УДК 517.929

©2016 р. І.І. Клевчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОГОВИДИ І ПРИНЦИП ЗВЕДЕННЯ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Доведено принцип зведення для дослідження стійкості нульового розв'язку нелінійного диференціального рівняння нейтрального типу в критичному випадку. Задача зводиться до дослідження нульового розв'язку системи звичайних диференціальних рівнянь, побудованої за допомогою методу інтегральних многовидів.

We prove the reduction principle for investigating the stability of the zero solution of a nonlinear differential equation of neutral type in the critical case. The problem is reduced to the investigation of the zero solution of an ordinary differential equation constructed by the method of integral manifolds.

Для звичайних диференціальних рівнянь питання існування і стійкості інтегральних многовидів розглядалися, зокрема, в працях [1, 2], а для диференціально-функціональних рівнянь – в [3 – 5]. Принцип зведення для дослідження стійкості автономних систем було розвинуто в [4 – 11], причому доведення цього принципу для автономних рівнянь нейтрального типу в [5, 11] базується на вивченні інтегральних многовидів. У цій статті досліджується стійкість тривіального розв'язку неавтономної системи рівнянь нейтрального типу в критичному випадку. На відміну від статті [3] тут умова Ліпшиця для оператора F записується в іншій формі.

1. Перетворення вихідної задачі. Нехай $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний простір з нормою $|x| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ – простір неперервних на $[-\Delta, 0]$ функцій із значеннями в $\mathbb{R}^n$ і нормою $|\varphi| = \sup\limits_{-\Delta \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|$.

Розглянемо диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}\left[D(x_t) - G(t, x_t)\right] = L(x_t) + F(t, x_t), \quad (1)$$

де x_t – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$; $D : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; $L : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; D і L – лінійні неперервні оператори; $G : \mathbb{R}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; $F : \mathbb{R}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$; оператори G і F неперервні відносно t. Оператор $G(t, \varphi)$ неперервно диференційовний відносно t і φ. Згідно з теоремою Рісса оператори $D(\varphi)$ і $L(\varphi)$ можна зобразити за допомогою інтеграла Стілтьєса:

$$D(\varphi) = \varphi(0) - \int\limits_{-\Delta}^{0} \left[d\mu(\theta)\right] \varphi(\theta),$$

$$L(\varphi) = \int\limits_{-\Delta}^{0} \left[d\eta(\theta)\right] \varphi(\theta),$$

де $\mu(\theta)$, $\eta(\theta)$ – матриці-функції обмеженої варіації.

Припустимо, що функція $\mu(\theta)$ не містить сингулярної компоненти і повна варіація $V_{-s}^{0}[\mu] \to 0$ при $s \to 0$. Нехай існує стала $\nu > 0$ така, що

$$G(t, 0) = 0,\ F(t, 0) = 0,\ |G(t, \varphi)- -G(t, \varphi')| \leq \nu|\varphi - \varphi'|,\ |F(t, \varphi) - F(t, \varphi')| \leq \leq p(t)|\varphi - \varphi'|,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} \int\limits_{t}^{t+\tau_0} p(\tau)d\tau \leq \nu\tau_0, \quad (2)$$

де $\tau_0 > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbb{C}$, $\varphi' \in \mathbb{C}$.

Поряд з (1) розглянемо лінійне рівняння

$$\frac{d}{dt}D(\bar{x}_t) = L(\bar{x}_t), \quad (3)$$

позначимо через $\bar{x}_t(\varphi)$ його розв'язок з початковою функцією $\varphi \in \mathbb{C}$. Визначимо оператор зсуву за розв'язками рівняння (3) співвідношенням $T(t)\varphi = \bar{x}_t(\varphi)$. Сім'я $\{T(t), t \geq 0\}$ утворює сильно неперервну півгрупу. Твірний оператор півгрупи є оператором диференціювання $A\varphi(\theta) = \dot{\varphi}(\theta)$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$, із областю визначення

$$D(A) = \Bigg\{\varphi \in \mathbb{C} : \dot{\varphi} \in \mathbb{C}, \dot{\varphi}(0) =$$

$$= \int_{-\Delta}^{0} [d\mu(\theta)]\dot{\varphi}(\theta) + \int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta)]\varphi(\theta)\Bigg\}.$$

Характеристичне рівняння для рівняння (3) набере вигляду

$$det\ \Lambda(\lambda) = 0, \quad \Lambda(\lambda) = \lambda\Bigg[E -$$

$$- \int_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(\theta)\Bigg] - \int_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta). \qquad (4)$$

