УДК 517.9

©2015 р. І.І. Клевчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

# БІФУРКАЦІЯ ЦИКЛІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ

Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь з малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння та рівняння Хатчінсона.

We prove the existence of periodic solutions in autonomous parabolic system of differential equations with small diffusion on the circle. We consider the problem of the existence and stability of traveling waves in the equation of spin combustion and Hutchinson equation.

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, параболічних та гіперболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [1 – 5]. У цій статті досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із малою дифузією, рівняння спінового горіння та рівняння Хатчінсона. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися у працях [6 – 9] та ін.

**1. Біжучі хвилі параболічних рівнянь із малою дифузією.** Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=\varepsilon d\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}+u_2+\varepsilon(\alpha u_1-\beta u_2)+(d_0u_1-$$
$$-c_0u_2)(u_1^2+u_2^2),\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}=\varepsilon d\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-u_1+\tag{1}$$
$$+\varepsilon(\alpha u_2+\beta u_1)+(d_0u_2+c_0u_1)(u_1^2+u_2^2)$$

з періодичною умовою

$$u_1(t,x+2\pi)=u_1(t,x),$$
$$u_2(t,x+2\pi)=u_2(t,x),\tag{2}$$

де $\varepsilon$ – малий додатний параметр, $d>0$, $d_0\in\mathbb{R}$.

Перейшовши до комплексних змінних $u=u_1+iu_2$, $\bar u=u_1-iu_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-iu+\varepsilon(\alpha+i\beta)u+(d_0+ic_0)u^2\bar u.\tag{3}$$

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2). Розв'язок рівняння (3) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $u=\theta(y)$, $y=\sigma t+x$, де функція $\theta(y)$ має період $2\pi$. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy}=\varepsilon d\frac{d^2\theta}{dy^2}-i\theta+\varepsilon(\alpha+i\beta)\theta+(d_0+ic_0)\theta^2\bar\theta.$$

Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy}=\theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy}=\theta_1,\quad \sigma\theta_1=\varepsilon d\frac{d\theta_1}{dy}-i\theta+\varepsilon(\alpha+i\beta)\theta+$$
$$+(d_0+ic_0)\theta^2\bar\theta.\tag{4}$$

Інтегральний многовид системи (4) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1=-\frac{\varepsilon d}{\sigma^3}\theta-\frac{i}{\sigma}\theta+\frac{\varepsilon}{\sigma}(\alpha+i\beta)\theta+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\bar\theta+\ldots.$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy}=-\frac{\varepsilon d}{\sigma^3}\theta-\frac{i}{\sigma}\theta+\frac{\varepsilon}{\sigma}(\alpha+i\beta)\theta+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\bar\theta+\ldots\tag{5}$$

Перейшовши у рівнянні (5) до полярних координат, $w=r\exp(i\varphi)$, одержимо рівняння

$$\frac{dr}{dy}=\varepsilon\left(\frac{\alpha}{\sigma}-\frac{d}{\sigma^3}\right)r+\frac{d_0}{\sigma}r^3.\tag{6}$$

Нехай $d_0<0$ і виконується нерівність $\alpha>\dfrac{d}{\sigma^2}$. Тоді рівняння (6) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{(\alpha - \frac{d}{\sigma^2}))|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (5) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon}R_0 \exp\left(-\frac{i}{\sigma}y\right) + O(\varepsilon)$. Враховуючи, що функція $\theta$ повинна мати період $2\pi$, одержуємо $\sigma = -\frac{1}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (3) має вигляд

$$u_n = u_n(t,x) = \sqrt{\varepsilon}r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx)), \quad (7)$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha - dn^2)|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = -1 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2$, $n \in \mathbb{Z}$. Тоді періодичний розв'язок задачі (1), (2) має вигляд

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon}r_n \cos(\chi_n(\varepsilon)t + nx),$$

$$u_2 = \sqrt{\varepsilon}r_n \sin(\chi_n(\varepsilon)t + nx), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Тому правильне наступне твердження.

