, що сталева деталь буде придатною при складанні, дорівнює 0,95, мідна – 0,97. Знайти ймовірність того, що випадково взята з ящика деталь виявиться придатною.

5. Студенту задають 6 питань. На кожне питання дано чотири можливих відповіді, з-поміж яких необхідно вибрати одну правильну. Яка ймовірність того, що при простому вгадуванні правильна відповідь буде не менше ніж на 5 питань?

6. Яка ймовірність того, що серед 200 осіб виявиться щонайменше 4 лівші, якщо в середньому лівші становлять 1%?

7. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	1	3	5	7	9	11
p	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,4

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Випадкову величину X задано функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1; \\ 1/3 & \text{при} \quad 1 < x \le 2; \\ a & \text{при} \quad 2 < x \le 3; \\ 0, & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X.

9. Екзаменатор пропонує студентові додаткові питання. Імовірність того, що студент відповість на задане питання, дорівнює 0,9. Викладач перериває іспит, тільки-но студент виявляє незнання заданого питання або коли кількість питань досягає 5. Знайти закон розподілу кількості додаткових питань. Визначити математичне сподівання цієї випадкової величини.

10. Імовірність набуття випадковою величиною, що підпорядкована закону нормального розподілу, значення з інтервалу (-5; 5), дорівнює 0,0455. Знайти дисперсію розподілу, коли відомо, що математичне сподівання дорівнює 0.

11. Вивчено 100 путівок різних автомобілів певної автобази. Встановлено, що середня довжина маршруту дорівнює 43,7 км при середньому квадратичному відхиленні 15,4 км. Визначити з імовірністю 0,8859, в яких межах виявиться середня довжина всіх маршрутів, пройдених автомобілями бази.

12. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, якщо відомий двовимірний розподіл цих величин:

Y \ X	-2	-1	0
2	0,3	–	–
3	–	0,2	0,1
4	–	0,1	0,3

Варіант 3

1. Четверо робітників прийшли на роботу до цеху, в якому працюють 12 робітників. З усіх робітників сформували випадковим чином 2 групи по 8 осіб у кожній. Знайти ймовірність того, що робітники, які щойно прийшли, будуть в одній групі.

2. Монета підкидається 3 рази. Чи є незалежними події: поява герба при перших двох підкиданнях; поява цифри в результаті хоча б одного з останніх підкидань?

3. Знайти ймовірність того, що виріб, який складається з трьох деталей, вийшов із ладу через несправність не менш ніж двох деталей, якщо ймовірність виходу з ладу деталей дорівнює 0,2; 0,3; 0,1.

4. З першого автомата на складання надходить 40 %, з другого – 30 %, з третього – 20 %, з четвертого – 10 % деталей. Серед деталей першого автомата 0,1 % бракованих, другого – 0,2 %, третього – 0,5 %, четвертого – 0,5 %. Знайти ймовірність того, що на складання надійшла бракована деталь.

5. Завод, що виготовляє радіолампи, дає 5% браку. На випробування взято 3 радіолампи. Знайти ймовірність того, що серед них буде не більш як дві зіпсовані.

6. Імовірність неточного складання приладу дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що серед 500 приладів виявиться від 410 до 430 точних.

7. Закон розподілу дискретної випадкової величин X задано таблицею

X	-2	0	2	4	6	8
p	0,05	0,2	0,15	0,1	0,25	0,25

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Випадкову величину X задано такою функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0; \\ a \sin x & \text{при} \quad 0 \le x \le \pi; \\ 0, & \text{при} \quad x > \pi. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$.

9. У двох ящиках лежать по десять куль із цифрами. У першому лежить одна куля з цифрою 1, 5 куль із цифрою 2 і 4 кулі з цифрою 3. У другому ящику лежать дві кулі з цифрою 1, 7 куль з цифрою 2 і 1 куля з цифрою 3. Одночасно виймають по одній кулі з обох ящиків. Добуток цифр, записаних на витягнутих кулях, є випадковою величиною. Знайти закон розподілу і математичне сподівання цієї випадкової величини.

10. Розподіл заводів за процентом виконання плану підпорядковується закону нормального розподілу із середнім арифметичним 103,3 % і середнім квадратичним відхиленням 1,5 %. Визначити, яка частина заводів не виконує план.

11. Середнє значення швидкості вітру біля землі в даному пункті дорівнює 16 км/год. Закон розподілу швидкостей вітру невідомий. Оцінити ймовірність того, що швидкість вітру в цьому пункті в даний момент часу не перевищує 80 км/год.

12. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, якщо відомий двовимірний розподіл цих величин:

Y \ X	-2	-1	0
0	0,3	0,05	–
1	0,05	0,2	0,05
2	–	0,05	0,2
3	–	–	0,1

Варіант 4

1. У ліфт на першому поверсі ввійшли троє чоловіків і троє жінок. Кожна з шести осіб з однаковою ймовірністю виходить на одному з трьох верхніх поверхів. Яка ймовірність того, що на кожному з цих поверхів вийде один чоловік і одна жінка.

2. Підкидаються два гральні кубики. Чи протилежні події: поява хоча б однієї парної цифри на першому кубику; поява хоча б однієї непарної цифри на другому кубику?

3. На підприємстві 96 % виробів виготовляють придатними. У кожній сотні придатних деталей виявляється 75 виробів I гатунку, решта – другого гатунку. Знайти ймовірність того, що випадково взятий виріб підприємства буде II гатунку.

4. Кінескоп телевізора може належати до однієї з трьох партій з імовірностями 0,25; 0,5 і 0,25. Імовірності того, що кінескоп працюватиме задану кількість годин для цих партій відповідно дорівнюють 0,2; 0,4 і 0,1. Кінескоп не пропрацював задану кількість годин. Визначити ймовірність того, що його було взято не з другої партії.

5. Опитування показало, що в деякому місті 60 % працюючого населення витрачає менш як 30 хв на проїзд до місця роботи. Знайти ймовірність того, що з п'яти довільно взятих працюючих не менш як двоє витрачають на дорогу понад 30 хв.

6. Імовірність виходу з ладу верстата після визначеного часу роботи дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що в цеху, в якому 200 верстатів, до кінця вказаного часу вийдуть із ладу 160 верстатів.

7. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	1	3	5	7	9
p	0,4	0,3	0,2	0,09	0,01

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Випадкову величину задано функцією щільності розподілу

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}.$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу (-1,1).

9. Двоє мисливців стріляють по качках. Для першого мисливця ймовірність влучити в качку при одному пострілі дорівнює 0,6. Кількість качок, збитих мисливцями, що зробили по одному пострілу, є випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 1,3. Яка ймовірність збити качку для другого мисливця?

10. Похибка при вимірюванні деталей підпорядкована закону нормального розподілу із середнім квадратичним відхиленням 0,2. Визначити ймовірність того, що похибка вимірювання не перевищить за абсолютною величиною 0,4.

11. Витрата води в населеному пункті підпорядковується невідомому закону розподілу. Середня витрата води становить 50 000 л на день. Оцінити ймовірність того, що в цьому населеному пункті в даний день витрата води не перевищить 150 000 л.

12. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, якщо відомий двовимірний розподіл цих величин:

Y \ X	2	3	4	5
-3	0,1	0,4	–	–
-2	–	0,2	0,05	–
-1	0,05	–	0,1	0,1

Варіант 5

1. На вітрині прилавку довільно виставлено 5 вазочок із цукерками різної вартості. Знайти ймовірність того, що дві вазочки з найдорожчими цукерками опиняться поруч.

2. Робляться два постріли по мішені. Знайти протилежні події до суми і добутку подій: відбулося хоча б одне попадання; був хоча б один промах.

3. 10% стандартної продукції виготовляється вищого гатунку, 30 % - першого гатунку. Решта стандартної продукції виготовляється другого гатунку. Знайти ймовірність виготовлення продукції другого гатунку, якщо процент браку дорівнює 1.

4. На завод надходить литво в болванках з трьох ливарних заводів. З першого заводу надходить 20 % литва, із другого – 50 %, із третього – 30 %. Частка дефектних болванок на першому заводі становить 20 %, на другому – 10 %, на третьому – 15 %. Взята навмання болванка виявилася дефектною. Визначити ймовірність того, що вона надійшла з другого заводу.

5. Спостереженнями встановлено, що в деякій місцевості після полудня небо безхмарне в середньому 2 дні з трьох. Знайти ймовірність того, що протягом тижня хмари після полудня будуть відсутні принаймні 5 днів.

6. Імовірність отримання деякого розміру деталі в межах заданого допуску дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з 500 виготовлених деталей непридатними виявляться не більш як 60.

7. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	-5	-4	-3	-2	-1	0
p	0,05	0,15	0,2	0,25	0,3	0,05

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Випадкову величину X задано такою функцією щільності розподілу:

$$f(x) = ae^{-|x|}.$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти $M(X)$ і $D(X)$.

9. З урни, що містить 7 білих і 3 чорних кулі, витягається по одній кулі без повернення до появи білої кулі. Знайти закон розподілу числа витягнутих чорних куль. Визначити математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини.

10. Похибка при вимірюванні дальності підпорядкована нормальному закону. Ймовірність того, що виміряне значення дальності буде за абсолютною величиною відхилятися від справжнього більш ніж на 40 м, дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що виміряне значення за абсолютною величиною буде відхилятися від справжнього не більш ніж на 5 м.

11. Середній стаж роботи дорівнює 7,9 років. Визначити ймовірність того, що стаж випадково взятого робітника не перевищуватиме 10 років.

12. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, якщо відомий двовимірний розподіл цих величин:

Y \ X	-2	-1	0	1	2
1	0,2	0,1	–	0,05	–
2	0,05	–	0,1	0,3	–
3	–	0,05	–	0,05	0,1

Варіант 6

1. При перевезенні 15 000 виробів одного виду і 25 000 виробів іншого виду два вироби було пошкоджено. Знайти ймовірність того, що пошкоджено вироби різних видів.

2. Підкидають 2 монети. Чи утворюють повну групу подій такі події: поява хоча б одного герба, поява хоча б однієї цифри.

3. Дві з п яти платформ, що прибули на станцію, навантажено деталями для заводу А. Знайти ймовірність того, що ці платформи не будуть серед перших двох розвантажених платформ.

4. Деякий механізм складається з двох деталей А, п'яти деталей Б, однієї деталі В, шести деталей Г і чотирьох деталей Д. Імовірність пошкодження деталі А дорівнює 0,02, деталі Б – 0,05, деталі В – 0,10, деталі Г – 0,13 і деталі Д – 0,09. Механізм вийшов із ладу. Визначити ймовірність того, що несправною виявилася деталь Г.

5. Завод телефонних апаратів дає 2 % браку. На дослідження взято 4 апарати. Знайти ймовірність того, що серед них буде не більш як три зіпсованих.

6. У результаті перевірки якості зерна, підготовленого для посіву, установлено, що сходять 90 % зерен. Визначити ймовірність того, що серед 500 довільно взятих зерен після посадки проросте від 440 до 490 зерен.

7. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	1	5	9	13	17
p	0,4	0,2	0,2	0,1	0,1

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Випадкову величину X задано такою функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0; \\ x/4 & \text{при} \quad 0 < x \le 1; \\ (3/4)x - 1/2 & \text{при} \quad 1 < x \le 2; \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти функцію щільності розподілу $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; в) знайти $M(X)$ і $D(X)$.

9. Стрілець стріляє по мішені до першого влучення, маючи в запасі 4 патрони. Ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу випадкової величини, значення якої дорівнюють кількості витрачених патронів. Визначити математичне сподівання та дисперсію випадкової величини.

10. Довжина деталі, виготовленої на верстаті, розподілена за нормальним законом із середнім значенням 22 мм і дисперсією 0,04 мм^2. Знайти ймовірність того, що довжина деталі буде між 21,6 мм і 22,4 мм.

11. Серед випадково відібраних 45 робітників цеху 9 осіб отримують щомісячно заробітну плату понад 4600 грн. Визначити з імовірністю 0,9, в яких межах потребуває частка всіх робітників цеху, що отримують заробітну плату, вищу за 4600 грн на місяць.

12. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, якщо відомий двовимірний розподіл цих величин:

Y \ X	1	3	3
-3	0,4	0,05	0,05
-2	–	0,3	–
-1	–	–	0,2

Варіант 7

1. У 10 однакових коробках лежать торти різних видів: 5 тортів – одного виду, 3 – другого і 2 – третього. Випадково беруть три коробки. Знайти ймовірність того, що хоча б дві з них містять торти одного і того самого виду.

2. Підкидають дві монети. Чи є протилежними події: поява двох гербів; поява двох цифр?

3. З партії виробів товарознавець відбирає вироби вищого гатунку. Ймовірність того, що випадково взятий виріб виявиться вищого гатунку, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з 4 перевірених виробів хоча б один виріб буде вищого гатунку.

4. Наладчик обслуговує 4 верстати типу А і 6 верстатів типу В. Один верстат типу А потребує наладки з імовірністю 0,3, а верстат типу В – 0,2. Знайти ймовірність того, що верстат, який потребує уваги наладчика, є верстатом типу А.

5. Нормальна частота захворюваності певним захворюванням серед великої рогатої худоби становить 25 %. Для перевірки вакцини обирають 6 здорових тварин і роблять щеплення. За припущення, що вакцина абсолютно недієва, знайти ймовірність того, що захворіє не більш як 2 тварини.

6. У деякій місцевості за 120 зимових днів снігопад буває в середньому 45 днів. Знайти ймовірність того, що поточної зими в цій місцевості буде не більш як 40 днів із снігопадом.

7. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	-2	-1	0	2	4
p	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Випадкову величину X задано такою функцією щільності розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 1; \\ \dfrac{a}{x^2} & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу (2;3).

9. Стрілець робить три постріли по мішені. Імовірність влучення в мішень при кожному пострілі дорівнює 0,4. За кожне влучення стрільцю зараховується 5 балів. Знайти закон розподілу кількості нарахованих балів. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини.

10. Розмір деталей підпорядкований закону нормального розподілу із середнім арифметичним 15 мм і дисперсією 0,25. Визначити очікуваний процент браку, якщо допустимі розміри містяться в межах від 14 до 17 мм.

11. Середній настриг вовни з однієї вівці дорівнює 3,8 кг. Оцінити ймовірність того, що настриг вовни з випадково взятої вівці не перевищуватиме 4 кг.

12. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, якщо відомий двовимірний розподіл цих величин:

Y \ X	-1	0	1
-1	0,2	–	0,05
0	0,05	0,1	–
1	–	0,05	0,2
2	0,05	–	0,1
3	–	–	0,2

Варіант 8

1. У ліфт 9-поверхового будинку на першому поверсі ввійшли 3 людини. Кожен із пасажирів з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з третього. Яка ймовірність того, що всі пасажири вийдуть на різних поверхах?

2. З колоди карт виймають дві карти. Чи є протилежними події: поява двох червоних карт; поява двох чорних карт?

3. Частка валиків, бракованих за довжиною, становить 3,5 %, а бракованих за діаметром - 2 % від кількості валиків, бракованих за довжиною. Частка валиків, забракованих лише за діаметром, дорівнює 1,9 %. Знайти ймовірність того, що валик матиме стандартний діаметр.

4. Імовірність появи браку на першому верстаті дорівнює 0,02, на другому – 0,03, третьому – 0,01. Продуктивність першого верстата вдвічі більша, ніж другого, а продуктивність третього верстата втричі більша, ніж першого. Знайти ймовірність того, що випадково вибрана деталь виявиться нестандартною.

5. Експедиція видавництва відправила журнали в три поштових відділення. Імовірність своєчасної доставки журналів у кожне з поштових відділень дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що не більш ніж одне поштове відділення отримає журнали із запізненням.

6. Імовірність того, що довільно взята деталь, підійде до вузла, що складається, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що при складанні 100 вузлів не менш як 70 довільно взятих деталей підійдуть без подальшого припасування.

7. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	2	5	8	11	14	17
p	0,4	0,29	0,15	0,1	0,05	0,01

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Випадкову величину X задано такою функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq 0; \\ \dfrac{x^2}{2} & \text{при} \quad 0 < x \leq 1; \\ 1 - \dfrac{(x-2)^2}{2} & \text{при} \quad 1 < x \leq 2; \\ 1 & \text{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти функцію щільності розподілу $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; в) знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини X.

9. У партії з 6 деталей є 4 стандартних. Випадково відібрані 3 деталі. Скласти закон розподілу кількості стандартних деталей серед відібраних. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини.

10. Обчислити ймовірність потрапляння значення випадкової величини, що має закон нормального розподілу, на інтервал (20; 25), коли відомо, що центр розсіювання міститься в точці a=15, а міра точності потрапляння дорівнює 0,059.

11. Оцінити ймовірність того, що середнє арифметичне 50 незалежних випадкових величин відхилиться від середнього арифметичного їх математичних сподівань не більш, ніж на 0,15, якщо дисперсія кожної випадкової величини не перевищує 0,45.

12. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, якщо відомий двовимірний розподіл цих величин:

Y \ X	0	1	2	3
-2	0,1	0,1	–	–
-1	0,1	0,1	0,1	–
0	–	0,1	0,1	0,05
1	–	–	0,05	0,1
2	–	–	–	0,1

Варіант 9

1. 9 деталей, виготовлених робітником за робочий день, довільним чином покладено в три ящики. Знайти ймовірність того, що в першому ящику буде три деталі, у другому – 4, а в третьому – 2.

2. Монета підкидається 2 рази. Чи є несумісними події: поява герба у першому випробуванні; поява хоча б однієї цифри при обох підкиданнях?

3. Імовірності п'ятирічної служби кожної з чотирьох деталей механізму дорівнюють 0,5; 0,6; 0,7; 0,9. Знайти імовірність того, що механізм вийде з ладу через 5 років.

4. На складі є 12 контейнерів з деталями, виготовленими на заводі А, 25 контейнерів – на заводі В і 13 контейнерів – на С. Щодня зі складу забирається один контейнер. Знайти ймовірність того, що другого дня буде взято контейнер, виготовлений на заводі В, а третього дня – на заводі А.

5. Схожість насіння рослин становить 90 %. Знайти ймовірність того, що з чотирьох посіяних насінин проросте не більш як дві насінини.

6. Здійснюється 400 дослідів з імовірністю настання події А, що дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що число появ події А менш ніж у 2 рази перевищує число появ протилежних подій.

7. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	1	2	3	4	5	6
p	0,01	0,09	0,17	0,26	0,34	0,13

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Випадкову величину X задано такою інтегральною функцією розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leq -3; \\ \dfrac{x^3}{54} + \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad -3 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при} \quad x > 3. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти диференціальну функцію розподілу $f(x)$; б) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; в) знайти математичне сподівання та дисперсію випадкової величини X.

9. Імовірність влучення при одному пострілі дорівнює 0,2. Постріли здійснюються до першого влучення і потім припиняються. Знайти закон розподілу для числа зроблених пострілів. Знайти математичне сподівання випадкової величини.

10. Випадкова величина підпорядковується закону нормального розподілу із середньою арифметичною 75. Визначити дисперсію випадкової величини, коли відомо, що ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, більшого за 80, дорівнює 0,1.

11. Математичне сподівання швидкості вітру на даній висоті 25 км/год. Якої швидкості вітру можна очікувати на цій висоті з імовірністю, не меншою за 0,9?

12. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, якщо відомий двовимірний розподіл цих величин:

Y \ X	0	2	4	6
-2	0,2	0,05	–	0,05
-1	–	0,2	–	–
0	–	0,05	0,1	–
1	0,05	–	–	0,3

Варіант 10

1. Серед 10 деталей є одна бракована. Випадково вибрано 4 деталі. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться бракована деталь.

2. Монета підкидається 3 рази. Чи є протилежними події: поява герба при першому підкиданні; поява цифр при другому і третьому підкиданнях?

3. Наладчик обслуговує 5 верстатів. Імовірність того, що протягом години перший верстат потребуватиме його втручання, дорівнює 0 1; другий верстат – 0,25; третій – 0,15; четвертий – 0,2 п'ятий – 0,1. Визначити ймовірність того, що протягом години як мінімум один верстат потребуватиме втручання наладчика.

4. На першому верстаті виготовлено 700 деталей, на другому – 550, на третьому – 750. Взята випадково деталь виявилася стандартною. Знайти ймовірність того, що цю деталь виготовлено на другому верстаті, якщо частка браку на цих верстатах відповідно дорівнює 0,5; 0,2, 0,3.

5. Імовірність затримки вильоту літаків у зимовий день дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що з п'яти зимових днів буде не більш як один день, в який відбудеться запізнення вильоту літаків.

6. У водосховищі ймовірність зменшення рівня води за день понад норму дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що протягом не менш ніж 70 днів з 90 зменшення рівня води буде в межах норми.

7. Закон розподілу дискретної випадкової величини X задано таблицею:

X	-1	0	3	4
p	0,1	0,3	0,2	0,4

Знайти функцію розподілу випадкової величини X і побудувати її графік. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

8. Випадкову величину X задано такою диференціальною функцією розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1; \\ a(1-x^2) & \text{при} \quad -1 < x \le 1; \\ 0 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Потрібно: а) знайти коефіцієнт a; б) знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$; в) побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$; г) знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, що лежить на проміжку $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

9. В ящику лежать 50 куль із цифрами 1, 2 і 3. Куль з цифрою 2 в два рази більше, ніж куль із цифрою 3. Нехай значення випадкової величини є цифра, зображена на вийнятій кулі. Знайти кількість куль кожного виду, якщо математичне сподівання цієї випадкової величини дорівнює 1,4. Знайти дисперсію цієї випадкової величини.

10. Випадкова величина підпорядкована закону нормального розподілу. Знайти параметри розподілу, коли відомо, що випадкова величина набуває значення, меншого від 35, з імовірністю 0,2, а значення, більшого за 0,5, – з імовірністю 0,1.

11. Закон розподілу випадкової величини, що набуває лише додатних значень, невідомий. Оцінити ймовірність того, що випадкова величина набуває значення, яке не перевищує 10, якщо її математичне сподівання дорівнює 5.

12. Знайти коефіцієнт кореляції випадкових величин X і Y, якщо відомий двовимірний розподіл цих величин:

Y \ X	-1	0	1	2
-3	0,1	–	0,05	0,05
-2	0,1	0,2	0,5	–
-1	–	0,05	0,1	–
0	0,05	0,05	–	0,2

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ З ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Алгебра подій. Простір елементарних подій. Операції над подіями. Елементи комбінаторики

1. Що називається вірогідною подією?

А) Подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;

Б) Подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;

В) Подія, яка не може відбутися під час певного випробування;

Г) Інша відповідь.

2. Що називається неможливою подією?

А) Подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;

Б) Подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;

В) Подія, яка не відбудеться під час певного випробування;

Г) Інша відповідь.

3. Навести приклад вірогідної події:

А) при нормальних умовах вода кипить при температурі 100°C;

Б) в урні є білі і чорні кульки. Витягують зелену кульку;

В) монету підкидають один раз. Поява герба або цифри;

Г) інша відповідь.

4. Навести приклад неможливої події:

А) при нормальних умовах вода кипить при температурі 100°C;

Б) в урні є білі і чорні кульки. Витягують зелену кульку;

В) монету підкидають один раз. Поява герба або цифри;

Г) інша відповідь.

5. Навести приклад випадкової події:

А) при нормальних умовах вода кипить при температурі 100°C;

Б) в урні є білі і чорні кульки. Витягують зелену кульку;
В) монету підкидають один раз. Поява герба або цифри;
Г) інша відповідь.

6. Яка подія називається випадковою?
А) Подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;
Б) Подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;
В) Подія, яка не відбудеться під час певного випробування;
Г) Інша відповідь.

7. Яка подія називається елементарною?
А) Подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;
Б) Подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;
В) Подія, яка не відбудеться під час певного випробування;
Г) Інша відповідь.

8. Навести приклад елементарної події:
А) монету підкидають один раз. Поява герба;
Б) в урні є білі і чорні кульки. Навмання витягують білу кульку;
В) монету підкидають один раз. Поява цифри;
Г) всі перераховані.

9. Що називається простором елементарних подій?
А) Подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;
Б) Подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;
В) Подія, яка не може відбутися під час певного випробування;
Г) Множина Ω всіх елементарних подій.

10. Перестановкою із n елементів називаються ...
А) такі впорядковані множини з n елементів, які відрізняються між собою порядком їх розміщення;
Б) такі впорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються одна від одної як складом елементів, так і порядком їх розміщення;
В) такі невпорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються між собою хоча б одним елементом;
Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

11. Розміщенням із n елементів по k називаються ...
А) такі впорядковані множини з n елементів, які відрізняються між собою порядком їх розміщення;
Б) такі впорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються одна від одної як складом елементів, так і порядком їх розміщення;
В) такі невпорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються між собою хоча б одним елементом;
Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

12. Комбінацією із n елементів по k називаються ...
А) такі впорядковані множини з n елементів, які відрізняються між собою порядком їх розміщення;
Б) такі впорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються одна від одної як складом елементів, так і порядком їх розміщення;
В) такі невпорядковані підмножини з k елементів, які відрізняються між собою хоча б одним елементом;
Г) правильної відповіді серед перерахованих немає.

13. Яка подія називається протилежною до події A?
А) Подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися;

Б) Подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування;
В) Подія, яка не відбудеться під час певного випробування;
Г) Інша відповідь.

14. Навести приклад протилежної події:
А) монету підкидають один раз. Подія A – поява герба;
Б) подія A – спортсмен виконає норму майстра спорту, тоді $\bar{A}$ – спортсмен не виконає норми;
В) монету підкидають один раз. Подія A – поява цифри;
Г) всі перераховані.

Різні означення ймовірності. Теореми додавання і множення ймовірностей

15. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність, що появиться 1?
А) $\frac{1}{3}$;
Б) $\frac{1}{5}$;
В) $\frac{1}{6}$;
Г) Інша відповідь.

16. Виберіть формулу для визначення класичної ймовірності.
А) $P(A) = \frac{m}{n}$;
Б) $W(A) = \frac{m}{n}$;
В) $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$;
Г) Інша відповідь.

17. Що називається відносною частотою випадкової події?
А) Це відношення кількості експериментів m, при яких спостерігається подія A до загальної кількості n проведених експеримен-

тів;
Б) Це є добуток кількості експериментів m, при яких спостерігається подія A, на загальну кількість n проведених експериментів;
В) Правильні відповіді А) та Б);
Г) Інша відповідь.

18. Виберіть формулу для визначення геометричної ймовірності.
А) $P(A) = \dfrac{m}{n}$;
Б) $W(A) = \dfrac{m}{n}$;
В) $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$;
Г) Інша відповідь.

19. Виберіть формулу для визначення статистичної ймовірності.
А) $P(A) = \dfrac{m}{n}$;
Б) $W(A) = \dfrac{m}{n}$;
В) $P(A) = \dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$;
Г) Інша відповідь.

20. Випадкові події A і B називають залежними, ...
А) якщо події A і B не можуть відбуватися одночасно;
Б) якщо події A і B можуть відбуватися одночасно;
В) якщо поява однієї з них (A або B) не впливає на ймовірність появи іншої;
Г) якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

21. Випадкові події A і B називають незалежними, ...
А) якщо події A і B не можуть відбуватися одночасно;

Б) якщо події A і B можуть відбуватися одночасно;
В) якщо поява однієї з них (A або B) не впливає на ймовірність появи іншої;
Г) якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

22. Виберіть формулу для визначення умовної ймовірності.
А) $P(A) = \dfrac{m}{n}$;
Б) $W(A) = \dfrac{m}{n}$;
В) $P_A(B) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$;
Г) Інша відповідь.

23. В якому разі $P(A \cap B) = 0$, де A і B – незалежні події?
А) Коли $P(A) = 0$ або $P(B) = 0$;
Б) Коли $P(A) = 1$ і $P(B) = 1$;
В) Коли $P(A) \neq 0$ і $P(B) \neq 0$;
Г) Інша відповідь.

24. Випадкові події A і B називають сумісними, ...
А) якщо події A і B не можуть відбуватися одночасно;
Б) якщо події A і B можуть відбуватися одночасно;
В) якщо поява однієї з них (A або B) не впливає на ймовірність появи іншої;
Г) якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

25. Випадкові події A і B називають несумісними, ...
А) якщо події A і B не можуть відбуватися одночасно;
Б) якщо події A і B можуть відбуватися одночасно;
В) якщо поява однієї з них (A або B) не впливає на ймовірність появи іншої;

Г) якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

26. Формула множення ймовірностей для двох залежних випадкових подій A і B має вигляд:
А) $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$;
Б) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;
В) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
Г) $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

27. Формула множення ймовірностей для двох незалежних випадкових подій A і B має вигляд:
А) $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$;
Б) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;
В) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
Г) $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

28. Формула додавання ймовірностей для двох сумісних випадкових подій A і B має вигляд:
А) $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$;
Б) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;
В) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
Г) $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

29. Формула додавання ймовірностей для двох несумісних випадкових подій A і B має вигляд:
А) $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$;
Б) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;
В) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$;
Г) $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

30. Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій?
А) 0;
Б) -1;

В) 1;
Г) Інша відповідь.

Формула повної ймовірності. Формула Байєса. Формула Бернуллі. Найімовірніше число появи випадкової події

31. Формула повної ймовірності випадкової події A за наявності n гіпотез B_i має вигляд:

А) $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) P\left(A \backslash B_i\right)$;

Б) $P\left(B_i \backslash A\right)=\dfrac{P\left(B_i\right) P\left(A \backslash B_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) P\left(A \backslash B_i\right)}$;

В) $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$;

Г) Інша відповідь.

32. Формула Байєса має вигляд:

А) $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) P\left(A \backslash B_i\right)$;

Б) $P\left(B_i \backslash A\right)=\frac{P(B_i)P(A \backslash B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \backslash B_i)}$;

В) $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$;

Г) Інша відповідь.

33. Формула Бернуллі має вигляд:

А) $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) P\left(A \backslash B_i\right)$;

Б) $P\left(B_i \backslash A\right)=\frac{P(B_i)P(A \backslash B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \backslash B_i)}$;

В) $P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$;

Г) Інша відповідь.

34. Які експерименти відбуваються за схемою Бернуллі?

А) Відбувається n залежних випробувань, подія A може відбу-

тися зі сталою ймовірністю p, або не відбутися з ймовірністю q $(p+q=1)$;
Б) Відбувається n незалежних випробувань, подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, або не відбутися з ймовірністю q $(p+q=1)$;
В) Правильні відповіді А) та Б);
Г) Інша відповідь.

35. Що називають найімовірнішим числом появи випадкової події A?
А) Це є таке число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)$ перевищує або не є меншою за ймовірність кожного з решти можливих наслідків випробувань;
Б) Це є таке число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)=1$;
В) Це є таке число k_0, для якого ймовірність $P_n(k_0)=0,5$;
Г) Інша відповідь.

36. Чи завжди виконується нерівність $np-q \le k_0 \le np+p$ для найімовірнішого числа k_0?
А) Так;
Б) Ні;
В) В окремих випадках;
Г) Інша відповідь.

Розподіл Пуассона для малоймовірних випадкових подій. Локальна та інтегральна теореми Муавра–Лапласа

37. Вибрати асимптотичну формулу, яка випливає із локальної теореми Муавра–Лапласа.
А) $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) P\left(A \backslash B_i\right)$;

Б) $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, де Φ – функція Лапласа;

В) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;

Г) $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, де $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

38. Вибрати асимптотичну формулу, яка випливає із інтегральної теореми Муавра–Лапласа.

А) $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \backslash B_i)$;

Б) $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, де Φ – функція Лапласа;

В) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;

Г) $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, де $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

39. Перелічіть властивості функції Гауса $\varphi(x)$.

А) Функція табульована, парна;

Б) Функція табульована, непарна;

В) Функція неправильна, кусково-симетрична;

Г) Інша відповідь.

40. Перелічіть властивості функції Лапласа $\Phi(x)$.

А) Функція табульована, парна;

Б) Функція табульована, непарна;

В) Функція неправильна, кусково-симетрична;

Г) Інша відповідь.

41. За якої умови використовується формула Пуассона?

А) n – мале, p – мале ($p \leq 0,1$);

Б) n – достатньо велике, p – мале ($p \leq 0,1$);

В) n – достатньо велике, $0 < p < 1$;
Г) Інша відповідь.

42. Записати формулу Пуассона для малоймовірних випадкових подій.
А) $P_n(k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, де $\lambda = np$;
Б) $P_n(k_1, k_2) \approx \Phi\left(\dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$, де Φ – функція Лапласа;
В) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
Г) $P_n(k) \approx \dfrac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)$, де $\varphi(x) = \dfrac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Одномірні випадкові величини. Функція розподілу ймовірності. Щільність ймовірностей

43. Дайте означення дискретної випадкової величини.
А) Кожній елементарній події простору подій відповідає одне число або набір чисел, тобто визначена певна функція, яка називається дискретною випадковою величиною;
Б) Якщо випадкова величина приймає всі значення з деякого скінченого або нескінченного проміжку, то вона називається дискретною;
В) Якщо множина можливих значень випадкової величини приймає окремі ізольовані значення із визначеною ймовірністю, то вона називається дискретною;
Г) Інша відповідь.