Позначимо

$$b = \sup\Bigg\{Re\lambda :$$

$$det\left(E - \int_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(\theta)\right) = 0\Bigg\}.$$

Нехай $b < 0$. Тоді в півплощині $Re\lambda \geq -\alpha = b/2$ міститься скінченна кількість коренів рівняння (4). Припустимо, що рівняння (4) має l коренів на уявній осі (із врахуванням їх кратності), а решта коренів лежать у півплощині $Re\lambda < -\alpha - \beta_1$, де $0 < \beta_1 < \alpha$. Позначимо через $\mathbb{P}$ власний підпростір в $\mathbb{C}$, породжений розв'язками рівняння (3), що відповідають кореням на уявній осі. Нехай $\Phi = \Phi(\theta) = (\varphi_1(\theta), ..., \varphi_l(\theta))$ – $n \times l$ –матриця, стовбці якої є лінійно незалежними розв'язками рівняння (3), що належать $\mathbb{P}$.

Спряжене до (3) рівняння набере вигляду

$$\frac{d}{ds}\left[v(s) - \int_{-\Delta}^{0} v(s-\theta)d\mu(\theta)\right] =$$

$$= -\int_{-\Delta}^{0} v(s-\theta)d\eta(\theta). \qquad (5)$$

Нехай $\varphi \in \mathbb{C}[-\Delta, 0]$, $\psi \in \mathbb{C}[0, \Delta]$, $\dot{\psi} \in \mathbb{C}[0, \Delta]$.

Розглянемо білінійний функціонал [4, 5]

$$(\psi, \varphi) = \psi(0)D(\varphi) + \int_{-\Delta}^{0}\int_{0}^{\theta} \dot{\psi}(\xi - \theta)[d\mu(\theta)] \times$$

$$\times \varphi(\xi)d\xi - \int_{-\Delta}^{0}\int_{0}^{\theta} \psi(\xi - \theta)[d\eta(\theta)]\varphi(\xi)d\xi.$$

Позначимо через $\mathbb{P}^*$ підпростір розв'язків рівняння (5), спряжений до $\mathbb{P}$, а через $\Psi(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \Delta$, – базис в $\mathbb{P}^*$. Тоді матриця (Ψ, Φ) невироджена і її можна вибрати одиничною. Кожний елемент $x_t \in \mathbb{C}$ можна зобразити у вигляді $x_t = \Phi u(t) + w_t$, $u(t) = (\Psi, x_t)$, $w_t = x_t - \Phi u(t)$, $u(t) \in \mathbb{R}^l$, $w_t \in \mathbb{Q}$. Рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{d}{dt}\left[u(t) - \Psi(0)G(t, x_t)\right] = Bu(t) + \Psi(0) \times$$

$$\times F(t, x_t), \ w_t = T(t-\sigma)[w_\sigma - X_0^Q G(\sigma, x_\sigma)] +$$

$$+ X_0^Q G(t, x_t) + \int_{\sigma}^{t} T(t-s)X_0^Q F(s, x_s)ds - \qquad (6)$$

$$- \int_{\sigma}^{t} d_s\left[T(t-s)X_0^Q\right] G(s, x_s),$$

де X_0^Q – проекція на підпростір $\mathbb{Q}$ функції $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \leq \theta < 0$, $X_0(0) = E$; B – $l \times l$ – матриця, власні значення якої збігаються із згаданими вище уявними коренями.

Правильні нерівності [4, 5, 12]

$$|T(t)\varphi| \leq K_1 \exp[-(\alpha + \beta_1)t]|\varphi|, \ \varphi \in \mathbb{Q},$$

$$|T(t)X_0^Q| + \int_{0}^{1} |d_s T(t-s)X_0^Q| \leq \qquad (7)$$

$$\leq K_1 \exp[-(\alpha + \beta_1)t],$$

де $t \geq 0$, $K_1 > 0$.

Згідно з припущенням відносно власних значень матриці B правильна також оцінка

$$|\exp(Bt)| \leq K\exp[(-\alpha+\beta)t], \qquad (8)$$

де $t \leq 0,\ K > 0,\ 0 < \beta < \alpha$.