**Теорема 1.** *Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого $n$ виконується нерівність $\alpha > dn^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно $t$ розв'язки (8).*

**2. Стійкість періодичних розв'язків.** Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (7) рівняння (3) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon d\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - iv + \varepsilon(\alpha + i\beta)v +$$

$$+\varepsilon(d_0 + ic_0)(2r_n^2 v + w_n^2 \bar{v}), \quad (9)$$

де $w_n = r_n \exp(i(\chi_n(\varepsilon)t + nx))$, $\chi_n(\varepsilon) = -1 + \varepsilon\beta + \varepsilon c_0 r_n^2$. Зробивши в рівнянні (9) заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$, одержимо

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon(d\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha + d_0 r_n^2)w +$$

$$+(d_0 + ic_0)r_n^2(w + \overline{w}\exp(2inx))). \quad (10)$$

Розв'язок рівняння (10) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$w(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx),$$

$$\overline{w}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \quad (11)$$

Підставляючи (11) в (10) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + d_0 r_n^2)y_{k+n} - d(k+n)^2 y_{k+n} +$$

$$+(d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \quad (12)$$

Аналогічно підставляючи (11) у спряжене до (10) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + d_0 r_n^2)v_{k-n} - d(k-n)^2 v_{k-n} +$$

$$+(d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \quad (13)$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2) визначається стійкістю системи (12), (13) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. Позначимо через $\varepsilon A$ матрицю системи (12), (13) з елементами $\varepsilon a_{11}$, $\varepsilon a_{12}$, $\varepsilon a_{21}$, $\varepsilon a_{22}$. Матриця $A$ має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елеменетів матриці $A$ від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4dknc_0 r_n^2$, тобто

$$(dk^2 + \alpha - dn^2)^2(dk^2 + 2\alpha - 6dn^2) > 4dn^2 c_0^2 r_n^4, \quad (14)$$

де $r_n^2 = (dn^2 - \alpha)/d_0$.

**Теорема 2.** *Біжучі хвилі $u_n(t,x)$ задачі (1), (2) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (14) при всіх $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.*

Як приклад розглянемо рівняння (1), в якому $\beta = 0$, $c_0 = 0$, Тоді з теореми 1 випливає, що при $d_0 < 0$, $dn^2 < \alpha$ існує періодичний розв'язок $u_n = \sqrt{\varepsilon(\alpha - dn^2)|d_0|^{-1}}\begin{pmatrix} \cos(-t+nx) \\ \sin(-t+nx) \end{pmatrix}$. Згідно з теоремою 2 біжучі хвилі $u_n(t,x)$ експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли $n^2 < \frac{1}{6d}(d + 2\alpha)$.

**3. Періодичні режими рівняння спінового горіння.** Розглянемо задачу

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = \tag{15}$$

$$= 2\varepsilon \left[ \frac{\partial \xi}{\partial t} \left( 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2} \right],$$

$$\xi(t, x + 2\pi) = \xi(t, x), \tag{16}$$

де $\varepsilon$ – малий додатний параметр, $\varrho > 0$.

Задача (15), (16) еквівалентна системі

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \xi =$$

$$= 2\varepsilon \left[ p \left( 1 - \frac{4}{3} p^2 \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right], \tag{17}$$

$$\xi(t, x + 2\pi) = \xi(t, x), \quad p(t, x + 2\pi) = p(t, x).$$

Розв'язок системи (17) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $\xi = \theta_1(y)$, $p = \theta_2(y)$, $y = \sigma t + x$, де функції $\theta_1(y)$, $\theta_2(y)$ мають період $2\pi$. Тоді одержимо систему

$$\sigma \frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \sigma \frac{d\theta_2}{dy} + \theta_1 =$$

$$= 2\varepsilon \left[ \theta_2 \left( 1 - \frac{4}{3} \theta_2^2 \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2 \theta_2}{dy^2} \right].$$