44. Дайте означення неперервної випадкової величини.
А) Кожній елементарній події простору подій відповідає одне число або набір чисел, тобто визначена певна функція, яка називається неперервною випадковою величиною;
Б) Якщо випадкова величина приймає всі значення з деякого

скінченого або нескінченного проміжку, то вона називається неперервною;
В) Якщо множина можливих значень випадкової величини приймає окремі ізольовані значення з визначеною ймовірністю, то вона називається неперервною;
Г) Інша відповідь.

45. Яка випадкова величина називається одновимірною?
А) Якщо елементарній події відповідає один елемент x;
Б) Якщо елементарній події відповідає набір чисел;
В) Якщо множина можливих значень випадкової величини приймає окремі ізольовані значення з визначеною ймовірністю;
Г) Інша відповідь.

46. Дайте означення закону розподілу випадкової величини.
А) Кожній елементарній події простору подій відповідає одне число або набір чисел, тобто визначена певна функція;
Б) Співвідношення, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їх ймовірностями;
В) Якщо елементарній події відповідає набір чисел;
Г) Інша відповідь.

47. Виберіть із перерахованих умову нормування для дискретної випадкової величини.
А) $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) P\left(A \backslash B_i\right)$;
Б) $P\left(B_i \backslash A\right)=\dfrac{P\left(B_i\right) P\left(A \backslash B_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(B_i\right) P\left(A \backslash B_i\right)}$;
В) $\sum\limits_{i=1}^{n} P\left(X=x_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i=1$;
Г) Інша відповідь.

48. Що називається функцією розподілу випадкової величини?
А) Функція аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$;
Б) Перша похідна від інтегральної функції;
В) Друга похідна від інтегральної функції;
Г) Інша відповідь.

49. Перелічіть основні властивості інтегральної функції розподілу.
А) $0 \leq F(x) \leq 1$;
Б) $F(x)$ – неспадна;
В) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$;
Г) Всі перераховані.

50. Чому дорівнює $P(a \leq X \leq b)$?
А) 0;
Б) 1;
В) $F(b) - F(a)$;
Г) Всі перераховані.

51. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то в якому випадку $F(x) = 0$?
А) $x \leq a$;
Б) $x \geq b$;
В) $a \leq x \leq b$;
Г) Інша відповідь.

52. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b), то в якому випадку $F(x) = 1$?
А) $x \leq a$;
Б) $x \geq b$;
В) $a \leq x \leq b$;
Г) Інша відповідь.

53. Якщо X неперервна випадкова величина, то чому дорівнює ймовірність $P(X = x_i)$?
А) 0;
Б) -1;
В) 1;
Г) 0,5.

54. Що називається щільністю ймовірності неперервної випадкової величини X?
А) Функція аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X > x$;
Б) Перша похідна від інтегральної функції;
В) Друга похідна від інтегральної функції;
Г) Інша відповідь.

55. Чому дорівнює інтегральна функція $F(x)$, коли відома щільність $f(x)$?
А) $\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$;
Б) $f(x) + b$;
В) $f(x) - b$;
Г) Інша відповідь.

56. Перелічіть основні властивості щільності.
А) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$;
Б) $f(x) \geq 0$;
В) $P(a \leq X \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$;
Г) Всі перераховані.

57. Умова нормування для диференціальної функції.

А) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$

Б) $f(x) \geq 0;$

В) $P(a \leq X \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx;$

Г) Всі перераховані.

Числові характеристики випадкових величин та їхні властивості

58. Виберіть вираз, який за означенням визначає математичне сподівання $M(X)$ дискретної випадкової величини?

А) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx;$

Б) $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i;$

В) $M(X) = \int\limits_{a}^{b} xf(x)dx;$

Г) Всі перераховані.

59. Виберіть вираз, який за означенням визначає математичне сподівання $M(X)$ неперервної випадкової величини для $\Omega \in (-\infty; +\infty)$?

А) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx;$

Б) $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i;$

В) $M(X) = \int\limits_a^b xf(x)dx$;
Г) Всі перераховані.

60. Основні властивості математичного сподівання $M(X)$.
А) $M(C) = C$, якщо $C = const$;
Б) $M(CX) = CM(X)$;
В) $M(AX + B) = AM(X) + B$, де A і B – сталі;
Г) Всі перераховані.

61. Чому дорівнює $M(X - M(X))$?
А) C;
Б) 0;
В) 1;
Г) Інша відповідь.

62. Що називають дисперсією випадкової величини?
А) Щільність цієї величини;
Б) Ймовірність цієї величини;
В) Математичне сподівання квадрату відхилення цієї величини;
Г) Інша відповідь.

63. Для неперервної випадкової величини X дисперсія виражається так:
А) $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(\dot{x}^*\right)dx$;
Б) $D(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i$;
В) $D(X) = \int\limits_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx$;
Г) Всі перераховані.

64. Для дискретної випадкової величини X дисперсія виражається так:

А) $D(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf\left(\dot{x}^{*}\right) dx;$

Б) $D(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(x_i - M(X)\right)^2 p_i;$

В) $D(X) = \int\limits_{a}^{b} (x - M(X))^2 f(x) dx;$

Г) Всі перераховані.

65. Властивості дисперсії.

А) $D(C) = 0$, якщо $C = \text{const}$;

Б) $D(CX) = C^2 D(X)$;

В) $D(AX + B) = A^2 D(X)$, де A і B – сталі;

Г) Всі перераховані.

66. Що називають середнім квадратичним відхиленням випадкової величини?

А) Дисперсія в квадраті;

Б) Корінь квадратний із дисперсії;

В) Корінь кубічний із дисперсії;

Г) Інша відповідь.

67. Що називають модою (Mo) випадкової величини X, якщо вона є дискретною?

А) Те її значення, для якого виконується умова $F(Mo) = 0,5$;

Б) Максимальне значення щільності ймовірності;

В) Те її значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи;

Г) Інша відповідь.

68. Що називається модою (Mo) неперервної випадкової величини?

А) Те її значення, для якого виконується умова $F(Mo) = 0,5$;
Б) Максимальне значення щільності ймовірності;
В) Те її значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи;
Г) Інша відповідь.

69. Що називають медіаною (Me) неперервної випадкової величини?
А) Те її значення, для якого виконується умова $F(Me) = 0,5$;
Б) Максимальне значення щільності ймовірності;
В) Те її значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи;
Г) Інша відповідь.

70. Чому дорівнює $F(Me)$?
А) -1;
Б) 0;
В) 1;
Г) 0,5.

71. Означення початкового моменту k-го порядку.
А) Це дисперсія від величини X^k;
Б) Це математичне сподівання від величини X^k;
В) Це математичне сподівання від величини $(X - M(X))^k$;
Г) Інша відповідь.

72. Означення центрального моменту k-го порядку.
А) Це дисперсія від величини X^k;
Б) Це математичне сподівання від величини X^k;
В) Це математичне сподівання від величини $(X - M(X))^k$;
Г) Інша відповідь.

73. Виберіть вирази для початкового та центрального моментів k-го порядку, якщо випадкова величина X є неперервною.

А) $v_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$, $\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x)dx$;

Б) $v_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k p_i$, $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i$;

В) $v_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k M(X)dx$, $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x - M(X))dx$;

Г) Всі перераховані.

74. Напишіть вирази для початкового та центрального моментів k-го порядку, якщо випадкова величина X є дискретною.

А) $v_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$, $\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x)dx$;

Б) $v_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k p_i$, $\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^k p_i$;

В) $v_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k M(X)dx$, $\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k f(x - M(X))dx$;

Г) Всі перераховані.

Системи випадкових величин. Кореляційний момент. Коефіцієнт кореляції та його властивості

75. Випадкова величина називається n-мірною, ...

А) якщо елементарній події відповідає один елемент x;

Б) якщо елементарній події відповідає набір чисел $(X_1, X_2, ..., X_n)$, які одночасно появляються під час експерименту з певною ймовірністю;

В) якщо множина можливих значень випадкової величини приймає окремі ізольовані значення з визначеною ймовірністю;

Г) інша відповідь.

76. Що називається законом розподілу двомірної випадкової величини?
А) Кожній елементарній події простору подій відповідає одне число, тобто визначена певна функція;
Б) Якщо елементарній події відповідає набір чисел;
В) Перелік усіх можливих значень $X = x_i$, $Y = y_i$ та відповідних їм ймовірностей спільної появи;
Г) Інша відповідь.

77. Основні числові характеристики для системи двох дискретних випадкових величин.
А) $M(X)$, $M(Y)$;
Б) $D(X)$, $D(Y)$;
В) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$;
Г) Всі перераховані.

78. Означення функції розподілу системи двох випадкових величин.
А) Функція аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X < x$;
Б) Функція пари чисел (x, y), яка визначає ймовірність, коли X прийме значення $X < x$, а Y при цьому значення менше за y;
В) Друга похідна від інтегральної функції;
Г) Інша відповідь.

79. Чому дорівнює $P(a < X < b, c < Y < d)$?
А) 0;
Б) 1;
В) $F(b) - F(a)$;
Г) Інша відповідь.

80. Перелічіть основні властивості функції розподілу двомірної випадкової величини.

А) $0 \leq F(x, y) \leq 1$;
Б) $F(x, y)$ – неспадна по кожному із аргументів;
В) $P(a < X < b, c < Y < d) = F(b, d) + F(a, c) - F(b, c) - F(a, d)$;
Г) Всі перераховані.

81. Що називається щільністю ймовірності неперервної двомірної випадкової величини (X, Y)?
А) Функція аргументу x, що визначає ймовірність випадкової події $X > x$;
Б) Перша похідна від інтегральної функції;
В) Друга частинна мішана похідна від функції розподілу двомірної випадкової величини;
Г) Інша відповідь.

82. Чому дорівнює функція розподілу двомірної випадкової величини $F(x, y)$, коли відома щільність $f(x, y)$?
А) $\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$;
Б) $\int\limits_{-\infty}^{y} \int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y)dxdy$;
В) $f(x, y) - b$;
Г) Інша відповідь.

83. Перелічіть основні властивості шільності двовимірної випадкової величини:
А) $\iint\limits_{\Omega} f(x, y)dxdy = 1$;
Б) $f(x, y) \geq 0$;
В) $P(a < X < b, c < Y < d) = \int\limits_{ac}^{bd} f(x, y)dxdy$;

Г) всі перераховані.

84. Умова нормування щільності двомірної випадкової величини:

А) $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = 1$;

Б) $f(x,y) \geq 0$;

В) $P(a < X < b, c < Y < d) = \int\limits_{ac}^{b} \int_{c}^{d} f(x,y)dxdy$;

Г) Всі перераховані.

85. Формула для $M(X)$ дискретної випадкової величини X, що утворює систему (X,Y), має вигляд...

А) $M(X) = \iint\limits_{\Omega} xf(x,y)dxdy$;

Б) $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} x_j p_{ij}$;

В) $M(X) = \int\limits_{a}^{b} xf(x)dx$;

Г) Всі перераховані.

86. Виберіть вираз, який за означенням визначає математичне сподівання $M(X)$ неперервної випадкової величини X, що утворює систему (X,Y).

А) $M(X) = \iint\limits_{\Omega} xf(x,y)dxdy$;

Б) $M(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} x_j p_{ij}$;

В) $M(X) = \int\limits_a^b xf(x)dx$;

Г) Всі перераховані.

87. Виберіть вираз, який за означенням визначає дисперсію $D(Y)$ дискретної випадкової величини Y, що утворює систему (X, Y).

А) $D(Y) = \iint\limits_{\Omega} y^2 f(x,y)dxdy - M^2(Y)$;

Б) $D(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - M^2(Y)$;

В) $D(X) = \iint\limits_{\Omega} x^2 f(x,y)dxdy - M^2(X)$;

Г) $D(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2 p_{ij} - M^2(X)$.

88. Виберіть вираз, який за означенням визначає дисперсію $D(Y)$ неперервної випадкової величини Y, що утворює систему (X, Y).

А) $D(Y) = \iint\limits_{\Omega} y^2 f(x,y)dxdy - M^2(Y)$;

Б) $D(Y) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} y_j^2 p_{ij} - M^2(Y)$;

В) $D(X) = \iint\limits_{\Omega} x^2 f(x,y)dxdy - M^2(X)$;

Г) $D(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} x_j^2 p_{ij} - M^2(X)$.

89. Що визначає кореляційний момент?

А) Наявність зв'язку між величинами X та Y;
Б) Характер зв'язку між величинами X та Y;
В) Нічого не визначає;
Г) Інша відповідь.

90. Що визначає коефіцієнт кореляції?
А) Наявність зв'язку між величинами X та Y;
Б) Характер зв'язку між величинами X та Y;
В) Нічого не визначає;
Г) Інша відповідь.

91. Чому дорівнює кореляційний момент K_{xy}?
А) $\iint\limits_{\Omega} xyf(x,y)dxdy - M(X)M(Y)$, якщо величини X, Y – неперервні;
Б) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} y_i x_j p_{ij} - M(X)M(Y)$, якщо величини X, Y – дискретні;
В) Правильні відповіді А) і Б);
Г) Правильної відповіді немає.

92. Формула коефіцієнта кореляції має вигляд:
А) $r_{xy} = \dfrac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$;
Б) $r_{xy} = \dfrac{\sigma_x\sigma_y}{K_{xy}}$;
В) $r_{xy} = K_{xy}\sigma_x\sigma_y$;
Г) Правильної відповіді немає.

93. Якщо $K_{xy} = 0$, то чому дорівнює r_{xy}?
А) -1;
Б) 0;
В) 1;
Г) Правильної відповіді немає.

Умовні закони розподілу системи двох дискретних випадкових величин. Лінійна регресія. Функції від випадкових аргументів. Розподіл суми від двох випадкових аргументів. Розподіл "χ^2 – хі-квадрат". Розподіл Стьюдента. Розподіл F Фішера–Снедекора

94. Якщо випалкові величини X і Y є незалежними, то $f(x, y)$ обчислюється за формулою ...

А) $f(x) \cdot f(y)$;
Б) $f(x) + f(y)$;
В) $f(x) + f(y) - f(x, y)$;
Г) Правильної відповіді немає.

95. Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то $F(x, y) = \ldots$

А) $F(x) \cdot F(y)$;
Б) $F(x) + F(y)$;
В) $f(x) + f(y) - f(x, y)$;
Г) Правильної відповіді немає.

96. Якщо $r_{xy} = \pm 1$, то X і Y зв'язані ...

А) квадратичною функцією;
Б) лінійною функцією;
В) оберненою функцією;
Г) правильної відповіді немає.

97. Як обчислити щільність ймовірностей випадкової величини Y, якщо $Y = \varphi(X)$, де $\varphi(X)$ – монотонна функція, і відомий закон розподілу випадкової величини X?

А) $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$;
Б) $g(y) = f[\psi(y)] \cdot \mid \psi'(y) \mid$;

В) $g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\cdot f_2(z-x)dx;$

Г) $g(z)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(z-y)\cdot f_2(y)dy.$

98. Математичне сподівання функції дискретного випадкового аргументу $(Y=\varphi(X))$:

А) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};$

Б) $g(y)=f[\psi(y)]\cdot\mid\psi'(y);$

В) $M(Y)=M[\varphi(X)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx;$

Г) $M(Y)=M[\varphi(X)]=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi\left(x_i\right)p_i.$

99. Математичне сподівання функції неперервного випадкового аргументу $(Y=\varphi(X))$:

А) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}};$

Б) $g(y)=f[\psi(y)]\cdot\mid\psi'(y);$

В) $M(Y)=M[\varphi(X)]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)dx;$

Г) $M(Y)=M[\varphi(X)]=\sum\limits_{i=1}^{n}\varphi\left(x_i\right)p_i.$

Граничні теореми

100. Що дають змогу встановити закони великих чисел?

А) Умови, при яких сумарна поведінка досить великого числа

випадкових величин втрачає випадковий характер і стає закономірною;
Б) Умови, при яких можна мати надприбутки;
В) Умови польоту космічних кораблів;
Г) Серед перерахованих правильної відповіді немає.

101. Виберіть серед перерахованих виразів нерівність Чебишева.
А) $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \leq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$;
Б) $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$;
В) $P(|X - a| > 3\sigma) \to 0$;
Г) $P(|X - a| < 3\sigma) \to 1$.

102. Сформулюйте умови, які мають виконуватися для нерівності Чебишева.
А) $M(X), D(X)$ – обмежені, $\varepsilon > 0$;
Б) $M(X), D(X)$ – необмежені, $\varepsilon < 0$;
В) Відповіді А) та Б) – неправильні;
Г) Серед перерахованих правильної відповіді немає.

103. Виберіть правильну відповідь, яка випливає з теореми Чебишева.
А) $\lim P\left(\left|\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} M\left(X_i\right)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$ і $D\left(X_i\right)$ є обмеженими;
Б) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1$, де $W(A)$ – відносна частота появи випадкової події, p – ймовірність появи випадкової події A;
В) Розподіл $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ наближається до нормального із зростання n, якщо $M\left(X_i\right) = 0$, $\sigma\left(X_i\right) = \sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього поряд-

ку $|v_3| = | M\left(X^3\right)|$;
Г) Інша відповідь.

104. Виберіть правильну відповідь, яка випливає з теореми Бернуллі.

А) $\lim P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M\left(X_i\right)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$ і $D\left(X_i\right)$ є обмеженими;

Б) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1$, де $W(A)$ – відносна частота появи випадкової події, p – ймовірність появи випадкової події A;

В) Розподіл $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ наближається до нормального із зростання n, якщо $M\left(X_i\right) = 0$, $\sigma\left(X_i\right) = \sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|v_3| = | M\left(X^3\right)|$;

Г) Інша відповідь.

105. Виберіть правильну відповідь, яка випливає з центральної граничної теореми.

А) $\lim P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M\left(X_i\right)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1$ і $D\left(X_i\right)$ є обмеженими;

Б) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 1$, де $W(A)$ – відносна частота появи випадкової події, p – ймовірність появи випадкової події A;

В) Розподіл $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ наближається до нормального із зростання n, якщо $M\left(X_i\right) = 0$, $\sigma\left(X_i\right) = \sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку $|v_3| = | M\left(X^3\right)|$;

Г) Інша відповідь.

106. Запишіть нерівність Чебишева для теореми Чебишева.

А) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{C}{n\varepsilon^2}\right) = 1;$

Б) $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2};$

В) $P(|X - a| > 3\sigma) \to 0;$

Г) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{pq}{n\varepsilon^2}.$

107. Запишіть нерівність Чебишева для теореми Бернуллі.

А) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{C}{n\varepsilon^2}\right) = 1;$

Б) $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2};$

В) $P(|X - a| > 3\sigma) \to 0;$

Г) $\lim\limits_{n\to\infty} P(|W(A) - p| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{pq}{n\varepsilon^2}.$

ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Тема 8. Первинне опрацювання статистичних даних

Загальна інформація

Основним змістом математичної статистики є систематизація, обробка й використання статистичної інформації для виявлення статистичних закономірностей ознаки або ознак певної сукупності елементів.

Множина однотипних елементів, яким притаманні певні кількісні ознаки (розміри, вага тощо), утворює **генеральну сукупність**. Кількість усіх її елементів називають її **обсягом** і позначають символом N. Випадково відібрані n елементів із генеральної сукупності називаються **вибіркою**, число n – її обсягом. Вибірка повинна володіти такими властивостями:

1) кожен її елемент вибраний випадково;

2) будь-який елемент має однакову ймовірність попасти у вибірку;

3) число n повинно бути настільки великим, наскільки це дозволить розв'язати задачу з потрібною якістю (це означає, що вибірка повинна бути **репрезентативною**).

Коли реалізується вибірка, кількісна ознака, наприклад X, набуває конкретних числових значень $X = x_i$, які називають **варіантою**. Зростаючий ряд варіант називається **варіаційним**. Кожна варіанта x_i вибірки може бути спостережена n_i разів, число n_i називається **частотою варіанти** x_i. Відношення частоти n_i до обсягу вибірки n називається **відносною частотою** варіанти x_i і позначається через W_i:

$$W_i = \frac{n_i}{n}. \tag{8.1}$$

Очевидні рівності: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, $\sum_{i=1}^{k} W_i = 1$.

Якщо досліджується неперервна ознака X генеральної сукупності, то варіант буде багато. У цьому разі варіаційний ряд зображають у вигляді певної кількості рівних або нерівних частинних інтервалів, розміщених у зростаючий послідовності (так званий **інтервальний варіаційний ряд**). Визначення кількості інтервалів групування здійснюється або емпіричним шляхом у залежності від обсягу вибірки, або за формулою Старджеса

$$L = 1 + 3,322 \cdot \lg n, \tag{8.2}$$

при цьому довжина інтервалу визначається співвідношенням

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{L}, \tag{8.3}$$

де $x_{\max}$ і $x_{\min}$ – відповідно найбільший та найменший елементи вибірки.

Дискретний статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики

Перелік варіант варіаційного ряду і відповідних їм частот, або відносних частот, називається **дискретним статистичним розподілом**. У табличній формі він має вигляд:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k
W_i	W_1	W_2	$\dots$	W_k

Функція розподілу, одержана з генеральної сукупності, називається **теоретичною** функцією розподілу й позначається, як уже зазначалося в попередніх темах, через $F(x)$. При реалізації вибірки з генеральної сукупності одержують оцінку функції розподілу $F(x)$ – **емпіричну** функцію $F^*(x)$, яка визначає відносну частоту події $X < x$, тобто

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n}, \tag{8.4}$$

де n_x – кількість елементів вибірки, значення яких менше за фіксовану варіанту. Функцію $F^*(x)$ називають ще **функцією нагромадження відносних частот** або **комулятою**.

Властивості $F^*(x)$:

1) $0 \le F^*(x) \le 1$;

2) $F^*(x)$ – неспадна;

3) $F^*(x_{\min}) = 0$, $F^*(x)\Big|_{x > x_{\max}} = 1$.

Дискретний статистичний розподіл вибірки можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають точки $(x_i; n_i)$ або $(x_i; W_i)$. У першому випадку лінію називають **полігоном частот**, у другому – **полігоном відносних частот**.

Числові характеристики

1) **вибіркова середня величина** $\overline{x}_B$:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum\limits_i (x_i \cdot n_i)}{n}. \tag{8.5}$$

Якщо всі x_i – різні, то формула (8.5) визначає **просту** середню, якщо ж значення x_i мають певні частоти, то за формулою (8.5) знаходимо **зважену** середню (частоти n_i ще називають **вагами** значень x_i).

Крім розглянутої середньої вибіркової, у статистиці використовують такі види середніх:

степенева середня

$$\overline{x_c} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} x_i^{\alpha} \right)^{1/\alpha}, \quad \alpha \ne 0; \tag{8.5.1}$$

середня гармонійна отримується із (8.5.1) при $\alpha = -1$

$$\overline{x_{-1}} = \overline{x_{\text{гар.}}} = n \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{x_i} \right);$$

середня квадратична отримується із (8.5.1) при $\alpha = 2$

$$\overline{x_2} = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{n} x_i^2 \right)^{1/2};$$

середня геометрична

$$\overline{x_{\text{геом.}}} = (x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ \ldots \ x_k^{n_k})^{1/n}.$$

2) **розмах** варіаційного ряду:

$$R = x_{\max} - x_{\min}; \tag{8.6}$$

3) **мода** M_0^* – це варіанта, що має найбільшу частоту появи;

4) **медіана** M_e^* – це варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант.

При цьому, якщо обсяг вибірки n – парне число, то

$$M_e^* = \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2}; \tag{8.7}$$

якщо ж n – непарне число, то

$$M_e^* = x_{\frac{n+1}{2}}. \tag{8.8}$$

5) **дисперсія**:

$$D_{{}_B} = \frac{\sum\limits_{i} (x_i - \overline{x}_{{}_B})^2 \cdot n_i}{n} = \frac{\sum\limits_{i} x_i^2 \cdot n_i}{n} - (\overline{x}_{{}_B})^2. \tag{8.9}$$

6) **середнє квадратичне відхилення**:

$$\sigma_{{}_B} = \sqrt{D_{{}_B}}. \tag{8.10}$$

7) **коефіцієнт варіації**:

$$V = \frac{\sigma_B}{\overline{x}_B} \cdot 100\%. \qquad (8.11)$$

Використовується для порівняння степеня розсіювання різних статистичних рядів.

Узагальнюючими характеристиками статистичних розподілів є статистичні моменти розподілу.

Початковим емпіричним моментом m-го порядку ν_m^* дискретного розподілу називається середнє значення варіант у степені m:

$$\nu_m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i)^m n_i.$$

Тоді:

при $m = 0$ $\nu_0^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i)^0 n_i = 1$;

при $m = 1$ $\nu_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i = \overline{x}$ – середнє вибіркове;

при $m = 2$ $\nu_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i = \overline{x^2}$ – середнє квадратичне;

при $m = 3$ $\nu_3^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^3 n_i = \overline{x^3}$;

при $m = 4$ $\nu_4^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^4 n_i = \overline{x^4}$.

На практиці використовуються моменти перших чотирьох порядків.

Із врахуванням рівності (8.9) отримується такий вираз дисперсії вибіркової через початкові емпіричні моменти першого та другого порядків: $D_{\text{В}} = \nu_2^* - (\nu_1^*)^2$.

Центральним емпіричним моментом m-го порядку дискретного розподілу називається середня величина відхилення варіант (від середньої вибіркової) у степені m:

$$\mu_m^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_{\text{В}}})^m n_i.$$

За означенням $\mu_0^* = 1$, $\mu_1^* = 0$, за означенням $D_{\text{В}}$ $\mu_2^* = D_{\text{В}}$.

На практиці використовуються центральні емпіричні моменти третього та четвертого порядку, які з допомогою бінома Ньютона можна виразити через відповідні початкові моменти:

$$\mu_3^* = \nu_3^* - 3\nu_2^*\nu_1^* + 2(\nu_1^*)^3;$$

$$\mu_4^* = \nu_4^* - 4\nu_3^*\nu_1^* + 6\nu_2^*(\nu_1^*)^2 - 3(\nu_1^*)^4.$$

Центральний емпіричний момент третього порядку використовується для обчислення **коефіцієнта асиметрії**

$$A_s^* = \mu_3^*/\sigma_{\text{В}}^3.$$

Для строго симетричного розподілу варіант статистичного розподілу $A_s^* = 0$. Вважається, якщо $|A_s^*| < 0,25$, то асиметрія низька, якщо $|A_s^*| \leq 0,5$ – середня, якщо $|A_s^*| > 0,5$ – висока.

Якщо $A_s^* < 0$, то у статистичному розподілі вибірки переважають варіанти, значення яких менші від $\overline{x}_{\text{В}}$. Така **асиметрія** називається **від'ємною** або **лівосторонньою**. Коли $A_s^* > 0$, тоді у варіаційному ряді переважають варіанти, значення яких більші від $\overline{x}_{\text{В}}$ (**додатна** або **правостороння асиметрія**).

Центральний емпіричний момент четвертого порядку μ_4^* використовується при обчисленні **ексцесу**:

$$E_s^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_{\text{В}}^4} - 3,$$

який дає оцінку крутості досліджуваного статистичного розподілу в порівнянні із нормальним.

Для нормально розподіленої ознаки $\mu_4^*/\sigma_{\text{В}}^4 = 3$, а тому $E_s^* = 0$. Якщо $E_s^* > 0$, тоді розподіл вважається гостровершинним, якщо ж $E_s^* < 0$, тоді – плосковершинним.

Досі розглядалися числові характеристики кількісної ознаки об'єктів. Наведемо означення числової характеристики, пов'язаної із якісною ознакою об'єктів вибірки.

Вибірковою часткою називається відношення числа m об'єктів вибірки з ознакою α до обсягу вибірки: $w = m/n$. Ознакою α може бути стандартність вибору, сортність продукції, стать людини тощо. За змістом w є відносною частотою випадкової події, яка полягає в тому, що навмання відібраний об'єкт із генеральної сукупності має ознаку α.

Інтервальний статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики

У табличній формі цей розподіл має вигляд

H	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$\dots$	$x_{k-1} - x_k$
n_i	n_1	n_2	$\dots$	n_k
W_i	W_1	W_2	$\dots$	W_k

Тут $h = x_i - x_{i-1}$ – довжина i-го часткового інтервалу.

Інтервальний статистичний розподіл вибірки можна подати графічно у вигляді гістограми частот або відносних частот, а також емпіричною функцією $F^*(x)$ (комулятою).

Гістограма частот (або відносних частот) – це фігура, яка складається з прямокутників з основою h і висотою $\dfrac{n_i}{h}$ (або $\dfrac{W_i}{h}$).

При побудові комуляти $F^*(x)$ для інтервального розподілу за основу береться припущення, що ознака на кожному інтервалі має рівномірну щільність імовірностей. Тому комулята матиме вигляд ламаної лінії, яка зростає на кожному частковому інтервалі й наближається до одиниці.

Числові характеристики

1) Для визначення $\overline{x}_B$, D_B і σ_B перейдемо від інтервального розподілу до дискретного, варіантами якого є середини часткових інтервалів: $x_i^* = x_{i-1} + \dfrac{h}{2} = x_i - \dfrac{h}{2}$. Тоді:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum\limits_i x_i^* n_i}{n}, \tag{8.12}$$

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_i (x_i^*)^2 n_i - (\overline{x}_B)^2, \tag{8.13}$$

$$\sigma_B = \sqrt{D_B}. \tag{8.14}$$

2) **Медіана**:

$$M_e^* = x_{i-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} \cdot h, \tag{8.15}$$

де x_{i-1} і x_i – відповідно початок і кінець медіанного інтервалу, h – довжина часткового інтервалу.

3) **Мода**:

$$M_0^* = x_{i-1} + \frac{n_{M_0} - n_{M_0-1}}{2n_{M_0} - n_{M_0-1} - n_{M_0+1}} \cdot h, \tag{8.16}$$

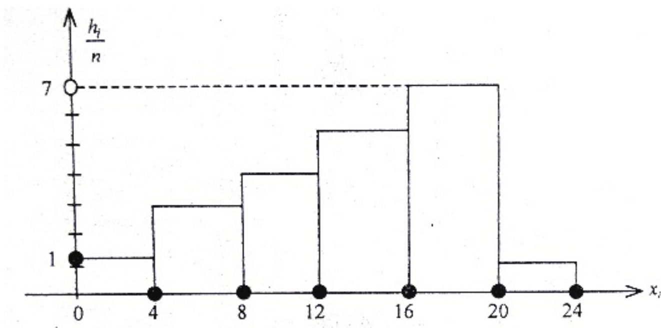
де x_{i-1} і x_i – початок і кінець модального інтервалу; n_{M_0}, n_{M_0-1}, n_{M_0+1} – частоти відповідно модального, домодального та післямодального інтервалів.

Приклад: За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки

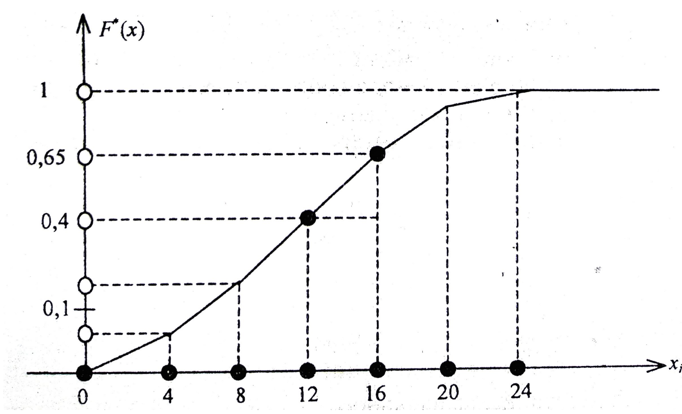
h	0 -4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
n_i	6	14	20	25	30	5

побудувати гістограму частот і $F^*(x)$. Визначити Mo^*, Me^*.

Розв'язування: Гістограма частот має вигляд:



Графік $F^*(x)$:



З графіка гістограми визначається модальний інтервал, яким є інтервал 16–20. Застосовуючи (8.16) і беручи до уваги, що $n_{M_0} = 30$, $n_{M_0-1} = 25$, $n_{M_0+1} = 5$, $h = 4$, $x_{i-1} = 16$, дістанемо

$$M_0^* = x_{i-1} + \frac{n_{M_0} - n_{M_0-1}}{2n_{M_0} - n_{M_0-1} - n_{M_0+1}} h =$$

$$= 16 + \frac{30-25}{60-25-5} \cdot 4 = 16 + \frac{20}{30} = 16,7.$$

Отже $M_0^* = 16,7$.

З графіка $F^*(x)$ визначається медіанний інтервал, яким є інтервал 12–16.

Беручи до уваги, що $F(12) = 0,4$, $F(16) = 0,65$, $h = 4$ і застосовуючи (8.15), дістанемо:

$$Me^* = x_{i-1} + \frac{0,5 - F^*(x_{i-1})}{F^*(x_i) - F^*(x_{i-1})} h =$$

$$= 12 + \frac{0,5 - 0,4}{0,65 - 0,4} 4 = 12 + \frac{0,1}{0,25} 4 = 13,6.$$

Отже, $Me^* = 13,6$.