2. Існування інтегральних многовидів.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (2). Тоді знайдеться таке $\nu_0 > 0$, що при $\nu < \nu_0$ існує функція $h(t,u) \in \mathbb{Q}$, що визначена на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^l$, задовольняє умови*

$$h(t,0)=0,\ |h(t,u)-h(t,u')| \leq 0,5|u-u'| \quad (9)$$

і така, що множина

$$S^- = \{(t,\varphi):\ t\in\mathbb{R},\ \varphi=\Phi u+\zeta,\ u\in\mathbb{R}^l,$$
$$\zeta=h(t,u),\ \zeta\in\mathbb{Q}\}$$

є інтегральним многовидом рівняння (1).

Для кожного розв'язку $x_t = \Phi u(t) + h(t,u(t))$ рівняння (1), що належить S^-, правильна оцінка

$$|x_t| \leq 2K|\Phi||u(\sigma)|\exp[-\alpha(t-\sigma)],\ t\leq\sigma. \qquad (10)$$

Доведення. Поряд із системою (6) розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$u(t) = e^{B(t-\sigma)}[c-\Psi(0)G(\sigma,x_\sigma)]+$$
$$+\Psi(0)G(t,x_t) - \int_t^\sigma e^{B(t-s)}\Psi(0)F(s,x_s)ds-$$
$$-B\int_t^\sigma e^{B(t-s)}\Psi(0)G(s,x_s)ds,\ w_t = \qquad (11)$$
$$= X_0^Q G(t,x_t) + \int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^Q F(s,x_s)ds-$$
$$-\int_{-\infty}^t d_s\left[T(t-s)X_0^Q\right]G(s,x_s),\ t\leq\sigma.$$

Помноживши перше рівняння системи (11) на Φ и додаючи ці рівності, одержимо

$$x_t = \Phi e^{B(t-\sigma)}[c-\Psi(0)G(\sigma,x_\sigma)] + X_0G(t,x_t)+$$
$$+\int_{-\infty}^t T(t-s)X_0^Q F(s,x_s)ds - \int_{-\infty}^t d_s[T(t-s)\times$$
$$\times X_0^Q]G(s,x_s) - \Phi\int_t^\sigma e^{B(t-s)}\Psi(0)F(s,x_s)ds-$$
$$-\Phi B\int_t^\sigma e^{B(t-s)}\Psi(0)G(s,x_s)ds. \qquad (12)$$

Навпаки, із рівняння (12) можна одержати систему рівнянь (11).

Існування розв'язку рівняння (12) доведемо за допомогою методу послідовних наближень

$$x_t^{(0)}=0,\ x_t^{(n+1)} = \Phi e^{B(t-\sigma)}[c-\Psi(0)G(\sigma,x_\sigma^{(n)})]+$$
$$+X_0G(t,x_t^{(n)}) - \Phi\int_t^\sigma e^{B(t-s)}\Psi(0)F(s,x_s^{(n)})ds-$$
$$(13)$$
$$-\Phi B\int_t^\sigma e^{B(t-s)}\Psi(0)G(s,x_s^{(n)})ds+\int_{-\infty}^t T(t-s)\times$$
$$\times X_0^Q F(s,x_s^{(n)})ds - \int_{-\infty}^t d_s\left[T(t-s)X_0^Q\right]\times$$
$$\times G(s,x_s^{(n)}),\ n\in\{0,1,2,...\}.$$

Індукцією доведемо, що правильна нерівність

$$|x_t^{(m)} - x_t^{(m-1)}| \leq K|\Phi|(\nu\gamma)^{m-1}|c|e^{-\alpha(t-\sigma)}, \qquad (14)$$

де $\gamma = |\Phi||\Psi(0)|K + 1 + |\Phi||\Psi(0)|K\tau_0/(1-\exp(-\beta\tau_0)) + |\Phi||\Psi(0)||B|K/\beta + K_1\tau_0/(1-\exp(-\beta_1\tau_0)) + K_1/(\exp(\beta_1)-1)$, $m\in\{1,2,...\}$, $t\leq\sigma$.

При $m=1$ нерівність (14) випливає із (8).