Цю систему заміною $\dfrac{d\theta_2}{dy} = \theta_3$ зведемо до вигляду

$$\sigma \frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dy} = \theta_3, \quad \sigma\theta_3 + \theta_1 =$$

$$= 2\varepsilon \left[ \theta_2 \left( 1 - \frac{4}{3} \theta_2^2 \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{d\theta_3}{dy} \right]. \tag{18}$$

Інтегральний многовид системи (18) можна зобразити у вигляді

$$\theta_3 = -\frac{1}{\sigma}\theta_1 + \frac{2\varepsilon}{\sigma} \left[ \theta_2 \left( 1 - \frac{4}{3} \theta_2^2 \right) + \frac{1}{\sigma^2 \varrho^2} \theta_2 \right] +$$

$$+ O(\varepsilon^2).$$

Система рівнянь на цьому многовиді набере вигляду

$$\sigma \frac{d\theta_1}{dy} = \theta_2, \quad \frac{d\theta_2}{dy} = -\frac{1}{\sigma}\theta_1 +$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{\sigma} \left[ \theta_2 \left( 1 - \frac{4}{3} \theta_2^2 \right) + \frac{1}{\sigma^2 \varrho^2} \theta_2 \right] + O(\varepsilon^2). \tag{19}$$

Перейшовши до комплексних змінних $u = \theta_1 + i\theta_2$, $\bar{u} = \theta_1 - i\theta_2$, одержимо рівняння

$$\frac{du}{dy} = -\frac{i}{\sigma} u + \frac{\varepsilon}{\sigma} [u - \bar{u} + \frac{1}{3}(u - \bar{u})^2 -$$

$$- \frac{1}{\sigma^2 \varrho^2}(u - \bar{u})] + O(\varepsilon^2). \tag{20}$$

Зробивши у рівнянні (20) заміну $u = w + \varepsilon i \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sigma^2 \varrho^2} \right) \bar{w} + \frac{1}{6} w^3 - \frac{1}{2} w \bar{w}^2 + \frac{1}{12} \bar{w}^3 \right]$, одержимо

$$\frac{dw}{dy} = -\frac{i}{\sigma} w + \frac{\varepsilon}{\sigma} \left[ w - w^2 \bar{w} - \frac{1}{\sigma^2 \varrho^2} w \right] + O(\varepsilon^2). \tag{21}$$

Перейшовши у рівнянні (21) до полярних координат $w = r \exp(i\varphi)$, отримаємо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \left[ r - \frac{1}{\sigma^2 \varrho^2} r - r^3 \right] + O(\varepsilon^2). \tag{22}$$

Нехай виконується нерівність $\sigma^2 \varrho^2 > 1$. Тоді рівняння (22) має стаціонарний розв'язок

$$R_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{\sigma^2 \varrho^2}},$$

отже, періодичний розв'язок рівняння (20) має вигляд $u = R_0 \exp\left( -\frac{i}{\sigma} y \right) + O(\varepsilon)$. Звідси знаходимо періодичний розв'язок $\theta_1 = R_0 \cos\left(\frac{y}{\sigma}\right) + O(\varepsilon)$, $\theta_2 = -R_0 \sin\left(\frac{y}{\sigma}\right) + O(\varepsilon)$ системи (19). Враховуючи, що функції $\theta_1$ та $\theta_2$ повинні мати період $2\pi$, одержуємо $\sigma = -\frac{1}{n} + O(\varepsilon)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (15) має вигляд

$$\xi_n = \sqrt{1 - \frac{n^2}{\varrho^2}} \cos(-t + nx) + O(\varepsilon), \tag{23}$$

де $n \in \mathbb{Z}$. Тому правильне наступне твердження.