Двовимірний статистичний розподіл вибірки та його числові характеристики

Перелік варіант $Y = y_i$, $X = x_j$ та відповідних їм частот n_{ij} спільної їх появи утворюють *двовимірний статистичний розподіл вибірки*, що реалізована з генеральної сукупності, елементам цієї вибірки притаманні кількісні ознаки X, Y.

У табличній формі цей розподіл має такий вигляд:

$Y = y_i$	$X = x_j$					
	x_1	x_2	x_3	...	x_m	n_{y_i}
y_1	n_{11}	n_{12}	n_{13}	...	n_{1m}	n_{y_1}
y_2	n_{21}	n_{22}	n_{23}	...	n_{2m}	n_{y_2}
y_3	n_{31}	n_{32}	n_{33}	...	n_{3m}	n_{y_3}
...	...	...	...	...	...	...
y_k	n_{k1}	n_{k2}	n_{k3}	...	n_{km}	n_{y_k}
n_{x_j}	n_{x1}	n_{x2}	n_{x3}	...	n_{xm}	

Тут n_{ij} – частота спільної появи варіант

$$Y = y_i, \;\; X = x_j;$$

$$n_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} n_{ij}, \;\; n_{x_j} = \sum_{i=1}^{k} n_{ij};$$

$$n = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} n_{ij} = \sum_{i=1}^{k} n_{y_i} = \sum_{j=1}^{m} n_{x_j}.$$

Загальні числові характеристики ознаки X:
загальна середня величина ознаки X

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_j n_{ij}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_j n_{x_j}}{n}; \tag{8.17}$$

загальна дисперсія ознаки X

$$D_x = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} x_j^2 n_{ij}}{n} - (\overline{x})^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_j^2 n_{x_j}}{n} - (\overline{x})^2; \tag{8.18}$$

загальне середнє квадратичне відхилення ознаки X

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}. \tag{8.19}$$

Загальні числові характеристики ознаки Y:
загальна середня величина ознаки Y

$$\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i n_{ij}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i n_{y_i}}{n};$$

загальна дисперсія ознаки Y

$$D_y = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} y_i^2 n_{ij}}{n} - (\overline{y})^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_i^2 n_{y_i}}{n} - (\overline{y})^2;$$

загальне середнє квадратичне відхилення ознаки Y

$$\sigma_y = \sqrt{D_y}.$$

Умовні статистичні розподіли та їх числові характеристики

Умовним статистичним розподілом ознаки Y при фіксованому значенні $X = x_i$ називають перелік варіант ознаки Y та відповідних їм частот, узятих при фіксованому значенні X.

$$Y/X = x_j.$$

$Y=y_i$	y_1	y_2	y_3	...	y_k
n_{ij}	n_{1j}	n_{2j}	n_{3j}	...	n_{kj}

Тут $\sum\limits_{i=1}^{k} n_{ij} = n_{x_j}$.

Числові характеристики для такого статистичного розподілу називають *умовними* . До них належать:
умовна середня ознаки Y

$$\overline{y}_{X=x_j} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i n_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{k} n_{ij}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i n_{ij}}{n_{x_j}}; \tag{8.20}$$

умовна дисперсія ознаки Y

$$D(Y/X=x_j) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} y_i^2 n_{ij}}{n_{x_j}} - (\overline{y}_{X=x_j})^2; \tag{8.21}$$

умовне середнє квадратичне відхилення ознаки Y

$$\sigma(Y/X=x_j) = \sqrt{D(Y/X=x_j)}. \tag{8.22}$$

$D(Y/X=x_j)$, $\sigma(Y/X=x_j)$ вимірюють розсіювання варіант ознаки Y щодо умовної середньої величини $\overline{y}_{x=x_j}$.

Умовним статистичним розподілом ознаки X при $Y=y_i$, називають перелік варіант $X=x_j$ та відповідних їм частот, узятих при фіксованому значенні ознаки $Y=y_i$.

$$X/Y=y_i.$$

$X=x_j$	x_1	x_2	x_3	...	x_m
n_{ij}	n_{i1}	n_{i2}	n_{i3}	...	n_{im}

Тут $\sum\limits_{j=1}^{m} n_{ij} = n_{y_i}$.

Умовні числові характеристики для цього розподілу:
умовна середня величина ознаки X

$$\overline{x}_{Y=y_i} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} x_i n_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{m} n_{ij}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} x_i n_{ij}}{n_{y_i}};$$

умовна дисперсія ознаки X

$$D(X/Y = y_i) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} x_i^2 n_{ij}}{n_{y_i}} - (\overline{x}_{Y=y_i})^2;$$

умовне середнє квадратичне відхилення ознаки X

$$\sigma(X/Y = y_i) = \sqrt{D(X/Y = y_j)}.$$

При відомих значеннях умовних середніх $\overline{y}_{x_j}$, $\overline{x}_{y_i}$ загальні середні ознаки X та Y можна обчислити за формулами:

$$\overline{y} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} y_{x_j} n_{x_j}}{n}; \tag{8.23}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_{y_i} n_{y_i}}{n}. \tag{8.24}$$

Кореляційний момент, вибірковий коефіцієнт кореляції

Під час дослідження двовимірного статистичного розподілу вибірки постає потреба з'ясувати наявність зв'язку між ознаками X і Y, який у статистиці називають кореляційним. Для цього обчислюється емпіричний кореляційний момент K^*_{xy} за формулою

$$K^*_{xy} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{m} y_i x_j n_{ij}}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y}. \tag{8.25}$$

Якщо $K^*_{xy} = 0$, то кореляційного зв'язку між ознаками X і Y немає. Якщо ж $K^*_{xy} \neq 0$, то цей зв'язок існує.

Отже, кореляційний момент дає лише відповідь на запитання: є зв'язок між ознаками X і Y, чи його немає.

Для вимірювання тісноти кореляційного зв'язку обчислюється вибірковий коефіцієнт кореляції $r_{\text{В}}$ за формулою

$$r_{\text{В}} = \frac{K^*_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \tag{8.26}$$

Як і в теорії ймовірностей, $|r_{\text{В}}| \le 1$, $-1 \le r_{\text{В}} \le 1$.

Приклади розв'язування задач

1. За заданим дискретним статистичним розподілом вибірки

$X = x_i$	-6	-4	-2	2	4	6
n_i	5	10	15	20	40	10
W_i	$0,05$	$0,1$	$0,15$	$0,2$	$0,4$	$0,1$

потрібно:

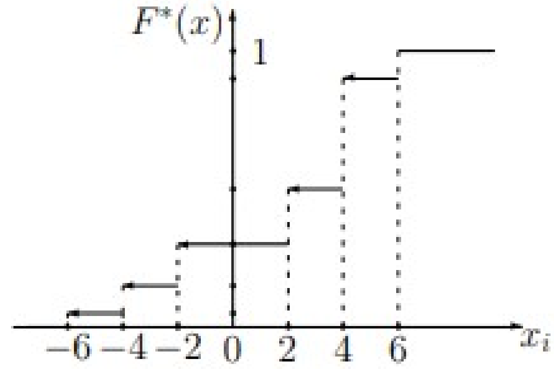
1) побудувати $F^*(x)$ і зобразити її графічно;

2) накреслити полігон частот.

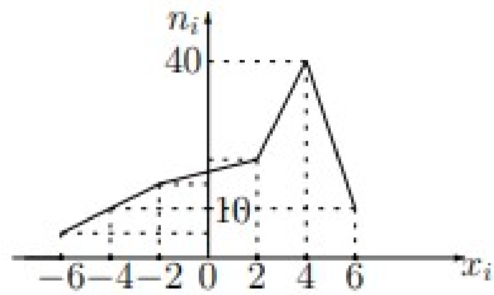
Розв'язування. Згідно з визначенням та властивостями, $F^*(x)$ має вигляд

$$F^*(x) = W(X < x) = \frac{n_x}{n} = \begin{cases} 0, & x \le -6, \\ 0,05, & -6 < x \le -4, \\ 0,15, & -4 < x \le -2, \\ 0,3, & -2 < x \le 2, \\ 0,5, & 2 < x \le 4, \\ 0,9, & 4 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

Графічне зображення $F^*(x)$ таке



Полігон частот має вигляд



2. За заданим статистичним розподілом вибірки

$X = x_i$	$2,5$	$4,5$	$6,5$	$8,5$	$10,5$
n_i	10	20	30	30	10

потрібно:

1) обчислити $\overline{x}_B$, D_B, σ_B;

2) знайти M_0^*, M_e^*;

3) обчислити R, V.

Розв'язування. Оскільки $n = \sum\limits_i n_i = 100$, то, згідно із формулами

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n_i}{n}, D_B = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x}_B)^2; \sigma_B = \sqrt{D_B},$$

знаходимо

$$\overline{x}_B = \frac{2,5 \cdot 10 + 4,5 \cdot 20 + 6,5 \cdot 30 + 10,5 \cdot 10}{100} = 6,7;$$

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{(2,5)^2 \cdot 10 + (4,5)^2 \cdot 20 + (6,5)^2 \cdot 30 + (10,5)^2 \cdot 10}{100} = 50,05;$$

$$D_B = 50,05 - (6,7)^2 = 5,16,$$

$$\sigma_{_B} = \sqrt{D_{_B}} = \sqrt{5,16} \approx 2,27,$$
$$M_0^* = 6,5; 8,5.$$

Отже, наведений статистичний розподіл вибірки буде двомодальним. $M_e^* = 6,5$, оскільки варіанта $x = 6,5$ поділяє варіаційний ряд 2,5; 4,5; 6.5; 8,5; 10,5 на дві частини: 2,5; 4,5 та 8,5; 10,5, які мають однакову кількість варіант.

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 10,5 - 2,5 = 8,$$
$$V = \frac{\sigma_{_B}}{\overline{x}_{_B}} \cdot 100\% = \frac{2,27}{6,7} \cdot 100 = 33,88\%.$$

3. За заданим інтервальним статистичним розподілом вибірки

$X = x_i$	1–1,2	1,2–1,4	1,4–1,6	1,6–1,8	1,8–2	2–2,2	2,2–2,4	2,4–2,6	2,6–2,8	2,8–3	3–3,2
n_i	5	12	18	22	36	24	19	15	11	9	2

обчислити $\bar{x}_B$, D_B, σ_B.

Розв'язування. Побудуємо дискретний статистичний розподіл за заданим інтервальним. Оскільки $h = 0,2$, то дістанемо:

$x_i^* = x_i - \frac{h}{2} = x_{i-1} + \frac{h}{2}$	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1
h_i	5	12	18	22	36	24	19	15	11	9	2

Беручи до уваги (...), (...), (...) і те, що $n = 173$, дістанемо:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum x_1^* n_i}{n} = \frac{5,5 + 15,6 + 27 + 37,4 + 68,4 + 50,4 + 43,7}{173} +$$
$$+ \frac{37,5 + 29,7 + 26,1 + 6,2}{173} = \frac{347,5}{173} \approx 2,008671.$$

Отже, $\bar{x}_B = 2,008671$.

$$\frac{\sum (x_1^*)^2 n_i}{n} = \frac{6,05 + 20,29 + 40,5 + 63,58 + 129,96 + 105,84 + 100,51}{173} +$$

$$+\frac{93,75+80,19+75,69+19,22}{173}=\frac{735,58}{173}=4,251908.$$

$$D_B=\frac{\sum\left(x_1^*\right)^2 n_i}{n}-\left(\bar{x}_B\right)^2=4,251908-(2,008671)^2=$$
$$=4,251908-4,034759=0,217149.$$

$D_B=0,217149.$

$$\sigma_B=\sqrt{D_B}=\sqrt{0,217149}\approx 0,466.$$

Отже, $\sigma_B=0,466.$

4. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n=32$. Здобуто такі реалізації випадкової величини: 2,2; 7,1; 6,3; 3,9; 5,9; 5,6; 5,6; 4,7; 7,9; 3,2; 6,1; 5,5; 6,4; 6,0; 6,9; 4,7; 6,4; 6,9; 6,7; 7,9; 4,2; 6,7; 6,0; 9,2; 5,5; 6,5; 3,5; 4,9; 7,2; 4,9; 8,9; 5,7. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Запропонувати гіпотезу про вигляд $F(x)$ у сукупності. За допомогою умовних моментів розподілу знайти $\bar{x}$, s^2, As^*, Ek^*.

Розв'язування. Для побудови інтервального ряду розбиваємо область реалізацій на 7 інтервалів з однаковими довжинами інтервалів: $\Delta x=\dfrac{\max\limits_i(x_i)-\min\limits_i(x_i)}{7}$; $\Delta x=\dfrac{9,2-2,2}{7}=1$. Частоти кожного інтервалу знайдемо, визначивши для кожного значення інтервал. Якщо значення x_i потрапляє на межу, то збільшуємо на 1 частоту нижнього інтервалу.

Інтервал	2,2–3,2	3,2–4,2	4,2–5,2	5,2–6,2	6,2–7,2	7,2–8,2	8,2–9,2
Частота	2	3	4	9	10	2	2

Згідно зі знайденим рядом будуємо гістограму (рис. 8.1).

На підставі побудованої гістограми можна висунути гіпотезу про нормальний закон розподілу в сукупності.

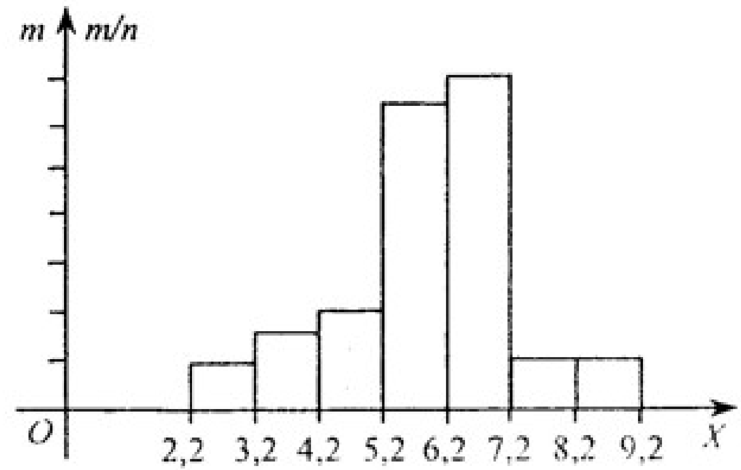


Рис. 8.1

Для обчислення умовних моментів розподілу складемо таблицю, в якій запишемо середини інтервалів $u_i = \dfrac{x_{i-1} + x_t}{2}$, їхні частоти n_i і нові змінні $v_i = \dfrac{u_i - C}{\Delta x}$. Візьмемо C, що дорівнює $u_4 = 5,7$. У наступних стовпця обчислено значення $v_i n_i$, $v_i^2 n_i$, $v_i^3 n_i$, $v_i^4 n_i$, а в останньому рядку таблиці – їхні суми.

u_i	n_i	v_i	$v_i n_i$	$v_i^2 n_i$	$v_i^3 n_i$	$v_i^4 n_i$
2,7	2	-3	-6	18	-54	162
3,7	3	-2	-6	12	-24	48
4,7	4	-1	-4	4	-4	4
5,7	9	0	0	0	0	0
6,7	10	1	10	10	10	10
7,7	2	2	4	8	16	32
8,7	2	3	6	18	54	162
Сума	32	–	4	70	-2	418

Знайдемо умовні моменти розподілу від першого до четвертого порядків включно:

$$h_1^* = \frac{\sum v_i n_i}{n} = \frac{4}{32} = 0,125; \quad h_2^* = \frac{\sum v_i^2 n_i}{n} = \frac{70}{32} = 2,1875;$$

$$h_3^* = \frac{\sum v_i^3 n_i}{n} = \frac{-2}{32} = -0,0625; \quad h_4^* = \frac{\sum v_i^4 n_i}{n} = \frac{418}{32} = 13,0525.$$

Визначимо числові характеристики за допомогою умовних моментів розподілу:

$$\bar{x} = C + h_1^* \Delta x = 5,7 + 0,125 \cdot 1 = 5,825;$$

$$s^2 = (\Delta x)^2 \left(h_2^* - (h_1^*)^2\right) = 2,1875 - (0,125)^2 \approx 2,172;$$

$$\mu_3^* = (\Delta x)^3 \left(h_3^* - 3h_2^* h_1^* + 2\,(h_1^*)^3\right) = -0,0625-$$

$$-2,1875 \cdot 0,125 + 2 \cdot (0,125)^3 = -0,332031;$$

$$\mu_4^* = (\Delta x)^4 \left(h_4^* - 4h_3^* h_1^* + 6h_2^*\,(h_1^*)^2 - 3\,(h_1^*)^4\right) = 13,0625+$$

$$+4 \cdot 0,0625 \cdot 0,125 + 6 \cdot 2,1875 \cdot (0,125)^2 - 3 \cdot (0,125)^4 \approx 13,29809;$$

$$A_s^* = \frac{\mu_3^*}{s^3} = -\frac{0,332031}{\sqrt{(2,172)^3}} \approx -0,1037;$$

$$E_k^* = \frac{\mu_4^*}{s^4} - 3 = \frac{13,29809}{(2,172)^2} - 3 \approx -0,1812.$$

Отже, асиметрія та ексцес близькі до нуля, чим підтверджується припущення про нормальний закон розподілу в сукупності.

Задачі для самостійного розв'язування

∘ **1.** При вивченні випадкової величини X у результаті 40 незалежних спостережень дістали вибірку: 10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10, 14, 13, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12.

Потрібно:

1. Побудувати дискретний статистичний розподіл для цієї вибірки, а також полігон частот і $F^*(x)$.

2. Обчислити $\overline{x}_B$, σ_B, R, V.

3. Знайти M_0^*, M_e^*.

2 (с/р). Із партії однотипних амперметрів для контролю відібрано 10 штук. Вимірювання показали такі відхилення від номіналу в міліметрах:

Номер партії	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x, мА	1	3	-2	2	4	2	5	3	-2	4

Потрібно:

1. Побудувати дискретний статистичний розподіл, полігон частот і $F^*(x)$.

2. Обчислити $\overline{x}_B$, σ_B, R, V.

3. Знайти M_0^*, M_e^*.

3 (д/з). На телефонній станції досліджувалася величина X – кількість неправильних з'єднань за хвилину. Спостереження протягом 80 хв. дали такі результати: 5, 1, 4, 0, 2, 4, 3, 6, 7, 3, 5, 5, 2, 5, 6, 7, 4, 3, 1, 0, 3, 1, 7, 2, 5, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 1, 3, 4, 7, 5, 6, 3, 1, 7, 5, 4, 0, 1, 1, 2, 6, 5, 1, 2, 6, 5, 0, 2, 7, 4, 3, 0, 2, 1, 7, 2, 3, 4, 5, 7, 6, 5.

Як вибіркову сукупність для задачі № k, де $k = \overline{1, 20}$, відібрати підряд 20 варіант, починаючи з k-ої від початку. Для отриманої вибірки:

1) скласти статистичний розподіл частот та відносних частот;

2) побудувати полігон частот та відносних частот;

3) знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік;

4) з'ясувати питання, чи можна використати метод добутків для знаходження зведених числових характеристик; у випадку позитивної відповіді виконати розрахунки зведених характеристик в 5) цим методом;

5) обчислити вибіркові: середню, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, моду, медіану, розмах варіацій, коефіцієнт асиметрії та ексцес.

4–13 (с/р). Для даних інтервальних статистичних розподілів: 1) побудувати гістограми частот та відносних частот; 2) знайти емпіричну функцію розподілу та побудувати її графік; 3) обчислити числові характеристики розподілу.

№ 4.

$[x_i; x_{i+1})$	$[1,4; 1,6)$	$[1,6; 1,8)$	$[1,8; 2)$	$[2; 2,2)$	$[2,2; 2,4)$	$[2,4; 2,6)$	$[2,6; 2,8]$
n_i	6	10	18	25	20	13	8

№ 5.

$[x_i; x_{i+1})$	$[1,6; 1,8)$	$[1,8; 2)$	$[2; 2,2)$	$[2,2; 2,4)$	$[2,4; 2,6)$	$[2,6; 2,8)$	$[2,8; 3]$
n_i	2	6	10	35	20	10	7

№ 6.

$[x_i; x_{i+1})$	$[2; 2,2)$	$[2,2; 2,4)$	$[2,4; 2,6)$	$[2,6; 2,8)$	$[2,8; 3)$	$[3; 3,2)$	$[3,2; 3,4]$
n_i	7	10	21	34	10	6	2

№ 7.

$[x_i; x_{i+1})$	$[1,7; 2)$	$[2; 2,3)$	$[2,3; 2,6)$	$[2,6; 2,9)$	$[2,9; 3,2)$	$[3,2; 3,5)$	$[3,5; 3,8]$
n_i	5	8	17	29	21	13	7

№ 8.

$[x_i; x_{i+1})$	$[1,5; 1,6)$	$[1,6; 1,7)$	$[1,7; 1,8)$	$[1,8; 1,9)$	$[1,9; 2)$	$[2; 2,1)$	$[2,1; 2,2]$
n_i	6	9	18	29	20	12	6

№ 9.

$[x_i; x_{i+1})$	$[1,8; 2)$	$[2; 2,2)$	$[2,2; 2,4)$	$[2,4; 2,6)$	$[2,6; 2,8)$	$[2,8; 3]$	$[3; 3,2]$
n_i	6	9	19	34	8	7	3

№ 10.

$[x_i; x_{i+1})$	$[2,1; 2,2)$	$[2,2; 2,3)$	$[2,3; 2,4)$	$[2,4; 2,5)$	$[2,5; 2,6)$	$[2,6; 2,7)$	$[2,7; 2,8]$
n_i	6	13	17	27	19	10	8

№ 11.

$[x_i; x_{i+1})$	$[1,9; 2,1)$	$[2,1; 2,3)$	$[2,3; 2,5)$	$[2,5; 2,7)$	$[2,7; 2,9)$	$[2,9; 3,1)$	$[3,1; 3,3]$
n_i	5	10	18	28	20	13	6

№ 12.

$[x_i; x_{i+1})$	$[1,3; 1,5)$	$[1,5; 1,7)$	$[1,7; 1,9)$	$[1,9; 2,1)$	$[2,1; 2,3)$	$[2,3; 2,5)$	$[2,5; 2,7]$
n_i	5	9	18	30	20	12	6

№ 13.

$[x_i; x_{i+1})$	$[1,7; 1,9)$	$[1,9; 2,1)$	$[2,1; 2,3)$	$[2,3; 2,5)$	$[2,5; 2,7)$	$[2,7; 2,9)$	$[2,9; 3,1)$
n_i	6	10	18	25	20	13	8

○ **14.** Залежність річної заробітньої плати Y від загального виробітку X показано у вигляді двовимірного статистичного розподілу:

Y	X					
	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	n_{yi}
0,82	1	3	–		–	
0,86	–	3	2	1	–	
0,9	–	2	5	9	3	
0,94	–	–	–	6	4	
0,98	–	–	–	–	2	
n_{xj}						

Обчислити $r_{\text{В}}$, $\overline{y}_{x=4,5}$, $\overline{x}_{y=0,86}$.

Відповідь. $r_{\text{В}} = 0,783$; $\overline{y}_{x=4,5} = 0,913$; $\overline{x}_{y=0,86} = 3,17$.

○ **15.** Зі старших класів ліцею було відібрано групу учнів. Дані про їх середньорічні оцінки з математики x_i та решти дисциплін n_i (за стобальною системою) наведені в таблиці:

n_i	45	30	48	50	52	54	51	60	62	63	65	70	71	74	76	68	79	85
x_i	30	35	40	44	48	55	52	65	69	72	78	82	84	86	90	91	92	95

Обчислити K_{xy}, $r_{\text{В}}$.

Відповідь. $K_{xy} = 252,62$; $r_{\text{В}} = 0,903$.

○ **16.** Виготовлені в цеху втулки сортувалися за відхиленням внутрішнього діаметра X і зовнішнього Y. Спільний статистичний розподіл ознак X і Y наведено в таблиці:

$X = x_j$, мм	$Y = y_j$, мм				
	0,002	0,004	0,006	0,008	n_{yi}
0,01	1	3	4	2	
0,02	2	2	24	10	
0,03	4	15	8	3	
0,04	4	6	8	2	
n_{xj}					

Обчислити $r_{\text{В}}$, $\overline{y}_{x=0,03}$, $\overline{x}_{y=0,004}$.

Відповідь. $r_{\text{В}} = 0,141$; $\overline{y}_{x=0,03} = 0,0047$ мм; $\overline{x}_{y=0,004} = 0,029$ мм.

17. Залежність річної продуктивності праці в розрахунку на одного робітника Y від енергомісткості праці на підприємстві певної галузі показано в таблиці:

y_i, тис. грн/робітн.	11,0	11,6	12,1	12,7	13,2	13,9	14,1	14,6	14,9	15,4
x_i, кВт/робітн.	5,2	5,8	5,9	6,2	6,9	7,2	7,5	8,5	8,8	9,4

Обчислити K_{xy}, $r_{\text{В}}$.

Відповідь. $K_{xy} = 6,945$; $r_{\text{В}} = 0,681$.

○ **18.** При аналізі руди дістали такі дані про відсотковий вміст у ній свинцю та срібла. Результати аналізу наведено в таблиці:

$Y = y_i$	$X = x_j$									
	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	n_{yi}
2	119	9	–	–	–	–	–	–	–	
6	9	59	7	–	–	–	–	–	–	
10	1	4	28	3	–	–	–	–	–	
14	–	–	8	12	4	–	–	–	–	
18	–	–	1	6	7	1	1	–	–	
22	–	–	–	1	1	8	3	–	–	
26	–	–	–	–	–	2	1	–	–	
30	–	–	–	–	–	–	3	2	1	
34	–	–	–	–	–	–	–	–	–	
38	–	–	–	–	–	–	–	–	1	
n_{xj}										

Обчислити $r_{\text{В}}$, $\overline{y}_{x=12{,}5}$; $\overline{x}_{y=14}$.

Відповідь. $r_{\text{В}} = 0,865$; $\overline{y}_{x=12{,}5} = 3,32\%$; $\overline{x}_{y=14} = 50\%$.

19. Залежність урожайності озимої пшениці y_i від кількості внесених добрив x_i показано в таблиці:

y_i, ц/га	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
x_i, кг/га	10	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140

Обчислити K_{xy}, $r_{\text{В}}$.

Відповідь. $K_{xy} = 289,23$; $r_{\text{В}} = 0,998$.

Тема 9. Статистичне й інтервальне оцінювання параметрів розподілу

Інформація, яку дістають на основі обробки вибірки про ознаку генеральної сукупності, завжди міститиме певні похибки, оскільки обсяг вибірки значно менший від обсягу генеральної сукупності.

Позначимо через θ оцінювальний параметр генеральної сукупності, а через θ^* – його статистичну оцінку, або **статистику**. Якщо θ^* визначається одним числом, то її називають **точковою**.

Якщо $M(\theta^*) = \theta$, то θ^* називається **незміщеною** оцінкою, інакше – **зміщеною** відносно параметра генеральної сукупності θ. Різниця $\theta^* - \theta = \delta$ називається **зміщенням статистичної оцінки** θ^*. Точкова оцінка називається **ефективною**, якщо при заданому обсязі вибірки вона має найменшу дисперсію. Точкова оцінка називається **ґрунтовною**, якщо

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta) = 1. \tag{9.1}$$

На основі методів визначення точкових статистичних оцінок для параметрів генеральної сукупності (метод аналогій, метод найменших квадратів, метод максимальної правдоподібності) доведено, що:

1) точковою незміщеною статистичною оцінкою для середньої генеральної є середня вибіркова:

$$M(\overline{x}_{B}) = \overline{x}_{\Gamma}; \tag{9.2}$$

2) точковою незміщеною статистичною оцінкою для генеральної дисперсії є величина $\dfrac{n}{n-1}\cdot D_{B}$, яку називають **виправленою дисперсією** й позначають через S^2:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{B}, \quad M(S^2) = D_{\Gamma}. \tag{9.3}$$

3) величина

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{B}} \qquad (9.4)$$

називається **виправленим середнім квадратичним відхиленням** і є зміщеною точковою статистичною оцінкою для σ_Γ.

Статистична оцінка, що визначається двома числами (кінцями інтервалів), називається **інтервальною**.

Розглянемо різницю $|\theta^* - \theta|$:

$$|\theta^* - \theta| < \delta. \qquad (9.5)$$

Тут δ – **точність** оцінки. Ймовірність нерівності (9.5)

$$P(|\theta^* - \theta| < \delta) = \gamma$$

називають **надійністю**. Останню рівність можна подати у вигляді:

$$P(\theta^* - \delta < \theta < \delta + \theta^*) = \gamma.$$

Інтервал $[\theta^* - \delta; \theta^* + \delta]$, що покриває параметр θ із заданою надійністю γ, називається **довірчим**.

Розглянемо деякі випадки побудови довірчих інтервалів:

1) довірчий інтервал для $\overline{x}_\Gamma$ із заданою надійністю γ при відомому σ_Γ:

$$\overline{x}_{B} - \frac{x^* \cdot \sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < \overline{x}_\Gamma < \overline{x}_{B} + \frac{x^* \cdot \sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}. \qquad (9.6)$$

Тут x^* знаходиться за допомогою таблиці з умови: $\Phi(x^*) = 0,5 \cdot \gamma$. Величина $\dfrac{x^* \cdot \sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$ – **точність оцінки** або **похибка вибірки**.

2) довірчий інтервал для $\overline{x}_\Gamma$ при невідомому σ_Γ із заданою надійністю γ :

$$\overline{x}_{B} - \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}} < \overline{x}_\Gamma < \overline{x}_{B} + \frac{t_\gamma \cdot S}{\sqrt{n}}. \qquad (9.7)$$

Тут t_γ знаходимо за заданою надійністю γ і числі степенів вільності $k = n - 1$ у відповідній таблиці.

3) довірчі інтервали із заданою надійністю γ для D_Γ і σ_Γ (у випадку, коли ознака X має нормальний закон розподілу):

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} < D_\Gamma < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}, \tag{9.8}$$

$$\frac{\sqrt{n-1}S}{\chi_2} < \sigma_\Gamma < \frac{\sqrt{n-1}S}{\chi_1}. \tag{9.9}$$

Значення χ_1^2 і χ_2^2 знаходимо у відповідній таблиці згідно з рівностями:

$$P(\chi^2 > \chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad P(\chi^2 > \chi_2^2) = \frac{\alpha}{2}, \tag{9.10}$$

4) довірчий інтервал для коефіцієнта кореляції r_{xy} генеральної сукупності із заданою надійністю γ:

$$r_B - t_\gamma \cdot \frac{1 - r_B^2}{\sqrt{n}} < r_{xy} < r_B + t_\gamma \cdot \frac{1 - r_B^2}{\sqrt{n}}, \tag{9.11}$$

де r_B – вибірковий коефіцієнт кореляції, t_γ – знаходиться з рівності $\Phi(t_\gamma) = 0,5\gamma$ за таблицею значень функції Лапласа.

5) якщо закон розподілу ознаки X генеральної сукупності невідомий, то довірчий інтервал для $\overline{x}_\Gamma$ подається нерівністю:

$$\overline{x}_B - \frac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{(1-\gamma)\cdot n}} < \overline{x}_\Gamma < \overline{x}_B + \frac{\sigma_\Gamma}{\sqrt{(1-\gamma)\cdot n}}. \tag{9.12}$$

Приклади розв'язування задач

1. Вимірявши 40 випадково відібраних після виготовлення деталей, знайшли вибіркову середню, що дорівнює 15 см. Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчий інтервал для середньої величини всієї партії деталей, якщо генеральна дисперсія дорівнює 0,09 см^2.

Розв'язування. Для побудови довірчого інтервалу необхідно знайти: $\overline{x}_B$, σ_Γ, n, x.

З умови задачі маємо: $\overline{x}_{B} = 15$ см, $\sigma_r = \sqrt{D_r} = \sqrt{0,09}$см$^2 = 0,3$ см, $n = 40 \to \sqrt{n} = \sqrt{40} = 6,32$. Величина x обчислюється з рівняння

$$\Phi(x) = 0,5\gamma = 0,5 \cdot 0,99 = 0,495.$$

$\Phi(x) = 0,495 \to x = 2,58$ [за таблицею значень функції Лапласа]. Знайдемо числові значення кінців довірчого інтервалу:

$$\overline{x}_{B} - \frac{x \cdot \sigma_r}{\sqrt{n}} = 15 - \frac{0,3 \cdot 2,58}{6,32} = 15 - 0,12 = 14,88 \text{ см},$$

$$\overline{x}_{B} + \frac{\sigma_r \cdot x}{\sqrt{n}} = 15 + \frac{0,3 \cdot 2,58}{6,32} = 15 + 0,12 = 15,12 \text{ см}.$$

Маємо:

$$14,88 < \overline{x}_r < 15,12.$$

Отже, з надійністю 0,99 (99% гарантії) оцінюваний параметр $\overline{x}_r$ перебуває всередині інтервалу $[14,87; 15,13]$.