Нехай нерівність (14) вірна при $m=n$. Тоді, враховуючи (2), (7), (8), одержимо

$$|x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}| \leq |e^{B(t-\sigma)}||\Phi||\Psi(0)|\nu|x_\sigma^{(n)}-$$
$$-x_\sigma^{(n-1)}| + \nu|x_t^{(n)} - x_t^{(n-1)}| + |\Phi|\int_t^\sigma |e^{B(t-s)}|\times$$
$$\times|\Psi(0)|(p(s)+\nu|B|)|x_s^{(n)} - x_s^{(n-1)}|ds+$$

$$+\int_{-\infty}^{t}|T(t-s)X_0^Q|p(s)|x_s^{(n)}-x_s^{(n-1)}|ds+$$

$$+\int_{-\infty}^{t}|d_sT(t-s)X_0^Q|\nu|x_s^{(n)}-x_s^{(n-1)}|\leq$$

$$\leq K|\Phi|(\nu\gamma)^n|c|\exp[-\alpha(t-\sigma)].$$

Тому нерівність (14) правильна при $m=n+1$, отже, вона вірна при всіх натуральних m.

Із (14) випливає, що при $\nu\gamma<1$ послідовність функцій $x_t^{(n)}$ збігається до деякої функції $x_t(\sigma,c)$, яка є розв'язком рівняння (12). Вибираючи в рівнянні (12) замість c іншу сталу c', одержимо розв'язок $x_t(\sigma,c')$. Аналогічно нерівності (14) можна довести, що при $\nu\gamma<0,5$ правильна нерівність

$$|x_t^{(m)}(\sigma,c)-x_t^{(m)}(\sigma,c')|\leq 2K|\Phi||c-c'|\times$$

$$\times\exp[-\alpha(t-\sigma)],\ m\in\{1,2,...\},\ t\leq\sigma.$$

Отже,

$$|x_t(\sigma,c)-x_t(\sigma,c')|\leq 2K|\Phi||c-c'|\times$$

$$\times\exp[-\alpha(t-\sigma)],\ t\leq\sigma. \qquad (15)$$

Підставляючи в (11) $t=\sigma$, позначимо

$$h(\sigma,c)=x_\sigma(\sigma,c)-\Phi c=X_0^QG(\sigma,x_\sigma(\sigma,c))+$$

$$+\int_{-\infty}^{\sigma}T(\sigma-s)X_0^QF(s,x_s(\sigma,c))ds-$$

$$-\int_{-\infty}^{\sigma}d_s\left[T(\sigma-s)X_0^Q\right]G(s,x_s(\sigma,c)).$$

Доведемо оцінку (9):

$$|h(\sigma,c)-h(\sigma,c')|\leq|X_0^Q|\nu|x_\sigma(\sigma,c)-$$

$$-x_\sigma(\sigma,c')|+\int_{-\infty}^{\sigma}K_1e^{-(\alpha+\beta_1)(\sigma-s)}p(s)|x_s(\sigma,c)-$$

$$-x_s(\sigma,c')|ds+\int_{-\infty}^{\sigma}|d_sT(\sigma-s)X_0^Q|\nu|x_s(\sigma,c)-$$

$$-x_s(\sigma,c')|\leq\gamma_1|c-c'|,\ \gamma_1=2\nu|X_0^Q|K|\Phi|+$$

$$+2\nu K_1K|\Phi|\tau_0/(1-\exp(-\beta_1\tau_0))+$$

$$+2\nu K_1K|\Phi|/(\exp(\beta_1)-1).$$

При досить малому ν маємо $\gamma_1\leq 0,5$, звідки випливає нерівність (9). Оцінка (10) випливає із (15), якщо підставити $c'=0$. Теорема доведена.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (2). Тоді знайдеться таке $\nu_1>0$, що при $\nu<\nu_1$ існує функція $r(t,\zeta)\in\mathbb{R}^l$, що визначена на $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$, задовольняє умови*

$$r(t,0)=0,\quad |r(t,\zeta)-r(t,\zeta')|\leq 0,5|\zeta-\zeta'|$$

і така, що множина

$$S^+=\{(t,\varphi):t\in\mathbb{R},\quad \varphi=\Phi u+\zeta,\quad \zeta\in\mathbb{Q},$$

$$u=r(t,\zeta),\quad u\in\mathbb{R}^l\}$$

є інтегральним многовидом рівняння (1). Для кожного розв'язку $x_t=\Phi r(t,w_t)+w_t$ рівняння (1), що належить S^+, правильна оцінка

$$|x_t|\leq 2K_1\exp[-\alpha(t-\sigma)]|w_\sigma|,\quad t\geq\sigma.$$

Теорема 2 доводиться аналогічно теоремі 1.