**Теорема 3.** *Нехай для деякого цілого $n$ виконується нерівність $n^2 < \varrho^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*

*задача (15), (16) має періодичні відносно $t$ розв'язки (23), де $n \in \mathbb{Z}$.*

**4. Стійкість періодичних режимів рівняння спінового горіння.** Система рівнянь у варіаціях в околі періодичного розв'язку $\xi_n = \xi_n(t,x)$, $p_n = \dfrac{\partial \xi_n(t,x)}{\partial t}$ системи (17) має вигляд

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = v_2, \quad \frac{\partial v_2}{\partial t} + v_1 =$$
$$= 2\varepsilon \left[ v_2 - 4p_n^2 v_2 + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right].$$

Перейшовши до комплексних змінних $v = v_1 + iv_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -iv + \varepsilon[v - \bar{v} - 4p_n^2(v - \bar{v}) +$$
$$+ \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 (v-\bar{v})}{\partial x^2}].$$

Зробивши заміну $v = w\exp(-it)$ і усереднивши одержане рівняння відносно $t$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon[w - 2r_n^2 w - r_n^2 \exp(2inx)\bar{w} +$$
$$+ \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}], \tag{24}$$

де $r_n = \sqrt{1 - \dfrac{n^2}{\varrho^2}}$.

Розв'язок рівняння (24) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є (11). Підставляючи (11) в (24) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[y_{k+n} - 2r_n^2 y_{k+n} - r_n^2 v_{k-n} -$$
$$- \frac{(k+n)^2}{\varrho^2} y_{k+n}]. \tag{25}$$

Аналогічно підставляючи (11) у спряжене до (24) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[v_{k-n} - 2r_n^2 v_{k-n} - r_n^2 y_{k+n} -$$
$$- \frac{(k-n)^2}{\varrho^2} v_{k-n}]. \tag{26}$$

Стійкість періодичних розв'язків рівняння спінового горіння визначається стійкістю системи (25), (26) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. Позначимо через $\varepsilon A$ матрицю системи (25), (26) з елементами $\varepsilon a_{11}$, $\varepsilon a_{12}$, $\varepsilon a_{21}$, $\varepsilon a_{22}$. Матриця $A$ має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елеменетів матриці $A$ від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості періодичного розв'язку $\xi_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $det(A) > 0$, тобто $k^2\left(k^2 + 2\varrho^2 - 6n^2\right)/\varrho^4 > 0$. Ця умова рівносильна умові

$$n^2 < \frac{1}{6}(2\varrho^2 + 1). \tag{27}$$

**Теорема 4.** *Біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ задачі (15), (16) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (27).*

**5. Періодичні режими рівняння Хатчінсона.** Розглянемо рівняння Хатчінсона з дифузією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) u(t-1,x)(1+u) \tag{28}$$

та періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t,x), \tag{29}$$

що використовується в математичній екології [8]. Тут $\varepsilon$ – малий додатний параметр, $D > 0$.

Аналогічно [11] запишемо рівняння на многовиді

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon D\Psi(0)\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 + 8\varepsilon\alpha \\ -\pi/2 & 4\pi\varepsilon\alpha \end{pmatrix} v +$$
$$+ \frac{\pi}{2}\Psi(0)[v_1 v_2 + kv_1^3 - (m+l)v_1^2 v_2 -$$
$$-2kv_1v_2^2 + mv_2^3],$$

де $\Psi(0) = 4\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ \pi \end{pmatrix}$, $\alpha = \dfrac{1}{\pi^2+4}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $k = 1/5 - 4\pi\alpha/3$, $l = 1/5 + 8\alpha/3$, $m = 8\alpha/3 - 1/5$. Перейшовши до комплексних змінних $w = v_1 + iv_2$, $\bar{w} = v_1 - iv_2$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2\varepsilon\alpha(2 + \pi i)D\frac{\partial^2 (w + \bar{w})}{\partial x^2} - \frac{\pi}{2}iw + 2\varepsilon\alpha \times$$

$$\times(\pi-2i)(w-\bar{w})+2\pi\alpha(2+\pi i)[\frac{i}{4}(\bar{w}^2-w^2)+$$
$$+\frac{k}{8}(w+\bar{w})^3-\frac{(m+l)i}{8}(w+\bar{w})(\bar{w}^2-w^2)-$$
$$-\frac{2k}{8}(w-\bar{w})(\bar{w}^2-w^2)+\frac{mi}{8}(w-\bar{w})^3]. \quad (30)$$