2. Випадково вибрана партія з двадцяти приладів була випробувана щодо терміну безвідмовної роботи кожного з них t_i. Результати випробувань наведено у вигляді дискретного статистичного розподілу:

t_i	100	170	240	310	380
n_i	2	5	10	2	1

З надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчий інтервал для α (середнього часу безвідмовної роботи приладу).

Розв'язування. Для побудови довірчого інтервалу необхідно знайти середнє вибіркове і виправлене середнє квадратичне відхилення.

Обчислимо $\overline{x}_{\text{В}}$:

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{\sum t_i n_i}{n} = \frac{100 \cdot 2 + 170 \cdot 5 + 240 \cdot 10 + 310 \cdot 2 + 380 \cdot 1}{20} =$$

$$= \frac{4450}{20} = 222,5.$$

Отже, дістали $\overline{x}_{\text{В}} = 222,5$ год.

Визначимо $D_{\text{В}}$:

$$\frac{\sum t_i^2 n_i}{n} = \frac{100^2 \cdot 2 + 170^2 \cdot 5 + 240^2 \cdot 10 + 310^2 \cdot 2 + 380^2 \cdot 1}{20} =$$

$$= \frac{1077100}{20} = 53855.$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum t_i^2 n_i}{n} - (\overline{x}_{\text{В}})^2 = 53855 - (222,5)^2 =$$
$$= 53855 - 49506,25 = 4348,75.$$

Отже, $D_{\text{В}} = 4348,75$.

Виправлене середнє квадратичне відхилення дорівнюватиме:

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_{\text{В}}} = \sqrt{\frac{20}{20-1} 4348,75} \approx 67,66 \text{ год.}$$

За таблицею 3 (див. додаток) розподілу Стьюдента за заданою надійністю $\gamma = 0,99$ і числом ступенів свободи $k = n-1 = 20-1 = 19$ знаходимо значення $t(\gamma = 0,99, k = 19) = 2,861$.

Обчислимо кінці довірчого інтервалу:

$$x_{\text{В}} - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} = 222,5 - \frac{2,861 \cdot 67,66}{\sqrt{20}} = 222,5 - \frac{2,861 \cdot 67,66}{4,472} = 179,2 \text{год.}$$

$$x_{\text{В}} + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} = 222,5 + \frac{2,861 \cdot 67,66}{\sqrt{20}} = 222,5 + \frac{2,861 \cdot 67,66}{4,472} = 265,8 \text{год.}$$

Отже, з надійністю $\gamma = 0,99$ можна стверджувати, що $\overline{X}_{\text{Г}} = a$ буде міститися в інтервалі

$$179,2 < a < 265,8.$$

При великих обсягах вибірки, а саме: $n > 30$, на підставі центральної граничної теореми теорії ймовірностей (теореми Ляпунова) розподіл Стьюдента наближається до нормального закону. У цьому разі t_γ знаходиться за таблицею значень функції Лапласа.

3. Перевірена партія однотипних телевізорів x_i на чутливість до відеопрограм n_i, дані перевірки наведено як дискретний статистичний розподіл:

n_i мкв	200	250	300	350	400	450	500	550
x_i	2	5	6	7	5	2	2	1

З надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчі інтервали для D_Γ, σ_Γ.

Розв'язування. Для побудови довірчих інтервалів необхідно знайти значення S^2, S.

Обчислимо значення $\overline{x}_\text{В}$:

$$\overline{x}_\text{В} = \frac{\sum x_i n_i}{n} =$$

$$= \frac{200 \cdot 2 + 250 \cdot 5 + 300 \cdot 6 + 350 \cdot 7 + 400 \cdot 5 + 450 \cdot 2 + 500 \cdot 2 + 550 \cdot 1}{30} =$$

$$= \frac{400 + 1250 + 1800 + 2450 + 2000 + 900 + 1000 + 550}{30} =$$

$$= \frac{10350}{30} = 345 \text{ мкв.}$$

Обчислимо $D_\text{В}$:

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{200^2 \cdot 2 + 250^2 \cdot 5 + 300^2 \cdot 6 + 350^2 \cdot 7 + 400^2 \cdot 5 +}{30} +$$

$$+ \frac{450^2 \cdot 2 + 500^2 \cdot 2 + 550^2 \cdot 1}{30} =$$

$$= \frac{80000 + 312500 + 540000 + 857500 + 800000 + 405000}{30} +$$

$$+\frac{500000+302500}{30}=\frac{3797500}{30}=126583,3.$$

$$D_{\text{В}}=\frac{\sum x_i^2 n_i}{n}-(\overline{x}_{\text{В}})^2=126583,3-(345)^2=126583,3-119025=7558,3.$$

Отже, $D_{\text{В}}=7558,3$ [мкв]^2.

Виправлена дисперсія і виправлене середнє квадратичне відхилення дорівнюватимуть:

$$S^2=\frac{n}{n-1}D_{\text{В}}=\frac{30}{30-1}7558,3=\frac{30}{29}7558,3=7818,9[\text{мкв}]^2;$$

$$S=\sqrt{\frac{n}{n-1}D_{\text{В}}}=\sqrt{7818,9}\approx 88,42 \text{ мкв.}$$

Оскільки $\alpha=1-\gamma=1-0,99=0,01$, то згідно з (9.10), знаходимо значення χ_1^2, χ_2^2, а саме:

$$P(\chi^2>\chi_1^2)=1-\frac{\alpha}{2}=1-\frac{0,01}{2}=1-0,005=0,995.$$

$$P(\chi^2>\chi_2^2)=\frac{\alpha}{2}=\frac{0,01}{2}=0,005.$$

За таблицею 5 (див. додаток) знаходимо:

$$\chi_1^2(0,995;k=m-1)=\chi_1^2(0,995;k=29)=14,3.$$

$$\chi_2^2(0,005;k=29)=52,5.$$

Обчислимо кінці довірчого інтервалу для D_{Γ}:

$$\frac{n-1}{\chi_2^2}S^2=\frac{29}{52,5}\cdot 7818,9=4319,01;$$

$$\frac{n-1}{\chi_1^2}S^2=\frac{29}{14,3}\cdot 7818,9=15856,5.$$

Отже, довірчий інтервал для D_{Γ} буде таким:

$$4319,0<D_{\Gamma}<15856,5.$$

Довірчий інтервал для σ_Γ становить

$$68,3 < \sigma_\Gamma < 130,83.$$

4. Випадково вибраних студентів із потоку університету було піддано тестуванню з математики і хімії. Результати цих тестувань подано двовимірним статистичним розподілом, де $X = x_i$ – оцінки з математики, $Y = y_i$ – із хімії. Відповіді оцінювалися за десятибальною системою:

$Y = y_i$	$X = x_i$					
	1	3	5	7	9	n_{y_i}
1	2	2	1	–	–	5
3	1	1	1	1	–	4
5	–	–	1	2	3	6
7	–	–	1	1	4	6
9	–	–	2	3	4	9
n_{x_j}	3	3	6	7	11	

Необхідно:

1) з надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_\Gamma$, якщо $\sigma_\Gamma = 5$;

2) з надійністю $\gamma = 0,999$ побудувати довірчі інтервали для σ_Γ, $\overline{Y}_\Gamma$, r_{xy}.

Розв'язування. Обчислимо основні числові характеристики ознак X і Y, а також K_{xy}, $r_\text{В}$. Оскільки $n = \sum\sum n_{ij} = 30$, дістанемо:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i n_{x_j}}{n} = \frac{1\cdot 3 + 3\cdot 3 + 5\cdot 6 + 7\cdot 7 + 9\cdot 11}{30} = 6,33;$$

$$\frac{\sum x_i^2 n_{x_j}}{n} = \frac{1^2\cdot 3 + 3^2\cdot 3 + 5^2\cdot 6 + 7^2\cdot 7 + 9^2\cdot 11}{30} = 47,13.$$

$$D_x = \frac{\sum x_i^2 n_{x_j}}{n} - (\overline{x})^2 = 47,13 - (6,33)^2 = 47,13 - 40,07 = 7,06;$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{7,06} \approx 2,66.$$

$$S_x = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_x} = \sqrt{\frac{30}{29} 7,06} \approx 2,7.$$

$$\overline{y} = \frac{\sum y_i n_{y_i}}{n} = \frac{1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 6 + 9 \cdot 9}{30} = 5,67.$$

$$\frac{\sum y_i^2 n_{y_i}}{n} = \frac{1^2 \cdot 5 + 3^2 \cdot 4 + 5^2 \cdot 6 + 7^2 \cdot 6 + 9^2 \cdot 9}{30} = 40,47.$$

$$D_y = \frac{\sum y_i^2 n_{y_i}}{n} - (\overline{y})^2 = 40,47 - (5,67)^2 = 40,47 - 32,15 = 8,32.$$

$$\sigma_y = \sqrt{D_y} = \sqrt{8,32} \approx 2,88.$$

$$S_y = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_y} = \sqrt{\frac{30}{29} 8,32} \approx 2,93.$$

$$\frac{\sum\sum y_i x_i n_{y_i}}{n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 3 +}{30}$$

$$+ \frac{3 \cdot 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \cdot 7 + 5 \cdot 1 \cdot 5 + 5 \cdot 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3 \cdot 9 + 7 \cdot 1 \cdot 5 +}{30}$$

$$+ \frac{7 \cdot 1 \cdot 7 + 7 \cdot 4 \cdot 9 + 9 \cdot 2 \cdot 5 + 9 \cdot 3 \cdot 7 + 9 \cdot 4 \cdot 9}{30} = 41.$$

$$K^*_{xy} = \frac{\sum\sum y_i x_i n_{y_i}}{n} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 41 - 6,33 \cdot 5,67 = 41 - 35,89 = 5,11.$$

$$r_{\text{В}} = \frac{K^*_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{5,11}{2,66 \cdot 2,88} = \frac{5,11}{7,661} \approx 0,667.$$

1. Побудуємо довірчий інтервал з надійністю $\gamma = 0,99$ для $\overline{X}_{\text{Г}}$, якщо $\sigma_{\text{Г}} = 5$.

$$\overline{x} - \frac{x\sigma_{\text{Г}}}{\sqrt{n}} < \overline{X}_{\text{Г}} < \overline{x} + \frac{x\sigma_{\text{Г}}}{\sqrt{n}}.$$

Нам відомі значення $\overline{x} = \overline{x} = 6,33$, $\sigma_{\text{Г}} = 5$, $\sqrt{n} = \sqrt{30} = 5,48$. Значення x обчислюємо з рівняння

$$\Phi(x) = 0,5\gamma = 0,5 \cdot 0,99 = 0,495,$$

де $x = 2,58$ знаходимо за таблицею значень функції Лапласа.

Визначимо кінці інтервалу:

$$\overline{x} - \frac{x\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}} = 6,33 - \frac{2,58 \cdot 5}{5,48} = 6,33 - 2,35 = 3,98;$$

$$\overline{x} + \frac{x\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}} = 6,33 + \frac{2,58 \cdot 5}{5,48} = 6,33 + 2,35 = 8,68.$$

Отже, довірчий інтервал для $\overline{X}_{\Gamma}$ буде таким:

$$3,98 < \overline{X}_{\Gamma} < 8,68.$$

2. Побудуємо довірчий інтервал з надійністю $\gamma = 0,999$ для $\overline{Y}_{\Gamma}$.

Оскільки σ_{Γ} нам відоме, то довірчий інтервал у цьому разі визначається так:

$$\overline{y}_{\text{В}} - \frac{t_{\gamma} S_y}{\sqrt{n}} < \overline{Y}_{\Gamma} < \overline{y}_{\text{В}} + \frac{t_{\gamma} S_y}{\sqrt{n}}.$$

Нам відоме значення $\overline{y}_{\text{В}} = \overline{y} = 5,67$, $S_y = 2,93$, t_{γ} знаходимо за таблицею розподілу Стьюдента (таблиця 3 у додатку):

$$t(\gamma = 0,999, k = 29) = 3,659.$$

Обчислимо кінці довірчого інтервалу:

$$\overline{y} - \frac{t_{\gamma} S_y}{\sqrt{n}} = 5,67 - \frac{3,659 \cdot 2,93}{5,5} = 5,67 - 1,95 = 3,72;$$

$$\overline{y} + \frac{t_{\gamma} S_y}{\sqrt{n}} = 5,67 + \frac{3,659 \cdot 2,93}{5,5} = 5,67 + 1,95 = 7,62;$$

Таким чином, довірчий інтервал для $\overline{Y}_{\Gamma}$ буде в таких межах:

$$3,72 < \overline{Y}_{\Gamma} < 7,62.$$

Довірчий інтервал з надійністю $\gamma = 0,999$ для σ_{Γ} буде таким:

$$S_y(1 - q(\gamma; n)) < \sigma_{\Gamma} < S_y(1 + q(\gamma; n)).$$

Нам відоме значення $S_y = 2,93$. Враховуючи, що $\gamma = 0,999$, $n = 30$, знайдемо за таблицею (додаток 5) значення $q(\gamma = 0,999, n = 30) = 0,63$.

Визначимо кінці довірчого інтервалу:

$$S_y(1 - q(\gamma; n)) = 2,93(1 - 0,63) = 2,93 \cdot 0,37 = 1,084;$$

$$S_y(1 + q(\gamma; n)) = 2,93(1 + 0,63) = 2,93 \cdot 1,63 = 4,776.$$

Отже, довірчий інтервал для σ_{Γ} подається такою нерівністю:

$$1,084 < \sigma_{\Gamma} < 4,776.$$

Довірчий інтервал для r_{xy} із заданою надійністю $\gamma = 0,999$ буде таким:

$$r_{\text{B}} - t_{\gamma}\frac{1 - r_{\text{B}}^2}{\sqrt{n}} < r_{xy} < r_{\text{B}} + t_{\gamma}\frac{1 - r_{\text{B}}^2}{\sqrt{n}}.$$

Нам відомі значення $r_{\text{B}} = 0,67$, $\sqrt{n} = \sqrt{30} \approx 5,48$, t_{γ} визначаємо за таблицей значень функції Лапласа $\Phi(x_{\gamma}) = 0,5\gamma = 0,5 \cdot 0,999 = 0,4995$, де $x_{\gamma} = 3,2$.

Визначимо кінці довірчого інтервалу:

$$r_{\text{B}} - x_{\gamma}\frac{1 - r_{\text{B}}^2}{\sqrt{n}} = 0,67 - 3,2\frac{1 - (0,67)^2}{5,48} = 0,67 - \frac{3,2 \cdot 0,5511}{5,48} = \\ = 0,67 - 0,322 = 0,348;$$

$$r_{\text{B}} + x_{\gamma}\frac{1 - r_{\text{B}}^2}{\sqrt{n}} = 0,67 + 3,2\frac{1 - (0,67)^2}{5,48} = 0,67 + \frac{3,2 \cdot 0,5511}{5,48} = \\ = 0,67 + 0,322 = 0,992.$$

Таким чином, довірчий інтервал для r_{xy} буде в таких межах:

$$0,348 < r_{xy} < 0,992.$$

5. Одержано дані зі 100 навмання вибраних підприємств щодо зростання виробітку на одного робітника x_i (у % відносно попереднього року), які мають такий інтервальний статистичний розподіл:

x_i, %; $h = 10$	80 - 90	90 - 100	100 - 110	110 - 120	120 - 130
n_i	3	14	60	20	4

Використовуючи нерівність Чебишова, побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_\text{Г}$, якщо відоме значення $\sigma_\text{Г} = 5\%$ з надійністю $\gamma = 0,99$.

Розв'язування. Для побудови довірчого інтервалу з допомогою нерівності Чебишова необхідно обчислити $\overline{x}_\text{В}$, δ. Щоб визначити $\overline{x}_\text{В}$, перейдемо від інтервального до дискретного статистичного розподілу, а саме:

x_i	85	95	105	115	125
n_i	3	14	60	20	4

Тоді маємо:

$$\overline{x}_\text{В} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = |n = \sum n_i = 101| =$$

$$= \frac{85 \cdot 3 + 95 \cdot 14 + 105 \cdot 60 + 115 \cdot 20 + 125 \cdot 4}{101} =$$

$$= \frac{255 + 1330 + 6300 + 2300 + 500}{101} = \frac{10685}{101} = 105,8\%.$$

Обчислимо δ:

$$\delta = \frac{\sigma_\text{Г}}{\sqrt{(1-\gamma)n}} = \frac{5}{\sqrt{(1-0,99)101}} = \frac{5}{0,01 \cdot 101} = 4,98\%.$$

Отже, довірчий інтервал для $\overline{X}_\text{Г}$ подається такими нерівностями:

$$\overline{x}_\text{В} - \delta < \overline{X}_\text{Г} < \overline{x}_\text{В} + \delta,$$

або
$$100,8 < \overline{X}_{\Gamma} < 110,8.$$

6. Якого значення має набути надійність оцінки γ, щоб за обсягу вибірки $n = 100$ похибка її не перевищувала 0,01 при $\sigma_r = 5$.

Розв'язування. Позначимо похибку вибірки
$$\frac{x\sigma_r}{\sqrt{n}} = \varepsilon \longrightarrow x = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma_r} = \frac{0,01\sqrt{100}}{5} = 0,02.$$

Далі маємо
$$P\left(\left|\frac{\overline{x}_B - a}{\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}}\right| < x\right) = 2\Phi(x) = 2\Phi(0,02) = 2 \cdot 0,008 = 0,016.$$

Як бачимо, надійність мала.

7. Визначити обсяг вибірки n, за якого похибка $\varepsilon = 0,01$ гарантується з ймовірністю 0,999, якщо $\sigma_r = 5$.

Розв'язування. За умови задачі $P\left(\left|\frac{\overline{x}_B - a}{\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}}\right| < x\right) = \gamma = 0,999$. Оскільки $\frac{x\sigma_r}{\sqrt{n}} = \varepsilon$, то дістанемо $n = \frac{x^2\sigma_r^2}{\varepsilon^2}$. Величину x знаходимо з рівності $\Phi(x) = 0,5\gamma = 0,5 \cdot 0,999 = 0,4995 \longrightarrow x \approx 3,4$. Тоді $n = \frac{(3,4)^2 \cdot 5^2}{(0,01)^2} = 2890000$.

Задачі для самостійного розв'язування

○ **1.** У будинку відпочинку випадковим чином було відібрано 20 осіб і виміряно їхній зріст. Здобуті результати наведено у вигляді інтервального статистичного розподілу:

x_i, см	165,5 – 170,5	170,5 – 175,5	175,5 – 180,5	180,5 – 185,5
n_i	4	6	8	2

Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчий інтервал для $\overline{x}_\Gamma$, якщо $\sigma_\Gamma = 2$.

Відповідь. $173,81 < \overline{X}_\Gamma < 176,19$.

2 (д/р). У таблиці наведено відхилення діаметрів валиків, оброблених на верстаті, від номінального розміру:

$h = 5$ мк	$0-5$	$5-10$	$10-15$	$15-20$	$20-25$
n_i	15	75	100	50	10

Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчий інтервал для $\overline{x}_\Gamma = a$.

Відповідь. $11,03 < a < 12,57$

○ **3.** Виміряна максимальна місткість конденсаторів x_i. Результати вимірювання подано як дискретний статистичний розподіл:

x_i пФ	4,0–4,2	4,2 – 4,4	4,4 – 4,6	4,6 – 4,8	4,8 – 5
n_i	2	4	5	9	5

З надійністю $\gamma = 0,999$ побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_\Gamma$, якщо $\sigma_\Gamma = 0,5$.

Відповідь. $4,24 < \overline{X}_\Gamma < 4,92$.

4 (д/р). У 30 телевізорів була виміряна чутливість x_i. Результати вимірювання подано як дискретний статистичний розподіл:

x_i мкВ	200	250	300	350	400	450	500
n_i	2	7	6	8	4	2	1

Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_\Gamma$, якщо $\sigma_\Gamma = 4$.

Відповідь. $376 < \overline{X}_\Gamma < 380,27$.

5 (с/р). У 25 випадково відібраних деталей була виміряна відстань у мікронах від центру маси, що міститься на її осі, до зовнішньої поверхні. Результати вимірювання наведено у вигляді інтервального статистичного розподілу:

Межі інтервалів x_i, мк	80–96	96 – 112	112 – 128	128 – 144	144 – 160
n_i	2	5	8	6	4

З надійністю $\gamma = 0,999$ побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_{\Gamma}$, якщо $\sigma_{\Gamma} = 3$.

Відповідь. $130,58 < \overline{X}_{\Gamma} < 134,42$.

6. З партії однотипних запобіжників відібрано 24 шт. Вимірювання відхилення від номіналу в кілоомах x_i наведено як дискретний статистичний розподіл:

x_i кОм	-1	-2	1	2	3	4	5
n_i	3	4	4	5	4	3	1

Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_{\Gamma}$, якщо $\sigma_{\Gamma} = 3$.

Відповідь. $-0,3 < \overline{X}_{\Gamma} < 2,96$.

7. З партії однотипних пляшок намання було вибрано 28 шт., і в кожній із них була виміряна глибина пазу (канавки) x_i. Результати вимірювання наведено як інтервальний статистичний розподіл:

x_i мм	2,4–2,6	2,6 – 2,8	2,8 – 3,0	3,0 – 3,2	3,2 – 3,4
n_i	5	8	9	5	1

З надійністю $\gamma = 0,999$ побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_{\Gamma}$, якщо $\sigma_{\Gamma} = 0,8$.

Відповідь. $2,31 < \overline{X}_{\Gamma} < 3,33$.

8. 28 однотипних приладів були випробувані щодо їх безвідмовної роботи x_i. Результати вимірювання наведено як дискретний статистичний розподіл:

x_i, год	100	110	120	130	140	150
n_i	10	6	5	4	2	1

З надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_{\Gamma}$, якщо $\sigma_{\Gamma} = 4$.

Відповідь. $112,63 < \overline{X}_{\Gamma} < 116,65$.

∘ **9.** Залежність собівартості Y одного примірника книги від накладу X досліджувалась видавництвом. Результати дослідження наведено у вигляді двовимірного статистичного розподілу:

$X = x_i$, тис. прим.	$Y = y_i$, грн.				
	10,15	5,52	4,08	2,85	n_{yi}
1	10	5	5	–	
2	–	15	10	5	
3	–	–	20	10	
4	–	–	5	15	
n_{xi}					

Потрібно:

1. З надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати інтервал для $\overline{Y}_\Gamma$, σ_Γ, r_{xy}.

2. Використовуючи нерівність Чебишова побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_\Gamma$.

Відповідь. $4,0742 < \overline{y}_\Gamma < 5,1388$; $1,681 < \sigma_\Gamma < 2,417$; $-0,8036 < r_{xy} < -0,4966$; $1,47 < \overline{X}_\Gamma < 3,53$.

10. Залежність річної продуктивності праці в розрахунку на одного робітника y_i від енергомісткості праці x_i на підприємствах однієї галузі наведено в таблиці:

y_i, грн	5,4	5,6	6,2	6,8	7,1	7,8	8,5	9,1	10,5	10,9
x_i, Вт/робітн.	1,8	2,1	2,8	3,0	3,2	3,8	3,9	4,2	4,5	4,8

Продовження таблиці

y_i, грн	11,0	11,6	12,1	12,7	13,2	13,9	14,1	14,6	14,9	15,4
x_i, Вт/робітн.	5,2	5,8	5,9	6,2	6,9	7,2	7,5	8,5	8,8	9,4

Потрібно:

1. З надійністю $\gamma = 0,999$ побудувати довірчі інтервали для $\overline{Y}_\Gamma$, σ_Γ, r_{xy}.

2. Використовуючи нерівність Чебишова, побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_\Gamma$.

Відповідь. $7,69 < \overline{y}_\Gamma < 13,45$; $0,39 < \sigma_\Gamma < 5,99$; $0,946 < r_{xy} < 1$; $10,82 < \overline{X}_\Gamma < 21,38$.

11. Середня температура у квітні у Києві X і Донецьку Y вимірювалась протягом 40 років. Результати вимірювання наведено у вигляді двовимірного статистичного розподілу:

$Y = y_i$	$X = x_i$					
	10	14	18	22	26	n_{y_i}
12	2	3	5	–	–	
16	–	8	2	3	2	
18	1	5	2	2	1	
20	–	2	1	1	1	
n_{xi}						

Потрібно:

1. Із надійністю $\gamma = 0,99$ побудувати довірчі інтервали для $\overline{Y}_{\Gamma}$, σ_{Γ}, r_{xy}.

2. Використовуючи нерівність Чебишова, побудувати довірчий інтервал для $\overline{X}_{\Gamma}$.

Відповідь. $14,87 < \overline{y}_{\Gamma} < 17,13$; $1,742 < \sigma_{\Gamma} < 3,618$; $-0,129 < r_{xy} < 0,655$; $10,36 < \overline{X}_{\Gamma} < 24,04$.

Тема 10. Перевірка статистичних гіпотез

Загальна інформація

Інформація, яку дістають на підставі вибірки, може бути використана для формулювання певних висновків про всю генеральну сукупність. Такі висновки називають **статистичними гіпотезами**.

Статистичні гіпотези про значення параметрів ознаки генеральної сукупності називають **параметричними**. Гіпотези, що висуваються на підставі обробки виібркових даних про закон розподілу ознаки генеральної сукупності, називаються **непараметричними**.

Гіпотезу, що підлягає перевірці, називають **основною**. Її ще називають **нульовою** (позначають H_0), оскільки вона припускає відсутність розбіжності (нульову розбіжність) між невідомим параметром генеральної сукупності й величиною, одержаною внаслідок обробки вибірки.

Кожній нульовій гіпотезі можна протиставити кілька **альтернативних** (конкуруючих) гіпотез, що заперечують твердження нульової. Їх позначають H_a.

Гіпотеза може бути *простою* або *складною*. Проста гіпотеза, як правило, належить до параметра ознак генеральної сукупності і є однозначною. Наприклад,

$$H_0 : \overline{x}_\Gamma = 4.$$

Складна гіпотеза є неоднозначною. Вона може стверджувати, що значення параметра генеральної сукупності належить певній області ймовірних значень, яка може бути дискретною або неперервною. Наприклад,

$$H_0 : \overline{x}_\Gamma \in \{2; 2,1; 2,2\}$$

або

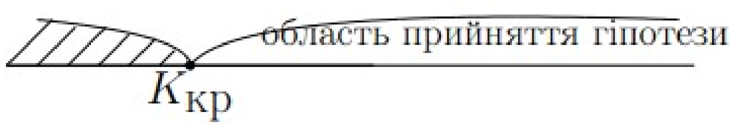
$$H_0 : \overline{x}_\Gamma \in [5,2; 6,5].$$

Для перевірки правильності нульової статистичної гіпотези вибирають так званий **статистичний критерій**, керуючись яким гіпотезу відхиляють або приймають.

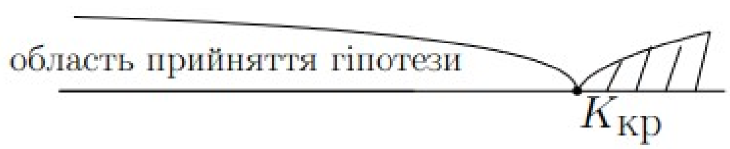
Множину всіх можливих значень статистичного критерію K можна поділити на дві підмножини, що не перетинаються. Сукупність значень K, за яких H_0 не відхиляється, називається **областю прийняття нульової гіпотези**; сукупність значень K, за яких нульова гіпотеза не приймається, називається **критичною областю**. Точка або точки, що розділяють вказані області, називається **критичними** й позначають через $K_{\text{кр}}$.

Існують три види критичних областей:

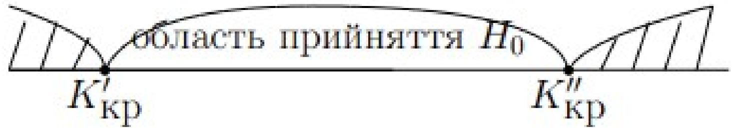
1) якщо при $K < K_{\text{кр}}$ нульову гіпотезу відхиляють, то маємо **лівобічну** критичну область:



2) якщо при $K > K_{\text{кр}}$ нульову гіпотезу відхиляють, то маємо **правобічну** критичну область:



3) якщо нульову гіпотезу відхиляють при $K < K'_{\text{кр.}}$, $K > K''_{\text{кр}}$, то маємо **двобічну** критичну область:



Загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези

Для перевірки правильності H_0 задається так званий *рівень значущості* α.

α – це мала ймовірність, яка наперед задаються. Вона може набувати значення α=0,005; 0,01; 0,001.

В основу перевірки H_0 покладено принцип $P(K \in \overline{A}) = \alpha$, тобто ймовірність того, що статистичний критерій потрапляє в критичну область $\overline{A}$, дорівнює малій імовірності α. Якщо ж виявиться, що $K \in \overline{A}$, а ця подія малоймовірна і все ж відбулася, то немає підстав приймати нульову гіпотезу.

Пропонується такий алгоритм перевірки правильності H_0:

1. Сформулювати H_0 й одночасно альтернативну гіпотезу H_α.

2. Вибрати статистичний критерій, який відповідав би сформульованій нульовій гіпотезі.

3. Залежно від змісту нульової та альтернативної гіпотез будується правобічна, лівобічна або двобічна критична область, а саме:

нехай $H_0 : \overline{x}_\Gamma = a$, тоді:

якщо $H_\alpha : \overline{x}_\Gamma > a$, то вибирається правобічна критична область;

якщо $H_\alpha : \overline{x}_\Gamma < a$, то вибирається лівобічна критична область;

якщо $H_\alpha : \overline{x}_\Gamma \neq a$, то вибирається двобічна критична область.

4. Для побудови критичної області (лівобічної, правобічної чи двобічної) необхідно знайти критичні точки. За вибраним статистичним критерієм та рівнем значущості α знаходяться критичні точки.

5. За результатами вибірки обчислюється спостережуване значення критерію $K^*_{\text{СП}}$.

6. Відхиляють чи приймають нульову гіпотезу на підставі таких міркувань:

у разі, коли $K^* \in \overline{A}$, а це є малоймовірною випадковою подією, $P(K^* \in \overline{A}) = \alpha$ і, незважаючи на це, вона відбулася, то в цьому разі H_0 відхиляється:

для лівобічної критичної області

$$P(K^*_{\text{сп}} < K_{\text{кр}}) = \alpha;$$

для правобічної критичної області

$$P(K^*_{\text{сп}} > K_{\text{кр}}) = \alpha;$$

для двобічної критичної області

$$P(K^*_{\text{сп}} < K^{'}_{\text{кр}}) + P(K^*_{\text{сп}} > K^{''}_{\text{кр}}) = \alpha$$

або

$$P(K^*_{\text{сп}} < K^{'}_{\text{кр}}) = P(K^*_{\text{сп}} > K^{''}_{\text{кр}}) = \frac{\alpha}{2},$$

ураховуючи ту обставину, що критичні точки $K^{'}_{\text{кр}}$ і $K^{''}_{\text{кр}}$ симетрично розташовані відносно нуля.

Помилки першого та другого роду. Потужність критерію

Якою б не була малою величина α, потрапляння спостережуваного значення $K^*_{\text{сп}}$ у критичну область ($K^*_{\text{сп}} \in \overline{A}$) ніколи не буде подією абсолютно неможливою. Тому не виключається той випадок, коли H_0 буде правильною, а ($K^*_{\text{сп}} \in \overline{A}$), а тому нульову гіпотезу буде відхилено.

Отже, при перевірці правильності H_0 можуть бути допущені помилки. Розрізняють при цьому помилки першого і другого роду.

Якщо H_0 є правильною, але її відхиляють на основі її перевірки, то буде допущена помилка першого роду.

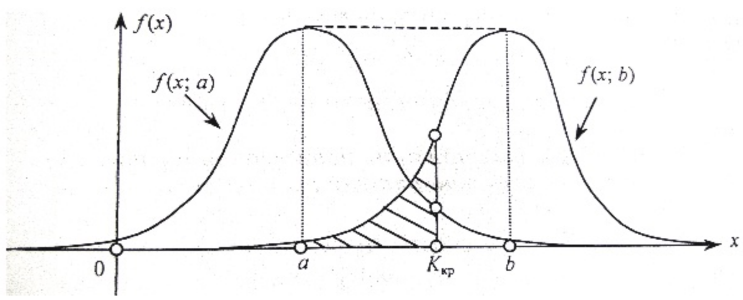
Якщо H_0 є неправильною, але її приймають, то в цьому разі буде допущена помилка другого роду.

Між помилками першого і другого роду існує тісний зв'язок.

Нехай, для прикладу, перевіряється $H_0 : \overline{X}_\text{Г} = a$. При великих обсягах вибірки n $\overline{x}_\text{В}$ – випадкова величина, закон розподілу ймовірностей якої асимптотично наближатиметься до нормального з числовими характеристиками:

$$M(\overline{x}_\text{В}) = a = \overline{X}_\text{Г}, \;\; \sigma(\overline{x}_\text{В}) = \frac{\sigma_\text{Г}}{\sqrt{n}}.$$

Тому, коли гіпотеза H_0 є правдивою, $M(\overline{x}_\text{В}) = a$. Цей розподіл має такий вигляд: (крива $f(x, a)$).