3. Принцип зведення. Перейдемо до встановлення принципу зведення для диференціально – функціонального рівняння (1). Для цього, аналогічно [2], використаємо побудовані інтегральні многовиди і доведемо, що стійкість рівняння (1) рівносильна стійкості деякої скінченновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь.

Нехай $t=\sigma$ – деяке число (початковий момент). Будемо розглядати тепер інтегральний многовид S^- при $t\geq\sigma$ і покажемо, що S^- стійкий в тому розумінні, що він притягує до себе всі близькі розв'язки x_t $(t\geq\sigma)$ за експоненціальним законом.

Поведінка розв'язків рівняння (1) на інтегральному многовиді S^- описується рівнянням

$$\frac{d}{dt}\left[y-\Psi(0)G(t,\Phi y+h(t,y))\right]=By+$$

$$+\Psi(0)F(t,\Phi y+h(t,y)). \qquad (16)$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови (2), де $\nu < \min(\nu_0, \nu_1)$. Якщо $x_t = \Phi u(t) + w_t$ $(t \geq \sigma)$ – довільний розв'язок рівняння (1) з початковою функцією x_σ при $t = \sigma$, то існує розв'язок $\xi_t = \Phi y(t) + h(t, y(t))$, що належить S^- і такий, що правильна оцінка*

$$|x_t - \xi_t| \leq 2K_1|w_\sigma - h(\sigma, y(\sigma))| \exp[-\alpha(t-\sigma)],$$

$$t \geq \sigma.$$

Теорема 3 доводиться аналогічно теоремі 3 статті [3].

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (2), де $\nu < \min(\nu_0, \nu_1)$. Якщо нульовий розв'язок рівняння (16) стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок рівняння (1) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.*

Теорема 4 доводиться аналогічно теоремі 4 статті [3].

4. Побудова інтегральних многовидів і дослідження стійкості розв'язків у критичному випадку. В багатьох випадках для застосування теореми 4 досить визначити функцію $h(\sigma, c)$ наближено. Нехай, наприклад,

$$h_n(\sigma, c) = x_\sigma^{(n+1)}(\sigma, c) - \Phi c, \ n \in \{0, 1, 2, ...\},$$

де $x_\sigma^{(n+1)}(\sigma, c)$ знаходиться за допомогою рекурентної формули (13). В частковому випадку, нульове і перше наближення мають вигляд

$$h_0(\sigma, c) = 0, \quad h_1(\sigma, c) = \int_{-\infty}^{\sigma} T(\sigma - s) X_0^Q \times$$

$$\times F(s, \Phi e^{B(s-\sigma)} c) ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\sigma} T(\sigma - s) X_0^Q \frac{d}{ds} G(s, \Phi e^{B(s-\sigma)} c) ds.$$

Теорема 5. *Нехай виконуються умови (2), причому $\nu\gamma < 1$, $\gamma = |\Phi||\Psi(0)|K + 1 + |\Phi||\Psi(0)|K\tau_0/(1 - \exp(-\beta\tau_0)) + |\Phi||\Psi(0)||B|K/\beta + K_1\tau_0/(1 - \exp(-\beta_1\tau_0)) + K_1/(\exp(\beta_1) - 1)$.*

Тоді виконується нерівність

$$|h(\sigma, c) - h_n(\sigma, c)| \leq \frac{K|\Phi||c|}{1 - \nu\gamma} (\nu\gamma)^{n+1},$$

$$n \in \{0, 1, 2, ...\}.$$

Теорема 5 доводиться аналогічно теоремі 5 статті [3].

Якщо функції $F(t, \Phi y)$, $G(t, \Phi y)$ аналітичні відносно y в деякому околі точки $y = 0$ і квазіперіодичні відносно t, то у деяких випадках функцію $h_1(\sigma, c)$ можна явно побудувати [3].

Теорема 6. *Нехай власні значення матриці B мають прості елементарні дільники. Припустимо, що при $|u| \leq \rho$ виконуються умови (2), а також умови*

$$|F(t, \Phi u)| \leq p(t)|u|^m, \quad |G(t, \Phi u)| \leq M|u|^m,$$

$$m \geq 2, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+\tau_0} p(\tau) d\tau \leq M\tau_0,$$

де $\tau_0 > 0$, $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^l$.

Тоді знайдеться стала $\bar{M} > 0$ така, що виконується нерівність

$$|h(\sigma, c)| \leq \bar{M}|c|^m, \ |c| \leq \rho.$$

Доведення. Оскільки власні значення матриці B мають прості елементарні дільники, то нерівність (8) можна переписати у вигляді $|\exp(Bt)| \leq K$, $t \leq 0$.