Перетворимо рівняння (30) за допомогою підстановки

$$w=s+\alpha(2+\pi i)(s^2+\bar{s}^2/3)+V_3(s,\bar{s}), \quad (31)$$

де $V_3$ – форма третього порядку. Перетворення (31) можна підібрати так, що рівняння для $s$ набуде вигляду

$$\frac{\partial s}{\partial t}=-\frac{\pi}{2}is+\varepsilon[(\gamma+i\delta)\frac{\partial^2(s+\overline{s})}{\partial x^2}+$$
$$+(\alpha_1+i\beta)(s-\overline{s})]+(d_0+ic_0)s^2\overline{s}, \quad (32)$$

де $\gamma=4\alpha D$, $\delta=2\pi\alpha D$, $\alpha_1=2\pi\alpha$, $\beta=-4\alpha$, $d_0=\pi\alpha(2-3\pi)/20$, $c_0=\pi\alpha(\pi+6)/20$.

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (28), (29). Розв'язок рівняння (32) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $s=\theta(y)$, $y=\sigma t+x$, де функція $\theta(y)$ має період $2\pi$. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy}=-\frac{\pi}{2}i\theta+\varepsilon[(\gamma+i\delta)\frac{d^2(\theta+\overline{\theta})}{dy^2}+$$
$$+(\alpha_1+i\beta)(\theta-\overline{\theta})]+(d_0+ic_0)\theta^2\overline{\theta}.$$

Це рівняння заміною $\frac{d\theta}{dy}=\theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy}=\theta_1, \quad \sigma\theta_1=-\frac{\pi}{2}i\theta+\varepsilon[(\gamma+i\delta)\frac{d(\theta_1+\overline{\theta}_1)}{dy}+$$
$$+(\alpha_1+i\beta)(\theta-\overline{\theta})]+(d_0+ic_0)\theta^2\overline{\theta}. \quad (33)$$

Інтегральний многовид системи (33) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1=-\frac{\pi}{2\sigma}i\theta+\frac{\varepsilon}{\sigma}[-\frac{\pi^2}{4\sigma^2}(\gamma+i\delta)(\theta+\overline{\theta})+$$
$$+(\alpha_1+i\beta)(\theta-\overline{\theta})]+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\overline{\theta}+\dots.$$

Тут в лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy}=-\frac{\pi}{2\sigma}i\theta+\frac{\varepsilon}{\sigma}[-\frac{\pi^2}{4\sigma^2}(\gamma+i\delta)(\theta+\overline{\theta})+$$
$$+(\alpha_1+i\beta)(\theta-\overline{\theta})]+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\overline{\theta}+\dots.$$

У цьому рівнянні зробимо заміну $\theta=p\exp(-\frac{\pi}{2\sigma}iy)$ і усереднимо одержане рівняння відносно $y$ [10]. Тоді одержимо автономне рівняння вигляду

$$\frac{dp}{dy}=\frac{\varepsilon}{\sigma}\left[-\frac{\pi^2}{4\sigma^2}(\gamma+i\delta)p+(\alpha_1+i\beta)p\right]+$$
$$+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}p^2\overline{p}. \quad (34)$$

Перейшовши у рівнянні (34) до полярних координат $p=r\exp(i\varphi)$, отримаємо рівняння

$$\frac{dr}{dy}=-\varepsilon\frac{\pi^2\gamma}{4\sigma^3}r+\varepsilon\frac{\alpha_1}{\sigma}r+\frac{d_0}{\sigma}r^3. \quad (35)$$

Нехай виконується нерівність $2\sigma^2>\pi D$. Тоді рівняння (35) має стаціонарний розв'язок

$$r=\sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0=\sqrt{\frac{40}{3\pi-2}\left(1-\frac{\pi D}{2\sigma^2}\right)},$$