Коли альтернативна гіпотеза заперечує H_0 і стверджує H_α : $\overline{X}_\text{Г} = b > a$, то в цьому разі нормальна крива буде зміщена праворуч (крива $f(x, b)$).

За вибраним рівнем значущості α визначається критична область (заштрихована).

Коли $\overline{x}_\text{В} > K_\text{Кр}$, то H_0 відхиляється з імовірністю помилки першого роду:

$$P(\overline{x}_\text{В} > K_\text{Кр}) = \int\limits_{K_\text{Кр}}^{\infty} f(x; a)dx = \alpha.$$

Коли $\overline{x}_\text{В} < K_\text{Кр}$, то H_0 не відхиляється, хоча може бути правильною альтернативна гіпотеза H_α.

Отже, в цьому разі припускаються помилки другого роду.

Імовірність цієї помилки, яку позначають символом β, може бути визначена на кривій $f(x; b)$, а саме:

$$\beta = \int\limits_{-\infty}^{K_{\text{кр}}} f(x; b) dx.$$

(Ця ймовірність показана штрихуванням площі під кривою $f(x; b)$, що міститься ліворуч $K_{\text{кр}}$).

Якщо з метою зменшення ризику відхилити правильну гіпотезу H_0 зменшуватимемо значення α, то в цьому разі критична точка $K_{\text{кр}}$ зміщуватиметься праворуч, що, у свою чергу, спричинює збільшення ймовірності помилки другого роду, тобто величини β.

Різницю $\pi = 1 - \beta$ називають *імовірністю* обґрунтованого відхилення H_0, або *потужністю* критерію.

Під час розв'язування практичних завдань може виникнути потреба вибору статистичного критерію з їх певної множини. У цьому разі вибирають той критерій, якому притаманна найбільша потужність.

Параметричні статистичні гіпотези

I. Перевірка правильності нульової гіпотези про значення генеральної середньої.

Можливі три типи задач:

1) H_0: $\overline{X}_{\Gamma} = a_1$; H_a: $\overline{X}_{\Gamma} > a_1$ – будується правобічна критична область; a_1 – деяке певне число; критична точка знаходиться з умови $\Phi(Z_{\text{кр}}) = \dfrac{1 - 2\alpha}{2}$ за таблицею значень функції Лапласа; спостережуване значення критерію знаходимо за формулою

$$Z_{\text{сп}} = \frac{\sqrt{n} \cdot (\overline{x}_{B} - a_1)}{\sigma_{\Gamma}}. \tag{10.1}$$

При $Z_{\text{сп}} > Z_{\text{кр}}$ нульову гіпотезу відхиляємо; при $Z_{\text{сп}} < Z_{\text{кр}}$ – приймаємо;

2) H_0: $\overline{X}_{\Gamma} = a_1$; H_a: $\overline{X}_{\Gamma} < a_1$ – будується лівобічна критична область; $\Phi(Z_{\text{кр}})$ і $Z_{\text{сп}}$ знаходиться так, як і в попередньому випадку (тільки у значення $Z_{\text{кр}}$ ставимо знак "мінус").

3) H_0: $\overline{X}_{\Gamma} = a_1$; H_a: $\overline{X}_{\Gamma} \neq a_1$ – будується двобічна критична область; критичну точку знаходимо з умови $\Phi(Z_{\text{кр}}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$ і розташовуємо її симетрично відносно нуля.

Розглянутий метод побудови критичних областей придатний лише за умови, коли відоме значення σ_{Γ}. Якщо ж це значення не відоме, то за статистичний критерій вибирається випадкова величина

$$t = \frac{\sqrt{n} \cdot (\overline{x}_B - a_1)}{S}, \tag{10.2}$$

де

$$S = \sqrt{\frac{\sum\limits_i (x_i - \overline{x}_B)^2 \cdot n_i}{n-1}}. \tag{10.3}$$

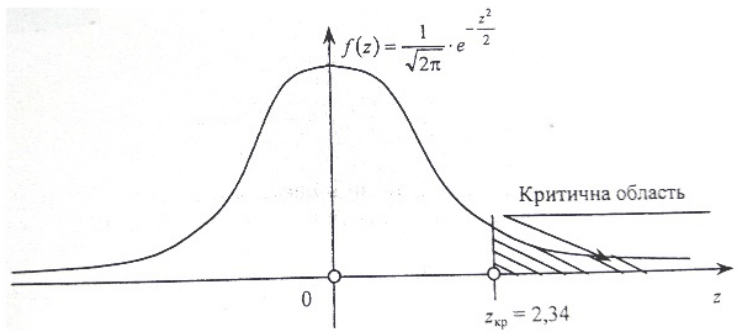
Критичні точки при цьому визначаються за таблицею розподілу Стьюдента при заданому α і числі степенів вільності $k = n-1$. Спостережуване значення критерію обчислюється за формулою (10.2).

Задача 1. Розбіжність вимірів діаметрів кульок $X = x_i$ є випадковою величиною, що має закон розподілу $N(a; 4)$. При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити правильність $H_0 : a = 240$ мм, якщо альтернативна гіпотеза $H_a : a > 240$ мм,
коли відомо, що $\sigma_{\Gamma} = 4$ мм і вибіркове середнє значення виміряних у 100 однотипних кульок $\overline{x}_{\text{В}} = 225$ мм.

Розв'язування. Оскільки $H_a : a > 240$ мм, будується правобічна критична область. Для цього необхідно знайти критичну точку і побудувати правобічну критичну область. Для знаходження критичної точки застосовуємо відомий вираз:

$$\Phi(z_{\text{кр}}) = \frac{1-2a}{2} = \frac{1-2\cdot 0,01}{2} = \frac{1-0,02}{2} = \frac{0,98}{2} = 0,49.$$

За значенням $\Phi(z_{\text{кр}}) = 0,49$ і скориставшись таблицею (Таблиця 2) знаходимо $z_{\text{кр}} \approx 2,34$. Отже, правобічна критична область матиме вигляд:



Обчислимо спостережуване значення критерію за формулою (10.1) $z^* = \frac{\overline{x}_{\text{В}}-a}{\frac{\sigma_{\Gamma}}{\sqrt{n}}}$. Оскільки $\overline{x}_{\text{В}} = 225$ мм, $a = 240$ мм, $\sigma_{\Gamma} = 4$ мм, $n = 100$, маємо

$$z^* = \frac{225-240}{\frac{4}{\sqrt{100}}} = \frac{-15}{\frac{4}{10}} = -\frac{15}{0,4} = -\frac{150}{4} = -37,5.$$

Висновок. Оскільки $z^* \in (-\infty; 2,34)$, то немає підстав для відхилення нульової гіпотези $H_0 : a = 240$ мм. Отже, нульова гіпотеза приймається.

Задача 2. Проведено 10 незалежних дослідів над випадковою величиною X, що має нормальний закон розподілу з невідомими значеннями a, σ. Наслідки дослідів подано у вигляді статистичного ряду:

x_i	2,5	2	-2,3	1,9	-2,1	2,4	2,3	-2,5	1,5	-1,7
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

При рівні значущості $\alpha = 0,001$ перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0 : a = 0,9$, при альтернативній гіпотезі $H_\alpha : a < 0,9$.

Розв'язування. Запишемо статистичний ряд у вигляді статистичного розподілу й обчислимо $\overline{x}_{\text{В}}$, S:

x_i	-2,5	-2,3	-2,1	-1,7	1,5	1,9	2	2,3	2,4	2,5
n_i	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i}{n} =$$
$$= \frac{-2,5-2,3-2,1-1,7+1,5+1,9+2+2,3+2,4+2,5}{10} = 0,4.$$
$$D_{\text{В}} = \frac{\sum x_i^2}{n} - (\overline{x}_{\text{В}})^2 =$$
$$= \frac{6,25+5,29+4,41+2,89+2,25+3,61+4+5,29+5,76+6,25}{10} -$$
$$-(0,4)^2 = 4,6 - 0,16 = 4,44.$$

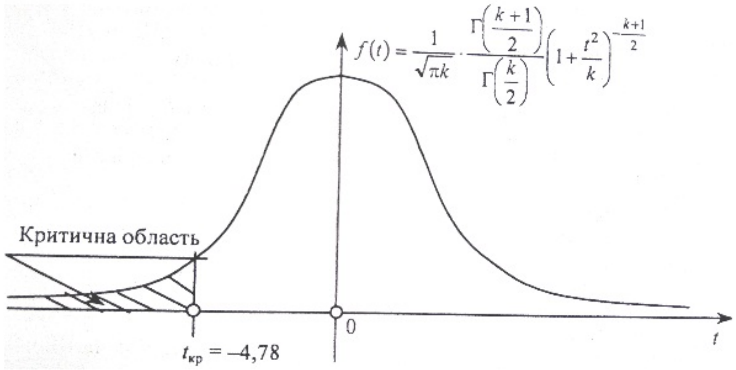
$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{В}} = \frac{10}{9} 4,44 = 4,933.$$
$$S = \sqrt{4,933} \approx 2,22.$$

При альтернативній гіпотезі $H_\alpha : a < 0,9$ будується лівобічна критична область. Для цього необхідно знайти критичну точку, застосовуючи статистичний критерій (10.1). За таблицею (додаток 6) знаходимо значення

$$t_{\text{кр}}(\alpha = 0,001,\ k = n-1 = 10-1 = 9) = t(\alpha = 0,001,\ k = 9) = 4,78.$$

Оскільки щільність ймовірностей для розподілу Стьюдента є парною, то $t_{\text{кр}} = -4,78$.

Критична область:



Обчислимо спостережуване значення критерію:

$$t^* = \frac{\overline{x}_{\text{В}} - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{0,4-0,9}{\frac{2{,}22}{\sqrt{10}}} = \frac{0,4-0,9}{\frac{2{,}22}{3{,}16}} =$$

$$= \frac{0,4-0,9}{0,702} = -\frac{0,5}{0,702} = -0,712.$$

Висновок. Оскільки $t^* \in (-4,78; \infty)$, то немає підстав відхилити $H_0 : a = 0,9$.

II. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність двох генеральних середніх ($M(X) = M(Y)$).

Можливі такі випадки:

1) Значення дисперсій D_x і D_y ознак генеральних сукупностей відомі.

Залежно від альтернативної гіпотези H_a будується відповідно правобічна ($\Phi(Z_{\text{Кр}}) = \dfrac{1-2\alpha}{2}$), лівобічна ($\Phi(Z_{\text{Кр}}) = -\dfrac{1-2\alpha}{2}$) та двобічна ($\Phi(Z_{\text{Кр}}) = \dfrac{1-\alpha}{2}$) критичні області.

Спостережуване значення критерію обчислюється за формулою:

$$Z_{\text{СП}} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{D_X}{n'} + \frac{D_Y}{n''}}}, \tag{10.4}$$

де n', n'' – обсяги вибірок із сукупностей X і Y відповідно.

2) Значення генеральних дисперсій D_X і D_Y – невідомі. В цьому випадку застосовується статистичний критерій

$$Z_{\text{сп}} = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{(n'-1)S_X^2+(n''-1)S_Y^2}{n'+n''-2}}\sqrt{\frac{1}{n'}+\frac{1}{n''}}}. \qquad (10.5)$$

Критичні точки знаходяться так само, як і в попередньому випадку.

Задача № 3. За заданими статистичними розподілами двох вибірок, реалізованих із двох генеральних сукупностей, ознаки яких мають нормальний закон розподілу зі значеннями дисперсій генеральних сукупностей $D_x = 10$; $D_y = 15$.

x_i	12,2	13,2	14,2	15,2	16,2
n'_1	5	15	40	30	10

y_j	8,4	12,4	16,4	20,4	24,2
n^*_j	10	15	35	20	20

При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити правдивість нульової гіпотези

H_0: $M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза H_α: $M(X) > M(Y)$.

Розв'язування. Оскільки $n' = \sum n'_i = 100$; $n'' = \sum n''_j = 100$, обчислимо $\overline{x}_B$, $\overline{y}_B$:

$$\overline{x}_B = \frac{\sum x_i n'_i}{n'} = \frac{12,2\cdot 5 + 13,2\cdot 15 + 14,2\cdot 40 + 15,2\cdot 30 +}{100} =$$

$$+\frac{16,2\cdot 10}{100} = \frac{1446,5}{100} = 14,465,$$

$$\overline{y}_B = \frac{\sum y_i n''_i}{n''} = \frac{8,4\cdot 10 + 12,4\cdot 15 + 16,4\cdot 35 + 20,4\cdot 20 +}{100} =$$

$$+\frac{24,4\cdot 20}{100} = \frac{1740}{100} = 17,4.$$

Для альтернативної гіпотези H_α: $M(X) > M(Y)$ і будується правобічна критична область. Критичну точку $Z_{\text{кр}}$ знаходимо з рівності

$$\Phi(Z_{\text{кр}}) = \frac{1-2\alpha}{2} = \frac{1-2\cdot 0,01}{2} = \frac{0,98}{2} = 0,49 \longrightarrow Z_{\text{кр}} = 2,34.$$

Критична область правобічна.

Обчислимо спостережуване значення критерію

$$Z^* = \frac{\overline{x}_B - \overline{y}_B}{\sqrt{\frac{D_x}{n'} + \frac{D_y}{n''}}} = \frac{14,465 - 17,4}{\sqrt{\frac{10}{100} + \frac{15}{100}}} = -\frac{2,935}{0,5} = -5,87.$$

Висновок: оскільки $Z^* \in (-\infty; 2,34]$, то нульова гіпотеза H_0: $M(X) = M(Y)$ не відхиляється.

III. Перевірка правильності нульової гіпотези про рівність двох дисперсій

За статистичний критерій береться випадкова величина $F = \frac{S_{\text{Б}}^2}{S_{\text{М}}^2}$, яка має розподіл Фішера-Снедекора із $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ ступенями свободи, де $S_{\text{Б}}^2$ – більша з виправлених дисперсій, одержана за результатами обробки вибірок, $S_{\text{М}}^2$ – менша з виправлених дисперсій, n_1 – обсяг вибірки з більшою виправленою дисперсією, n_2 – обсяг вибірки з меншою виправленою дисперсією.

Критичні точки знаходяться відповідно до заданого рівня значущості α і числа ступенів свободи k_1 і k_2 за таблицею критичних точок розподілу Фішера.

Задача № 4. Під час дослідження стабільності температури в термостаті дістали такі результати: 21,2; 21,8; 21,3; 21,0; 21,4; 21,3.

З метою стабілізації температури було використано удосконалений пристрій, після цього заміри температури показали такі результати: 37,7; 37,6; 37,6; 37,4. Чи можна за рівня значущості $\alpha = 0{,}01$ вважати використання удосконаленого пристрою до стабілізатора температури ефективним?

Розв'язування. Очевидно, що ефективність стабілізаторів без удосконаленого пристрою і з ним залежить від дисперсій вимірюваних ними температур. Отже, задача звелась до порівняння двох дисперсій. Обчислимо виправлені вибіркові дисперсії:

$$y_{\text{В}} = \frac{\sum y_i n_i^{'}}{n^{'}} = \frac{21,2 + 21,4 + 21,0 + 21,3 \cdot 2 + 21,8}{6} = 21,333;$$

$$\frac{\sum y_i^2 n_i^{'}}{n^{'}} = \frac{21,2^2 \cdot 1 + 21,4^2 \cdot 1 + 21,0^2 \cdot 1 + 21,3^2 \cdot 2 + 21,8^2 \cdot 1}{6} =$$

$$= \frac{2731,02}{6} = 455,17;$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum y_i^2 n_i^{'}}{n^{'}} - (y_{\text{В}})^2 = 455,17 - (21,333)^2 =$$

$$= 455,17 - 455,097 = 0,073;$$

$$S_y^2 = \frac{n^{'}}{n^{'} - 1} D_{\text{В}} = \frac{6}{6-1} 0,073 = 0,0876;$$

$$\overline{x} = \frac{\sum x_j n_j^{''}}{n^{''}} = \frac{37,7 + 37,6 \cdot 2 + 37,4}{4} =$$

$$= \frac{37,7 + 75,2 + 37,4}{4} = \frac{150,3}{4} = 37,575;$$

$$\frac{\sum x_j^2 n_j^{''}}{n^{''}} = \frac{37,7^2 + 37,6^2 \cdot 2 + 37,4^2}{4} = \frac{5647,57}{4} = 1411,8925;$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum x_j^2 n_j^{''}}{n^{''}} - (\overline{x})^2 = 1411,8925 - (37,575)^2 =$$

$$= 1411,8925 - 1411,880625 = 0,011875;$$

$$S_x^2 = \frac{n^{''}}{n^{''} - 1} D_{\text{В}} = \frac{4}{4-1} 0,011875 = 0,01583.$$

Обчислимо спостережуване значення критерію

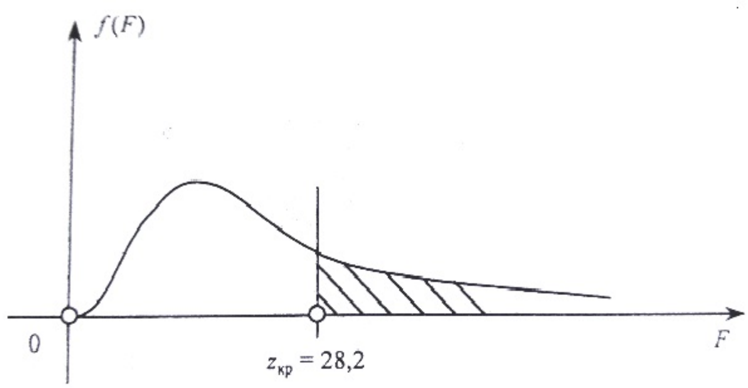
$$F^* = \frac{S_{\text{Б}}^2}{S_M^2} = \frac{0,0876}{0,01583} = 5,534.$$

Число ступенів свободи для більшої виправленої дисперсії $S_{Б}^2 = S_y^2$, $k_1 = n' - 1 = 5$, для меншої $S_M^2 = S_x^2$, $k_2 = n'' - 1 = 3$.

Оскільки удосконалення стабілізатора температур може тільки зменшити дисперсію, то будуємо правобічну критичну область. Отже,

$$H_\alpha : S_y^2 > S_x^2.$$

Критичну точку знаходимо за таблицею (таблиця 6) відповідно до заданого рівня значущості $\alpha = 0{,}01$ і числа ступенів свободи $k_1 = 5$, $k_2 = 3$, $F_{\text{кр}}(\alpha = 0,01; k_1 = 5, k_2 = 3) = 28,2$. Схематично правобічна критична область має вигляд



Висновок. Оскільки $F^* \in (0; 28,5)$, дані спостережень не дають підстав відхилити нульову гіпотезу, тобто вдосконалення термостабілізатора є ефективним.

IV. Перевірка правильності непараметричних статистичних гіпотез

Усі перевірки параметричних статистичних гіпотез грунтувалися на припущенні, що ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу ймовірностей і що за іншого розподілу висновки щодо статистичних гіпотез можуть бути хибними.

Тому використання в наведених методах перевірки гіпотез можливе у разі достатньої упевненості, що спостережувана ознака генеральної сукупності має нормальний закон розподілу або близький до нормального.

Основою для висунення гіпотези про закон розподілу ознаки генеральної сукупності може бути наявність теоретичних передумов про характер зміни ознаки. До них, зокрема, відносять виконання умов, що є підгрунтям теореми Ляпунова. У деяких випадках підставою для висунення гіпотези про закон розподілу ознаки генеральної сукупності можуть бути певні формальні властивості здобутого статистичного розподілу, а саме: рівність нулю A_s і E_s для нормального розподілу, рівність вибіркової середньої і вибіркового середнього квадратичного відхилення для експоненціального розподілу.

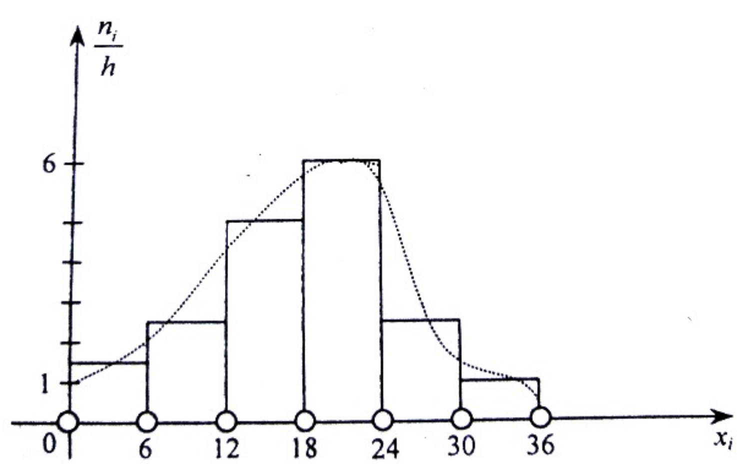
Інколи підгрунтям для висновків про характер гіпотетичного розподілу можуть бути форми полігону, гістограми.

Задача № 5 За заданим статистичним розподілом вибірки ознаки X:

$h = 6$	0–6	6–12	12–18	18–24	24–30	30–36
n_i	8	12	30	36	10	4

гіпотетично визначити закон розподілу ознаки генеральної сукупності X.

Розв'язування. Побудуємо гістограму частот для заданого статистичного розподілу вибірки, яка має такий вигляд:



Якщо з'єднати пунктирною лінією середини всіх сторін кожного прямокутника гістограми, то дістанемо криву лінію, яка певною мірою подібна до графіка щільності для нормального закону з ненульовим математичним сподіванням. Це може бути підставою для висунення гіпотези про нормальний закон розподілу ознаки X генеральної сукупності. Але цю гіпотезу необхідно перевірити на її правильність.

Задача № 6. За заданим статистичним розподілом вибірки ознаки X:

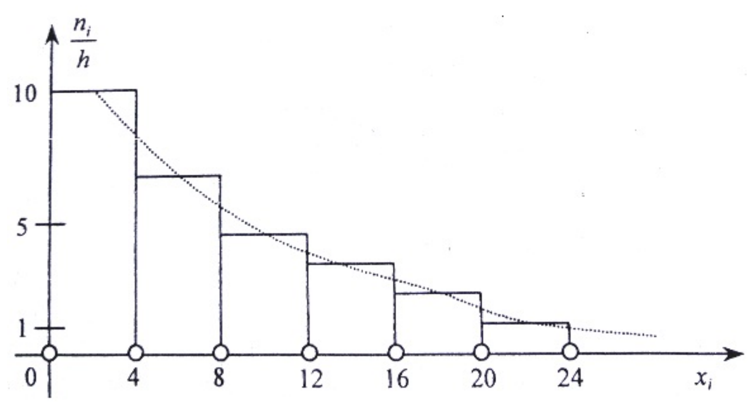
$h = 4$	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24
n_i	40	24	16	12	8	4

гіпотетично визначити закон розподілу ознаки генеральної сукупності.

Розв'язування. Побудуємо гістограму частот, записавши статистичний розподіл у такому вигляді:

$h = 4$	0–4	4–8	8–12	12–16	16–20	20–24
$\frac{n_i}{h}$	10	6	4	3	2	1

Гістограма частот має такий вигляд:



Коли з'єднаємо послідовно середини всіх сторін кожного прямокутника пунктирною лінією, то дістанемо криву, що в деякому наближенні подібна до графіка щільності ймовірностей для експоненціального закону розподілу. Це дає нам підстави для висунення нульової гіпотези про експоненціальний закон розподілу ознаки генеральної сукупності X, яку, звичайно, необхідно перевірити на правильність. А для цього необхідно мати значення емпіричних і теоретичних частот.

Емпіричними називаються частоти, які спостерігаються при реалізації вибірки, а *теоретичними* – які обчислюються за формулами.

Дискретний закон розподілу. Теоретичні частоти для дискретної випадкової величини обчислюємо за формулою

$$n_i^{'} = nP_i, \tag{10.6}$$

де n – обсяг вибірки;

P_i – імовірність спостережуваного значення $X = x_i$, яка обчислюється за умови, що ознака X має взятий за припущенням закон розподілу ймовірностей.

Задача № 7. За результатами вибірки, реалізованої з генеральної сукупності, ознака якої X за припущенням має пуассонівський закон розподілу ймовірностей, дістали такий статистичний розподіл:

x_j	0	2	4	6	8
n_i	45	20	15	12	8

Необхідно знайти теоретичні частоти $n_i^{'}$.

Розв'язування. Для обчислення теоретичних частот застосовуємо формулу Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \longrightarrow P_n(k) = \frac{a^k}{k!}e^{-a}, \tag{10.7}$$

де $\lambda = a$.

Оскільки для математичного сподівання, тобто для параметра $\lambda = a$, точковою незміщеною статистичною оцінкою є вибіркова середня величина $\overline{x}_{\text{В}}$, обчислимо її значення

$$\overline{x}_{\text{в}} = \frac{\sum x_i n_i}{n} = \frac{0 \cdot 45 + 2 \cdot 20 + 4 \cdot 15 + 6 \cdot 12 + 8 \cdot 8}{100} =$$

$$= \frac{40 + 60 + 72 + 64}{100} = \frac{236}{100} = 2,36.$$

Отже, $\lambda = 2,36 = a$.

Обчислимо ймовірності $P_{100}(k)$, де $k = 0, 2, 4, 6, 8$.

$$P_{100}(0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-2,36} = 0,094;$$

$$P_{100}(2) = \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{(2,36)^2}{2} e^{-2,36} = 2,7848 \cdot 0,094 = 0,262;$$

$$P_{100}(4) = \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda} = \frac{(2,36)^4}{24} e^{-2,36} = 1,2925 \cdot 0,094 = 0,121;$$

$$P_{100}(6) = \frac{\lambda^6}{6!} e^{-\lambda} = \frac{(2,36)^6}{720} e^{-2,36} = 0,240 \cdot 0,094 = 0,022;$$

$$P_{100}(8) = \frac{\lambda^8}{8!} e^{-\lambda} = \frac{(2,36)^8}{40320} e^{-2,36} = 0,02386 \cdot 0,094 = 0,0022.$$

Отже, теоретичні частоти будуть такі:

$n_1^{'} = n \cdot P_{100}(0) = 100 \cdot 0,094 = 9;$

$n_2^{'} = n \cdot P_{100}(2) = 100 \cdot 0,262 = 26;$

$n_3^{'} = n \cdot P_{100}(4) = 100 \cdot 0,121 = 12;$

$n_4^{'} = n \cdot P_{100}(6) = 100 \cdot 0,022 = 2;$

$n_5^{'} = n \cdot P_{100}(8) = 100 \cdot 0,0022 = 0,22 \approx 0.$

У підсумку маємо:

Емпіричні частоти n_i	45	20	15	12	8
Теоретичні частоти $n_i^{'} = nP_{100}(k)$	9	26	12	2	0

Як бачимо, велика розбіжність між емпіричними та теоретичними частотами ставить під сумнів припущення про пуассонівський закон розподілу ознаки X генеральної сукупності.

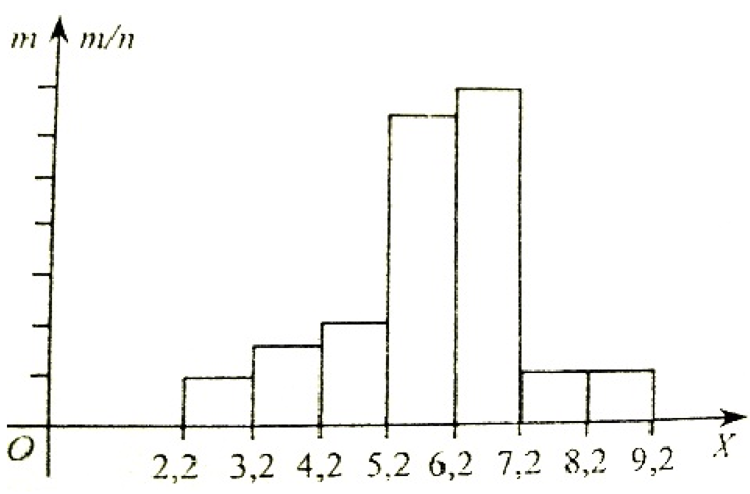
Задача № 8. Із генеральної сукупності зроблено вибірку обсягом $n = 32$. Здобуто такі значення випадкової величини: 2,2; 7,1; 6,3; 3,9; 5,9; 5,6; 5,6; 4,7; 7,9; 3,2; 6,1; 5,5; 6,4; 6,0; 6,9 4,7; 6,4; 6,9; 6,7; 7,9; 4,2; 6,7; 6,0; 9,2; 5,5; 6,5; 3,5; 4,9; 7,2; 4,9; 8,9; 5,7. Скласти інтервальний ряд і побудувати гістограму. Запропонувати гіпотезу про вигляд $F(x)$ у сукупності. За допомогою умовних моментів розподілу знайти $\overline{x}$, s^2, As^*, Ek^*.

Розв'язування. Для побудови інтервального ряду розбиваємо область спостережених значень на 7 інтервалів з однаковими довжинами інтервалів: $\triangle x = \frac{\max\limits_i(x_i) - \min\limits_i(x_i)}{7}$; $\triangle x = \frac{9{,}2-2{,}2}{7} = 1$. Частоти кожного інтервалу знайдемо, визначивши для кожного значення інтервал. Якщо значення x_i потрапляє на межу, то збільшуємо на 1 частоту нижнього інтервалу.

Інтервал	2,2–3,2	3,2–4,2	4,2–5,2	5,2–6,2	6,2–7,2	7,2–8,2	8,2–9,2
Частота	2	3	4	9	10	2	2

Згідно зі знайденим рядом будуємо гістограму.

На підставі побудованої гістограми можна висунути гіпотезу про нормальний закон розподілу генеральної сукупності.



Для обчислення умовних моментів розподілу складемо таблицю, в якій запишемо середини інтервалів $u_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, їхні частоти n_i і нові змінні $\nu_i = \dfrac{u_i - C}{\triangle x}$. Візьмемо C, що дорівнює $u_4 = 5,7$. У наступних стовпцях обчислимо значення $\nu_i n_i$, $\nu_i^2 n_i$, $\nu_i^3 n_i$, $\nu_i^4 n_i$, а в останньому рядку таблиці – їхні суми.

u_i	n_i	ν_i	$\nu_i n_i$	$\nu_i^2 n_i$	$\nu_i^3 n_i$	$\nu_i^4 n_i$
2,7	2	-3	-6	18	-54	162
3,7	3	-2	-6	12	-24	48
4,7	4	-1	-4	4	-4	4
5,7	9	0	0	0	0	0
6,7	10	1	10	10	10	10
7,7	2	2	4	8	16	32
8,7	2	3	6	18	54	162
Сума	32	–	4	70	-2	418

Знайдемо умовні моменти розподілу від першого до четвертого порядків включно:

$$h_1^* = \frac{\sum \nu_i n_i}{n} = \frac{4}{32} = 0,125; \quad h_2^* = \frac{\sum \nu_i^2 n_i}{n} = \frac{70}{32} = 2,1875;$$

$$h_3^* = \frac{\sum \nu_i^3 n_i}{n} = \frac{-2}{32} = -0,0625; \quad h_4^* = \frac{\sum \nu_i^4 n_i}{n} = \frac{418}{32} = 13,0525.$$

Визначимо числові характеристики за допомогою умовних моментів розподілу:

$$\overline{x} = C + h_1^* \triangle x = 5,7 + 0,125 \cdot 1 = 5,825;$$

$$s^2 = (\triangle x)^2 (h_2^* - (h_1^*)^2) = 2,1875 - (0,125)^2 \approx 2,172;$$

$$\mu_3^* = (\triangle x)^3 (h_3^* - 3h_2^* h_1^* + 2(h_1^*)3) = -0,0625 - 2,1875 \cdot 0,125 +$$
$$+2(0,125)^3 \approx -0,332031;$$

$$\mu_4^* = (\triangle x)^4 (h_4^* - 4h_3^* h_1^* + 6h_2^* (h_1^*)^2 - 3(h_1^*)^4) = 13,0625 +$$
$$+4 \cdot 0,0625 \cdot 0,125 + 6 \cdot 2,1875 (0,125)^2 - 3(0,125)^4 \approx 13,29809;$$

$$A_s^* = \frac{\mu_3^*}{s^3} = -\frac{0,332031}{\sqrt{(2,172)^3}} \approx -0,1037;$$

$$E_k^* = \frac{\mu_4^*}{s^4} - 3 = \frac{13,29809}{(2,172)^2} - 3 \approx -0,1812.$$

Отже, асиметрія та ексцес близькі до нуля, чим підтверджується припущення про нормальний закон розподілу в генеральній сукупності.

Критерій узгодженості Пірсона. Критерій узгодженості Пірсона є випадковою величиною, що має розподіл χ^2, який визначається за формулою

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{q} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}, \tag{10.6}$$

і має $k = q - m - 1$ ступенів свободи,
де q – число часткових інтервалів інтервального статистичного розподілу вибірки;
m – число параметрів, якими визначається закон розподілу ймовірностей генеральної сукупності згідно з нульовою гіпотезою. Так, наприклад, для закону Пуассона, який характеризується одним параметром λ, $m = 1$, для нормального закону $m = 2$, оскільки цей закон визначається двома параметрами $a = M(X)$ і σ.