Використовуючи (13), одержимо оцінку

$$|x_t^{(2)} - x_t^{(1)}| \leq |\Phi||\Psi(0)|MK|c|^m + MK^m|c|^m +$$
$$+ K|\Phi||\Psi(0)|MK^m|c|^m e^{\alpha(\sigma-t)}\tau_0/(1- \tag{17}$$
$$- \exp(-\alpha\tau_0)) + K|\Phi||B||\Psi(0)|MK^m|c|^m \times$$
$$\times e^{\alpha(\sigma-t)}/\alpha + K_1MK^m|c|^m\tau_0/(1 - \exp(-(\alpha +$$
$$+ \beta_1)\tau_0)) + K_1MK^m|c|^m/(e^{\alpha+\beta_1} - 1) \leq$$
$$\leq M_1|c|^m e^{\alpha(\sigma-t)},$$

де

$$M_1 = |\Phi||\Psi(0)|MK + |\Phi||\Psi(0)|MK^{m+1}\tau_0/(1-$$
$$- \exp(-\alpha\tau_0)) + |\Phi||B||\Psi(0)|MK^{m+1}/\alpha +$$
$$+ MK^m + K_1MK^m/(e^{\alpha+\beta_1} - 1) +$$

$$+K_1MK^m\tau_0/(1-\exp(-(\alpha+\beta_1)\tau_0)).$$

Індукцією доведемо нерівність

$$|x_t^{(k)}-x_t^{(k-1)}|\le M_1 2^{2-k}|c|^m e^{\alpha(\sigma-t)},$$
$$k\in\{2,3,...\},\quad t\le\sigma. \tag{18}$$

При $k=2$ нерівність (18) випливає із (17).

Нехай нерівність (18) виконується при $k=n$. Тоді, враховуючи (2), (7), одержимо

$$|x_t^{(n+1)}-x_t^{(n)}|\le|\Phi|K|\Psi(0)|\nu|x_\sigma^{(n)}-x_\sigma^{(n-1)}|+$$
$$+\nu|x_t^{(n)}-x_t^{(n-1)}|+|\Phi|\int_t^\sigma(p(s)+\nu|B|)K\times$$
$$\times|\Psi(0)||x_s^{(n)}-x_s^{(n-1)}|ds+\int_{-\infty}^t K_1e^{(\alpha+\beta_1)(s-t)}\times$$
$$\times p(s)|x_s^{(n)}-x_s^{(n-1)}|ds+\int_{-\infty}^t|d_sT(t-s)X_0^Q|\nu\times$$
$$\times|x_s^{(n)}-x_s^{(n-1)}|\le\nu M_2M_1 2^{2-n}|c|^m e^{\alpha(\sigma-t)},$$

де

$$M_2=|\Phi|K|\Psi(0)|+1+|\Phi|K|\Psi(0)|\tau_0/(1-$$
$$-\exp(-\alpha\tau_0))+|\Phi||B|K|\Psi(0)|/\alpha+$$
$$+K_1/(\exp(\beta_1)-1)+K_1\tau_0/(1-\exp(-\beta_1\tau_0)).$$

При досить малому ν виконується оцінка $\nu M_2<0,5$, тому нерівність (18) правильна при $k=n+1$, отже, вона виконується при $k\in\{2,3,...\}$.

Підставляючи в нерівності (18) $t=\sigma$ і сумуючи одержані нерівності відносно k від 2 до p, одержимо оцінку

$$|x_\sigma^{(p)}-x_\sigma^{(1)}|\le 2M_1|c|^m.$$

Переходячи в останній нерівності до границі при $p\to\infty$, знаходимо

$$|h(\sigma,c)|=|x_\sigma(\sigma,c)-\Phi c|\le 2M_1|c|^m.$$

Теорема доведена.

Теорема 7. *Нехай власні значення матриці B мають прості елементарні дільники. Припустимо, що при $|u|\le\rho$ виконуються умови (2), а також умови*

$$|F(t,x_t^{(2)})-F(t,x_t^{(1)})|\le p(t)|c|^{2m-1},$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+\tau_0}p(\tau)d\tau\le M\tau_0,\ |G(t,x_t^{(2)})- \tag{19}$$
$$-G(t,x_t^{(1)})|\le M|c|^{2m-1},\ m\ge 2,\ |c|\le\rho,$$

де $\tau_0>0$, $t\in\mathbb{R}$.