отже, періодичний розв'язок системи (33) має вигляд $\theta=\sqrt{\varepsilon}R_0\exp\left(-\frac{\pi i}{2\sigma}y\right)+O(\varepsilon)$, $\theta_1=\frac{d\theta}{dy}$. Враховуючи, що функція $\theta$ повинна мати період $2\pi$, одержуємо $\sigma=-\frac{\pi}{2n}+O(\varepsilon)$, $n=\pm1,\pm2,\dots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (32) має вигляд

$$s_n=s_n(t,x)=\sqrt{\varepsilon}r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t+nx)), \quad (36)$$

де $r_n=\sqrt{\frac{40}{3\pi-2}\left(1-\frac{2Dn^2}{\pi}\right)}$, $\chi_n(\varepsilon)=-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\beta+\varepsilon c_0r_n^2-\varepsilon\delta n^2$. Звідси одержимо періодичний розв'язок задачі (28), (29)

$$u_n=u_n(t,x)=\sqrt{\varepsilon}r_n\cos(\chi_n(\varepsilon)t+nx). \quad (37)$$

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (36) рівняння (32) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{\pi}{2}iv+\varepsilon[(\gamma+i\delta)\frac{\partial^2(v+\overline{v})}{\partial x^2}+(\alpha_1+$$
$$+i\beta)(v-\overline{v})]+(d_0+ic_0)(2\varepsilon r_n^2v+s_n^2\overline{v}).$$

Зробивши заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$ і усереднивши одержане рівняння відносно $t$, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon[(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (\alpha_1 + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)w +$$
$$+(d_0 + ic_0)r_n^2(w + \overline{w}\exp(2inx))]. \qquad (38)$$

Розв'язок рівняння (38) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є (11) в комплексній формі. Підставляючи (11) в (38) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha_1 + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k+$$
$$+n)^2 y_{k+n} + (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \quad (39)$$

Аналогічно підставляючи (11) у спряжене до (38) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha_1 - i\delta n^2 + d_0 r_n^2)v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k-$$
$$-n)^2 v_{k-n} + (d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \quad (40)$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (28), (29) визначається стійкістю системи (39), (40) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (39), (40) зробимо заміну $y_{k+n} = z_{k+n}\exp(2i\delta kn)$, $v_{k-n} = w_{k-n}\exp(2i\delta kn)$. Тоді одержимо лінійну систему з матрицею $\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}$. Оскільки $\alpha_1 - \gamma n^2 = -d_0 r_n^2$, то матриця $A$ має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елеменетів матриці $A$ від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t, x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 - 4\gamma^2 n^2 -$$
$$-2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2. \qquad (41)$$

Тому правильне наступне твердження.

**Теорема 5.** *Нехай для деякого цілого $n$ виконується нерівність $2Dn^2 < \pi$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (28), (29) має періодичні відносно $t$ розв'язки (37), де $n \in \mathbb{Z}$. Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (41) при всіх $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.

2. *Клевчук И.И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 4. – С. 464 – 472.

3. *Клевчук І.І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 4. – С. 563 – 567.

4. *Клевчук И.И.* Бифуркация положения равновесия в системе нелинейных параболических уравнений с преобразованным аргументом // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1342 – 1351.

5. *Клевчук І.І.* Існування зліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 71 – 78.

6. *Васильева А.Б., Кащенко С.А., Колесов Ю.С., Розов Н.Х.* Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // Мат. сборник. – 1986. – **130**, № 4. – С. 488 – 499.

7. *Белан Е.П., Самойленко А.М.* Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 1. – С. 21 – 43.

8. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. – М.: Физматлит, 1995. – 336 с.

9. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. – М.: Физматлит, 2005. – 430 с.

10. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 502 с.

11. *Клевчук И.И., Фодчук В.И.* Бифуркация особых точек дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 324 – 330.