Якщо $n_i = np_i$ (усі емпіричні частоти збігаються з теоретичними), то $\chi^2 = 0$, у противному разі $\chi^2 > 0$. Визначивши при заданому рівні значущості α і числу ступенів свободи критичну точку $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k = q - m - 1)$, за таблицею 7 (додатку) будується правобічна критична область. Якщо виявиться, що спостережуване значення критерію $\chi^2_{\text{сп}} > \chi^2_{\text{кр}}$, то H_0 про закон розподілу ознаки генеральної сукупності відхиляється. У противному разі $(\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}})$ H_0 приймається.

Задача № 9. За заданим інтервальним статистичним розподілом випадкової величини X – маса новонароджених дітей–

$h = 0,5$	1–1,5	1,5–2	2–2,5	2,5–3	3–3,5	3,5–4	4–4,5
n_i	10	20	50	35	28	15	12

при рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити правильність H_0 про нормальний закон розподілу ознаки X – маси новонароджених дітей.

Розв'язування. Для визначення теоретичних частот $n_i' = np_i$ необхідно обчислити $\overline{x}_{\text{В}}$, $\sigma_{\text{В}}$.

Дискретний статистичний розподіл буде таким:

x_i	1,25	1,75	2,25	2,75	3,25	3,75	4,25
n_i	10	20	50	35	28	15	12

$n = \sum n_i = 170.$

$$\overline{x}_{\text{В}} = \frac{\sum x_i n_i}{n} =$$

$$= \frac{1,25 \cdot 10 + 1,75 \cdot 20 + 2,25 \cdot 50 + 2,75 \cdot 35 + 3,25 \cdot 28 +}{170}$$

$$+ \frac{3,75 \cdot 15 + 4,25 \cdot 12}{170} = \frac{12,5 + 35 + 112,5 + 96,25 + 91 +}{170}$$

$$+ \frac{56,25 + 51}{170} = \frac{454,5}{170} = 2,67;$$

$$\frac{\sum x_i^2 n_i}{n} = \frac{1,25^2 \cdot 10 + 1,75^2 \cdot 20 + 2,25^2 \cdot 50 + 2,75^2 \cdot 35 +}{170}$$

$$+ \frac{3,25^2 \cdot 28 + 3,75^2 \cdot 15 + 4,25^2 \cdot 12}{170} =$$

$$= \frac{15,625 + 61,25 + 253,125 + 264,6875 + 295,75 + 210,9375 +}{170}$$

$$+ \frac{216,75}{170} = \frac{1318,125}{170} = 7,75;$$

$$D_{\text{В}} = \frac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\overline{x}_{\text{В}})^2 = 7,75 - (2,67)^2 = 7,75 - 7,1289 = 0,6211;$$

$$\sigma_{\text{В}} = \sqrt{D_{\text{В}}} = \sqrt{0,6211} \approx 0,79.$$

Обчислення теоретичних частот подано в таблиці:

x_i	x_{i+1}	n_i	$z_i = \frac{x_i - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x}_{\text{В}}}{\sigma_{\text{В}}}$	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$n_i' = n(\Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i))$
1	1,5	10	-2,11	-1,48	-0,4821	-0,4306	9
1,5	2	20	-1,48	-0,85	-0,4306	-0,3023	22
2	2,5	50	-0,85	-0,22	-0,3023	-0,0871	37
2,5	3	35	-0,22	-0,42	-0,0871	-0,1628	43
3	3,5	28	-0,42	1,05	0,1628	0,3531	32
3,5	4	15	1,05	1,68	0,3531	0,4535	17
4	4,5	12	1,68	2,32	0,4535	0,4898	6

Обчислення спостережуваного значення статистичного критерію $\chi^2_{\text{сп}}$ дається нижче в таблиці:

n_i	np_i	$n_i - np_i$	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
10	9	-1	1	0,11
20	22	-2	4	0,18
50	37	13	169	4,57
35	43	-12	144	3,35
28	32	-4	16	0,5
15	17	-2	4	0,24
12	6	6	36	6

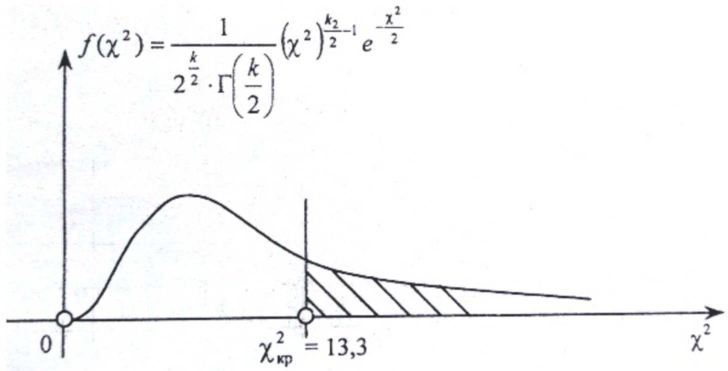
Отже, маємо

$$\chi^2_{\text{сп}} = \sum \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = 14,95.$$

За таблицею 7 (додаток) знаходимо значення

$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha = 0,01;\ k = 7 - 2 - 1 = 4) = \chi^2_{\text{кр}}(0,01; 4) = 13,3.$$

Правобічна критична область має вигляд:



Висновок. Оскільки $\chi^2_{\text{СП}} \overline{\in} (0; 13,3)$, то не маємо підстав для прийняття H_0 про нормальний закон розподілу ознаки генеральної сукупності X.

Задачі для самостійного розв'язування

∘ **1.** За заданим статистичним розподілом вибірки, реалізованим із генеральної сукупності, ознака X якої має нормальний закон розподілу

x_i	4,2	6,2	8,2	10,2	12,2
n_i	6	8	12	8	2

при рівні значущості α=0,01 перевірити правильність нульової гіпотези
$H_0 : M(X) = 10$, якщо альтернативна гіпотеза
$H_\alpha : M(X) > 10$, якщо $\sigma_r = 4$.

Відповідь. $\overline{x}_\text{В} = 7,78$; $z^* = \dfrac{\overline{x}_\text{В} - a}{\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}} = \dfrac{7,78 - 10}{\frac{4}{\sqrt{36}}} = -3,33$; $z_\text{КР} = 2,32$. $z^* \in (-\infty; 2,32]$; $H_0 : M(X) = 10$ приймається.

2 (д/з). Проведено 25 незалежних вимірювань випадкової величини X, що має нормальний закон розподілу зі значенням $\sigma_\Gamma = 2$:

x_i	2,4	5,4	8,4	11,4	14,4	17,4
n_i	2	3	10	6	3	1

При рівні значущості α=0,001 перевірити правильність нульової гіпотези
$H_0 : M(X) = 10,5$, якщо альтернативна гіпотеза
$H_\alpha : M(X) < 10,5$.

Відповідь. $z^* = \dfrac{\overline{x}_{\text{В}} - a}{\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}} = \dfrac{8,92 - 10,5}{\frac{2}{5}} = -3,95$; $z_{\text{КР}} = -3$. $z^* \in (-\infty; -3]$, $H_0 : M(X) = 10,5$ приймається.

3 (с/р). Маємо дані про розподіл підприємств певної області за зростанням виробітку на одного працівника у відсотках до наступного року:

x_i, %	75	85	95	105	115	125
N_i	5	8	10	5	2	1

Ураховуючи, що ознака має нормальний закон розподілу зі значенням $\sigma_\Gamma = 6$, перевірити правильність нульової гіпотези при α=0,01.

$H_0 : M(X) = 90$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : M(X) \neq 90$.

Відповідь. $z^* = \dfrac{\overline{x}_{\text{В}} - a}{\frac{\sigma_r}{\sqrt{n}}} = \dfrac{96 - 90}{\frac{6}{\sqrt{30}}} = \dfrac{6}{1,095} = 5,48$; $z'_{\text{КР}} = -2,32$; $z''_{\text{КР}} = 2,32$; $z^* \in [-2,32; 2,32]$, гіпотеза $H_0 : M(X) = 90$ приймається.

4 (с/р). У результаті двадцяти незалежних вимірювань певної величини X дістали статистичний розподіл:

x_i	3,4	6,4	9,4	12,4	15,4	18,4
n_i	2	4	8	3	2	1

Припускаючи, що випадкова величина X має нормальний закон розподілу, при рівні значущості α=0,01 перевірити правильність

$H_0 : M(X) = 10$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : M(X) > 10$.

Відповідь. $t^* = \dfrac{\overline{x}_В - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{9,7-10}{\frac{3,88}{\sqrt{20}}} = -\dfrac{0,3}{0,868} = 0,346$; $t_{кр} = 2,09$. $t^* \in (-\infty; 2,09]$, $H_0 : M(X) = 10$ приймається.

5. Результати вимірювання зросту дівчат віком 16 років дали такі показники:

$h = 4$ см	160–164	164–168	168–172	172–176	176–180
n_i	4	6	20	4	2

Вважаючи, що випадкова величина X – зріст дівчат – має нормальний закон розподілу, при рівні значущості α=0,001 перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0 : M(X) = 180$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : M(X) \neq 180$.

Відповідь. $t^* = \dfrac{\overline{x}_В - a}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{169,3-180}{\frac{5,17}{6}} = \dfrac{10,7}{0,86} = -12,42$; $t'_{кр} = -3,65$; $t''_{кр} = 3,65$; $t^* \overline{\in} [-3,65; 3,65]$; $H_0 : M(X) = 180$ відхиляється.

6. У двох партіях містяться однотипні шарикопідшипники, виготовлені двома заводами. Вимірювання їх діаметрів дали результати, які наведено у вигляді двох статистичних розподілів:

y_i, мм	6,64	6,7	6,74	6,78	6,82
n'_i	2	4	8	6	4

x_j, мм	6,58	6,6	6,8	7	7,2
n''_j	6	8	10	4	2

При рівні значущості $\alpha = 0,01$ перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : M(X) \neq M(Y)$, коли відомі значення $D_x = 50$; $D_y = 60$.

Відповідь. $z^* = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{D_x}{n''} + \frac{D_y}{n'}}} = -0,05$; $z'_{кр} = -2,58$; $z''_{кр} = 2,58$; $z^* \in [-2,58; 2,58]$; $H_0 : M(X) = M(Y)$ приймається.

∘ **7.** З двох партій монет вартістю 5 коп. було вибрано 50 і 60 штук, які зважували на терезах. Результати цих зважувань подано у вигляді двох статистичних розподілів:

y_i, мг	9,4	9,6	9,8	10	10,2
$n_i^{'}$	5	15	20	8	2

x_j, мг	9,33	9,63	9,63	10,23	10,53
$n_j^{''}$	8	12	26	10	4

Припускаючи, що X і Y мають нормальний закон розподілу і незалежні між собою, при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити

$H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : M(X) < M(Y)$, коли відомі значення $D_x = 10$; $D_y = 14$.

Відповідь. $z^* = \dfrac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{D_x}{n''} + \frac{D_y}{n'}}} = \dfrac{9,88 - 9,748}{\sqrt{\frac{10}{50} + \frac{14}{60}}} = 0,2$; $z_{\text{кр}} = -3,2$; $z^* \in [-3,2; \infty)$; $H_0 : M(X) = M(Y)$ не відхиляється.

8 (с/р). Вимірювання зросту дітей віком шість років, випадково вибраних із двох дитячих садків, дало такі результати:

y_i, м	0,52	0,58	0,64	0,72	0,8
$n_i^{'}$	2	5	10	3	1

x_j, м	0,48	0,56	0,64	0,72	0,8
$n_j^{''}$	1	4	12	6	2

Беручи до уваги, що випадкові величини X і Y є незалежними і мають нормальний закон розподілу, при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0 : M(X) = M(Y)$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : M(X) > M(Y)$.

Відповідь.

$$t^* = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{(n'-1)S_x^2 + (n''-1)S_y^2}{n'+n''-2}}} = \frac{0,6528 - 0,633}{\sqrt{\frac{21\cdot 0,0057 + 24\cdot 0,00494}{44}}} = \frac{0,0198}{0,074} = 0,269.$$

$t_{\text{кр}} = 2,7$; $t^* \in (-\infty; 2,7]$; $H_0 : M(X) = M(Y)$ не відхиляється.

∘ **9.** Вимірювання значень наробки на мотор автомобіля, що здійснювався у двох автопарках міста, наведено у вигляді статистичних розподілів:

y_i, тис. км	1,9	2,15	2,4	2,65	2,9	3,15
$n_i^{'}$	2	4	6	10	5	1

x_j, тис. км	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
n''_j	4	6	12	16	8	2	1

Ознаки X і Y (наробки в тис. км) є випадковими величинами, що мають нормальний закон розподілу. При рівні значущості $\alpha = 0{,}001$ перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0 : D_x = D_y$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : D_x < D_y$.

Відповідь. $F^* = \frac{S^2_{\text{Б}}}{S^2_M} = 4,475$; $F_{\text{Кр}}(\alpha = 0,001;\ k_1 = 28;\ k_2 = 48) = 2,2$; $F^* \overline{\in} [0; 2,2]$; $H_0 : D_x = D_y$ не приймається.

∘ **10.** Заміри довжини волокон вовни, одержаної від овець, що утримувалися на двох фермах, подано двома статистичними розподілами:

y_i, мм	64	66	68	70	72	74
n'_i	2	4	6	8	4	2

x_j, мм	66	68	72	76	80	84
n''_j	4	6	10	12	4	2

Ознаки X і Y (довжини волокон) є незалежними випадковими величинами, що мають нормальний закон розподілу. При рівні значущості $\alpha = 0{,}001$ перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0 : D_x = D_y$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : D_x < D_y$.

Відповідь. $F^* = \frac{S^2_{\text{Б}}}{S^2_M} = 5,727$; $F_{\text{Кр}}(\alpha = 0,001;\ k_1 = 37;\ k_2 = 27) = 2,7$; $F^* \overline{\in} [0; 2,7]$; $H_0 : D_x = D_y$ відхиляється.

∘ **11.** У двох автопарках виміряли витрати палива за годину автомобілем. Результати вимірювання подано двома статистичними розподілами:

y_i, км/год	35	35,2	35,4	35,6	35,8	36
n'_i	2	8	10	6	4	3

x_j, км/год	35,4	35,8	36,2	36,6	37
n''_j	4	5	6	15	6

Ознаки X і Y (витрати палива за год) є незалежними випадковими величинами, які мають нормальний закон розподілу ймовірностей. При рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ перевірити правильність нульової гіпотези

$H_0 : D_x = D_y$, якщо альтернативна гіпотеза

$H_\alpha : D_x > D_y$.

Відповідь. $F^* = \dfrac{S^2_{\text{Б}}}{S^2_M} = 56,3$; $F_{\text{кр}}(\alpha = 0,01;\ k_1 = 35;\ k_2 = 32) = 2$; $F^* \overline{\in} [0; 2]$; $H_0 : D_x = D_y$ відхиляється.

Варіанти завдань для модульної контрольної роботи з математичної статистики

Варіант 1.

Задача № 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно: 1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; 2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	2	5	6	7	9
n_i	3	6	10	4	2

Задача № 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому стовпці вказані часткові інтервали, в другому – відповідні їм частоти).

(2;6)	10
(6;10)	16
(10;14)	32
(14;18)	24
(18;22)	12
(22;26)	6

Задача № 3. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{B}}$, вибіркову дисперсію D_{B}, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ і виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

x_i	2	3	4	6	7
n_i	1	2	5	8	4

Задача № 4. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{B}}$, вибіркову дисперсію D_{B}, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ за даним розподілом вибірки.

x_i	12,5	14,5	16,5	18,5	20,5	22,5	24,5
n_i	5	10	30	25	15	10	5

Задача № 5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$\sigma = 3, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 10,2 \quad n = 36, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 6. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює ε, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ ознаки x.

$$\sigma = 2, \quad \varepsilon = 0,4, \quad \gamma = 0,975.$$

Задача № 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$n = 9, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 35,3 \quad S = 4,5, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 8. За даними вибірки об'єму n із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки x знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ.

$$n = 20, \quad S = 0,05, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значимості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності з заданим розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому - відповідні їм частоти).

$$\alpha = 0,05$$

(2;12)	7
(12;22)	8
(22;32)	15
(32;42)	36
(42;52)	15
(52;62)	11
(62;72)	8

Варіант 2.

Задача № 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно: 1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; 2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	1	3	5	6	8
n_i	2	4	10	3	1

Задача № 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому – відповідні їм частоти).

(1;4)	6
(4;7)	15
(7;10)	27
(10;13)	33
(13;16)	12
(16;19)	7

Задача № 3. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ і виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

x_i	1	3	4	5	7
n_i	3	4	9	3	1

Задача № 4. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ за даним розподілом вибірки.

x_i	8	14	18	23	28	33	38
n_i	4	6	15	35	22	10	8

Задача № 5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$\sigma = 4, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 11,4 \quad n = 64, \quad \gamma = 0,99.$$

Задача № 6. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює ε, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ ознаки x.

$$\sigma = 2,5, \quad \varepsilon = 0,5, \quad \gamma = 0,925.$$

Задача № 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$n = 16, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 98,7 \quad S = 4, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 8. За даними вибірки об'єму n із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки x знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ.

$$n = 10, \quad S = 1,5, \quad \gamma = 0,99.$$

Задача № 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значимості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності з заданим розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому - відповідні їм частоти).

$$\alpha = 0,05$$

(1,5;3,5)	4
(3,5;5,5)	18
(5,5;7,5)	12
(7,5;9,5)	35
(9,5;11,5)	15
(11,5;13,5)	10
(13,5;15,5)	6

Варіант 3.

Задача № 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно: 1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; 2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	3	4	5	7	9
n_i	1	3	15	4	2

Задача № 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому – відповідні їм частоти).

(4;6)	8
(6;8)	25
(8;10)	30
(10;12)	20
(12;14)	10
(14;16)	7

Задача № 3. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_В$, вибіркову дисперсію $D_В$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ і виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

x_i	3	4	6	7	8
n_i	2	3	7	2	1

Задача № 4. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_В$, вибіркову дисперсію $D_В$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ за даним розподілом вибірки.

x_i	5,4	5,8	6,2	6,6	7,0	7,4	7,8
n_i	5	15	45	12	10	8	5

Задача № 5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_В$ і об'єм вибірки n.

$$\sigma = 4, \quad \overline{x}_В = 15,6 \quad n = 100, \quad \gamma = 0,99.$$

Задача № 6. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює ε, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ ознаки x.

$$\sigma = 1,5, \quad \varepsilon = 0,3, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$n = 12, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 98,7 \quad S = 5, \quad \gamma = 0,99.$$

Задача № 8. За даними вибірки об'єму n із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки x знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ.

$$n = 6, \quad S = 4,5, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значимості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності з заданим розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому - відповідні їм частоти).

$$\alpha = 0,05$$

(1;6)	6
(6;11)	12
(11;16)	16
(16;21)	40
(21;26)	13
(26;31)	8
(31;36)	5

Варіант 4.

Задача № 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно: 1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; 2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	1	2	5	8	10
n_i	2	6	8	3	1

Задача № 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому – відповідні їм частоти).

(3;7)	9
(7;11)	13
(11;15)	25
(15;19)	32
(19;23)	13
(23;27)	8

Задача № 3. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ і виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

x_i	2,2	3	3,5	4,5	5
n_i	2	4	9	3	2

Задача № 4. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ за даним розподілом вибірки.

x_i	124	134	144	154	164	174	184
n_i	4	6	10	40	17	15	8

Задача № 5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$\sigma = 5, \quad \overline{x}_s = 13,2 \quad n = 64, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 6. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює ε, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ ознаки x.

$$\sigma = 2,5, \quad \varepsilon = 0,4, \quad \gamma = 0,975.$$

Задача № 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$n = 25, \quad \overline{x}_s = 57,3 \quad S = 5, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 8. За даними вибірки об'єму n із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки x знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ.

$$n = 30, \quad S = 0,8, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значимості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності з заданим розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому - відповідні їм частоти).

$$\alpha = 0,01$$

(3,0;3,6)	6
(3,6;4,2)	8
(4,2;4,8)	31
(4,8;5,4)	43
(5,4;6,0)	22
(6,0;6,6)	15
(6,6;7,2)	5

Варіант 5.

Задача № 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно: 1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; 2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	2	3	4	5	8
n_i	3	4	10	6	2

Задача № 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому – відповідні їм частоти).

(1;3)	7
(3;5)	14
(5;7)	28
(7;9)	34
(9;11)	12
(11;13)	5

Задача № 3. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ і виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

x_i	3	4	5	6	7
n_i	1	3	10	4	2

Задача № 4. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ за даним розподілом вибірки.

x_i	20	25	30	35	40	45	50
n_i	5	10	20	40	13	8	4

Задача № 5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$\sigma = 5, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 11,0 \quad n = 144, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 6. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює ε, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ ознаки x.

$$\sigma = 1,3, \quad \varepsilon = 0,3, \quad \gamma = 0,99.$$

Задача № 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$n = 18, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 132,2 \quad S = 8, \quad \gamma = 0,99.$$

Задача № 8. За даними вибірки об'єму n із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки x знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ.

$$n = 9, \quad S = 2,4, \quad \gamma = 0,99.$$

Задача № 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значимості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності з заданим розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому - відповідні їм частоти).

$$\alpha = 0,025$$

(0;2,2)	14
(2,2;4,4)	18
(4,4;6,6)	32
(6,6;8,8)	70
(8,8;11,0)	20
(11,0;13,2)	36
(13,2;15,4)	10

Варіант 6.

Задача № 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно: 1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; 2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	5	6	7	9	10
n_i	1	5	12	4	3

Задача № 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому – відповідні їм частоти).

(5;10)	5
(10;15)	12
(15;20)	25
(20;25)	30
(25;30)	18
(30;35)	10

Задача № 3. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ і виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

x_i	1,5	2	4	5	6
n_i	2	6	7	3	2

Задача № 4. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ за даним розподілом вибірки.

x_i	70	80	90	100	110	120	130
n_i	4	6	15	35	18	14	8

Задача № 5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$\sigma = 2, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 18,2 \quad n = 36, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 6. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює ε, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ ознаки x.

$$\sigma = 2,2, \quad \varepsilon = 0,3, \quad \gamma = 0,925.$$

Задача № 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$n = 16, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 84,8 \quad S = 6,4, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 8. За даними вибірки об'єму n із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки x знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ.

$$n = 12, \quad S = 2,3, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значимості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності з заданим розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому - відповідні їм частоти).

$$\alpha = 0,01$$

(-4;0)	8
(0;4)	16
(4;8)	40
(8;12)	72
(12;16)	36
(16;20)	18
(20;24)	10

Варіант 7.

Задача № 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно: 1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; 2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	0,8	1	2	3,5	4
n_i	4	6	7	5	3

Задача № 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому – відповідні їм частоти).

(2;7)	9
(7;12)	24
(12;17)	30
(17;22)	19
(22;27)	10
(27;32)	8

Задача № 3. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_\text{В}$, вибіркову дисперсію $D_\text{В}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ і виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

x_i	2	2,5	4	5,5	6
n_i	2	3	7	2	1

Задача № 4. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_\text{В}$, вибіркову дисперсію $D_\text{В}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ за даним розподілом вибірки.

x_i	12,5	13,0	13,5	14,0	14,5	15,0	15,5
n_i	4	16	30	35	6	6	3

Задача № 5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_\text{В}$ і об'єм вибірки n.

$$\sigma = 3,5, \quad \overline{x}_\text{В} = 12,4 \quad n = 64, \quad \gamma = 0,99.$$

Задача № 6. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює ε, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ ознаки x.

$$\sigma = 1,8, \quad \varepsilon = 0,4, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$n = 30, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 117,5 \quad S = 5,5, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 8. За даними вибірки об'єму n із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки x знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ.

$$n = 25, \quad S = 0,7, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значимості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності з заданим розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому - відповідні їм частоти).

$$\alpha = 0,05$$

(2;7)	10
(7;12)	26
(12;17)	25
(17;22)	30
(22;27)	26
(27;32)	21
(32;37)	12

Варіант 8.

Задача № 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно: 1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; 2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	3	5	6	8	10
n_i	2	4	6	5	3

Задача № 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому – відповідні їм частоти).

(3;5)	15
(5;7)	32
(7;9)	25
(9;11)	12
(11;13)	10
(13;15)	6

Задача № 3. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ і виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

x_i	1	3	4	5	8
n_i	2	6	8	3	1

Задача № 4. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ за даним розподілом вибірки.

x_i	20	27	34	41	48	55	62
n_i	7	11	11	60	6	3	2

Задача № 5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$\sigma = 3, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 11,6 \quad n = 81, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 6. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює ε, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ ознаки x.

$$\sigma = 1,7, \quad \varepsilon = 0,2, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$n = 16, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 89,1 \quad S = 6, \quad \gamma = 0,99.$$

Задача № 8. За даними вибірки об'єму n із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки x знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ.

$$n = 18, \quad S = 0,6, \quad \gamma = 0,99.$$

Задача № 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значимості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності з заданим розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому - відповідні їм частоти).

$$\alpha = 0,05$$

(-10;-5)	7
(-5;0)	8
(0;5)	15
(5;10)	36
(10;15)	15
(15;20)	11
(20;25)	8

Варіант 9.

Задача № 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно: 1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; 2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	1	1,5	3	4	5
n_i	1	4	11	6	3

Задача № 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому – відповідні їм частоти).

(1;5)	8
(5;9)	10
(9;13)	14
(13;17)	8
(17;21)	6
(21;25)	4

Задача № 3. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ і виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

x_i	2	3	5	6	7
n_i	1	3	9	5	2

Задача № 4. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{B}}$, вибіркову дисперсію D_{B}, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ за даним розподілом вибірки.

x_i	11,4	21,4	31,4	41,4	51,4	61,4	71,4
n_i	3	17	20	45	7	5	3

Задача № 5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{B}}$ і об'єм вибірки n.

$$\sigma = 4,5, \quad \overline{x}_{\text{B}} = 19,4 \quad n = 100, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 6. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює ε, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ ознаки x.

$$\sigma = 1,5, \quad \varepsilon = 0,3, \quad \gamma = 0,989.$$

Задача № 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{B}}$ і об'єм вибірки n.

$$n = 10, \quad \overline{x}_{\text{B}} = 49,9 \quad S = 3, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 8. За даними вибірки об'єму n із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки x знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ.

$$n = 15, \quad S = 1,3, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівній значимості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності з заданим розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому - відповідні їм частоти).

$$\alpha = 0,025$$

(4;6)	12
(6;8)	15
(8;10)	40
(10;12)	16
(12;14)	10
(14;16)	7

Варіант 10.

Задача № 1. Дано статистичний розподіл вибірки. Потрібно: 1) знайти емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік; 2) побудувати полігони частот і відносних частот.

x_i	2	4	5	6,5	7,5
n_i	1	3	10	4	2

Задача № 2. Побудувати гістограми частот і відносних частот за даним розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому – відповідні їм частоти).

(6;9)	6
(9;12)	12
(12;15)	21
(15;18)	10
(18;21)	7
(21;24)	4

Задача № 3. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ і виправлену вибіркову дисперсію S^2 за даним розподілом вибірки.

x_i	4	6	8	9	10
n_i	2	3	7	5	3

Задача № 4. Знайти вибіркову середню $\overline{x}_{\text{В}}$, вибіркову дисперсію $D_{\text{В}}$, вибіркове середнє квадратичне відхилення σ за даним розподілом вибірки.

x_i	30	34	38	42	46	50	54
n_i	5	15	20	40	10	7	3

Задача № 5. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі генеральне середнє квадратичне відхилення σ, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$\sigma = 6, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 18,6 \quad n = 81, \quad \gamma = 0,95.$$

Задача № 6. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю γ точність оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює ε, якщо відомо середнє квадратичне відхилення σ ознаки x.

$$\sigma = 1,1, \quad \varepsilon = 0,25, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 7. Знайти довірчий інтервал для оцінки з надійністю γ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки x генеральної сукупності, якщо відомі виправлене середнє квадратичне відхилення S, вибіркова середня $\overline{x}_{\text{В}}$ і об'єм вибірки n.

$$n = 18, \quad \overline{x}_{\text{В}} = 67,5 \quad S = 4, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 8. За даними вибірки об'єму n із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки x знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення S. Знайти довірчий інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення σ з надійністю γ.

$$n = 35, \quad S = 0,9, \quad \gamma = 0,999.$$

Задача № 9. Використовуючи критерій Пірсона, при рівні значимості α перевірити, чи узгоджується гіпотеза про нормальний розподіл ознаки X генеральної сукупності з заданим розподілом вибірки (в першому стовбці вказані часткові інтервали, в другому - відповідні їм частоти).

$$\alpha = 0,05$$

(0;10)	10
(10;20)	27
(20;30)	60
(30;40)	70
(40;50)	20
(50;60)	13

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ З МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Елементи математичної статистики. Статистичний розподіл вибірки. Полігон частот і відносних частот

1. Дати визначення генеральної сукупності.
А) Це сукупність об'єктів, з якої зроблено вибірку;
Б) Сукупність випадково взятих об'єктів;
В) Множина однорідних об'єктів;
Г) Інша відповідь.

2. Дати визначення вибіркової сукупності (вибірки).
А) Це сукупність об'єктів, з якої зроблено вибірку;
Б) Сукупність випадково взятих об'єктів;
В) Множина однорідних об'єктів;
Г) Інша відповідь.

3. Що називається обсягом (об'ємом) сукупності?
А) Це кількість об'єктів цієї сукупності;
Б) Це зростаючий числовий ряд варіант;
В) Множина однорідних об'єктів;
Г) Інша відповідь.

4. Що називається варіантою?
А) Це кількість об'єктів цієї сукупності;
Б) Це кількісна ознака, наприклад X, яка набуває конкретних числових значень $X = x_i$;
В) Множина однорідних об'єктів;
Г) Інша відповідь.

5. Що називається варіаційним рядом?
А) Це спадний числовий ряд варіант;
Б) Це довільний числовий ряд варіант;

В) Це зростаючий числовий ряд варіант;
Г) Це будь-який ряд, що набуває кількісна ознака.

6. Що таке частота варіант?
А) Це відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n;
Б) Це кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, ..., n_m$;
В) Це кількість членів, які приймають рівні значення ознаки або знаходяться у середині певного інтервалу;
Г) Правильної відповіді серед перерахованих немає.

7. Що називається рядом частот?
А) Це відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n;
Б) Це кількість членів, які приймають рівні значення ознаки або знаходяться у середині певного інтервалу;
В) Це кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, ..., n_m$;
Г) Правильної відповіді серед перерахованих немає.

8. Що таке відносна частота варіант?
А) Це кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, ..., n_m$;
Б) Це кількість членів, які приймають рівні значення ознаки або знаходяться у середині певного інтервалу;
В) Це відношення частоти n_i варіанти x_i до обсягу вибірки n;
Г) Правильної відповіді серед перерахованих немає.

9. Дати визначення дискретного статистичного розподілу вибірки.
А) Це кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, ..., n_m$;
Б) Це довільний числовий ряд варіант;
В) Це перелік варіант та відповідних їм частот;
Г) Правильної відповіді серед перерахованих немає.

10. Що називається емпіричною функцією (комулятою)?
А) Це кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, ..., n_m$;
Б) Функція аргументу x, що визначає відносну частоту події $X <$

x, тобто $F^*(x) = \omega(X < x) = \dfrac{n_x}{n}$;
В) Це перелік варіант та відповідних їм частот;
Г) Функція аргументу x, що визначає відносну частоту події при $X \geq x$.

11. Властивості емпіричної функції $F^*(x)$:
А) $0 \leq F^*(x) \leq 1$ і $F^*(x)$ є неспадною функцією;
Б) $F^*(x_{\min}) = 0$, де $x_{\min}$ є найменшою варіантою варіаційного ряду;
В) $F^*(x)\Big|_{x > x_{\max}} = 1$, де $x_{\max}$ є найбільшою варіантою варіаційного ряду;
Г) Всі перераховані.

12. Що таке полігон частот і відносних частот?
А) Функція $F^*(x)$, яка є неспадною функцією;
Б) Це є кількість спостережуваних варіант $n_1, n_2, ..., n_m$;
В) Це є довільна площина, на якій точками зображені кількісні ознаки об'єкта, і які нагадують мішень після стрільби;
Г) Це є дискретний статистичний розподіл вибірки, який можна зобразити графічно у вигляді ламаної лінії, відрізки якої сполучають координати точок $(x_i; n_i)$ або $(x_i; \omega_i)$.

13. Вибіркова середня величина $\bar{x}_B$ для дискретного статистичного розподілу вибірки.
А) $\bar{x}_B = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}$, де x_i – варіанта варіаційного ряду вибірки, n_i – частота цієї варіанти, n – обсяг вибірки ($n = \sum n_i$);
Б) Це є варіанта, що має найбільшу частоту появи;
В) Це є варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;
Г) $\bar{x}_B = \dfrac{\sum (x_i - x)^2 n_i}{n} = \dfrac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (x)^2$, x – варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант.