Тоді знайдеться стала $\bar M>0$ така, що виконується оцінка

$$|h(\sigma,c)-h_1(\sigma,c)|\le\bar M|c|^{2m-1},\quad |c|\le\rho.$$

Доведення. Враховуючи (19), одержимо нерівність

$$|x_t^{(3)}-x_t^{(2)}|\le|\Phi|K|\Psi(0)||G(\sigma,x_\sigma^{(2)})-$$
$$-G(\sigma,x_\sigma^{(1)})|+|G(t,x_t^{(2)})-G(t,x_t^{(1)})|+$$
$$+|\Phi|\int_t^\sigma K|\Psi(0)||F(s,x_s^{(2)})-F(s,x_s^{(1)})|ds+$$
$$+|B||\Phi|\int_t^\sigma K|\Psi(0)||G(s,x_s^{(2)})-G(s,x_s^{(1)})|ds+$$
$$+\int_{-\infty}^t K_1e^{-(\alpha+\beta_1)(t-s)}|F(s,x_s^{(2)})-F(s,x_s^{(1)})|ds+ \tag{20}$$
$$+\int_{-\infty}^t|d_sT(t-s)X_0^Q||G(s,x_s^{(2)})-G(s,x_s^{(1)})|\le$$
$$\le M_1|c|^{2m-1}e^{\alpha(\sigma-t)},$$

де

$$M_1=|\Phi|K|\Psi(0)|M+|\Phi|K|\Psi(0)|M\tau_0/(1-$$
$$-\exp(-\alpha\tau_0))+|\Phi|K|\Psi(0)|M|B|/\alpha+M+$$
$$+K_1M\tau_0/(1-\exp(-(\alpha+\beta_1)\tau_0))+$$
$$+K_1M/(\exp(\alpha+\beta_1)-1).$$

Виконується нерівність

$$|x_t^{(k)}-x_t^{(k-1)}|\le M_1 2^{3-k}|c|^{2m-1}e^{\alpha(\sigma-t)},$$
$$k\in\{3,4,...\},\quad t\le\sigma. \tag{21}$$

При $k=3$ нерівність (21) випливає із (20). Аналогічно можна переконатися, що нерівність (21) виконується при всіх k.

Якщо в (21) підставити $t = \sigma$ і просумувати по k від 3 до p, то одержимо оцінку

$$|x_\sigma^{(p)} - x_\sigma^{(2)}| \leq 2M_1|c|^{2m-1}.$$

Переходячи в цій нерівності до границі при $p \to \infty$, знаходимо

$$|h(\sigma, c) - h_1(\sigma, c)| = |x_\sigma(\sigma, c) - x_\sigma^{(2)}| \leq \\ \leq 2M_1|c|^{2m-1}.$$

Теорема доведена.

Теореми 5 – 7 дозволяють обґрунтувати алгоритм дослідження стійкості нульового розв'язку рівняння (1) у критичному випадку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. – М.: Наука, 1973. – 512 с.

2. *Плисс В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.

3. *Клевчук И.И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 4. – С. 464 – 472.

4. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

5. *Hale J.K.* Critical cases for neutral functional differential equations // J. Different. Equat. – 1971. – **10**, No 1. – P. 59 – 82.

6. *Вебер В.А.* Об устойчивости в критическом случае нескольких пар чисто мнимых корней для систем с последействием // Дифференц. уравнения. – 1969. – **5**, № 9. – С. 1614 – 1625.

7. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 530 с.

8. *Осипов Ю.С.* О принципе сведения в критических случаях устойчивости движения систем с запаздыванием времени // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 5. – С. 810 - 820.

9. *Прокопьев В.П., Шиманов С.Н.* Об устойчивости в критическом случае двойного нулевого корня для систем с последействием // Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 4. – С. 453 - 462.

10. *Шиманов С.Н.* Критический случай пары чисто мнимых корней для систем с последействием // Сиб. мат. журн. – 1961. – **2**, № 3. – С. 467 – 480.

11. *Hausrath A.* Stability in the critical case of purely imaginary roots for neutral functional differential equations // J. Different. Equat. – 1973. – **13**, No 2. – P. 329 – 357.

12. *Henry D.* Linear autonomous neutral functional differential equations // J. Different. Equat. – 1974. – **15**, No 1. – P. 106 – 128.