14. D_B для дискретного статистичного розподілу вибірки...
А) $D_B = \dfrac{\sum x_i n_i}{n}$, де x_i – варіанта варіаційного ряду вибірки, n_i – частота цієї варіанти, n – обсяг вибірки ($n = \sum n_i$);
Б) це є варіанта, що має найбільшу частоту появи;
В) це є варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;
Г) $D_B = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^2 n_i}{n} = \dfrac{\sum x_i^2 n_i}{n} - (\bar{x}_B)^2$.

15. σ_B для дискретного статистичного розподілу вибірки рівне:
А) D_B^2;
Б) це є варіанта, що має найбільшу частоту появи;
В) це є варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;
Г) $\sqrt{D_B}$.

16. Що таке медіана Me^* дискретного статистичного розподілу?
А) D_B^2;
Б) це є варіанта, що має найбільшу частоту появи;
В) це є варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;
Г) $\sqrt{D_B}$.

17. Що таке мода Mo^* дискретного статистичного розподілу?
А) D_B^2;
Б) Це є варіанта, що має найбільшу частоту появи;
В) Це є варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант;
Г) $\sqrt{D_B}$.

18. Початковий момент k-го порядку v_k^*:
А) $\dfrac{\sum x_i^k n_i}{n}$, де $k = 1, 2, 3, ...$;

Б) $\dfrac{\mu_3^*}{\sigma_B^3}$;

В) $\dfrac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^k n_i}{n}$, де $k = 1, 2, 3, ...$;

Г) $\dfrac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3$.

19. Що таке центральний момент k-го порядку μ_k^*:

А) $\dfrac{\sum x_i^k n_i}{n}$, де $k = 1, 2, 3, ...$;

Б) $\dfrac{\mu_3^*}{\sigma_B^3}$;

В) $\dfrac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^k n_i}{n}$, де $k = 1, 2, 3, ...$;

Г) $\dfrac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3$.

20. Асиметрія статистичного розподілу вибірки A_s^*:

А) $\dfrac{\sum x_i^k n_i}{n}$, де $k = 1, 2, 3, ...$;

Б) $\dfrac{\mu_3^*}{\sigma_B^3}$;

В) $\dfrac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^k n_i}{n}$, де $k = 1, 2, 3, ...$;

Г) $\dfrac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3$.

21. Ексцес статистичного розподілу вибірки E_s^*:

А) $\dfrac{\sum x_i^k n_i}{n}$, де $k = 1, 2, 3, ...$;

Б) $\dfrac{\mu_3^*}{\sigma_B^3}$;

В) $\dfrac{\sum (x_i - \bar{x}_B)^k n_i}{n}$, де $k = 1, 2, 3, ...$;

Г) $\dfrac{\mu_4^*}{\sigma_B^4} - 3$.

Точкові статистичні оцінки параметрів розподілу

22. Що називається точковою статистичною оцінкою?
А) Статистична оцінка випадкової величини, яка визначається одним числом;
Б) Статистична оцінка, яка визначається двома числами, кінцями інтервалів;
В) Оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) Інша відповідь.

23. Яка точкова статистична оцінка називається незміщеною?
А) Якщо $M(\theta^*) = \theta$, де θ – оціночний параметр генеральної сукупності, θ^* – його статистична оцінка;
Б) Якщо $M(\theta^*) \neq \theta$;
В) Це оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) Це оцінка, яка у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* наближається до оцінювального параметра θ, а саме: $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta) = 1$.

24. Яка точкова статистична оцінка називається зміщеною?
А) Якщо $M(\theta^*) = \theta$, де θ – оціночний параметр генеральної сукупності, θ^* – його статистична оцінка;
Б) Якщо $M(\theta^*) \neq \theta$;
В) Це оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) Це оцінка, яка у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* наближається до оцінювального параметра θ, а саме: $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta) = 1$.

25. Яка точкова статистична оцінка називається ефективною?
А) Якщо $M(\theta^*) = \theta$, де θ – оціночний параметр генеральної су-

купності, θ^* – його статистична оцінка;
Б) Якщо $M(\theta^*) \neq \theta$;
В) Це оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) Це оцінка, яка у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* наближається до оцінювального параметра θ, а саме: $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta) = 1$.

26. Яка точкова статистична оцінка називається ґрунтовною?
А) Якщо $M(\theta^*) = \theta$, де θ – оціночний параметр генеральної сукупності, θ^* – його статистична оцінка;
Б) якщо $M(\theta^*) \neq \theta$;
В) Це оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) Це оцінка, яка у разі необмеженого збільшення обсягу вибірки θ^* наближається до оцінювального параметра θ, а саме: $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| < \delta) = 1$.

Інтервальні оцінки параметрів розподілу

27. Що називається інтервальною статистичною оцінкою?
А) Статистична оцінка випадкової величини, яка визначається одним числом;
Б) Статистична оцінка, яка визначається двома числами, кінцями інтервалів;
В) Оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) Інша відповідь.

28. Що називають точністю оцінки?
А) Різниця між статистичною оцінкою θ^* та її оцінювальним параметром θ, взята за абсолютним значенням;
Б) Статистична оцінка, яка визначається двома числами;

В) Оцінка, яка при заданому обсязі вибірки має мінімальну дисперсію;
Г) Інша відповідь.

29. Що називають надійністю γ оцінки?
А) величина, яка визначається із виразу $\dfrac{n}{n-1}\dfrac{\sum\limits_i n_i\left(x_i-\bar{x}_B\right)^2}{n}=\dfrac{\sum\limits_i n_i\left(x_i-\bar{x}_B\right)^2}{n-1}$;
Б) Це властивість, яка є в кожної людини;
В) Нерівність $|\theta^*-\theta|<\delta$, яка справджується із певною ймовірністю $P\left(|\theta^*-\theta|<\delta\right)=\gamma$;
Г) Інша відповідь.

30. Що називають довірчим інтервалом?
А) Це довільний інтервал;
Б) Це цілком визначений інтервал;
В) Це інтервал, якому можна довіряти;
Г) Інтервал $[\theta^*-\delta;\theta^*+\delta]$, що покриває оцінюваний параметр θ генеральної сукупності із заданою надійністю γ.

31. Що називається виправленою дисперсією?
А) Величина $[\theta^*-\delta;\theta^*+\delta]$;
Б) Величина $|\theta^*-\theta|<\delta$;
В) Величина $\dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}=\delta$;
Г) Величина $s^2=\dfrac{n}{n-1}D_B=\dfrac{n}{n-1}\dfrac{\sum\limits_i n_i\left(x_i-\bar{x}_B\right)^2}{n}=\dfrac{\sum\limits_i n_i\left(x_i-\bar{x}_B\right)^2}{n-1}$.

32. Що називають виправленим середнім квадратичним відхи-

ленням?
А) Величина $[\theta^* - \delta; \theta^* + \delta]$;
Б) Величина $|\theta^* - \theta| < \delta$;
В) Величина $\dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} = \delta$;
Г) Величина $s = \sqrt{\dfrac{n}{n-1} D_B}$.

33. Як побудувати довірчий інтервал для X_Γ із заданою надійністю γ при відомому значенні σ_Γ?
А) Скористатися виразом $\bar{x}_B - \dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B - \dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$, де $\dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки, n – об'єм вибірки, t – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, при якому $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$;
Б) Скористатися виразом $\bar{x}_B - \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B - \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$, де s – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ знаходиться за таблицями при заданих n і γ;
В) Скористатися виразом $s(1-q) < \sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q < 1$), $0 < \sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q > 1$), де q – знаходиться за таблицями;
Г) Правильної відповіді тут немає.

34. Як побудувати довірчий інтервал для X_Γ із заданою надійністю γ при невідомому значенні σ_Γ і при обсягах вибірки $n <$?
А) Скористатися виразом $\bar{x}_B - \dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B - \dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$, де $\dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки, n – об'єм вибірки, t – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, при якому $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$;
Б) Скористатися виразом $\bar{x}_B - \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B - \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$, де s – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ знаходиться за таблицями при заданих n і γ;
В) Скористатися виразом $s(1-q) < \sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q < 1$), $0 < \sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q > 1$), де q – знаходиться за таблицями;

Г) Правильної відповіді тут немає.

35. Як побудувати довірчий інтервал із заданою надійністю γ для σ_Γ при обсягах вибірки $n <$?
А) Скористатися виразом $\bar{x}_B - \dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B - \dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}}$, де $\dfrac{t\sigma_\Gamma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінки, n – об'єм вибірки, t – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t)$, при якому $\Phi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$;
Б) Скористатися виразом $\bar{x}_B - \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B - \dfrac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}$, де s – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення, t_γ знаходиться за таблицями при заданих n і γ;
В) Скористатися виразом $s(1-q) < \sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q < 1$), $0 < \sigma_\Gamma < s(1+q)$ (при $q > 1$), де q – знаходиться за таблицями;
Г) правильної відповіді тут немає.

Статистичні гіпотези. Застосування критерію Пірсона для перевірки гіпотези про нормальний розподіл

36. Дати визначення нульової гіпотези.
А) Гіпотеза, яка припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки;
Б) Гіпотеза, яка протиставляє твердження висунутої гіпотези;
В) Гіпотеза, яка має тільки одне припущення;
Г) Гіпотеза, яка складається із скінченого або нескінченного числа простих гіпотез.

37. Дати визначення альтернативної гіпотези.
А) Гіпотеза, яка припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки;
Б) Гіпотеза, яка протиставляє твердження висунутої гіпотези;
В) Гіпотеза, яка має тільки одне припущення;

Г) Гіпотеза, яка складається із скінченого або нескінченного числа простих гіпотез.

38. Що називають простою статистичною гіпотезою?
А) Гіпотеза, яка припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки;
Б) Гіпотеза, яка протиставляє твердження висунутої гіпотези;
В) Гіпотеза, яка має тільки одне припущення;
Г) Гіпотеза, яка складається із скінченого або нескінченного числа простих гіпотез.

39. Що називають складною статистичною гіпотезою?
А) Гіпотеза, яка припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки;
Б) Гіпотеза, яка протиставляє твердження висунутої гіпотези;
В) Гіпотеза, яка має тільки одне припущення;
Г) Гіпотеза, яка складається із скінченого або нескінченного числа простих гіпотез.

40. Що називають статистичним критерієм?
А) Випадкову величину K, яка використовується для перевірки нульової гіпотези;
Б) Цілком закономірну величину K, яка використовується для перевірки нульової гіпотези;
В) Випадкову величину K, яка використовується для перевірки домашніх робіт студентів;
Г) Інша відповідь.

41. Що називається емпіричним (спостережуваним) значенням критерію?
А) Випадкова величина K, яка використовується для перевірки

нульової гіпотези;
Б) Значення критерію, який обчислюють за результатом вибірки;
В) Випадкову величину K, яка використовується для перевірки домашніх робіт студентів;
Г) Інша відповідь.

42. Що називається областю прийняття нульової гіпотези?
А) Множину всіх можливих значень статистичного критерію;
Б) Сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не відхиляється;
В) Сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не приймається;
Г) Інша відповідь.

43. Що називається критичною область статистичного критерію?
А) Множину всіх можливих значень статистичного критерію;
Б) Сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не відхиляється;
В) Сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не приймається;
Г) Інша відповідь.

44. Що називається критичною точкою статистичного критерію?
А) Точка, яка поділяє множину всіх можливих значень статистичного критерію;
Б) Сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не відхиляється;
В) Сукупність значень статистичного критерію, за яких нульова гіпотеза не приймається;
Г) Інша відповідь.

45. Які Ви знаєте види критичних областей статистичного критерію?
А) Лівобічні;
Б) Правобічні;
В) Двобічні;
Г) Всі перераховані.

46. Що таке рівень значущості α?
А) Ймовірність, що буде відкинута правильна альтернативна гіпотеза;
Б) Ймовірність, що буде прийнята неправильна нульова гіпотеза;
В) Ймовірність, що буде відкинута правильна нульова гіпотеза;
Г) Всі перераховані.

47. Помилки першого роду при перевірці гіпотез полягають у тому, що:
А) буде відкинута неправильна нульова гіпотеза;
Б) буде прийнята неправильна нульова гіпотеза;
В) буде відкинута правильна нульова гіпотеза;
Г) всі перераховані.

48. Помилки другого роду при перевірці гіпотез полягають у тому, що:
А) буде відкинута неправильна нульова гіпотеза;
Б) буде прийнята неправильна нульова гіпотеза;
В) буде відкинута правильна нульова гіпотеза;
Г) всі перераховані.

49. Що називають потужністю критерію?
А) Ймовірність попадання критерію в критичну область при умові, що справедлива альтернативна гіпотеза;
Б) Ймовірність того, що нульова гіпотеза буде відкинута, якщо справедлива альтернативна гіпотеза;

В) Відповіді А) і Б) правильні;
Г) Інша відповідь.

Статистична і кореляційна залежність. Метод найменших квадратів. Вибіркове рівняння регресії. Криволінійна та множинна кореляція

50. Дати визначення статистичної залежності між ознаками X та Y.
А) Це така залежність, при якій зміна однієї з величин веде до змін розподілу іншої;
Б) Це така залежність, при якій зміна однієї з величин не веде до змін розподілу іншої;
В) Це така залежність, яка проявляється в тому, що при зміні однієї із величин змінюється середнє значення іншої;
Г) Правильної відповіді серед перерахованих немає.

51. Що означає кореляційна залежність між ознаками X та Y?
А) Це така залежність, при якій зміна однієї з величин веде до змін розподілу іншої;
Б) Це така залежність, при якій зміна однієї з величин не веде до змін розподілу іншої;
В) Це така залежність, яка проявляється в тому, що при зміні однієї із величин змінюється середнє значення іншої;
Г) Правильної відповіді серед перерахованих немає.

ТАБЛИЦЯ ВІДПОВІДЕЙ ДО ТЕСТІВ

№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь	№ питання	Відповідь
Теорія ймовірностей															
1	Б	15	В	29	Г	43	В	57	А	71	Б	85	Б	99	В
2	В	16	А	30	В	44	Б	58	Б	72	В	86	А	100	А
3	Г	17	А	31	А	45	А	59	А	73	А	87	Б	101	Б
4	Б	18	В	32	Б	46	Б	60	Г	74	Б	88	Г	102	А
5	В	19	Б	33	В	47	В	61	Б	75	Б	89	А	103	А
6	А	20	Г	34	Г	48	А	62	В	76	В	90	Б	104	Б
7	Г	21	В	35	Б	49	Г	63	В	77	Г	91	В	105	В
8	Г	22	В	36	Б	50	В	64	Б	78	Б	92	А	106	А
9	Г	23	А	37	А	51	А	65	Г	79	Г	93	Б	107	Г
10	А	24	Б	38	А	52	Б	66	Б	80	Г	94	А		
11	Б	25	А	39	А	53	А	67	В	81	В	95	А		
12	В	26	А	40	Б	54	Б	68	Б	82	Б	96	Б		
13	Г	27	Б	41	Б	55	А	69	А	83	Г	97	Б		
14	Б	28	В	42	А	56	Г	70	Г	84	А	98	Г		
Елементи математичної статистики															
1	А	8	В	15	Г	22	А	29	В	36	А	43	В	50	А
2	Б	9	В	16	В	23	А	30	Г	37	Б	44	А	51	В
3	А	10	Б	17	Б	24	Б	31	Г	38	В	45	Г		
4	Б	11	Г	18	А	25	В	32	Г	39	Г	46	В		
5	А	12	Г	19	В	26	Г	33	А	40	А	47	В		
6	В	13	А	20	Б	27	Б	34	Б	41	Б	48	Б		
7	В	14	Г	21	Г	28	А	35	В	42	Б	49	Б		

КОРОТКИЙ СЛОВНИК ТЕРМІНІВ

Альтернативна (конкуруюча) **гіпотеза** – гіпотеза, яка протиставляється *нульовій* гіпотезі.

Варіанта – конкретне числове значення кількісної ознаки, наприклад X.

Варіаційний ряд – зростаючий числовий ряд варіант.

Вибірка – сукупність випадково взятих об'єктів.

Випадкова величина – внаслідок проведення експерименту під впливом випадкових факторів набуває того чи іншого можливого числового значення з певною ймовірністю. Прикладом *випадкової величини* може служити кількість очок, що випала при підкиданні грального кубика. Ця випадкова величина набуває значення 1, 2, 3, 4, 5, 6 із ймовірністю $1/6$ кожне.

Випадкова подія – подія, яка в результаті експерименту може відбутися або не відбутися.

Випадкова похибка – складова похибки вимірювання, яка змінюється випадковим чином при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини.

Випадкова функція – функція невипадкового аргументу t, яка при кожному фіксованому значенні аргументу є випадковою величиною.

Випадковим (стохастичним) процесом називають випадкову функцію аргументу t, яка використовує t як час.

Випадкові числа – можливі значення r неперервної випадкової величини R, яка розподілена рівномірно в інтервалі $(0;1)$.

Вірогідна подія – подія, яка обов'язково відбудеться під час певного випробування.

Генеральна сукупність – сукупність об'єктів, з яких зроблено вибірку.

Дискретна випадкова величина – величина, яка приймає окремі ізольовані значення з визначеними ймовірностями.

Дисперсією випадкової величини X називають математичне сподівання квадрату відхилення цієї величини.

Екстраполювання (екстраполяція) – знаходження значення функції для аргументу, що знаходиться за межами таблиці даних (даних експерименту).

Емпіричний – як результат досліду.

Емпіричний статичний розподіл – результат спостережень, звичайно зображається у формі таблиці чисел або гістограми, в якій вказується, скільки разів випадкова змінна (частота) приймала певні значення або перебувала в певних інтервалах значень.

Залежними випадковими подіями називають події, якщо поява однієї з них (A або B) впливає на ймовірність появи іншої.

Закон великих чисел – сукупність теорем, в яких вказано умови, при яких сумарна поведінка досить великого числа випадкових величин втрачає випадковий характер і стає закономірною.

Закон розподілу випадкової величини – співвідношення, які встановлюють зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм ймовірностями.

Інтервальна статистична оцінка – статистична оцінка, яка визначається двома числами, кінцями інтервалів.

Інтерполювання (інтерполяція) – відшукування значення функції, що відповідає проміжним значенням аргументу.

Ймовірність події – ступінь правдоподібності події, нормована міра на імовірнісному просторі. Приймає числові значення в проміжку між 0 і 1. У прикладі з підкиданням грального кубика ймовірність випадання на кожній з граней дорівнює $1/6$.

Кореляція – залежність між числовими випадковими величинами, що не мають, взагалі кажучи, строго функціонального характеру. На відміну від функціональної залежності, кореляція, як правило, розглядається тоді, коли, принаймні, одна з величин залежить не тільки від іншої, але і від ряду випадкових факторів. Вплив однієї випадкової величини на іншу характеризується умовними розподілами однієї з них при фіксованих значеннях іншої (за наявності впливу згадані умовні розподіли відрізнятимуться один від одного).

Критерій згоди (Пірсона) – критерій перевірки гіпотези про передбачуваний закон невідомого розподілу.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини – сума добутків всіх її можливих значень на їхні ймовірності.

Математична статистика – наука про математичні методи систематизації і використання статистичних даних для наукових і практичних висновків. У багатьох своїх розділах математична статистика спирається на теорію ймовірності, що дозволяє оцінити надійність і точність висновків, що робляться на підставі обмеженого статистичного матеріалу (напр., оцінити необхідний обсяг вибірки для отримання результатів необхідної точності при вибірковому спостереженні).

Медіаною (Me) неперервної випадкової величини X називають те її значення, для якого виконується умова $F(Me) = 0,5$.

Модою дискретної випадкової величини X називають те її можливе значення, якому відповідає найбільша ймовірність появи. Для неперервної величини – це буде максимальне значення щільності ймовірності.

Незалежними випадковими подіями називають події, якщо поява однієї з них (A або B) не впливає на ймовірність появи іншої.

Неперервна випадкова величина – величина, яка приймає всі значення з деякого скінченного або нескінченного проміжку.

Несумісними називають події, якщо вони не можуть відбуватися одночасно.

Нульова гіпотеза – гіпотеза, що припускає відсутність систематичних розбіжностей між невідомими параметрами генеральної сукупності і величиною, яка одержана внаслідок обробки вибірки.

Обсяг (об'єм) **сукупності** (вибіркової або генеральної) – кількість об'єктів цієї сукупності.

Полігон частот (відносних частот) – ламана лінія, відрізки якої сполучають кординати точок $(x_i; n_i)$ або $(x_i; \omega_i)$, де x_i – числове значення варіанти, n_i – частота спостереження, ω_i – відносна частота спостереження.

Помилка другого роду полягає в тому, що буде прийнята неправильна *нульова* гіпотеза.

Помилка першого роду полягає в тому, що буде відкинута правильна *нульова* гіпотеза.

Потужністю критерію називають ймовірність попадання критерію в критичну область при умові, що справедлива *альтернативна* гіпотеза.

Похибка (помилка, неправильність, неточність) – різниця $x - a$, де a – дане число, яке розглядається як наближене значення деякої величини, точне значення якої рівне x. Різниця $x - a$ називається також **абсолютною похибкою**. Відношення $x - a$ до a називається **відносною похибкою** числа a.

Початковим моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання величини X^k.

Протилежною до події A називається подія $\overline{A}$, якщо вона настає тільки тоді, коли не настає подія A.

Реалізацією *випадкової функції* $X(t)$ називають невипадкову функцію аргументу t, рівною якій може бути випадкова функція в результаті випробувань.

Регресія – залежність середнього значення якої-небудь величини від деякої іншої величини або від декількох величин. На відміну від чисто функціональної залежності $y = f(x)$, коли кожному значенню незалежної змінної x відповідає одне єдине значення величини y, при регресійному зв'язку одному і тому ж значенню x можуть відповідати, залежно від випадкуm, різні значення величини y

Розподіл ймовірностей – у простому випадку безліч станів $X = \{x, y, z, ...\}$, в яких може знаходитися об'єкт, звичайно (складається з n елементів). *Розподілом ймовірностей* при цьому називається сукупність n невід'ємних чисел (ймовірностей) p_x, p_y, p_z, ..., які в сумі дають 1.

Ряд частот – кількість спостережуваних варіант $n_l, n_2, ..., n_m$.

Середнім квадратичним (стандартним) відхиленням випадкової величини X називають корінь квадратний із *дисперсії.*

Систематична похибка – це складова похибки вимірювання, яка залишається постійною або закономірно змінюється при повторних вимірюваннях однієї і тієї ж величини.

Статистична сукупність – множина однорідних об'єктів.

Стохастична залежність – те саме, що й *імовірнісна* залежність.

Статистичний розподіл вибірки – перелік варіант та відповідних їм частот.

Статистичним критерієм називають випадкову величину K, яка використовується для перевірки *нульової* гіпотези.

Статистичні гіпотези – будь-які статистичні висновки, здобуті на підставі обробки вибірки.

Сумісними називають події, якщо вони можуть відбуватися одночасно.

Схема Бернуллі $B(n, p)$ (*n і p – параметри схеми Бернуллі*) – при здійсненні n незалежних випробувань, подія A може відбутися зі сталою ймовірністю p, або не відбутися з ймовірністю q $(p + q = 1)$, тоді результат кожного випробування не залежить від результатів попередніх випробувань, тобто випробування *незалежні*.

Теорія ймовірностей – математична наука, що вивчає закономірності випадкових масових подій.

Точкова статистична оцінка – статистична оцінка, яка визначається одним числом.

Умовна ймовірність – ймовірність появи події A при умові, що подія B відбулася.

Функція розподілу ймовірності (інтегральна функція) $F(x)$ – функція аргументу x, яка визначає ймовірність випадкової події $X < x$.

Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне сподівання від $(X - M(X))^k$.

Щільність ймовірності $f(x)$ неперервної випадкової величини X – перша похідна від інтегральної функції $F(x)$.

Відповіді до завдань

Тема 1
1. Операції над подіями

1.1. $\overline{A} = \{5;6;7;8;9;10\}$; $\overline{B} = \{1;2;8;9;10\}$; $\overline{A}B = \{5;6;7\}$; $A\overline{B} = \{1;2\}$; $\overline{A}\cdot\overline{B} = \{8;9;10\}$; $\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B} = \{1;2;5;6;7;8;9;10\}$; $A+B = \{1;2;3;4;5;6;7\}$; $\overline{A+B} = \{8;9;10\}$; $A\backslash B = \{1;2\}$.
1.2. B_2; B_4.
1.3. $\overline{A} = \{1;3;5;7;9;11\}$; $\overline{B} = \{1;4;5;7;8;10;11\}$; $\overline{A}\cdot B = \{3;9\}$;
$A\cdot\overline{B} = \{2;4;8;10\}$; $\overline{A}\cdot\overline{B} = \{1;5;7;11\}$;
$\overline{AB} = \overline{A}+\overline{B} = \{1;2;3;4;5;7;8;9;10;11\}$;
$A+B = \{2;3;4;6;8;9;10;12\}$;
$A/B = \{2;4;8;10\}$; $\overline{A+B} = \{1;5;7;11\}$.
1.4. B_1; B_3; B_4.
1.5. $\Omega = \{$ггг;грг;ггр;ргг;ррг;ргр;грр;ррр$\}$;
$A = \{$грг;ггр;ргг;ггг$\}$; $B = \{$грг;ргг;ггр;ррг;грр;ргр;ррр$\}$;
$C = \{$ррр$\}$; $A\cap B = \{$грг;ггр;ргг$\}$; $A\cap B\cap C = \{$грг;ггр;ргг;ррр$\}$;
$\overline{A\cup B}\cap C = \varnothing$.
1.6. $\Omega = \{A_{11}; A_{12}; A_{13}A_{14}; A_{15}; A_{16}; A_{21}; A_{22}; A_{23}; A_{24}; A_{25}; A_{26}; A_{31}; A_{32}; A_{33}; A_{34}; A_{35}; A_{36}; A_{41}; A_{42}; A_{43}; A_{44}; A_{45}; A_{46}; A_{51}; A_{52}; A_{53}; A_{54}; A_{55}; A_{56}; A_{61}; A_{62}; A_{63}; A_{64}; A_{65}; A_{66}\}$;
$A = \{A_{22}; A_{24}; A_{26}; A_{42}; A_{44}; A_{46}; A_{62}; A_{64}; A_{66}\}$;
$A\cap B = \{A_{26}; A_{46}; A_{62}; A_{64}; A_{66}\}$;
$\overline{A}\cap\overline{B} = \{A_{11}; A_{12}; A_{14}; A_{15}; A_{21}; A_{25}; A_{41}; A_{45}; A_{51}; A_{52}; A_{54}\}$.

(*Примітка*: A_{ik} – на першому кубику випало i очок, а на другому кубику – k очок).

1.7. $\Omega = \{$ммм;ссс;ттт;мсс;тсс;стт;мтт;тмм;смм;мст$\}$;
$A = \{$ммм;мсм;мсс;тмс;тмм;ттм$\}$; $B = \{$ммм;мсм;мсс;ссс$\}$;
С $= \{$ссм$\}$; А $\cap$ В $\cap$ С $= \{$ссм$\}$; $\overline{A\cup B}\cap C = \varnothing$.
1.8. $\Omega = \{$ссс;ссб;бсс;сбс;сбб;ббс;бсб;ббб$\}$; $\overline{A}B = \{$ссс;ссб$\}$;
$A\overline{B} = \{$ббс;ббб$\}$; $AB = \{$бсс;бсб$\}$; $\overline{A}\cdot\overline{B} = \{$сбс;сбб$\}$;

$\overline{AB} = \{$ссс;ссб;сбс;сбб;ббс;ббб$\}$; $A + B = \{$ссс;ссб;бсс;бсб;ббс;ббб$\}$; $\overline{A} + \overline{B} = \overline{AB}$; $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$; $A \cap B \cap C = \{$бсс$\}$; $A \cap B \cap C = \overline{B \cap C}$; $A \cap B \cap C = \{$ссс;бсс;сбс;бсб;ббс$\}$; $\overline{A \cap B} \cap C = \{$сбс$\}$.

(*Примітка*: б – браковані, с – стандартні).

1.9. $P_4 = 24$; $P_{12} = (2,4,6) = 13860$; $A_7^2 = 42$; $\overline{A}_7^2 = 49$; $C_9^1 = 9$; $C_9^8 = 9$; $C_9^3 = 84$; $C_9^7 = 36$; $\overline{C}_9^3 = 156$; $\overline{C}_3^9 = 55$; $C_9(5,4) = 126$.

1.10. а) 6; б) 27; в) 6; г) 9. **1.11.** а) 4; б) 18; в) 4; г) 6.

1.12. $9 \cdot 10^5$. **1.13.** а) 84; б) 504. **1.14.** а) 720; б) 120.

1.15. а) 321 440; б) 372 652.

1.16. а) 15504 ; б) 6; в) 7280; г) 30752; д) 126.

1.17. а) 2268; б) 5832; в) 12636; г) 6561; д) 52344.

1.18. а) 725760; б) 2903040. **1.19.** а) 362880; б) 1451520.

1.20. 6. **1.21.** а) 262144; б) 100842; в) 43653.

1.22. а) 6561; б) 3024; в) 2048. **1.23.** 43243200.

1.24. а) 495; б) 34650.

2. Імовірність подій

2.1. $P(A) = 0,4$; $P(\overline{A}) = 0,6$; $P(B) = 0,5$; $P(\overline{B}) = 0,5$; $P(A + B) = 0,7$; $P(\overline{AB}) = 0,8$.

2.2. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{1}{4}$; $P(B) = \frac{3}{8}$; $P(Д) = \frac{1}{2}$; $P(E) = \frac{7}{8}$.

2.3. $P(A) = P(B)$.

2.4. $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(A) = \frac{2}{3}$; $P(C) = \frac{5}{6}$; $P(\overline{B}) = \frac{2}{3}$; $P(Д) = \frac{1}{3}$; $P(\overline{C}) = \frac{1}{6}$; $P(A + Д) = \frac{5}{6}$; $P(\overline{AB}) = \frac{5}{6}$.

2.5. а) $\frac{7}{22}$; б) $\frac{15}{77}$; в) $\frac{33}{308}$; г) $\frac{5}{22}$; д) 0,028; е) $\frac{7}{6}$. **2.6.** $\frac{1}{64}$.

2.7. $\frac{1}{120}$. **2.8.** $\frac{1}{8^8}$. **2.9** а) $\frac{2}{13}$; б) $\frac{9}{13}$; в) $\frac{2}{13}$; г) $\frac{3}{13}$. **2.10.** $\frac{1}{4}$. **2.11.** $\frac{23}{111}$.

2.12. $0,54 \cdot 10^{-4}$. **2.13.** 0,0001. **2.14.** а) 0,153; б) 0,353; в) 0,474.

2.15. 0,1. **2.16.** $P(A) = \dfrac{C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6}$. **2.17.** $\displaystyle\sum_{s=1}^{\min(m,r)} = \dfrac{C_m^s C_{n-m}^{r-s}}{C_n^r}$.

2.18. $\frac{1}{231}$. **2.19.** а) 0,25; б) $\frac{2}{35}$; в) 0,099; г) 0,111. **2.20.** $n \geq 3$.
2.21. 0,105. **2.22.** $\frac{87}{473}$. **2.23.** а) $\frac{1}{336}$; б) $\frac{1}{56}$. **2.24.** а) $\frac{1}{120}$; б) $\frac{1}{151200}$.
2.25. а) $24 \cdot 10^{-6}$; б) $7 \cdot 10^{-7}$. **2.26.** $\frac{1}{15}$. **2.27.** $\frac{2}{35}$. **2.28.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$.
2.29. а) $\frac{2}{7}$; б) $\frac{1}{7}$. **2.30.** $\frac{1}{21}$. **2.31.** а) 0,286; б) 0,143. **2.32.** $\frac{2}{15}$.
2.33. $P(A) = \frac{1}{216}$; $P(B) = \frac{1}{36}$; $P(C) = \frac{5}{9}$.
2.34. а) 0,312; б) 0,001; в) 0,461. **2.35.** 0,0605.
2.36. а) 0,273; б) 0,0854; в) 0,064. **2.37.** 0,09. **2.38.** $\frac{2}{\pi}$. **2.39.** $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
2.40. 0,5. **2.41.** 0,029. **2.42.** 0. **2.43.** $\frac{\pi}{4}$. **2.44.** 0,125. **2.45.** $\frac{1}{3}$.
2.46. $\frac{2}{3}$. **2.47.** 0,306. **2.48.** 0,306.

Тема 4

23. а)

$$\begin{aligned}
&p = 0,4\\
&P(-3 < x < 2) = 0,8;\\
&Mo = -1;\\
&M(X) = -0,2;\\
&D(X) = 3,26;\\
&\sigma \approx 1,81;\\
&As = -0,16;\\
&Es = -0,61;
\end{aligned}
\qquad
F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -4;\\ 0,1, & -4 < x \leq -1\\ 0,5, & 1 < x \leq 0\\ 0,6, & 0 < x \leq 1\\ 0,9, & 1 < x \leq 2;\\ 0,95, & 2 < x \leq 4\\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

25. 2-й спосіб.
26. а)

x	-6	-4	0	4
p_i	0,2	0,4	0,2	0,2

$M(X) = -2$; $D(X) = 12,8$; $\sigma \approx 3,58$.

28. а)

$a = \dfrac{3}{8}$; $As = -0,86$;

$P(-3 < x < 5) = 1$; $Es = -0,095$;

$P(5) = 0$;

$Mo = 2$;

$Me = \sqrt[3]{4}$;

$M(x) = 1,5$;

$D(x) = 0,15$;

$\sigma \approx 0,387$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{x^3}{8}, & 0 < x \le 2; \\ 1 & x > 2. \end{cases}$$

в)

$a = 3$; $M(x) = \dfrac{1}{6}$;

$P(-3 < x < 5) = \dfrac{e^{30} - 1}{e^{30}}$; $D(x) = \dfrac{1}{36}$;

$P(5) = 0$; $\sigma = \dfrac{1}{6}$;

$Mo = 0$;

$Me = 6 \log_2 e$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-6x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

г)

$a = 5$; $M(x) = \dfrac{1}{5}$;

$P(-3 < x < 5) \approx 1$; $D(x) = \dfrac{1}{25}$;

$P(5) = 0$; $\sigma = \dfrac{1}{5}$;

$Mo = 0$;

$Me = \dfrac{\ln 2}{5}$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - e^{-5x}, & x \ge 0. \end{cases}$$

д) $a = \dfrac{1}{8}$; $P(-3 < x < 5) = \dfrac{3}{8}$; $P(5) = 0$; $Me = 6$; $M(x) = 6$;

$$D(x) = 5\frac{1}{3};\ \sigma \approx 2,33;\ F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2; \\ \dfrac{x-2}{8}, & 2 < x \leq 10; \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

е) $a = \frac{1}{3}$; $P(-3 < x < 5) = \frac{5}{18}$; $P(5) = 0$; розподіл антимодальний; $Me = 9$; $M(x) = 9$; $D(x) = 27$; $\sigma = 3\sqrt{3}$; $As = 0$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x}{18}, & 0 \leq x \leq 18; \\ 1, & x > 18. \end{cases}$$

є) $a = \frac{6}{5}$; $P(-3 < x < 5) = 1$; $P(5) = 0$; $Mo = 2$; $Me \approx 1,7$; $M(x) = 1,7$; $D(x) = 0,05$; $\sigma \approx 0,224$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ \dfrac{1}{15}\left(2x^3 - 3x^2 + 1\right), & 1 < x \leq 2; \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

ж) $a = \frac{3}{128}$; $P(-3 < x < 5) = 1$; $P(5) = 0$; $Mo = 3$; $Me \approx 1,5$; $M(x) = 0,59$; $D(x) = 0,5167$; $\sigma \approx 0,72$;

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \dfrac{1}{128}\left(9x^2 - x^3 + 21x + 11\right), & -1 < x \leq 2; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

з) $a = 5$; $P(-3 < x < 5) = 0,5762$; $P(5) = 0$; $Mo = 1$; $Me = 1$; $M(x) = 1$; $D(x) = 25$; $\sigma = 5$; $As = 0$; $Es = 0$;

$$F(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x-1)^2}{50}} dx.$$

и) $a = 49$; $P(-3 < x < 5) = 0,2754$; $P(5) = 0$; $Mo = -6$; $Me = -6$; $M(x) = -6$; $D(x) = 49$; $\sigma = 7$; $As = 0$; $Es = 0$;

$$F(x) = \frac{1}{7\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x+6)^2}{98}} dx.$$

29. $a = \dfrac{20}{\pi}$.

30. 1) $a = 1$; $c = 0$; 2) $P(-1 < x < 4) = 1$; 3) $P(7) = 0$; 4) розподіл антимонопольний; 5) $Me = 0,5$; 6) $M(x) = 0,5$; 7) $D(x) = \dfrac{1}{12}$; 8) $\sigma = 0,289$; 9) $As = 0$; 10) $Es = -1,1(9)$;

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 1, & 0 < x < 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Жлутенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод, посібник. Ч.1. Теорія ймовірностей. К. : КНЕУ, 2000. 304 с.

2. Жлутенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод, посібник. Ч.2. Математична статистика. К. : КНЕУ, 2001. 336 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей й математическая статистика. М. : Высшая школа, 2002. 479 с.

4. Горбань С.Ф., Снижко Н.В. Теория вероятностей й математическая статистика : Учеб. Пособие. К. : МАУП, 1999. 168 с.

5. Булига К.Б., Барановська Л.В. Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики. К. : Видавництво Європейського Університету, 2000. 172 с.

6. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М. : Высшая школа, 1999. 239 с.

7. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. М. : Гардарика, 1998. 328 с.

8. Черняк І.О., Обушна О.М., Ставицький А.В. Теорія ймовірностей і математична статистика : збірник задач. К. : Знання, 2001. 200 с.

9. Турчин В.М. Математична статистика : навчальний посібник. Видавничий центр "Академія", 1999. 240 с.

10. Юрченко М.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший освітній рівень) спеціальності 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології. Одеса : ОНПУ, 2017. 47 с.

11. Юрченко М.О. Конспект лекцій з дисципліни "Теорія ймовірностей та математична статистика" для бакалаврів (перший

освітній рівень) спеціальності 122 – ”Комп’ютерні науки та інформаційні технології” Частина 2. Одеса : ОНПУ, 2016. 62 с.

12. Валь О.Д., Мельничук С.В., Королюк С.Л. Теорія ймовірностей... від найпростішого : навчальний посібник. Чернівці : Книги-XXI, 2004. 160 с.

13. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемних Ю.Н. Математические методы в экономике : учебник. М. : МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство ”Дело и Сервис”, 1999. 368 с.

14. Тичинська Л.М., Черепащук А.А. Теорія ймовірностей. Історичний екскурс та основні теоретичні відомості : Навчальний посібник. Вінниця : ВНТУ, 2010. 112 с.

15. Теорія ймовірностей для економістів : навч. посіб. [для студ. екон. вищ. навч. закл.] / С.М. Григулич, В.П. Лісовська, О.І. Макаренко, І.І. Пахомов, В.Д. Стасюк, Г.М. Черніс. К. : КНЕУ, 2012. 307 с.

ДОДАТКИ

Таблиця 1. Значення функції Гаусса $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	0.3989	0.3989	0.3988	0.3986	0.3984	0.3982	0.3980	0.3977	0.3973
0.1	0.3970	0.3965	0.3961	0.3956	0.3951	0.3945	0.3939	0.3932	0.3925	0.3918
0.2	0.3910	0.3902	0.3894	0.3885	0.3876	0.3867	0.3857	0.3847	0.3836	0.3825
0.3	0.3814	0.3802	0.3790	0.3778	0.3765	0.3752	0.3739	0.3725	0.3712	0.3697
0.4	0.3683	0.3668	0.3653	0.3637	0.3621	0.3605	0.3589	0.3572	0.3555	0.3538
0.5	0.3521	0.3503	0.3485	0.3467	0.3448	0.3429	0.3410	0.3391	0.3372	0.3352
0.6	0.3332	0.3312	0.3292	0.3271	0.3251	0.3230	0.3209	0.3187	0.3166	0.3144
0.7	0.3123	0.3101	0.3079	0.3056	0.3034	0.3011	0.2989	0.2966	0.2943	0.2920
0.8	0.2897	0.2874	0.2850	0.2827	0.2803	0.2780	0.2756	0.2732	0.2709	0.2685
0.9	0.2661	0.2637	0.2613	0.2589	0.2565	0.2541	0.2516	0.2492	0.2468	0.2444
1.0	0.2420	0.2396	0.2371	0.2347	0.2323	0.2299	0.2275	0.2251	0.2227	0.2203
1.1	0.2179	0.2155	0.2131	0.2107	0.2083	0.2059	0.2036	0.2012	0.1989	0.1965
1.2	0.1942	0.1919	0.1895	0.1872	0.1849	0.1826	0.1804	0.1781	0.1758	0.1736
1.3	0.1714	0.1691	0.1669	0.1647	0.1626	0.1604	0.1582	0.1561	0.1539	0.1518
1.4	0.1497	0.1476	0.1456	0.1435	0.1415	0.1394	0.1374	0.1354	0.1334	0.1315
1.5	0.1295	0.1276	0.1257	0.1238	0.1219	0.1200	0.1182	0.1163	0.1145	0.1127
1.6	0.1109	0.1092	0.1074	0.1057	0.1040	0.1023	0.1006	0.0989	0.0973	0.0957
1.7	0.0940	0.0925	0.0909	0.0893	0.0878	0.0863	0.0848	0.0833	0.0818	0.0804
1.8	0.0790	0.0775	0.0761	0.0748	0.0734	0.0721	0.0707	0.0694	0.0681	0.0669
1.9	0.0656	0.0644	0.0632	0.0620	0.0608	0.0596	0.0584	0.0573	0.0562	0.0551
2.0	0.0540	0.0529	0.0519	0.0508	0.0498	0.0488	0.0478	0.0468	0.0459	0.0449
2.1	0.0440	0.0431	0.0422	0.0413	0.0404	0.0396	0.0387	0.0379	0.0371	0.0363
2.2	0.0355	0.0347	0.0339	0.0332	0.0325	0.0317	0.0310	0.0303	0.0297	0.0290
2.3	0.0283	0.0277	0.0270	0.0264	0.0258	0.0252	0.0246	0.0241	0.0235	0.0229
2.4	0.0224	0.0219	0.0213	0.0208	0.0203	0.0198	0.0194	0.0189	0.0184	0.0180
2.5	0.0175	0.0171	0.0167	0.0163	0.0158	0.0154	0.0151	0.0147	0.0143	0.0139
2.6	0.0136	0.0132	0.0129	0.0126	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110	0.0107
2.7	0.0104	0.0101	0.0099	0.0096	0.0093	0.0091	0.0088	0.0086	0.0084	0.0081
2.8	0.0079	0.0077	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0067	0.0065	0.0063	0.0061
2.9	0.0060	0.0058	0.0056	0.0055	0.0053	0.0051	0.0050	0.0048	0.0047	0.0046
3.0	0.0044	0.0043	0.0042	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036	0.0035	0.0034
3.1	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026	0.0025	0.0025
3.2	0.0024	0.0023	0.0022	0.0022	0.0021	0.0020	0.0020	0.0019	0.0018	0.0018

Таблиця 2. Значення функції Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.32	0.1255	0.64	0.2389	0.96	0.3315
0.01	0.0040	0.33	0.1293	0.65	0.2422	0.97	0.3340
0.02	0.0080	0.34	0.1331	0.66	0.2454	0.98	0.3365
0.03	0.0120	0.35	0.1368	0.67	0.2486	0.99	0.3389
0.04	0.0160	0.36	0.1406	0.68	0.2517	1.00	0.3413
0.05	0.0199	0.37	0.1443	0.69	0.2549	1.01	0.3438
0.06	0.0239	0.38	0.1480	0.70	0.2580	1.02	0.3461
0.07	0.0279	0.39	0.1517	0.71	0.2611	1.03	0.3485
0.08	0.0319	0.40	0.1554	0.72	0.2642	1.04	0.3508
0.09	0.0359	0.41	0.1591	0.73	0.2673	1.05	0.3531
0.10	0.0398	0.42	0.1628	0.74	0.2704	1.06	0.3554
0.11	0.0438	0.43	0.1664	0.75	0.2734	1.07	0.3577
0.12	0.0478	0.44	0.1700	0.76	0.2764	1.08	0.3599
0.13	0.0517	0.45	0.1736	0.77	0.2794	1.09	0.3621
0.14	0.0557	0.46	0.1772	0.78	0.2823	1.10	0.3643
0.15	0.0596	0.47	0.1808	0.79	0.2852	1.11	0.3665
0.16	0.0636	0.48	0.1844	0.80	0.2881	1.12	0.3686
0.17	0.0675	0.49	0.1879	0.81	0.2910	1.13	0.3708
0.18	0.0714	0.50	0.1915	0.82	0.2939	1.14	0.3729
0.19	0.0753	0.51	0.1950	0.83	0.2967	1.15	0.3749
0.20	0.0793	0.52	0.1985	0.84	0.2995	1.16	0.3770
0.21	0.0832	0.53	0.2019	0.85	0.3023	1.17	0.3790
0.22	0.0871	0.54	0.2054	0.86	0.3051	1.18	0.3810
0.23	0.0910	0.55	0.2088	0.87	0.3078	1.19	0.3830
0.24	0.0948	0.56	0.2123	0.88	0.3106	1.20	0.3849
0.25	0.0987	0.57	0.2157	0.89	0.3133	1.21	0.3869
0.26	0.1026	0.58	0.2190	0.90	0.3159	1.22	0.3888
0.27	0.1064	0.59	0.2224	0.91	0.3186	1.23	0.3907
0.28	0.1103	0.60	0.2257	0.92	0.3212	1.24	0.3925
0.29	0.1141	0.61	0.2291	0.93	0.3238	1.25	0.3944
0.30	0.1179	0.62	0.2324	0.94	0.3264		
0.31	0.1217	0.63	0.2357	0.95	0.3289		

Продовження таблиці 2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.26	0.3962	1.59	0.4441	1.92	0.4726	2.50	0.4938
1.27	0.3980	1.60	0.4452	1.93	0.4732	2.52	0.4941
1.28	0.3997	1.61	0.4463	1.94	0.4738	2.54	0.4945
1.29	0.4015	1.62	0.4474	1.95	0.4744	2.56	0.4948
1.30	0.4032	1.63	0.4484	1.96	0.4750	2.58	0.4951
1.31	0.4049	1.64	0.4495	1.97	0.4756	2.60	0.4953
1.32	0.4066	1.65	0.4505	1.98	0.4761	2.62	0.4956
1.33	0.4082	1.66	0.4515	1.99	0.4767	2.64	0.4959
1.34	0.4099	1.67	0.4525	2.00	0.4772	2.66	0.4961
1.35	0.4115	1.68	0.4535	2.02	0.4783	2.68	0.4963
1.36	0.4131	1.69	0.4545	2.04	0.4793	2.70	0.4965
1.37	0.4147	1.70	0.4554	2.06	0.4803	2.72	0.4967
1.38	0.4162	1.71	0.4564	2.08	0.4812	2.74	0.4969
1.39	0.4177	1.72	0.4573	2.10	0.4821	2.76	0.4971
1.40	0.4192	1.73	0.4582	2.12	0.4830	2.78	0.4973
1.41	0.4207	1.74	0.4591	2.14	0.4838	2.80	0.4974
1.42	0.4222	1.75	0.4599	2.16	0.4846	2.82	0.4976
1.43	0.4236	1.76	0.4608	2.18	0.4854	2.84	0.4977
1.44	0.4251	1.77	0.4616	2.20	0.4861	2.86	0.4979
1.45	0.4265	1.78	0.4625	2.22	0.4868	2.88	0.4980
1.46	0.4279	1.79	0.4633	2.24	0.4875	2.90	0.4981
1.47	0.4292	1.80	0.4641	2.26	0.4881	2.92	0.4982
1.48	0.4306	1.81	0.4649	2.28	0.4887	2.94	0.4984
1.49	0.4319	1.82	0.4656	2.30	0.4893	2.96	0.4985
1.50	0.4332	1.83	0.4664	2.32	0.4898	2.98	0.4986
1.51	0.4345	1.84	0.4671	2.34	0.4904	3.00	0.498650
1.52	0.4357	1.85	0.4678	2.36	0.4909	3.20	0.499313
1.53	0.4370	1.86	0.4686	2.38	0.4913	3.40	0.499663
1.54	0.4382	1.87	0.4693	2.40	0.4918	3.60	0.499841
1.55	0.4394	1.88	0.4699	2.42	0.4922	3.80	0.499928
1.56	0.4406	1.89	0.4706	2.44	0.4927	4.00	0.499968
1.57	0.4418	1.90	0.4713	2.46	0.4931	4.50	0.499997
1.58	0.4429	1.91	0.4719	2.48	0.4934	5.00	0.500000

Таблиця 3. Розподіл Стьюдента. Таблиця значень $t_\alpha = t(\alpha, n)$

n \ α	0.95	0.99	0.995	n \ α	0.95	0.99	0.995
5	2.78	4.60	8.61	20	2.093	2.861	3.883
6	2.47	4.03	6.86	25	2.064	2.797	3.745
7	2.45	3.71	5.96	30	2.045	2.756	3.659
8	2.37	3.50	5.41	35	2.032	2.729	3.600
9	2.31	3.36	5.04	40	2.023	2.708	3.558
10	2.26	3.25	4.78	45	2.016	2.692	3.527
11	2.23	3.17	4.59	50	2.009	2.679	3.502
12	2.20	3.11	4.44	60	2.001	2.662	3.464
13	2.18	3.06	4.32	70	1.996	2.649	3.439
14	2.16	3.01	4.22	80	1.991	2.640	3.418
15	2.15	2.98	4.14	90	1.987	2.633	3.403
16	2.13	2.95	4.07	100	1.984	2.627	3.392
17	2.12	2.92	4.02	120	1.980	2.617	3.374
18	2.11	2.90	3.97	∞	1.960	2.576	3.291
19	2.10	2.88	3.92				

Таблиця 4. Таблиця розподілу Пуассона $P_n(m) = \dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$

k \ λ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812
1	0.090484	0.163746	0.222245	0.268128	0.303265	0.329287
2	0.004524	0.016375	0.033337	0.053626	0.075816	0.098786
3	0.000151	0.001092	0.003334	0.007150	0.012636	0.019757
4	0.000004	0.000055	0.000250	0.000715	0.001580	0.002964
5	0.000000	0.000002	0.000015	0.000057	0.000158	0.000356
6	0.000000	0.000000	0.000001	0.000004	0.000013	0.000036
7	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000003

λ / k	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
0	0.496585	0.449329	0.406570	0.367879	0.135335	0.049787
1	0.347610	0.359463	0.365913	0.367879	0.270671	0.149361
2	0.121663	0.143785	0.164661	0.183940	0.270671	0.224042
3	0.028388	0.038343	0.049398	0.061313	0.180447	0.224042
4	0.004968	0.007669	0.011115	0.015328	0.090224	0.168031
5	0.000696	0.001227	0.002001	0.003066	0.036089	0.100819
6	0.000081	0.000164	0.000300	0.000511	0.012030	0.050409
7	0.000008	0.000019	0.000039	0.000073	0.003437	0.021604
8	0.000001	0.000002	0.000004	0.000009	0.000859	0.008102
9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000191	0.002701
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000038	0.000810
11	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000007	0.000221
12	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000055
13	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000013
14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003
15	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001

λ / k	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	0.018316	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123
1	0.073263	0.033690	0.014873	0.006383	0.002684	0.001111
2	0.146525	0.084224	0.044618	0.022341	0.010735	0.004998
3	0.195367	0.140374	0.089235	0.052129	0.028626	0.014994
4	0.195367	0.175467	0.133853	0.091226	0.057252	0.033737
5	0.156293	0.175467	0.160623	0.127717	0.091604	0.060727
6	0.104196	0.146223	0.160623	0.149003	0.122138	0.091090
7	0.059540	0.104445	0.137677	0.149003	0.139587	0.117116
8	0.029770	0.065278	0.103258	0.130377	0.139587	0.131756
9	0.013231	0.036266	0.068838	0.101405	0.124077	0.131756
10	0.005292	0.018133	0.041303	0.070983	0.099262	0.118580
11	0.001925	0.008242	0.022529	0.045171	0.072190	0.097020
12	0.000642	0.003434	0.011264	0.026350	0.048127	0.072765
13	0.000197	0.001321	0.005199	0.014188	0.029616	0.050376
14	0.000056	0.000472	0.002228	0.007094	0.016924	0.032384
15	0.000015	0.000157	0.000891	0.003311	0.009026	0.019431
16	0.000004	0.000049	0.000334	0.001448	0.004513	0.010930
17	0.000001	0.000014	0.000118	0.000596	0.002124	0.005786
18	0.000000	0.000004	0.000039	0.000232	0.000944	0.002893
19	0.000000	0.000001	0.000012	0.000085	0.000397	0.001370
20	0.000000	0.000000	0.000004	0.000030	0.000159	0.000617
21	0.000000	0.000000	0.000001	0.000010	0.000061	0.000264
22	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000022	0.000108
23	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000008	0.000042
24	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000016
25	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000006

Таблиця 5. Значення величини χ_1^2 залежно від імовірності $P(\chi^2 > \chi_1^2)$

Число ступенів свободи, k	$P(\chi^2 > \chi_1^2)$							
	0,2	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
1	1,64	2,7	3,8	5,4	6,6	7,9	9,5	10,83
2	3,22	4,6	6,0	7,8	9,2	11,4	12,4	13,8
3	4,64	6,3	7,8	9,8	11,3	12,8	14,6	16,3
4	6,0	7,8	9,5	11,7	13,3	14,9	16,9	18,5
5	7,3	9,2	11,1	13,4	15,1	16,3	18,9	20,5
6	8,6	10,6	12,6	15,0	16,8	18,6	20,7	22,5
7	9,8	12,0	14,1	16,6	18,5	20,3	22,6	24,3
8	11,0	13,4	15,5	18,2	20,1	21,9	24,3	26,1
9	12,2	14,7	16,9	19,7	21,7	23,6	26,1	27,9
10	13,4	16,0	18,3	21,2	23,2	25,2	27,7	29,6
11	14,6	17,3	19,7	22,6	24,7	26,8	29,4	31,3
12	15,8	18,5	21,0	24,1	26,2	28,3	31,0	32,9
13	17,0	19,8	22,4	25,5	27,7	29,8	32,5	34,5
14	18,2	21,1	23,7	26,9	29,1	31,0	34,0	36,1
15	19,3	22,3	25,0	28,3	30,6	32,5	35,5	37,7
16	20,5	23,5	26,3	29,6	32,0	34,0	37,0	39,2
17	21,6	24,8	27,6	31,0	33,4	35,5	38,5	40,8
18	22,8	26,0	28,9	32,3	34,8	37,0	40,0	42,3
19	23,9	27,3	30,1	33,7	36,2	38,5	41,5	43,8
20	25,0	28,4	31,4	35,0	37,6	40,0	43,0	45,3
21	26,2	29,6	32,7	36,3	38,9	41,5	44,5	46,8
22	27,3	30,8	33,9	38,7	40,3	42,5	46,0	48,3
23	28,4	32,0	35,2	39,0	41,6	44,0	47,5	49,7
24	29,6	33,2	36,4	40,3	43,0	45,5	48,5	51,2
25	30,7	34,4	37,7	41,6	44,3	47,0	50,0	52,6
26	31,8	35,6	38,9	42,9	45,6	48,0	51,5	54,1
27	32,9	36,7	40,1	44,1	47,0	49,5	53,0	55,5
28	34,0	37,9	41,3	45,4	48,3	51,0	54,5	56,9
29	35,1	39,1	42,6	46,7	49,6	52,5	56,0	58,3
30	36,3	40,3	43,8	48,0	50,9	54,0	57,5	59,7

Закінчення таблиці 5.

Значення величини χ_1^2 залежно від імовірності $P(\chi^2 > \chi_1^2)$

Число ступенів свободи, k	$P(\chi^2 > \chi_1^2)$							
	0,99	0,98	0,95	0,90	0,80	0,70	0,50	0,30
1	0,00016	0,0006	0,39	0,016	0,064	0,148	0,455	1,07
2	0,020	0,040	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,41
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,66
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65	2,19	3,36	4,9
5	0,55	0,76	1,14	1,61	2,34	3,0	4,35	6,1
6	0,87	1,13	1,63	2,2	3,07	3,83	5,35	7,2
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35	8,4
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34	9,5
9	2,09	2,563	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34	10,7
10	2,56	3,06	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34	11,8
11	3,1	3,6	4,6	5,6	7,0	8,1	10,3	12,9
12	3,6	4,2	5,2	6,3	7,8	9,0	11,3	14,0
13	4,1	4,8	5,9	7,0	8,6	9,9	12,3	15,1
14	4,7	5,4	6,6	7,8	9,5	10,8	13,3	16,2
15	5,2	6,0	7,3	8,5	10,3	11,7	14,3	17,3
16	5,8	6,6	8,0	9,3	11,2	12,6	15,3	18,4
17	6,4	7,3	8,7	10,1	12,2	13,5	16,3	19,5
18	7,0	7,9	9,4	10,9	12,9	14,4	17,3	20,6
19	7,6	8,6	10,1	11,7	13,7	15,4	18,3	21,7
20	8,3	9,2	10,9	12,4	14,6	16,3	19,3	22,8
21	8,9	9,9	11,6	13,2	15,4	17,2	20,3	23,9
22	9,5	10,6	12,3	14,0	16,3	18,1	21,3	24,9
23	10,2	10,3	13,1	14,8	17,2	19,0	22,3	26,0
24	10,9	12,0	13,8	15,7	18,1	19,9	23,3	27,1
25	11,5	12,7	14,6	16,5	18,9	20,9	24,3	28,1
26	12,2	13,4	15,4	17,3	19,8	21,8	25,3	29,3
27	12,9	14,1	16,2	18,1	20,7	22,7	26,3	30,3
28	13,6	14,8	16,9	18,9	21,6	23,6	27,3	31,4
29	14,3	15,6	17,7	19,8	22,5	24,6	28,3	32,5
30	15,0	16,3	18,5	20,6	23,4	25,5	29,3	33,5

Таблиця 6. Критичні точки розподілу стюдента (t-розподілу)

Число ступенів свободи, k	Рівень значущості α						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	3,08	6,31	12,7	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,79	2,80	3,09	3,75
25	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,08	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,67
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

Таблиця 7. Критичні точки розподілу χ^2

Число ступенів свободи, k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,999
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	60,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблиця 8. Таблиця значень функції e^{-x}

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,0	1,0000	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139
0,1	0,9048	0,8958	0,8869	0,8781	0,8694	0,8607	0,8521	0,8437	0,8353	0,8270
0,2	0,8187	0,8106	0,8025	0,7945	0,7866	0,7788	0,7711	0,7634	0,7558	0,7483
0,3	0,7408	0,7334	0,7261	0,7189	0,7118	0,7047	0,6977	0,6907	0,6839	0,6771
0,4	0,6703	0,6637	0,6570	0,6505	0,6440	0,6376	0,6313	0,6250	0,6188	0,6126
0,5	0,6065	0,6005	0,5945	0,5886	0,5827	0,5769	0,5712	0,5655	0,5599	0,5543
0,6	0,5488	0,5434	0,5379	0,5326	0,5273	0,5220	0,5169	0,5117	0,5066	0,5016
0,7	0,4966	0,4916	0,4868	0,4819	0,4771	0,4724	0,4677	0,4630	0,4584	0,4538
0,8	0,4493	0,4449	0,4404	0,4360	0,4317	0,4274	0,4232	0,4190	0,4148	0,4107
0,9	0,4066	0,4025	0,3985	0,3946	0,3906	0,3867	0,3829	0,3791	0,3753	0,3716
1,0	0,3679	0,3642	0,3606	0,3570	0,3535	0,3499	0,3465	0,3430	0,3396	0,3362
1,1	0,3329	0,3296	0,3263	0,3230	0,3198	0,3166	0,3135	0,3104	0,3073	0,3042
1,2	0,3012	0,2982	0,2952	0,2923	0,2894	0,2865	0,2837	0,2808	0,2780	0,2753
1,3	0,2725	0,2698	0,2671	0,2645	0,2618	0,2592	0,2567	0,2541	0,2516	0,2491
1,4	0,2466	0,2441	0,2417	0,2393	0,2369	0,2346	0,2322	0,2299	0,2276	0,2254
1,5	0,2231	0,2209	0,2187	0,2165	0,2144	0,2122	0,2101	0,2080	0,2060	0,2039
1,6	0,2019	0,1999	0,1979	0,1959	0,1940	0,1920	0,1901	0,1882	0,1864	0,1845
1,7	0,1827	0,1809	0,1791	0,1773	0,1755	0,1738	0,1720	0,1703	0,1686	0,1670
1,8	0,1653	0,1637	0,1620	0,1604	0,1588	0,1572	0,1557	0,1541	0,1526	0,1511
1,9	0,1496	0,1481	0,1466	0,1451	0,1437	0,1423	0,1409	0,1395	0,3181	0,1367
2,0	0,1353	0,1340	0,1327	0,1313	0,1300	0,1287	0,1275	0,1262	0,1249	0,1237
2,1	0,1225	0,1212	0,1200	0,1188	0,1177	0,1165	0,1153	0,1142	0,1130	0,1119
2,2	0,1108	0,1097	0,1086	0,1075	0,1065	0,1054	0,1044	0,1033	0,1023	0,1013
2,3	0,1003	0,0993	0,0983	0,0973	0,0963	0,0954	0,0944	0,0935	0,0926	0,0916
2,4	0,0907	0,0898	0,0889	0,0880	0,0872	0,0863	0,0854	0,0846	0,0837	0,0829
2,5	0,0821	0,0813	0,0805	0,0797	0,0789	0,0781	0,0773	0,0765	0,0758	0,0750
2,6	0,0743	0,0735	0,0728	0,0721	0,0714	0,0707	0,0699	0,0693	0,0686	0,0679
2,7	0,0672	0,0665	0,0659	0,0652	0,0646	0,0639	0,0633	0,0627	0,0620	0,0614
2,8	0,0608	0,0602	0,0596	0,0590	0,0584	0,0578	0,0573	0,0567	0,0561	0,0556
2,9	0,0550	0,0545	0,0539	0,0534	0,0529	0,0523	0,0518	0,0513	0,0508	0,0503
3,0	0,0498	0,0493	0,0488	0,0483	0,0478	0,0474	0,0469	0,0464	0,0460	0,0455
3,1	0,0450	0,0446	0,0442	0,0437	0,0433	0,0429	0,0424	0,0420	0,0416	0,0412
3,2	0,0408	0,0404	0,0400	0,0396	0,0392	0,0388	0,0384	0,0380	0,0376	0,0373
3,3	0,0369	0,0365	0,0362	0,0358	0,0354	0,0351	0,0347	0,0344	0,0340	0,0337
3,4	0,0334	0,0330	0,0327	0,0324	0,0321	0,0317	0,0314	0,0311	0,0308	0,0305
3,5	0,0302	0,0299	0,0296	0,0293	0,0290	0,0287	0,0284	0,0282	0,0279	0,0276
3,6	0,0273	0,0271	0,0268	0,0265	0,0263	0,0260	0,0257	0,0255	0,0252	0,0250
3,7	0,0247	0,0245	0,0242	0,0240	0,0238	0,0235	0,0233	0,0231	0,0228	0,0226
3,8	0,0224	0,0221	0,0219	0,0217	0,0215	0,0213	0,0211	0,0209	0,0207	0,0204
3,9	0,0202	0,0200	0,0198	0,0196	0,0194	0,0193	0,0191	0,0189	0,0187	0,0185
4,0	0,0183	0,0181	0,0180	0,0178	0,0176	0,0174	0,0172	0,0171	0,0169	0,0167
4,1	0,0166	0,0164	0,0162	0,0161	0,0159	0,0158	0,0156	0,0155	0,0153	0,0151
4,2	0,0150	0,0148	0,0147	0,0146	0,0144	0,0143	0,0141	0,0140	0,0138	0,0137
4,3	0,0136	0,0134	0,0133	0,0132	0,0130	0,0129	0,0128	0,0127	0,0125	0,0124
4,4	0,0123	0,0122	0,0120	0,0119	0,0118	0,0117	0,0116	0,0114	0,0113	0,0112
4,5	0,0111	0,0110	0,0109	0,0108	0,0107	0,0106	0,0105	0,0104	0,0103	0,0102
4,6	0,0101	0,0100	0,0099	0,0098	0,0097	0,0096	0,0095	0,0094	0,0093	0,0092
4,7	0,0091	0,0090	0,0089	0,0088	0,0087	0,0087	0,0086	0,0085	0,0084	0,0083
4,8	0,0082	0,0081	0,0081	0,0080	0,0079	0,0078	0,0078	0,0077	0,0076	0,0075
4,9	0,0074	0,0074	0,0073	0,0072	0,0072	0,0071	0,0070	0,0069	0,0069	0,0068

Навчальне видання

Автори: **Пукальський** *Іван Дмитрович*
Перун *Галина Михайлівна*
Лусте *Ірина Петрівна*
Яшан *Богдан Олегович*

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА: ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА (ВИБРАНІ РОЗДІЛИ)

Навчально-методичний посібник

Літературний редактор О.В. Лупул

Підписано до друку 26.01.2024. Формат 60х84/16.
Електронне видання.
Ум.-друк. арк. 18,3. Обл.-вид. арк. 19,7. Зам. Н-005.
Видавництво та друкарня Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича
58002, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2
e-mail: ruta@chnu.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК №891 від 08.04.2002 р.

ЧНУ РУТА

ISBN 978-966-423-827-1